DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe A: Höhere Geodäsie — Heft Nr. 19

Ellipsoidische Parameter der Erdfigur

(1800–1950)

von

Georg Straßer

München 1957

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe A: Höhere Geodäsie — Heft Nr. 19

Ellipsoidische Parameter der Erdfigur

(1800 - 1950)

von

Georg Straßer

München 1957

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION

München 2, Arcisstraße 21.

Satz und Druck: Landesvermessungsamt Baden-Württemberg, Stuttgart.

INHALTSVERZEICHNIS

CONTENTS

„Quodque inaequalitas diametrorum Terrae facilius et certius per experimenta pendulorum deprehendi possit vel etiam per eclipses Lunae quam per arcus geographice mensuratos in meridiano."

Newton 1713

Einleitung

Eines der vornehmsten Ziele des menschlichen Wissens- und Forschungsdranges ist die Bestimmung der Figur der Erde. Nachdem die Kenntnis des Altertums von der Kugelgestalt der Erde für Jahrhunderte verloren gegangen war, wurde nach ihrer Wiederentdeckung im ausgehenden Mittelalter die Bestimmung ihrer Ausmaße Ende des 17. Jahrhunderts und vor allem im 18. und 19. Jahrhundert mit allen damals verfügbaren Mitteln vorangetrieben. Den ersten brauchbaren Beitrag lieferte Picard 1669—1670 mit seiner Messung des Meridianbogens Paris—Amiens. Er leitete aus seiner Messung den Radius einer Erdkugel ab. Newtons Erkenntnis, daß die Erde keine Kugel sein kann, sondern an den Polen abgeplattet sein muß, war dann der unmittelbare Anlaß zu den einsetzenden umfangreichen Gradmessungen. Die nun folgende Triangulation entlang des Meridians von Paris, mit der die über hundert Jahre dauernde Epoche der klassischen, französischen Gradmessungen eingeleitet wurde, sollte dazu dienen, die Newtonsche Theorie durch Messung zu beweisen. Die erste Messung von Jean Dominique und Jaques Cassini ergab jedoch eine Verkürzung des Meridianbogens von 1° Breitenunterschied gegen den Pol hin und damit ein um die große Halbachse rotierendes Ellipsoid. Der daraufhin entbrannte Streit zwischen den Anhängern Newtons und Cassinis veranlaßte die Französische Akademie, eine Messung am Äquator und eine so nah wie möglich am Pol vorzunehmen, um den Streit schlichten zu können. Die Expedition nach Peru und Lappland waren die ersten rein wissenschaftlichen Auslandsexpeditionen ohne politischen Hintergrund. Sie waren gewissermaßen schon international, da in Peru französische und spanische, in Lappland französische und schwedische Wissenschaftler vereint an einem Problem arbeiteten. Das Ergebnis war der geodätische Beweis der Newtonschen Theorie. Man setzte jetzt aber in die Qualität der Meßtechnik zur Bestimmung der Dimensionen der Erdfigur ein so großes Vertrauen, daß man diese sogar zur Ableitung eines einheitlichen Naturmaßes, des Meters, heranzog; eine wahrhaft gigantische Idee, die in der Zukunft das Vertrauen nicht ganz rechtfertigte. Im 19. Jahrhundert begannen dann Gradmessungen in der ganzen, damals zivilisierten Erde. Jede dieser Gradmessungen ergab ein weiteres Bestimmungsstück für die Erdfigur. Daneben begann man, über die ganze Erde verteilt, im großen Stil Pendelmessungen durchzuführen, aus denen man aber nicht die Größe der Erde, sondern nur die Form, nämlich die Abplattung mit Hilfe des Clairautschen Theorems unabhängig bestimmen konnte. Die Mannigfaltigkeit der Messungsergebnisse führte zu zahlreichen Berechnungen der Erddimensionen, wobei jeder Urheber meist überzeugt war, das „bestanschließende" Ellipsoid gefunden zu haben. Um diesem Ziel so nahe wie möglich zu kommen, wurden alle jeweils verfügbaren, vertrauenswürdigen Messungen ausgewertet. Da aber jedes Land sein eigenes Maßsystem hatte, mußte ein weiteres Problem gelöst werden, nämlich die Feststellung der Beziehungen zwischen den verschiedenen nationalen Maßsystemen.

Da die ersten großen Gradmessungen in Frankreich bzw. von Frankreich durchgeführt wurde, spielte das französische Maß, die Toise, dabei eine wichtige Rolle. Auf Grund eines königlichen Erlasses vom 16. Mai 1766 wurde die Peru-Toise, die 1735 von Langlois hergestellt worden war, zum Prototyp der französischen Toise erklärt. Ihre Standardtemperatur ist

$$t_0 = +13\,^\circ\mathrm{R} = +16.25\,^\circ\mathrm{C} = +61.25\,^\circ\mathrm{F}\,.$$

$$1 \text{ Toise } (t) = 6 \text{ Pariser Fuß} = 72 \text{ Pariser Zoll} = 864 \text{ Pariser Linien (PL)};$$

$$\log 864 = 2.936\,513\,7425.$$

1790 beantragte Talleyrand, damals Bischof von Autun, in der „Assemblée Constituante“ die Schaffung eines einheitlichen internationalen Maß- und Gewichtssystems und schlug Picards Idee vor, dafür die Länge des Sekundenpendels in 45° Breite zu nehmen. Ein solches Längennormal setzte aber zusätzlich die Kenntnis der Einheit von Zeit und Schwerkraft voraus. Es wurde daher am 19. März 1791 der zehnmillionste Teil der Länge des Meridianquadranten durch die Pariser Sternwarte als neue Maßeinheit angenommen. Diese Länge sollte mittels des Meridianbogens zwischen Barcelona und Dünkirchen abgeleitet werden, mit dessen Messung Delambre und Méchain beauftragt wurden.

Wegen der Dringlichkeit der Angelegenheit wurde aus älteren Messungen und deren vorläufigen Auswertung durch Erlaß vom 1. August 1793 festgesetzt:

$$1 \text{ „mètre provisoire“ bei } 10\,^\circ\mathrm{C} = 443{,}44 \text{ PL der Perutoise bei } 13\,^\circ\mathrm{R}$$

$$(\log = 2.646\,834\,8656).$$

Dieser aufgerundete Wert beruhte auf einem Meridianquadranten von 5 132 430 t Länge. Die Genauigkeit wurde von Lacaille mit etwa 1 100 t abgeschätzt. Außerdem beschloß die Versammlung in der gleichen Sitzung die Anfertigung von vier Endmaßstäben aus Messing, die bei 10 °C 443,44 PL der Perutoise bei 13 °R enthalten sollen. Der Maßstab, der dieser Bedingung am besten genügte, sollte zum Prototyp des „mètre provisoire“ erklärt werden. Beim Vergleich der vier Normale M, M', M'' und M''' untereinander und mit zwei eisernen Toisen fand Borda, daß M' das gewünschte Maß besaß. M' wurde nach Bescheinigung durch Borda und Brisson am 6. Juli 1795 dem „Comité d'instruction publique“ übergeben und als „Mètre égal à la dixmillionième partie de la distance du pôle à l'équateur“ erklärt. Dieses Normal befindet sich noch heute in Paris beim „Conservatoire des Arts et Métiers.“

Inzwischen wurde eine „Commission générale des poids et mesures“ mit der Prüfung und Auswertung der neuen Beobachtungen beauftragt. Der neue französische Meridian, der von Méchain und Delambre zwischen Dünkirchen und Montjouy von 1792 bis 1798 beobachtet worden war, ergab jedoch einen viel zu großen Abplattungswert, nämlich $\alpha = 1{:}150$ aus der Berechnung von Laplace[1]) und $\alpha = 1{:}148{,}5$ aus der von Legendre. Es wurde daher beschlossen, die Abplattung aus dem Bouguerschen Ergebnis des Peru-Bogens und aus dem französischen Meridian zu ermitteln, wobei bei letzterem nur die astronomischen Beobachtungen auf den beiden Endpunkten verwendet werden sollten, um den Einfluß von lokalen Lotstörungen zu vermindern. Mit dieser Abplattung, $\alpha = 1{:}334{,}29$, wurde dann ein Mittelwert des Meridianquadranten, und zwar jetzt nur aus den vier Teilbogen des französischen Meridians, Dünkirchen—Paris Panthéon, Dünkirchen—Evaux, Dünkirchen—Carcassonne und Dünkirchen—Montjouy berechnet. Am 30. April 1799 berichtete van Swinden der „Commission Générale“ folgendes Ergebnis:

[1]) Laplace, P. S.: „Mécanique Celèste“, Bd. II, Buch III, Paris 1799, § 41.

$$Q = 5\,130\,740\,t = 4\,432\,959\,360\ \text{PL} = 10\,000\,000\ \text{m},$$

woraus sich ergibt,

$$1\ \text{„mètre vrai et définitif"} = 443{,}295\,9360\ \text{PL der Perutoise bei } 13\,^\circ\text{R}$$

und

$$1\ \text{Toise} = \frac{864}{443{,}295\,9360} = 1{,}949\,036\,5912\ \text{mètres vrais et définitifs}$$
$$(\log = 0{,}289\,819\,9926).$$

Dieses Verhältnis wurde mit „rapport légal de la Toise au Mètre" in Frankreich bezeichnet und wird heute noch dort verwendet[2]).

Auf Antrag Bordas wurde dann 1795 beschlossen, einen Strichmaßstab als endgültigen Meterprototyp anzufertigen. Nach dem Tod von Borda 1799 wurden jedoch zwölf eiserne[3]) und zwei Platin-Endmaßstäbe durch Lenoir hergestellt. Sie wurden untereinander und jeweils zu viert mit einem Maßstab von zwei Toisen Länge mittels eines geeichten Zwischenstückes von 45,18 PL verglichen. Dabei wurde gefunden, daß das Platin-Meter Nr. 2 die gewünschte Länge bei 0 °C hatte. Nr. 2 wurde daher am 22. Juni 1799 in den Archiven hinterlegt. Die Genauigkeit der Eichung auf dem verbesserten Lenoir-Komparator wurde mit 1/200 PL = 0,01 mm angegeben, d. h. daß dieses genaue, festgesetzte Verhältnis mit den damaligen metrologischen Mitteln gar nicht reproduziert werden konnte.

Das Verhältnis zwischen Toise und Meter wurde später aufgerundet, und am 10. Dezember 1799 wurde durch Gesetz festgelegt

$$1\ \text{mètre} = 443{,}296\ \text{PL der Perutoise bei } 13\,^\circ\text{R}$$
$$(\log = 2.646\,693\,8125),$$

bzw.

$$1\ \text{Toise} = \frac{864}{443{,}296} = 1{,}949\,036\,3098\ \text{m}$$
$$(\log = 0.289\,819\,9299)$$

Dieser Wert entspricht einem Erdquadranten von 5 130 740,7 t. Es ist interessant zu wissen, daß dieses Verhältnis in allen übrigen Ländern außer Frankreich legal angewandt wurde. Da das Archivmeter bereits sechs Monate vorher geeicht und hinterlegt wurde, repräsentiert es *theoretisch* das genaue und nicht das aufgerundete Verhältnis.

Die Perutoise (P) diente aber de facto weiterhin als „Prototyp der metrischen Einheit". Anfang des 19. Jahrhundert wurden zahlreiche Kopien der Perutoise angefertigt, geeicht und verteilt. Da die Perutoise bis zu ihrer Wiederentdeckung 1854 lange Zeit vergessen war, dienten diese Kopien als Gebrauchsnormale bis zur Schaffung des Internationalen Meters.

Nach Überwindung anfänglicher Schwierigkeiten in der Herstellung der von der Internationalen Meterkonvention 1875 geforderten reinen Platin-Iridium-Legierung wurde der Maßstab I_2 (Schmelze Matthey, London 1879) endgültig geteilt. Benoît und G. Tresca verglichen dann vom 1. 9. 1881 bis 22. 2. 1882 I_2 mit dem Archivmeter und fanden seine Länge um 6,21 μ (abgerundet 6 μ) bei 0 °C zu lang. Am 26. 4. 1882 wurde dieser Maßstab offiziell

2) Benoît, J. R.: Études sur la Toise de Bessel, la Toise No. 9 du Bureau Topografique Royal Prussien et la Toise du Pérou." C. R. AGI. in Firenze 1891, Berlin 1892, S. 146.

3) Einer dieser eisernen Maßstäbe wurde von dem Komiteemitglied Tralles dem Schweizer Hassler geschenkt. Hassler nahm ihn mit nach USA und übergab ihn der American Philosophical Society. Dieser Maßstab ist heute als „Committee Metre" im Archiv der USC&GS, Washington.

BIPM übergeben und galt mit dem abgerundeten Wert als „Étalon International Provisoire“. Von diesem Tag an verlor das Archivmeter seine Vorrangstellung als Normal des metrischen Systems, das es de jure seit 22. 6. 1799 innehatte. I_2 übte seine vorübergehende Funktion bis 1889 aus, als es durch den internationalen Prototyp „𝔐“ (Nr. 6 der angefertigten 30 Normale) abgelöst wurde. 𝔐 wurde jedoch nur noch mit I_2 und nicht mehr mit dem Archivmeter verglichen.

Das alte Maßsystem wurde dann in den neunziger Jahren mit dem internationalen System verbunden, als Benoît im Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) in Breteuil einige nationale Maßnormale eichte[4]). Die Eichungen der wiedergefundenen Perutoise als dem wahren Prototyp des alten Systems mit dem internationalen 2-m-Gebrauchsnormal „E“ in den Jahren 1887, 1890 und 1891 ergaben leider keine befriedigenden Ergebnisse. Die Beziehung zwischen dem alten und dem internationalen System kann also zum Teil nur über die verschiedenen früheren Vergleichungen der nationalen Gebrauchsnormale untereinander hergestellt werden. Die Bemühungen, die genauen Beziehungen durch diese relativen Eichungen zu klären, scheinen aber mehr oder minder erfolglos zu sein, so daß die Beziehungen in den meisten Fällen ungenau bleiben.

Die Genauigkeit der Vergleiche um 1800 wird mit 1/150 bis 1/300 PL, d. i. etwa 1:200 000 in der Toise, von zeitgenössischen Autoren angegeben (s. Delambre, „Base du système...“, Bd. III, S. 412 und Struve, W.: „Arc du Méridien...,“ Bd. I, S. LXIII). Die modernen Eichungen des BIPM[4]) zeigen aber Abweichungen in den alten Normalmaßen, die die angegebene Genauigkeit beträchtlich übersteigen. Bessels Toise hat z. B. einen um 1:75 000 zu kleinen Wert. Struves Doppeltoise N, deren Länge von Struve über seine Fortin-Toise abgeleitet wurde, ist um 1:64 000 zu kurz. Beide Bezugsmaße wurden ursprünglich von Arago geeicht, so daß man einen systematischen Eichfehler vermuten darf. Das französische geodätische Normalmaß dagegen, Bordas Module Nr. 1, stimmt mit 1:750 000 sehr gut mit der legalen Beziehung überein. Daraus ergibt sich, daß die Landesnetze, deren Maßstab auf einem dieser Normalmaße beruht, nach Umwandlung ihrer Seitenlängen mittels des legalen Verhältnisses (1 t = 1,949 036 59 m bzw. 1,949 036 31 m) Maßstabsdifferenzen aufzeigen, die jeweils dem systematischen Eichfehler der Landesnormalmaße entsprechen.

Die ausgedehnten internationalen Maßvergleiche durch Struve 1852/53 und vor allem durch Clarke 1863—1870 hatten bereits eine höhere innere Genauigkeit (etwa 1:1 000 000). Aber infolge Fehlens eines allgemein anerkannten, modernen Standards können auch diese Eichungen nur mittels der alten klassischen Toisen- bzw. Meternormalmaße aufeinander bezogen werden. Ihre innere Genauigkeit wird wertlos in dem Augenblick, wo die Beziehung zwischen Meter, Yard oder Toise berechnet wird; denn diese Beziehungen sind mit der Unsicherheit der Eichungen der alten Normale behaftet. Clarke konnte allerdings bei seiner Ausgleichung in Gruppen das Meter-Yard-Verhältnis, das auf den Baumann-Toisen Nr. 10 und 11 und der Struveschen Doppeltoise N' beruht, auf 1:95 000 verbessern.

Die britische Regierung erwarb sich ein großes Verdienst, als sie 27 Yard-Normalmaße im Jahre 1855 an die verschiedenen Länder verteilte[5]). Den Anlaß zur Herstellung und Eichung dieser Normalmaße gab die Wiederherstellung des beim Brand des Parlamentsgebäudes 1834 vernichteten „Imperial Standard Yard 1760“. Es wurde aber damals die Ge-

[4]) Fighiera, R.: „Le système métrique décimal“, Paris 1930, S. 151.

[5]) Airy, G. B.: „Account of the Construction of the New National Standard of Length and of its principal copies“, Phil. Trans. Vol. 147, London 1858, S. 621—702.

legenheit, die lokalen Maßsysteme mittels eines allgemein verteilten, modernen Normalmaßes untereinander in Beziehung zu bringen, anscheinend nicht genützt; wenigstens können keine entsprechenden Hinweise in den nationalen Veröffentlichungen gefunden werden. Eine kürzliche Untersuchung der verschiedenen Vergleiche der Standards O_1 und OI_1 des Ordnance Survey mit anderen Standards[6]) ergab nun leider den begründeten Verdacht, daß sich der Imperial Standard Yard von 1855 in den letzten 100 Jahren stetig verkürzt hat, und zwar um etwa 1:286 000. Dieser Umstand macht die Verwendung aller Vergleiche mit dem Imperial Standard Yard für den Übergang innerhalb der alten nationalen Maßeinheiten illusorisch. Die einzige, wenn auch indirekte Möglichkeit bietet sich in den zwei Standards des Ordnance Survey, deren Maßhaltigkeit durch die Arbeit von J. S. Clark bewiesen ist[6]).

Dank Bessels, Struves und Clarks Maßvergleichen sind wir einigermaßen in der Lage, die älteren Landesnetze oder wenigstens Teile davon in Meter überzuführen. Ein ausgezeichnetes Beispiel eines solchen Unternehmens ist Helmerts Europäische Längengradmessung in 52° Breite.

Es ist aber kaum möglich, die Maßeinheit von Dimensionen der Erdfigur eindeutig zu definieren, die vor Clarkes umfangreichen Eichungen 1863—1870 berechnet wurden. Diese Werte wurden von Gradmessungen, die den verschiedensten Maßsystemen angehörten, abgeleitet. Die Beziehungen dieser Maßsysteme waren damals nicht bzw. nur ungenügend bekannt und können auch heute nicht mehr eindeutig hergestellt werden. 1837 bzw. 1841 hat z. B. Bessel 30,6% der in seiner Auswertung benützten Gesamtamplitude von Meridianbogen dem französischen System (Module Nr. 1, 1:750000) entnommen, 34,7% dem damals noch fehlerhaften, nicht untersuchten indischen System, 16,0% vom russischen System (Doppeltoise N, 1:64 000), 10,0% vom deutschen bzw. preußischen System (Besseltoise, 1:75000), 5,6% vom englischen System (Roys Maßstab) und 8,7% von anderen Systemen. Niemand wird daher die genaue metrische Beziehung dieser „kollektiven" Toise, in der Bessel seine Dimensionen ausdrückte, angeben können. Auf keinen Fall sind es Toisen, die nur auf der Länge der Besseltoise und deren Eichwert (1:75 000) beruhen. Soweit so ein Ellipsoid mit alten Dimensionen als Referenzfläche für die Berechnung von Landesnetzen, die auf einem bekannten, einheitlichen Maßstab aufgebaut sind, benutzt wurde oder noch wird, ist seine Maßeinheit in der des Landes zu nehmen; z. B. Bessels Dimensionen in Deutschland in „Metern der Landesaufnahme" (1:75 000) oder Clarks metrische Dimensionen 1878/80 in Frankreich in (internationalen) Metern, obwohl das Clarksche Meter etwa um 1:95 000 davon abweicht. Im allgemeinen Fall erscheint es zweckmäßig, die Maßeinheit von Dimensionen, die aus den alten Gradmessungen abgeleitet sind, als in der neuen metrischen Einheit gegeben zu betrachten oder, soweit sie in nichtmetrischen Einheiten gegeben sind, diese mittels der neuesten Beziehung umzuwandeln, wenn eindeutige Angaben fehlen. Ihre Genauigkeit liegt aber höchstens bei 1:100 000. Dies ist insofern nicht schwerwiegend, als der mittlere Fehler ihrer Bestimmung, wie ihn die Autoren selbst angeben, meist größer als der der Maßstabsbeziehung ist. Bei Verwendung als Referenzellipsoid ist dagegen die Maßeinheit seiner Dimensionen immer zu definieren. Die Bezeichnung „legales Meter" allein ist **nicht** eindeutig, denn sie hat lediglich lokale, nationale Bedeutung. Das legale Meter ist in jedem Land verschieden. Seine Bezeichnung wird in dieser Arbeit nur mit dem Zusatz des Landes oder Schöpfers angewandt; z. B. bei Clarke nach 1866.

[6]) Clark, J. S.: „Re-measurement of the old 10 ft length standards O_1 and OI_1 of the Ordnance Survey, and some notes on the relative stability of certain standards of length", E.S.R. Vol. 12, No. 90, S. 166—174, London 1953.

Die bisher übliche Bestimmung eines mittleren Erdellipsoides als ein bestanschließendes Umdrehungsellipsoid für die ganze Erde, ist zu einem gewissen Abschluß oder besser zum Stillstand gekommen. Bevor nicht ausreichende und gleichmäßig verteilte Messungen, auch auf den riesigen Meeresflächen, vorliegen, wird eine merkliche, hypothesenfreie Verbesserung der jetzt vorliegenden modernen Erddimensionen kaum zu erwarten sein. Das Ziel der Geodäsie ist heute die Bestimmung des Geoids. Zur leichteren Zusammenfassung oder Gegenüberstellung einzelner Geoidstücke sind sie zweckmäßig auf eine einheitliche Referenzfläche zu beziehen, die in dem Internationalen Ellipsoid mit hinreichender Annäherung gegeben ist. Die Einführung „besser anschließender" Ellipsoide, wie wir sie z. Zt. in der allgemeinen Einführung des Krassowsky-Ellipsoids in der UdSSR und in ganz Osteuropa beobachten, ist für eine internationale Zusammenarbeit nicht gerade fördernd, weil sie uns dem Ziel nicht näher bringt. Schon 1891 stellt Hammer fest[7]: „... es ist nicht mehr einzige Hauptaufgabe der Erdmessung, die Elemente eines Ellipsoides zu berechnen, welche allen auf der Erdoberfläche ausgeführten großen geodätisch-astronomischen und physikalischen Messungen möglichst gerecht wird, indessen es sich vielmehr darum handelt, die Abweichungen der tatsächlich vorhandenen mathematischen Erdgestalt, des Geoids, von einem Referenzellipsoid — streng genommen für eine bestimmte Epoche — zu ermitteln." Der Zeitpunkt der Änderung in der Problemstellung rechtfertigt einen Rückblick auf die umfangreichen Arbeiten zur Bestimmung der Erddimensionen und deren Zusammenfassung.

Die ältesten Berechnungen wurden über zwei verschiedene Meridianbogen oder zwei aufeinanderfolgende Bogenstücke durchgeführt. Boscovich benützte dann 1755 schon fünf verschiedene Bogen, wobei er wegen der Überbestimmung des Problems bereits eine Art Ausgleichung machte, die auch noch von Laplace 1799 und Lindenau 1806 angewandt wurde. 1819 führte Walbeck die Methode der kleinsten Quadrate bei der Ableitung der Erddimensionen aus mehreren Meridianbogen ein. Da er aber nur die astronomischen Beobachtungen auf den Endpunkten der Bogen berücksichtigte, veranlaßte C. F. Gauß 1829 E. Schmidt, die Ausgleichung unter Berücksichtigung aller astronomischen Stationen zu wiederholen. Die erste Auswertung dieser Art, die dann ein halbes Jahrhundert unangefochten Gültigkeit hatte, wurde 1837/41 von Bessel durchgeführt. Clarke berechnete noch 1856 seine ersten Dimensionen nach der Methode Gauß-Bessel. Zur gleichen Zeit versuchte er, aus dem flächenhaften englischen Netz nach topographischer Reduktion der astronomischen Beobachtungen ein bestanschließendes Ellipsoid abzuleiten. Clarke erkannte außerdem, daß mit der Verwendung verschiedenster Messungen auch die Frage des einheitlichen Maßstabs gelöst werden mußte. Er verglich daher in den Jahren 1863—1870 zahlreiche nationale Maßnormale und berücksichtigte die Ergebnisse bei der Berechnung seiner Dimensionen ab 1866. Die Maßeinheit seiner Dimensionen ist also im Gegensatz zu denen, die früher berechnet wurden, sicher. 1878 entwickelte Clarke einen eigenen Ansatz, wobei er auch zwei Parallelbogen in die Ausgleichung einführte.

1G

Neben der strengen Ausgleichungsmethode nach Walbeck, Gauß, Schmidt, Bessel und Clarke fand auch die Kombinationsmethode bis in die 70er Jahre viele Anhänger. Dabei wird jeder Bogen oder auch Teilbogen mit jedem anderen zur Berechnung der Ellipsoidelemente kombiniert und dann das Mittel aus allen Kombinationen angehalten. Die typischen Vertreter sind Airy, Everest, Schubert und Pratt. Das erste dreiachsige Ellipsoid wurde, durch die Vorarbeiten Lindenaus und Pauckers angeregt, 1859 von Schubert aus der Kombination verschiedener Bogen berechnet. Die strenge Ableitung mittels der Methode der kleinsten Quadrate löste Clarke 1866.

[7]) Hammer, E.: „Zur Abbildung des Erdellipsoids." ZfV, Stuttgart 1891, S. 609—617.

Eine neue Entwicklung bahnte sich an, nachdem Helmert 1886 seine grundlegende Arbeit über die Lotabweichungsausgleichung veröffentlicht hatte. Die erste Anwendung von topographisch-isostatisch reduzierten Lotabweichungen zur Ableitung der Erddimensionen führte Hayford 1906/09 durch, als er das große Netz der USA auswertete. Seine Dimensionen wurden dann 1924 als internationale Referenzfigur empfohlen. Heiskanen führte 1926 die gleiche Berechnung für das gesamte europäische Material durch. Das Ergebnis war nicht ganz eindeutig. Es zeigt sich, daß die isostatische Reduktion die lokalen und regionalen systematischen Einflüsse nicht immer beseitigt und daß Hayford bei seiner Ableitung aus dem amerikanischen Material günstige Verhältnisse vorgefunden hatte.

Die Zusammenfassung von durch systematische Lotabweichungen verfälschten Meßwerten in einer Gesamtausgleichung, auch wenn durch isostatische Reduktion ein Teil dieser systematischen Einflüsse — jedoch nur unter mehr oder minder hypothetischen Annahmen — kompensiert werden, ist fehlertheoretisch wegen der Korrelation über ausgedehnte Gebiete hin kaum zu vertreten. Helmert schlägt daher vor, aus größeren Gradmessungen oder Netzkomplexen einzelne Elemente der Erddimensionen abzuleiten, wobei je nach dem Fall das eine oder andere Element aus anderen Auswertungen oder Messungen übernommen wird, wie z. B. die Abplattung aus Schweremessungen. Nach Diskussion solcher Einzelergebnisse erfolgte nach einer Fehlerabschätzung a priori die Berechnung der wahrscheinlichsten Erddimensionen. So entstanden seine Elemente von 1906/07 und 1913. Auch Heiskanen kehrte 1926 zu diesem Verfahren zurück, nachdem die Gesamtausgleichung kein plausibles Ergebnis versprach. Jeffreys brachte diese Methode, die man vielleicht mit „moderner Kombinationsmethode" bezeichnen kann, in seinen Arbeiten von 1941, 1943 und 1948 zu einem vollendeten Abschluß. Er lehnte übrigens die isostatische Reduktion ab und verwendete nur die Freiluftreduktion.

Eine Methode, die bereits das Problem der Bestimmung des Geoids einschließt, besteht darin, durch Ausgleichung von Geoiddaten bzw. Geoidhöhen aus astronomischen Nivellements mit Hilfe der Formeln von de Graaf-Hunter wahrscheinlichste Elemente des Erdellipsoids abzuleiten. Entsprechende Arbeiten wurden 1939 von Dubovsky und 1953 von Lieberman durchgeführt. Einen anderen Weg beschritt 1947/49 Ledersteger mit seiner Methode der Partialsysteme, die er 1951 durch Kopplung mit der geoidischen Methode erweiterte. Sie stellt eine elegante Lösung dar, aus heterogenen und nur unregelmäßig über die Erde verteilten Beobachtungsergebnissen einen wahrscheinlichsten Wert der Halbachsen zu finden.

Die letzten obengenannten astronomisch-geodätischen Methoden verwenden bereits Elemente oder Beobachtungen aus der Gravimetrie. Gravimetrische Messungen bzw. Pendelbeobachtungen werden systematisch seit 1800 ausgeführt. Die meisten dieser Pendelmessungen, die schon frühzeitig über die ganze Erde verstreut waren, wurden auf den Entdeckungsfahrten von Seeoffizieren in Küstengegenden und auf Inseln gemacht. Ihre Auswertung mit Hilfe des Clairautschen Theorems zeigt jedoch eine viel zu große Abplattung auf Grund des Einflusses der großen Anomalien dieser Küsten- und Inselstationen. Es ist Helmerts Verdienst, dies erkannt und gleichzeitig bei seiner Auswertung berücksichtigt zu haben.

Die dritte Methode, Elemente für die Erdfigur abzuleiten, ist die astronomische Methode, die ebenfalls um 1800 begann, als Laplace die Abplattung aus den Ergebnissen der Mondbeobachtungen berechnete. Aus der Präzessionskonstanten läßt sich die Abplattung mit sehr hoher Genauigkeit ermitteln, wobei aber gewisse Hypothesen über die Dichteverteilung von der Oberfläche bis zum Erdmittelpunkt gemacht werden müssen. Helmert hatte

1884 versucht, aus der Mondparallaxe die große Halbachse abzuleiten. Die bedeutendsten Arbeiten auf astronomischem Gebiet stammen von de Sitter. Die modernsten Arbeiten sind die von Jeffreys 1948 und O'Keefe-Anderson 1952.

Zusammenfassend kann man historisch folgende Gruppen von Bestimmungsmethoden unterscheiden.

I. Astronomisch-geodätische Methoden

1) Bogenmethode (relative Lotabweichungsausgleichung)
2) Flächenmethode (relative Lotabweichungsausgleichung)
3) moderne Kombinationsmethode
4) Methode der Partialsysteme

II. Gravimetrische Methoden

1) Über das erweiterte Clairautsche Theorem
2) Über das modifizierte Stokessche Integral.

III. Geoidische Methode (absolute Lotabweichungsausgleichung)

IV. Astronomische Methoden

1) Über die Präzessionskonstante
2) Über die Mondparallaxe
3) Über die Störungen der Mondbahn

V. Kombinierte Methoden.

Als Beispiel für die letzte Methode können die Arbeiten von Harkness 1891, von Jeffreys 1948 und von Ledersteger 1951 gelten.

Von den Elementen der Erddimensionen eignet sich vielleicht nur die Abplattung für eine Gegenüberstellung, da diese am wenigsten durch die Wahl und Unsicherheit der Beobachtungsdaten beeinflußt wird. In den Tabellen S. 88—91 sind 120 bzw. 136 Werte zusammengestellt, deren Mittelwert 1:297,734 bzw. 1:296,198 gibt. In Tabelle S. 91 sind die aus Schweremessungen hervorgegangenen 39 Werte aufgeführt, deren Mittelwert 1:294,667 ist. Läßt man aber die Werte vor Helmert 1884 wegen ihrer Störung durch Anomalien der Insel- und Küstenstationen weg, dann geben die restlichen 20 Werte im Mittel 1:297,313. Das Mittel der astronomisch bestimmten Abplattung aus 16 Werten, bzw. 12 ab 1884, ergibt 1:297,752 bzw. 1:296,953. Im Diagramm S. 95 sieht man den Einfluß des peruanischen und französischen Bogens, die zusammen eine zu kleine Abplattung ergaben. Dagegen zeigt sich eine deutliche Zunahme der Abplattung durch die Verarbeitung der Pendelmessungen an der Küste bzw. durch Hereinnahme der älteren indischen Bogenmessungen. Um 1880, 16 Jahre nach Baeyers Gründung der „Mitteleuropäischen Gradmessung" mit ihrer festen Programmstellung pendeln die Werte meist nur noch zwischen 1:296 und 1:299. Dieses Pendeln bestätigt die von H. Poincaré 1888 angestellte theoretische Untersuchung, daß die Grenzwerte der Abplattung 1:296 und 1:300 sind, wenn die Dichteverteilung innerhalb der Erde eine Funktion sein soll, die kontinuierlich von der Oberfläche zum Mittelpunkt anwächst. Bemerkenswert ist auch das plötzliche Anwachsen der Länge der großen Halbachse ab Paucker 1853. Während vor ihm die große Halbachse im Maximum einmal bei Airy 6 377,56 km erreicht, liegt ihre Länge nunmehr immer über 6 377,8 km. Die wenigen Ausnahmen sind durch Annahmen oder lokale Verhältnisse bedingt. Paucker selbst hat zwar noch die gleichen Gradmessungen wie Bessel ausgewertet; ab Clarke 1856 aber kann es der Einfluß der Verwendung der inzwischen fertiggestellten großen Gradmessungen auf der britischen Insel, in Rußland und Indien sein.

Die Aufstellung der Daten der dreiachsigen Figuren, S. 92, lassen kaum eine systematische Entwicklung erkennen. Die Beobachtungsdaten, die augenblicklich zur Verfügung stehen, sind so unvollständig über die Erde verteilt, daß sie heute noch keinen eindeutigen Schluß auf eine Dreiachsigkeit des mittleren Erdellipsoids zulassen.

Meine Absicht war, folgende Informationen zu geben:

Dimensionen in der Originalmaßeinheit,
benutztes Messungsmaterial,
Originalveröffentlichung,
Tafelwerke,
Länder, in denen diese Dimensionen als Referenzfläche benutzt wurden,
zusammenfassende Bemerkungen und verbindende Hinweise.

Ich begann mit der Sammlung 1942, wurde aber dann durch die Kriegsereignisse und Nachkriegsjahre bis 1948 gehindert, das Quellenstudium fortzusetzen. Ein dreijähriger Aufenthalt in Australien, 1951—1954, bot mir Gelegenheit, die englische Literatur einzusehen. Dort entstand auch das erste Manuskript. Nach meiner Rückkehr mußte ich leider feststellen, daß der Krieg in den älteren Beständen der Bibliotheken große Lücken gerissen hat, so daß es mir nicht immer möglich war, das Originalwerk einzusehen.

München, August 1956.

The Dimensions of the Figure of the Earth
from 1800 to 1950.

Introduction

One of the most prominent targets of the human thirst for knowledge and research has been the determination of the figure of the earth. As the knowledge of the antique of the spherical shape of the earth had been lost for many centuries, the determination of her elements was pushed ahead after its rediscovery at the outgoing middle age, starting at the end of the 17th century chiefly in the 18th and 19th century. The first serious attempt was made by Picard by measuring the distance between Paris and Amiens in 1669—1670. He computed the radius of the earth from his results. Newton's theory, that the earth could not be a sphere but it had to be flattened at its poles, had been the starting point for the beginning of extensive arc measurements. The following retriangulation and extension of the meridian of Paris started the period of the classical, French arc measurements lasting over a hundred years and aimed at proving Newton's theory by measurements. Jean Dominique and Jaques Cassini's efforts resulted in a decrease in length of the arc of meridian of 1° amplitude towards the pole and thus in a prolate spheroid.

The fight now starting between the Newtonians and the Cassinians persuaded the French Academy to undertake one measurement at the equator and one at the pole as near as possible, in order to settle the fight. The expeditions to Peru and Lapland had been the first pure scientific expeditions without any political background. They had also been the first international ones, as in Peru, French and Spanish scientists and in Lapland, French and Swedish scientists cooperated in the solution of such a difficult task. This result was the geodetic proof of Newton's theory.

The scientists had been so confident now in the quality of the technique of measuring the dimensions of the figure of the earth that they used this method to deduce a uniform natural scale, the metre, and they abandoned Picards's idea of taking the length of the pendulum striking seconds at the parallel of 45° as a length standard. Really a gigantic idea which did not wholly justify the confidence in the future.

In the 19th century, arc measurements started in the whole civilized world. Each of those arc measurements contributed a new element for determining the figure of the earth. Besides that, a great number of pendulum observations were made all over the globe. These served for deducing the shape but not the size of the earth, i. e. the value of flattening independently. The variety of the observed values resulted in numerous calculations of the dimensions of spheroids, the single initiators of which being convinced that his alone was the best fitting one.

In order to deduce elements of a spheroid „representing best" the earth, as many arcs as possible had been evaluated. But nearly every country had its own system of measures; thus, the problem, to know the relation between them, started with the problem of the figure of the earth. As the first great arc measurements had been made in France, the French measure, the Toise, plays an important role.

According to a Royal Act of the 16 th of May, 1766, the Peru Toise (Toise du Pérou) made by Langlois in 1735 was declared prototype of the French Toise, the standard temperature being

$$t_0 = +13\,^\circ\mathrm{R} = +16.25\,^\circ\mathrm{C} = +61.25\,^\circ\mathrm{F}.$$

$$1 \text{ toise} = 6 \text{ Parisian feet} = 72 \text{ Parisian inches} = 864 \text{ Parisian lines (PL)};$$
$$\log 864 = 2.936\,513\,7425.$$

In 1790 Talleyrand, then Bishop of Autun, motioned the creation of a uniform measure and weight in the „Assemblée constituante" and suggested Picard's idea to take the length of the pendulum striking seconds in 45° latitude. But such a length standard involved further units, as those of time and gravity, both strangers to the unit of length. Therefore the ten-millionth part of the length of the earth's quadrant of the meridian through the Observatory of Paris was adopted as the new unit on the 19 th of March, 1791. That length should be derived from the meridional arc between Barcelona and Dunkirk. Delambre and Méchain had been charged with the new observations.

Based on previous observations and preliminary computations, it was declared by an act of the assembly on the lst of August, 1793

$$1 \text{ „mètre provisoire" at } 10\,^\circ\mathrm{C} = 443{,}44 \text{ PL of the Peru Toise at } 13\,^\circ\mathrm{R}$$
$$(\log 443{,}44 = 2.646\,834\,8656).$$

That value (rounded off) corresponded to an earth quadrant of 5 132 430 t and Lacaille estimated its accuracy within 1100 t. Further, it was resolved at the same session to construct four brass end standards, containing at 10 °C 443,44 PL of the Peru Toise at 13 °R. The best fitting standard should become the prototype of the „Mètre Provisoire". When comparing the four standards M, M', M'' and M''' with another and with two iron toises, it was found that M' satisfied the condition best. M' had been forwarded to the „Comité d'instruction publique" and declared as „Mètre égal a la dix-millionième partie de la distance du pôle à l'équateur" on the 6 th of July, 1795, verified by Borda and Brisson. That standard is still in Paris with the „Conservatoire des Arts et Métiers".

Meanwhile, a „Commission générale des poids et mesures" had been charged to check and evaluate the new observational data. The new French arc observed by Méchain-Delambre between Dunkirk and Montjouy resulted in a flattening far too large, $\alpha = 1{:}150$ evaluated by Laplace and $\alpha = 1{:}148{,}5$ by Legendre. It was therefore decided to deduce the flattening value from the Peruvian arc, as observed by Bouguer, and from the French arc, but here considering only the astronomical observations at the terminals in order to lessen the influence of local systematic errors at the five stations of the French arc. With this flattening, $\alpha = 1{:}334{,}29$, a mean value of the earth's quadrant had been evaluated only from the 4 subdivisions of the French arc, Dunkirk—Paris Panthéon, Dunkirk—Evaux, Dunkirk—Carcassonne and Dunkirk—Montjouy. Van Swinden reported the result to the General Commission on the 30 th of April, 1799:

$$Q = 5\,130\,740 \text{ t} = 4\,432\,959\,360 \text{ PL} = 10\,000\,000 \text{ m},$$

whence

$$1 \text{ „mètre vrai et définitif"} = 443.295\,9360 \text{ PL of the Peru Toise at } 13\,^\circ\text{R}$$

and

$$1 \text{ t} = \frac{864}{443.295\,9360} = 1.949\,036\,5912 \text{ mètres vrais et définitifs}$$
$$(\log = 0.289\,819\,9926).$$

This relation is called „rapport légal de la Toise au Mètre" in France and is still used there[1]).

In 1795, motioned by Borda, it was resolved to have a line standard as the final metre prototype. But after Borda's death in 1799, twelve iron[2]) and two platinum end standards were made by Lenoir. They were compared with another and four of them grouped together with a double toise standard by means of a calibrated inset of 45.18 PL. Platinum Metre No. 2 was found to have the correct length at the standard temperature of $0\,^\circ\text{C} = 32\,^\circ\text{F}$. It was therefore deposited at the Archives on the 22 nd of June, 1799. The accuracy of the calibration on Lenoir's improved comparator is given to 1/200 PL = 0.01 mm, that means, that the exact relation above could not have been reproduced perfectly by the metrological means of that era.

The exact relation between toise and metre was rounded off later and on the 10th of December, 1799, it was declared by law

$$1 \text{ mètre} = 443.296 \text{ PL of the Peru Toise at } 13\,^\circ\text{R}$$
$$(\log = 2.646\,693\,8125)$$

or

$$1 \text{ toise} = \frac{864}{443.296} = 1.949\,036\,3098 \text{ mètres}$$
$$(\log = 0.289\,819\,9299).$$

This value corresponds to an earth's quadrant of 5 130 740.7 t. As the „Mètre des Archives" had been calibrated and deposited 6 months before, it should represent *theoretically* the true relation and not this last relation.

[1]) Benoît, J. R.: „Études sur la Toise de Bessel, la Toise No. 9 du Bureau Topographique Royal Prussien et la Toise du Pérou." C. R. AGI in Firenze 1891, Berlin 1892, S. 146.

[2]) One of these iron standards had been presented to the Swiss Hassler by Tralles, then a committee member. Hassler took it to the States and gave it to the American Philosophical Society. It is now in the archives of the USC&GS, Washington as „Committee Metre".

The Peru Toise (P) served de facto as „prototype of the metric unit" further on. In the beginning of the 19 th century numerous copies of the Peru Toise were constructed, calibrated and distributed. As the Peru Toise had been forgotten for a long period until its rediscovery in 1854, those copies served as substandards, until the International Metre was created.

After having overcome the first difficulties in the production of the pure platinum-iridium alloy, demanded by the International Metre Convention in 1875, the bar I_2 (alloy Matthey, London 1879) was graduated finally by means of the French bar 23_c (alloy Conservatoire, 1874). From 1/9/1881 to 22/2/1882 Benoît and G. Tresca compared then I_2 with the Metre of Archives and found its length 6.21 μ (rounded off 6 μ) too long at 0 °C. On 26/4/1882 this bar was turned over officially to the BIPM and designated as „Étalon International Provisoire". From this date on, the Metre of Archives lost its precedence as standard of the metric system, held de jure since 22/6/1799. The bar I_2 exercised its temporary function till 1889, when it was replaced by the International Prototyp „$\mathfrak{M}$" (No. 6 of the 30 bars made). But $\mathfrak{M}$ was compared only with I_2 and not any more with the Metre of Archives.

The old system had been connected with the international system by Benoît in the nineties when several national standards had been compared with the international standards at the Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), Breteuil. The comparisons of the rediscovered Peru Toise, as the real prototyp of the old system, with the 2-m-substandard „E" had not been satisfactory in 1887, 1890 and 1891. Therefore the relation between the old and international system can be restored only via the various preceding intercomparisons of the national substandards. The effort to elucidate the exact ratio by means of these various calibrations is a more or less hopeless enterprise; thus the relations remain tentative in most of the cases.

The accuracy of the comparisons about 1800 was given to 1/150 — 1/300 PL, i. e. 1/200 000 in the toise, by contemporary authors (see: Delambre, „Base du système ...", Vol. III, p. 412 and Struve, W.: „Arc du Méridien ...", Vol. I, p. LXIII). However the modern comparisons at the BIPM, Breteuil, brought to light discrepancies in some of the classical copies of the toise, which surmounted the cited error limit considerably[3]). Bessel's toise shows a discrepancy of 1/75 000 from the legal ratio. Struve's Double Toise N, based on Struve's Fortin Toise, has an accuracy of 1/64 000. Both had been standardized by Arago; thus a systematic error in calibration can be suspected. The old French Survey Standard, Borda's Module No. 1, agrees within 1/750 000. That means that national networks, based on any of these old standards, will have differences in scale when their distances are converted by the legal ratio (1 t = 1.949 036 59 m) due to the great systematic errors in the calibration of the old standards.

The extensive comparisons by Struve in 1852/53 and by Clarke in 1863—1870 already show a high inner accuracy (about 1/1 Mio.). But, due to the non-existence of a general modern standard, they can only be referred one to another by means of the old classical toise and metre standards. Their inner consistancy is spoiled when the relation to the Metre, the Toise or the Yard is computed, because this relation inheres all uncertainty of the standardization of the old original scales. Clarke could, however, improve his metre-yard relation, based on Baumann's copies No. 10 and 11, and Struve's Standard N' to 1/95 000.

[3]) Fighiera, R.: „Le système métrique décimal." Paris 1930, p. 151.

The British Government deserved great merit when it distributed 27 Yard standards to the various governments in 1855, after having restored the Imperial Standard Yard lost in the fire of the House of Parliament in 1834[4]). But the opportunity of having a modern standard now to which the various local standards could have been referred, was apparently not used. At least there are no references in the national publications concerned. A recent investigation[5]) of the various comparisons of the standards O_1 and OI_1 belonging to the Ordnance Survey with other standards indicated now a shortening of the Imperial Standard Yard of 1855 at the rate of at least 3.5 parts in 10^{-8} per annum or 1/286000 in the last hundred years. This fact makes it impossible to use the numerous comparisons of the Imperial Standard Yard for bridging between the old national units of length. Perhaps the most reliable way now is to go via the two standards of the Ordnance Survey, the probable constancy of their length since 1856 having been established by Clark's investigation in 1953.

Thanks to Bessel's, Struve's and Clarke's comparisons, we are somewhat able to convert the old national networks or parts of them into metric units. An excellent sample of such a procedure is Helmert's famous work on the European parallel in 52° latitude. But it is doubtful to identify exactly the units of the elements of the figure of the earth published, before Clarke's comparisons had been performed. These elements had been deduced from arcs belonging to various measure systems, of which the relations had not been known at that time and can hardly even be restored exactly today. In 1841, for example, Bessel took 30.6% of the total amplitude of his arcs used from the French system (Module No. 1, 1/750 000), 34.7% from the then not yet investigated and connected Indian system, 16.0% from the Russian system (Double Toise N, 1/64 000), 10.0% from the German system (Bessel's Toise, 1/75 000), 5.6% from the English system (Roy's scale) and 8.7% from various systems. Nobody can determine the exact kind of the toise given by Bessel nor can anyone give its exact relation to the metre. They are definitively not toises based on the Bessel Toise (1/75000). As far as such dimensions have been applied in computations of a national network of known uniform scale, they have to be taken as given in these national units; for instance, Bessel's dimensions in Germany in „Meter der Landesaufnahme" (1/75000) or Clarke's 1878/80 metric dimensions in France in (international) meters, although they depart by 1/95000 from it. But it seems justifiable to take generally the unit of scale of the elements deduced from various old arcs as given in meters (1 t = 1.494 036 59 meters) and, as far as they are given in non-metric units, to convert them into meters by means of the latest results of comparisons as far as exact informations are lacking. Their accuracy will not be above 1/100 000. That is not too serious, because their mse, given by the authors, is far greater. The notation „legal metre" alone is not sufficient and is only of local national significance. The legal metre varies with the country. It will be used in this publication but in connection with the name of the country or the author.

The determination of the mean terrestrial spheroid as an ellipsoid best fitting the whole earth has reached a certain settled state or better, a standstill, today. As long as sufficient and evenly distributed observations do not cover the whole globe including the wast oceans, a remarkable improvement of the modern dimensions, available now, can scarcely be made without any hypothesis. The actual goal of geodesy is, therefore, to investigate the geoidal surface. In order to simplify the comparison and the connection of parts of the

[4]) Airy, G. B.: „Account of the Construction of the New National Standard of Length and of its principal copies." Phil. Trans. Vol. 147, London 1858, p. 621—702.

[5]) Clark, J. S.: „Re-measurement of the old 10 ft length standards O_1 and OI_1 of the Ordnance Survey, and some notes on the relative stability of certain standards of length." E.S.R. Vol. 12, No. 90, London 1953, p. 166—174.

geoid, separately determined, they should be referred to one uniform reference surface, given in the International Spheroid within sufficient accurate approximation. The introduction of „better fitting“ reference spheroids, as has been done recently in the USSR and in Eastern Europe, by introducing Krassowsky's spheroid, is not usefull from the standpoint of international cooperation, as the goal will not be reached earlier. In 1891 Hammer[6]) already stated that it is not any more the main task of geodesy to calculate the elements of a spheroid best fitting the geodetic-astronomical and physical measurement on the globe, but to determine the deviations of the existing mathematical Figure of the Earth — the Geoid — from a reference spheroid.

The present change in the problem to be solved, justifies a review and a synopsis on the extensive works done hitherto for the determination of the elements of the figure of the earth. The oldest computations had been made by means of two arcs or two halves of one arc. In 1755 Boscovich had already used five different meridional arcs and had to make, therefore, a kind of adjustment by making the sum of the residuals to zero and the sum of the residuals, not considering their proper sign, a minimum. Following his example were Laplace in 1799 and Lindenau in 1806. In 1819 Walbeck applied then the method of least squares for deducing his elements from several meridional arcs. As he considered only the astronomical observations at the terminals of the arcs, C. F. Gauß instructed Schmidt to readjust Walbeck's data but taking into account every astronomical latitude observed in the arcs. The first evaluation of this kind, which lasted unrivaled for nearly fifty years had been performed by Bessel in 1837/41. In 1856 Clarke computed his first elements still according to the method of Gauß-Bessel. At the same time he deduced the elements of a best fitting spheroid from the English network after having reduced topographically the astronomical observations. Clarke recognized also that the relation between the various national units has to be determined first when various national arcs are combined in deducing the elements of a spheroid. Therefore, he compared several European standards with the British Yard in 1863—1870. He considered these relations in his computations of elements from 1866 onwards. The unit of his elements are unique, contrary to those computed before. In 1878 Clarke developed a new system of formulae for computing the elements, using arcs of parallels too.

Besides these rigid adjustments, the combination method had many followers up till the seventies. There, each arc or each subdivision was combined with each other for deducing elements. The mean value of all these elements was adopted then. The typical representatives of this method are Airy, Everest, Schubert and Pratt. In 1859 Schubert, influenced by Lindenau's and Paucker's preparatory works, computed the first tri-axial spheroid by combining several arcs. The rigid solution for the determination of a tri-axial spheroid by means of the least squares was found by Clarke in 1866.

A new era began in 1886, when Helmert published his basic paper on the deflection of plumbline. In 1906/1909, Hayford introduced the application of the topographic-isostatic reduction in his computation of the elements by evaluating the large network in USA. His dimensions were recommended as the International Reference Spheroid by the IAG in 1924. Heiskanen evaluated the European data according to Hayford's method in 1926. But the result of the original overall adjustment was not satisfactory. It appears that the isostatic reduction does not totally eliminate the local and regional systematic errors, and that Hayford was very lucky that the circumstances in the States had been most favourable for the application of isostasy.

[6]) Hammer, E.: „Zur Abbildung des Erdellipsoids“, Zeitschr. Verm.Wes. Stuttgart 1891, p. 609/610.

The combination of observational data, adulterated by systematic deflections of the vertical in one overall adjustment, can scarcely be accepted, due to the theory of errors, even if this systematic influence could be compensated partly by isostatic reduction which is more or less hypothetical, because these errors would be correlated over large areas. Therefore, Helmert suggests deducing elements individually from large arcs or networks by taking over another element as fixed from previous computations; for instance the flattening from gravity observations. After judgment of such individual results, the standard error would be estimated a priori and then the most probable elements evaluated. In such a way Helmert computed his elements of 1906/07 and 1913. Also Heiskanen returned to this procedure in 1926 after the failure of the overall adjustment. Jeffreys brought this method which perhaps can be called „modern combination method“ to perfection in his papers of 1941, 1943 and 1948. Besides that, he rejected the isostatic reduction and recommended the free air reduction instead.

A method already containing the problem of the determination of the geoid lies in evaluating the most probable elements of the earth by adjustment of numerous geoidal data — geoidal heights determined by astronomic levelling — by means of De Graaf-Hunter's formulae. Such evaluations were made by Dubovsky in 1939 and by Lieberman in 1953. Another solution was found by Ledersteger with his method of „Partialsysteme“ in 1947/49 which he extended by combining it with the geoidal method in 1951. His solution allows the determination of most probable elements from heterogeneous observational data distributed irregularly over the globe.

The geodetic-astronomical methods, last mentioned above, already apply elements or observations of gravity measurements. Gravimetric measurements or pendulum observations respectively have been performed since 1800. Most of these early pendulum observations, from the beginning on, already not limited to the old continent, had been made on coastal regions and islands by naval officers, commanding ships on reconnaissance trips over the earth. The evaluations of these data resulted in a flattening far too large due to the influence of the great anomalies at the coastal and insular stations. It has been Helmert's merit to have recognized this influence and to have taken it into account when computing his first gravity formulae.

The third method of deducing elements of the figure of the earth is the astronomical method, which also started about 1800, when Laplace computed the flattening from lunar observations. The flattening can be determined with highest precision from the precessional constant. Helmert tried in 1884 to derive also the great semiaxis from the lunar parallax. The most important works are those of de Sitter. The most recent works in this way are those of Jeffreys in 1948 and of O'Keefe-Anderson in 1952.

Summarizing we have following historic groups of methods of evaluations:

I) Geodetic-astronomical methods

1) arc method (adjustment of relative deflections)
2) area method (adjustment of relative deflections)
3) modern method of combination
4) method of „Partialsysteme“

II) Gravimetric methods

1) via Clairaut's modified theorem
2) via Stokes's modified integral

III) Geoidal method (adjustment of absolute deflections)

IV) Astronomical methods

1) via the precessional constant
2) via the lunar parallax
3) via the perturbation of the Moon

V) Combined methods.

As an example of the last mentioned method, we may take Harkness's work in 1891, Jeffreys's overall adjustment of 1948 and Ledersteger's paper of 1951.

Only the flattening value which is least sensible to the choice and accuracy of the observational data, seems suitable for comparison with another. 120 different flattening values are listed on p. 88 to 91, of which the mean value is 1/297.734. The 39 flattening values based on gravimetric observations are listed on p. 91; their mean value being 1/294.667. Omitting the coastal and insular stations, the mean value of the remaining 20 values becomes 1/297.313. The mean of 16 flattening values derived from astronomical observations, — since 1884 twelve values — is 1/297.752 and 1/296.953. The diagram on p. 95 demonstrates the influence of the Peruvian and French arc, which combined, result in a too small flattening. On the other hand, the evaluation of the coastal gravity stations and of the older Indian arcs cause a significant increase in the flattening. About 1880, 16 years after Baeyer's foundation of the International Association of Geodesy with its resolutions and recommendations, they start to oscillate between 1/296 and 1/299. This oscillation is perhaps a proof for H. Poincaré's theoretical investigations in 1888, where he found as limiting values of the flattening 1/296 and 1/300, if the distribution of density within the earth is a function increasing from the surface to the centre. From Paucker's 1853 on, the sudden increase in the major axis is striking. Up to this date the major axis reached 6 377.56 km as its maximum at Airy's once only. Now its length stays over 6 377.8 km throughout but a few exeptions which can be explained through assumed or local conditions. Paucker himself evaluated still the same arcs as Bessel did; but, from Clarke's 1856 on, it could be the influence of the meanwhile finished great arcs in the United Kingdom, in Russia and India.

The list of the elements of the tri-axial spheroids do not show any systematic development with the time. At present it appears that the equatorial flattening is more or less due to the lack of data evenly distributed over the whole globe.

My intention has been to give following information:

The dimensions in their original national unit,
the observational data used,
the original publication concerned,
tables available,
countries where these dimensions have been applied as reference surface,
summary and notes.

I started with my investigations in 1942, but the war and postwar troubles hampered the progress totally until 1948. During a three year stay in Australia from 1951 to 1954, I had the opportunity to look through most of the English references concerned. The first manuscript was written there. Returned to Germany I found that the war had destroyed a lot of older books in the libraries, and so I could not always study the original papers. Therefore, I ask every reader to kindly cooperate in completing the material.

München, August 1956.

II. Die Beziehungen der klassischen nationalen Maßeinheiten und deren Normalmaße zum Meter

In diesem Abschnitt soll der Übergang von den klassischen Normalmaßen der alten nationalen Maßsysteme zum internationalen Maßsystem, dem Meter, durch Kombination der zeitgenössischen Eichungen mit den modernen des BIPM in Breteuil versucht werden.

Die Tafel S. 97—99 zeigt die nationalen Normalmaße und ihre Kopien mit den Werten ihrer Originaleichung, wobei das betreffende Bezugsmaß unterstrichen ist. Die folgenden Spalten geben spätere Vergleichsmessungen dieser Normalmaße. Die letzte Spalte enthält die Eichwerte nach Vergleich mit dem Metersystem. Mit einem Blick sieht man, daß die Korrelation zwischen den verschiedenen Maß- und Vergleichssystemen schwach ist, so daß eine Gesamtausgleichung, wie sie Peters 1885 durchgeführt hatte, kaum von Erfolg sein konnte (siehe S. 23).

Das französische System

Der Maßstab des französischen Meridianbogens, gemessen von Delambre-Méchain und Biot-Arago, und der des alten französischen Landesnetzes (Triangulation der Ingenieur-Geographen) beruht auf der Borda-Module Nr. I = 1728,0000 PL bei 17,6° C. Diese wurde von Borda-Lavoisier-Lenoir um 1792 angefertigt und mit der Peru-Toise geeicht.

Vergleiche durch Borda, 1792 — Benoît, 1894

	Borda t	Benoît m	$\frac{m}{t}$
Module I	2,000 000	3,898 068	1,949 034

legales Verhältnis 1,949 036 59
Verbesserung —1:752 524 oder 58_{E8}

Das französische „legale Meter“ muß **theoretisch** um 1:752 524 oder 58_{E8} logarithmische Einheiten verkleinert werden. Da aber der Eichfehler jener Zeit schon bei etwa 1:200 000 lag, kann diese Verbesserung vernachlässigt werden. Das französische „legale Meter“ ist also praktisch mit dem internationalen Meter identisch. Der Begriff „legales Meter“ ist den französischen Geodäten daher unbekannt. Sie kennen nur ein „legales Verhältnis“ zwischen Toise und Meter, das die Toise in endgültige Meter überführt.

Das deutsche bzw. preußische System

Der Maßstab des Reichsdreiecksnetzes beruht auf der Längeneinheit der Bessel-Toise bzw. der von ihr abgenommenen Kopien Nr. 9 und 10, die von Baumann 1852 angefertigt und von Baeyer erstmals geeicht wurden.

Eichung durch Benoît und die Mittelwerte aus den verschiedenen deutschen Maßvergleichen

	Deutscher Mittelwert PL	t	Benoît m	$\frac{m}{t}$
B	863,999 20	0,999 999 07	1,949 0609	1,949 062 65
9	864,002 52	1,000 002 92	1,949 0674	1,949 061 75

Mittel	1,949 062 20
legales Verhältnis	1,949 036 31
Verbesserung	+ 1:75 281 oder 577_{E8}

Das deutsche „legale Meter" oder „Meter der Landesaufnahme" ist um 1:75 281 oder 577_{E8} logarithmische Einheiten zu vergrößern. Dieser Wert ist gleich Helmerts Wert von 1893. Helmert hatte ihn dann wegen der darin enthaltenen Unsicherheiten auf 580_{E8} aufgerundet.

Ein ähnlicher Betrag wurde als Maßstabsunterschied bei der Verbindung der deutschen und französischen Triangulation festgestellt, wo sich im Mittel 1:66 000 ergab. Der Maßstab der alten französischen Triangulation beruht auf der Borda Module I. Wir erhalten aus den Eichungen:

Toise der französischen Landesaufnahme	1,949 034 m
Toise der deutschen Landesaufnahme	1,949 0622 m
Differenz aus Eichung	1:69 115
mittlere Differenz aus Triangulation	1:66 000

Diese Maßstabdifferenz zwischen der deutschen und der französischen Triangulation ist ein weiterer Beweis für die nahezu vollständige Übereinstimmung des alten französischen Systems mit dem internationalen.

Der Vergleich zwischen dem einfachen Mittel aus allen Eichwerten und der Petersschen Ausgleichung ist in Tafel S. 23 enthalten.

Das britische System

Gerade vor Abschluß dieser Arbeit wurde der Verfasser durch Herrn J. S. Clark vom N.P.L., Teddington, freundlicher Weise darauf aufmerksam gemacht, daß sich der bronzene Imperial Standard Yard seit seiner Schaffung im Jahre 1855 fast stetig kürzt. Clark hat auch in diesem Zusammenhang die Konstanz der zwei eisernen Ordnance Survey Standards O_1 und OI_1 untersucht und nachgewiesen. Es muß daher versucht werden, die Verbindung der alten Normalmaße und Maßstäbe mit dem internationalen System mit Hilfe der O_1/OI_1-Beziehung herzustellen, da alle Vergleiche mit dem Imperial Standard Yard ausfallen.

1) Die O_1/OI_1-Beziehung über die Eichungen von Clarke 1864 — Johnston/Benoît 1906 — Thompson 1952:

	Clarke 1864 Y	Johnston/Benoît 1906 m	Thompson 1952 m	$\frac{m}{Y}$
O_1	3,333 337 17	—	3 048 007 56	0,914 401 20
OI_1	3,333 354 32	3,048 025 54	—	0,914 401 91

Berücksichtigt man nach J. S. Clark, 1953, auch noch die Kürzung des Imperial Standard Yards von 1855 bis 1864, so haben wir

O_1	3,333 338 56	—	3,048 007 56	0,914 400 82
OI_1	3,333 355 69	3,048 025 54	—	0,914 401 52

Der Mittelwert des Verhältnisses von Clarkes Yard von 1864 zu dem damals noch nicht existierenden internationalen Meter wird damit

$$\underline{1\ Y_{1864} = 0{,}914\,4014\ \text{m.}}$$

2) Clarkes Toisen-Werte für O_1 und OI_1:

	Clarke 1864		Johnston/Benoît 1906	Thompson 1952	$\frac{m}{t}$
	Pl	t	m	m	
O_1	1351,15563	1,563 837 53		3,048 007 56	1,949 056 41
OI_1	1351,16259	1,563 845 59	3,048 025 54		1,949 057 86

Mittel 1,949 057 14

legales Verhältnis 036 31

Verbesserung + 1:93 569 oder 464_{E8}

+ 10,687 mm/km

3) Clarkes Werte für die Toise und das Meter, fundiert auf Struves Normalmaßstab N' und Baumanns Kopien Nr. 10 und 11:

$1\ t_{Cl} = 2{,}131\,511\,16\ Y_{1864} = 1{,}949\,056\,79$ m (via O_1/OI_1)

legales Verhältnis 036 31

Verbesserung + 1:95 168 oder 456_{E8}

$1\ m_{Cl} = 1{,}093\,623\,11\ Y_{1864} = 1{,}000\,010\,50$ m (via O_1/OI_1)

Verbesserung + 1:95 238 oder 456_{E8}

Clarkes „legales Meter" muß also um 1:95 200 oder 456_{E8} logarithmische Einheiten vergrößert werden. Die Übereinstimmung mit dem Ergebnis unter 2) ist etwa 1:5 Mio. und liegt weit innerhalb der Eichgenauigkeit jener Zeit.

4) Nach den „Statutory Rules and Orders" von 1898, Nr. 411, S. 72, gelten handelsüblich folgende metrische Beziehungen:

1 yard	= 0,914 399 m	1 m	= 1,093 6143 yards
1 foot	= 0,304 80 m		= 3,280 8429 foot
1 inch	= 0,025 40 m		= 39,370 113 inch.

Für alle wissenschaftlichen Arbeiten hält das N.P.L., Teddington, die metrische Eichlänge des Imperial Standard Yards aus dem Jahr 1922 an, nämlich:

$$1\ Y_{1922} = 0{,}914\,398\,41\ \text{m.}$$

Dieser Wert beruht auf der Eichung durch Sears-Johnson-Jolly.

5) Der hannoversche Fuß, den Gauß 1841 im Regierungsauftrag zu definieren hatte, wurde von einem geteilten englischen Yard-Maßstab abgeleitet, der von Dollond angefertigt und mit dem alten englischen Imperial Standard Yard von Bird aus dem Jahre 1760 geeicht wurde.

2 hannoversche Fuß = 23 englische Zoll.

Es wurden zwei Normalmaße aus Messing durch Meyerstein angefertigt:

Normalmaß I = 23,000 005 engl. Zoll
Normalmaß II = 23,000 0025 engl. Zoll.

Nr. I wurde in Hannover und Nr. II bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen deponiert.

6) Das russische Maßsystem wurde ebenfalls von dem englischen System abgeleitet (siehe unter „Russisches System").

Das russische System

1) Der Maßstab des großen skandinavisch-russischen Meridianbogens beruht auf Struves Doppeltoise N = 1728,012 49 PL.

Eichungen durch Struve 1828 — Benoît/Sokolof 1893:

	Struve PL	Struve t	Benoît m	$\frac{m}{t}$
N	1728,012 49	2,000 014 46	3,898 162	1,949 066 91
		legales Verhältnis		036 31
		Verbesserung		+ 1:63 694 oder 682_{E8}

Das russische „legale Meter" ist um 1:63 694 oder 682_{E8} logarithmische Einheiten zu vergrößern. Helmert fand 1906 aus verschiedenen Grundlinienvergleichen 680_{E8}.

2) Das russische Maßsystem wurde zu Zeiten Peters des Großen vom englischen System abgeleitet, und zwar galt:

1 Sashen = 7 engl. Fuß = 3 Arshin = 48 Wershock = 7 Fut = 84 Djuim =
= 840 Linija.

Das metrische System wurde 1918 eingeführt und die Umwandlungswerte wie folgt festgesetzt:

1 Arshin = 0,711 200 m
1 Fut = 0,304 800 m
1 Sashen = 2,133 600 m.

Das österreichische System

Die klassischen österreichischen Normalmaße wurden niemals mit denen des benachbarten Deutschland bzw. Preußen verglichen. Sie sind unmittelbar nur mit dem russischen und englischen System verbunden.

1) Eichungen durch Stampfer-Clarke und via O_1/OI_1-Beziehung (1 Y_{1864} = 0,914 4014 m):

	Stampfer Kl	Clarke Y	via O_1/OI_1 m	$\frac{m}{Kl}$	1 Kl m
P.Kl.	0,99999966	2,07403658	1,89650195	1,89650252	1,89650328
P.Kl.T.	1,02760943	2,13130185	1,94886540	50405	
M.Kl. 1—3	0,99999329	2,07401462	1,89648187	49457	(49520)
M.Kl. I—II	1,00000000	02990	49584	49584	

Die Mailänder Kopie (M.Kl.) ist zu kurz. Ein ursprünglicher, systematischer Eichfehler von etwa 1:235 000 ist zu vermuten.

2) Eichungen durch Stampfer-Struve-Benoît:

	Stampfer Kl	Struve t	via Benoît (N) m	$\frac{m}{Kl}$
P.Kl.	0,99999966	0,97303637	1,89651299	1,89651363
P.Kl.T.	1,02760943	0,99990424	1,94888027	(51848)

Der Unterschied zwischen dem Klafterwert und dem Toisenwert ist hier größer als beim Clarkeschen Vergleich. Struves Wert für die Pulkovo Klaftertoise (P.Kl.T.) scheint fehlerhaft zu sein. Er wurde daher bei den Untersuchungen weggelassen.

3) Eichungen durch Stampfer-Benoît

	Stampfer	Benoît
Österr. Basisapparat bei 13°R	8,230 244 825 Kl	15,608 758 03 m

$$\frac{m}{Kl} = 1{,}896\,511\,99 \text{ m.}$$

4) Am 23. Juli 1871 wurde in Österreich folgende Beziehung gesetzlich angeordnet:

1 Klafter = 1,896 484 „legale Meter“.

Dieser Wert beruht auf Struves Eichung des Pulkovo-Klafters mit der russischen Doppeltoise N. Struves Toisenwert wurde mit dem legalen Verhältnis in Meter umgerechnet. Es sind also russische „legale Meter“. Auf Grund der Beziehung zwischen dem deutschen System (Besseltoise und Baumanntoise Nr. 9) und dem internationalen System (1:75 000) wurde dann später dieser Wert umgewandelt in

1 Klafter = 1,896 509 17 m.

Die Anwendung des deutschen Verhältnisses ist aber nicht gerechtfertigt, da in Wirklichkeit die Beziehung über das russische System hergestellt wurde; dessen korrekte Verbesserung auf das internationale System ist auf Grund Benoîts Eichung von N + 1:64 000. Damit ergibt sich aber

1 Klafter = 1,896 513 63 m.

5) Die Werte, die sich aus der Eichung des österreichischen Basisapparates und aus dem Vergleich des Pulkovo-Klafters durch Stampfer-Struve-Benoît ergaben, zeigen eine

nahezu vollständige Übereinstimmung (1:1 156 000). Da ihre Herleitung unabhängig voneinander erfolgte (verschiedene Normalmaße als Bezug), scheint ihr Mittelwert

$$1 \text{ Klafter} = 1{,}896\,512\,81 \text{ m}$$

der wahrscheinlichste Wert zu sein. Die Abweichung vom gesetzlichen österreichischen Wert ist jedoch nur 1:521 000, was ein günstiger Zufall ist.

Das spanische System

Der Maßstab des klassischen spanischen Landesnetzes beruht auf der Länge der eisernen Basisstange von Ibañez, die mittels einer Kopie der Borda Module Nr. I geeicht worden war. Diese Kopie wurde 1856 von Brunner, Paris, für Spanien angefertigt.

Eichungen durch Ibanez-Benoît:

	Ibañez 1866 m	Ibañez 1874 m	Benoît 1885 m
bei 16,25 °C	4,000 4070	4,000 4086	4,000 432 79
Verbesserung	1:155 116	1:165 375	
	Mittel	+ 1:160 081	

Das von Ibañez von der Module Kopie abgenommene spanische „legale Meter" muß also um 1:160 000 oder 270_{ES} logarithmische Einheiten vergrößert werden. Die plötzliche Längenänderung des Ibañez-Apparates um 1880, wie sie in der Schweizer Veröffentlichung von Hirsch, A. — Dumur, J.: „La mensuration de bases", Das Schweizer Dreiecksnetz, Bd. III, Zürich 1888, S. 87—90, vermutet wird, ist unwahrscheinlich, da bei Eisenstangen derartige Änderungen nicht beobachtet werden konnten. Viel natürlicher ist diese Änderung als systematischer Eichfehler der spanischen Kopie der Borda Module zu erklären. Leider wurde anscheinend diese Kopie in Breteuil nicht nachgeeicht.

Das schwedische System

Nach Svanberg, 1837:

$$1 \text{ Schwedischer Fuß} = 1{,}026\,5866 \text{ Engl. Fuß.}$$

Das US-System

Das US-System entspricht dem britischen System. Seine abweichenden, metrischen Gegenwerte wurden am 28. Juli 1866 festgesetzt und am 5. April 1893 noch einmal bestätigt zu:

$$1 \text{ Yard} = \frac{3600}{3937} \text{ Meter}$$

und damit

$$\begin{array}{llll} 1 \text{ yard} & = 0{,}914\,402 \text{ m} & 1 \text{ m} & = 1{,}093\,611 \text{ yard} \\ 1 \text{ foot} & = 0{,}304\,801 \text{ m} & & = 3{,}280\,83 \text{ foot} \\ 1 \text{ inch} & = 0{,}025\,400 \text{ m} & & = 39{,}37 \text{ inch} \end{array}$$

Der USC & GS hat Umwandlungstafeln von Fuß in Meter und umgekehrt herausgegeben (Spec. Publ. No. 19, Washington 1914, S. 84—87). Das genaue, hier benutzte Verhältnis in den Tafeln ist aber

$$1 \text{ ft} = 0{,}304\,800\,6096 \text{ m}$$
$$1 \text{ m} = 3{,}280\,833\,33 \text{ ft.}$$

Peterssche Ausgleichung

	PL	Gruppe I				Gruppe II					Gruppe III							
		Bessel		Niehus		Baeyer	Sadebeck		Schreiber	Foerster	Struve	Pulkovo	Clarke		1	2	3	4
		1835	1835	1831	1831	1852	1872	1872	1877/78	1878	1828/52	~ 1868	1864/66	1868/69	Mittel	Peters	1—2	(1—2) relativ
B	863.	999 20¹)		999 20		999 20	999 20		999 20	999 20					863.999 20	999 20	0	1: ∞
DL	864.	059 53			059 70										864.059 62	060 05	— 43	1: 2.0 Mio.
DF	864.	002 49	002 49	001 51	001 51										864.002 00	002 38	— 38	1: 2.3 Mio.
DG	863.	995 34	995 19		993 49										863.994 67	994 93	— 26	1: 3.3 Mio.
B 9	864.					002 64		002 16	002 50	002 60					864.002 48	002 54	— 6	1:14.4 Mio.
B 10	863.					999 01	998 11	999 03²)	999 90	999 00	999 14		999 03²)		863.999 03	999 29	— 26	1: 3.3 Mio.
B 11	863.					999 00							998 29		863.998 64	998 95	— 31	1: 2.8 Mio.
BL	863.							993 71	995 50	995 30					863.994 84	994 94	— 10	1 :8.6 Mio.
F	864.										00 000¹)				864.000 00	000 07	— 7	1:12.3 Mio.
Do.K.	863.										991 84				863.991 84	991 91	— 7	1:12.3 Mio.
N	1728.										012 49	012 49			1728.012 49	012 63	— 14	1:12.3 Mio.
N^I	1727.											987 56³)		992 14	1727.989 85	994 39⁴)	(+454)	(1: 0.4 Mio.)
N^{II}	1727.											973 86³)		977 50	1727.975 68	—	—	—
T_0	*864.*												061 66	061 66	864.061 66	062 28	— 62	1: 1.4 Mio.

¹) Originaleichwerte.

²) Aus B und F abgeleitete Mittelwerte als Bezugslänge.

³) Neuere Werte als die von Struve, gegeben durch A. R. Clarke (Phil. Trans., Bd. 163, London 1874, S. 468).

⁴) Nicht vergleichbar, da andere, ältere Ausgangswerte.

Diese einfachen Mittelwerte zeigen eine maximale Abweichung von nur 1:2 Millionen gegen die Werte der Petersschen Ausgleichung, obwohl ein völlig verschiedener Wert und eine neue Eichung in Gruppe III eingeführt wurde. Das beweist, daß die Korrelation zwischen den einzelnen Gruppen zu schwach ist, um eine Gesamtausgleichung zu rechtfertigen. Außerdem erhält in der Ausgleichung der Eichwert der Besseltoise ein nicht gerechtfertigtes Übergewicht gegenüber der Struvetoise F. Der Ausgleichungseffekt ist sehr klein. Es scheint so, als ob schon Helmert kein Vertrauen in die Peterssche Ausgleichung hatte; denn er bevorzugte 1893 in seiner Arbeit über die europäische Längengradmessung in 52° Breite Clarkes kleineres System vor dem größeren von Peters.

III. Die Dimensionen der Figur der Erde von 1800—1950

Abkürzungen:
Abbreviations:

a	Große Halbachse der Meridianellipse Major semiaxis of the meridional ellipse
b	Kleine Halbachse der Meridianellipse Minor semiaxis of the meridional ellipse
α	Abplattung der Meridianellipse Flattening of the meridional ellipse
a_1	Große Major } Halbachse der Äquatorellipse (dreiachsig) semiaxis of the equatorial ellipse (tri-axial)
a_2	Kleine Minor } Halbachse der Äquatorellipse (dreiachsig) semiaxis of the equatorial ellipse (tri-axial)
α_1	Maximale Greatest } Abplattung der Meridianellipse (dreiachsig) flattening of the meridional ellipse (tri-axial)
α_2	Minimale Smallest } Abplattung der Meridianellipse (dreiachsig) flattening of the meridional ellipse (tri-axial)
α_e	Abplattung der Äquatorellipse (dreiachsig) Flattening of the equatorial ellipse (tri-axial)
G	Mittlere Länge eines Meridianbogens von 1°-Amplitude Mean length of one degree of meridional arc
Q	Länge des Meridianquadranten Length of the meridional quadrant
(c)	Abgeleiteter Wert (nicht in der Originalveröffentlichung) Computed (not in the original publication)
p. e.	Wahrscheinlicher Fehler Probable error
mse	Mittlerer Fehler (Standard-Abweichung) Mean square error
t	Toise French toise
ft	Englischer Fuß Foot
Kl	Österreichische Klafter Austrian Klafter (fathom)
. . .	Logarithmus Logarithm
6 378 003 m	Mit dem in Abschnitt II gefundenen Umwandlungsfaktor (*0.304 800 47*) in Meter umgewandelt Metric value, converted by the factor (*0.304 800 47*) from chapter II.

Maupertuis hatte in seinen beiden Arbeiten „Sur la figure de la Terre“, Mém. Acad. pour 1735, Paris 1738, 98—105 und Mém. Acad. pour 1736, Paris 1739, S. 302—312, eine Formel für die Länge eines Meridianbogens von 1° gegeben und ein geodätisch-astronomisches Beobachtungsverfahren zur Bestimmung der Erdfigur vorgeschlagen. 1737 bewies Clairaut in den Transactions philosophiques, daß die Schwere vom Äquator zum Pol hin mit $\sin^2 \varphi$ zunimmt, was schon Newton, allerdings ohne Beweisführung angenommen hatte. 1743 stellte dann Clairaut in der Abhandlung „Theorie de la figure de la Terre“ durch sein bekanntes Theorem die Beziehung zwischen Schwere und Abplattung her. Legendre behandelte in der Arbeit „Suite de recherches sur la figure de planètes“ noch einmal das Problem der Zunahme der Länge eines Meridianbogens von 1° Breitenintervall und die Zunahme der Schwere vom Äquator zum Pol hin mit $\sin^2 \varphi$, da Bouguer 1749 in seinem Buch „Figure de la Terre“ eine Abhängigkeit von $\sin^4 \varphi$ erkannt haben wollte.

Mit diesem Rüstzeug versehen, begann man nun, die Gradmessungen und Pendelbeobachtungen auszuwerten und die dabei zu Grunde gelegten Theorien laufend zu verbessern. Um den Zusammenhang mit den wichtigsten Arbeiten vor 1800 herzustellen, sollen auch diese noch kurz erwähnt werden.

1. **Cassini 1718**
$\alpha = 1:(-95)$

Jacques Cassini (II) fand diesen Wert aus den Beobachtungen des französischen Meridians (Collioure—Dünkirchen, $\Delta \varphi = 8^\circ 31'$ mit 3 Stationen), der von seinem Vater Jean Dominique Cassini (I) und ihm in Zusammenarbeit mit Lahire, Vater und Sohn, in den Jahren 1684—1718 beobachtet wurde und der eine Erweiterung der von Picard 1669 begonnenen Gradmessung darstellte. Dieses an den Polen aufgewölbte Ellipsoid (Zitronenform) war der Anlaß eines langjährigen Streites zwischen den Anhängern Newtons und Cassinis,

Cassini, Jacques (II): „De la grandeur et la figure de la Terre.“ Mém. Acad. pour 1718, Paris 1720.

2. **Cassini 1740**
$\alpha = 1:304$

César François Cassini de Thury (III) wiederholte 1739 zusammen mit Lacaille die Messungen seines Vaters und Großvaters (La méridienne verifiée). Aus diesen neuen Beobachtungen und denen des inzwischen gemessenen Bogens in Lappland, — die Peruexpedition war noch nicht zurückgekehrt —, fand er die obige Abplattung und lieferte damit den meßtechnischen, geodätischen Beweis für die Richtigkeit der Newtonschen Theorie.

Cassini de Thury, C. F. (III): „La méridienne verifiée.“ Mém. Acad. pour 1740, Paris 1742.

3. **Boscovich 1755/60**
$\alpha = 1:255$
$\alpha = 1:248$

Boscovich verwendete zum erstenmal mehr als zwei Gradmessungen (Peru, Frankreich, Lappland, Kap und seine eigene zwischen Rom und Rimini) zur Ermittlung der Erddimensionen. Wegen der Übereinstimmung nahm er das Mittel aus den möglichen Zweierkombinationen als wahrscheinlichsten Wert und fand $\alpha = 1:255$.

1760 entwickelte er dann in seinem Kommentar zu Stays Gewicht eine Art Ausgleichungsmethode, indem er sich für den Wert als den wahrscheinlichsten entschied, für den die Summe aller Verbesserungen Null und deren Absolutsumme (ohne Berücksichtigung der Vorzeichen) ein Minimum wurde und fand $\alpha = 1:248$.

Boscovich, R. J.: „De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem...“ Roma 1755, S. 481—516.
Stay, B. — Boscovich, R. J.: „Philosophia Recentioris...“ Bd. 2, Roma 1760, S. 406—426.

4. Commission Générale de Poids et Mesures 1799

$a = 3\,271\,225{,}7\ t$	$b = 3\,261\,431{,}6\ t$	$\alpha = 1:334{,}29$
$= 6\,375\,738{,}7$ m (c)	$= 6\,356\,449{,}6$ m (c)	
... 6.804 530 5074	.. 6.803 228 2744	

$$Q = 5\,130\,740\ t = 10\,000\,000 \text{ m.}$$

Der Abplattungswert wurde aus Bouguers Ergebnissen des Perubogens ($\Delta\varphi = 3^\circ\,07'$ mit zwei Stationen) und aus dem französischen Meridianbogen, Montjouy—Dünkirchen ($\Delta\varphi = 9^\circ\,40'$ mit zwei Stationen) abgeleitet, wobei bei letzterem nur die astronomischen Beobachtungen auf den beiden Endpunkten berücksichtigt wurden, um den Einfluß etwaiger Lotstörungen zu mindern. Die Werte für die beiden Halbachsen wurden dagegen nur aus dem französischen Meridian, und zwar aus dessen vier Teilbogen berechnet. Die Beziehung Toise—Meter beruht auf dem Meridianquadranten dieses Ellipsoides, und zwar wurde der 10millionste Teil von 5 130 740 t als das Meter festgesetzt.

Die meisten Autoren, die die Dimensionen dieses Ellipsoides zitieren, geben a zu 6 375 653 m, was einem zu kleinen Wert von Q entspricht. Delambre aber gibt in seinem Werk, Bd. III, S. 196, die obigen Logarithmen der metrischen Werte von a und b, woraus sich $a = 6\,375\,738{,}7$ m aufschlägt.

Delambre, J. P. J.: „Base du système métrique décimal, ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutés en 1792 et années suivantes, par MM. Méchain et Delambre“, Bd. I, Paris 1806, Bd. II, Paris 1807, Bd. III, Paris 1810.

Tafeln bei Delambre in Bd. II seiner Veröff. und von Plessis (nur Manuskript). Plessis berechnete auch Bonnesche Koordinaten für die Schnittpunkte des geographischen Netzes von 10 zu 10 Neuminuten für den Bereich von $\varphi = 30^g$ bis $\varphi = 70^g$.

5. Laplace 1799

I) $\alpha = 1:277$
$\alpha = 1:312$

Nachdem Laplace vorher allgemeine Ausdrücke für den Meridianbogen, den Meridiangrad und die Pendellänge gegeben hatte, entwickelte er in § 39, S. 126—134, eine Methode der Abgleichung überbestimmter Größen auf einen wahrscheinlichsten Wert über die Zweierkombination der Messungen und in § 40, S. 135—138, eine Methode ähnlich der bereits von Boscovich gegebenen, worin die Summe der Fehler, jetzt alle positiv genommen, ein Minimum sein soll. Anschließend wertete er nach diesen beiden Methoden folgende sieben Gradmessungen aus: Peru (3° 07′), Lappland (0° 58′), Kap (1° 13′), Pennsylvanien (1° 29′), Kirchenstaat (2° 10′), Österreich (2° 53′) und Frankreich (Méchain-Delambre, 9° 40′); Gesamtamplitude 21° 30′. Nach der ersten Methode erhielt er $\alpha = 1:277$, nach der zweiten $\alpha = 1:312$. Da einige Bogen starke Abweichungen zeigten (z. B. $\alpha = 1:150$ aus den Teilbogen des französischen Meridianbogens), vermutete Laplace, daß die Erde merklich von der a priori angenommenen elliptischen Figur abweicht.

II) $\alpha = 1:321{,}48$
$\alpha = 1:335{,}78$
$\alpha = 1:315$

Laplace benützte hier erstmals Pendelbeobachtungen zur Bestimmung der Abplattung. Er unterzog folgende fünfzehn Beobachtungen der Länge des Sekundenpendels seinen beiden Ausgleichungsmethoden: Bouguer (Paris, Porto Bello, Petit Goave, Peru), La Gentil (Pondichéry), Cambell (Jamaika), Lacaille (Kap), Darquier (Toulouse), Liesganig (Wien), v. Zach (Gotha), Graham (London), Mallet (Petersburg, Ponoi), Grishov (Arensburg) und Maupertuis-Clairaut (Pello). Die Laplaceschen Originalergebnisse sind $\alpha = 1:321{,}48$ bzw. $1:335{,}78$. Bowditch entdeckte aber 1832, anläßlich seiner Übersetzung der „Mécanique Céleste", einen Fehler in $\sin^2\varphi$ für die Station Gotha (0,60339 statt 0,57624, S. 148). Er berechnete die Abplattung neu und fand $\alpha = 1:315$, was gut mit dem Laplaceschen Wert aus den Gradmessungen übereinstimmte. Laplace selbst fand dagegen in seinem Wert $1:335{,}78$ nichts Abnormes, da dieser mit dem von der Commission Générale ermittelten Wert $1:334{,}29$ harmonierte.

Laplace, P. S.: „Mécanique Céleste", tome 2, livre III, Paris 1799, für I) § 41, S. 138—146, für II) § 42, S. 146—152.

6. Laplace 1802

I) $\alpha = 1:305$

Laplace stellte 1783 fest, daß das von Tob. Mayer bereits 1767 empirisch gefundene Störungsglied in der Länge des Mondes von der elliptischen Erdfigur verursacht wird und fand seinerseits noch ein weiteres Störungsglied in der Mondbreite. Nachdem nun Bürg genauere numerische Koeffizienten dieser Glieder aus den Greenwicher Mondbeobachtungen bestimmt hatte, leitete Laplace die Abplattung aus der Breitenstörung zu $1:304{,}6$ und aus der Längenstörung zu $1:305{,}05$, im Mittel $1:305$, ab.

II)

Der französische Oberst Bonne benützte zur Berechnung seiner 1801 in Bayern begonnenen Triangulierung ein Laplacesches Ellipsoid mit

$a = 6\,376\,614{,}4$ m $\qquad b = 6\,355\,776{,}5$ m $\qquad \frac{a-b}{b} = 1:305$

$\alpha = 1:306$

Aus diesen Dimensionen berechnete dann Soldner den Radius seiner Abbildungskugel für die bayerische Landesvermessung. Soldner erwähnte $b = 2\,177\,685{,}5$ bayerische Ruten in einem Brief vom 19. 1. 1813 an seinen österreichischen Kollegen Richter v. Binnenthal in Wien und schrieb, daß diese Dimensionen von der letzten französischen Gradmessung von Formentera bis Dünkirchen herstammen. In der „Mécanique Céleste" konnten diese Dimensionen jedoch nicht gefunden werden.

Laplace, P. S.: „Traité de Mécanique Céleste", tome 3, livre VII, S. 282, 285, 286.

Müller, F. J.: „Johann Georg v. Soldner, der Geodät." Z. Verein höh. Bayer. Verm.Beamten, München 1913, S. 313.

7. v. Lindenau 1806

$a = 3\,271\,980$ t $\qquad b = 3\,261\,215$ t $\qquad \alpha = 1:304$

$= 6\,377\,208$ *m (1,949 036 31)*

Da inzwischen neue Gradmessungen bekannt geworden sind, führte v. Lindenau mittels der zweiten Ausgleichungsmethode von Laplace und dessen Formelsystem die Auswertung folgender neun Gradmessungen durch: Peru (3° 07′), Pennsylvanien (1° 29′), Kirchenstaat (2° 10′), Frankreich (9° 40′), Österreich (2° 53′), England (2° 50′), zwei in Ostindien (1° und 1° 08′) und Schweden (1° 37′); Gesamtamplitude 25° 54′. Er verwarf den bei Laplace schlecht passenden Kapbogen und ersetzte außerdem dessen klassischen Lapplandbogen durch die schwedische Neumessung. Die Rechenmethode, immer je zwei Gradmessungen zu kombinieren, lehnte er als unzweckmäßig ab und entschied sich für die zweite Laplacesche Methode, auf deren Verwandtschaft mit der von Boscovich vorgeschlagenen er, im Gegensatz zu Laplace, aufmerksam machte. Es ist allerdings merkwürdig, daß er sich bei der Gesamtausgleichung nicht schon der von ihm bereits erwähnten bekannten, von Legendre 1806 veröffentlichten „méthode des moindre quarrées" bedient hatte; denn er glich anschließend die Teilbogen der neuen englischen Gradmessung für sich nach dieser Methode aus. Er untersuchte außerdem die Krümmung bzw. Radiusvektoren der Meridiane in 45° Breite, die den einzelnen Gradmessungen zugeordnet waren. Aus deren systematischem Gang schloß er auf eine elliptische Form dieses Parallels und damit des Äquators. Nachdem er die ihm in diese Hypothese weniger passenden Gradmessungen wegließ, bestimmte er über die Gradmessungen in Pennsylvanien, Frankreich, Schweden und Ostindien die Lage der großen Halbachse des elliptischen Äquators zu $\lambda = 34° 27'$ West, durch den Atlantik von Grönland über die Ostecke von Südamerika verlaufend. Er bezeichnete zwar dieses Ergebnis mit Recht als nicht besonders gut fundiert, empfahl aber, dieser Möglichkeit in Zukunft Beachtung zu schenken, da vielleicht hierdurch die schlechte Übereinstimmung zwischen den einzelnen Gradmessungen geklärt werden könnte. Bei der Diskussion der einzelnen Gradmessungen erwähnte er bereits einen mutmaßlichen Breitenfehler von 5″ auf der Station Evaux im französischen Meridian. Man kann v. Lindenau die Priorität in der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate für die Ableitung der Abplattung und in der Berechnung eines dreiachsigen Ellipsoides zuerkennen.

v. Lindenau: „Über den Gebrauch der Gradmessungen zur Bestimmung der Gestalt der Erde." Zachs Monatl. Corresp. Bd. XIV, Gotha 1806, S. 113—158.

8. Oriani 1807

$\log a = 6.526\,6022$ Kl $\quad \log b = 6.525\,1990$ Kl $\quad \alpha = 1:310$

$= 6\,376\,130$ m (c) mit 1 Kl $= 1{,}896\,509\,17$ m.

Die Herkunft dieser Dimensionen konnte nicht geklärt werden, da die Originalveröffentlichung nicht verfügbar war.

Ephemeriden von Milano, 1807.

9. Delambre 1810

I) $a = 6\,376\,985$ m $\quad b = 6\,356\,323$ m $\quad \alpha = 1:308{,}64$

$Q = 10\,000\,724$ m.

Delambre überprüfte die Auswertung der Meridianbogenlängen durch die „Commission Générale des Poids et Mesures" aus dem Jahre 1799. Er reduzierte Bouguers astronomische Beobachtungen in Peru noch einmal und wertete auch La Condamines Beobachtungen aus, die bisher nicht verwendet worden waren. Er nahm dann das Mittel aus beiden Beobachtungen und auch das Mittel aus deren zwei unabhängig bestimmten terrestrischen Bogenlängen. Im französischen Meridian berücksichtigte er außerdem Méchains astronomische Beobachtungen in Barcelona, die der Kommission damals noch nicht bekannt waren, und führte dann das Mittel aus Carcassonne—Montjouy und Carcassonne—Barcelona als letzten Teilbogen in seine Auswertung ein.

Dieses Ellipsoid wird auch „Ellipsoide des Ingénieur-Géographes" genannt, da die Triangulation der französischen Ingenieurgeographen darauf gerechnet wurde.

II) $a = 6\,376\,523{,}3$ m $\alpha = 1:308{,}64$

$$Q = 10\,000\,000 \text{ m.}$$

Da der Meridianquadrant von I) größer als 10 Millionen Meter war und damit die daraus abgeleitete Meterlänge länger war als die der Kommission von 1799, berechnete Delambre diese Dimensionen unter Beibehaltung seiner errechneten Abplattung, die er für wahrscheinlicher als die von 1799 hielt, für einen Meridianquadranten von genau 10 Millionen Meter. Dieses Ellipsoid ist auch unter dem Namen „Ellipsoide modifiée de Plessis" bekannt.

Delambre, J. P. J.: „Base du système métrique décimal . . . ", Bd. III, Paris 1810, für I) S. 134, für II) S. 196.

Lamotte: „Réponses au questionnaire du 1er avril 1924", Bulletin géod., Paris 1925, S. 652—654.

Angewendet: I) bis 1881 in der französischen Triangulation durch kgl. Dekret v. 22. 6. 1820; Belgien; Kirchenstaat und Toscana; Baden in seiner ersten Landesaufnahme.

II) in der „Carte de France, 1:80 000".

Tafeln: zu I) in Delambres Werk, Bd. III. Umwandlungstafeln von I) auf Clarke 1878/80 siehe unter Clarke, S. 75.

zu II): Um Plessis Tafeln, die für die Dimensionen des Ellipsoides der „Commission Générale 1799" aufgestellt waren, auch bei der Kartierung der „Carte de France 1:80 000", deren geodätischen Grundlagen auf Delambres Ellipsoid 1810, I) beruhten, verwenden zu können, berechnete Puissant in einem Anhang zu Plessis Tafeln Zuschläge, die Plessis ursprüngliche Werte in Delambres Ellipsoid 1810, II), das nur unbedeutend von I) abweicht, überführen (s. Puissant, L.: Instruction sur l'usage des tables de projection . . .", Paris 1821, und „Notice sur les tables de projection calculées par Plessis . . .", Mém. Dépôt Gén. Guerre, tome IV, Paris 1828, S. 13—30).

10. v. Zach 1812

$a = 3\,271\,558$ t $b = 3\,261\,005$ t $\alpha = 1:310$
$= 6\,376\,385$ *m (1,949 036 31)*

Zach wertete die peruanische Messung noch einmal aus und fand $G = 56\,731{,}7$ t. Er berechnete dann mit der von Maupertuis gegebenen Formel aus der Länge dieses Gradbogens und der in Frankreich für $\varphi = 45^\circ$ gefundenen Gradbogenlänge, $G = 57\,007{,}7$ t eine Abplattung von $1:309{,}82$. Kombinierte er mit der unter $\varphi = 46^\circ\,11'\,58''$ gefundenen Bogenlänge, $G = 57\,018{,}4$ t, so erhielt er $\alpha = 1:310{,}80$, was er zum Mittel $1:310$ zusammenfaßte. Auch Zach erwähnte bereits die Methode der kleinsten Quadrate, ohne diese aber anzuwenden.

Zach, v. F.: „Über die Gradmessung am Äquator." Zachs Monatl. Corr. Bd. XXVI, Gotha 1812, S. 39—66.

11. Bonsdorff, J. G. 1818

$\alpha = 1:292{,}3$
$\alpha = 1:298{,}5$

Nach einer strengen Ausgleichung der Länge des Sekundenpendels auf zahlreichen Stationen erhielt Bonsdorff die Pendelgleichung:

$$\mathfrak{l} = 439{,}2393 \text{ PL } (1 + 0{,}005\,229 \sin^2 \varphi),$$

und daraus den ersten Abplattungswert. Aus einer zweiten Ausgleichung, worin er die sieben Stationen mit den größten Verbesserungen (Kola, Mulgrave, Melita, Megasaki, Umatog, Rio de Janeiro und St. Helena) wegließ, erhielt er

$$l = 439{,}209\,43\ \mathrm{PL}\,(1 + 0{,}005\,304 \sin^2 \varphi)$$

und den zweiten Abplattungswert.

Bonsdorff, J. G.: „Dissertatio academica de figura telluris ope pendulorum determinanda", Abo 1815, Teil 6 (zitiert nach Todhunter, Bd. II).

12. **Laplace 1818/1825**

$\alpha = 1:306{,}6$

Aus den Koeffizienten der Längen- und Breitenstörung der Mondbahn, die von Bürg, Bouvard und Burckhardt aus mehreren tausend Mondbeobachtungen bestimmt wurden, erhielt Laplace diesen Abplattungswert.

Laplace, P. S.: „Addition au mémoire sur la figure de la terre." Mém. Acad. pour 1818, tome III, Paris 1820, S. 489—502 und „Mécanique céleste", tome V, livre XI, Kap. II, Paris 1825.

Bis 1850 wurde in der norwegischen Triangulation ein Referenzellipsoid nach Laplace mit folgenden Parametern verwendet:

$a = 3\,271\,812$ t $\qquad \alpha = 1:312$
$= 6\,376\,880$ *m (1,949 036 31)*

Auch Walker erwähnte in seiner Arbeit, „India's contribution to geodesy", Phil. Trans. for 1895, Vol. 186, Part II, London 1896, ein Laplacesches Ellipsoid mit

$a = 20\,919\,768$ ft $\qquad b = 20\,852\,822$ ft $\qquad \alpha = 1:312{,}2$
$= 3\,271\,478$ *t (0,156 382 14)*
$= 6\,376\,229$ *m (1,949 036 31)*

Diese beiden Dimensionen konnten allerdings in der „Mécanique céleste" und in den durchgesehenen Mém. Acad. Paris nicht gefunden werden.

13. **Walbeck 1819**

$a = 3\,271\,820$ t ± 63 (c) $\qquad b = 3\,261\,014$ t ± 63 (c) $\qquad \alpha = 1:(302{,}78 \pm 2{,}0)$
$= 6\,376\,896$ *m (1,949 036 31)* $\qquad G = 57\,009{,}76$ t

Walbeck wendete zur Ableitung der Erddimensionen aus mehreren Gradmessungen zum erstenmal die Methode der kleinsten Quadrate an. Um den Ansatz zu vereinfachen, führte er aber nur die Amplituden der ganzen Bogen ein und vernachlässigte die Beobachtungen innerhalb der Bogen. Er benützte folgende Gradmessungen: Peru ($\Delta\varphi = 3°\,07'$), 1. ostindische (Trivandeporum—Paudree, $\Delta\varphi = 1°\,35'$), 2. ostindische (Punnae—Namthabad, $\Delta\varphi = 6°\,56'$), Frankreich (Formentera—Greenwich, $\Delta\varphi = 12°\,49'$), England (Dunnose—Clifton, $\Delta\varphi = 2°\,50'$) und Schweden ($\Delta\varphi = 1°\,37'$); Gesamtamplitude $\Delta\varphi = 28°\,54'$ mit zwölf Stationen.

Gauß übernahm 1824 diese Dimensionen zur Berechnung seiner hannoveranischen Gradmessung. Er beauftragte aber anschließend E. Schmidt, die Ausgleichung unter Hinzunahme der inzwischen abgeschlossenen Gradmessungen mit einem neuen Ansatz zu wiederholen (siehe unter E. Schmidt, S. 33).

Walbeck, H. J.: „De forma et magnitudine telluris ex dimensis arcubus meridiani definiendis." Diss., Abo 1819. Nachdruck in der Zeitschr. „Fennia", Nr. 4, Helsinki 1891.

Donner, A.: „Walbecks Abhandlung „De forma ...", ZfV, Stuttgart 1893, S. 426—434. (Donner berechnete aus den von Walbeck gegebenen Parametern, G und α, die Halbachsen a und b. Sein Aufsatz enthält auch den Nachdruck der Originaldissertation.)

Verwendet: Rußland (bis 1910) und Bulgarien (bis 1931).

14. **Hessisches Ellipsoid**

$a = 3\,271\,773{,}7$ t (c) $\quad b = 3\,260\,940$ t $\quad \alpha = 1:302{,}00$

$= 6\,376\,890$ *m (1,949,0622)*

Aus diesen Dimensionen wurde der Radius $R = 3\,273\,544$ t der Soldnerschen Abbildungskugel für die Landesaufnahme des Großherzogtums Hessen berechnet. Die Ausgangsdaten für diese Dimensionen und ihr Autor konnten nicht festgestellt werden.

1) Gast, P.: „Astron. Nivellement durch das Großherzogtum Hessen." Berlin 1906, S. X und XI.

2) „Die Katastervermessungsarbeiten im Großherzogtum Hessen." Bd. I/2 (stand nicht zur Verfügung).

15. **Biot 1821**

$\alpha = 1:304$

Biot, zusammen mit Arago, bestimmte 1807—1817 die Länge eines Zentesimalpendels (100 000 Schwingungen pro mittl. Sonnentag) auf acht Stationen entlang des Pariser Meridians von Formentera (Balearen) bis Unst (Shetlandinseln). Um den vermuteten Einfluß lokaler Störungen zu vermindern, benützte er aber zur Auswertung nur die Beobachtungen auf den beiden äußeren Stationen und erhielt folgende Gleichung für die Länge des Zentesimalpendels

$$\mathfrak{l} = 739{,}704\,212 \text{ mm } (1 + 0{,}005\,361 \sin^2 \varphi),$$

woraus er über das einfache Clairautsche Theorem die Abplattung ermittelte zu

$$\alpha = 0{,}008\,65 - 0{,}005\,36 = 1:303{,}95.$$

Biot-Arago: „Recueil d'observations géodésique, astronomiques ...", Paris 1821, S. 574. Dieses Werk wird oft auch als Band IV des bekannten Werkes „Base du système ..." bezeichnet.

16. **v. Müffling 1821**

$a = 1\,693\,183{,}15$ preuß. Ruten $\quad \alpha = 1:310$

$= 3\,271\,841{,}4$ t

$= 6\,376\,938$ *m (1,949 036 31)*

Dieses Ellipsoid diente bis 1866 als Bezugsfläche für die Preußische Landesaufnahme (Triangulation und Meßtischaufnahme). Die Herkunft dieser Dimensionen konnte nicht geklärt werden.

„Instruktion für die topographischen Arbeiten des kgl. Preuß. Generalstabes v. 15. 1. 1821."

17. **v. Müffling 1824**

$\log a = 6.228\,703\,5033 \quad \log b = 6.227\,325\,7736 \quad \alpha = 1:315{,}6$

$a = 1\,693\,181{,}46$ preuß. Ruten (c)

$= 3\,271\,838$ t (c)

$= 6\,376\,931$ *m (1,949 036 31)*

$$Q = 5\,131\,253{,}95 \text{ t.}$$

Diese Dimensionen wurden als Mittelwerte der Kombinationen der astronomisch-geodätischen Beobachtungen zwischen den Sternwarten Seeberg—Mannheim—Dünkirchen—Seeberg, die von Tranchot, Krayenhoff und v. Müffling durchgeführt waren, berechnet. Der spätere General Baeyer (damals Leutnant) half bei diesen Berechnungen.

v. Müfflings Brief an den Herausgeber. Astr. Nachr. Bd. 2, Altona 1824, S. 33—38.

18. Sabine 1825

I) $a = 1:288{,}4$

Sabine unterzog seine Beobachtungen der Länge des Sekundenpendels auf 13 Stationen (von Bahia, $\varphi = -13°$ bis Spitzbergen, $\varphi = +79°$) einer strengen Ausgleichung und erhielt folgende Pendelformel

$$\mathfrak{l} = 39{,}015\,68 \text{ inch } (1 + 0{,}005\,1807 \sin^2 \varphi),$$

aus der sich eine Abplattung von 1 : 288,4 errechnete.

II) $a = 1:289{,}1$

Anschließend fügte er noch die Beobachtungen von Biot auf acht Stationen (von Formentera bis Unst) und die von Kater auf sechs Stationen in England-Schottland (Shanklin Farm auf der Insel Wight bis Unst) dazu, wobei er für die beiden, Kater und Biot gemeinsamen Stationen die Mittelwerte einführte. Aus der Ausgleichung dieser 25 Pendellängen erhielt er die Pendelformel

$$\mathfrak{l} = 39{,}015\,20 \text{ inch } (1 + 0{,}005\,1890 \sin^2 \varphi)$$

und die Abplattung, 1 : 289,1.

Auf Grund der Verbesserungen, die starke Schwankungen zeigten und die mit der geographischen Lage (Insel, Küste, Festland) allein nicht mehr erklärt werden konnten, schloß Sabine auf lokale Störungen durch den Untergrund und folgerte daraus, daß sich aus dem anomalen Verhalten der Pendel die Beschaffenheit der oberen Erdschichten bestimmen lasse. Man könnte ihn daher als den Vater der gravimetrischen Lagerstättenforschung bezeichnen.

Sabine, E.: „An account of experiments to determine the Figure of the Earth by means of the pendulum vibrating seconds in different latitudes.“ London 1825.

19. Bürg 1826

$a = 1:294$
$a = 1:295$

Bei einer Untersuchung der Mondgleichung aus 3233 Mondbeobachtungen in Greenwich von 1765 bis 1794 fand Bürg nach strenger Ausgleichung den von der Abplattung abhängigen Koeffizienten in der Längengleichung zu 7,29″. Früher hatte er bereits den entsprechenden Koeffizienten in der Breitengleichung mit 8,6″ bestimmt. Aus dem von Laplace 1823 gegebenen Verhältnis dieser beiden Koeffizienten (Breite zu Länge), 1:0,855 76, erhielt er aus dem Breitenkoeffizienten 8,6″ den in der Länge zu 7,36″. Wegen der guten Übereinstimmung empfahl Bürg den obigen, daraus abgeleiteten Abplattungswerten besondere Beachtung zu schenken. In der Tat sind diese für jene Zeit außergewöhnlichen Werte ziemlich nahe der modernen Abplattung und verdienen daher hier, erwähnt zu werden.

Bürg: „Epoche der mittleren Länge des Mondes für 1799, jährliche Änderung derselben, Gleichung der Länge, die von der Abplattung der Erde abhängt und Variationen, nebst der daraus folgenden Sonnenparallaxe.“ Astr. Nachr. Bd. 4, Altona 1826, S. 9—16.

20. Krayenhoff 1827

$a = 6\,376\,950{,}4$ m $\quad b = 6\,356\,356{,}1$ m $\quad \alpha = 1:309{,}65$

$Q = 10\,000\,721{,}73$ m.

Krayenhoff verbesserte einen kleinen Fehler in der Berechnung der Delambreschen Dimensionen. Dieses Ellipsoid diente als Bezugsfläche für die Triangulation und die topographischen Karten in den Niederlanden bis 1885.

1) Krayenhoff: „Précis historique des opérations géodésiques et astronomiques faites en Holland pour servir de base à la topographie de cet état." 2. Aufl. 1827 (dort auch Tafeln auf S. 175).

2) „Meetkundige Beschrijving van het Koningrijk der Nederlanden ..." Gravenhage, 1861.

(Freundlichst mitgeteilt von Prof. Dr. R. Roelofs, Delft.)

21. Schmidt 1829

I) $a = 3\,271\,852{,}318$ t $\quad b = 3\,260\,853{,}703$ t $\quad \alpha = 1:(297{,}479 \pm 10{,}5)$

$= \mathit{6\,376\,959\ m\ (1{,}949\,036\,31)}$

$G = 57\,008{,}655$ t $\pm 4{,}26$

Durch Gauß veranlaßt, revidierte Schmidt die Walbecksche Ausgleichung. Dabei betrachtete er nicht die Amplitude, sondern die tatsächlich gemessenen Polhöhen als beobachtete Größen. Er berücksichtigte alle, innerhalb einer Gradmessung beobachteten Polhöhen und führte in der Abplattung Glieder 2. Ordnung ein. Außerdem fügte er noch die von Gauß fertiggestellte Gradmessung zwischen Göttingen und Altona hinzu, so daß er schließlich folgende Gradmessungen auswertete: Peru (3° 07′ mit 2 Stationen), 1. ostindische (1° 35′ mit 2 Stationen), 2. ostindische (6° 56′ mit 4 Stationen), Frankreich (12° 22′ mit 8 Stationen), England (2° 50′ mit 5 Stationen), Schweden (1° 37′ mit 2 Stationen) und Hannover (2° 01′ mit 2 Stationen); Gesamtamplitude $\Delta\varphi = 30° 28'$ mit 25 Stationen.

Die von Gauß in „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona", Göttingen 1828, veröffentlichten Schmidtschen Dimensionen sind fehlerhaft, da bei der ersten Durchrechnung von Schmidt ein Fehler in den Normalgleichungen war und außerdem eine von Kater 1821 veröffentlichte Maßstabsverbesserung der ostindischen Gradmessung noch nicht berücksichtigt sein konnte.

II) $\alpha = 1:(288{,}45 \pm 3{,}0)$

Schmidt unterzog außerdem folgende 47 Beobachtungen der Länge des Sekundenpendels einer Ausgleichung: Sabine (16), Kater (6), Basil Hall (3), Foster (2), Brisbane (1), Dunlop (1), Goldingham (1), Freycinet (9) und Biot-Arago (8). Er fand folgende Formel in moderner Form geschrieben,

$$\gamma = 978{,}056 \text{ Gal } (1 + 0{,}005\,2005 \sin^2 \varphi)$$

und daraus die Abplattung 1 : 288,20, die von Listing 1877 auf Grund einer Nachrechnung auf 1 : 288,45 verbessert wurde.

1) Schmidt, E. J. C.: „Lehrbuch der mathematischen und physikalischen Geographie." Bd. 1, Göttingen 1829, für I) S. V, für II) S. 384.

2) Schmidt, E. J. C.: „Bestimmung der Größe der Erde aus den vorzüglichsten Messungen der Breitengrade." Astr. Nachr., Bd. 7, Altona 1829, S. 329—332 (nur für I).

22. Airy 1830

I) $a = 20\,923\,713$ ft $\quad b = 20\,853\,810$ ft $\quad \alpha = 1:299{,}325$

$= \mathit{6\,377\,563\ m\ (0{,}304\,800\,749)}$

Nachdem 1818 Lambton bereits aus seiner 1. ostindischen, der französischen und der schwedischen Gradmessung einen Abplattungswert berechnet hatte, der dann von Kater

1821 nach Herstellung der Maßstabsbeziehung und unter Hinzunahme des englischen Bogens verbessert wurde, sind die Airyschen Dimensionen die ersten englischen, die tatsächlich Anwendung fanden. Er wertete folgende acht Gradmessungen aus: Frankreich (Formentera—Dünkirchen, 12° 22′), England (Dunnose—Burleigh Moor, 3° 57′), Hannover (Göttingen—Altona, 2° 01′), Baltikum (Belin—Hochland, 8° 02′), Kap (1° 13′), Pennsylvanien (1° 29′) und die zwei ostindischen (1° 35′ und 9° 54′); Gesamtamplitude 40° 33′. Viele Autoren, darunter sogar sein Landsmann A. R. Clarke in seiner „Geodesy, 1880", erwähnen allerdings, daß Airy 14 Breiten- und 4 Längengradmessungen verwendet hätte. Auf diesen Irrtum hatte aber bereits 1876 A. Fischer hingewiesen. Um diese Zeit standen noch keine brauchbaren Längengradmessungen zur Verfügung. Über die Art des Ansatzes und der Berechnung kann nicht berichtet werden, da die Originalveröffentlichung nicht vorlag.

Der Maßstab des englischen Anteils beruht auf Sir George Shuckburghs Fünf-Fuß-Maßstab aus Messing, der 1796 von E. Troughton angefertigt wurde. Die genauen Beziehungen zu den übrigen nationalen Maßsystemen, in denen die weiteren Gradmessungen ausgeführt wurden, waren zu jener Zeit nur ungenügend bekannt. Die Umwandlung in das englische Fußsystem erfolgte mittels der Eichung durch Kater 1818, wo 1 ft = 0,304 794 49 m = 0,156 382 15 t gefunden wurde. 1888 wurde dann Shuckburghs Maßstab im BIPM, Breteuil, geeicht und die Beziehung 1 ft = 0,304 800 58 m ermittelt. Dieser Wert stimmt mit der von Sheepshanks um 1850 gefundenen Länge innerhalb 1 : 100 000 überein. Thompson gibt 1952 folgende Beziehung 1 ft = 0,304 7491 m[1]). Dieser Wert wird bei der metrischen Anwendung der Airyschen Dimensionen neuerdings angehalten.

Tafeln: 1) „Notes on the Minor Trigonometrical Work of the Ordnance Survey", HMSO, London 1914 (7stellig); 2) im Anhang zu „Account of the Principal Triangulation ..." London 1858.

Verwendet: Im Vereinigten Königreich von England, Schottland und Irland.

II) $\alpha = 1:282{,}89$
$\alpha = 1:288{,}1$

Airy wertete unter Zugrundelegung der theoretischen Beziehung zwischen Pendellänge und geographischer Breite,

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0\,(1 + \beta \sin^2 \varphi),$$

49 Pendelmessungen aus und erhielt daraus den ersten Abplattungswert. Da die Verbesserungen immer noch einen mit der Breite gehenden, systematischen Gang zeigten, versuchte er einen zweiten Ansatz

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0\,(1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta' \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)$$

und erhielt den zweiten Abplattungswert.

Airy, G. B.: „Figure of the Earth." Encyclopaedia Metropolitana, Vol. 5, London 1830.

23. **Everest 1830**

$a = 20\,922\,931{,}80\ \mathrm{ft}_{\mathrm{Ind.}}$ $b = 20\,853\,374{,}58\ \mathrm{ft}_{\mathrm{Ind.}}$ $\alpha = 1:300{,}8017$

Diese Dimensionen beruhen nur auf der französischen und der kurzen, 1. ostindischen Gradmessung. Sie wurden von Everest berechnet, um eine für die begonnene indische Lan-

[1]) Thompson, E. H.: „The Ordnance Survey Foot/Metre Conversion Ratio." Emp. Surv. Rev. 1952, No. 84, S. 280—281.

desvermessung geeignete Referenzfläche zu erhalten. Die Maßeinheit ist die des indischen 10-ft-Standard Bar A. Die metrische Beziehung wird von G. Bomford gegeben zu: 1 Indian foot = 0,304 798 41 m, und daraus ergibt sich a = 6 377 276,345 18 m (siehe: „The Readjustment of the Indian triangulation“, Survey of India, Professional Paper No. 28/1939).

A. R. Clarke gibt in seiner „Geodesy“, S. 314, b zu 20 853 284 ft, woraus sich a zu 20 922 841 ft (= 6 377 289 m mit 0,304 800 34) errechnet; d. h. Everests Dimensionen wurden von Clarke in der Maßeinheit des Ordnance Survey 10-ft-Standard Bar O_1 umgerechnet.

Everest, G.: „An account of the measurement of an arc of the meridian between the parallels 18° 03′ and 24° 07′.“ London 1830.

Tafeln:

De Graaf-Hunter: „Auxiliary Tables of the Survey of India“ (revised and extended), Part I: Graticuls of maps, 7. Aufl., Part IV und V: Geodetic Tables, 6. Aufl., Dehra Dun 1944.

US Army Map Service: Everest Spheroid (meters). Universal Mercator (UTM) Grid Tables for latitudes 0°—45°. Transformation of coordinates from grid to geographic and vice versa. Technical Manual (TM) No. 11, Washington 1949 (a = 6 377 276,34518 m).

US Army Map Service: UTM Grid, Everest Spheroid (meters). Coordinates for 5 minutes intersections (0°—45°), TM No. 49, Washington 1951.

US Army Map Service: UTM Grid, Everest Spheroid (meters). Zone to zone transformation tables. TM No. 50, Washington 1951.

Verwendet: Indien, Pakistan, Burma, Siam.

24. **Schmidt 1831**

I) $a = 3\,271\,844{,}822$ t $b = 3\,260\,852{,}493$ t $\alpha = 1 : (297{,}648 \pm 9{,}6)$

$= 6\,374\,944$ *m (1,949 036 31)* $G = 57\,008{,}579$ t $\pm 3{,}88$

Schmidt fügte seiner Ausgleichung von 1829 noch den von W. Struve eben fertig beobachteten livländischen Bogen ($\Delta\varphi = 3°\ 35'$ mit 3 Stationen) hinzu. Die Gesamtamplitude ist jetzt $\Delta\varphi = 34°\ 03'$ mit 28 Stationen.

II) $a = 3\,271\,773{,}00$ t $b = 3\,260\,940{,}03$ t $\alpha = 1 : (302{,}020 \pm 6{,}4)$

$= 6\,376\,804$ *m (1,949 036 31)*

$G = 57\,008{,}715$ t $\pm 3{,}9$

Der mittlerweile verlängerte zweite ostindische Meridian (Punnae—Kalianpur, $\Delta\varphi = 15°\ 58'$ mit 7 Stationen) wurde der vorhergehenden Auswertung angefügt und damit die Gesamtamplitude auf $\Delta\varphi = 43°\ 05'$ mit 31 Stationen gebracht. Diese Dimensionen dienten als Bezugsfläche für die Berechnung der ersten Schweizer Haupttriangulation (siehe: Eschmann, J., „Ergebnisse der Trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz“, Zürich 1840, dort auch Tafeln auf S. 90 für den Bereich von $\varphi = 46°$ bis $\varphi = 47°$).

Schmidt, E.: „Von den Dimensionen der Erde.“ Astr. Nachr., Bd. 9, Altona 1831, für I) S. 315—316, für II) S. 371—372.

25. **Bowditch 1832**

$a = 1:288$

Bowditch leitete aus einer strengen Ausgleichung von 52 Pendelbeobachtungen (44 Stationen aus E. Schmidts Arbeit von 1829, ohne zwei Stationen von Freycinet und ohne eine von Biot, aber mit sechs neuen Stationen von Duperrey und je einer von Foster und Svanberg) diese Abplattung ab. Außerdem berechnete er Dimensionen aus fünf Gradmessungen, wobei erstmals der Meridian nicht mehr elliptisch angesetzt wurde, so wie es 1789 Legendre bereits theoretisch entwickelt hatte.

Bowditch, N.: „Mécanique céleste by Marquis de la Place, translated with a commentary." Boston 1832, Bd. II, S. 480 (stand nicht zur Verfügung).

26. **Baily 1834**

I) $a = 1:289{,}48$

Nachdem Captain Foster auf seiner Forschungsreise von 1828—1831 kurz nach Abschluß der Beobachtung der letzten Station, Porto Bello, ertrunken war, übernahm Baily die Anschlußmessung in London und auch die Auswertung des umfangreichen Fosterschen Beobachtungsmaterials. Foster hatte auf allen Stationen zwei invariable Messingpendel und auf einigen Stationen noch zusätzlich je ein Katersches Reversionspendel aus Kupfer bzw. Eisen beobachtet. Die 14 Stationen liegen hauptsächlich auf der Südhalbkugel (von $\varphi = +11°$ bis $\varphi = -63°$) und sind: London, Greenwich, Montevideo, Staten Island, South Shetland, Kap Horn, Kap der Guten Hoffnung, St. Helena, Ascension Island, Fernando de Noronka, Maranham, Para, Trinidad, Porto Bello und wieder London.

Bis zu dieser Zeit war es üblich, bei Untersuchungen der Erdfigur mittels Pendelmessungen die Pendellänge als „beobachtete" Größe einzuführen, da man ursprünglich die Länge des Sekundenpendels für jede Station ermittelt hatte. Seit Einführung des invariablen Pendels wurde aber die Anzahl der Schwingungen pro mittlerer Sonnentag beobachtet. Baily führte daher die Schwingungszahl als Beobachtungsgröße ein. Nachdem die Beobachtungen auf 62° F, auf Vakuum und Meereshöhe reduziert waren, brachte er die bisher übersehene Korrektion wegen Mitschwingens der Luft erstmals an. Die Ausgleichung ergab die Normalschwingungsformel für das Londoner Sekundenpendel per mittlerer Sonnentag zu

$$v = 85\,879{,}522 \sqrt{1 + 0{,}005\,213 \sin^2 \varphi},$$

woraus sich $a = 1:289{,}48$ berechnete.

II) $a = 1:285{,}26$

Anschließend fügte Baily noch folgende Pendelbeobachtungen seiner obigen Ausgleichung hinzu:

1) Katers 7 Stationen in England/Schottland mit einem invariablen Pendel, von 1818 bis 1819 (Phil. Trans. 1819),
2) Goldinghams 3 Stationen in Indien und Sumatra mit einem invariablen Pendel (Phil. Trans. 1822),
3) Halls 4 Stationen auf Inseln der Südsee und in Rio de Janeiro mit einem invariablen Pendel, von 1820—1823 (Phil. Trans. 1823),
4) Brisbanes 2 Stationen in Paramatta (Australien) mit einem invariablen Pendel, 1822 (Phil. Trans. 1823),

5) Sabines 13 Stationen auf Küste und Inseln des Atlantischen Ozeans und der Nordsee mit 2 invariablen Pendeln, von 1822—1824 (An Account of Experiments, London 1825, Vol. 1),

6) Fosters 3 Stationen einschl. Port Bowen mit einem invariablen Pendel (Phil. Trans. 1826).

7) Fallows 2 Stationen am Kap der Guten Hoffnung mit einem invariablen Pendel (Phil. Trans. 1830),

8) Sabines Verbindung London—Paris mit 2 invariablen Pendeln, 1827 (Phil. Trans. 1828),

9) Sabines Verbindung London—Greenwich mit einem invariablen Pendel (Phil. Trans. 1829),

10) Sabines Verbindung London—Greenwich—Altona mit einem invariablen Pendel (Phil. Trans. 1830),

11) Freycinets 9 Stationen auf seiner Weltumseglung 1817—1820, mit 3 invariablen Pendeln (Voyage autour du monde, Paris 1826),

12) Duperreys 6 Stationen von $\varphi = -51° 32'$ bis $\varphi = +48° 50'$ mit 2 invariablen Pendeln (Connaissance de Temps pour 1830),

13) Lütkes 9 Stationen auf seiner wissenschaftlichen Expedition von 1826 bis 1829, mit einem invariablen Pendel (Mém. Acad. Petersbourg, 6. Ser., Bd. 1, 1830).

Mit Fosters vorstehenden 14 Stationen ergeben sich 79 Beobachtungen auf 51 Stationen, wobei allein London als Anschlußstation elfmal auftritt. Die Stationen liegen in einem Bereich von $\varphi = +79° 50'$ (Spitzbergen) bis $\varphi = -62° 56'$ (südl. Shetlandinseln). Die Ausgleichung ergab die Normalschwingungsformel des Londoner Sekundenpendels zu

$$v = 86\,264{,}86 \sqrt{1 + 0{,}005\,1449 \sin^2 \varphi}$$

und daraus $\alpha = 1 : 285{,}26$.

Da die verschiedenen Beobachter auf der gleichen Station übereinstimmende Ergebnisse hatten und diese trotzdem große Verbesserungen erhielten, vermutete Baily, wie schon Sabine, lokale Störungen vor allem auf den Inselstationen. Er schlug daher Pendelmessungen auf offener See vor, und zwar „on a field of ice, beyond the reach of any peculiar attraction“, um solche lokale Störungen aufdecken zu können.

Baily, F.: „Report on the pendulum experiments made by the late Captain Henry Foster, R. N. in his scientific voyage in the years 1828—1831 with a view to determine the figure of the Earth.“ Mém. R.A.S. Vol. 7, London 1834.

27. **Eckhardt 1834**

$a = 3\,271\,539{,}33$ t (c) $\quad b = 3\,260\,984{,}96$ t $\quad \alpha = 1 : 309{,}97$

$= 6\,376\,349$ m $(1{,}949\,036\,31)$

$$Q = 5\,130\,585{,}65 \text{ t}$$

Diese Dimensionen wurden aus einer strengen Ausgleichung nach Gauß-Schmidt von den astronomischen Daten der Sternwarten Göttingen — Seeberg — Darmstadt — Mannheim — Speyer — Straßbourg und der sie verbindenden Triangulationskette gewonnen.

Eckhardts Brief an den Herausgeber. Astr. Nachr., Bd. 12, Altona 1835, S. 129—134.

28. Bessel 1834

$a = 3\,271\,920{,}97$ t (c) $\alpha = 1:302{,}5126$

$= 6\,377\,093$ m $(1{,}949\,036\,31)$

$G = 57\,011{,}4466$ t

Struve erwähnte, daß Bessel auf Tenners Ersuchen für dessen Triangulation der westlichen Provinzen Rußlands ein Referenzellipsoid berechnete, das dem neuesten Stand der Gradmessungen entsprechen sollte. Bessel unterzog folgende acht Gradmessungen einer Ausgleichung nach Gauß-Schmidt: Peru (3° 07′), 1. ostind. (1° 35′), 2. ostind. (15° 58′), Frankreich (12° 22′), England (2° 50′), Baltikum (8° 02′) und Schweden (1° 37′).

Struve, F. G. W.: „Arc du méridien de 25° 20′ ...“, Bd. 1, Petersburg 1860, S. XIX, Fußnote.

29. Bessel 1837

$a = 3\,271\,953{,}854$ t $\quad b = 3\,261\,072{,}900$ t $\quad \alpha = 1:300{,}7074$

$= 6\,377\,156{,}9$ m $(1{,}949\,036\,31)$

$G = 57\,011{,}453$ t $\pm 2{,}900 \quad Q = 10\,000\,565{,}278$ m

Bessel hatte folgende zehn Gradmessungen nach sorgfältiger Prüfung und teilweiser Neuberechnung für seine Ausgleichung nach Gauß-Schmidt verwendet:

Peru (Tarqui—Cotchesqui, 3° 07′ mit 2 Stationen), 1. ostindische (Trivandeporum—Paudree, 1° 35′ mit 2 Stationen), 2. ostindische (Punnae—Kalianpur, 15° 58′ mit 7 Stationen), Frankreich (Formentera—Dünkirchen, 12° 22′ mit 7 Stationen, ohne Perpignan), England (Dunnose—Clifton, 2° 50′ mit 5 Stationen), Hannover (Göttingen—Altona, 2° 01′ mit 2 Stationen), Dänemark (Lauenburg—Lyssabel, 1° 32′ mit 2 Stationen), Baltikum (Belin—Hochland, 8° 02′ mit 6 Stationen), Schweden (Malörn—Pahtawara, 1° 37′ mit 2 Stationen) und seine eigene in Ostpreußen (Trunz—Memel, 1° 30′ mit 3 Stationen); Gesamtamplitude 50° 34′ mit 38 Stationen.

Für die Überführung der englischen und indischen Gradmessungen in das Toisensystem wurde die Katersche Eichung von 1821 (1 t = 6,394 592 52 ft) verwendet. Für den ostpreußischen Bogen diente die Besseltoise und für den baltischen Bogen die Struvetoise als Normalmaß. Nur für diese beiden und für die französische Module liegen moderne Eichungen vor, die aber mit den Werten, die Bessel zur Verfügung standen, nicht übereinstimmen. Die Toiseneinheit, in der Bessel seine Dimensionen ausdrückte, ist daher auf keinen Fall die aus der alten, klassischen Eichung der Besseltoise abgeleitete, wie dies immer wieder angenommen wird, da mit ihr kaum 10% der von Bessel ausgewerteten Gradbogenlängen bestimmt wurden. Dazu kommt noch die Unsicherheit der Maßeinheit in den indischen Bogen (siehe unter Clarke 1858) und die der hier benutzten Fuß-Toisenbeziehung. Es ist daher zu empfehlen, die Toisen nur mittels der legalen Beziehung in (internationale) Meter umzuwandeln und die über die moderne Eichung der Besseltoise gefundene Korrektur von 1 : 75 000 nicht anzubringen, um so mehr als die gegebenen mittleren Fehler der Bestimmung der beiden Halbachsen diese Korrektur weit übersteigen (siehe auch Bessel 1841).

Bessel, F. W.: „Bestimmung der Achsen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht.“ Astr. Nachr., Bd. XIV, Altona 1837, S. 333—346.

30. Puissant 1840

I) $a = 6\,376\,950$ m $\qquad \alpha = 1:309{,}67$

Puissant entdeckte einen Fehler von 68,43 t in der geodätischen Bogenlänge des südlichen Teils des französischen Meridians. Er wiederholte daher Delambres Auswertung und fand die obigen Dimensionen.

II) $a = 6\,377\,859$ m $\qquad b = 6\,356\,809$ m $\qquad \alpha = 1:303{,}0$

$$Q = 10\,000\,722 \text{ m}$$

Puissant berechnete aus dem nach Norden bis Greenwich ausgedehnten Meridianbogen ($\Delta\varphi = 12°\,49'$) und der peruanischen Gradmessung diese Dimensionen.

III) $a = 6\,377\,284$ m $\qquad b = 6\,356\,347$ m $\qquad \alpha = 1:304{,}6$

$$Q = 10\,000\,976 \text{ m}$$

ergab sich aus der französischen, peruanischen, schwedischen und 2. ostindischen Gradmessung.

IV) $a = 6\,380\,190$ m $\qquad b = 6\,354\,357$ m $\qquad \alpha = 1:246{,}67$

$$G = 57\,017{,}91 \text{ t} \qquad Q = 10\,001\,700 \text{ m}$$

Diese Dimensionen berechnete Puissant aus lokalem, nationalem Interesse und zwar aus dem französischen Meridian, Formentera—Greenwich, und dem „Parallel Moyen" in $\varphi_m = 45°\,43'$, von Marennes bis Padua, um festzustellen, welcher Erdfigur der auf französischem Staatsgebiet gemessene Meridian und Parallel entspricht. Es ist dies der erste praktische Versuch, eine Parallelgradmessung heranzuziehen.

Puissant, L.: „Nouvelle description géométrique de la France", tome 2, veröffentl. als Band 7 des Mém. Dépôt Gén. de la Guerre, Paris 1840; für I) S. 606, 607; für II) S. 608, 609; für III) S. XIX; für IV) S. 622.

31. Bessel 1841

$a = 3\,272\,077{,}14$ t	$b = 3\,261\,139{,}33$ t	$\alpha = 1:(299{,}1528 \pm 4{,}7)$
$\ldots 6.514\,823\,5337$	$\ldots 6.513\,369\,3539$	
$= 6\,377\,397{,}1550$ m (c)	$= 6\,356\,078{,}96325$ m (c) $(1{,}949\,036\,310\,06)$	
$\ldots 6.804\,643\,46365$	$\ldots 6.803\,189\,28388$	

$$G = 57\,013{,}109 \text{ t} \qquad Q = 10\,000\,855{,}76 \text{ m} \pm 498{,}23$$

Gauß machte Bessel auf den von Puissant in der französischen Gradmessung gefundenen Fehler aufmerksam. Daraufhin wiederholte Bessel seine Berechnungen aus dem Jahre 1837. Dieses Ellipsoid fand als Referenzellipsoid größte internationale Verbreitung. Als Referenzellipsoid der deutschen Landesvermessung, deren klassischen Grundlinien einheitlich auf der Länge der Besseltoise (= 863,9992 PL) beruhen, sind die Dimensionen in „Meter der Landesaufnahme" (deutsche legale Meter) zu verstehen, die mit der bekannten Korrektur von + 1 : 75 000 in (internationale) Meter zu verwandeln wären. Ledderstegers Untersuchungen im Jahre 1944 ergaben jedoch einen Maßstabfehler des „Reichsdreiecksnetzes", der etwa der Differenz zwischen dem „Meter der Landesaufnahme" und dem (internationalen) Meter entspricht, so daß man das deutsche Referenzellipsoid nach Bessel in (internationalen) Metern gegeben nehmen muß, um den Maßstabfehler zu kompensieren (siehe Ledersteger, K.: „Die Kompensation des Maßstabfehlers des Reichsdreiecksnetzes", Nachr. Reichsverm.Dienst., Berlin 1944, S. 65—68).

Bessel, F. W.: „Über einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluß auf die Bestimmung der Figur der Erde." Astr. Nachr., Bd. XIX, Altona 1842, S. 97—116.

Tafeln:

1) Schreiber, O.: Formeln und Tafeln zur log. Berechnung der geogr. Koordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten von 47°—56° 60'. Trig. Abt. RfL, Berlin 1938.

2) Thilo, G.: Anweisung und Tafeln zur log. Berechnung von Gauß-Krüger-Koordinaten für $\varphi = 47°$ bis 55°. Trig. Abt. RfL., Berlin 1924.

3) Boltz, H.: Formeln und Tafeln zur numerischen Berechnung geogr. Koordinaten aus Richtung und Länge der Dreiecksseiten für $\varphi = 45°$ bis 56°. Veröff. Geod. Inst. Potsdam, N. F. Nr. 110, Potsdam 1942.

4) Boltz, H.: Formeln und Tafeln zur numerischen Berechnung von Gauß-Krüger-Koordinaten aus geogr. Koordinaten für $\varphi = 45°$ bis 56°. Veröff Geod. Inst. Potsdam, N. F. Nr. 111, Potsdam 1943.

5) Albrecht, Th.: Formeln und Hilfstafeln für geogr. Ortsbestimmung, Leipzig 1908.

6) Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III/1, Stuttgart 1948, S. [1] — [44].

7) Hausbrandt, S.: Tafeln für trigon. Berechnungen auf dem Bessel-Ellipsoid (poln. u. engl.), Veröff. Poln. Geod. Dienst, Warschau 1948.

8) US Army Map Service: TM No. 8, Bessel Spheroid (meters); Tables for the UTM Grid. Grid Tables for latitudes 0°—80°; Transformation of coordinates from geographic to grid and vice versa, Bd. I u. II, Washington.

9) US Army Map Service: TM No. 49, UTM coordinates for 5 minutes intersections, Washington 1949.

10) US Army Map Service: TM No. 50, UTM Grid, Zone to Zone Transformation Tables, Washington 1951.

Verwendet: Deutschland, Österreich, Jugoslavien, Italien bis 1942, Albanien, Norwegen seit 1850, Schweiz seit 1863, Niederlande seit 1885, Griechenland, Indonesien, Schweden, Portugal bis 1926, USA bis 1880; außerdem bis 1946 in Polen, Tschechoslowakei, Ungarn, Estland, Lettland, Litauen und Rußland bzw. UdSSR (von 1910—1946).

32. **Borenius 1843**

$\alpha = 1:286{,}1$
$\alpha = 1:293{,}4$

Borenius unterzog die Schwingungszahl des Sekundenpendels auf 47 Stationen (Kater 3, Sabine 12, Goldingham 2, Hall 3, Foster 13, Brisbane 1, Freycinet 2, Duperrey 3, Lütke 7 und Reinke 1) einer strengen Ausgleichung, wobei er im Gegensatz zu Baily jede Station nur mehr einmal einführte. Er fand für die Schwingungszahl des Londoner Sekundenpendels folgende Gleichung:

$$v = 86\,265{,}016 + 222{,}359 \sin^2 \varphi$$

und bei Berücksichtigung Glieder höherer Ordnung

$$v = 86\,265{,}475 + 216{,}379 \sin^2 \varphi + 6{,}958 \sin^4 \varphi ,$$

woraus er die beiden Abplattungswerte ableitete. Der Ansatz von Borenius ist aber nicht ganz richtig, da die Anzahl der Schwingungen der Wurzel der Länge des Pendels proportional ist und sich nur letztere mit $\sin^2 \varphi$ ändert.

Borenius, H. G.: „Über die Berechnung der mit dem invariablen Pendel zur Bestimmung der Abplattung der Erde angestellten Beobachtungen." Bull. class. phys-.math. Acad. Petersburg, Bd. 1, S. 1, Petersburg 1843.

33. **Tenner-Zylinski 1845**

$a = 6\,380\,880$ m $\qquad \alpha = 1:263{,}597$

$$Q = 10\,004\,060 \text{ m}$$

Um für die Triangulation der polnischen Provinzen, die die Verbindung von der russischen zur preußischen Triangulation darstellte, ein geeignetes Referenzellipsoid zu bekommen, sollten Mittelwerte aus den russischen Walbeck-Dimensionen und den preußischen v.-Müffling-Dimensionen genommen werden. Es wurde jedoch irrtümlich Newtons Abplattungswert statt der von v. Müffling eingesetzt. Das Ergebnis waren obige, stark abweichende Dimensionen, die Tenner zur Berechnung der polnischen Triangulation, 1845—1853 verwendete. Dieses Ellipsoid ist auch unter dem Namen „Polnisches Ausgleichungsellipsoid" bekannt.

Sapiskis für das Jahr 1892, Petersburg 1896, S. 53.

34. **Everest 1847**

$a = 20\,920\,902{,}48$ ft $\qquad b = 20\,853\,642{,}00$ ft $\qquad \alpha = 1:311{,}043$
$= $ *6 376 701 m (0,304 800 47)*

Nachdem Everest seine große ostindische Gradmessung (The Great Indian Arc) vom Cape Comorin bis in die Nähe des Himalaja ausgedehnt hatte, berechnete er obige Dimensionen als Mittel aus allen 42 Kombinationen folgender Gradmessungen: Frankreich ($12^\circ 22'$), Livland ($3^\circ 35'$), England ($2^\circ 50'$), Schweden ($1^\circ 37'$), Peru ($3^\circ 07'$), und seine 2. ostindische Gradmessung ($21^\circ 22'$). Bei letzterer führte er aber neben der ganzen Amplitude auch noch die vier Teilbogen von $5^\circ 24'$, $6^\circ 04'$, $11^\circ 28'$ und $9^\circ 54'$ in die Rechnung ein. Die indische Gradmessung erhielt dadurch ein Übergewicht von etwa 70%.

Everest, G.: „An Account of the measurement of two sections of the meridional arc of India." London 1847.

35. **v. Paucker 1853**

I) $a = 3\,272\,553{,}2083$ t $\qquad b = 3261\,265{,}6467$ t $\qquad \alpha = 1:289{,}9256$
$= $ *6 378 325 m (1,949 036 31)*

$$Q = 5\,131\,696{,}266 \text{ t}$$

Paucker setzte in seiner Ausgleichung den Meridian nicht-elliptisch an. Er wertete die zehn Gradmessungen, die schon Bessel benützte, zusammen mit der von Maclear revidierten und erweiterten, aber noch nicht ganz abgeschlossenen Gradmessung am Kap der Guten Hoffnung ($\Delta\varphi = 3^\circ 35'$ mit 4 Stationen) aus; Gesamtamplitude $\Delta\varphi = 54^\circ 09'$ mit 42 Stationen. Der nichtelliptische Meridian liegt in 45°-Breite 107 m über der Ellipse mit den gleichen Halbachsen. Anschließend griff Paucker v. Lindenaus Gedanken von der Elliptizität des Äquators erneut auf und berechnete getrennt aus den Teilbogen der indischen, französischen und baltischen Gradmessung Dimensionen, um damit die vermutete Elliptizität des Äquators nachzuweisen. Er beeinflußte anscheinend unmittelbar seinen Landsmann v. Schubert, der fünf Jahre später zum erstenmal die Dimensionen eines dreiachsigen Ellipsoides veröffentlichte.

II) $\qquad \alpha = 1:288{,}62$

Paucker wählte aus der Auswertung der 47 Pendelstationen durch Borenius die 28 Stationen aus, deren Verbesserungen gleich bzw. unter drei Schwingungen pro Tag waren, und unterzog sie einer Ausgleichung, wobei er einen durch Glieder höherer Ordnung modifizierten Clairautschen Satz anwandte. Aus der gefundenen Schwereformel

$$\gamma = \gamma_0 \, (1 + 0{,}005\,209\,070 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,05973 \sin^2 2\,\varphi)$$

erhielt er die obige Abplattung.

Paucker, v. M. G.: „Die Gestalt der Erde." Bull. classe phys.-math. Acad., für I) Bd. XII, Nr. 7/8, S. 97—128, Petersburg 1854; für II) Bd. XIII, S. 49—89 und S. 225—249, Petersburg 1855.

36. Clarke 1856

I) $a = 20\,924\,933$ ft ± 800 $b = 20\,854\,731$ ft ± 606 $\alpha = 1 : (298{,}07 \pm 2{,}70)$
$= $ *6 377 929 m (0,304 800 47)*

(Bei Anwendung der metrischen Clarkeschen Dimensionen als Referenzellipsoid gilt immer die Clarkesche Beziehung, 1 ft = 0,304 797 27 m.)

Clarke benützte Bessels Ansatz und die von diesem ausgewerteten zehn Gradmessungen, wobei er aber beim englischen Bogen die neuesten, erweiterten Messungen (Dunnose—Saxavord, $\Delta\varphi = 10^\circ\,13'$ mit 8 Stationen) und beim 2. ostindischen die von Everest inzwischen veröffentlichten Ergebnisse (Punnae—Kaliana, $\Delta\varphi = 21^\circ\,22'$ mit 8 Stationen) einsetzte. Die Gesamtamplitude betrug $59^\circ\,07'$ mit 42 Stationen. Die kurzen Gradbogen hatten jetzt nach Vorliegen der großen Gradmessungen nur mehr wenig Einfluß.

II) $a = 20\,925\,174$ ft $b = 20\,854\,914$ ft $\alpha = 1 : 297{,}72$
$= $ *6 378 003 m (0,304 800 47)*

Die Station Evaux ($2^\circ\,40'$ südl. Paris) der französischen Gradmessung erhielt auch bei I) eine außergewöhnlich große Verbesserung (6,848″), wie schon bei Schmidt (5,88″) und Bessel (6,447″). Wie wir gesehen haben, hatte schon Lindenau eine fehlerhafte Beobachtung von Evaux vermutet. Clarke wiederholte daher die Ausgleichung I) ohne die Station Evaux.

III) $a = 20\,926\,249$ ft_{01} $b = 20\,856\,337$ ft_{01} $\alpha = 1 : 299{,}33$ (Airy)
$= $ *6 378 328 m (0,304 800 34)*

Clarke berechnete diese Dimensionen aus den 32 geodätisch-astronomischen Stationen des flächenhaften Netzes des Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland unter Beibehaltung von Airys Abplattungswert. Dies dürfte die erste Ableitung eines bestanschließenden Ellipsoides aus einem flächenhaften Netz sein.

1) James, H.: „On the figure, dimensions and mean specific gravity of the Earth ..." Phil. Trans. für 1856, Vol. 146, London 1856, S. 607—626 (diese Dimensionen werden daher oft unter dem Namen James erwähnt; sie wurden aber von Clarke berechnet).

2) Proc. R. S. London 1857, Vol. VIII, S. 111 (nur für II).

37. Clarke 1858

I) $a = 20\,927\,197$ ft ± 385 $b = 20\,855\,493$ ft ± 257 $\alpha = 1 : 291{,}86$
$= $ *6 378 619 m (0,304 800 47)*

Clarke benutzte hierzu folgende Gradmessungen: die mittlerweile verbundene englisch-französische Gradmessung (Formentera—Saxavord, $\Delta\varphi = 22^\circ\,09'$ mit 6 französischen und 28 englischen Stationen); die russisch-skandinavische (Staro Nekrassowka—Fuglenaes, $\Delta\varphi = 25^\circ\,20'$ mit 13 Stationen); die 1. ostindische ($1^\circ\,35'$ mit 2 Stationen); die 2. ostindische ($21^\circ\,21'$ mit 8 Stationen); die ostpreußische ($1^\circ\,30'$ mit 3 Stationen); die peruanische ($3^\circ\,07'$ mit 2 Stationen); die hannoveranische ($2^\circ\,01'$ mit 2 Stationen) und die dänische ($1^\circ\,32'$ mit 2 Stationen). Die Gesamtamplitude beträgt $78^\circ\,35'$ mit 66 Stationen.

Die Dimensionen sind wegen der ungenau definierten Maßeinheit in der Südhälfte der großen ostindischen Gradmessung (Lambton) unsicher, wie man inzwischen festgestellt hatte. Bei dieser Ausgleichung wurde die Meridiankurve nicht-elliptisch angesetzt. Sie verläuft in 45°-Breite 54 m über der Ellipse mit den gleichen Achsen. Die englischen Beobachtungen haben im Endergebnis ein Übergewicht gegenüber den übrigen, da 28 englische Stationen statt der nur 8 auf dem Meridian liegenden in die Ausgleichung eingeführt wurden.

II) $a = 20\,926\,348$ ft ± 186 $\quad b = 20\,855\,233$ ft ± 239 $\quad \alpha = 1:294{,}26$
$\quad = \mathit{6\,378\,361\ m\ (0{,}304\,800\,47)}$

Die benützten Gradmessungen waren hier die gleichen wie unter I). Die Meridiankurve wurde hier aber als Ellipse angesetzt. Diese Dimensionen unter II) finden unter dem Namen Clarke-1858-Ellipsoid vielfach als Referenzellipsoid Verwendung, z. B. für die englische Verbindungstriangulation über dem Ärmelkanal nach Frankreich und Belgien im Jahre 1862, in der australischen Landesvermessung und in mehreren englischen Kronkolonien in Afrika.

Tafeln:

1) O'Farrel's Tables (8stellig),
2) Close and Winterbotham: „Textbook of Topographical Surveying", London 1926,
3) „Survey Computations", S. 323, für 0°—70°, War Office, aber nur in der 1. Auflage,
4) US War Dept.: „Transverse Mercator Projection Tables", Australian Belts, New York 1944.

III) $a = 20\,927\,005$ ft ± 295 $\quad b = 20\,852\,372$ ft $\quad \alpha = 1:(280{,}40\ \pm 8{,}3)$
$\quad = \mathit{6\,378\,558\ m\ (0{,}304\,800\,34)}$

Diese Dimensionen wurden erstmals aus topographisch reduzierten Beobachtungen, und zwar aus 35 Breiten- und 41 Azimutstationen des Landesnetzes von Großbritannien und Irland als bestanschließendes Ellipsoid (Flächenmethode) berechnet.

1) Clarke, A. R.: „Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland." London 1858; für I) S. 765; für II) S. 771 und für III) S. 693—694.

2) Clarke, A. R.: „Geodesy", Oxford 1880; für I) S. 304; für II) S. 305 und für III) S. 293.

38. v. Schubert 1859

$a_1 = 3\,272\,671{,}5$ t $\quad b = 3\,261\,467{,}9$ t $\quad \alpha_1 = 1:292{,}109\ (c)$
$\quad = \mathit{6\,378\,566\ m}$
$a_2 = 3\,272\,303{,}2$ t $\quad \lambda_{a_1} = 41^\circ\,04'$ Ost $\quad \alpha_2 = 1:302{,}004\ (c)$
$\quad = \mathit{6\,377\,838\ m\ (1{,}949\,036\,31)}$ $\quad \alpha_e = 1:8886\ (c)$

Schubert veröffentlichte hier als erster Dimensionen eines dreiachsigen Ellipsoides. Er verwendete folgende vier meridionale Gradmessungen: die russisch-skandinavische ($25^\circ\,20'$), die 2. ostindische ($21^\circ\,21'$), die französische ($12^\circ\,22'$) und die peruanische ($3^\circ\,07'$).

Seine Rechenmethode ist nicht streng. Die Art der Kombination der Gradmessungen ist sehr willkürlich und auf den Endzweck ausgerichtet. Er leitete getrennt aus jeder der drei großen Gradmessungen Dimensionen ab, indem er jeweils die Nord- und die Südhälfte mit dem ganzen Bogen kombinierte. Die russische und die indische Messung gaben eine zufriedenstellende Übereinkunft in den drei Parametern; die französische dagegen nur nachdem die Station Carcassonne eine willkürlich angenommene Verbesserung von 2″ erhalten hatte. Er übernahm dann aus einer Kombination des indischen mit dem russischen Bogen, dem er das doppelte Gewicht gab, die kleine Halbachse b. Mit diesem Wert b berechnete er aus dem peruanischen Bogen einen Wert für die große Halbachse. Endlich bestimmte er die Äquatorellipse über die Werte der großen Halbachse aus den vorher ausgewerteten, auf verschiedenen Längengraden liegenden russischen, indischen und peruanischen Gradmessungen. Es ist also keine ganz zuverlässige Methode der Bestimmung der Dreiachsigkeit.

Schubert, T. F. de: „Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre." Mém. Acad. Imp. Petersburg 1859, Bd. 1, Nr. 6 (siehe auch Astr. Nachr. Nr. 1201, 1231, 1245—47).

39. Clarke 1860

I) $a_1 = 20\,926\,485$ ft $= 6\,378\,402$ m; $b = 20\,853\,768$ ft ± 953; $\alpha_1 = 1:287{,}78$ (c)

$a_2 = 20\,921\,177$ ft $= 6\,376\,785$ m $(0{,}304\,800\,47)$; $\lambda_{a_1} = 13°\,58'$ Ost; $\alpha_2 = 1:310{,}36$ (c); $\alpha_e = 1:3943$ (c)

Angeregt durch die kurz zuvor veröffentlichte Arbeit v. Schuberts, die mathematisch unbefriedigend war, leitete Clarke durch strenge Ausgleichung folgender großer Gradmessungen mit einer Amplitude von über 3° die Dimensionen eines dreiachsigen Ellipsoides ab: russisch-skandinavischer Bogen (25° 20′ mit 13 Stationen); kombinierter anglo-französischer Bogen (22° 10′ mit 12 Stationen); 2. ostindischer Bogen (21° 21′ mit 8 Stationen); südafrikanischer bzw. revidierter Kapbogen (Cape Point—North End, 4° 37′ mit 5 Stationen) und peruanischer Bogen (3° 07′ mit 2 Stationen); Gesamtamplitude 76° 35′ mit 40 Stationen.

Die große Äquatorachse a_1 geht durch Spitzbergen, Skandinavien, Deutschland, Italien, Lybien, südl. Westafrika, Wohltatmassiv (Antarktis), östl. Samoa, westl. Honolulu, Foxinseln und östl. der Behringstraße. Die kleine Achse a_2 verläuft durch die Nordlandinseln, Irkutzk, Mongolei, Kambodscha, östl. Singapur, SO-Sumatra, Westküste von Südamerika, Ekuador, Cuba-Ost, Washington DC und Baffins Bay.

II) $a = 20\,926\,217$ ft $= 6\,378\,321$ m $(0{,}304\,800\,47)$; $b = 20\,855\,221$ ft; $\alpha = 1:294{,}754$

Hier wurden die gleichen Gradmessungen wie bei I) verwendet, aber der Ansatz auf ein Umdrehungsllipsoid beschränkt.

Clarke, A. R.: „On the figure of the Earth." Mem. R.A.S. für 1859—1860, Vol. XXIX, London 1861, S. 39.

40. Struve 1860

$a = 3\,272\,539$ t $= 6\,378\,297$ m $(1{,}949\,036\,31)$; $\alpha = 1:(294{,}73 \pm 1{,}72)$ p. e.

$G = 57\,019{,}75$ t $\pm 1{,}15$

Struve erhielt aus dem russisch-skandinavischen Bogen (25° 20′) und dem 2. großen indischen Bogen (21° 21′)

$$G = 57\,023{,}52 \text{ t } \pm 1{,}44 \ (p.\ e.) \text{ und } \alpha = 1 : (291{,}97 \ \pm 2{,}42).$$

Dieses Ergebnis mittelte er nach entsprechender Gewichtsfestsetzung mit dem von Bessel 1841 und erhielt obige Dimensionen. Struves Dimensionen werden in Spanien als Referenzfläche verwendet. Levret erwähnte 1865 ebenfalls ein Ellipsoid von Struve mit

$$a = 6\,378\,230{,}0 \text{ m und } \alpha = 1 : 294{,}36$$

(siehe unter Levret, S. 46). Diese Werte konnten jedoch nicht in den verfügbaren Veröffentlichungen von Struve gefunden werden.

Struve, F. G. W.: „Arc du méridien de 25° 20′ entre le Danube et la Mer Glaciale mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855." Bd. 1, Petersburg 1860, S. 83/84.

41. v. Schubert 1861

$a = 3\,272\,667{,}1$ t $b = 3\,261\,104{,}3$ t $\alpha = 1 : 283{,}032$
$= 6\,378\,547$ *m (1,949 036 31)*

$$G = 57\,018{,}0 \text{ t} \qquad Q = 10\,001\,708 \text{ m}$$

Zwei Jahre nach seinem Versuch, die Dreiachsigkeit der Erdfigur nachzuweisen, verwarf v. Schubert seine Ansicht, daß die Ursache für die schlechte Übereinstimmung der astronomischen mit den geodätischen Ergebnissen nur auf der Annahme beruht, daß die Erde ein Umdrehungsellipsoid sei. Dieses Mal wertete er aus: die russisch-skandinavische Gradmessung (die ganze Amplitude und deren zwei Hälften), wobei er die Breite der nördlichsten Station Fuglenaes um 3″ änderte, um einen geschätzten (!) Einfluß einer Lokalattraktion zu kompensieren, die englische und die französische Gradmessung (aber ohne die Stationen Evaux und Barcelona). Die indische Gradmessungen ließ er auf Grund seiner Ergebnisse von 1859 als zu unsicher einfach weg. Er kombinierte jeden Bogen mit jedem und bekam so zehn Kombinationen, wobei die russische Gradmessung ein nicht gerechtfertigtes Übergewicht durch Einführung auch der beiden Halbbogen erhielt. Den Mittelwert aus diesen zehn Kombinationen hielt er dann als den wahrscheinlichsten Wert an.

Astr. Nachr., Bd. 55, S. 99, Kiel 1861.

42. Pratt 1861

$a = 20\,919\,988$ ft $b = 20\,846\,981$ ft $\alpha = 1 : 287$
$=$ *6 376 422 m (0,304 800 47)*

Pratt berechnete diese Dimensionen nur aus dem zweiten (großen) indischen Bogen unter Annahme von berechneten Lotabweichungen aus der Anziehung des Gebirges und der See, die er in die Ausgleichung mit einbezog.

Pratt, J. H.: „On the Indian Arc of Meridian." Phil. Trans. für 1861, Vol. 151, London 1862, Seite 579—594.

43. Clarke 1863

$a = 20\,926\,330$ ft $b = 20\,855\,240$ ft $\alpha = 1 : 294{,}36$
$=$ *6 378 355 m (0,304 800 47)*

Diese Dimensionen entstanden aus den von 1858/II, nachdem Clarke die inzwischen veröffentlichten, endgültigen Resultate der russisch-skandinavischen Gradmessung eingearbeitet hatte.

James, H.: „Extension of the triangulation of the Ordnance Survey into France and Belgium." London 1863, S. 52.

44. **Levret 1865**

$a = 6\,378\,232{,}5$ m $\qquad \alpha = 1:294{,}31$

Levret mittelte die zwei letzten neuesten Bestimmungen der Dimensionen der Erdfigur, nämlich

Clarke 1858/II $\quad a = 6\,378\,235$ m mit $\alpha = 1:294{,}26$

und

Struve 1860 $\quad a = 6\,378\,230$ m mit $\alpha = 1:294{,}36$.

Diese Dimensionen von Struve, die Levret hier anführt, stimmen mit denen von Struve 1860 in seinem Buch „Arc du Méridien..." nicht ganz überein ($a = 6\,378\,297$ m mit $\alpha = 1:294{,}73$). Levret gibt in seiner Arbeit aber keinen Literaturhinweis, woher er diese Werte hatte. Diese Dimensionen wurden als Rechenfläche für die französische Verbindungstriangulation nach England über den Ärmelkanal benützt, während die Briten für ihr Verbindungsnetz Clarke 1858/II wählten.

Levret, H.: „Jonction géodésique des triangulations de la France et de l'Angleterre." Mém. Dépôt Gén. de la Guerre, Suppl. au tome IX, Paris 1865 (dort auch Tafeln von $\varphi = 56{,}30^g$ bis $57{,}30^g$ auf S. 80).

45. **Clarke 1866**

I) $a_1 = 20\,926\,350$ ft $\qquad b = 20\,853\,429$ ft $\qquad \alpha_1 = 1:286{,}97$ (*c*)
$= 6\,378\,361$ *m*

$a_2 = 20\,919\,972$ ft $\qquad \lambda_{a_1} = 15°\,34'$ Ost $\qquad \alpha_2 = 1:314{,}38$ (*c*)
$= 6\,376\,417$ *m (0,304 800 47)* $\qquad \alpha_e = 1:3281$ (*c*)

II) $a = 20\,926\,062$ ft $\qquad b = 20\,855\,121$ ft $\qquad \alpha = 1:294{,}9791$
$= 6\,378\,274$ *m (0,304 800 47)* $\qquad \alpha = 1:294{,}9739$ (*c*)

Nachdem Clarke 1865 den Maßvergleich der meisten damals benutzten Normalmaße bzw. der geodätischen Längenmeßwerkzeuge abgeschlossen hatte, wiederholte er seine Ausgleichung aus dem Jahre 1860 mit den nach seinen Untersuchungen revidierten geodätischen Bogenlängen und veröffentlichte sie zusammen mit den Ergebnissen seiner Maßvergleiche. Lediglich die Längeneinheit in der südlichen Hälfte des zweiten (großen) ostindischen Bogens war damals noch nicht geklärt, bzw. war die von General Walker, dem derzeitigen Chef des Survey of India, begonnene Neumessung dieses Bogens von Cape Comorin bis Damargida noch nicht abgeschlossen.

Clarke, A. R.: „Comparisons of the standards of length of England, France, Belgium, Prussia, Russia, India and Australia, made at the Ordnance Survey Office, Southampton." London 1866, S. 280—287.

Tafeln zu II):

NB! Soweit die Tafeln metrische Werte enthalten, sind diese mit der Clarkeschen Meter-Fuß-Beziehung ($a = 6\,378\,206{,}4$ m) gerechnet.

Simmons, L. G.: „Natural tables for the computation of geodetic positions. Clarke's Spheroid of 1866." US C & GS, Spec. Publ. No. 241, Washington 1949.

US C & GS: „Tables for a polyconic projection of maps and lengths of terrestrial arcs of meridians and parallels based upon Clarke's reference spheroid of 1866." Spec. Publ. No. 5, Washington 1935 (metrisch).

— „Formulas and tables for the computation of the geodetic positions (0°—72°)." Spec. Publ. No. 8, 7. Aufl., Washington 1952 (metrisch).

US Army Map Service: „Clarke 1866 (meters), UTM Grid Tables for the latitudes 0°—80°. Transformation of coordinates from geogr. to grid and vice versa." Vol. I and II, TM No. 7, Washington ($a = 6\,378\,206{,}4$ m, $b = 6\,356\,583{,}8$ m).

— UTM Grid, Coordinates for $7^1/_2$ minutes intersections (0°—80°), TM No. 21, Washington.

— UTM Grid, Coordinates for 5 minutes intersections (0°—80°), TM No. 37, Washington 1949.

— „UTM Grid, Clarke 1866 spheroid (meters), Zone to Zone transformation tables.“ TM No. 50, Washington 1951.

— „UTM Grid, Clarke 1866 Spheroid (meters), Latitude Transformation, Geodetic Latitude to Rectifying Latitude and vice versa.“ TM No. 14, Washington.

II) verwendet: USA seit 1880, Canada, Belgisch Kongo (Kantanga), Ägypten (ältere Triangulation), Phillipinen.

46. Pratt 1866

$a = 20\,926\,184$ ft (189) $b = 20\,855\,304$ ft (316) $\alpha = 1:295{,}3$

$= 6\,378\,311$ *m (0,304 800 47)*

(312) Werte in ( ) aus dem Jahre 1865.

Pratt betrachtete diese Werte als die wahren Werte der Halbachsen der mittleren Erdfigur, nachdem er die unbekannten lokalen Anziehungen als weitere Unbekannte in seinem Ansatz berücksichtigte. Er schrieb, damit sei bewiesen, daß die erzwungene Hypothese eines elliptischen Äquators unnötig und unbegründet sei. Die größten Abweichungen sind in der großen Halbachse, 285 ft beim russischen Bogen, und in der kleinen Halbachse nur 62 ft beim anglo-französischen Bogen.

Pratt, J. H.: „Comparison of the Anglo-Gallic, Russian and Indian arcs, with the view to deduce from the mean figure of the Earth.“ Phil. Mag., Vol. XXXIII, 4 th series, London 1867, S. 145—152.

Hier soll gleich die Kritik Clarkes an der Prattschen Auswertung erwähnt werden, da diese wegen der Einführung der Lotabweichungsunbekannten als systematische Fehleranteile unzulässig ist. Clarke schrieb unter dem 9. Februar 1866: „In conclusion, the elements of the figure of the Earth deduced by archdeacon Pratt are, although they happen to be near the truth, arbitrary results, founded on an incorrect calculation and cannot be taken to supersede the results derived from the method of least squares in which the deflections at every station, without partiality, are fully taken into account and their most probable values exhibited“ (aus Clarkes Aufsatz „On Archdeacon Pratt's Figure of the Earth“, Phil. Mag. and Journal of Science, Vol. XXXI).

47. Villarceau 1866

$a = 6\,378\,204$ m $\alpha = 1:285{,}8$

$$Q = 10\,001\,334 \text{ m}$$

Villarceau unterzog 15 Breiten-, 14 Längen- und 7 Azimutstationen des französischen Landesnetzes einer Lotabweichungsausgleichung und erhielt das obige Ellipsoid als bestanschließendes für die französische Triangulation (Flächenmethode).

Villarceau, Y.: „Comparaison des déterminations astronomiques faites par l'Observatoire Impérial de Paris, avec les positions et azimuts géodésiques publiés par le Dépôt de la Guerre.“ C. R. Acad., tome 62, Paris 1866, S. 804—809.

48. Fischer, Ph. 1868

$a = 3\,272\,560$ t $b = 3\,261\,220$ t $\alpha = 1:288{,}5$ (Paucker)

$= 6\,378\,338$ *m (1,949 036 31)*

$$G = 57\,018 \text{ t} \qquad Q = 10\,001\,713{,}7 \text{ m}$$

Nach kritischer Betrachtung der bisherigen Bestimmungen der Dimensionen der Erdfigur aus Breitengrad- und Pendelmessungen und nach spezieller Untersuchung bzw. Abschätzung des Einflusses der durch Massenstörung systematisch verfälschten Beobachtungen auf die Abplattung und Halbachse an Hand der Besselschen Fehlergleichungen für die einzelnen Bogen, empfahl Fischer, die Abplattung aus den Pendelmessungen und die Halbachsen aus den Gradmessungen zu berechnen. Im Hinblick auf die vielen Kombinationen, die noch nach Fischer gerechnet wurden, ist eine Bemerkung Fischers erwähnenswert; er schreibt: „Wenn wir daher aus einem System von Fehlergleichungen, die aus Breitengradmessungen angesetzt worden sind, einen Schluß auf die Abplattung machen wollen und uns dabei auf die Zulässigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit der mit den verschiedenen Werten für die Abplattung α berechneten Werte für $\Delta\,l''$ (Amplitudenverbesserung) stützen müssen, so werden die verschiedenen Gradmessungen sehr verschiedene Verhältnisse zeigen.“ Fischer hält es demnach für gefährlich, einzelne Parameter aus bestimmten Gradmessungen ohne vorherige Diskussion der Genauigkeit abzuleiten.

Er unterzog dann die Schwingungszahlen auf den 27 Festlandstationen aus der Arbeit von Borenius, zusammen mit den Daten auf fünf neueren Stationen einer Ausgleichung und erhielt

$$v = 86\,260{,}9\;(1 + 0{,}005\,261 \sin^2 \varphi)\,,$$

woraus sich $\alpha = 1:294{,}96$ errechnete. Er übernahm aber dann den von Paucker gerechneten Wert mit $1:288{,}5$ ($1:288{,}62$ bei Paucker), da dieser im Gegensatz zu seinen Vorgängern „das Clairautsche Theorem vollständiger entwickelt und angewandt habe“. Da nach seiner Fehlerabschätzung der französisch-englische Bogen den geringsten Einfluß durch einen fehlerhaften Abplattungswert erhält und dieser außerdem noch ausgezeichnete Beobachtungsdaten aufweist, bildete er über den vorgegebenen Wert $\alpha = 1:288{,}5$ mit den 18 Breitenstationen (von Formentera bis Saxavord) 41 Fehlergleichungen, indem er jeweils die über $\Delta\varphi = 10°$ entfernten Zwischenstationen als Teilbogen kombinierte. Daraus ergaben sich die obigen Dimensionen, die er anschließend noch am russisch-skandinavischen Bogen nachprüfte, wobei er eine befriedigende Übereinstimmung erhielt. Die große Halbachse Fischers liegt tatsächlich den modernen Werten sehr nahe, obwohl seine Abplattung viel zu groß ist. Damit ist auch seine Feststellung, daß der fanzösisch-englische Bogen von der Abplattung wenig beeinflußt wird, und die Richtigkeit der von ihm oben aufgestellten Methode bestätigt.

Fischer, Ph.: „Untersuchungen über die Gestalt der Erde.“ Darmstadt 1868.

49.

Klein 1869

$\alpha = 1:289$ (Sabine)

$a = 3\,272\,766{,}1$ t
$\quad = 6\,378\,740$ *m (1,949 036 31)*

Klein übernahm den von Sabine aus Pendelmessungen gefundenen Abplattungswert und leitete aus den ihm am zuverlässigten erscheinenden vorhandenen Gradmessungen die große Halbachse ab.

Klein, H. J.: „Das Sonnensystem.“ Braunschweig 1869, S. 78—87.

50.

Listing 1873

$\alpha = 1:289{,}00$

$a = 6\,377\,365{,}0$ m $\qquad b = 6\,355\,298{,}0$ m

$G = 57\,009{,}47$ t

Listings Abplattungswert ist ein mittlerer Wert, den er aus verschiedenen Ergebnissen der Pendelmessungen abschätzte. a und b wurden dann auf Grund einer repräsentativen

„Erdkugel" vom festgesetzten Radius, $R = \sqrt[3]{aab} = 6\,370\,000$ m berechnet, die er über eine Abschätzung der kompensierten Geoidhöhen der Kontinente erhielt. Die scharfen Werte waren $a = 6\,377\,365{,}00566$ m und $b = 6\,355\,297{,}99872$ m. Listing nannte sein Ellipsoid einen Typ, der mehr oder weniger die mittlere Erdfigur repräsentieren sollte.

Die Arbeit selbst enthält außerdem noch eine kritische Studie über die 19 wichtigsten bisher berechneten Ellipsoide. Auf S. 41 wird die Bezeichnung „Geoid" zum erstenmal geprägt und definiert. In diesem Zusammenhang stellte Listing folgende Anforderung an die Bestimmung des idealen Erdellipsoides:

1. Die Summe aller Geoidhöhen N über und unter diesem Ellipsoid soll gleich sein, so daß Geoid und Ellipsoid gleiches Volumen haben.
2. Die Quadratsumme aller positiven und negativen Geoidhöhen soll ein Minimum sein.

Damit kann Listing als der Initator der modernen Entwicklung in der Bestimmung der Figur der Erde gelten.

Listing, I. B.: „Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde." Nachr. Kgl. Ges. der Wiss. und der Georg-August-Universität aus dem Jahre 1873." Göttingen 1873, S. 33—98.

51. **Dänisches Ellipsoid 1876**

$\log a = 6.514\,797\,7988$ t $\qquad \alpha = 1:300$

$a = 3\,271\,883{,}25$ t (c)

$= \mathit{6\,377\,104\ m\ (1{,}949\,0622)}$

$G = 57\,010$ t

Die Grundlagen, auf Grund derer dieses Ellipsoid berechnet wurde, konnten nicht gefunden werden. Die Projektion des Kartenwerkes des Kgl. Dänischen Generalstabes ist auf diesem Ellipsoid gerechnet, während seit 1928 das Kgl. Dänische Geodätische Institut das Internationale Ellipsoid (Hayford 1909) für seine geodätische Arbeiten benützt.

1) Andrae, C. C. G.: „De tilbagestaaende Dele af Triangelnettet og dettes Nedlaegning paa Sphaeroiden." Den Danske Gradmaaling, Bd. 3, København 1878, S. 306.

2) Andrae, C. C. G.: „Problèmes de haute géodésie. Détermination du sphéroide terrestre par la combinaison des mesures géodésiques avec les observations astronomiques." Copenhague 1883, S. 27.

Tafeln mit 7 und 10 Stellen für den Bereich von $\varphi = 53°$ bis $58°$ befinden sich in 1). S. 312.

Andrae berechnete auch ein bestanschließendes Ellipsoid aus 5 Breiten-, 2 Längen- und 5 Azimutstationen der I. Ord. Triangulation von Schumacher-Andrae. Diese Dimensionen lauten:

$a = 3\,272\,115{,}97$ t (c) $\qquad \alpha = 1:(328{,}97 \pm 77{,}86)$

$= \mathit{6\,377\,558\ m\ (1{,}949\,0622)}$

$G = 57\,022{,}43$ t $\pm 27{,}37$

3) Andrae, C. C. G.: De astronomiske Iagttagelser og Bestemmelsen af Sphaeroiden." Den Danske Gradmaaling, Bd. 4, København 1884, S. 373—374 und 2) S. 51—52.

(Diese Unterlagen wurden von Prof. Dr. E. Andersen, Direktor des Kgl. Dänischen Geodätischen Institutes freundlicherweise geprüft und bestätigt.)

52. **Fischer, A. 1876**

$\alpha = 1:284{,}4$
$\alpha = 1:296{,}6$

Fischer unterzog die Länge des Sekundenpendels auf 73 Stationen (einschl. der letzten von Schumacher, Bessel und Albrecht) in einem Bereich von

$$\varphi = -62^\circ\,56' \text{ bis } \varphi = +79^\circ\,50'$$

einer Ausgleichung und erhielt die Gleichung

$$\mathfrak{l} = 0{,}991\,0108 \text{ m } (1 + 0{,}005\,151 \sin^2\varphi)\,,$$

aus der er den ersten Abplattungswert ableitete. Da gerade die 22 Stationen zwischen $\varphi = +30^\circ$ und -30° die größten Verbesserungen erhielten, die er großen lokalen Störungen zuschrieb, wiederholte er die Ausgleichung mit den restlichen 51 Stationen und erhielt

$$\mathfrak{l} = 0{,}990\,9146 \text{ m } (1 + 0{,}005\,297 \sin^2\varphi)$$

und den zweiten Abplattungswert.

Fischer wies außerdem in einer Fußnote auf den Irrtum hin, der sich in vielen Veröffentlichungen über das Airysche Ellipsoid eingeschlichen hat; nämlich, daß die Airyschen Dimensionen nicht aus 14 Breiten- und 4 Längengradmessungen, sondern nur über 8 Breitengradmessungen abgeleitet wurden.

Fischer, A.: „Die Gestalt der Erde und die Pendelmessungen." Astr. Nachr., Bd. 68, Kiel 1876, S. 81—98 und S. 247—252.

53. **Listing 1877**

$a = 6\,377\,377{,}0$ m $\quad b = 6\,355\,270{,}0$ m $\quad \alpha = 1:288{,}48$

$G = 53\,009{,}41$ t

Nach einer kritischen Studie über alle vorhergehenden Auswertungen der Pendelmessungen und der daraus abgeleiteten Abplattungswerte bestimmte Listing dieses Mal seine Abplattung als gewogenes Mittel der ihm vertrauenswürdig erscheinenden Arbeiten, wie E. Schmidt (Gewicht 1), Bowditch ($G = 2$), Sabine ($G = 3$), Foster-Baily ($G = 4$), Baily ($G = 10$) und Borenius ($G = 5$). Da diese hier angeführten Bearbeiter immer die gleichen alten Messungen, jeweils vermehrt um die zeitgenössischen benützten, führt diese Art der Bestimmung zu einer Überbewertung gerade der ältesten Beobachtungen.

Die Halbachsen wurden wieder aus dem Radius 6 370 km der Kugel gleichen Inhalts wie der des Ellipsoids unter Beibehaltung von α berechnet (siehe S. 48).

Listing, J. B.: „Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers." Nachr. Kgl. Ges. d. Wiss. u. d. Georg-August-Universität aus dem Jahre 1877." Göttingen 1877, S. 749—815.

54. **Schott 1877**

$a = 6\,378\,054{,}3$ m $\quad \alpha = 1:305{,}48$

Diese Dimensionen wurden wahrscheinlich aus einer Lotabweichungsausgleichung des damaligen Netzes des US C & G Survey gewonnen. Diese Arbeit soll auch der Anlaß zur

Aufgabe des Besselellipsoides als Referenzellipsoid in den USA und Übernahme der Clarkeschen Dimensionen von 1866 gewesen sein.

Schott, Ch. A.: „Comparisons of local deflections of the plumbline.“ US C & G S, Report for 1879, Appendix No. 8, S. 110—123 (stand nicht zur Verfügung).

55. **Jordan 1878**

$a = 6\,377\,757$ m $\qquad b = 6\,355\,500$ m $\qquad \alpha = 1 : 286{,}5$

$$Q = 10\,000\,681 \text{ m}$$

Diese Dimensionen werden von mehreren Autoren genannt, z. B. Gore 1891. Sie konnten aber in den Jordanschen Veröffentlichungen und Schriftenverzeichnissen nicht gefunden werden.

56. **Clarke 1878/80**

I) $a = 20\,926\,202$ ft ± 245 $\qquad b = 20\,854\,895$ ft ± 227 $\qquad \alpha = 1 : (293{,}465 \ \pm 1{,}07)$
$\quad = 6\,378\,316$ *m (0,304 800 47)* $\qquad \alpha = 1 : 293{,}466\,3077$ (c)

Diese Dimensionen sind allgemein unter Clarke 1880 bekannt. Tatsächlich hatte sie aber Clarke schon 1878 veröffentlicht. Bei dieser Berechnung entwickelte Clarke einen eigenen Ansatz und verwendete erstmals auch mehrere Parallelkreisbogen zur Bestimmung.

Folgende Gradmessungen wurden ausgewertet: Die russisch-skandinavische ($\Delta\varphi = 25^\circ 20'$ mit 13 Stationen); die kombinierte englisch-französische ($\Delta\,\varphi\, 22^\circ 10'$ mit 15 Stationen); die revidierte 2. ostindische (Kudankulam—Kaliana, $\Delta\,\varphi = 21^\circ 09'$ mit 18 Stationen); der nördliche Teil des neuen dritten ostindischen Meridians (Walwari—Shapur, $\Delta\,\varphi = 11^\circ 17'$ mit 6 Stationen); zwei ostindische Parallelbogen (Mangalore—Madras, $\Delta\,\lambda = 5^\circ 24'$ mit 3 Stationen; Bombay—Vizagapatam, $\Delta\,\lambda = 10^\circ 31'$ mit 3 Stationen und der gemeinsamen Referenzstation Bellary); der revidierte Kapmeridian (Cape Point—North End, $\Delta\varphi = 4^\circ 37'$ mit 5 Stationen) und der klassische peruanische Meridian ($\Delta\,\varphi = 3^\circ 07'$ mit 2 Stationen). Die Gesamtamplitude ist $\Delta\,\varphi = 87^\circ 40'$ mit 49 Breitenstationen und $\Delta\lambda = 15^\circ 55'$ mit 7 Längenstationen. Die zwei ostindischen Meridianbogen besitzen zwar zusammen 66 Breitenstationen, Clarke wählte davon aber nur 14 gleichmäßig verteilte aus, um das Gewicht der indischen Gradmessungen den übrigen gleichwertig zu machen.

Der von Clarke gegebene Abplattungswert, $\alpha = 1 : 293{,}465$ stimmt nicht scharf mit den von ihm gleichfalls gegebenen Werten der beiden Halbachsen überein. Der aus a und b gerechnete Wert ergibt 1 : 293, 466 3077. Bei den Referenzellipsoiden nach Clarke 1878/80 ist daher besonders darauf zu achten, welche zwei Originalwerte, a und α oder a und b, angehalten wurden. Eine weitere Unstimmigkeit liegt in der Verwendung der Clarkeschen metrischen Dimensionen. Die von Clarke angegebene Meter-Fuß-Beziehung und die damit in Meter umgerechneten Dimensionen sind um 1 : 95 200 vom (internationalen) Meter verschieden. So gilt in Südafrika und im südlichen Teil des Kap-Kairo-Meridians

$$a = 6\,378\,249{,}145\,326 \text{ m} \qquad b = 6\,356\,514{,}966\,721 \text{ m} \qquad \alpha = 1 : 293{,}465$$

und daher für den „South African Geodetic Foot“ (SAG ft), der weder mit dem englischen Fuß noch mit dem Kap-Fuß identisch ist,

$$1\,\text{m} = 3{,}280\,869\,33 \text{ SAG ft}, \quad 1 \text{ SAG ft} = 0{,}304\,797\,265 \text{ m}.$$

Siehe: McCaw, G. T.: „The two metres: The story of an African Foot", ESR 1939, No. 32, S. 96—105. Hendrikz, D. R.: „South African Units of Length and Area." Spec. Publ. No. 2, Pretoria.

Auch Frankreich verwendet seit 1881 die metrischen Clarkeschen Dimensionen, und zwar

$$a = 6\,378\,249{,}2 \text{ m} \qquad b = 6\,356\,515{,}0 \text{ m} \qquad \alpha = 1 : 293{,}466\,0208,$$

obwohl dies eigentlich Clarkesche l e g a l e Meter sind (siehe unter Britisches System, S. 19).

II) Da die ostindischen Beobachtungswerte sich nicht besonders gut den Dimensionen unter I) anpaßten, berechnete Clarke auch noch ein dreiachsiges Ellipsoid:

$$\begin{array}{llr}
a_1 = 20\,926\,629 \text{ ft} & b = 20\,854\,477 \text{ ft} & \alpha_1 = 1 : 290{,}04 \ (c) \\
 = \mathit{6\,378\,446\ m\ (0{,}304\,800\,47)} & & \\
a_2 = 20\,925\,105 \text{ ft} & \lambda_{a_1} = 8^\circ\, 15' \text{ West} & \alpha_2 = 1 : 296{,}27 \ (c) \\
 = \mathit{6\,377\,982\ m} & & \alpha_e = 1 : 13\,731 \ (c)
\end{array}$$

a_1 verläuft durch Irland, Portugal, franz. Westafrika, Liberia, südöstl. Atlantik, Neuschwabenland (Antarktis), Südinsel von New Zealand, östl. Marschallinseln und westliche Antillen; a_2 westl. Novosibirsk, Sinkiang, Ceylon, südöstl. Pazifik, Mexiko, Mitte der USA, Winnipeg-See. Ausgewertet wurden die gleichen Meridianbogen wie bei I), aber nur der eine ostindische Parallelbogen Bombay—Vizagapatam und nur mit seinen beiden Endstationen; Gesamtamplitude $\Delta\varphi = 87^\circ\, 40'$ mit 49 Breitenstationen und $\Delta\lambda = 10^\circ\, 31'$ mit 2 Längenstationen.

III) $\qquad \alpha = 1 : (292{,}2 \pm 1{,}5)$

Clarke unterzog folgende sechs Gruppen von 94 Pendelstationen einer strengen Ausgleichung ihrer Schwingungszahl des Sekundenpendels:

Gruppe 1 (35 ältere Stationen von Kater bis Foster),
Gruppe 2 (29 meist indische Stationen von Basevi—Heaviside),
Gruppe 3 (12 russische Stationen von Sawitch),
Gruppe 4 (11 bzw. 7 Stationen von Freycinet—Duperrey, da 4 gemeinsam sind),
Gruppe 5 (6 Stationen von Lütke),
Gruppe 6 (5 Stationen von Biot—Arago).

Fast die Hälfte dieser Stationen sind Küsten- bzw. Inselstationen. Von den vier Ausgleichungen (Gruppe 1 bis 6 nicht untereinander korreliert, $\alpha = 1 : 288{,}7$; Gruppe 1 nur mit 2 korreliert, $\alpha = 1 : 292{,}2$; Gruppe 2 nur mit 3 korreliert, $\alpha = 1 : 293{,}3$; Gruppe 1, 2 und 3 untereinander korreliert, $\alpha = 1 : 294{,}0$) hielt er das Ergebnis der Ausgleichung 2 für am wahrscheinlichsten. Mit dieser Clarkeschen Auswertung der Pendelmessungen fand die alte Epoche, die jeweils alle verfügbaren Stationen ohne Differenzierung in gestörte und ungestörte zusammen auswertete, ihren Abschluß, um 1884 mit Helmert eine neue Entwicklung einzuleiten.

Clarke, A. R.: „On the figure of the Earth." Phil. Mag. and Journ. of Sciences, Vol. VI, 5th Series, London 1878, S. 81—93, v. 15. Juni 1878.

Clarke, A. R.: „Geodesy." Oxford 1880, S. 319 und für III) S. 341—350.

T a f e l n:

1) Hinks, A. R.: „New Geodetic Tables for the Clarke's Figure of 1880 ($\varphi = 0^\circ$ to $\varphi = 90^\circ$) with transformation to Madrid 1924 (int. spheroid) and other figures", 10stellig, Royal Geogr. Society, Techn. Series No. 4, London 1927; a (in Clarkeschen Metern) und α angehalten.

2) R. G. S.: „Geodetic Tables for the Clarke 1880 Figure in Feet for Latitudes 0° to 70°." HMSO, London 1936 (hier auch Formeln für den Übergang auf Airy, Everest, Clarke 1858 und Bessel).

3) Service Géographique de l'Armée, 8stellig, von $\varphi = 0°$ bis $\varphi = 58°$, metrisch, Paris.

4) Tardi, P.: „Nouvelle table des éléments de l'ellipsoide de Clarke (1880)", 8stellig, von 30g—60g (27° bis 54°), metrisch, Inst. Géogr. Nat., Paris 1942.

5) US Army Map Service (AMS): „Clarke 1880 spheroid (meters), UTM Grid tables for latitudes 0°—80°, Transformation of coordinates from geographic to grid and vice versa" ($a = 6\,378\,249{,}145$ m, $\alpha = 1:293{,}465$), Vol. I and II, TM No. 9, Washington 1950.

6) US AMS: „Clarke 1880 spheroid (meters), UTM Coordinates for 5 minutes intersections (8°—40° 05')." TM No. 48, Washington 1950.

7) US AMS: „UTM Grid, Clarke 1880 spheroid (meters), Zone to Zone transformation tables." TM No. 50, Washington 1951.

8) Schreiber, O. - Hendrikz, D. R.: „Geodetic Tables for the Clarke 1880 spheroid." Dept. of Lands, Trig. Survey, Spec. Publ. No. 3, Pretoria 1947; a und b (in roods) angehalten, 1 rood = 12,396 SAG ft.

Angewendet:

Großbritannien, Frankreich seit 1881 (vorher Delambre)[1]), Sudan ($a = 6\,378\,249{,}14533$ m), Rumänien (teilweise), Bezugsfläche für die Projektion der Intern. Weltkarte.

57. Helmert 1884

I) $\alpha = 1:(299{,}26 \pm 1{,}26)$

Helmert unterzog die 165 vorliegenden Pendelbeobachtungen (von Kater 1818 bis zu Kulberg 1880) zuerst einer kritischen Würdigung. Für die von mehreren Beobachtern besetzten Stationen ermittelte er jeweils einen einzigen Wert für die Pendellänge durch eine strenge, lokale Ausgleichung, so daß schließlich je eine „beobachtete" Pendellänge für 122 Stationen vorlag. Nach Reduktion auf Meereshöhe bei Kondensation der sichtbaren Massen auf eine Kondensationsfläche in $T = 21$ km Tiefe bildete er repräsentative Mittelwerte vom Gewicht 1 in den acht Breitenintervallen 0° bis ±10°, ±10° bis 20° usw. Durch diese Mittelbildung wurde die für eine Ausgleichung geforderte gleichmäßige Verteilung erreicht. Andernfalls wären bei der vorliegenden ungleichmäßigen Verteilung der Stationen über die Erdoberfläche systematische Einflüsse zu befürchten gewesen, die sich bei den Vorgängern Helmerts immer in einer zu großen Abplattung ausgewirkt hatten. Aus den acht Fehlergleichungen ergab sich die Länge des Sekundenpendels.

$$\mathfrak{l} = 990{,}918 \text{ mm } (1 + 0{,}005\,310 \sin^2 \varphi)$$

bzw. die entsprechend reduzierte Normalschwere zu

$$\gamma = 978{,}00 \text{ Gal } (1 + 0{,}005\,310 \sin^2 \varphi)$$

und daraus die Abplattung über das von Helmert erweiterte Clairautsche Theorem zu $\alpha = 1:299{,}26$. Die Länge in obiger Formel bedarf noch einer positiven Korrektur von etwa 1 : 95 000, da es sich hauptsächlich um englische Messungen, also um Clarkesche Meter handelt.

II) $\alpha = 1:(297{,}8 \pm 2{,}2)$

Hansen verbesserte 1864/65 das von Laplace aufgestellte Formelsystem für die Breiten- und Längenstörung des Mondes infolge der elliptischen Erdfigur durch Einführung

[1]) Tafeln für den Übergang vom bisherigen (Delambre) Ellipsoid auf Clarke 1878/80 Ellipsoid: „Formules et tables pour la transformation des coordonnées des points de l'ancienne triangulation de la France dans la nouvelle triangulation." Paris 1922.

von Gliedern höherer Ordnung. Außerdem bestimmte er auch ihre durch neue Beobachtungen gewonnenen numerischen Koeffizienten. Mittels dieser Ergebnisse berechnete Helmert $\alpha = 1:300{,}0$ und $\alpha = 1:295{,}6$, im Mittel $1:(297{,}8 \pm 2{,}2)$.

III) $a = 6\,378\,830$ m $\alpha = 1:299{,}15$ (Bessel)

Die große Halbachse wurde über die Mondparallaxe, gewonnen aus korrespondierenden Beobachtungen auf dem Kap der Guten Hoffnung und mehreren europäischen Stationen, der Besselschen Abplattung und der von Helmert oben bestimmten Normalschwere abgeleitet. Da hier die noch unbekannten Lotabweichungen der Beobachtungsstationen das Ergebnis beeinflussen, ist dieses mehr von theoretischem historischen Interesse.

58. Helmert 1887

$a = 6\,378\,153$ m $b = 6\,356\,832$ m $\alpha = 1:299{,}153$ (Bessel)

Helmert leitete aus der englisch-französischen und der russisch-skandinavischen Gradmessung mit dem Besselschen Abplattungswert über das Clarkesche Formelsystem 1878/80 diese Dimensionen ab. Der englisch-französische Bogen allein ergab $a = 6\,377\,897$ m, der russisch-skandinavische $a = 6\,378\,357$ m.

Helmert, F. R.: „Bericht über Lotabweichungen." C. R. IAG für 1887, Berlin 1888, Annex I, S. 7.

59. Bonsdorff, A. 1888

$a = 3\,272\,563{,}37$ t $\pm 59{,}8$ $\alpha = 1:(298{,}59 \pm 7{,}8)$
$= 6\,378\,444$ *m (1,949 066 91)*

Diese Dimensionen wurden allein nur aus dem russisch-skandinavischen Eismeermeridian abgeleitet. Der Maßstab dieses Meridians beruht einheitlich auf der russischen Doppeltoise N, woraus sich der Umwandlungsfaktor 1,949 066 91 ergibt.

Bonsdorff, A.: „Bestimmung der Erddimensionen auf Grund der Russisch-Skandinavischen Gradmessung." Zeitschr. Fennia, Nr. 15, Bd. I, 1889.

60. Tisserand 1889

$\alpha = 1:297{,}2$

Tisserand berechnete ebenfalls wie Helmert 1884 aus Hansens numerischen Koeffizienten der Mondstörungsglieder die Abplattung. Sein Wert liegt weit innerhalb des von Helmert gerechneten *mse.*

Tisserand, M. F.: „Réflexions au sujet de la constitution de la Terre supposée fluide dans son intérieur, et remarques sur les diverses méthodes employées pour déterminer l'aplatissement superficiel." C. R. 9. Gen.-Vers. IAG in Paris 1889, Berlin 1890, Annex A X, S. 8—9.

61. Harkness 1891

I) $a = 20\,925\,293$ ft $\pm 409{,}4$ $b = 20\,855\,590$ ft $\pm 325{,}1$ $\alpha = 1:(300{,}205 \pm 2{,}964)$
$=$ *6 378 039 m (0,304 800 47)* *p. e.*

$Q = 32\,814\,652$ ft.

II) $\alpha = 1:297{,}67$

Harkness untersuchte und diskutierte alle zu seiner Zeit verfügbaren astronomischen, geodätischen, gravimetrischen und Gezeitenbeobachtungen und wählte für seine weitere Ausarbeitung die zuverlässigsten Werte folgender Konstanten aus:

Die Sonnen- und Mondparallaxe, die Lunisolarpräzession, die Nutation, die parallaktische Ungleichheit des Mondes, die Mondgleichung in der Erdbewegung, die Erdabplattung, die kombinierte Masse von Erde und Mond, die Mondmasse und die Aberration als eine der wichtigsten Konstanten. Zwischen diesen Konstanten stellte er dann die Beziehung mittels sieben Bedingungsgleichungen her, so daß „the final result should be consistent with another".

Um den besten hier einzuführenden Abplattungswert zu erhalten, berechnete er das gewogene Mittel aus den ihm plausibelsten erscheinenden Abplattungswerten aus den geodätischen und gravimetrischen Beobachtungen, aus den Gezeiten und aus der Präzession-Nutation, wobei er letzteren selbst zu $\alpha = 1:297{,}67$ berechnete. Dieser Wert liegt ebenfalls innerhalb des *mse* von Helmert und Tisserand.

Harkness, W. M.: „The solar parallax and its related constants including the figure and density of the earth." Washington 1891.

62. Shdanov 1893

$a = 6\,377\,717$ m ± 307 $b = 6\,356\,433$ m $\alpha = 1:(299{,}65 \pm 6{,}9)$
$= 6\,377\,817$ *m (korrigiert um* $+ 1:636\,94$*)*

Shdanov wertete ein Rahmennetz, das aus den beiden russischen Parallelkreismessungen in $\varphi = 47°\,30'$ (Kiszeniew—Sarepta) und in $\varphi = 52°$ (Grodno—Szirokij Bujerak) und deren drei kurzen meridionalen Verbindungsketten (Kiszeniew—Grodno, Alexandrowsk—Orel, Sarepta—Szirokij Bujerak) gebildet wird, aus. Die Gesamtamplitude beträgt $\Delta\varphi = 14°\,54'$ und $\Delta\lambda = 85°\,11'$. Die metrische Einheit wurde höchstwahrscheinlich von der Doppeltoise N über das hier nicht zutreffende legale Verhältnis abgeleitet und ist daher oben mit $+ 1:63\,694$ korrigiert worden. Diese Dimensionen stellen ein bestanschließendes Ellipsoid für dieses Triangulationsgebiet dar, für das damals noch offiziell die Walbeckschen Dimensionen mit $\alpha = 1:302{,}78$ galten und später dann die Besselschen mit $\alpha = 1:299{,}15$ übernommen wurden.

1) Sapiskis, Bd. 50, Petersburg 1893.

2) Truck, S.: „Gradmessungsarbeiten in Rußland." ZfV, Stuttgart 1903, S. 193—204.

3) Truck, S.: „Ausgleichung der russischen Gradmessungsnetze für Landesvermessungszwecke." ZfV, Stuttgart 1904, S. 273—283 und S. 305—316.

63. Furber 1898

$a = 20\,928\,717$ ft $b = 20\,851\,260$ ft $\alpha = 1:270{,}2$
$=$ *6 379 083 m (0,304 800 47)*

Furber erhielt diese Dimensionen aus einer Lotabweichungsausgleichung (86 Lotabweichungspunkte) der ersten Triangulation von New South Wales, Australien. Sie stellen ein bestanschließendes Ellipsoid für dieses Gebiet dar. Obwohl sie stark aus dem Rahmen fallen, sind sie wegen ihrer Lage auf der südlichen Halbkugel auf einer großen kontinentalen Insel von Interesse. Die außergewöhnlich starke Abplattung ist wahrscheinlich durch eine starke Aufwölbung des Geoids am Rand des Kontinents, der dort gleich bis zu 2000 m ansteigt, zu erklären.

Nachdem Furber den Lotabweichungspunkten in Azimut und Länge nur halbes Gewicht erteilte, erhielt er

$a = 20\,927\,142$ ft $\qquad b = 20\,851\,595$ ft $\qquad \alpha = 1:277{,}0$
$= \mathit{6\,378\,603\ m\ (0{,}304\,800\,47)}$

Furber, T. F.: „The Trigonometrical Survey of New South Wales." Report 7 th Meeting Australasian Assoc. Advancement of Science, Sydney 1898, S. 225—226.

64. New South Wales 1898

$a = 20\,923\,134$ ft $\qquad b = 20\,853\,428$ ft $\qquad \alpha = 1:300{,}17$
$= \mathit{6\,377\,738\ m\ (0{,}304\,800\,47)}$

Die große Halbachse scheint von Clarkes dreiachsigem Ellipsoid 1866 ($a_1 = 20\,926\,350$ ft, $a_2 = 20\,919\,972$ ft, $b = 20\,853\,429$ ft, $\lambda_{a_1} = 15^\circ\,34'$ Ost) für den Meridian von Sydney in 152° östlicher Länge abgeleitet zu sein. Diese Dimensionen dienten als Referenzfläche für die Berechnung der ersten Triangulation von New South Wales, Australien.

Furber, T. F.: „The Trig. Survey of New South Wales." Sydney 1898.

Chestermann, A. H.: „The Trigonometrical Survey of New South Wales." Sydney 1924, S. 27.

65. Darwin 1900

$\alpha = 1:296{,}4$

Darwin berechnete aus dem neuesten beobachteten Wert der Präzessionskonstanten über die Beziehung der Hauptträgheitsmomente der Erdmasse, $\frac{C - A}{C}$, den Abplattungswert. Die bisher mit dieser Methode abgeleiteten Abplattungswerte zeigen im Vergleich zu den aus geodätisch-astronomischen Beobachtungen oder den Pendelmessungen erhaltenen Werten, die kleinste Streuung, da sie universell bestimmt sind, während jene aus Gravimetrie und Triangulation von der jeweils mehr oder minder ungleichen Verteilung der Beobachtungen über die Erdoberfläche abhängen und daher systematisch verfälscht sein können. Bei dieser Methode spielt jedoch noch die Hypothese über die Massenverteilung im Erdinneren eine, wenn auch nicht so einflußreiche Rolle.

Darwin, G. H.: „The theory of the figure of the Earth carried to the second order of small quantities." M. N. RAS, Vol. 60, London 1900, S. 82—124.

66. Schott 1900

$a = 6\,378\,157$ m $\pm 90 \qquad \alpha = 1:(304{,}5\ \pm 1{,}9)$

Schott führte eine Lotabweichungsausgleichung der großen schiefen nordamerikanischen Gradmessung bzw. Dreieckskette mit 36 Breiten-, 14 Längen- und 34 Azimutstationen durch. Die Kette verläuft vom St. Croix River bei Calais im Staate Maine im Nordosten der Staaten bis zum Mississippi-Delta bei New Orleans ($\varphi = 45^\circ\,11'$, $\lambda = 292^\circ\,43'$ bis $\varphi = 29^\circ\,57'$, $\lambda = 269^\circ\,56'$).

Schott, C. A.: „The eastern oblique arc of the United States and osculating spheroid." US C & GS, Spec. Publ. No. 7, Washington 1902, S. 394.

67.

Helmert 1901

$\alpha = 1 : (298{,}3 \ \pm 1{,}1)$

Helmert unterzog die Pendelmessungen auf dem Festland und an den Küsten, insgesamt 1603 Stationen, nach einer Freiluftreduktion einer Ausgleichung. Dabei erweiterte er die Schwereformel noch um ein Glied mit dem Faktor $\sin^2 2\,\varphi$, der Kugelfunktion vierten Ranges entsprechend. Da der mittlere Fehler des Koeffizienten dieses Gliedes ziemlich groß ausfiel, ersetzte er ihn durch den 1897 von E. Wiechert — G. H. Darwin aus geophysikalischen Daten empirisch gefundenen Wert —0,000 007. Es ergab sich folgende Formel der Normalschwere.

$$\gamma = 978{,}030 \text{ Gal} \, (1 + 0{,}005\,302 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\,\varphi)\,.$$

In der Originalarbeit war die Äquatorschwere noch auf das alte Wiener System bezogen und lautete 978,046.

Helmert, F. R.: „Der normale Teil der Schwerkraft im Meeresniveau." Sitz.Ber. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss., Berlin 1901, S. 328—336.

68.

Tittmann 1904

$\alpha = 1 : 300{,}7$

Tittmann wertete das US-Triangulierungsnetz zusammen mit den Ergebnissen großer Triangulationen in anderen Erdteilen aus. Die Originalveröffentlichung ist dem Verfasser nicht bekannt. Die Angaben wurden der Arbeit von See 1921 entnommen.

69.

Helmert 1906

I)	$a = 6\,378\,150$ m	$\alpha = 1 : 299{,}15$ (Bessel)
II)	$a = 6\,378\,140$ m	$\alpha = 1 : (298{,}3 \ \pm 1{,}1)$
III)	$a = 6\,378\,200$ m	$\alpha = 1 : (298{,}3 \ \pm 1{,}1)$

Helmert berechnete aus jedem der vier großen europäischen Meridian- und Parallelkreisbogen die große Halbachse unter Festhalten der Besselschen bzw. seiner aus Schweremessung 1901 gefundenen Abplattung. Die vier Ergebnisse wurden dann gemittelt und ergaben die Werte unter I) und II). Helmert zog die Auswertung der einzelnen Gradmessungen einer Gesamtausgleichung vor, um anscheinend einen Einblick in die lokalen Auswirkungen zu bekommen. Er startete damit eine Art neue moderne Kombinationsmethode. Die hier ausgewerteten Gradmessungen waren:

Der russisch-skandinavische Meridian ($\Delta\,\varphi = 25^\circ\,20'$ mit 13 Stationen), der westeuropäisch-afrikanische Meridian (Laghouat—Saxavord, $\Delta\,\varphi = 27^\circ\,02'$ mit 38 Stationen), der europäische Parallel in 52° Breite (Feaghmain—Orsk, $\Delta\,\lambda = 69^\circ$ mit 28 Stationen) und der russische Parallel in $47^1/_2{}^\circ$ Breite (Kiszeniew—Astrachan, $\Delta\,\lambda = 19^\circ\,12'$ mit 6 Stat.).

Auf der 15. Generalversammlung der IAG in Budapest 1907 schlug Helmert die unter III) angeführten Werte als augenblicklich die wahrscheinlichsten vor. Die Abplattung stimmt mit der von Krassowsky 1940 bestimmten überein, während Helmerts große Halbachse 48 m kleiner ist.

Helmert, F. R.: „Die Größe der Erde." Sitz.Ber. Kgl. Preuß. Akad. Wiss., Berlin 1906, S. 525—537.

III) wurde als Referenzfläche zur Berechnung der Triangulation des Niltales verwendet. 7stellige Tafeln hierzu befinden sich in: Craig, J. I.: „Theory of Map Projections." Kairo 1910.

70. **H a y f o r d 1906**

$a = 6\,378\,283$ m ± 34 $\quad b = 6\,356\,868$ m $\quad \alpha = 1:(297{,}8 \; \pm 0{,}9)$ *p. e.*

(Ausgleichstiefe 113,7 km)

Nach topographisch-isostatischer Reduktion unterzog Hayford 265 Breiten, 79 Längen- und 163 Azimutstationen des US-Netzes einer Lotabweichungsausgleichung (Flächenmethode). Benützt wurden: Der transkontinentale Bogen von New Jersey nach Kalifornien, der westliche schiefe Bogen von Kalifornien, der östliche schiefe Bogen von Maine nach Lousiana, die Lake-Survey-Triangulation und mehrere kleinere Triangulationen. Insgesamt wird damit eine Fläche von $29^\circ\,57'$ bis $48^\circ\,47'$ in Breite ($\Delta\varphi = 18^\circ\,50'$) und von $235^\circ\,36'$ bis $292^\circ\,44'$ in Länge ($\Delta\lambda = 57^\circ\,08'$) bedeckt.

Hayford setzte folgende fünf Ausgleichungen an:

Lösung A: ohne jede Reduktion unter Annahme, daß keine Beziehung zwischen Lotabweichung und Topographie besteht, d. h. Ausgleichstiefe 0,

Lösung B: nur topographische, aber k e i n e isostatische Reduktion unter der Annahme, daß die Erdrinde einheitlich homogen ist, d. h. Ausgleichstiefe unendlich,

Lösung E: Ausgleichstiefe 162,2 km,

Lösung G: Ausgleichstiefe 113,7 km,

Lösung H: Ausgleichstiefe 120,9 km.

Hayford benützte Harkness' Werte für die mittlere Oberflächendichte, 2,67 und für die mittlere Erddichte im ganzen, 5,576. Der äußerste Ring der Reduktion war 4126 km. Lösung G (siehe Dimensionen oben) ergab die kleinste Fehlerquadratsumme und Ausgleichung B die größte. Neben der Lösung G ist noch die von A von Interesse, da diese in der klassischen Art als bestanschließendes Ellipsoid gerechnet wurde:

$a = 6\,377\,945$ m $\quad b = 6\,356\,435$ m $\quad \alpha = 1:296{,}5$

Die vorhandenen elf Laplacepunkte wurden in der Ausgleichung nicht verwendet und dienten nur zur Überprüfung nach der Ausgleichung. Clarkes Dimensionen von 1866 dienten als Rechenfläche, wobei für die Meter-Fuß-Beziehung, 1 ft = 0,304 8006 m, galt.

Hayford, J. F.: „The figure of the Earth and isostasy from measurements in the United States." USC&GS, Washington 1909.

71. **H a y f o r d 1909**

$a = 6\,378\,388$ m ± 18 $\quad b = 6\,356\,909$ m $\quad \alpha = 1:(297{,}0 \; \pm 0{,}5)$ *p. e.*

(Ausgleichstiefe 120,9 km)

Diese Dimensionen wurden von der Generalversammlung der IAG 1924 in Madrid als die einer internationalen Referenzfläche angenommen und zur Anwendung vor allem für wissenschaftliche Arbeiten und neu aufzunehmende Landesvermessungen empfohlen; jedoch gilt hier dann $b = 6\,356\,911{,}946$ m.

Zu Hayfords 1906 verarbeitetem Beobachtungsmaterial traten noch folgende neue Bogen hinzu, deren Amplitude hier im Großkreis gemessen gegeben sind: ein 10°-Bogen entlang eines Meridians durch South Carolina, Georgia und der Ostküste von Florida; ein schiefer 8°-Bogen entlang der Westküste von Florida von Cape Sable bis Mobile, Alabama; ein 23°-Bogen etwa entlang des Meridians von 98° West; ein 3°-Bogen in Minnesota, etwa entlang des Parallels und bei Duluth endend; ein 10°-Bogen etwa entlang des Meridians von 123° West in den Staaten Kalifornien, Oregon und Washington. Die Gesamtzahl der Stationen ist 765 (381 Breiten, 131 Längen und 253 Azimute). Die vorhandenen 32 Laplacepunkte wurden dieses Mal zur Verbesserung des Ausgangsazimutes herangezogen. Ebenso wurden zur topographisch-isostatischen Reduktion neue, genauere großmaßstäbliche Karten verwendet. Auch hier wurden wieder die gleichen fünf Lösungen berechnet wie 1906. Dieses Mal zeigte jedoch die Lösung H (Ausgleichstiefe 120,9 km) die kleinste Fehlerquadratsumme. Auf Grund eines Diagramms, das die Abhängigkeit der Quadratsumme von der Ausgleichstiefe darstellte, ergab sich aber die ideale Ausgleichstiefe zu 122,2 km, für die jedoch die Ausgleichung wegen der geringen Abweichung nicht mehr durchgerechnet wurde.

Die Lösung A (bestanschließendes Ellipsoid) ergab

$a = 6\,378\,062$ m $\qquad b = 6\,356\,671$ m $\qquad \alpha = 1:298{,}2$

Einer der Vorteile der Hayfordschen Ergebnisse vor den bisherigen liegt in dem dabei benützten homogenen Beobachtungsmaterial, das nur einer Landesvermessung entnommen wurde. Es gab hier keine Schwierigkeiten der Punktidentifizierung an Landesgrenzen, keine unsicheren nationalen Maßstabsfaktoren, wie sie entstehen, wenn man gezwungen ist, verschiedene Triangulationen zu kombinieren, um die Erddimensionen abzuleiten.

NB! Die von Hayford selbst veröffentlichten Dimensionen stimmen in der Abplattung und den beiden Achsen mathematisch nicht ganz überein. Da nur zwei Parameter voneinander unabhängig gewählt werden können, erhält man bei a und α fest angenommen: $b = 6\,356\,911{,}946$ m; oder bei a und b fest angenommen: $\alpha = 1:296{,}96$. Helmert rechnete 1911 die wahrscheinlichen Fehlermaße nach und fand *p. e.* für $a = \pm 35$ m und für $1:\alpha = \pm 0{,}8$ (siehe: Helmert, F. R.: „Über die Genauigkeit der Dimensionen des Hayfordschen Erdellipsoides.“ Sitz.Ber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin 1911, Bd. I, S. 10—19).

1930 wurde von der Generalversammlung der IAG in Stockholm auf Antrag die von G. Cassinis und G. Silva für das Hayfordsche Ellipsoid vorgeschlagene Formel der Normalschwere angenommen:

$$\gamma = 978{,}0490 \text{ Gal } (1 + 0{,}005\,2884 \sin^2\varphi - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\varphi)\,.$$

Der Schwerewert am Äquator stammt aus der Arbeit, W. Heiskanen: „Ist die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid?“, Leipzig 1928 (siehe Bull. géod. Nr. 26, Paris 1930).

Hayford, J. F.: „Supplementary Investigation in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy.“ Washington 1910.

Perrier, G.: „Comptes Rendues de la Section de Géodésie, Madrid 1924.“ Bull. géod. No. 7, Paris 1925, S. 552—556..

Tafeln:

Perrier, G. – Hasse, E.: „Tables de l'ellipsoide de référence internationale.“ Spec. Publ. No. 2 (sexagesimal), Spec. Publ. No. 3 (centesimal), IAG, Paris 1935/1938.

Lambert, W. D. – Swick, C. H.: „Formulae and Tables for the computation of geodetic positions on the International Ellipsoid.“ US C & GS, Spec. Publ. No. 200, Washington 1935/1946.

Simmons, L. G.: „Natural function tables for computing geographic positions on the International Ellipsoid.“ US C & GS, Washington 1947.

IGM: „Tavole per il calcolo delle coordinate geografiche dalle coordinate rettilinee nel piano dia Gauß e inverso.“ 2 Bände, Firenze 1946.

Vaisälä, Y.: „Tafeln für die geodätischen Berechnungen ...“ Veröff. Finn. Geod. Inst., No. 1, Helsinki 1923 (59°—71°).

Andersen, E.: „Geodetic Tables, International Ellipsoid“, Geodaetisk Instituts Skrifter, 3. Raekke, Bd. 24, Kobenhavn 1956, (a = 6 378 388 m, α = 1:297), numerisch, enthält auch die Werte der internationalen Normalschwere für jede Breitenminute.

BGC: „Tafeln zur Übertragung geogr. Koordinaten auf dem intern. Ellipsoid im Bereich von 35°—71° Breite.“ Baltische Geodät. Kommission, Spec. Publ. Nr. 9, Helsinki 1941.

US Army Map Service: „International Spheroid (meters), UTM Grid Tables for the Latitudes 0°—80°, Transformation of coordinates from geogr. to grid and vice versa.“ Vol. I, II, TM No. 6, Washington.

— UTM Grid, International Spheroid (meters), Coordinates for 5 minutes intersections (0°—80°).“ TM No. 38, Washington 1949.

— UTM Grid, International Spheroid (meters), Latitude transformation, geodetic latitude to rectifying latitude and vice versa.“ TM No. 15, Washington.

— UTM Grid, International Spheroid (meters), Zone to zone transformation tables.“ TM No. 50, Washington 1950.

— Universal Polar Stereographic Grid, International Spheroid (meters), Transformation of coordinates from geogr. to grid and vice versa for latitudes 79° 30′ to 90°.“ TM No. 44, Washington 1949.

Hristow, V. K.: „Tables pour le calcul de coordonnées de Gauß-Krüger par les coordonnées géographiques sur l'Ellipsoide de référence internationale.“ Sofia 1947.

Institut für angew. Geodäsie: „Tafeln zur Berechnung von Hauptdreiecksnetzen auf dem Hayford-Ellipsoid.“ Frankfurt/Main 1951.

Bodemüller, H.: „Formeln und Tafeln zur Berechnung der beiden geodätischen Hauptaufgaben für das Internationale Ellipsoid bei großen Entfernungen.“ Veröff. DGK, B 18, München 1955.

Verwendet: Argentinien, Dänemark seit 1928, Belgien (Nouvelle Carte 1:25 000), New Zealand, Kanarische Inseln, Türkei, Bulgarien bis 1946, Finnland, Italien seit 1940, Portugal seit 1926, Ostseering, Zentraleuropäisches und Europäisches Netz.

72. **Bowie 1912**

$\alpha = 1 : (298{,}4 \pm 1{,}5)$

Bowie wertete 114 von den 122 Pendelstationen in den USA nach isostatischer Reduktion (Ausgleichstiefe 113,7 km) aus und erhielt folgende Normalschwereformel

$$\gamma = 978{,}038 \text{ Gal } (1 + 0{,}005\,304 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\,\varphi)\,,$$

aus der sich obiger Abplattungswert berechnete.

Bowie, W.: „Effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity.“ USC&GS, Spec. Publ. No. 12, Washington 1912, S. 25—26.

73. **Véronnet 1912**

$\alpha = 1 : (297{,}12 \pm 0{,}38)$ *p. e.*

Véronnet berechnete diesen Wert aus den neuesten numerischen Werten der Präzession-Nutationskonstanten.

Véronnet, A.: „Rotation de l'ellipsoide homogène et la figure exacte de la terre.“ Journal math. pur. et appl. Vol. 8, Paris 1912, S. 331.

74. **Helmert 1913**

I) $a = 6\,378\,192$ m $\pm$ 63 (*p. e.*) — $\alpha = 1 : 298{,}3$ (1901)

II) $a = 6\,378\,350$ m — $\alpha = 1 : 298{,}3$ (1901)

Helmert wertete dieses Mal alle modernen großen Gradmessungen aus, und zwar wieder jede einzeln für sich:

a) Den russisch-skandinavischen Meridian mit dem Ergebnis

$$a = 6\,378\,444 \text{ m} \quad \text{und} \quad \alpha = 1 : 298{,}59.$$

Diese Dimensionen sind denen von A. Bonsdorff aus dem Jahre 1888 gleich. Mit Bessels Abplattung erhielt er $a = 6\,378\,455$ m ± 85. Da dieser Bogen für eine Änderung in der Abplattung kaum empfindlich ist, erschien a mit großer Wahrscheinlichkeit ermittelt zu sein.

b) Den Westeuropäisch-afrikanischen Meridian mit

$$a = 6\,378\,486 \text{ m} \quad \text{und} \quad \alpha = 1 : (281 \ \pm 8)\,.$$

Diese Abplattung ist wegen ihres großen Fehlers ziemlich wertlos. Mit Bessels Abplattung ergab sich $a = 6\,377\,935$ m ± 102.

c) Den europäischen Parallel in 52° Breite mit Bessels Abplattung zu

$$a = 6\,378\,057 \text{ m} \ \pm 70\,.$$

d) Den russischen Parallel in $47^1/_2$° Breite mit Bessels Abplattung zu

$$a = 6\,377\,350 \text{ m} \ \pm 433\,.$$

Der Mittelwert der großen Halbachse aus diesen vier europäischen Bogen ergab sich zu

$$a = 6\,378\,150 \text{ m für } \alpha = 1 : 299{,}15 \text{ (Bessel)},$$
$$a = 6\,378\,140 \text{ m für } \alpha = 1 : 298{,}3 \text{ (Helmert 1901)},$$

gemäß Helmerts Arbeit von 1906, siehe S. 57.

e) D. Gills südafrikanischen Meridian (Mapange—Berlin/Ostafrika, $\Delta\varphi = 23°\,13'$, $\varphi_m = -21°\,17'$ mit 57 Stationen) nach der Ausarbeitung von W. Bahn: „Der Südafrikanische Meridianbogen." Gerl. Beitr. Geoph., Bd. X, Leipzig 1910, S. 519—551, mit

$$a = 6\,378\,307 \text{ m} \pm 99 \text{ für } \alpha = 1 : 298{,}3\,.$$

f) Den indischen Parallel in 25° Breite mit

$$a = 6\,378\,358 \text{ m} \pm 182 \text{ für } \alpha = 1 : 298{,}3\,.$$

Das gewogene Mittel der großen Halbachsen aus diesen sechs Bogen in Europa, Afrika und Asien ergab

$$a = 6\,378\,192 \text{ m} \pm 63\,.$$

Helmert fügte jetzt noch Hayfords Dimensionen von 1909 mit dem Gewicht 4 (wegen der höheren inneren Genauigkeit des benützten Beobachtungsmaterials) hinzu und erhielt

$$a = 6\,378\,350 \text{ m}\,.$$

Da dieser Wert nur um 38 m von dem Hayfords differiert, und da die Internationale Konferenz für Astronomie eben 1911 Hayfords Dimensionen adoptiert hatte, schlug Helmert vor, an Hayfords 1909 Dimensionen als den zur Zeit besten festzuhalten. Er rechnete aber diese Dimensionen wegen ihrer mangelnden strengen Übereinstimmung einschl. ihrer Fehlermaße noch einmal nach und erhielt

$$a = 6\,378\,388 \text{ m} \pm 35 \qquad b = 6\,356\,909 \text{ m} \pm 72 \qquad \alpha = 1 : (296{,}96 \ \pm 0{,}8)\,.$$

Alle Fehlermaße wurden hier in wahrscheinlichen Fehlern, *p. e.* gegeben.

Helmert, F. R.: „Geoid und Erdellipsoid." Zeitschr. Ges. Erdkunde, Berlin 1913, S. 17—34.

75. **Helmert 1915**

$\alpha = 1 : (296{,}7 \pm 0{,}6)$

Helmert unterzog 410 Festlandstationen kombiniert mit 100 Küstenstationen (halbes Gewicht), die er aus 2112 Festland- und 325 Küstenstationen ausgewählt hatte, erneut einer Ausgleichung und erhielt nach Einführung eines von der Länge abhängigen Gliedes folgende Formel der Normalschwere

$$\gamma = 978{,}052 \text{ Gal } \{1 + 0{,}005\,285 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\varphi + 0{,}000\,018 \cos^2 \varphi \cos 2 (\lambda + 17^\circ)\}.$$

Der Koeffizient eines weiteren Gliedes, das der Kugelfunktion dritten Ranges entsprach, ergab sich als zu unsicher und wurde daher aufgegeben. Alle Schwerewerte wurden freiluftreduziert. Aus dem Längenglied bestimmte Helmert den Unterschied der beiden Äquatorhalbachsen zu

$$a_1 - a_2 = 230 \text{ m} \pm 51 \text{ in } \lambda_{a_1} = 17^\circ \text{ West.}$$

Dies war Helmerts letzter Beitrag zu diesem Problem der Geodäsie.

Helmert, F. R.: „Neue Formeln für den Verlauf der Schwerkraft im Meeresniveau beim Festland." Sitz.Ber. Kgl. Preuß. Akad. Wiss., Bd. XLI, Berlin 1915, S. 676—685.

76. **Wellisch 1915**

$a = 6\,378\,372$ m $\quad b = 6\,356\,896$ m $\quad \alpha = 1 : 297{,}07$

$$Q = 10\,002\,263{,}20 \text{ m}$$

Nach Helmerts Vorschlag aus dem Jahre 1906 wählte Wellisch die vertrauenswürdigsten Dimensionen, die von verschiedenen Autoren aus großen Gradmessungen und Landesnetzen abgeleitet wurden, und nahm daraus das gewogene Mittel. Bei diesem Verfahren der modernen Kombinationsmethode können erkannte systematische Einflüsse auf die verschiedenen Parameter durch Gewichtsfestsetzung a priori berücksichtigt werden.

Im einzelnen übernahm er:

1) Hayfords 1909 isostatische Lösungen E, H, G von nahezu gleicher Genauigkeit und berechnete daraus das einfache Mittel zu

$$a = 6\,378\,417 \text{ m und } \alpha = 1 : 296{,}76,$$

dem er das Gewicht 4 zuteilte.

2) Schumanns große Halbachsen, die dieser im Auftrag Helmerts aus dem russisch-skandinavischen Meridian, dem westeuropäisch-afrikanischen Meridian, dem mitteleuropäischen Lotabweichungssystem, dem südafrikanischen Meridian, dem russischen Parallel in $47^1/_2{}^\circ$ Breite und dem indischen Parallel in 25° Breite abgeleitet hatte. Das gewogene Mittel wurde bereits 1913 von Helmert berechnet zu

$$a = 6\,378\,192 \text{ m},$$

dem er das Gewicht 1 zuteilte.

3) Helmerts 1901 aus der Schwere abgeleiteten Abplattungswert

$$\alpha = 1 : 298{,}3,$$

dem er das Gewicht 1 zuteilte.

Wellisch, S.: „Neue Konstanten des Erdsphäroides." Astr. Nachr., Bd. 201, Kiel 1915, S. 429—432.

77. **Brown 1915**

$a = 1:293{,}7$

Dieser Wert wurde aus den Mondstörungen (Perigäum und Mondknoten) abgeleitet und weicht erheblich von denen zeitgenössischer und moderner Bestimmungen ab.

Brown, E. W.: „A correction to the determination of the constants of the node, the inclination, the Earth's ellipticity, and the obliquity of the ecliptic." M. N. RAS, Vol. 75, London 1915, S. 506—508.

78. **Berroth 1916**

$a_1 - a_2 = 150\text{ m} \pm 58 \qquad \lambda_{a_1} = 10°\text{ West} \qquad a_m = 1:(297{,}8 \pm 0{,}7)$

$a_1 = 1:296{,}7$
$a_2 = 1:298{,}8$
$a_e = 1:42\,000$

Berroth wählte 400 kontinentale Schwerestationen aus den 2112 Stationen der beiden Borrasschen Schwereberichte von 1912 und 1914 aus. Dabei berücksichtigte er nur Stationen, bei denen die isostatische Reduktion a priori als klein vorausgesetzt werden konnte; d. h. es wurden alle Stationen in gebirgigen Gegenden und in deren Umgebung von 100 km, in tief eingeschnittenen Tälern, an großen Binnenseen, in Höhen über 1500 m und mit Freiluftanomalien über 100 mGal weggelassen. Nach Anbringung der Freiluftreduktion ergab sich die Formel der Normalschwere zu:

$$\gamma = 978{,}046\text{ Gal}\,\{1 + 0{,}005\,296\sin^2\varphi - 0{,}000\,007\sin^2 2\varphi + 0{,}000\,0116\cos^2\varphi\cos 2(\lambda + 10°)\}\,.$$

Anschließend zog er noch 325 Küstenstationen hinzu. Das Mittel aus den Küsten- und Festlandstationen ergab dann folgende Normalschwereformel

$$\gamma = 978{,}045\text{ Gal}\,\{1 + 0{,}005\,288\sin^2\varphi - 0{,}000\,007\sin^2 2\varphi + 0{,}000\,015\cos^2\varphi\cos 2(\lambda + 15°)\}\,,$$

aus der er berechnete:

$$a_1 - a_2 = 190\text{ m} \pm 65; \qquad \lambda_{a_1} = 15°\text{ West}; \qquad a_m = 1:(297{,}0 \pm 0{,}7)\,.$$

Berroth fand, daß die Schwerewerte nur sehr schwach mit der Länge korreliert sind. Diese Feststellung wird gerade durch die neuesten statistischen Untersuchungen von K. Jung bestätigt. Die letzten russischen Arbeiten halten dagegen die Dreiachsigkeit für hinreichend bestätigt; siehe Sagrebin, D. W.: „Die Theorie des regularisierten Geoids" (russ.), Moskau-Leningrad 1952, Deutsche Ausgabe: Veröff. Geod. Inst. Potsdam, Nr. 9, Berlin 1956.

Berroth, A.: „Die Erdgestalt und die Hauptträgheitsmomente *A* und *B* der Erde im Äquator aus Messungen der Schwerkraft." Gerl. Beitr. Geophys., Bd. XIV, Leipzig 1915—1918, S. 215—257.

79. **Bowie 1917**

$a = 1:(297{,}4 \pm 1{,}0)$

Nachdem Bowie 1912 nur die US-Stationen ausgeglichen hatte, wertete er dieses Mal 348 aus 374 Schwerestationen (219 in USA, 42 in Canada, 73 in Indien und 40 hauptsächlich in Europa liegend) aus. Um systematische Einflüsse infolge größerer Punktdichte zu vermeiden, wurden die Stationen in 252 Gruppen vom Gewicht 1 zusammengefaßt. Nach topographisch-isostatischer Reduktion (Hayford-Pratt) der Beobachtungen (Ausgleichstiefe 113,7 km) erhielt er folgende Formel der Normalschwere

$$\gamma = 978{,}039 \text{ Gal } (1 + 0{,}005\,294 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\varphi)\,,$$

aus der er obige Abplattung ableitete.

Bowie, W.: „Investigations of gravity and isostasy." US C & GS, Spec. Publ. No. 40, Washington 1917, S. 127 und 134.

80. See 1921

$a = 6\,378\,000{,}00$ m ± 250 $b = 6\,356\,618{,}84$ m ± 84 $\alpha = 1 : (298{,}3\ \pm 0{,}30)$ *p. e.*

See übernahm die von Helmert 1903 vorgeschlagene Halbachse und untersuchte dann alle zuverlässigen Bestimmungen des Abplattungswertes. Im einzelnen benützte er

1) α aus dem Breitenglied der Mondstörung. Das gewogene Mittel aus den Koeffizienten von Bürg, Faye und Hansen ergab eine Abplattung von $\alpha = 1 : 298{,}37$, dem er das Gewicht 5 zuteilte. Eine getrennte Auswertung des Koeffizienten 8,382″ von Hansen ergab $\alpha = 1 : 297{,}63$.

2) α abgeleitet aus

   a) der 18,6jährigen Periode der vom Rücklauf der Mondknoten verursachten Längenstörung. Das gewogene Mittel aus Bürgs und Masons Koeffizienten ergab

   $$\alpha = 1 : 298{,}6572.$$

   Nach Newcombs Untersuchungen im Jahre 1909 können jedoch noch mehr periodische Bewegungen vermutet werden, so daß dieses Ergebnis nicht ganz zuverlässig sein muß.

   b) dem Laplaceschen Gesetz der Dichteverteilung, das auf der Theorie von Clairaut beruht. Für die Oberfläche ergab sich $\alpha = 1 : 298{,}045$.

   Das Mittel aus a) und b) ergab $\alpha = 1 : 298{,}351$, dem er das Gewicht 5 erteilte.

3) α von Pendelbeobachtungen. See wählte Helmerts Werte von 1884, 1901 und 1915, Hayforts Wert von 1909 (der allerdings nicht aus Schweremessungen bestimmt ist) und Bowies Werte von 1912 und 1917. Mit Helmerts Werten doppelgewichtig angesetzt, erhielt er $\alpha = 1 : 297{,}695$, dem er das Gewicht 10 gab.

4) α von folgenden Auswertungen von Meridian- bzw. Parallelgradmessungen: Airy 1830 (Gewicht 5), Bessel 1841 (Gew. 5), Clarke 1878 (Gew. 3) und Tittmann (Gew. 6). Das Mittel ergab $1 : 298{,}767$, dem er das Gewicht 10 zuteilte.

Das Gesamtmittel aus 1) bis 4) ergab $\alpha = 1 : (298{,}2751\ \pm 0{,}1388)$, das er auf $1 : (298{,}3 \pm 0{,}3)$ abrundete. Dieser Wert ist gleich dem von Helmert 1901 und von Krassowsky 1940 bestimmten, was aber mehr Zufall ist, da Sees Auswahl besonders unter 4) sehr willkürlich erscheint.

See, T. J. J.: „Researches on the figure of the Earth, with definitive determination of the oblateness, and complete tables of the corresponding terrestrial spheroid." Astr. Nachr., Bd. 213, Kiel 1921, S. 233 bis 262.

81. **J e f f r e y s 1924**

$\alpha = 1 : 297{,}9$

Diese Abplattung wurde aus den letzten numerischen Werten der Präzession abgeleitet.

Jeffreys, H.: „The Earth." Cambridge 1924, S. 195.

82. **D e S i t t e r 1924**

$\alpha = 1 : (296{,}92 \pm 0{,}136)$ *p. e.*

Auch de Sitter machte eine Auswertung über die Präcessionskonstante. Er hatte schon 1915 einen Abplattungswert zu $\alpha = 1 : 296{,}0$ berechnet. Diese Auswertung war jedoch auf Darwins Formelsystem von 1900 aufgebaut, worin er eben einen Zahlenfehler entdeckt hatte.

De Sitter, W.: „On the flattening and the constitution of the Earth." Bull. Astr. Inst. Netherl., Vol. 2, Harlem 1924, S. 97—103.

83. **M c C a w 1924**

$a = 6\,378\,300$ m

$\alpha = 1 : 296$

Auf der Generalversammlung 1924 in Madrid sollte ein Beschluß über die Annahme eines internationalen Ellipsoides gefaßt werden. Als Diskussionsbeitrag untersuchte daher McCaw alle bisherigen bedeutenden Gradmessungen und deren Auswertungen.

I) Zuerst untersuchte er den Einfluß der Änderung des Abplattungswertes, und zwar unter der Annahme, daß die Krümmung des Bogens in seiner Mitte erhalten bleiben sollte. In dem Bestreben, einen einwandfreien repräsentativen Wert zu erhalten, berücksichtigte er zur Abschätzung der Genauigkeit die Länge, die Lage und die naturgegebenen Verhältnisse jedes Bogens zusammen mit dem mittleren Fehlermaß, das allein, nach seiner Erfahrung, auf keinen Fall ein perfektes Genauigkeitsmaß darstellt. Er berechnete im einzelnen die große Halbachse aus folgenden Gradmessungen:

	$1/\alpha$ \ Gew.	295	296	297	298	Streuung in a
		6378	6378	6378	6378	
1. Engl.-franz. Meridian	7	211	191	172	154	— 57 m
2. Russischer Meridian	8	339	351	362	374	+ 35
3. Indischer Meridian	7	326	202	079	x957	—369
4. Europ. Parallel in 52° Breite	8	x871	x916	x961	006	+135
5. Indischer Parallel in 24° Br.	6	318	331	343	354	+ 36
6. Südafrikanischer Meridian	6	657	550	444	339	—318
7. US.Triang.-Netz	20	423	405	388	371	— 52
Gewogenes Mittel	62	318 ±84	295 ± 72	271 ± 66	248 ± 67	

Nach Abschätzung entschied sich dann McCaw für $a = 6\,378\,300$ m ± 50 als eine genügend genaue Annäherung.

Einige dieser Gradmessungen (Nr. 3, 4 und 6) ergaben Halbachsen, die sehr empfindlich für eine Änderung in der Abplattung sind. McCaw sah darin eine Warnung, Ellipsoidparameter mit vorgegebener Abplattung aus Bogen abzuleiten, die dafür ungeeignet sind. Andererseits hat in diesen Bogen eine verhältnismäßig große Änderung der großen Halbachse nur einen geringen Einfluß auf die Abplattung.

II) Anschließend berechnete er für die einzelnen Gradmessungen die Abplattungswerte, die seinem Wert für die große Halbachse, $a = 6\,378\,300$ m, entsprechen, wobei er den europäischen Parallel in 52° Breite als ungeeignet für diesen Versuch wegließ.

	Gewicht	$1:\alpha$
1. Englisch-französischer Meridian	3	290,2
2. Russischer Meridian	2	291,6
3. Indischer Meridian	17	295,2
5. Indischer Parallel	2	293,5
6. Südafrikanischer Meridian	15	298,4
7. US-Triangulations-Netz	3	302,1
Gewogenes Mittel		296,2 $\pm 1{,}3$

Als Endergebnis seiner Untersuchungen glaubte er mit $a = 6\,378\,300$ m $\pm$ 50 und $\alpha = 1:(296{,}2\ \pm 1{,}3)$ die bestmöglichste Annäherung für die Größe der Erdfigur mit den z. Zt. zur Verfügung stehenden geodätischen Messungen gegeben zu haben.

III) Er überprüfte aber auch noch alle zeitgenössischen Bestimmungen der Abplattung aus

a) der Lunisolar-Präzession (Véronnet; De Sitter, der bereits alle vorhergehenden Auswertungen nachgerechnet hatte);

b) den Schweremessungen (Helmert, Bowie);

c) den Mondstörungen (Brown, De Sitter);

d) der Mondparallaxe Kap—Greenwich,

und stellte fest, daß diese Resultate seinen Abplattungswert nur bestätigten.

Da nach den neuesten russischen Auswertungen der Abplattungswert um 1 : 298 liegt, und damit McCaw mit seinem Wert etwas außerhalb liegt, ist es vielleicht von Interesse, auf eine theoretische Arbeit von R. Wavre, „Figure planétaires et géodésie“, Cahiers Scientifiques, Fasc. XII, Paris 1932, S. 123—125, hinzuweisen. Wavre fand als Ergebnis seiner Untersuchungen, daß eine Übereinstimmung zwischen den Bestimmungselementen

1) der Geodäsie R_m und $\dfrac{a-b}{b}$,

2) der Gravimetrie $\beta = \dfrac{g_{90}-g_0}{g_0}$,

3) der Astronomie $\dfrac{C-A}{C}$ über die Präzession

nur bei einer Abplattung, die zwischen 1 : 294 und 1 : 296 liegt, gegeben ist.

McCaw, G. T.: „The proposed adoption of a Standard Figure of the Earth.“ The Geographical Journal, Vol. 64, London 1924, S. 120—129.

84. **Heiskanen 1924**

I) $a_1 - a_2 = 690$ m ± 75 $\qquad \lambda_{a1} = 180$ Ost

$\alpha_1 = 1 : (294{,}3 \ \pm 0{,}6)$

$\alpha_2 = 1 : (299{,}0 \ \pm 0{,}6)$

$\alpha_e = 1 : 18\,700 \ (c)$

II) $\alpha = 1 : (297{,}4 \ \pm 0{,}5)$

Heiskanen wertete 612 europäische, 63 afrikanische, 256 amerikanische und 113 asiatische Schwerestationen (insgesamt 1044) aus, die er den Borrasschen Schwereberichten zur Generalversammlung der IAG in Cambridge 1909 und in Hamburg 1912 entnommen hatte. Nach topographisch-isostatischer Reduktion (Ausgleichstiefe 113,7 km) gruppierte er die Stationen in 1° auf 1°-Feldern, denen er den Mittelwert der darin enthaltenen Stationen mit dem Gewicht 1 zuteilte. Aus insgesamt 656 solchen Gruppenmitteln (Felder 1° auf 1°) erhielt er folgende Formel der Normalschwere

$$\gamma = 978{,}052 \text{ Gal} \left\{1 + 0{,}005\,285 \sin^2\varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\varphi + 0{,}000\,027 \cos^2\varphi \cos 2(\lambda - 18°)\right\}$$

Aus dieser Formel berechnete er dann die dreiachsigen Dimensionen unter I).

Nach Weglassung des Längengliedes erhielt er

$$\gamma = 978{,}048 \text{ Gal} \left(1 + 0{,}005\,293 \sin^2\varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\varphi\right)$$

und daraus den Abplattungswert unter II).

Heiskanen, W.: „Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie." Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 4, Helsinki 1924.

85. **Heiskanen 1926**

I) $a = 6\,378\,444$ m ± 72 $\qquad \alpha = 1 : (302{,}8 \ \pm 2{,}4)$

II) $a = 6\,378\,518$ m ± 86 $\qquad \alpha = 1 : (296{,}6 \ \pm 4{,}0)$

III) $a = 6\,378\,397$ m ± 72 $\qquad \alpha = 1 : 297{,}0$ (Hayford)

Nachdem Heiskanen die Lotabweichungen topographisch-isostatisch reduziert hatte, und zwar mit einer Zoneneinteilung nach I. Bonsdorff bis zu einem äußeren Radius von 1024 km, berechnete er die Erddimensionen getrennt aus folgendem europäischen Messungsmaterial:

a) Westeuropäisch-afrikanischer Meridian, wie dieser von R. Schumann bearbeitet wurde (Laghouat—Saxavord, $\Delta\varphi = 27° \, 02'$ mit 36 von seinen 38 Stationen; 2 algerische wurden weggelassen). Heiskanen setzte vier Kombinationen an, indem er die Ausgleichstiefe zwischen 96 km und 113 km variierte und abwechselnd 23 (engl.-franz.) Stationen, 31 von den 32 europäischen Stationen und alle 36 Stationen benützte. Schließlich hielt er die Ausgleichung mit 31 Stationen und der Ausgleichstiefe von 96 km an und erhielt:

   $a = 6\,378\,622$ m ± 184 $\qquad \alpha = 1 : (293{,}1 \ \pm 7{,}2)$

b) Russisch-skandinavischer Meridian ($\Delta\varphi = 25° \, 20'$ mit 13 Stationen),

   Ausgleichstiefe 96 km mit

   $a = 6\,378\,421$ m ± 132 $\qquad \alpha = 1 : (292{,}1 \ \pm 8{,}5)$

   und

   $a = 6\,378\,481$ m ± 115 für Hayfords $\alpha = 1 : 297{,}0$.

c) Europäisches Lotabweichungssystem. Die hier benutzten Daten wurden aus „Lotabweichungen", Bd. IV, S. 96—97, Berlin 1909 und Bd. V, S. 108—113, S. 130—132, Berlin 1916, entnommen; Ausgleichungstiefe 96 km. Mit den 47 η-Werten erhielt er

$$a = 6\,377\,458 \text{ m } \pm 1008 \qquad \alpha = 1 : 283{,}5 \ \pm 228.$$

Der Wert für α besitzt wegen der geringen Nord-Südausdehnung des Systems kaum Bedeutung. Das gleiche gilt für die beiden Parameter, die aus den ξ-Werten abgeleitet wurden. Heiskanen berechnete daher aus den η-Werten nur die große Halbachse, und zwar für den Helmertschen und Hayfordschen Abplattungswert:

$$a = 6\,378\,152 \text{ m } \pm 128 \qquad \text{für } \alpha = 1 : 298{,}3 \text{ (Helmert 1901)}$$

und

$$a = 6\,378\,095 \text{ m } \pm 128 \qquad \text{für } \alpha = 1 : 297{,}0 \text{ (Hayford 1909)}.$$

Die einzelnen Werte für die große Halbachse a waren:

Westeuropa	Russisch	Europ. System	mit α
6 378 484 ±90	503 ±117	8 190 ±128	1 : 299,15 (Bessel 1841)
503 ±90	495 ±116	8 152 ±128	1 : 298,3 (Helmert 1901)
533 ±90	481 ±115	8 095 ±128	1 : 297,0 (Hayford 1909)
611 ±89	435 ±113	7 932 ±128	1 : 293,47 (Clarke 1878/80).

Die Änderung von a im russisch-skandinavischen Meridian auf Grund der Änderung der Abplattung ist nur unbedeutend, wie schon Helmert 1913 und McCaw 1924 festgestellt hatten.

Eine Gesamtausgleichung aller Daten aus den drei Gruppen ergab (siehe unter I):

$$a = 6\,378\,444 \text{ m } \pm 72 \qquad \text{und} \qquad \alpha = 1 : (302{,}8 \pm 2{,}4)\,.$$

Die Abplattung ist viel zu klein. Heiskanen vermutete die Ursache in den etwas zweifelhaften Daten in Mitteleuropa. Er glich daher jetzt nur den westeuropäischen und den russisch-skandinavischen Meridian in einem Guß aus und erhielt (siehe unter II):

$$a = 6\,378\,518 \text{ m } \pm 86 \qquad \text{und} \qquad \alpha = 1 : (296{,}6 \pm 4{,}0)\,.$$

Wie aus den Einzelergebnissen in obiger Tabelle zu erwarten war, ist hier die große Halbachse viel zu groß ausgefallen. Da auch dieses Ergebnis nicht zufriedenstellend war, glich er nun alle drei Messungsgruppen in einem Guß aus, aber mit einem jeweils vorgegebenen Abplattungswert und erhielt a zu:

$$\begin{array}{rl} 6\,378\,414 \text{ m } \pm 71 & \text{für } \alpha = 1 : 299{,}15 \text{ (Bessel)} \\ 397 \text{ m } \pm 72 & \text{für } \alpha = 1 : 297{,}0 \text{ (Hayford)} \\ 368 \text{ m } \pm 74 & \text{für } \alpha = 1 : 293{,}47 \text{ (Clarke 1878)}\,. \end{array}$$

Der Wert a aus dem europäischen Messungsmaterial für Hayfords α ist nur 9 m größer ausgefallen, als Hayford selbst aus den US-Daten erhalten hatte. Damit schienen auch die europäischen Messungen genügend gut durch das Hayfordsche Ellipsoid repräsentiert.

Zum Schluß stellte dann Heiskanen die neuesten Auswertungen verschiedener Autoren mit Hayfords Abplattung in vier Erdteilen gegenüber:

R. Schumann: Südafrikanischer Meridian, $\varphi_m = -25°$, $\lambda_m = 30°$ — $a = 6\,378\,358$ m ± 179 nicht kompensiert

R. Schumann: Indischer Parallel in 24° Br.,	$a = 6\,378\,352$ m ± 182
$\varphi_m = 24°$, $\lambda_m = 18°$	nicht kompensiert
Hayford: US-Triangulationsnetz,	$a = 6\,378\,388$ m ± 53
$\varphi_m = 38°$, $\lambda_m = 260°$	kompensiert
Heiskanen: Europa	$a = 6\,378\,397$ m ± 72
$\varphi_m = 52°$, $\lambda_m = 15°$	kompensiert.

Da Ledersteger 1951 auch aus europäischem Material Dimensionen bestimmte, die jedoch auf nichtkompensierten Lotabweichungen beruhen, wird diese Halbachse zum Vergleich hier gegeben:

Ledersteger: Europa	$a = 6\,378\,315 \pm 53$
	(286)

Nach Reduktion der Grundlinien auf das Normalsphäroid ergibt sich der noch kleinere Wert in Klammern. Ledersteger Wert ist also um 60 bzw. 90 m kleiner als das einfache Mittel aus den vier obigen und nur 45 m größer als a aus den letzten russischen Auswertungen. Zweifellos liegen Heiskanens Werte zu hoch.

Heiskanen, W.: „Die Erddimensionen nach den europäischen Gradmessungen." Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 6, Helsinki 1926.

86. **Heiskanen 1928**

$a_1 - a_2 = 242$ m $\quad \lambda_{a_1} = 0°$

$\alpha_1 = 1:295{,}7$
$\alpha_2 = 1:299{,}0$
$\alpha_e = 1:26\,700$ (c)
$\alpha_m = 1:297{,}3$

Heiskanen unterzog 841 Schwerestationen, wovon 137 Stationen von Vening-Meinesz auf dem Meere im Unterseeboot beobachtet wurden, nach isostatischer Reduktion (Airy-Heiskanen) einer Ausgleichung unter Berücksichtigung eines Längengliedes. Er erhielt folgende Formel der Normalschwere:

$$\gamma = 978{,}049 \text{ Gal} \{1 + 0{,}005\,293 \sin^2\varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\varphi + 0{,}000\,019 \cos^2\varphi \cos 2(\lambda - 0°)\}.$$

Daraus ergab sich eine maximale Abplattung der Meridianellipse zu $1:295{,}7$ in 0° und 180° Länge und das Minimum von $1:299{,}0$ in $\pm 90°$ Länge. Der Unterschied der beiden Äquatorachsen betrug $a_1 - a_2 = 242$ m mit $\lambda_{a_1} = 0°$.

Die Existenz einer Elliptizität des Äquators wurde dann von Heiskanen durch Ableitung der großen Halbachse aus geodätischen Messungen geprüft, und zwar getrennt aus Meridian- bzw. Parallelkreisbogen in Europa und in den USA. Die Meridianbogen in Europa ergaben einen größeren Wert für a (6 378 543 m) als den aus den nordamerikanischen (6 378 241 m); während die Parallelkreisbogen in Europa ein kleineres a (6 378 072 m) als aus den nordamerikanischen Lotabweichungsstationen in Länge und Azimut (6 378 546 m) ergaben, *q. e. d.*

Die hier von Heiskanen gefundene Schwere am Äquator wurde 1930 in die internationale Schwereformel übernommen.

Heiskanen, W.: „Ist die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid?" Gerl. Beitr. Geophys., Bd. XIX, Leipzig 1928, S. 356—377.

Heiskanen, W.: Astr. Nachr., Bd. 234, Nr. 5562, Kiel, 1928.

87. Heiskanen 1929

I) $a_1 = 6\,378\,482{,}5$ m ± 57 $\quad b = 6\,357\,010$ m (c) $\quad \alpha_1 = 1:(297{,}05 \pm 1{,}2)$ (c)

$a_2 = 6\,378\,317{,}5$ m ± 57 $\quad \lambda_{a_1} = 38° \pm 10°$ Ost $\quad \alpha_2 = 1:299{,}35$ (c)

$\alpha_e = 1:38\,657$ (c)

II) $a = 6\,378\,410$ m ± 35 $\quad \alpha = 1:(298{,}3 \pm 1{,}1)$

III) $a = 6\,378\,391$ m ± 32 $\quad$ für $\alpha = 1:297{,}0$ (Hayford)

Heiskanen führte in die Lotabweichungsausgleichung ein Längenglied ein, das er durch eine Modifizierung des Formelsystems von H. Schmehl in „Untersuchungen über ein allgemeines Erdellipsoid", Veröff. Preuß. Geod. Inst., Postdam 1927, gefunden hatte. Die ausgewerteten Beobachtungsdaten waren:

a) Die US-Lotabweichungsstationen von Hayford, wobei er aber die Werte benachbarter Stationen zu einer fiktiven, repräsentativen Station vom Gewicht 1 zusammenfaßte, damit die zahlreich vorhandenen US-Stationen keinen zu großen Einfluß auf die Gesamtausgleichung gewinnen sollten. Er erhielt damit 54 Breiten-, 58 Längen- und 87 Azimutstationen an Stelle der tatsächlich vorhandenen 765 Stationen.

b) Der westeuropäische Meridian (Roldan—Saxavord, $\Delta\varphi = 23°\,53'$ in $\varphi_m = 48°\,53'$ und $\lambda_m = 0°\,01'$ mit 31 Breitenstationen).

c) Der russisch-skandinavische Meridian (Staro Nekrassowka—Fuglenaes, $\Delta\varphi = 25°\,20'$ in $\varphi_m = 58°\,00'$ und $\lambda_m = 26°\,30'$ mit 13 Breitenstationen).

d) Das europäische Lotabweichungssystem, das auf der Längengradmessung in 52° Breite aufgebaut wurde, jedoch nur wieder die η-Komponenten (Bereich von Feaghmain, $\lambda = 349°\,39'$ bis Bobruisk, $\lambda = 29°\,12'$ und von Trockenberg, $\varphi = 50°\,25'$ bis Dorpat, $\varphi = 58°\,53'$ mit 47 η-Stationen). Die ξ-Stationen wurden wegen der geringen Breitenausdehnung des Systems weggelassen.

a) bis d) enthielten zusammen 290 Lotabweichungsstationen bzw. Fehlergleichungen, deren Auflösung ergab

$$a_m = 6\,378\,400 \text{ m } \pm 57; \qquad \lambda_{a_1} = 38° \pm 10° \text{ Ost}$$

$$a_1 - a_2 = 165 \text{ m } \pm 57; \qquad \alpha_m = 1:(298{,}2 \pm 1{,}2)\,.$$

Der Unterschied zwischen den beiden Äquatorhalbachsen und die Position von a_1 ist unsicherer als die 1928 aus Schwerewerten abgeleiteten, da die hier benützten geodätischen Messungen nur einen relativ kleinen Teil der Erdoberfläche decken.

Nach Weglassen des Längengliedes fand Heiskanen

$$a = 6\,378\,410 \text{ m } \pm 35 \qquad \alpha = 1:(298{,}3 \pm 1{,}1)$$

und

$$a = 6\,378\,391 \text{ m } \pm 32 \quad \text{für Hayfords } \alpha = 1:297{,}0\,.$$

Es ist bemerkenswert, daß hier der mittlere Fehler von a nur noch 60% dessen aus der dreiachsigen Lösung beträgt. Diese letzten Werte unterscheiden sich kaum von seiner Lösung 1926, III), S. 67.

Heiskanen, W.: „Über die Elliptizität des Erdäquators." Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 12, Helsinki 1929.

88.

Krassowsky 1930

$a = 6\,378\,081$ m ± 170

$\alpha = 1:299{,}15$ (Bessel)

Krassowsky führte eine Lotabweichungsausgleichung des europäischen Anteils des UdSSR-Dreiecksnetzes (8 alte Struvestationen und 43 moderne Laplacestationen) unter Beibehaltung der Besselschen Abplattung durch.

Krassowsky, F.: „Methoden für die Ausgleichung der I. Ordnung-Triangulation in der UdSSR" (russ.), Moskau-Leningrad 1932.

Krassowsky, F.: „Überlegungen über die Bestimmungen eines für die geodätischen Arbeiten in der UdSSR geeigneten Ellipsoides." C. R. Balt. Geod. Komm., 7. Tagung, Bd. II, Helsinki 1935, S. 182.

89.

Hirvonen 1934

$a_1 - a_2 = 139$ m ± 16 $\lambda_{a_1} = 19°$ West

Hirvonen wertete 4250 freiluftreduzierte Schwerewerte mittels der Stokesschen Formel, modifiziert durch Pizetti-Hirvonen aus. Aus den damit erhaltenen Geoidundulationen analysierte er dann die oben angegebene Elliptizität des Äquators.

Hirvonen, R. A. „The continental undulations of the geoid." Veröff. Finn. Geod. Inst., Nr. 19, Helsinki 1934.

90.

Krassowsky 1935

$a = 6\,378\,180$ m

$\alpha = 1:298{,}9$

Krassowsky erhielt diese Werte aus der Lotabweichungsausgleichung folgender Gradmessungen in der UdSSR:

Russisch-skandinavische (25° 20′), Meridian Wygosero — Nikolajew in $\lambda = +30°$, $\varphi_m = 55°\,30'$ (17°), Meridian Petrosawodsk — Dshankoi in $\lambda = +36°$, $\varphi_m = 54°$ (16°), Meridian Kostrama — Armawir in $\lambda = +42°$, $\varphi_m = 49°\,10'$ (16° 39′), Parallel in $\varphi = 54°$, $\lambda_m = +56°$ (52°), Parallel in $\varphi = 52°$, $\lambda_m = 57°$ (54°), Parallel in $\varphi = 48°$, $\lambda_m = +37°\,30'$ (15°), und einige kurze Parallelbogen auf $\varphi = 58°$ und $\varphi\,45°$. Anschließend fügte er noch die Gleichungen Heiskanens für den westeuropäischen Parallel in 52° Breite, für den westeuropäischen Meridian und für das Hayfordsche US-System hinzu und erhielt ein dreiachsiges Ellipsoid zu

$a_m = 6\,378\,296$ m $\lambda_{a_1} = +18°$ ost $\alpha_m = 1:298{,}6$

$\alpha_e = 1:31\,000.$

Nach überschlägiger Berücksichtigung auch noch des indischen Parallels in $\varphi = 24°$ und des südlichen Teils des ostafrikanischen Meridians hielt er folgende dreiachsige Lösung als die beste Repräsentation für die seiner Zeit zur Verfügung stehenden Messungen

$a_1 - a_2 = 200$ m $\lambda_{a_1} = +15°$ ost $\alpha_m = 1:299{,}0$

$\alpha_e = 1:32\,000,$

wobei die von ihm nur für die acht einzelnen Netzteile bzw. Bogen berechnete mittlere Halbachse a_m von 6 378 207 m (indischer Parallel in $\varphi = +24°$) bis 6 378 450 m (westeuropäischer Meridian) streut.

Krassowsky, F. N.: „Übersicht und Untersuchung der Ergebnisse der neuen Gradmessungen", C. R. 8. Tagung Balt. Geod. Komm. in Tallin 1935, Helsinki 1936, S. 176—195.

91. Krassowsky 1936

$a = 6\,378\,210$ m $\qquad \alpha = 1:298{,}6$

Diese Dimensionen werden von Dubovsky erwähnt und dienten diesem als Referenzfläche zur Auswertung der 400 Geoidstationen in der UdSSR. Sie sollen über die Dimensionen von Heiskanen 1929 aus der großen russischen Längengradmessung in 54° Breite bis Novosibirsk abgeleitet worden sein.

Krassowsky, F.: „Handbuch der höheren Geodäsie." Teil II, Kap. X, Moskau 1942.

92. Heiskanen 1938

$a_1 - a_2 = 352$ m $\pm 30 \qquad \lambda_{a_1} = 25°$ West

$\alpha_1 = 1:(295{,}3 \pm 0{,}4)$
$\alpha_2 = 1:(300{,}2 \pm 0{,}4)$
$\alpha_e = 1:18\,314\ (c)$

Heiskanen unterzog erneut alle verfügbaren isostatisch reduzierten Schweremessungen einer Ausgleichung. Er bestimmte für das Zentrum jeder Gradabteilung von 1° Breite auf 1° Länge eine einzige Schwereanomalie vom Gewicht 1, die alle darin liegenden Schwereanomalien repräsentierte. Dabei verwarf er alle darin liegenden Messungen mit einer Anomalie größer als 80 mGal. Die Verteilung dieser Gradabteilungen ist folgende:

USA	292	Kaukasus	39
Kanada	123	Europa	241
Mexiko	26	Ostafrika	71
Westindien	80	Weltmeere	383
Indien	242	(Südl. Weltmeere,	
Sibirien	94	nicht reduz.)	(211)
		Summe	1591
			(1802)

Aus diesen 1591 „Stationen" erhielt er folgende Formel der Normalschwere:

$$\gamma = 978{,}0524\ \mathrm{Gal}\ \{1 + 0{,}005\,2970 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\varphi + 0{,}000\,0276 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 25°)\}.$$

Aus dieser Formel leitete er die obigen dreiachsigen Parameter ab. Nach Weglassen des Längengliedes ergab sich

$$\gamma = 978{,}0451\ \mathrm{Gal}\ (1 + 0{,}005\,3027 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\varphi)$$

und $\alpha = 1:(298{,}3 \pm 0{,}3)$. Shuravlev erhielt 1940 aus Freiluftanomalien $\alpha = 1:298{,}02$.

Heiskanen, W.: „Investigations on the gravity formula." Ann. Acad. Scient Fennicae, Series A, Bd. LI, Nr. 8, Helsinki 1938.

93. Isotov 1938

$a = 6\,378\,279$ m $\qquad \alpha = 1:299{,}5$

Von Dubovsky erwähnt; Originalveröffentlichung ist nicht bekannt.

94. **Dubovsky 1939**

I) $a = 6\,378\,179$ m ± 75 $\qquad \alpha = 1:(303{,}0 \pm 2{,}0)$

II) $a = 6\,378\,194$ m ± 188 $\qquad \alpha = 1:(292{,}3 \pm 3{,}9)$

1939 wurde von Dubovsky die Auswertung eines astronomisch-gravimetrischen bzw. astronomisch-geodätischen Nivellements, dessen Feldarbeiten 1936 begonnen hatten, abgeschlossen und aus den Geoidhöhen mittels des Formelsystems von De Graaf-Hunter (Survey of India, Geodetic Report 1934, Dehra Dun 1935) ein bestanschließendes Ellipsoid für das vermessene Gebiet (etwa entlang des Längengrades in 52° Breite von $\lambda = 30°$ bis $\lambda = 130°$) bestimmt. Um die Rechenarbeit zu vereinfachen, wurden 36 bzw. 44 gleichmäßig über das Gebiet verteilte Geoidhöhen als Repräsentanten der tatsächlich bestimmten 400 Geoidhöhen des Gebietes vom Meridian von Pulkovo über Novosibirsk bis nach Archara östl. Chabarowsk ausgewählt. Die mittlere Abweichung des Ellipsoides aus 36 Punkten (I) vom Geoid beträgt $\pm 2{,}9$ m und die des aus 44 Punkten (II) $\pm 7{,}6$ m. Wird Hayfords Abplattung, $\alpha = 297{,}0$ beibehalten, so ergibt sich im Fall I) $a = 6\,377\,975$ m und im Fall II) $a = 6\,378\,410$ m. Das Ergebnis zeigt, daß das Geoid aus 36 Punkten schwächer gewölbt ist als das aus 44 Punkten.

Dubovsky, B. V.: „Die Entwicklung einer Methode zur Verwendung gravimetrischer Beobachtungen für Landesvermessungszwecke" (russ.). Moskau 1939.

95. **De Sitter - Brouwer 1939**

$\alpha = 1:(296{,}753 \pm 0{,}086)$ *p. e.*

Nach dem Tode von De Sitter führte Brouwer De Sitters Untersuchungen über die besten astronomischen Konstanten zu Ende. Über diese Konstanten, deren Beziehungen untereinander streng erfüllt sein mußten, errechnete sich obiger Abplattungswert.

De Sitter, W. – Brouwer, D.: „On the system of astronomical constants." Bull. Astr. Inst. Netherlands, Vol. 8, Harlem 1939, S. 221.

96. **Shuravlev 1940**

Shuravlev veröffentlichte einen Katalog von 10721 Schwerewerten und leitete daraus verschiedene Abplattungswerte ab. Dabei schloß er jedoch aus:

1) 111 Stationen in über 2000 m Höhe,
2) 127 Meeres- bzw. Inselstationen in großer Entfernung vom Festland und mit Freiluftanomalien über 100 mGal,
3) 383 Festlandstationen mit Freiluftanomalien über 100 mGal.

Er wertete nun folgende Kombinationen aus:

I) 10 091 freiluftreduzierte Werte

a) gruppiert in Zonenstreifen von 1° Breite, wobei er den Mittelwert mit dem Gewicht 1 der Zonenmittelbreite zuordnete, mit dem Ergebnis

$$\alpha = 1:298{,}46;$$

b) gruppiert wie unter a) aber das Gewicht gleich der Anzahl der Stationen in der betreffenden Zone mit dem Ergebnis

$$\alpha = 1:296{,}47;$$

c) die 10 091 einzelnen Stationen, jede vom Gewicht 1 mit

$$\alpha = 1 : 296{,}55;$$

d) gruppiert in 1° auf 1° Gradabteilungen und den Mittelwert in diesen Gradabteilungen mit dem Gewicht 1 dem Zentrum dieser Gradabteilung zugeordnet, mit

$$\alpha = 1 : 298{,}02.$$

II) 1774 isostatisch reduzierte Werte gruppiert und mit dem Gewicht wie unter I), b), zu

$$\alpha = 1 : 297{,}57.$$

mit der entsprechenden Schwereformel

$$\gamma = 978{,}0484 \text{ Gal } (1 + 0{,}005\,303 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,006 \sin^2 2\varphi)\,.$$

Shuravlev demonstrierte an Hand eines Diagramms die einseitige Verteilung der bis jetzt zur Verfügung stehenden Schweremessungen. Von seinen 10 721 katalogisierten Werten liegen allein 10 350 (96,5%) auf der Nordhalbkugel und hier wiederum die meisten auf einem Streifen in 45° nördlicher Breite. Auch die meridionale Verteilung ist stark einseitig. Im Bereich von 150° bis 225° östl. Länge liegen 72 Stationen und von 300° bis 330° nur 40 Stationen; d. h. auf 30% des Umfangs nur 1,2% aller Stationen.

Es dürfte demnach bei einer solchen einseitigen Verteilung der Meßwerte noch verfrüht sein, endgültige Parameter für das mittlere Erdellipsoid herzuleiten oder gar eine Elliptizität des Äquators einwandfrei nachzuweisen. Dies kommt auch deutlich in den von Shuravlev für einzelne ausgezeichnete Meridiane abgeleiteten Abplattungswerte und großen Halbachsen zum Ausdruck. Sie zeigen einen völlig unsystematischen Gang:

λ	$1:\alpha$	a	λ	$1:\alpha$	a
0°	299,4	6 378 215 m	105°	290,3	6 378 887 m
15°	296,1	452	120°	295,7	484
30°	296,9	407	135°	294,5	573
45°	296,2	432	240°	296,8	407
60°	300,5	138	255°	299,4	215
75°	297,0	388	270°	293,3	656
90°	297,4	368	285°	297,9	324

Shuravlev, N. F.: „Die Bestimmung der Abplattung des Erdellipsoides aus gravimetrischen Messungen" (russ. – mit engl. Zusammenfassung). Veröff. Staatl. Astr. Inst. Sternberg, Bd. 14, Teil 2, Moskau 1940.

Siehe auch: Schütte, H.: „Die Bestimmung der Abplattung der Erde aus der Schwereverteilung nach dem Schwereverzeichnis von N. F. Shuravlev" Gerl. Beitr. Geophys., Bd. 62, 1950, S. 9—26.

Jung, K.: Beitrag in Landolt-Börnstein, „Zahlenwerte und Funktionen aus Physik . . .", 6. Aufl., Bd. III, Astronomie und Geophysik, Berlin 1952, S. 267.

97. Krassowsky 1940

I) $a = 6\,378\,245$ m $\pm$ 15 $\quad b = 6\,356\,863{,}019$ m $\quad \alpha = 1 : (298{,}3\ \pm 0{,}4)$

. . . 6.804 701 1973 $\quad$ . . . 6.803 242 8531

Zur Auswertung wurden die astronomisch-geodätischen Netze der UdSSR, der USA und Westeuropas zusammen mit den Schwerebeobachtungen auf der ganzen Welt herangezogen. Die Ausgleichstiefe reicht von 96 km bis 113,7 km.

Die Lotabweichungspunkte in der UdSSR wurden mittels gravimetrischer Messungen reduziert. Der Abplattungswert gleicht dem schon von Helmert 1901 aus Schwerewerten gefundenen. Diese Dimensionen repräsentieren etwa die Geoidgestalt der nördlichen Halbkugel.

Die diesem Ellipsoid entsprechende Formel der Normalschwere lautet

$$\gamma = 978{,}049 \text{ Gal } (1 + 0{,}005\,3029 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\,\varphi)\,.$$

II) $a_1 = 6\,378\,351{,}3$ m (c) $\quad b = 6\,356\,863{,}019$ m $\quad \alpha_1 = 1:296{,}829$ (c)
$a_2 = 6\,378\,138{,}7$ m (c) $\quad \lambda_{a1} = 15°$ Ost $\quad \alpha_2 = 1:299{,}785$ (c)
$\alpha_e = 1:30\,000$

Diese dreiachsigen Dimensionen sind das ursprüngliche Ergebnis der Ausgleichung, das dann mit den Parametern unter I) approximiert wurde. Dieses Ellipsoid wird auch „Ellipsoid des zentralen Forschungsinstituts für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie (ZENIIGAiK)" genannt.

Die ihm entsprechende Formel der Normalschwere mit Heiskanens Äquatorschwere lautet:

$$\gamma = 978{,}049 \text{ Gal } \{1 + 0{,}005\,3029 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\,\varphi + 0{,}000\,0165 \cos^2 \varphi \cos 2\,(\lambda - 15°)\}\,.$$

III) $a = 6\,378\,295$ m ± 16 $\quad \alpha = 1:(298{,}4\ \pm 0{,}4)$

Diese Dimensionen sind das strenge Ergebnis, wenn die Ausgleichung unter II) ohne Längenglied, nur auf ein Umdrehungsellipsoid beschränkt, durchgeführt wird.

Krassowsky, F.: „Handbuch der höheren Geodäsie" (russ.), Teil II, Kap. X, Moskau 1942.

Isotov, A. A.: „Krassowskys Referenzellipsoid und die neuesten Fortschritte der wissenschaftlichen Geodäsie." Zeitschr. Vermessungstechnik, Berlin 1953, S. 33—36 und S. 61—66.

Sagrebin, D. W.: „Die Theorie des regularisierten Geoids" (russ.). Moskau-Leningrad 1952. Deutsche Ausgabe: Veröff. Geod. Inst. Potsdam, Nr. 9, Berlin 1956, S. 51, 52, 86 und 87 (dort auf S. 102—119 Tafeln der Normalschwere zu I) für jede Breitenminute).

Müller, I.: „Verteilung der Schwere über die Oberfläche der Ellipsoide von Krassowsky, Hayford und Bessel" (ung.). Geofizikai Közlemének, Bd. IV, Nr. 2, Budapest 1955, S. 78.

Ellipsoid Nr. I) wird seit 1946 verwendet in: UdSSR, Polen, Tschechoslowakei, Ungarn, Rumänien und Bulgarien.

T a f e l n für I): Hristow, W. K.: „Tables des grandeurs fondamentales géodésiques pour l'ellipsoide de F. N. Krassowsky." Sofia 1950.

98. **Niskanen 1945**

$a_1 - a_2 = 293$ m $\quad \lambda_{a_1} = 4°$ West $\quad \alpha_1 = 1:(295{,}7\ \pm 0{,}2)$
$\alpha_2 = 1:(299{,}8\ \pm 0{,}2)$
$\alpha_e = 1:21\,550$ (c)

Niskanen zog für seine Auswertung nur Schwerestationen auf Ebenen zwischen 0 und 300 m Meereshöhe heran. Stationen in einer Höhe von 300 m und darunter wurden jedoch ebenfalls weggelassen, wenn sie in der Nähe von größeren Gebirgen lagen und wenn sie eine 80 mGal übersteigende Anomalie aufwiesen. Die Daten wurden meistens aus Heiskanens Katalog von 1938 entnommen. Die Ausgleichstiefe betrug 113,7 km. Er gruppierte ebenfalls in Gradabteilungen von 1° Breite auf 1° Länge und gab dem repräsentativen

Wert jeder dieser Gradabteilung das Gewicht 1. Er erhielt so mittlere Anomalien von 886 isostatisch reduzierten repräsentativen Stationen mit folgender Verteilung:

Europa	400 Stationen	Indien	104 Stationen
USA	205	China	44
Sibirien	97	Afrika	36

Die hieraus abgeleitete Formel der Normalschwere lautete:

$$\gamma = 978{,}0468 \text{ Gal} \{1 + 0{,}005\,2978 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\,\varphi \\ + 0{,}000\,0230 \cos^2 \varphi \cos 2\,(\lambda + 3{,}9^\circ)\},$$

woraus er die obigen Parameter berechnete.

Auch hier zeigt sich in der Verteilung, daß die Meßwerte und daher deren Ergebnisse kaum die ganze Erdoberfläche repräsentieren können.

Niskanen, E.: „Gravity formulas derived by the aid of the level land stations." Ann. Acad. Scient Fennicae, Series A, Nr. III, 10, Helsinki 1945, S. 1—16.

99. Bullard 1946

$\alpha = 1 : (297{,}338 \pm 0{,}050)$

Bullard fand diesen Wert aus der Präzessionskonstanten 5493,156 ±0,175, die er aus den von De Sitter-Brouwer 1938 veröffentlichten neuesten Werten der astronomischen Konstanten unter entsprechender Verarbeitung der neuesten Werte für die Mondmasse von Spencer Jones von 1941 und Bullens Abschätzung der Dichteänderung mit der Tiefe vom Jahre 1940 neu bestimmt hatte.

Dieser so gewonnene Abplattungswert ist, wie schon erwähnt, universeller als die Werte aus den ungleichmäßig verteilten Schweremessungen, wenn man von dem unbedeutenden Einfluß der Annahme über die Dichteverteilung absieht.

Bullard, E. C.: „The figure of the Earth." Geophys. Suppl. M. N. RAS, Vol. 5, London 1948, S. 186—192

100. Berroth 1948

$\alpha = 1 : 297{,}3$

Berroth berechnete unter Benützung der neuesten astronomischen Konstanten die numerischen Werte der größten Längen- (4) und Breitenglieder (5) der theoretischen Mondbewegung, die von Hill 1891 auf Grund Delaunys Mondtheorie abgeleitet wurden. Die Übereinstimmung zwischen dem Beobachtungsmaterial und den theoretischen Werten verbesserte sich dadurch wesentlich, so daß der daraus gewogene Abplattungswert mit großer Wahrscheinlichkeit bestimmt ist.

Berroth, A.: „Über die geometrische und statische Abplattung der Erde aus den periodischen Gliedern der Mondbewegung." Geofisica pura e applicata, Heft 3—4, Milano 1948, S. 65—74.

101. Jeffreys 1948

$a = 6\,378\,099 \text{ m} \pm 116$ $\alpha = 1 : (297{,}10 \pm 0{,}36)$

Die Dimensionen, die aus Gradmessungen abgeleitet werden, repräsentieren nur die Niveaufläche des betreffenden triangulierten Gebietes und nicht die der gesamten Erde. Ihre mittleren Fehler sind also auch kein Maß für ihre Abweichung vom wahrscheinlichsten

Wert. Ein so gewogenes Mittel aus mehreren Dimensionen kann daher das Ergebnis nicht wesentlich verbessern. Jeffreys testete daher zuerst die Existenz von regional-systematischen Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid in 10° auf 10°- und 30° auf 30°-Feldern, und zwar mit Hilfe der Verteilung der gemessenen Schwerewerte. Er benützte dann die zwischen den 10° auf 10°- bzw. 30° auf 30°-Feldern festgestellten Variationen, um die zu erwartende Streuung in den berechneten Werten der großen Halbachsen und der Abplattung abzuschätzen. Diesen Streuungswert kombinierte er mit dem unmittelbar berechneten mittleren Fehler zu einem neuen Fehlermaß für die Bedingungsgleichungen seiner Gesamtausgleichung. Er geht von der Freiluftlösung aus, da nach seiner Ansicht eine isostatische Reduktion systematische Fehler verursachen kann. Die beobachteten Bogen wurden nur mittels der einfachen geometrischen Beziehung auf das Geoid reduziert.

I) Als Beweis seiner obigen Theorie wertete er zunächst die Dimensionen verschiedener bekannter Autoren unter Verwendung der von diesen gegebenen mittleren Fehlern aus, und zwar:

	$\Delta\varphi$	φ_m	Quelle
1. Westeuropäischer Meridian	27°	49,7°	Helmert 1906/13
2. Russisch-skandinavischer Meridian	25°	58,0°	Helmert 1906/13
3. Südafrikanischer Meridian	25°	—25,0°	Helmert 1913
	$\Delta\lambda$		
4. Europäischer Parallel ($\Delta = 37°$)	60°	52°	Helmert 1913
5. Russischer Parallel ($\Delta = 13{,}5°$)	20°	47,5°	Helmert 1913
6. Indischer Parallel ($\Delta = 20°$)	22°	24°	Helmert 1913.

Die Dimensionen aus diesen sechs Bogen wurden mit den Hayfordschen Dimensionen 1909, Lösung A (bestanschließender Ellipsoid) zu acht Bedingungsgleichungen zusammengefaßt. Deren Auflösung ergab:

$$a = 6\,378\,097 \text{ m } \pm 31 \quad \text{und} \quad \alpha = 1:(298{,}85 \pm 0{,}81)\,.$$

Die Fehlerquadratsumme fiel sehr groß aus. Der russisch-skandinavische Meridian, der bisher nie ein systematisches Verhalten zeigte, trug dabei allein 56% bei.

II) Bei der folgenden Lösung wurden in den Fehlermaßen die regional-systematischen Abweichungen berücksichtigt und außerdem die komplizierte Figuration des US-Netzes durch zwei Gleichungen ersetzt; eine für den Parallel in $\varphi = 39°$ mit $\Delta\lambda = 49°$ und eine für einen fiktiven Meridianbogen, der den westlichen und zentralen Meridian und den östlichen schiefen Bogen repräsentieren sollte. Die Auflösung ergab:

$$a = 6\,378\,118 \text{ m } \pm 119 \quad \text{und} \quad \alpha = 1:(299{,}76 \pm 2{,}63)\,.$$

Die Fehlerquadratsumme ging auf 16% der ersten Lösung zurück. Nach Berücksichtigung von Längengliedern, wie er sie aus seiner Diskussion der Schwerewerte ableitete, erhielt Jeffreys

$$a = 6\,378\,117 \text{ m } \pm 119 \quad \text{und} \quad \alpha = 1:(298{,}40 \pm 2{,}61)\,.$$

Die Fehlerquadratsumme stieg aber wieder auf 29% der ersten Lösung an, so daß die vermutete Korrelation mit der Länge durch die geodätischen Beobachtungen kaum nachgewiesen werden kann.

III) Aus seinen Auswertungen der Schwerewerte (1932, 1941 und 1943), wo er die in 10°- und 30°-Quadratfeldern gruppierten Schwerewerte testete, erhielt er nach Freiluftreduktion folgende Formel der Normalschwere:

$$\gamma = 979\,771{,}5 \text{ Gal} \quad + 3\,444{,}4\, P_2 \qquad + 5{,}3\, P_4\,,$$
$$\gamma = 978{,}0513 \text{ Gal}\,(1 + 0{,}005\,2859 \sin^2\varphi \quad - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\,\varphi)$$

und daraus die Abplattung:

$$\alpha = 1 : (296{,}85 \pm 0{,}66)\,.$$

Nach Berücksichtigung der Längenkorrelation bekam er

$$\gamma = 979\,772{,}5 \text{ Gal} \quad + 3\,439{,}9\, P_2 \qquad + 5{,}3\, P_4\,,$$
$$\gamma = 978{,}0544 \text{ Gal}\,(1 + 0{,}005\,2790 \sin^2\varphi \quad - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\,\varphi)$$

mit der Abplattung:

$$\alpha = 1 : (296{,}22 \pm 0{,}66)\,.$$

IV) Anschließend leitete Jeffreys aus der Präzessionskonstanten, die er nach seiner Abschätzung der Mondmasse und wegen der wahrscheinlichen Abweichung der Erde vom hydrostatischen Zustand korrigiert hatte, folgende Abplattung ab:

$$\alpha = 1 : (297{,}341 \pm 0{,}065)\,.$$

V) Die aus II) bis IV) erhaltenen Parameter faßte er mit den Parametern a und α, die er aus der Mondparallaxe aus den Beobachtungen in Greenwich und am Kap der Guten Hoffnung berechnet hatte, wobei er den Einfluß der noch unsicheren Kenntnis der Lotabweichung auf beiden Stationen durch entsprechende Gewichtsfestsetzung berücksichtigte, in fünf Bedingungsgleichungen zu einer Gesamtausgleichung zusammen. Die Auflösung ergab folgende Parameter, die jetzt auf geodätischen, gravimetrischen und astronomischen (Mondparallaxe und dynamische Abplattung) Messungen beruhen:

$$a = 6\,378\,097 \text{ m} \pm 116 \quad \text{und} \quad \alpha = 1 : (297{,}28 \pm 0{,}25)\,,$$

und nach Berücksichtigung der Längenkorrelation

$$a = 6\,378\,103 \text{ m} \pm 116 \quad \text{und} \quad \alpha = 1 : (296{,}91 \pm 0{,}40)\,.$$

Auch hier stieg die Fehlerquadratsumme auf das 1,5fache der Lösung ohne Längenkorrelation an.

Jeffreys entschied sich daher für einen Kompromiß aus beiden Lösungen, nämlich für

$$a = 6\,378\,100 \text{ m} \pm 116 \quad \text{und} \quad \alpha = 1 : (297{,}10 \pm 0{,}38)\,.$$

VI) Um die Konsistenz seiner neuen Dimensionen der Erdfigur mit den Mondkonstanten zu prüfen, leitete er mit diesen Erddimensionen die Mondkonstanten erneut ab. Anschließend wiederholte er mit diesen neuen Mondkonstanten die Ausgleichung und erhielt

$$a = 6\,378\,099 \text{ m} \pm 116 \quad \text{und} \quad \alpha = 1 : (297{,}10 \pm 0{,}36)\,,$$

was ein schöner Beweis für die Harmonie zwischen den neuen Konstanten für Erde und Mond ist.

VII) Zum Schluß gibt dann Jeffreys noch die Formel für die Normalschwere, die seiner Abplattung entspricht, zu

$$\gamma = 978{,}0373 \text{ Gal}\,(1 + 0{,}005\,2891 \sin^2\varphi - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\,\varphi)\,.$$

Jeffreys versuchte hier ähnlich wie Harkness 1891, allerdings mit modernen Methoden, aus den Daten aller geodätischen und astronomischen Messungen plausible Dimensionen abzuleiten.

Jeffreys, Sir H.: „The figure of the Earth and Moon." Geophys. Suppl., M. N. RAS, Vol. 5, Nr. 7, London 1948, S. 219—247.

102. Ledersteger 1948

$a = 6\,377\,788$ m ± 42 $\alpha = 1 : (296{,}76 \pm 1{,}14)$

1947 fand und bewies Ledersteger den Satz von der Invarianz des Schwerpunktes eines ausgeglichenen Lotabweichungssystems gegenüber irgendeinem Ellipsoidübergang; d. h. die Werte der Verschiebung und Drehung, die für den Schwerpunkt eines geodätisch-astronomischen Netzes aus einer Lotabweichungsausgleichung gewonnen wurden, bleiben auch beim Übergang auf ein anderes Referenzellipsoid erhalten (siehe Ledersteger, K.: „Theoretische und numerische Studien zur genäherten Ableitung eines bestanschließenden Ellipsoids für Europa", Sitz.Ber. Akad., Math. Kl., Abt. II A, Bd. 156, Wien 1947). Mit Hilfe dieses Satzes entwickelte Ledersteger dann seine neue Methode der „Partialsysteme" zur Bestimmung eines bestanschließenden Ellipsoids. Er bestimmte zuerst die Verschiebung und Drehung für die Schwerpunkte folgender 16 Partialsysteme: Deutschland (53 Stationen, Schwerpunkt $\varphi = 52°\,53'$, $\lambda = 14°\,03'$), Böhmen-Mähren (43 St., $\varphi = 49°\,45'$, $\lambda = 14°\,41'$), Slowakei (38 St., $\varphi = 48°\,27'$, $\lambda = 20°\,45'$), Polen (11 St., $\varphi = 52°\,12'$, $\lambda = 23°\,45'$), Ungarn (18 St., $\varphi = 47°\,49'$, $\lambda = 20°\,50'$), Rumänien (15 St., $\varphi = 46°\,36'$, $\lambda = 25°\,50'$), Jugoslawien (39 + 1 St., $\varphi = 44°\,30'$, $\lambda = 17°\,34'$), Bulgarien (19 Stationen, $\varphi = 42°\,57'$, $\lambda = 25°\,00'$), Griechenland (5 St., $\varphi = 38°\,41'$, $\lambda = 23°\,10'$), Österreich (66 St., $\varphi = 47°\,30'$, $\lambda = 13°\,45'$), Italien (46 St., $\varphi = 42°\,26'$, $\lambda = 12°\,10'$), Schweiz (50 Stationen, $\varphi = 46°\,54'$, $\lambda = 7°\,55'$), Holland-Belgien (22 St., $\varphi = 52°\,13'$, $\lambda = 5°\,12'$), Frankreich (32 Stationen, $\varphi = 46°\,45'$, $\lambda = 2°\,57'$), Vereinigtes Königreich (14 St., $\varphi = 51°\,44'$, $\lambda = 354°\,54'$) und Ostspanien (11 St., $\varphi = 39°\,50'$, $\lambda = 359°\,34'$).

Nachdem das System Griechenland wegen der großen Widersprüche ausgeschieden wurde, verblieben 15 „Stationen", die 478 astronomische Stationen repräsentieren. Jeder Schwerpunkt i erhält nun eine Verbesserung in Breite und Länge, die durch die vorgegebene Lotabweichungsverschiebung der zweiten, anderen Stationen k verursacht wird und die vom angenommenen Rechenellipsoid abhängig ist, und umgekehrt die Station k eine Verbesserung wegen der Verschiebung in i. Diese Verbesserungen, die mittels der Helmertschen Transformationsformeln aufgestellt werden, werden nun den invarianten Verschiebungen im gleichen Punkt gleichgesetzt. Diese spielen also die Rolle von Absolutgliedern.

Ledersteger erhält auf diese Weise zwei Fehlergleichungen (in Länge und Breite) mit den Unbekannten da und $d\alpha$ für jede „geodätische Linie" von Station i nach k und ein zweites Paar für die Linie von k nach i. Da die entsprechenden Gleichungen (in Breite bzw. Länge) für die gleiche Linie zu einer durch Subtrahieren vereinigt werden können, erhält er für alle möglichen geodätischen Linien zwischen den 15 Stationen $n\,(n-1) = 210$ Fehlergleichungen. Da man die Fehlergleichungen in Länge für Linien in der Meridianrichtung und die der Breitengleichungen für Linien in der Ost-Westrichtung wegen ihres geringen Beitrages weglassen kann, verringert sich die Anzahl auf 190 Fehlergleichungen, alle von Gewicht 1. Der Hauptvorteil der Methode Ledersteger liegt in der geringeren Anzahl der auf einmal aufzulösenden Gleichungen gegenüber der bei der klassischen Methode der Lotabweichungsausgleichung. Sie beträgt etwa nur $^1/_5$. Weiterhin erhält kein Zentralpunkt irgendeine Vorrangstellung und die hier auftretenden „geodätischen Linien" sind unabhängig von der eigentlichen Netzfiguration, wenn man von der notwendigen, meist recht schwachen Verbindung mit benachbarten Partialnetzen absieht, die aber wiederum keinen Einfluß auf die Güte der bestimmten Lotabweichung hat. Das hier von Ledersteger bestimmte Ellipsoid stellt das bestanschließende Ellipsoid für das von ihm bearbeitete europäische Gebiet dar.

Ledersteger, K.: „Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid", Sonderheft 3, Österr. Zeitschr. Verm.Wes., Wien 1948.

103. Ledersteger 1949

$a = 6\,377\,879$ m ± 37 $\alpha = 1 : (298{,}61 \pm 1{,}07)$

Nach Veröffentlichung der Ergebnisse der Ausgleichung des Ostseeringes im Jahre 1949 fügte Ledersteger das Partialsystem „Ostseering" mit 81 Stationen und dem Schwerpunkt $\varphi = 58^\circ\,10'$, $\lambda = 20^\circ\,18'$ zu den 15 Systemen aus dem Jahre 1948 hinzu. Die Gesamtzahl der Fehlergleichungen seines europäischen Lotabweichungssystems ist nun 218 und enthält 559 geodätisch-astronomische Stationen. Wie Ledersteger erwartet hatte, nahm die Halbachse zu, und zwar um 91 m. Er vermutet, daß die obere Grenze von a in Europa bei 6378 km liegt, die nach Anschluß des europäischen Anteils des Netzes der UdSSR erreicht werden wird.

Ledersteger, K. „Der Anschluß des Ostseeringes an das europäische Lotabweichungssystem." Österr. Zeitschr. Verm.Wes., Wien 1949, S. 103—119.

104. Schütte 1950

I) Schütte unterzog das von Shuravlev 1940 veröffentlichte Schwerematerial noch einmal verschiedenen Ausgleichungen. Zuerst wertete er die 1593 Stationen, von denen isostatische und Freiluftanomalien gegeben waren, aus. Dabei wurden die drei nach Shuravlev gestörten Gruppen nicht berücksichtigt. Schütte gruppierte wie Shuravlev in Breitenzonen von 1°. Er bildete das Mittel aller Zonenstationen und schrieb dieses einmal mit Gewicht 1 und einmal mit Gewicht n (Anzahl) der ebenfalls gemittelten Breite zu. Die daraus sich ergebenden Werte für $1 : \alpha$ sind:

Gew.	Freiluft	isostatisch	Δ
1	297,28 ±0,61	298,53 ±0,93	+ 1,25
n	295,89 ±0,56	297,88 ±0,73	+ 1,99
Δ	+ 1,39	+ 0,65	

Die Ergebnisse aus den freiluftreduzierten Werten verdienen, vom Standpunkt ihrer mittleren Fehler aus gesehen, den Vorzug. Außerdem wies Schütte an Hand einer theoretischen Untersuchung nach, daß die isostatischen Abplattungswerte im Nenner einen um 0,5 kleineren Wert ergeben müßten, und zwar unter der Voraussetzung einer gleichmäßigen Verteilung von genügend Schwerewerten; d. h., daß die obigen Werte aus den 1593 Stationen nicht ganz zuverlässig sein können.

II) Schütte wertete daher anschließend 10 088 freiluftreduzierte Werte aus, und zwar einmal ohne die und einmal mit den drei Gruppen der gestörten Stationen (dann 10 701). Die Gruppierung und Gewichtsfestsetzung erfolgte wie unter I). Die Werte für $1 : \alpha$ ergaben sich zu

Gew.	ohne	mit	Δ
1	296,36 ±0,62	294,88 ±0,25	—1,48
n	297,51 ±0,36	296,51 ±0,52	—1,00
Δ	—1,15	—1,63	

Den größten Einfluß auf die Änderung der Abplattung brachte die Hereinnahme der Gruppe 2 (Inselstationen), nämlich —1,58 bzw. —1,14.

Die entsprechenden Formeln der Normalschwere lauten:

für Gewicht $= 1$

$$\gamma = 978{,}0698 \text{ Gal } (1 + 0{,}005\,2639 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\,\varphi)\,,$$

für Gewicht $= n$

$$\gamma = 978{,}0520 \text{ Gal } (1 + 0{,}005\,2827 \sin^2 \varphi - 0{,}000\,0059 \sin^2 2\,\varphi)\,.$$

Die allgemeine Tendenz der Werte von Schütte neigt zu einem Abplattungswert von 1:296 (oberer Grenzwert nach Wavre).

Schütte empfiehlt zum Schluß, auch die „gestörten" Stationen zu verwenden, so lange als unsere Kenntnis über die Ausdehnung und Verteilung solcher „lokaler Anomalien", vor allem auf dem Meere, unzureichend ist. Bei intensiver Vermessung des betreffenden Gebietes, wo jetzt nur einzelne Stationen mit „lokaler" Störung vorliegen, könnte sich dann eine allgemeine Aufwölbung oder Depression des Geoids herausstellen.

Schütte, H.: „Die Bestimmung der Abplattung der Erde aus der Schwereverteilung nach dem Schwereverzeichnis von N. F. Shuravlev." Gerl. Beitr. Geophys., Bd. 62, Leipzig 1950, S. 9—26.

105. Ledersteger 1951

$a = 6\,378\,284$ m $\qquad \alpha = 1 : 297{,}0$ (Hayford)

Ledersteger modifizierte hier die Methode der klassischen Lotabweichungsausgleichung bzw. seine Methode der Partialnetze, die nur zum bestanschließenden Ellipsoid führen, dadurch, daß er sie mit der aus der Schweremessung bestimmten Geoidform in Verbindung bringt, und erhält damit die Dimensionen eines mittleren Erdellipsoides. Allerdings setzt diese neue Methode die Kenntnis der Abplattung voraus. Nach einer kritischen Betrachtung der neuesten Abplattungswerte entscheidet er sich für den Hayfordschen Wert 1:297,0, da dieser etwa dem Mittel aus den modernsten Bestimmungen, vor allem aus den universellen astronomischen Messungen gleichkommt (siehe auch Mittel der Abplattungswerte in Tabellen auf S. 91, 92).

Die systematischen Anteile der relativen geodätisch-astronomischen Lotabweichungen, die aus mehr oder weniger regional begrenzten Geoidstücken von relativer Neigung gewonnen werden, versucht er dadurch auszuschalten, daß er diese Lotabweichungen mittels der Undulationen des Geoids von Tanni absolut „orientiert". Die Quadratsumme der Abweichungen der so „orientierten" relativen Lotabweichungen wird zum Minimum gemacht.

Ledersteger gruppiert die vorhandenen europäischen und nordamerikanischen Lotabweichungsstationen bzw. Laplacepunkte derart, daß der Schwerpunkt jeder solchen Gruppe (wieder Partialsystem genannt) so weit wie möglich mit dem Mittelpunkt der 5° auf 5°-Felder des Tannischen Geoids zusammenfällt. Für jeden Schwerpunkt dieser Partialsysteme berechnet er wie 1948 die geodätisch-astronomischen Lotabweichungen ξ, η_λ und η_a. Anschließend ermittelt er die Geoidhöhe und die beiden Gradienten in Nord-Süd und Ost-West für den Schwerpunkt aus Geoidprofilen, die mittels der Geoiddaten von Tanni aufgetragen wurden. Über eine modifizierte Formel des astronomischen Nivellements erhält er dann aus den Geoiddaten die Komponenten der absoluten Lotabweichung in jedem Schwerpunkt, die dann die Absolutglieder seiner Fehlergleichungen bilden.

Für Europa ergeben sich 22 derartige Partialsysteme mit 527 Stationen, die in den 22 5° auf 5°-Feldern des Tannischen Geoids liegen und auf ein Gebiet von $\varphi = 40°\,15'$ bis $\varphi = 60°\,05'$ und von $\lambda = 0°$ bis $\lambda = 31°\,59'$ verteilt sind. Die Auflösung der Normalgleichungen ergab die Verschiebung und Drehung des ganzen Europasystems und die hier interessierende Achsenverbesserung bzw. neue Halbachse zu

$$a = 6\,378\,315 \text{ m} \;\pm 53 .$$

Für USA liegen 19 Partialsysteme mit 253 Hayfordschen Stationen vor, die auf ein Gebiet von $\varphi = 25°\,07'$ bis $\varphi = 45°$ und $\lambda = 245°\,55'$ bis $\lambda = 292°\,36'$ verteilt sind. Die große Halbachse ergab sich zu

$$a = 6\,378\,281 \text{ m} \;\pm 44 .$$

Die Werte für Europa und USA liegen innerhalb der Fehlermaße. Im Mittel ergibt sich

$$a = 6\,378\,298 \text{ m} \;\pm 34 .$$

Ledersteger berücksichtigt dann noch den Einfluß der Reduktion der Grundlinien vom Geoid auf das Normalsphäroid und erhält für

Europa	$a = 6\,378\,286$ m
USA	$a = 6\,378\,282$ m
Mittel	$a = 6\,378\,284$ m.

Diese fast vollständige Übereinstimmung schreibt aber Ledersteger mehr dem Zufall zu und schlägt vor,

$$a = 6\,378\,300 \text{ m}$$

als den zur Zeit besten Näherungswert zu nehmen. Diesen Wert hatte McCaw bereits 1924 in Madrid vorgeschlagen.

Ledersteger Wert für a liegt in der Mitte zwischen dem von Helmert 1907 abgeschätzten Wert und dem von Hayford von 1909.

Ledersteger, K.: „Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen.“ Österr. Zeitschr. Verm.Wes., Sonderheft Nr. 12, Wien 1951.

106. O'Keefe-Anderson 1952

I) $a = 6\,378\,448$ m ± 169
II) $a = 6\,378\,428$ m ± 166

Diese Werte wurden über Beobachtungen von Sternbedeckungen durch den Mond auf neun Stationen in USA im Bereich von $\varphi = 31°\,39'$ bis $\varphi = 39°\,23'$ abgeleitet. Sie beruhen auf der Messung der Geschwindigkeit des Mondschattens über eine geodätisch genau bekannte Entfernung. Wenn man die mehr oder minder theoretische Schwerekorrektion im Zentralpunkt Meade's Ranch vernachlässigt, ergibt sich der Wert unter II). Diese Ergebnisse sind zwar ziemlich unsicher und liegen über dem bisher als wahrscheinlich angenommenen Wert von α. Da dieses Verfahren aber nicht durch die Lotabweichungen der Stationen verfälscht wird, verdient das Ergebnis hier aufgeführt zu werden.

O'Keefe, J. A. – Anderson, J. P.: „The Earth's equatorial radius and the distance of the Moon.“ Bull. géod., N. S. No. 29, Paris 1953, S. 219—250.

107. Lieberman 1953

$a = 6\,378\,181$ m $\qquad \alpha = 1 : 294{,}1$

Lieberman bestimmte die Geoidhöhen für Südost-, Südwest- und Nordeuropa aus den geodätisch-astronomischen Beobachtungen, indem er das von Wolf aus dem Zentraleuropäischen Netz abgeleitete Geoid extrapoliert (siehe Wolf, H.: „Die angenäherte Bestimmung des Geoids mittels astronomischen Nivellements im Bereich des Zentraleuropäischen Netzes". Veröff. Inst. für Erdmess., Bamberg 1949, Bd. 6/1, S. 57—71 und Bd. 6/2, Tafel 10—23).

Anschließend leitet er unter Verwendung der von De Graaf-Hunter in „Survey of India, Geodetic Report for 1934", S. 142, gegebenen Formeln aus den so gewonnenen Geoidhöhen ein bestanschließendes Geoid ab.

Unter Festhalten der Hayfordschen Abplattung erhält er

$$a = 6\,378\,170{,}7 \text{ m} \quad \text{mit} \quad \alpha = 1:297{,}0 \text{ (Hayford).}$$

Diese aus geodätisch-astronomischen Messungen gewonnenen Dimensionen vergleicht er dann mit denen, die er aus dem auf Grund von Schweremessungen berechneten Geoid von Tanni 1948 abgeleitet hat. Aus Tannis Geoid erhielt er

$$a = 6\,378\,160 \text{ m} \quad \text{mit} \quad \alpha = 1:297{,}0 \text{ (Hayford).}$$

Die Übereinstimmung der geodätischen und gravimetrischen Ergebnisse ist gut.

Es ist interessant, hier noch die Dimensionen zum Vergleich anzugeben, die kürzlich für das gleiche Gebiet bzw. für ein benachbartes anschließendes Gebiet abgeleitet wurden. Ledersteger erhielt aus dem europäischen Lotabweichungssystem 1949 (bestanschließendes Ellipsoid):

$$a = 6\,377\,879 \text{ m} \quad \text{und} \quad \alpha = 1:298{,}61\,.$$

Dubovsky erhielt 1939 für das im Osten anschließende Gebiet der UdSSR aus gravimetrisch-astronomischen Messungen:

$$a = 6\,378\,179 \text{ m} \quad \text{und} \quad \alpha = 1:303{,}0$$

bzw.

$$a = 6\,378\,194 \text{ m} \quad \text{und} \quad \alpha = 1:292{,}3$$

oder

$$a = 6\,377\,975 \text{ m} \quad \text{mit} \quad \alpha = 1:297{,}0 \text{ (Hayford)}$$

bzw.

$$a = 6\,378\,410 \text{ m} \quad \text{mit} \quad \alpha = 1:297{,}0 \text{ (Hayford).}$$

Lieberman, H. A.: „An investigation of the geoid in Europe." Bull. géod., London 1955, N. S. No. 37, S. 1—11.

Schlußbetrachtungen

Angesichts des umfangreichen hier vorliegenden Materials von Messungen und deren Auswertungen möchte man fast sagen, daß ein Mehr an Messungen und ein Weniger an Berechnungen die Lösung des Problems näherrücken könnte. Was kann das gegenwärtige technische Zeitalter den Gradmessungsarbeiten des 18. Jahrhunderts in Peru, Lappland und Frankreich und denen des 19. Jahrhunderts in den Vereinigten Staaten, Westeuropa, Rußland, Afrika und Indien gegenüberstellen? Mit Ausnahme der russischen geodätischen Arbeiten im asiatischen Teil der UdSSR, deren Ergebnisse leider der internationalen Fachwelt nicht zur Verfügung stehen, und der Schweremessungen werden seit 50 Jahren die Messungen der gleichen Gebiete immer wieder neuen Ausgleichungsmethoden unterworfen, die meist entwickelt wurden, um aus unzureichenden Messungen plausible Werte zu erhalten. Es ist zu wünschen, daß das kommende Geophysikalische Jahr wenigstens auf dem Gebiete der Schweremessungen einige der Lücken füllen kann; denn die Bestimmung der Figur der Erde ist in erster Linie doch ein meßtechnisches Problem.

IV. Anhang

1. Chronologische Aufstellung mit Angabe der Bearbeiter und der von ihnen bestimmten Ellipsoidparameter.
2. Zusammenstellung aller Abplattungswerte.
3. Abplattungswerte aus gravimetrischen und astronomischen Messungen.
4. Die Elemente der dreiachsigen Ellipsoide.
5. Die großen Halbachsen.
6. Diagramm der Abplattungswerte und großen Halbachsen.
7. Die klassischen Längenstandards und ihre Eichwerte.
8. Statistische Angaben über die Gradmessungen bis 1900 einschließlich Literatur.

Chronologische Reihenfolge mit Angabe der gegebenen Parameter

Lfd. Nr.	Jahr	Name	Parameter	Methode
1.	1718	Cassini I/II	α	Gradm.
2.	1740	Cassini II	α	Gradm.
3.	1755	Boscovich	α	Gradm.
4.	1799	Commission	a, b, α	Gradm.
5.		Laplace	α	Gradm.
			α	grav.
6.	1802	Laplace	α	astron.
7.	1806	Lindenau	a, b, α	Gradm.
8.	1807	Oriani	a, b, α	unbekannt
9.	1810	Delambre	a, b, α	Gradm.
10.	1812	Zach	a, b, α	Gradm.
11.	1818	Bonsdorff, J. G.	α	grav.
12.		Laplace	α	astron.
13.	1819	Walbeck	a, b, α	Gradm.
14.		Hessen	a, b, α	Gradm.
15.	1821	Biot	α	grav.
16.		Müffling	a, α	unbekannt
17.	1824	Müffling	a, b, α	Gradm.
18.	1825	Sabine	α	grav.
19.	1826	Bürg	α	astron.
20.	1827	Krayenhoff	a, α	spez.
21.	1829	Schmidt	a, b, α	Gradm.
			α	grav.
22.	1830	Airy	a, b, α	Gradm.
			α	grav.
23.		Everest	a, b, α	Gradm.
24.	1831	Schmidt	a, b, α	Gradm.
25.	1832	Bowditch	α	grav.
26.	1834	Baily–Foster	α	grav.
27.		Eckhardt	a, b, α	Gradm.
28.		Bessel	a, α	Gradm.
29.	1837	Bessel	a, b, α	Gradm.
30.	1840	Puissant	a, α	Gradm.
31.	1841	Bessel	a, b, α	Gradm.
32.	1843	Borenius	α	grav.
33.	1845	Tenner/Zylinski	a, α	spez.
34.	1847	Everest	a, b, α	Gradm.
35.	1853	Paucker	a, b, α	Gradm.
			α	grav.
36.	1856	Clarke	a, b, α	Gradm.
			a, b, α	Flächenmeth.
37.	1858	Clarke	a, b, α	Gradm.
			a, b, α	Flächenmeth.
38.	1859	Schubert	dreiachs.	Gradm.
39.	1860	Clarke	dreiachs.	Gradm.
			a, b, α	Gradm.

Lfd. Nr.	Jahr	Name	Parameter	Methode
40.	1860	Struve	a, α	Gradm.
41.	1861	Schubert	a, b, α	Gradm.
42.	1861	Pratt	a, b, α	Gradm.
43.	1863	Clarke	a, b, α	Gradm.
44.	1865	Levret	a, α	spez.
45.	1866	Clarke	a, b, α	Gradm.
			dreiachs.	Gradm.
46.		Pratt	a, b, α	Gradm.
47.		Villarceau	a, α	Flächenmeth.
48.		Fischer, Ph.	a	Gradm.
			α	grav.
49.	1869	Klein	a	Gradm.
50.	1873	Listing	a, b, α	spez.
51.	1876	Dänemark	a, α	unbekannt
		Andrae	G, α	Flächenmeth.
52.		Fischer, A.	α	grav.
53.	1877	Listing	a, b, α	spez.
54.		Schott	a, α	Flächenmeth.
55.	1878	Jordan?	a, b, α	unbekannt
56.		Clarke	a, b, α	Gradm.
			dreiachs.	Gradm.
	1880		α	grav.
57.	1884	Helmert	α	grav.
			α	astron.
			a	astron.
58.	1887	Helmert	a, b	Gradm.
59.	1888	Bonsdorff, A.	a, α	Gradm.
60.	1889	Tisserand	α	astron.
61.	1891	Harkness	a, b, α	spez.
			α	astron.
62.	1893	Shdanov	a, b, α	Gradm.
63.	1898	Furber	a, b, α	Flächenmeth.
64.		New South Wales	a, b, α	spez.
65.	1900	Darwin	α	astron.
66.		Schott	a, α	Gradm.
67.	1901	Helmert	α	grav.
68.	1904	Tittmann	α	Gradm.
69.	1906	Helmert	a	spez.
70.		Hayford	a, b, α	mittl. Figur
71.	1909	Hayford	a, b, α	mittl. Figur
72.	1912	Bowie	α	grav.
73.		Véronnet	α	astron.
74.	1913	Helmert	a	spez.
75.	1915	Helmert	dreiachs.	grav.
76.		Wellisch	a, b, α	spez.
77.		Brown	α	astron.
78.	1916	Berroth	dreiachs.	grav.
79.	1917	Bowie	α	grav.

Lfd. Nr.	Jahr	Name	Parameter	Methode
80.	1921	See	a, b, α	spez.
81.	1924	Jeffreys	α	astron.
82.		De Sitter	α	astron.
83.	1924	McCaw	a, α	spez.
84.		Heiskanen	dreiachs.	grav.
85.	1926	Heiskanen	a, α	mittl. Fig.
86.	1928	Heiskanen	dreiachs.	grav.
87.	1929	Heiskanen	a, α	mittl. Fig.
			dreiachs.	mittl. Figur
88.	1930	Krassowsky	a	Flächenmeth.
89.	1934	Hirvonen	dreiachs.	geoid.
90.	1935	Krassowsky	a, α	Flächenmeth.
			dreiachs.	Flächenmeth.
91.	1936	Krassowsky	a, α	Flächenmeth.
92.	1938	Heiskanen	dreiachs.	grav.
93.		Isotov	a, α	unbekannt
94.	1939	Dubovsky	a, α	geoid.
95.		De Sitter-Brouwer	α	astron.
96.	1940	Shuravlev	α	grav.
97.		Krassowsky	a, b, α	mittl. Fig.
			dreiachs.	mittl. Fig.
98.	1945	Niskanen	dreiachs.	grav.
99.	1946	Bullard	α	astron.
100.	1948	Berroth	α	astron.
101.	1948	Jeffreys	a, α	spez.
			α	grav.
			α	astron.
102.		Ledersteger	a, α	spez.
103.	1949	Ledersteger	a, α	spez.
104.	1950	Schütte	α	grav.
105.	1951	Ledersteger	a	mittl. Fig.
106.	1952	O'Keefe-Anderson	a	astron.
107.	1953	Lieberman	a, α	geoid.

Zusammenstellung der Abplattungswerte

$1:\alpha$	Jahr	Name	Methode
282,89	1830	Airy	grav.
283,03	1861	Schubert	Gradm.
284,4	1876	Fischer, A.	grav.
285,26	1834	Baily	grav.
286,1	1843	Borenius	grav.
288	1832	Bowditch	grav.
288,1	1830	Airy	grav.
288,4	1825	Sabine	grav.
288,45	1829	Schmidt	grav.
288,48	1877	Listing	spez.
288,62	1853	Paucker	grav.
289,00	1873	Listing	spez.
289,1	1825	Sabine	grav.

1 : a	Jahr	Name	Methode
289,48	1834	Baily-Foster	grav.
289,93	1853	Paucker	Gradm.
291,86	1858	Clarke	Gradm.
292,2	1880	Clarke	grav.
292,3	1818	Bonsdorff, J. G.	grav.
292,3	1939	Dubovsky	geoid.
293,4	1843	Borenius	grav.
293,46	1878	Clarke	Gradm.
293,7	1915	Brown	astron.
294	1826	Bürg	astron.
294,1	1953	Liebermann	geoid.
294,26	1858	Clarke	Gradm.
294,36	1863	Clarke	Gradm.
294,73	1860	Struve	Gradm.
294,75	1860	Clarke	Gradm.
294,88	1950	Schütte	grav.
294,96	1868	Fischer, Ph.	grav.
294,98	1866	Clarke	Gradm.
295	1826	Bürg	astron.
295,3	1866	Pratt	Gradm.
296	1924	McCaw	spez.
296,22	1948	Jeffreys	grav.
296,36	1950	Schütte	grav.
296,4	1900	Darwin	astron.
296,47	1940	Shuravlev	grav.
296,51	1950	Schütte	grav.
296,55	1940	Shuravlev	grav.
296,6	1876	Fischer, A.	grav.
296,6	1926	Heiskanen	mittl. Fig.
296,7	1915	Helmert	grav.
296,75	1939	De Sitter-Brouwer	astron.
296,76	1948	Ledersteger	Flächenmeth.
296,85	1948	Jeffreys	grav.
296,92	1924	De Sitter	astron.
297,0	1909	Hayford	mittl. Fig.
297,07	1915	Wellisch	spez.
297,10	1948	Jeffreys	spez.
297,12	1912	Véronnet	astron.
297,2	1889	Tisserand	astron.
297,3	1928	Heiskanen	grav.
297,3	1948	Berroth	astron.
297,34	1946	Bullard	astron.
297,34	1948	Jeffreys	astron.
297,4	1917	Bowie	grav.
297,4	1924	Heiskanen	grav.
297,48	1829	Schmidt	Gradm.
297,51	1950	Schütte	grav.
297,57	1940	Shuravlev	grav.

1 : α	Jahr	Name	Methode
297,65	1831	Schmidt	Gradm.
297,67	1891	Harkness	astron.
297,72	1856	Clarke	Gradm.
297,8	1884	Helmert	astron.
297,8	1906	Hayford	mittl. Fig.
297,8	1916	Berroth	grav.
297,9	1924	Jeffreys	astron.
298,02	1940	Shuravlev	grav.
298,07	1856	Clarke	Gradm.
298,3	1901	Helmert	grav.
298,3	1921	See	spez.
298,3	1929	Heiskanen	mittl. Fig.
298,3	1938	Heiskanen	grav.
298,3	1940	Krassowsky	mittl. Fig.
298,4	1912	Bowie	grav.
298,4	1940	Krassowsky	mittl. Fig.
298,40	1948	Jeffreys	spez.
298,46	1940	Shuravlev	grav.
298,5	1818	Bonsdorff, J.	grav.
298,59	1888	Bonsdorff, A.	Gradm.
298,6	1936	Krassowsky	Flächenmeth.
298,61	1949	Ledersteger	Flächenmeth.
298,85	1948	Jeffreys	spez.
298,9	1935	Krassowsky	Flächenmeth.
299,15	1841	Bessel	Gradm.
299,26	1884	Helmert	grav.
299,32	1830	Airy	Gradm.
299,5	1938	Isotov	unbekannt
299,65	1893	Shdanov	Gradm.
299,76	1948	Jeffreys	spez.
300	1876	Dänemark	unbekannt
300,20	1891	Harkness	spez.
300,7	1904	Tittmann	Gradm.
300,70	1837	Bessel	Gradm.
300,80	1830	Everest	Gradm.
302	1820	Hessen	unbekannt
302,02	1831	Schmidt	Gradm.
302,51	1834	Bessel	Gradm.
302,78	1819	Walbeck	Gradm.
302,8	1926	Heiskanen	mittl. Fig.
303,0	1840	Puissant	Gradm.
303,0	1939	Dubovsky	geoid.
304	1740	Cassini III	Gradm.
304	1806	Lindenau	Gradm.
304	1821	Biot	grav.
304,5	1900	Schott	Gradm.
304,6	1840	Puissant	Gradm.
305	1802	Laplace	astron.

1 : α	Jahr	Name	Methode
305,48	1877	Schott	Flächenmeth.
306,6	1818	Laplace	astron.
308,64	1810	Delambre	Gradm.
309,65	1827	Krayenhoff	Gradm.
309,67	1840	Puissant	Gradm.
309,97	1834	Eckhardt	Gradm.
310	1812	Zach	Gradm.
311,04	1847	Everest	Gradm.
312	1799	Laplace	Gradm.
315	1799	Laplace	grav.
315,6	1824	Müffling	Gradm.

Mittel ($n = 120$) = 1 : 297,734

Alte Werte oder solche von nur lokaler Bedeutung

246,67	1840	Puissant	285,8	1866	Villarceau
248	1760	Boscovich	286,5	1878	Jordan?
255	1755	Boscovich	287	1861	Pratt
263,60	1845	Tenner/Zylinski	294,31	1865	Levret
270,2	1898	Furber	310	1807	Oriani
277	1799	Laplace	310	1821	Müffling
277,0	1898	Furber	328,97	1876	Andrae
280,40	1858	Clarke	334,29	1799	Commission

Mittel aus allen Werten ($n = 136$) = 1 : 296,198

Abplattungswerte aus Schweremessungen

1 : α	Jahr	Name	1 : α	Jahr	Name
282,89	1830	Airy	296,55	1940	Shuravlev
284,4	1876	Fischer, A.	296,6	1876	Fischer, A.
285,26	1834	Baily	296,7	1915	Helmert
286,1	1843	Borenius	296,85	1948	Jeffreys
288	1832	Bowditch	297,3	1928	Heiskanen
288,1	1830	Airy	297,4	1917	Bowie
288,4	1825	Sabine	297,4	1924	Heiskanen
288,45	1829	Schmidt	297,51	1950	Schütte
288,62	1853	Paucker	297,57	1940	Shuravlev
289,1	1825	Sabine	297,8	1916	Berroth
289,48	1834	Baily-Foster	298,02	1940	Shuravlev
292,2	1880	Clarke	298,3	1901	Helmert
292,3	1818	Bonsdorff, J. G.	298,3	1938	Heiskanen
293,4	1843	Borenius	298,4	1912	Bowie
294,88	1950	Schütte	298,46	1940	Shuravlev
294,96	1868	Fischer, Ph.	298,5	1818	Bonsdorff, J. G.
296,22	1948	Jeffreys	299,26	1884	Helmert
296,36	1950	Schütte	304	1821	Biot
296,47	1940	Shuravlev	315	1799	Laplace
296,51	1950	Schütte			

Mittel ($n = 39$) = 1 : 294,667; Mittel von 1884 an ($n = 20$) = 1 : 297,313

Abplattungswerte aus den astronomischen Messungen

1 : α	Jahr	Name	1 : α	Jahr	Name
293,7	1915	Brown	297,3	1948	Berroth
294	1826	Bürg	297,34	1946	Bullard
295	1826	Bürg	297,34	1948	Jeffreys
296,4	1900	Darwin	297,67	1891	Harkness
296,75	1939	De Sitter-Brouwer	297,8	1884	Helmert
296,92	1924	De Sitter	297,9	1924	Jeffreys
297,12	1912	Véronnet	305	1802	Laplace
297,2	1889	Tisserand	306,6	1818	Laplace

Mittel ($n = 16$) = 1 : 297,752; Mittel von 1884 an ($n = 12$) = 1 : 296,953

Die dreiachsigen Ellipsoide

Jahr	Name	a_1—a_2	1 : α_1	1 : α_2	1 : α_e	λ_{a_1}	aus
1859	Schubert	719 m	292,11	302,00	8 886	41° 04′ Ost	Gradm.
1860	Clarke	1618	287,78	310,36	3 943	13° 58′ Ost	Gradm.
1866	Clarke	1944	286,97	314,38	3 281	15° 34′ Ost	Gradm.
1878	Clarke	465	290,04	296,27	13 731	8° 15′ West	Gradm.
1915	Helmert	230	—	—	—	17° West	grav.
1916	Berroth	150	296,7	298,8	42 000	10° West	grav.
1924	Heiskanen	690	294,3	299,0	18 700	18° Ost	grav.
1928	Heiskanen	242	295,7	299,0	26 703	0°	grav.
1929	Heiskanen	165	297,05	299,35	38 657	38° Ost	mittl. Fig.
1934	Hirvonen	139	—	—	—	19° West	grav.
1935	Krassowsky	200	299,0		32 000	18° Ost	Fläch.
1935	Krassowsky	—	298,6		31 000	15° Ost	Fläch.
1938	Heiskanen	352	295,3	300,2	18 314	25° West	grav.
1940	Krassowsky	212,6	296,83	299,78	30 000	15° Ost	mittl. Fig.
1945	Niskanen	293	295,7	299,8	21 550	4° West	grav.

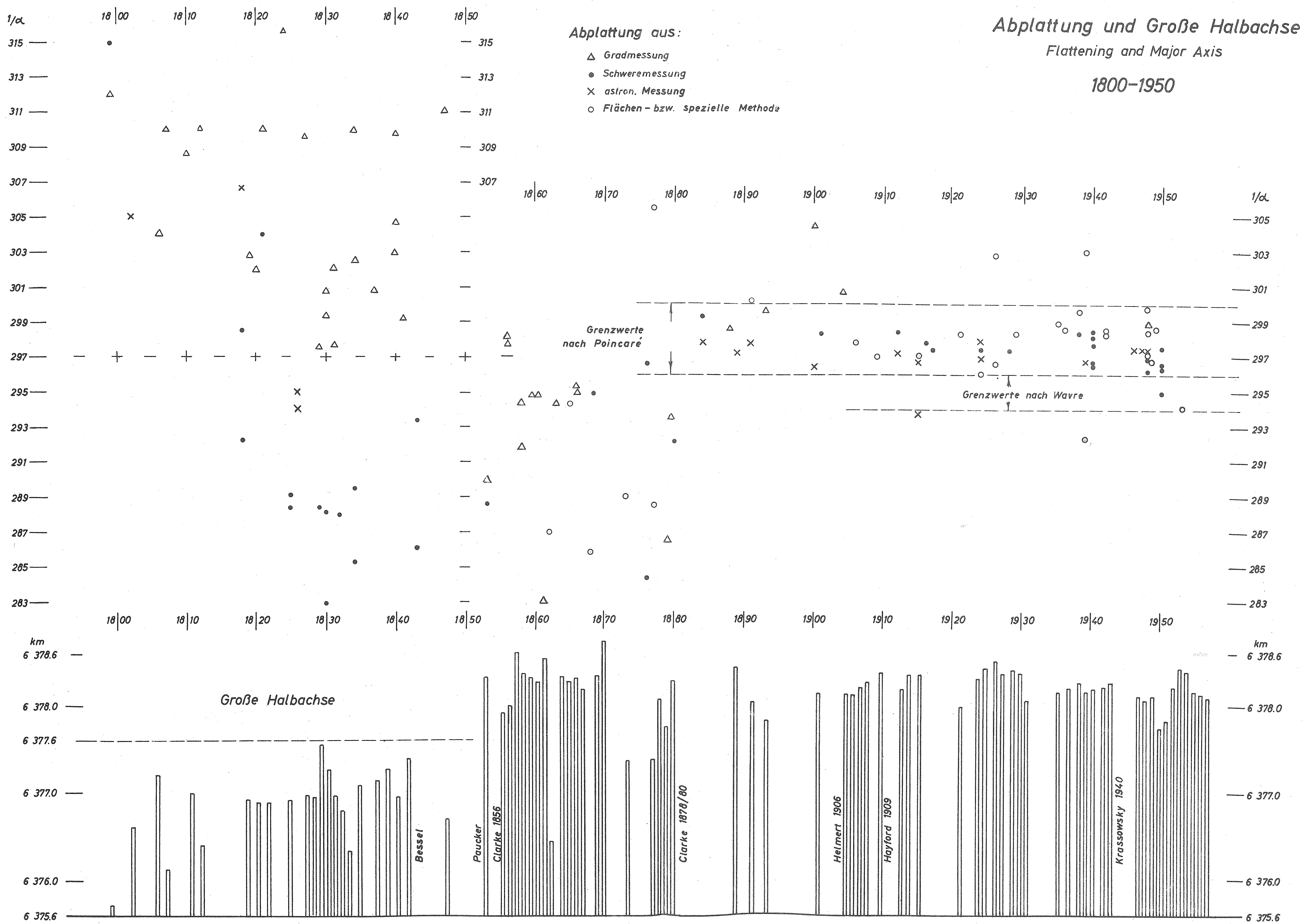
Die großen Halbachsen a

Lfd. Nr.	Jahr	Name	a	Methode
4.	1799	Commission	6 375 739 m	Gradm.
6.	1802	Laplace	6 614	Gradm.
7.	1806	Lindenau	7 208	Gradm.
8.	1807	Oriani	6 130	unbekannt
9.	1810	Delambre	6 985	Gradm.
10.	1812	Zach	6 376 385 m	Gradm.
13.	1819	Walbeck	6 896	Gradm.
14.	?	Hessen	6 890	unbekannt
16.	1821	Müffling	6 938	unbekannt

Lfd. Nr.	Jahr	Name	*a*	Methode
17.	1824	Müffling	6 931	Gradm.
20.	1827	Krayenhoff	6 376 950 m	Gradm.
21.	1829	Schmidt	6 959	Gradm.
22.	1830	Airy	7 563	Gradm.
23.		Everest	7 276	Gradm.
24.	1831	Schmidt	6 944	Gradm.
			6 376 804 m	Gradm.
27.	1834	Eckhardt	6 349	Gradm.
28.		Bessel	7 093	Gradm.
29.	1837	Bessel	7 157	Gradm.
30.	1840	Puissant	6 950	Gradm.
			6 377 284 m	Gradm.
31.	1841	Bessel	7 397	Gradm.
34.	1847	Everest	6 701	Gradm.
35.	1853	Paucker	8 325	Gradm.
36.	1856	Clarke	7 929	Gradm.
			6 378 003 m	Gradm.
37.	1858	Clarke	8 619	Gradm.
			8 361	Gradm.
39.	1860	Clarke	8 321	Gradm.
40.		Struve	8 297	Gradm.
41.	1861	Schubert	6 378 547 m	Gradm.
42.		Pratt	6 422	Gradm.
43.	1863	Clarke	8 355	Gradm.
45.	1866	Clarke	8 274	Gradm.
46.		Pratt	8 311	Gradm.
47.		Villarceau	6 378 204 m	Flächenmeth.
48.	1868	Fischer, Ph.	8 338	Gradm.
49.	1869	Klein	8 740	Gradm.
50.	1873	Listing	7 365	spez.
53.	1877	Listing	7 377	spez.
54.		Schott	6 378 054 m	Flächenmeth.
55.	1878	Jordan?	7 757	unbekannt
56.		Clarke	8 316	Gradm.
59.	1888	Bonsdorff, A.	8 444	Gradm.
61.	1891	Harkness	8 039	spez.
62.	1893	Shdanov	6 377 817 m	Gradm.
66.	1900	Schott	8 157	Gradm.
69.	1906	Helmert	8 150	spez.
			8 140	spez.
			8 200	spez.

Lfd. Nr.	Jahr	Name	*a*	Methode
70.	1906	Hayford	6 378 283 m	mittl. Fig.
			7945	Flächenmeth.
71.	1909	Hayford	6 378 388	mittl. Fig.
			8 062	Flächenmeth.
74.	1913	Helmert	8 192	spez.
			6 378 350 m	spez.
76.	1915	Wellisch	8 372	spez.
80.	1921	See	6 378 000 m	spez.
83.	1924	McCaw	8 300	spez.
85.	1926	Heiskanen	8 444	mittl. Fig.
			8 518	mittl. Fig.
			8 397	mittl. Fig.
87.	1929	Heiskanen	6 378 410 m	mittl. Fig.
			8 391	mittl. Fig.
88.	1930	Krassowsky	8 081	Flächenmeth.
90.	1935	Krassowsky	8 180	Flächenmeth.
91.	1936	Krassowsky	8 210	unbekannt
93.	1938	Isotov	6 378 279 m	unbekannt
94.	1939	Dubovsky	8 179	geoid.
			8 194	geoid.
97.	1940	Krassowsky	8 245	mittl. Fig.
			8 295	mittl. Fig.
101.	1948	Jeffreys	6 378 099 m	spez.
			8 097	spez.
			8 118	spez.
102.		Ledersteger	7 788	Flächenmeth.
103.	1949	Ledersteger	7 879	Flächenmeth.
105.	1951	Ledersteger	6 378 284 m	mittl. Fig.
106.	1952	O'Keefe-Anderson	8 448	astron.
			8 428	astron.
107.	1953	Lieberman	8 181	geoid.
			8 171	geoid.
			6 378 160 m	geoid.

NB. Graphische Darstellung der Halbachsen siehe Diagramm, S. 95.



Straßer 10/8/56

Klassische Toisennormale

Name	von	Jahr	geeicht	PL	Standort	Niehus 1831 PL	Bessel 1835 PL		Baeyer-Sadebeck 1872 PL	Schreiber 1877/78 PL	Foerster 1878 PL	BIPM Breteuil Bez. Int. Meter m
						Bez. (B) = 863.999 2			Bez. (B) = 863.999 2			
Peru (P)	Langlois	1735	Godin	864.000 0	Obs. Paris							1.949 090 (e)
Nord	,,	1735	,,	864.000 0								1.949 001 (p)
Marain	,,	1735		863.965 87								
Österreich	Canivet	1760			Obs. Wien							
Bayern	,,	1762			Deutsch. Museum							
Hessen	Lenoir		Bouvard	864.000 0	1944 zerstört							
Benzenberger	,,	1804	,,	864.001 1	verloren							
Bessel (B)	Fortin	1823	Arago-Zartmann	863.999 2	Obs. Königsberg							1. 949 060 9
Dänisch (DF)	,,	1821	Arago	864.000 0	Gradmäling	864.001 51	864.002 53					
,, (DG)	Gambey	1831	Arago-Mathieu-Nyegaard	864.000 2	København	863.993 49	863.995 30					
,, (DL)	Lenoir	1819	Mathieu	864.000 0	verloren?	864.059 70	864.060 13					
Struve (F)	Fortin	1821	Arago	864.000 0	Obs. Pulkovo							
USA	Lenoir	1813	Arago-Bouvard	864.000 0	USC & GS							
Deutsche Normale und Kopien				Bez. (B) 863.999 2			Struve 1852/53 Bez. (F) = 864.000 0	Clarke 1863/73 Bez. Stand. Yard 1855				
B 9	Baumann	1852	Baeyer	864.002 51 1) .002 644	RfL Berlin		PL	Y	864.001 05	864.002 50	864.002 60	1.949 067 4
B 10	,,	1852	,,	863.999 01 1) .999 011	,, ,,		863.999 14	2.131 510 06	863.997 92	863.999 90	863.999 00	
B 11	,,	1852	,,		Brüssel			2.131 508 25	863.992 59	863.995 50	863.995 30	
Berlin L	Lenoir				PTR Berlin							
				1) eingrav. Länge								
				Bez. B 10 863.999 011								
B 12	Baumann	1867	Baeyer-Sadebeck	864.000 349	Brasilien							
B 13	,,	1867	,, ,,	864.001 213	,,							
B 18	,,	1866	,, ,,	863.997 938	USA							
				Bez. Metre des Arch.		Brix 1863 Bez. Metre des Arch.						
Humboldts Platinmeter	Lenoir	1817	Arago-Humboldt	1.000 000 m	PTR Berlin	1.000 003 01						
Messing M I	,,				,, ,,	0.999 942 1						
,, M II	Fortin				,, ,,	0.999 954 m						
Verschiedene nationale Normale und Kopien									Sadebeck 1865 Bez. B 10 863.999 011			
Italien Sp.	Spano	~ 1858		E—0.022 396 PL	IGM Firenze				863.961 885			
,, E	Ertel		Schiavoni 1866	E	,, ,,							
				Bez. (DF) u. (DL)								
Schumacher Nr. 4		1821	Schumacher	1727.795 1	Dänemark		1727.806 94					
				Bez. (P)								
Module I	Lenoir	~ 1792	Borda-Lavoisier	1728.000 0	Frankreich							(1894) 3.898 068
				Bez. Span. Mod.		Ibañez 1874						(1885)
Span. 4-m-Apparat	Ibañez	1866	Ibañez 0° 16.°25	3.999 705 2 m 4.000 407 0	Spanien	3.999 706 8 m 4.000 408 6		4.374 168 03 4.374 935 62				3.999 690 16 4.000 432 79
US Meter Nr. 6								1.093 596 07				
Russische Normale und Kopien				Bez. (F) 864.000 0 PL								
Dorpat Kopie		1828	W. Struve	863.991 84	Obs. Pulkovo							(1893) 3.898 162
N		1828	,,	1728.012 49	,, ,,							

Fortsetzung der Tabelle siehe nächste Seite

noch: Russische Normale und Kopien							Struve 1852/53 PL	PL	Clarke 1863/73 Y			BIPM Breteuil Bez. Int. Meter
P = N^I		1850	W. Struve				1727.994 40	1727.987 56²)	4.263 005 26			
Q = N^II		1850	,,				1727.974 05	1727.973 86²)	4.262 696 16			
R = N^III		1847	,,	1728.019 91			1727.993 55	²) neue Pulkovowerte mitgeteilt durch Clarke Phil. Trans. 163, 1873, S. 468				
Tenners Sashen Nr. 10		1829	,,	945.766 611			945.757 79					
Doppelsashen	Dollond	1832	Kater				1891.605 94					
Österreichische Normale und Kopien				W. Kl.								
Pulkovo Klafter	Stampfer	1849	Stampfer	0.999 999 66			840.703 42		2.074 036 58			
Pulk. Kl. Toise	,,	1849	,,	1.027 609 43			836.917 26		2.131 301 85			
Mailand. Kl. 1—3	,,	1856	,,	0.999 993 29					2.074 014 62			
,, ,, I—II	,,	1856	,,	1.000 000 00					2.074 029 90			(1893/94)
Basisapp. I—IV	,, 1810	1850	,,	8.230 244 825						Bez. Int. Meter		15. 608 758 03
Britische Normale und Kopien						Sheepshanks-Baily 1840/55 inch.				Sears-Johnson-Jolly 1922		(1895)
Imp. Stand. Y_1		1855	Sheepshanks		Board of Trade	36.000 000 00			1.000 000 00	0.914 398 41	Bez. Int. Meter	0.914 399 19
Yard 55	Troughton & Simms	1855	,,		Ord. Survey	36.000 015 47			0.999 999 60		Thompson 1952	
O_1		1826			,, ,,				3.333 337 17	Johnston 1906	3.048 007 56	
OI_1		1856			,, ,,				3.333 354 32	3.048 025 54		
OI_4					Sydney				3.333 304 27			
OI_6					,,				3.333 337 47			
I_S					Indien				3.333 401 38			
I_A					,,					3.333 318 86³)		3.047 998 8 (1908)
I_B					,,				3.333 532 84	³) nach Walker 1895		
I_b					,,		1351.143 98		3.333 314 57			
Cape Bar					Südafrika				3.333 286 05			
Ord. Toise T_0					Ord. Survey				2.131 664 58			
Ord. Meter M_0			Kater 1818/21 inch	Kater 1830/31 inch.	Baily 1834 inch.				1.093 748 00			
RS Meter Nr. 45	Eichg.v.Arago	0.999 982 41 m			39.368 985				1.093 604 78			
,, ,, Nr. 44					39.369 375							
		Shuckburgh 1798 inch.										
RS Scale Nr. 41	E. Exch.	36.001 30	36.001 400		36.001 473							
,, ,, ,, ,,		35.993 30			35.993 684	35.994 735 63						
Aubert's scale	0″—36″		35.999 393	35.999 805	35.998 447							
Shuckburgh's scale	0″—36″	36.000 00	36.000 000	36.000 090	36.000 185	36.000 598 22						(1888) 0.304 800 58 (mittlerer Fuß)
,,	10″—46″			36.000 058	35.999 921	36.000 264						
Bird's scale 1758		36.000 23	36.000 160									
,, ,, 1760			36.000 055	36.000 000	35.999 624							
Roy's scale	0″—36″	35.999 90	36.000 930									
RS Kater 1831				35.999 380		35.999 518						
Henry VII		35.967 00	35.962 262			35.962 943						
Elisabeth I.		35.993 00	35.989 348			35.990 040						
Aberdeen's scale					35.998 615							
Th. Jone's scale					35.999 802							
Franz. Meter?		39.370 79										
Ramsden's scale	Mittelwert		36.002 540									
RAS tubular scale	Mittelyard				36.000 000	36.000 419 68						
RAS D tubular scale	,,				35.999 758	36.000 433 44						
RAS R ,, ,,	,,				36.000 050		405.358 59					
Simm's ,, ,,	,,				35.999 903	36.000 498 80						
Baily's ,, ,,	,,				35.999 949	36.000 698 32						

Statistische Angaben über die Gradmessungen bis 1900

Statistische Angaben über die Gradmessungen bis 1900 einschließlich der Literatur

Gradmessung	Jahr	Beobachter bzw. Organisator	Δ	Stat.
Peru	1735–1744	Bouguer–La Condamine	3° 07′	2
Lappland	1736–1737	Maupertuis–Clairaut	0° 58′	2
Schweden	1801–1803	Svanberg–Oferbom	1° 37′	2
Frankreich	1669–1670	Picard	1° 23′	2
Frankreich	1680–1718	Cassini I–Cassini II–Lahire père et fils	8° 31′	3
Frankreich „Méridienne Verifiée“	1739–1740	C. F. Cassini III de Thury–Lacaille	8° 20′	5
Frankreich—Spanien	1792–1798	Delambre–Méchain	9° 40′	6
Frankreich—Spanien	1803–1804 1806–1808	Méchain Biot–Arago	12° 22′	7
Frankreich „Méridienne Nouvelle“	1870–1896	Bassot-Defforges–Perrier	9° 23′	11
England	1800–1802	Mudge–Dalby	2° 50′	5
England			3° 57′	5
England	1803–1854	Kater–Colby–James	10° 13′	9
Westeuropa	1792–1861		22° 10′	15
Westeuropa—Afrika	1803–1904		27° 02′	38

Endpunkte	Mittlere Breite	Mittlere Länge	Veröffentlicht in
Tarqui–Cotchesqui	1° 31′ S	281° 16′	1) Bouguer, P.: „La figure de la Terre déterminée par les observations environs de l'équateur", Paris 1749. 2) La Condamine, C. M. de: „Mesure de trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral", Paris 1751.
Tornea–Kittis	66° 20′ N	24° 53′	Maupertuis, P. L. M.: „La figure de la Terre déterminée par les observations au cercle polaire", Amsterdam 1738.
Malörn–Pahtawara	66° 20′ N	24° 53′	Svanberg, J.: „Expositions des opérations en Lapponie", Stockholm 1805; u. Zachs Monatl. Corresp. Bd. XII u. XIV, Gotha, 1805/06.
Malvoisine–Amiens	48° 13′ N	2° 20′	Picard, J.: „Traité de la mesure de la Terre", Paris 1671; Neuaufl. Mém. Acad. Paris pour 1718, Paris 1720.
Collioure–Dünkirchen	46° 46′ N	2° 20′	Cassini, J.: „De la grandeur et la figure de la Terre", Mém. Acad. Paris pour 1718, Paris 1720 und Amsterdam 1723.
Perpignan–Dünkirchen	46° 44′ N	2° 20′	Cassini de Thury, C. F.: „La méridienne vérifiée...", Paris 1744.
Montjouy–Dünkirchen	46° 12′ N	2° 20′	Delambre, J. P. J. – Méchain, P. F. A.: „Base du système métrique décimal..", 3 Bde., Paris 1806, 1807, 1810.
Formentera–Dünkirchen	44° 51′ N	2° 20′	Biot–Arago: „Recceuil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques", Paris 1821.
Rivesaltes–Rosendael	46° 56′ N	2° 39′	Bassot–Perrier: „Nouvelle méridienne de France", Mém. Dépôt Gén. de la Guerre, Bd. XII, 3. fasc., Paris 1904.
Dunnose–Clifton	52° 02′ N	358° 50′	Mudge, W.: „An Account of the measurement of an arc of the meridian extending from Dunnose to Clifton", Phil. Trans., London 1803, S. 383—508.
Dunnose–Burleigh Moore	52° 36′ N	0°	
Dunnose–Saxavord	55° 22′ N	0°	Clarke, A. R.: „Account of the observations and calculations of the Principal Triangulation", London 1858.
Formentera–Saxavord	49° 45′ N	0° 30′	1) James, H.: „Extension of the triangulation of the Ordnance Survey into France and Belgium", London 1862. 2) Levret, H.: „La jonction des réseaux géodésiques de France et d'Angleterre", Mém. Dépôt Gén. de la Guerre, Bd. IX, Suppl., Paris 1865.
Laghouat–Saxavord	47° 19′ N	0° 40′	1) für den spanischen Teil: „Mém. Inst. Geogr., 7 Bde., Madrid 1875–1888. 2) Ibañez–Perrier: „Jonction géod. et astron. de l'Algérie avec l'Espagne, exec. en 1879", Paris 1886.

Gradmessung	Jahr	Beobachter bzw. Organisator	Δ	Stat.
Kap der Guten Hoffnung	1750	Lacaille	1° 13′	2
revidierter Kapbogen	1842–1851	Maclear	4° 37′	5
Südafrika	1883–1904	Gill–Morris–Simms	24° 24′	57
Südafrika	1883–1924		31° 36′	
Kirchenstaat	1751–1753	Boscovich–Lemaire	2° 10′	2
Piemont	1762–1764	Beccaria–Canonica	1° 08′	
Österreich	1762–1767	Liesganig	2° 53′	4
Ungarn	1768	Liesganig	1° 13′	
Pennsylvanien	1764–1768	Mason–Dixon	1° 29′	2
1. indische	1802	Lambton	1° 35′	2
2. indische	1805–1811	Lambton	6° 56′	4
2. indische	1805–1818	Lambton	9° 54′	6
2. indische	1805–1830	Lambton–Everest	15° 58′	7
2. indische („Great Arc“)	1805–1842	Lambton–Everest	21° 21′	8

Endpunkte	Mittlere Breite	Mittlere Länge	Veröffentlicht in
Klyp Fontain–Cape Town	33° 18′ S	18° 28′	Lacaille, N. L. de: „Journal historique de voyage au Cap de Bonne Esperance“, Paris 1763 und Mém. Acad. Paris 1755, S. 425–438.
Cape Point–North End	32° 03′ S	18° 28′	Maclear, Sir Th.: „Verification and extension of Lacaille's arc of Meridian at Cape of Good Hope“, London 1866.
Cape St.Francis–Berlin (Ostafrika)	21° 59′ S	30°	Gill, Sir S.: „Geodetic Survey of South Africa“, Vol. I, Cape Town 1896, Vol. III, Cape Town 1905, Vol. V, London 1908.
Umtata–Lake Albert	13° 48′ S	30°	
Roma–Rimini	43° 01′ N	12° 30′	Boscovich, R. G.: „De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem ad dimentiendos duos meridiani gradus“, Roma 1775.
Mondovi–Andrate	44° 44′ N	7° 30′	Beccaria, G. B.: „Gradus Taurinensis“, Turin 1774.
Brünn–Varasdin	47° 46′ N	16° 20′	1) Liesganig, J.: „Dimensio graduum meridiani Vienniensis et Hungarici“, Wien 1770.
Peterwardein–Kistelek	45° 52′ N	20° 00′	2) Embacher, P.: „Die Liesganigsche Gradmessung“, Österr. ZfV, Wien 1951, S. 17–22, S. 51–55.
	39° 12′ N	282° 30′	1) Dixon, J.–Mason, C.: „Observations for determining the length of a degree of latitude in the provinces of Maryland and Pennsylvania“, Phil. Trans. Vol. 58, London 1769. Seite 270–328. 2) Gore, J. H.: „Die Pennsylvanische Gradmessung von Mason und Dixon (1764–1768)“, ZfV, Stuttgart 1888, S. 33–39.
Tiruvendipuram–Paudree	12° 32′ N	79° 47′	Asiatic Researches, Vol. 8, London, S. 137.
Punnae–Namthabad	11° 38′ N	77° 40′	Asiatic Researches, Vol. 12, London 1816, S. 294.
Punnae–Damargida	13° 06′ N	77° 40′	Lambton, W.: „An abstract of the results deduced from measurement of an arc on the meridian, extending from latitude 8° 09′ 38,4″ to 18° 03′ 23,6″,“ Phil. Trans. for 1818, London 1818, S. 486–517.
Punnae–Kalianpur	16° 08′ N	77° 40′	Everest, G.: „An account of the measurement of an arc of the meridian between the parallels of 18° 03′ and 24° 07′,“ London 1830.
Punnae–Kaliana	18° 50′ N	77° 40′	Everest, G.: „An account of the measurement of two sections of the meridional arc of India“, London 1847.

Gradmessung	Jahr	Beobachter bzw. Organisator	Δ	Stat.
revidierte 1. indische	1843–1873	Waugh-Walker	16° 15′	30
revidierte 2. indische („Great Arc")	1843–1873	Waugh-Walker	21° 21′	54
3. indische	1843–1873	Waugh-Walker	19° 09′	31
1. indischer Parallel	1875	Walker	10° 29′	3
2. indischer Parallel	1875	Walker	5° 24′	3
3. indischer Parallel	1875–1892	Walker	24° 29′	6
Livland	1821–1827	F. G. W. Struve	3° 35′	3
Baltikum	1816–1831	W. Struve–Tenner	8° 02′	6
Russisch-skandinavische	1816–1855	W. Struve–Tenner–Seelander–Hansteen	25° 20′	13
Dänemark	1817–1821	Schumacher	1° 32′	2
Hannover	1821–1824	C. F. Gauß	2° 01′	2
Ostpreußen	1831–1836	Bessel–Baeyer	1° 30′	3
Russischer Parallel in 52° Breite	1827–1872	Forsch–Oberg–Zylinski	39° 24′	10
Europäischer Parallel in 52° Breite			68° 55′	28
Russischer Parallel in 47,5° Breite	1848–1856	Wroschenko	19° 12′	6
Europäischer Parallel in 48° Breite	1848–1906		52° 45′	
Spitzbergen	1899–1902	Backlund–Jäderin	4° 10′	29
Peru-Ekuador	1899–1906	Maurain–Lacombe–Lallemand–Perrier	5° 54′	59

NB! Nicht aufgeführt sind die zahlreichen Gradmessungen des US C & GS (siehe Angaben bei Hayford 1906 und 1909, S. 58, 59).

Endpunkte	Mittlere Breite	Mittlere Länge	Veröffentlicht in
Tiruvendipuram–Jarura	19° 52′ N	80° 10′	1) „Accounts of the operations of the Great Trigonometrical Survey", 16 Bde., Dehra Dun. 2) Walker, J. T. „India's Contribution to Geodesy", Phil. Trans. for 1895, Vol. 186, Part II, London 1896, S. 745–816. 3) Yearly Reports of the Survey of India.
Punnae–Kaliana	18° 51′ N	77° 40′	
Mangalore–Shapur	22° 27′ N	75°	
Bombay–Vizagapatam	18° N	78° 06′	
Mangalore–Madras	12° 58′ N	77° 35′	
? –Chittagong	23° 36′ N	79° 28′	
Jacobstadt–Hochland	58° 18′ N	26° 40′	1) Struve, F. G. W.: „Beschreibung der unter allerhöchst. kaiserl. Schutze v. d. Universität Dorpat veranstalteten Breitengradmessung i. d. Ostseeprov. Rußlands", 2 Bde., Dorpat 1831. 2) Struve, W.: „Resultate der Gradmessung i. d. Ostseeprovinzen", Astr. Nachr., Bd. 7, Altona 1829, S. 385.
Belin–Hochland	56° 04′ N	26° 40′	Tenner: Sapiskis, Bd. 8 u. 9, Petersburg 1843/44.
Staro Nekrassowka–Fuglenes	58° 00′ N	26° 40′	Struve, F. G. W.: „Arc du Méridien de 25° 20′ entre le Danube et la Mer Glaciale mésuré 1816–1855", 2 Bde., Petersburg 1857/60.
Lauenberg–Lyssabel	54° 08′ N	10° 33′	v. Zach's Monatl. Corr., Gotha 1818, S. 266.
Göttingen–Altona	52° 32′ N	9° 56′	Gauß, C. F.: „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona", Göttingen 1828.
Trunz–Memel	54° 58′ N	20° 30′	Bessel, F. W. – Baeyer, J. J.: „Gradmessung in Ostpreußen...", Berlin 1838.
Czenstochau–Orsk	52° N	38° 52′	Stebnitzki, J.: „Geod. Arb. in Rußland zwischen Orsk u. Czenstochau" (russ.), Sapiskis, Bd. 47, T. II, Petersburg 1891.
Feaghmain–Orsk	52° N	24° 06′	f. westl. Teil, Helmert, F. R.: „Die europäische Längengradmessung in 52° Brt. von Greenwich bis Warschau", I. Heft, Berlin 1893, II. Heft, Berlin 1896.
Kiszeniew–Astrachan	47° 30′ N	38° 24′	„Messung des südrussischen Parallels in 47,5° Breite zwischen Kiszeniew und Astrachan" (russ.), 2. Bde., Petersburg 1893.
Brest–Astrachan	48° N	21° 38′	f. westl. Teil, Galle, A.: „Die Längengradmessung in 48° Breite zwischen Astrachan und Brest", N. F. Nr. 88, Berlin 1923.
	78° 43′ N		C. R. 15. Gen.Vers. IAG 1906, Berlin 1908, S. 328.
	2° 08′ S		C. R. 16. Gen.Vers. IAG 1909, Bd. I, Berlin 1910, S. 186–198.

Literatur zur Erdfigur (soweit nicht schon in der Arbeit selbst zitiert)

Berroth, A.: „Die gebräuchlichen Ellipsoide und die Lotabweichungen." Berlin 1922.

Berthaut: „La carte de France." Bd. I, Paris 1898.

Borras, E.: „Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten in der Zeit von 1808—1909." C. R. 16. Allg. Konf. IAG in London 1909, III. Teil, Berlin 1911.

Borras, E.: „Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten in der Zeit von 1909—1912." C. R. 17. Allg. Konf. IAG in Hamburg 1912, III. Teil, Berlin 1914.

De Graaf-Hunter, J.: „The Figure of the Earth from gravity observations and the precision obtainable." Phil. Trans. Series A, Vol. 234, London 1934/35.

Galle, A.: „Über die geodätischen Arbeiten von Gauß." C. F. Cauß' Werke, Bd. XI/2, Berlin 1924/29, S. 1—165.

Gehler, J. S. T.: „Physikalisches Wörterbuch." III. Bd., Leipzig 1827, S. 843—929 (bearbeitet von Muncke).

Gore, H.: „Geodesy." London 1891.

Heiskanen, W.: „Die Lotabweichung." B. Gutenbergs Handbuch der Geophysik, Bd. I, Berlin 1936, S. 844.

Helmert, F. R.: „Lotabweichungen." Heft 1, Berlin 1886.

Hinks, A. R.: „A graphical discussion of meridian arcs." Bull. géod., Paris 1925, S. 670—676 mit vier Diagrammen.

Hopfner, F.: „Figur der Erde, Dichte und Druck im Erdinneren." B. Gutenbergs Handbuch der Geophysik, Bd. I, Berlin 1936, S. 139—307.

Jeffreys, H.: „The determination of the Earth's gravitational field." Geophys. Suppl., M. N. RAS, Vol. 5, No. 1, London 1941, S. 1—22.

Jeffreys, H.: „The determination of the Earth's gravitational field (second paper)." Geophys. Suppl. M. N. RAS, Vol. 5, No. 3, London 1943, S. 55—66.

Jeffreys, H.: „On the figures of the Earth and Moon (second paper)." M. N. RAS, Vol. 101, London 1941, S. 34—36.

Jung, K.: „Betrachtungen zum dreiachsialen Erdellipsoid." Zeitschr. Geophys., Würzburg 1955, S. 201—207.

Jung, K.: „Figur der Erde", in Handbuch der Physik, Bd. XLVII, Berlin 1956, S. 534—639.

Ledersteger, K.: „Die geodätischen Bezugsflächen und ihre Ausmaße." ZfV, Stuttgart 1956, S. 95—107.

Luoma, N.: „Gravity formulas derived by the aid of the latitude and longitude zones." Ann. Acad. Scient. Fennicae, Series A, No. 1, Helsinki 1941.

Posch, L.: „Geschichte und System der Breitengradmessungen." Freising 1860.

Schumann, R.: „Der neue westeuropäische Meridianbogen." C. R. IAG in Budapest, Berlin 1908, S. 244—261.

Todhunter, I.: „A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the Earth, from the time of Newton to that of Laplace." 2 Bde., London 1873.

Walker, J. T.: „Details of the pendulum operations." Acc. The Great Trigonometrical Survey of India, Vol. V, Dehra Dun—Calcutta 1879.

Walker, J. T.: „India's contribution to geodesy." Phil. Trans. for 1895, Vol. 186/II, London 1896, S. 745—816.

Antworten zum Fragebogen der IAG, die Schaffung einer neuen Standardfigur betreffend, von Belgien, Ägypten, USA, Großbritannien, Frankreich, Italien, Norwegen, Schweiz und Tschechoslowakei. Bull. géod., Paris 1925, S. 605—698.

Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel. Leipzig 1880.

Literatur zur Beziehung zwischen den verschiedenen Maßsystemen

Airy, B. G.: „Account of the construction of the new national standards of length, and its principal copies." Phil. Trans. Vol. 147, London 1858, S. 621—702.

Astron.-Geod. Arbeiten d. K. u. K. Mil.Geogr. Inst. Wien, Bd. 23, Budapest 1915, S. 2.

Baeyer, J.: „Die in den Jahren 1866—1867 ausgeführten Vergleichungen mit der Kopie Nr. 10 der Besselschen Toise . . ." Maßvergleichungen, Heft I, Berlin 1872.

Baeyer, J. J.: „Die Verbindung der preußischen und russischen Dreiecksketten." Berlin 1857, S. 19—66.

Baily, F.: „Report on the new standard scale of this Society." Mem. RAS, Vol. 9, London 1836, S. 35—184.

Beigel, G. W. S.: „Bestimmung der bayerischen Maße und Gewichte." Zachs Monatl. Corr., Gotha 1800, S. 616.

Benoît, J. R.: „Études sur la Toise de Bessel, la Toise No. 9 du Bureau Topographique Royal Prussien et la Toise du Pérou." C. R. AGI, in Firenze 1891, Berlin 1892, S. 110—147.

Bessel, F. W.: „Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels." Abh. Kgl. Preuß. Akad. Wiss. Berlin 1826.

Bessel, F. W.: „Darstellung der Untersuchung und Maßregeln, welche in den Jahren 1835—1838 durch die Einheit des Preuß. Längenmaßes veranlaßt wurden." Berlin 1839.

Börsch, A.: „Verzeichnis von Toisenmaßstäben, welche als direkte oder indirekte Kopien der Toise von Peru von Wichtigkeit für die Vermessungen und die Feststellung der Maßeinheiten in den verschiedenen Ländern geworden sind, deren Vergleichung mit dem Mètre prototype in Breteuil wünschenswerth erscheint." C. R. AGI, 1887 in Nizza, Berlin 1888, S. 24—25.

Bomford, G.: „Geodesy." Oxford 1952, S. 43.

Borda: „Expériences sur les règles destinées à la mesure de bases . . .", in Delambres „Base du système métrique . . .", Bd. III, Paris 1810, S. 313—336, S. 402—414.

Bosscha: „Études relative à la comparaison de Mètre International avec le prototype des Archives." C. R. hebd. Acad. Sciences, Bd. 113/2, Paris 1891, S. 344—349.

Brix, A.: „Bericht über die im Jahre 1863 angestellte Vergleichung zweier, dem kgl. Handelsministerio angehörigen Metermaße mit dem Urmeter der Kaiserl. Archive zu Paris." Berlin 1864.

Clark, J. S.: „Re-measurement of the old 10 ft length standards O_1 and OI_2 of the Ordnance Survey, and some notes on the relative stability of certain standards of length." ESR No. 90, London 1953, S. 166—174.

Clarke, A. R.: „Abstracts of the results of the comparisons of the standards of length of England, France, Belgium, Russia, India, Australia made at the Ordnance Survey Office, Southampton." Phil. Trans. for 1867, Vol. 157, London 1868, S. 161—180.

Clarke, A. R.: „Results of the comparisons of the standards of length of England, Austria, Spain, United States, Cape of Good Hope and of a second Russian standard made at the Ordnance Survey Office, Southampton." Phil. Trans. for 1873, Vol. 163, London 1874, S.445—469.

Clarke, A. R.: „Geodesy." Oxford 1880, S. 156—157.

Delambre, J. P. J.: „Base du système métrique décimal ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelona, exécutée en 1792 et années suivantes." Bd. III, Paris 1810.

Fighiera, R.: „Le système métrique décimal." Paris 1930.

Guillaume, Ch. E.: „La création du Bureau des Poids et Mesures et son oeuvre." Paris 1927.

Helmert, F. R.: „Die Europäische Längengradmessung in 52° Breite von Greenwich bis Warschau." Bd. I, Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse, Berlin 1893, S. 225—231.

Hirsch, A. – Dumur, J.: „La mensuration des Bases", Das Schweizerische Dreiecksnetz, Bd. III, Zürich 1888, S. 87—90.

Krauland, R.: „Legales und internationales Meter in Österreich und deren Beziehung zu den älteren Maßeinheiten." Österr. ZfV, Wien 1949, S. 30—42.

Ledersteger, K.: „Das Internationale Meter und seine Festlegung." ZfV, Stuttgart 1956, S. 33—46.

Littrow, v. K.: „Nachtrag zu vorstehendem Aufsatz von W. Struve." Sitz.Ber. math. naturwiss. Kl. Akad. Wiss., Bd. 44/II, Wien 1862, S. 21.

McCaw, G. T.: „The two metres: The story of an African foot." ESR 1939, S. 96—105.

Pérard, A. – Volet, Ch.: „Les mètres prototypes du Bureau Internationale." Trav. et Mém. BIPM, Tome 21, Paris 1952, S. 1—156.

Peters, C. F. W.: „Zur Geschichte und Kritik der Toisen-Maßstäbe." Metron. Beitr. Nr. 5, Berlin 1885.

Puissant, L.: „Traité de Géodésie." Bd. I, Paris 1842, S. 494.

Ries, v. L.: „Gesetzliche Umrechnungszahlen höchster Genauigkeit zwischen dem russischen und dem metrischen Maß- und Gewichtsystem." Nachr. Reichsverm.Dienst, Berlin 1943, S. 114.

Sadebeck: „Beobachtungen auf dem Steinheilschen Fühlhebelkomparator." Maßvergl., Heft II, Berlin 1876.

Sears, J. E. – Johnson, W. H. – Jolly, H. L. P.: „A new determination of the ratio of the Imperial Standard Yard to the International Prototype Metre." Phil. Trans. Series A, Vol. 227, London 1928, Seite 281—315.

Stadthagen, H.: „Beziehungen der englischen und amerikanischen Längeneinheit, des englischen und amerikanischen Yards, zur metrischen Längeneinheit, dem Meter." Zeitschr. f. Instr.Kde., Berlin 1914, S. 323.

Struve, W.: „Vergleichungen der Wiener Maße mit mehreren auf der kaiserl.-russischen Hauptsternwarte zu Pulkovo befindlichen Maßeinheiten." Sitz.Ber. math. naturw. Kl. Akad. Wiss., Bd. 44/II, Wien 1862, S. 7—20.

Struve, F. G. W.: „Arc du Méridien de 25° 20′ entre le Danube et la Mer Glaciale mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855." Bd. I, St. Petersbourg 1860, S. LXXIII.

Thompson, E. H.: „The Ordnance Survey Foot/Metre conversion ratio", ESR 1952, No. 84, S. 280—281.

Vega, G.: „Beitrag zur französischen Maß- und Gewichtsvergleichung", Zach's Monatl. Corr., Gotha 1800, S. 460—477.

Walker, J. T.: „On the unit of length of a standard scale by Sir George Shuckburgh, appertaining to the Royal Society", Proc. R. S. London, Vol. 47, London 1890, S. 186—189.

Walker, J. T.: „The standards of measure and the baselines during the period 1800—1830", Acc. Great Trig. Survey of India, Vol. I, Dehra Dun 1870.

Walker, J. T.: „India's contribution to Geodesy", Phil. Trans. for 1895, Vol. 186, Part II, London 1896, S. 763.

Winterbotham, H. L.: „An old file and a new arc", ESR 1933, No. 7, S. 7.

Wolf, C.: „Recherches historiques sur les étalons de l'Observatoire", Ann. de Chimie et de Physique, Ser. 5, Tome 25, Paris 1882, S. 5—88.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Georg Straßer

Bad Godesberg

Friesdorferstr. 194

Namensregister