

Frank Neitzel

**Identifizierung konsistenter Datengruppen am Beispiel
der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze**

München 2004

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Identifizierung konsistenter Datengruppen am Beispiel
der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze

Von der Fakultät VI
Bauingenieurwesen und Angewandte Geowissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Frank Neitzel

aus Berlin

D 83

München 2004

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

Deutsche Geodätische Kommission

Marstallplatz 8 • D – 80 539 München

Telefon (089) 23 031 113 • Telefax (089) 23 031 – 283/– 100

E-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://www.dgfi.badw.de/dgfi/DGK/dgk.html>

Vorsitzender des Promotionsausschusses: Prof. Dr.-Ing. Lothar Gründig

Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. Dieter Lelgemann

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Niemeier

Priv.-Doz. Dr.techn. habil. Svetozar Petrovif

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 18.07.2003

© 2004 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Kurzfassung

Sind in den Eingangsdaten für eine Parameterschätzung derartige Werte enthalten, für die das angesetzte Modell nicht zutreffend ist (z.B. grobe Fehler), so besteht die grundsätzliche Aufgabe, die maximale Untergruppe konsistenter Daten aus den Eingangsdaten herauszufinden. In dieser Arbeit werden hierzu zwei neue Methoden vorgestellt. Zum einen wird die von PETROVIC (1991, 2002) entwickelte Ausgleichung nach maximaler Korrelation (MCA) erweitert, zum anderen wird eine neue Methode mit der Bezeichnung „MSS - Die Methode der maximalen Untergruppe“ entwickelt, bei der die maximale Untergruppe konsistenter Daten mit Hilfe einer kombinatorischen Suche gefunden werden kann.

Die Diskussion bestehender und die Entwicklung neuer Methoden erfolgt anhand der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze. Als Spezialfall der generellen Problematik besteht hierbei die Aufgabe, aus der Menge aller Netzpunkte (bzw. aller Stützpunkte) die maximale Untergruppe stabiler Punkte zu lokalisieren.

Im Hinblick auf diese Aufgabenstellung wird gezeigt, wie Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung mit ihren singulären Kofaktorenmatrizen in einer ebenen oder räumlichen Helmerttransformation verarbeitet werden können. Zudem wird gezeigt, daß die Koordinatentransformation ohne Näherungswerte für die Parameter Translation und Rotation erfolgen kann.

An einem Anwendungsbeispiel der Kongruenzuntersuchung wird gezeigt, daß die falsche Lokalisierung verschobener Punkte nicht in der Wahl der verwendeten Zielfunktion für die Ausgleichung begründet liegt, sondern Vielmehr in der Strategie der sukzessiven Analyse einzelner Punkte.

Nach der Entwicklung der generellen Methodik des „MSS - Verfahrens“ erfolgt die Anwendung in der Kongruenzuntersuchung, wobei die kongruente Punktgruppe in dem untersuchten numerischen Beispiel gefunden wird.

Da die kombinatorische Suche auch in den Fällen zu einer Lösung führen kann, in denen die bestehenden Verfahren (z.B. „data snooping, Einsatz resistenter und robuster Schätzverfahren) versagen, wird die Anwendung der „MSS - Methode“ auch bei anderen Aufgabenstellungen motiviert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Überblick	7
2 Koordinaten und Transformationen	9
2.1 Erzeugung von Koordinaten	9
2.1.1 Datumsfestlegung und freie Netzausgleichung.....	9
2.1.2 Eigenschaften der Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung.....	15
2.1.2.1 Innere Koordinaten als Sonderfall schätzbarer Funktionen?.....	15
2.1.2.2 Innere Koordinaten als bedingt schätzbare Größen?.....	18
2.1.2.3 Innere Koordinaten als schätzbare Größen aus der Lösung mit Pseudoinverse?.....	19
2.1.2.4 Das Äquivalenztheorem von schätzbaren und invarianten Größen	19
2.1.3 Klassifizierung der inneren Koordinaten in Bezug zur Aufgabenstellung.....	20
2.2 Ebene Koordinatentransformation	21
2.2.1 Helmert-Transformation (Traditionell)	21
2.2.2 Helmert-Transformation mit variablen Koordinaten in Start- und Zielsystem	22
2.2.3 Helmert-Transformation auf der Grundlage von Beobachtungen	24
2.2.4 Implizite Formulierung der Transformierbarkeit.....	26
2.2.5 Transformation von Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix	28
2.2.6 Numerische Beispiele.....	30
2.2.6.1 Helmert-Transformation auf der Grundlage von Beobachtungen	30
2.2.6.2 Implizite Formulierung der Transformierbarkeit.....	32
2.2.6.3 Transformation von Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix	34
2.2.7 Beurteilung der Transformationsansätze	37
2.3 Räumliche Koordinatentransformation	37
2.3.1 Helmert-Transformation (Traditionell)	38
2.3.2 Helmert-Transformation mit variablen Koordinaten in Start- und Zielsystem	39
2.3.3 Helmert-Transformation auf der Grundlage fiktiver Beobachtungen.....	39
2.3.4 Implizite Formulierung der Transformierbarkeit.....	42
2.3.5 Numerisches Beispiel.....	45
2.3.6 Beurteilung der Transformationsansätze	50
3 Methoden der Parameterschätzung	51
3.1 Parameterschätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate	51
3.2 Parameterschätzung mit alternativen Schätzverfahren	53
3.2.1 Allgemeines.....	53
3.2.2 Klassifizierung alternativer Schätzverfahren.....	53
3.2.3 Auswertestrategie bei der Anwendung alternativer Schätzverfahren	54
3.2.4 L_1 -Schätzer	56
3.2.5 LMS-Schätzer	56
3.2.6 Zur numerischen Lösung alternativer Parameterschätzungen am Beispiel der L_1 -Schätzung	57
3.2.7 Zuverlässigkeit alternativer Schätzverfahren.....	64
3.2.8 Weiterführende Schritte	65
3.3 Parameterschätzung nach der Methode der maximalen Korrelation	65
3.3.1 Einführung.....	65
3.3.2 Der Korrelationskoeffizient.....	66
3.3.3 Definition der Ausgleichung nach maximaler Korrelation.....	68
3.3.4 Einführung von Gewichten.....	68
3.3.5 Der Korrelationskoeffizient für gewichtete und korrelierte Beobachtungen	70
3.3.6 Eigenschaften der Lösung	72
3.3.7 Direkte Lösung des MCA-Problems	75
3.3.8 Lösung des MCA-Problems über eine erweiterte L_2 -Ausgleichung	76
3.3.9 MCA mit Bedingungen zwischen den Unbekannten	80
3.3.10 MCA bei singulären Ausgleichungsproblemen	82
3.3.11 Numerische Beispiele.....	83
3.3.11.1 MCA ohne Gewichte.....	83
3.3.11.2 MCA mit vollbesetzter Gewichtsmatrix	85
3.3.11.3 MCA mit Bedingung zwischen den Unbekannten.....	86
3.3.11.4 MCA bei singulärem Ausgleichungsproblem.....	89

4 Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze	91
4.1 Anmerkungen zu den statistischen Testverfahren	91
4.1.1 Allgemeine Strategie	91
4.1.2 Testgüte.....	92
4.1.3 Der umgekehrte statistische Test.....	93
4.2 Generelle Methodik der Kongruenzuntersuchung.....	94
4.2.1 Allgemeines Prinzip	94
4.2.2 Der Globaltest	95
4.2.3 Lokalisierung von Deformationen durch Einzelpunktanalyse	95
4.3 Das Verfahren der Kongruenzuntersuchung in der aktuellen Literatur.....	95
4.3.1 Das Basismodell.....	96
4.3.2 Getrennte Ausgleichung der Einzelepochen.....	96
4.3.3 Gemeinsamer Varianzfaktor der Vergleichsepochen	96
4.3.4 Der Globaltest	97
4.3.5 Lokalisierung der Deformationen durch Einzelpunktanalyse.....	99
4.3.6 Numerisches Beispiel.....	100
4.3.7 Weiterführende Schritte	102
4.4 Kongruenzuntersuchung durch Ausgleichung nach maximaler Korrelation	103
4.4.1 Allgemeines Prinzip	103
4.4.2 Numerisches Beispiel.....	104
4.5 Beurteilung der Verfahren und weiterführende Schritte	107
5 MSS - Die Methode der maximalen Untergruppe	109
5.1 Theorie und generelle Methodik	109
5.1.1 Allgemeines Prinzip	109
5.1.2 Direkte Lösung des MSS-Problems	110
5.1.3 Zufallsbasierte Auswahl von Kombinationen.....	110
5.1.4 Vorauswahl bei der Ausgleichung direkt beobachteter Größen	110
5.2 Anwendung der MSS-Methode bei der Kongruenzuntersuchung.....	112
5.2.1 Voruntersuchung mit Hilfe metrischer Kriterien.....	112
5.2.1.1 Beurteilung anhand von Erfahrungswerten	112
5.2.1.2 Beurteilung anhand des „Signal-Rausch-Verhältnisses“	113
5.2.1.3 Beurteilung anhand eines multiplen t-Tests.....	113
5.2.2 Topologiematrix kongruenter Punktgruppen.....	114
5.2.3 Voruntersuchung mit Hilfe nichtmetrischer Kriterien	117
5.2.4 Vergleich mehrerer Messepochen	120
5.2.4.1 Kumulativer Mehreperiodenvergleich	120
5.2.4.2 Mehrfacher Vergleich mit einer Referenzepoche.....	120
5.2.5 Numerisches Beispiel.....	122
5.3 Beurteilung des Verfahrens.....	126
6 Schlußbetrachtung	127
Literaturverzeichnis	129
Anhang	
A Transformationen	133
A.1 Ebene Helmert-Transformation auf der Grundlage von Beobachtungen	133
A.2 Räumliche Helmert-Transformation auf der Grundlage fiktiver Beobachtungen.....	138
B Gebrauchsformeln für die Ausgleichung nach maximaler Korrelation	145
B.1 Lineare Modellgleichungen	145
B.2 Nichtlineare Modellgleichungen	146

Der Wert einer Theorie läßt sich nicht absolut beurteilen, sondern nur in Bezug auf andere Theorien. Eine Theorie ist dann besser als eine andere, wenn sie eine größere Vorhersagegenauigkeit erlaubt und einen Untersuchungsgegenstand einfacher und eleganter zu erklären vermag.

Federico Di Trocchio

1 Einleitung und Überblick

Bei vielen Aufgabenstellungen der Parameterschätzung in der Geodäsie sind in den Eingangsdaten auch solche enthalten, die mit groben Fehlern behaftet sind oder für die das angesetzte funktionale Modell unzureichend ist. Die grundsätzliche Aufgabe, die es in diesem Fall zu lösen gilt, besteht darin, diese Daten zu identifizieren und aus der Parameterschätzung auszuschließen. Die verbleibenden Daten, die dann in einer abschließenden Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zu akzeptablen Residuen führen, werden in dieser Arbeit als „konsistente Untergruppe“ bezeichnet. Für die Suche nach dieser Gruppe ist in der bestehenden Literatur eine Vielzahl von Methoden zu finden, die sich in zwei Kategorien unterteilen lassen.

- a) Einsatz alternativer Schätzverfahren (z.B. L_1 -Norm-Schätzung), mit denen im Rahmen eines Preprocessings versucht wird, inkonsistente Daten zu identifizieren.
- b) Sukzessive Untersuchung der Verbesserungen einzelner Beobachtungen nach einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten (z.B. das sog. data snooping).

Die Einsatzmöglichkeiten und Grenzen dieser Methoden sind in der Literatur bereits eingehend diskutiert worden. Als Erweiterung zu den bestehenden Methoden, werden in dieser Arbeit zwei neue Ansätze entwickelt. Auf dem Gebiet der alternativen Parameterschätzung ist dies die Ausgleichung nach maximaler Korrelation. Basierend auf den Grundlagen in (PETROVIC 1991, 2002) wird diese auf die Berücksichtigung der stochastischen Eigenschaften der Eingangsgrößen erweitert. Das Einsatzgebiet dieser Ausgleichung liegt im Bereich der Untersuchung unvollständiger Modelle, zum anderen kann der maximale Korrelationskoeffizient als nichtmetrisches Kriterium für den Vergleich von Formen verwendet werden.

Die sehr begrenzten Möglichkeiten, die konsistente Datengruppe mit Hilfe einer *sukzessiven* Anwendung der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zu identifizieren, haben motiviert, zuerst zu untersuchen, ob diese Vorgehensweise unter Anwendung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation erfolgreicher sein kann. Danach soll das Prinzip der sukzessiven Untersuchung aufgegeben werden und eine neue Methode entwickelt werden, die auf Grundlage der Kombinatorik grundsätzlich in der Lage ist, die maximale Untergruppe konsistenter Daten aus den Eingangsdaten zu identifizieren.

Die Diskussion bestehender Verfahren und die Entwicklung neuer Methoden wird anhand der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze durchgeführt, bei der sich die Aufgabe stellt, aus der Menge aller Netzpunkte (bzw. aller Stützpunkte) die maximale Untergruppe stabiler Punkte zu identifizieren.

Im Hinblick auf diese Aufgabenstellung werden in **Kapitel 2** zunächst die theoretischen Grundlagen der Erzeugung von Koordinaten durch eine freie Netzausgleichung aufgezeigt. Danach werden die Eigenschaften dieser Koordinaten diskutiert und die Frage geklärt, ob sie zu den „schätzbaren Größen“ eines geodätischen Netzes gehören. Im Anschluß daran wird die Weiterverarbeitung von Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung samt ihrer singulären Kofaktorenmatrizen mit Hilfe einer ebenen oder räumlichen Helmerttransformation bearbeitet. Da die bestehenden Ansätze in der Literatur für diese Aufgabe nicht geeignet oder wenig anschaulich sind, werden folgende Fragen geklärt:

- Wie kann eine Verarbeitung der singulären Kofaktorenmatrizen auf unmittelbar einsichtige Weise erfolgen?
- Wie kann sowohl die ebene, als auch die räumliche Helmerttransformation ohne die Bereitstellung von Näherungswerten für Translation und Rotation erfolgen?

Die neuen Ansätze werden durch numerische Beispiele veranschaulicht. Nach diesen Untersuchungen zur Modellbildung werden in **Kapitel 3** die unterschiedlichen Methoden der Parameterschätzung dargestellt. Nach einer kurzen Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate wird darauf eingegangen, welche Strategien in der bestehenden Literatur zu finden sind, um inkonsistente Daten zu identifizieren (z.B. data snooping, Einsatz alternativer Schätzverfahren). Danach werden zwei Schätzverfahren mit hohem Bruchpunkt, nämlich die L_1 -Norm-Schätzung und die LMS-Schätzung näher vorgestellt. Die numerische Lösung alternativer Parameterschätzungen wird am Beispiel der L_1 -Norm-Schätzung untersucht. Das Ergebnis ist:

- Bei dem in der Literatur oftmals vorgeschlagenen Lösungsweg der „iterativen regewichteten L_2 -Schätzung“ läßt sich bereits an einfachen numerischen Beispielen zeigen, daß der Einsatz dieser Methode zu falschen Ergebnissen führen kann.
- Als Alternative wird der Einsatz heuristischer Optimierungsverfahren vorgeschlagen.

Nach einer kurzen Ausführung zur Zuverlässigkeit alternativer Schätzverfahren wird die Entwicklung neuer Methoden motiviert.

Eine Ausgleichungsmethode, deren Begründung rein geometrischer Natur ist, ist die Ausgleichung nach maximaler Korrelation (MCA), die für folgende Aufgabenstellungen angewendet werden kann:

- Identifizierung fehlender Modellanteile im Falle einer unvollständigen Modellbildung anhand der Interpretation von Residuenbildern.
- Verwendung des maximalen Korrelationskoeffizienten als nichtmetrisches Kriterium für den Vergleich geometrischer Formen.

Basierend auf den Arbeiten von PETROVIC (1991, 2002) werden die Grundlagen der Ausgleichung nach maximaler Korrelation aufgezeigt, danach erfolgt eine Erweiterung der theoretischen Grundlagen:

- Die Einführung von Gewichten wird detailliert ausgearbeitet.
- Ausarbeitung von Lösungsstrategien für Ausgleichungsprobleme mit Bedingungen zwischen den Unbekannten und für singuläre Ausgleichungsprobleme.

Zudem wird gezeigt, daß sich die Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation aus der Lösung eines leicht modifizierten Problems nach kleinsten Quadraten erzeugen läßt. Neben der Bereitstellung eines kompletten Formelapparates für diesen Lösungsweg wird die Anwendung an numerischen Beispielen demonstriert.

In **Kapitel 4** soll das Auffinden einer maximalen Untergruppe konsistenter Daten anhand der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze aufgezeigt werden. Zunächst folgen einige kurze Anmerkungen zur Anwendung statistischer Testverfahren, wobei insbesondere die Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit kritisch diskutiert wird. Danach erfolgt die Darstellung der generellen Methodik der Kongruenzuntersuchung und das Verfahren in der aktuellen Literatur. Unter Berücksichtigung des Netzaufbaus wird dabei mit Hilfe eines Globaltests untersucht, ob zwischen den Vergleichsepochen signifikante Punktverschiebungen nachweisbar sind. Ist dies der Fall, erfolgt die Lokalisierung verschobener Punkte mit Hilfe einer sukzessiven Einzelpunktanalyse. Anhand eines numerischen Beispiels wird gezeigt, daß die Anwendung der bestehenden Methodik zu einer falschen Identifizierung verschobener Punkte führen kann.

Daraufhin wird der Einsatz der Ausgleichung nach maximaler Korrelation in der Kongruenzuntersuchung untersucht. Als funktionales Modell wird ein Transformationsansatz verwendet, die Ausgleichung erfolgt unter Berücksichtigung der stochastischen Eigenschaften der Vergleichsepochen. An einem numerischen Beispiel, bei dem der Korrelationskoeffizient als nichtmetrisches Kriterium für die sukzessive Einzelpunktanalyse verwendet wird, zeigt sich, daß es auch hierbei zu einer falschen Identifizierung verschobener Punkte kommen kann.

Nachdem sowohl die Kongruenzuntersuchung unter Anwendung der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten als auch die Anwendung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation in einem numerischen Beispiel zu einem falschen Ergebnis geführt hat, erfolgt eine kritische Beurteilung der verwendeten Methodik mit den Schlußfolgerungen:

- Die Probleme liegen nicht in der Natur der verwendeten Methoden der Parameterschätzung.
- Das Problem liegt in dem Verfahren der sukzessiven Untersuchung einzelner Punkte begründet.
- Die Lokalisierung kongruenter Punktgruppen ist grundsätzlich eine Aufgabe der Kombinatorik.

Da das Auffinden der maximalen Untergruppe konsistenter Daten ein generelles und grundlegendes Problem bei allen geodätischen Aufgaben ist, wird dafür in **Kapitel 5** eine neue Methode entwickelt. Diese Methode, bei der die maximale Untergruppe konsistenter Daten mit Hilfe einer *kombinatorischen Suche* identifiziert wird, trägt den Namen „MSS - Die Methode der maximalen Untergruppe“. Da eine Untersuchung aller möglichen Kombinationen bei umfangreichen Ausgleichungsproblemen nicht durchführbar ist, werden generelle Strategien aufgezeigt, wie sich die Anzahl der zu untersuchenden Kombinationen einschränken läßt. Danach erfolgt die Anwendung der „MSS-Methode“ in der Kongruenzuntersuchung. Hierbei läßt sich die Anzahl der zu untersuchenden Kombinationen durch eine Voruntersuchung mit metrischen oder nichtmetrischen Kriterien erheblich einschränken. Als besonders hilfreich erweist sich die Verarbeitung der Ergebnisse der Voruntersuchung mit Hilfe von Topologiematrizen. Aus diesen läßt sich direkt erkennen, welche Punkte des Netzes überhaupt als Kandidaten für eine kongruente Punktgruppe in Frage kommen, so daß die Lösung auch in umfangreichen geodätischen Netzen schnell gefunden werden kann. Anhand des zuvor verwendeten numerischen Beispiels, bei dem die sukzessive Einzelpunktanalyse versagt hat, wird gezeigt, daß die kongruente Punktgruppe mit der kombinatorischen Suche gefunden wird. Daraufhin wird die Anwendung der „MSS-Methode“ auch bei anderen geodätischen Fragestellungen angeregt.

2 Koordinaten und Transformationen

Die Speicherung und Weiterverarbeitung geometrischer Informationen bei nahezu allen geodätischen Fragestellungen erfolgt i.d.R. in der Form von Koordinaten, zudem gewinnen sie zunehmend als Schnittstelle für die interdisziplinäre Zusammenarbeit an Bedeutung. Da aber durch geodätische Messungen lediglich die gegenseitige Lage von Punkten zueinander bestimmt werden kann, bedarf es zusätzlicher Informationen, um auf Grundlage dieser relativen Größen Koordinaten zu erzeugen. Wie diese zusätzlichen Informationen in Form einer freien Netzausgleichung verwendet werden, um Koordinaten zu erzeugen, wird kurz aufgezeigt. Da über das Ergebnis einer freien Netzausgleichungen („innere Koordinaten“) in der Literatur zum Teil unterschiedliche Ansichten bestehen, soll die Frage geklärt werden, ob es sich bei diesen Koordinaten um schätzbare Größen handelt.

Sollen die Koordinaten aus freien Netzausgleichungen einer ebenen oder räumlichen Ähnlichkeitstransformation unterzogen werden, so ist dies, aufgrund der Singularität der Kofaktorenmatrizen, nicht ohne weiteres möglich. Um dieses Problem zu lösen, wird zunächst ein neuer Transformationsansatz auf der Grundlage von Beobachtungen entwickelt. Danach wird gezeigt, wie mit diesem Konzept die Weiterverarbeitung von Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix erfolgen kann. Zudem wird ein Konzept entwickelt, mit dem sowohl die ebene als auch die räumliche Koordinatentransformation ohne die Bereitstellung von Näherungswerten für Translation und Rotation möglich ist.

2.1 Erzeugung von Koordinaten

Nach einer zweckmäßigen Auswahl von Punkten, die ein Meßobjekt diskretisieren, kann durch Messung von Horizontal- und Vertikalwinkeln, Strecken, Basislinien mit Hilfe von GPS und Höhenunterschieden die relative Lage dieser Punkte zueinander (innere Netzgeometrie) bestimmt werden. Mit der Problemstellung, aus diesen relativen Informationen Koordinaten für die Netzpunkte zu erzeugen, beschäftigt sich eine Vielzahl von Publikationen, zumeist basierend auf (MEISSL 1962, 1969). Einen aktuellen Überblick zu dieser Thematik bieten z.B. (WELSCH et al. 2000) und (NIEMEIER 2002).

Im folgenden werden das Konzept und die Methoden der Ermittlung von Koordinaten durch eine sog. freie Netzausgleichung dargestellt und um geometrische Interpretationen angereichert. Zudem erfolgt eine Einordnung der Ergebnisse einer freien Netzausgleichung bezüglich der Eigenschaften der geschätzten Parameter.

2.1.1 Datumsfestlegung und freie Netzausgleichung

Um auf Grundlage relativer Messungen Koordinaten bestimmen zu können, sind grundsätzlich zwei Schritte erforderlich:

1. Festlegung eines Referenzrahmens (Koordinatensystem). Dies kann z.B. durch die Zuweisung von Näherungskoodnaten für alle Netzpunkte erfolgen.
2. Anbindung des geodätischen Netzes an den Referenzrahmen. Dies erfolgt dadurch, daß einer ausreichenden Anzahl von Netzpunkten Werte für deren Koordinaten zugewiesen werden, was als Datumsfestlegung oder Datumsverfügung bezeichnet wird.

In einem ebenen maßstabsbestimmten Lagenetz kann diese Datumsfestlegung z.B. durch Zuweisung von Koordinaten für einen Netzpunkt und die Festlegung des Rechts- oder Hochwertes eines weiteren Punktes erfolgen. Die ausgleichungstechnische Realisierung erfolgt dann derart, daß diese Koordinaten nicht als Unbekannte eingeführt werden, oder daß über ihren Wert mit Hilfe von Bedingungsgleichungen verfügt wird. Da durch diese Festlegung kein Zwang auf die innere Geometrie der Punktgruppe ausgeübt wird, bezeichnet man diese Vorgehensweise als freie Netzausgleichung.

Da aber die Auswahl der datumsdefinierenden Punkte willkürlich erfolgen kann, stellen die daraus abgeleiteten Größen

- Lösungsvektor \mathbf{x} ,
- Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{xx} der Unbekannten und somit die empirischen Standardabweichungen der Koordinaten s_x, s_y und die mittleren Fehlerellipsen

kein objektives Maß für die Beurteilung eines Netzes dar. Um diesem Umstand entgegenzuwirken, hat MEISSL (1962) die Forderung aufgestellt, die Lösung derart zu bestimmen, daß die Spur der Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{xx} mit

$$\text{Spur } \{\mathbf{Q}_{xx}\} = \min \quad (2.1)$$

zum Minimum wird und somit alle Punkte gleichartig behandelt werden. Der Formelapparat für eine Netzausgleichung mit dieser Forderung wurde dann von MITTERMAYER (1972) ausgearbeitet und in den darauffolgenden Jahren durch eine Vielzahl von Publikationen für verschiedene Aufgabenstellungen erweitert (siehe z.B. ILLNER 1985). Im Gegensatz zu einer Ausgleichung mit festgehaltenen Punkten (diese gelten als „fehlerfrei“), sind die Annahmen über das Verhalten bestimmter Punkte bei der Ausgleichung mit der Forderung nach minimaler Spur nicht unmittelbar ersichtlich. Um diese zu veranschaulichen dienen die folgenden Beispiele.

In dem in Abbildung 2.1 dargestellten Nivellementnetz wurden die Höhenunterschiede Δh_1 , Δh_2 und Δh_3 unabhängig voneinander bestimmt. Ferner sind die empirischen Standardabweichungen der Höhenunterschiede s_{h_1} , s_{h_2} und s_{h_3} bekannt, aus denen sich die Gewichte p_1 , p_2 und p_3 bestimmen lassen.

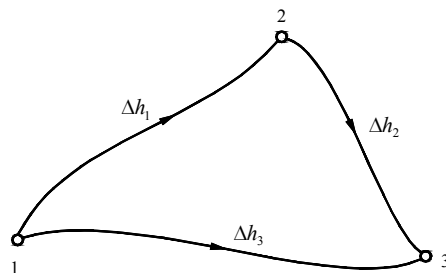


Abbildung 2.1: Nivellementnetz mit drei Punkten

Anstelle einer Ausgleichung mit einer Auswahl tatsächlich gemessener Werte oder daraus bestimmbarer Größen als Unbekannte, werden die Höhen(koordinaten) H_1 , H_2 und H_3 eingeführt und eine freie Netzausgleichung durchgeführt. Da diese Höhen aber im Informationsgehalt der Meßwerte nicht enthalten sind und somit ein Rangdefekt von $d = 1$ der Normalgleichungsmatrix entsteht, ist eine Datumsdefinition (Verbindung der inneren Netzgeometrie mit den eingeführten Höhen) erforderlich. Diese kann z.B. derart erfolgen, daß man eine willkürlich ausgewählte Höhe (z.B. Zuweisung eines Wertes für die Höhe H_1) oder eine beliebige Kombination aus allen festhält. Im folgenden soll die Datumsfestlegung mit Hilfe der Bedingungsgleichung

$$\sum_{i=1}^p \hat{H}_i = c \quad \text{mit } p = 3 \text{ (Anzahl der Punkte)} \quad (2.2)$$

durchgeführt werden. Wählt man $c = 0$, so ist damit verfügt, daß der Schwerpunkt der ausgeglichenen Höhen den Wert null annehmen soll. Zudem führt diese Datumsdefinition zu einer Lösung mit der Eigenschaft $\text{Spur} \{ \mathbf{Q}_{xx} \} = \min$ und kürzestem Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}} = \min$. In Matrixschreibweise lautet die Bedingungsgleichung

$$\mathbf{G}^T \hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.3)$$

mit

$$\mathbf{G}^T = [1 \quad 1 \quad 1] \quad (2.4)$$

und

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{H}_1 \quad \hat{H}_2 \quad \hat{H}_3]^T \quad (2.5)$$

Mit der Funktionalmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

und der Gewichtsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

erhält man die Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 + p_3 & -p_1 & -p_3 \\ -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 \\ -p_3 & -p_2 & p_2 + p_3 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

die einen Rangdefekt von $d = 1$ aufweist. Um die Singularität zu beheben, wird das Modell durch Einführung der Bedingung (2.4) um die Datumsfestlegung erweitert und so ergibt sich die erweiterte Normalgleichungsmatrix zu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{N} & \mathbf{G} & & \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} & & \end{array} \right] = \begin{bmatrix} p_1 + p_3 & -p_1 & -p_3 & 1 \\ -p_1 & p_1 + p_2 & -p_2 & 1 \\ -p_3 & -p_2 & p_2 + p_3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

und schließlich durch Inversion die Kofaktorenmatrix der Unbekannten

$$\mathbf{Q}_{xx} = \frac{1}{9(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)} \begin{bmatrix} p_1 + 4p_2 + p_3 & p_1 - 2p_2 - 2p_3 & -2p_1 - 2p_2 + p_3 \\ p_1 - 2p_2 - 2p_3 & p_1 + p_2 + 4p_3 & -2p_1 + p_2 - 2p_3 \\ -2p_1 - 2p_2 + p_3 & -2p_1 + p_2 - 2p_3 & 4p_1 + p_2 + p_3 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Berechnet man nun die Varianz der ausgeglichenen Schwerpunktshöhe \hat{H} über das Kovarianzfortpflanzungsgesetz

$$\mathbf{Q}_{\hat{H}} = \mathbf{F} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}^T \quad (2.11)$$

mit

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \mathbf{G}^T, \quad (2.12)$$

so ergibt sich Gleichung (2.11) zu

$$\mathbf{Q}_{\hat{H}} = \frac{1}{9} \mathbf{G}^T \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{G}. \quad (2.13)$$

Betrachtet man den Ausdruck

$$\mathbf{G}^T \mathbf{Q}_{xx} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 + 4p_2 + p_3 & p_1 - 2p_2 - 2p_3 & -2p_1 - 2p_2 + p_3 \\ p_1 - 2p_2 - 2p_3 & p_1 + p_2 + 4p_3 & -2p_1 + p_2 - 2p_3 \\ -2p_1 - 2p_2 + p_3 & -2p_1 + p_2 - 2p_3 & 4p_1 + p_2 + p_3 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

so ergibt sich dieser zu

$$\mathbf{G}^T \mathbf{Q}_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

und somit erhält man aus Gleichung (2.13)

$$\mathbf{Q}_{\hat{H}} = 0. \quad (2.16)$$

Daß dieses Ergebnis generell gilt, läßt sich anhand einer Eigenschaft der Kofaktorenmatrix aus einer freien Ausgleichung zeigen, die in (MITTERMAYER 1972) hergeleitet wurde. Es gilt

$$\mathbf{G}^T \mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

woraus in diesem Fall folgt, daß sich die Spaltensummen und somit auch die Zeilensummen der Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{xx} jeweils zu null ergeben. Setzt man diese Eigenschaft in das Kovarianzfortpflanzungsgesetz (2.13) ein, so ergibt sich die Varianz der Schwerpunktshöhe grundsätzlich zu

$$\mathbf{Q}_{\hat{H}} \equiv 0. \quad (2.18)$$

Somit stellt die Datumsdefinition mit Hilfe von (2.2) einen Spezialfall des Festhaltens der Höhe eines beliebigen Punktes dar, mit der Eigenschaft, daß alle Punkte gleichberechtigt an der Definition eines Bezugspunktes, nämlich des Schwerpunktes, mit einer Varianz gleich null beteiligt sind.

In einem zweiten Beispiel soll eine anschauliche Interpretation der Eigenschaft (2.17) an einem ebenen Streckennetz bestehend aus vier Punkten, zwischen denen alle Strecken gemessen wurden, siehe Abbildung 2.2, aufgezeigt werden. Gegeben sind die Streckenmessungen l_i und die aus den empirischen Standardabweichungen gewonnenen Gewichte p_i mit $i = (1, \dots, 6)$.

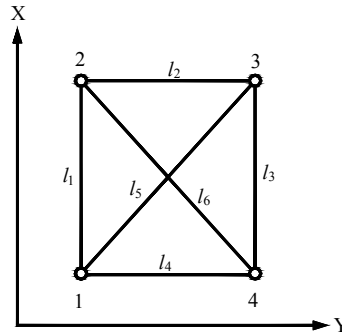


Abbildung 2.2: Streckennetz in der Ebene

Anstelle einer Ausgleichung mit einer Auswahl der tatsächlichen Meßwerte als Unbekannte, sollen auch hier wieder Koordinaten eingeführt und eine freie Netzausgleichung durchgeführt werden, wobei der Referenzrahmen durch die Auswahl von Näherungskoordinaten X_i^0, Y_i^0 für alle Netzknoten festgelegt wird. Da diese Koordinaten aber im Informationsgehalt der Messungen nicht enthalten sind, erhält man aus

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (2.19)$$

wieder eine singuläre Normalgleichungsmatrix mit einem Rangdefekt von $d = 3$. Wie bereits erwähnt, läßt sich diese Singularität beheben, indem man einen Punkt und die Richtung zu einem weiteren Punkt festhält, wodurch die innere Geometrie mit den eingeführten Koordinaten verknüpft wird. Hier soll aber nun die Datumsfestlegung unter Verwendung der in (MITTERMAYER 1972) entwickelten (und heute allgemein gebräuchlichen) Bedingungsgleichung

$$\mathbf{G}^T \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

mit

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -Y_1^0 & X_1^0 & -Y_2^0 & X_2^0 & -Y_3^0 & X_3^0 & -Y_4^0 & X_4^0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

und dem Vektor der Unbekannten

$$\hat{\mathbf{x}} = [\Delta \hat{x}_1 \quad \Delta \hat{y}_1 \quad \Delta \hat{x}_2 \quad \Delta \hat{y}_2 \quad \Delta \hat{x}_3 \quad \Delta \hat{y}_3 \quad \Delta \hat{x}_4 \quad \Delta \hat{y}_4]^T, \quad (2.22)$$

der die Zuschläge zu den Näherungskoordinaten enthält, erfolgen, die nach einer Erweiterung des Normalgleichungssystems („Ränderung“) mit (2.21) zu einer Lösung mit der Eigenschaft $\text{Spur} \{\mathbf{Q}_{xx}\} = \min$ führt. Multipliziert man Gleichung (2.20) aus, so ergeben sich die ersten zwei Bedingungen zu

$$\sum_{i=1}^p \Delta \hat{x}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^p \Delta \hat{y}_i = 0 \quad \text{mit } p = 4, \quad (2.23)$$

was gleichbedeutend damit ist, daß der Schwerpunkt der ausgeglichenen Koordinaten

$$\hat{\bar{X}} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \hat{X}_i, \quad \hat{\bar{Y}} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \hat{Y}_i \quad (2.24)$$

gleich dem aus Näherungskoordinaten

$$\bar{X}^0 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p X_i^0, \quad \bar{Y}^0 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p Y_i^0 \quad (2.25)$$

ist, so daß gilt

$$\hat{X} = \bar{X}^0, \quad \hat{Y} = \bar{Y}^0 . \quad (2.26)$$

Für die dritte Bedingung erhält man

$$\sum_{i=1}^p (-Y_i^0 \Delta \hat{x}_i + X_i^0 \Delta \hat{y}_i) = 0 \quad (2.27)$$

und in ausführlicher Darstellung, mit

$$\Delta \hat{x}_i = \hat{X}_i - X_i^0 \quad \text{und} \quad \Delta \hat{y}_i = \hat{Y}_i - Y_i^0 , \quad (2.28)$$

ergibt sich

$$\sum_{i=1}^p X_i^0 \hat{Y}_i - \sum_{i=1}^p \hat{X}_i Y_i^0 = 0 . \quad (2.29)$$

In Verbindung mit (2.23) läßt sich auch diese Bedingung anschaulich interpretieren. Betrachtet man dazu den Rotationswinkel α , der sich aus einer Helmertrtransformation zwischen den Näherungskoordinaten X_i^0, Y_i^0 und den ausgeglichenen Koordinaten \hat{X}_i, \hat{Y}_i ergibt, so erhält man den bekannten Ausdruck

$$\alpha = \arctan \frac{\sum_{i=1}^p (\hat{Y}_i - \bar{Y}) (X_i^0 - \bar{X}^0) - \sum_{i=1}^p (\hat{X}_i - \bar{X}) (Y_i^0 - \bar{Y}^0)}{\sum_{i=1}^p (\hat{X}_i - \bar{X}) (X_i^0 - \bar{X}^0) - \sum_{i=1}^p (\hat{Y}_i - \bar{Y}) (Y_i^0 - \bar{Y}^0)} . \quad (2.30)$$

Multipliziert man den Zähler dieses Quotienten aus, so folgt

$$\text{Zähler} = \sum_{i=1}^p X_i^0 \hat{Y}_i - n \bar{X}^0 \hat{Y} - n \bar{X}^0 \hat{Y} + n \bar{X}^0 \hat{Y} - \sum_{i=1}^p \hat{X}_i Y_i^0 + n \hat{X} \bar{Y}^0 + n \hat{X} \bar{Y}^0 - n \hat{X} \bar{Y}^0 \quad (2.31)$$

und nach Einsetzen von (2.26) erhält man

$$\text{Zähler} = \sum_{i=1}^p X_i^0 \hat{Y}_i - \sum_{i=1}^p \hat{X}_i Y_i^0 \underbrace{- n \hat{X} \hat{Y} - n \hat{X} \hat{Y} + n \hat{X} \hat{Y} + n \hat{X} \hat{Y} + n \hat{X} \hat{Y} - n \hat{X} \hat{Y}}_{=0} . \quad (2.32)$$

Setzt man nun noch (2.29) ein, so folgt

$$\text{Zähler} \equiv 0 . \quad (2.33)$$

Der Nenner des Quotienten (2.30) läßt sich lediglich zu

$$\text{Nenner} = \sum_{i=1}^p X_i^0 \hat{X}_i - n \bar{X}^0 \hat{X} - \sum_{i=1}^p Y_i^0 \hat{Y}_i + n \bar{Y}^0 \hat{Y} \quad (2.34)$$

umformen und somit nimmt der Quotient (2.30) den Wert null an und man erhält schließlich für den Rotationswinkel

$$\alpha \equiv 0 . \quad (2.35)$$

Im folgenden soll nun die Varianz des Schwerpunktes \hat{X}, \hat{Y} und des Rotationswinkels α unter Verwendung der aus der freien Netzausgleich erhaltenen Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{xx} untersucht werden. Wendet man das Kovarianzfortpflanzungsgesetz

$$\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{F} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}^T \quad (2.36)$$

mit der Funktionalmatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -Y_1^0 & X_1^0 & -Y_2^0 & X_2^0 & -Y_3^0 & X_3^0 & -Y_4^0 & X_4^0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^T \quad (2.37)$$

an, so ergibt sich (2.36) zu

$$\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{G}^T \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{G} \quad (2.38)$$

Da die Eigenschaft (2.17) gilt, folgt auch an dieser Stelle

$$\mathbf{G}^T \mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

und somit

$$\mathbf{Q}_{yy} \equiv \mathbf{0} \quad (2.40)$$

Das bedeutet, daß sich die Summen

$$\sum_{i=1}^p \Delta \hat{x}_i, \quad \sum_{i=1}^p \Delta \hat{y}_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^p (-Y_i^0 \Delta \hat{x}_i + X_i^0 \Delta \hat{y}_i) \quad (2.41)$$

mit einer Varianz von null ergeben. Da sowohl die Schwerpunktkoordinaten \hat{X}, \hat{Y} als auch der Rotationswinkel α Funktionen nur dieser Summen sind, beträgt auch ihre Varianz gleich null.

Zusammenfassend können nun die Methoden zur freien Netzausgleichung gegenübergestellt werden. Nach der Festlegung des Referenzrahmens durch die Auswahl von Näherungskoordinaten kann die Datumsfestlegung erfolgen durch:

- Festhalten der Koordinaten eines Punktes und
- Festhalten der X - oder Y -Koordinate eines weiteren Punktes, wodurch über die Rotation verfügt wird.

Da für diese Elemente eine Varianz gleich null angenommen wird (sie gelten als „fehlerfrei“), wird diese Festlegung auch als Auswahl einer *Nullvarianz-Rechenbasis*¹ bezeichnet. Da diese Rechenbasis willkürlich ausgewählt werden kann, ergibt sich der Lösungsvektor und die Fehlerschätzung für die Koordinaten nicht eindeutig. Anzumerken ist, daß die innere Geometrie der Punktgruppe invariant gegenüber der Auswahl einer Rechenbasis ist.

Um alle Punkte gleichberechtigt an der Datumsdefinition teilnehmen zu lassen, kann eine Ausgleichung mit der Forderung $\text{Spur} \{ \mathbf{Q}_{xx} \} = \min$ durchgeführt werden. Obwohl nicht unmittelbar ersichtlich, wird auch bei dieser Vorgehensweise einer bestimmten Anzahl von Elementen eine Varianz gleich null zugewiesen. Bei einem ebenen maßstabsbestimmten Lagenetz mit dem Rangdefekt $d = 3$ sind dies:

- Der Schwerpunkt der Punktgruppe, berechnet aus den ausgeglichenen Koordinaten, besitzt eine Varianz gleich null und ist gleich dem Schwerpunkt, berechnet aus den zuvor willkürlich ausgewählten Näherungskoordinaten.
- Die Gesamtroation der ausgeglichenen Koordinaten der Punktgruppe gegenüber den Näherungskoordinaten beträgt 0 gon und besitzt eine Varianz gleich null.

Somit stellt die freie Netzausgleichung mit Gesamtpurminimierung² wieder einen Spezialfall der Ausgleichung mit einer Nullvarianz-Rechenbasis dar. Es wird ebenfalls einer dem Rangdefekt entsprechenden Anzahl von Elementen eine Varianz gleich null zugewiesen. Charakteristisch für diesen Spezialfall ist, daß bei der Ausgleichung mit der Forderung $\text{Spur} \{ \mathbf{Q}_{xx} \} = \min$ alle Punkte gleichberechtigt an der Festlegung der Nullvarianz-Elemente teilnehmen.

¹ Abweichend zur Übersetzung des englischen Begriffs „zero-variance computational base“ mit dem Begriff „varianzfreie Rechenbasis“ (NIEMEIER 2002), wird hier der Begriff „Nullvarianz-Rechenbasis“ eingeführt, der zutreffender beschreibt, daß einige Elemente eine Varianz gleich null aufweisen und nicht, daß es eine Varianz für diese Elemente nicht gibt.

² In diesem Beispiel wurde davon ausgegangen, daß die Unbekannten, die nicht von Typ „Koordinate“ sind, bereits vorab eliminiert wurden. Beläßt man diese Unbekannten (z.B. Maßstabsfaktoren, Orientierungsunbekannte) im Ausgleichungsansatz, so ist zu beachten, daß sich die dargestellte „Gesamtpurminimierung“ lediglich auf die Varianzen der Koordinatenunbekannten bezieht. Eine Ausweitung der Bedingungen auf die Unbekannten, die nicht vom Typ „Koordinate“ sind, ist nach (NIEMEIER 2002) geometrisch nicht interpretierbar.

2.1.2 Eigenschaften der Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung

Hat man sich für eine der in Abschnitt 2.1.1 vorgestellten Bedingungen für die Datumsfestlegung entschieden, kann eine freie Netzausgleichung mit Koordinatenunbekannten durchgeführt werden. Da diese Bedingungen keinen Zwang auf die innere Geometrie des Netzes ausüben, kann eine beliebige Bedingung gewählt werden. Entscheidet man sich bei einem Lagenetz für die Bedingungen in der Form (2.21), so führt dies zu einer freien Netzausgleichung mit Gesamtpurminimierung. Die Ergebnisse einer derartigen Ausgleichung werden nach (MEISSL 1962) „inneres Koordinatensystem (mit minimaler Spur)³“ und ihre Fehlerschätzung „innere Fehlermatrix⁴“ (MEISSL 1969) genannt. In (PELZER 1971) wird ausgeführt, daß diese inneren Koordinaten zu den schätzbaren Funktionen gehören.

GRAFAREND und SCHAFFRIN (1976) haben jedoch gezeigt, daß in einer Ausgleichung exakt $r = \text{Rang}(\mathbf{A})$ Parameter unverzerrt schätzbar sind, d.h. daß der Vektor der Unbekannten \mathbf{x} mit einer spaltenregulären Koeffizientenmatrix \mathbf{A} an den Beobachtungsvektor \mathbf{l} geknüpft sein muß. Das ist aber nur dann der Fall, wenn man in einem freien Netz Unbekannte einführt, die im Informationsgehalt der Messungen tatsächlich enthalten sind (z.B. Strecken und Winkel in einem Lagenetz). Führt man hingegen Koordinaten als Unbekannte ein, so erhält man eine Koeffizientenmatrix die den Rangdefekt

$$d = m - r \quad (2.42)$$

mit

m ... Anzahl der Unbekannten
 r ... Rang (\mathbf{A})

aufweist und es ist sofort einsichtig, daß es sich bei den Koordinatenunbekannten nicht um schätzbare Größen für das ursprüngliche Problem handeln kann. Des weiteren haben (GRAFAREND und SCHAFFRIN 1976) das wichtige Äquivalenztheorem zwischen schätzbaren und invarianten Größen eines geodätischen Netzes formuliert, auf das in Abschnitt 2.1.2.4 eingegangen wird. Aufgrund dieses Theorems ist ebenfalls sofort einsichtig, daß es sich bei Koordinaten nicht um schätzbare Funktionen handeln kann, da sie nicht zu den invarianten Größen eines geodätischen Netzes gehören.

In der Literatur sind viele Vorschläge zu finden, wie man das singuläre Ausgleichungsproblem mit Koordinaten lösen kann und obwohl die Begriffe unterschiedlich sind (z.B. Lösung durch Einführung von Bedingungs-gleichungen, Lösung mit Pseudoinverse) basieren alle Verfahren darauf, daß eine Datumsfestlegung bezüglich der Näherungskordinaten erfolgt. Anstelle einer Schätzung von $r = \text{Rang}(\mathbf{A})$ Parametern, die sich aus den Messungen eindeutig ergibt, wird also ein *anderes* Problem gelöst, bei dem durch zusätzliche Informationen für die Datumsfestlegung $r + d$ Parameter geschätzt werden. Doch statt ausdrücklich zu erwähnen, daß die Schätzung der Koordinaten in einem anderen, um die Datumsfestlegung erweiterten Modell stattfindet, werden den Ergebnissen einer derartigen Ausgleichung in der Literatur die unterschiedlichsten Eigenschaften zugesprochen. PELZER (1971) gibt an, daß die inneren Koordinaten zu den „invarianten Elementen⁵“ eines Punkthaufens gehören. Auch in (NIEMEIER 1979) werden die inneren Koordinaten eingehend untersucht und als „Sonderform schätzbbarer Funktionen“ mit den Eigenschaften einer „besten linear erwartungstreuen Schätzung“ eingestuft. Zudem wird aufgezeigt, daß sich die inneren Koordinaten durch eine spezielle Wahl der Bedingungs-gleichungen in der Form (2.20) auch aus dem „Konzept der bedingten Erwartungstreue“ mit den Eigenschaften einer „besten linearen bedingt erwartungstreuen Schätzung“ ergeben. In (ILLNER 1985) hingegen, werden die inneren Koordinaten als „nicht schätzbare“ Größen klassifiziert.

Im folgenden werden diese Ansätze kurz dargestellt und kommentiert. Des weiteren soll die Frage beantwortet werden, ob die inneren Koordinaten zu den schätzbaren Größen eines geodätischen Netzes gehören können.

2.1.2.1 Innere Koordinaten als Sonderfall schätzbbarer Funktionen?

Schätzbare Funktionen zeichnen sich dadurch aus, daß sie sich unabhängig von einer beliebigen Lösung \mathbf{x}_s (Sonderlösung) immer eindeutig ergeben, so ergeben sich z.B. Strecken und Winkel in einem frei ausgeglichenen Lagenetz immer eindeutig und unabhängig davon, welche Datumsdefinition für die Erzeugung der Koordinaten \mathbf{x}_s getroffen wurde. In (SCHAFFRIN 1975) werden schätzbare Funktionen im Gauß-Markov-Modell wie folgt definiert.

³ In (MEISSL 1962) wird zum Begriff „inneres Koordinatensystem“ folgendes angegeben: „Zu einem solchen inneren System kann man auf mannigfache Art gelangen. Zum Beispiel könnte man einen der Punkte zum Ursprung des neuen Systems machen und durch einen weiteren die x -Achse hindurchlegen.“ Somit impliziert dieser Begriff nicht (wie sehr häufig in der Literatur zu finden) zwangsläufig eine Lösung mit der Eigenschaft $\text{Spur}\{\mathbf{Q}_{xx}\} = \min$. Der Spezialfall mit der Eigenschaft $\text{Spur}\{\mathbf{Q}_{xx}\} = \min$ wird dann auch in (MEISSL 1962) als „inneres Koordinatensystem mit minimaler Spur bezeichnet“.

⁴ Der Begriff „innere Fehlermatrix“ bezeichnet hingegen die Kofaktorenmatrix mit der Eigenschaft $\text{Spur}\{\mathbf{Q}_{xx}\} = \min$.

⁵ Der Begriff „invariant“ wurde in PELZER (1971) im Sinne von „bestimmbar“ verwendet, siehe (PELZER 1974).

Definition 2.1:

Sei \mathbf{F} eine (f, m) -Matrix mit $1 \leq f \leq m$, dann ist $\mathbf{F}\mathbf{x}$ (erwartungstreu) schätzbar, wenn eine (n, f) -Matrix (mit $n = \text{Anzahl der Beobachtungen}$) \mathbf{L} existiert für die

$$\mathbf{E}(\mathbf{L}^T \mathbf{I}) = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (2.43)$$

gilt. $\mathbf{L}^T \mathbf{I}$ heißt dann linear unverzerrte Schätzung (LUE)⁶ von $\mathbf{F}\mathbf{x}$.

Die Eigenschaft, daß $\mathbf{F}\mathbf{x}$ schätzbar ist, ist äquivalent dazu, daß eine (n, f) -Matrix \mathbf{L} existiert, für die

$$\mathbf{A}^T \mathbf{L} = \mathbf{F}^T \quad (2.44)$$

gilt und \mathbf{F} somit als Linearkombination der Spalten von \mathbf{A} darstellbar ist.

Daraus folgt, daß sich alle Funktionen invariant gegenüber einer beliebigen Lösung \mathbf{x}_s ergeben, für die (2.44) erfüllt ist (NIEMEIER 1979).

Für eine beste lineare Schätzung gibt (SCHAFFRIN 1975) folgende Definition an.

Definition 2.2:

$\mathbf{L}^T \mathbf{I}$ heißt beste lineare Schätzung (BLE)⁷ von $\mathbf{F}\mathbf{x}$ wenn für alle (n, f) -Matrizen $\bar{\mathbf{L}}$ gilt:

$$\text{Spur } \mathbf{E}(\mathbf{L}^T \mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{x})(\mathbf{L}^T \mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{x})^T \leq \text{Spur } \mathbf{E}(\bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{x})(\bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{x})^T \quad (2.45)$$

Somit ist eine beste lineare Schätzung definiert als Schätzung mit minimaler Spur der Varianzmatrix. Weiterhin gibt SCHAFFRIN (1975) an, daß ein Minimum vorliegt, falls die Normalgleichungen erfüllt sind.

Aufgrund dieser Eigenschaften läßt sich eine beste linear unverzerrte Schätzung wie folgt definieren (SCHAFFRIN 1975).

Definition 2.3

$\mathbf{L}^T \mathbf{I}$ ist die beste lineare unverzerrte Schätzung (BLUE)⁸ von $\mathbf{F}\mathbf{x}$ wenn gilt: $\mathbf{L}^T \mathbf{I}$ ist zunächst eine linear unverzerrte Schätzung (LUE) und dann beste lineare Schätzung (BLE) von $\mathbf{F}\mathbf{x}$.

Da sich schätzbare Funktionen neben ihrer Eindeutigkeit auch durch ihre minimale Varianz auszeichnen (NIEMEIER 1979, mit Verweis auf das Gauß-Markov-Theorem), ist $\mathbf{F}\mathbf{x}_s$ somit die beste lineare unverzerrte Schätzung mit den Eigenschaften

- Eindeutigkeit,
- Erwartungstreue (Unverzerrtheit),
- minimale Varianz

einer schätzbaren Funktion $\mathbf{F}\mathbf{x}$, wobei \mathbf{x}_s eine beliebige Lösung einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten $\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{I}$ ist.

Daß die inneren Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung alle Eigenschaften schätzbare Funktionen aufweisen, wird erstmals in (PELZER 1971) und danach u.a. in (KOCH 1978, NIEMEIER 1979) erwähnt, obwohl die Matrix \mathbf{A} bei einer freien Netzausgleichung den Rangdefekt $d = m - r$ aufweist. Um den Rangdefekt zu beheben und eine freie Netzausgleichung durchführen zu können, wird eine (m, d) -Matrix \mathbf{G} eingeführt, für die gilt (MEISSEL 1969):

$$\mathbf{A}\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

In (MITTERMAYER 1972) wurde gezeigt, daß in der Matrix \mathbf{G} die Eigenvektoren bezüglich des d -fachen Eigenwertes $\lambda = 0$ der Normalgleichungsmatrix zusammengefaßt sind. Für ein maßstabsbestimmtes Lagenetz erhält man die Matrix \mathbf{G} wie in (2.21) dargestellt. Nach der Erweiterung der Normalgleichungsmatrix erhält man dann eine Lösung mit der Eigenschaft $\text{Spur } \{\mathbf{Q}_{xx}\} = \min$.

Hat man das Ausgleichungsproblem hingegen derart gelöst, daß man einen Punkt und eine Richtung zu einem weiteren Punkt festgehalten hat, so erhält man für die Koordinatenzuschläge eine beliebige Lösung \mathbf{x}_s (in Abhängigkeit der festgehaltenen Punkte). Aus dieser Lösung, die in (PELZER 1971) als „Sonderlösung“ bezeichnet wird, lassen sich unter Verwendung der symmetrischen Transformationsmatrix

⁶ Linear Unbiased Estimator

⁷ Best Linear Estimator

⁸ Best Linear Unbiased Estimator

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \quad (2.47)$$

die Koordinatenzuschläge und die Kofaktorenmatrix

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \mathbf{x}_s \quad (2.48)$$

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{F} \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{F} \quad (2.49)$$

der Lösung einer freien Ausgleichung mit Gesamtpurminimierung berechnen. Die Matrix \mathbf{G} lautet für ein maßstabsbestimmtes Lagernetz mit p Punkten

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ -Y_1^0 & X_1^0 & -Y_2^0 & X_2^0 & \cdots & -Y_p^0 & X_p^0 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Diese Transformation entspricht einer differentiellen 3-Parameter-Transformation⁹ der Sonderlösung \mathbf{x}_s auf die Näherungskordinaten \mathbf{x}^0 der homologen Punkte. Daß die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorliegen schätzbarer Funktionen

$$\mathbf{F} \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (2.51)$$

erfüllt ist, wird ebenfalls in (PELZER 1971) mit

$$\mathbf{F} \mathbf{G} = \left(\mathbf{E} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \right) \mathbf{G} = \mathbf{G} - \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

angegeben. Aufgrund dieser Darstellung werden die inneren Koordinaten zu schätzbaren Funktionen erklärt. Während dort die Voraussetzungen für die Erfüllung der Gleichung nicht explizit angegeben sind, greift NIEMEIER (1979) den Gedanken erneut auf und stellt dar, daß für die Eigenvektormatrix \mathbf{G} folgende Eigenschaften aus der linearen Algebra gelten:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{E}, \quad (2.53)$$

$$(\mathbf{G} \mathbf{G}^T)^2 = \mathbf{G} \mathbf{G}^T \text{ (Idempotenz)}, \quad (2.54)$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{G} \mathbf{G}^T) \text{ ist idempotent und orthogonal zu } \mathbf{G}. \quad (2.55)$$

Damit wird die Auflösung der Gleichung (2.52) anschaulich. Zum besseren Verständnis ist jedoch anzumerken, daß die Eigenschaften (2.53), (2.54) und (2.55) nur erfüllt sind, falls die darin enthaltenen Eigenvektoren eine *orthonormale* Basis bilden. Wendet man auf die Basis, gebildet durch die Eigenvektoren in (2.50), das „Schmidt-sche Orthonormierungsverfahren“ an, so erhält man

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{p}} & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{p}} & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{p}} \\ -c(Y_1^0 - \bar{Y}^0) & c(X_1^0 - \bar{X}^0) & \cdots & -c(Y_p^0 - \bar{Y}^0) & c(X_p^0 - \bar{X}^0) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

mit

$$\bar{X}^0 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p X_i^0, \quad \bar{Y}^0 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p Y_i^0 \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^p (X_i^0 - \bar{X}^0)^2 + \sum_{i=1}^p (Y_i^0 - \bar{Y}^0)^2}}. \quad (2.57)$$

⁹ zwei Translationen, eine Rotation

Für diese Darstellung sind die Bedingungen (2.53), (2.54) und (2.55) erfüllt. Es ist zu erkennen, daß die Orthonormierung einer Zentrierung der Koordinaten und anschließender Normierung der Eigenvektoren entspricht.¹⁰

Geometrische Interpretation: Der durch die Eigenvektoren in (2.56) aufgespannte Spaltenraum der Matrix \mathbf{G} ist orthogonal zum Spaltenraum der zugehörigen Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} . Die Basisvektoren haben die Länge eins und stehen senkrecht zueinander. Die Eigenvektoren der Matrix \mathbf{G} in (2.50) stehen nicht alle senkrecht zueinander und haben nicht die Länge eins, spannen aber den selben Spaltenraum auf; sie lassen sich aus Linearkombinationen der Eigenvektoren in Matrix \mathbf{G} in (2.56) darstellen.

Die Gleichung (2.52) wird somit sowohl von der Matrix \mathbf{G} in der Darstellung (2.50) als auch in der Darstellung (2.56) erfüllt. Für die praktische Anwendung bietet sich die Matrix \mathbf{G} in der Darstellung (2.56) an, da somit große Zahlen vermieden werden, was sich auf die numerische Stabilität der weiteren Berechnungen günstig auswirken kann.

Da die Bedingung (2.52) erfüllt ist, gibt PELZER (1971) weiterhin an, daß die innere Fehlermatrix¹¹ nicht von der Wahl der Bedingungsgleichungen, die zur Erzeugung der Sonderlösung \mathbf{x}_s verwendet wurden, abhängt und somit die inneren Koordinaten zu den schätzbaren Elementen eines Punkthaufens gehören. Diese Eigenschaften sind unmittelbar einsichtig, denn mit (2.48) und (2.49) erfolgt eine differentielle 3-Parameter-Transformation der Sonderlösung \mathbf{x}_s auf die Näherungskordinaten \mathbf{x}^0 der homologen Punkte, so daß sich, unabhängig vom Datum der Ausgangslösung, für die Lösung mit Gesamtpurminimierung immer die gleichen Zuschläge zu den Näherungskordinaten ergeben.

Was aber tatsächlich geschieht wird in Gleichung (2.51) deutlich. Setzt man für die Transformationsmatrix \mathbf{F} den Ausdruck (2.47) ein, so bedeutet dies nichts anderes, als daß eine *Festlegung des Datums* getroffen wird. Somit beziehen sich alle Aussagen bezüglich schätzbaren Größen nicht auf das ursprüngliche Ausgleichungsproblem mit $r = \text{Rang}(\mathbf{A})$ zu schätzenden Parametern, sondern auf ein erweitertes Modell, in dem durch Datumsfestlegung $r + d$ Parameter geschätzt werden. Da für eine derartige Modellerweiterung jedoch verschiedenste Möglichkeiten bestehen - so erfüllt z.B. auch¹²

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_2^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

die Bedingung (2.52) - kann der Einstufung der inneren Koordinaten als „schätzbar in einem erweiterten Modell“ oder als „Sonderfall schätzbaren Funktionen“ keine herausragende Bedeutung zugesprochen werden. Sogar wenn man einer Modellerweiterung in der Form (2.50) eine besondere Stellung zubilligen möchte (da sie zu einer Lösung mit minimaler Spur der Kofaktorenmatrix und kürzestem Lösungsvektor führt), so ist zudem zu beachten, daß jede Datumsfestlegung von willkürlich ausgewählten Näherungskordinaten abhängt. Wählt man andere Näherungskordinaten, so erhält man als Ergebnis auch andere (innere) Koordinaten und somit ist an dieser Stelle eine Eigenschaft schätzbaren Funktionen, nämlich deren Eindeutigkeit, nicht gegeben.

2.1.2.2 Innere Koordinaten als bedingt schätzbare Größen?

In (PELZER 1971 u. 1974), (KOCH 1978) und (NIEMEIER 1979) werden den inneren Koordinaten (aus einer Ausgleichung mit Gesamtpurminimierung) die Eigenschaften einer besten, linear unverzerrten Schätzung (BLUE) zugesprochen. Wie in Abschnitt 2.1.2.1 gezeigt wurde, ist die Erzeugung dieser Koordinaten aber nur möglich, wenn man das ursprüngliche Ausgleichungsproblem um eine Datumsfestlegung erweitert. Diese Festlegung läßt sich auch als Einführung von Bedingungsgleichungen interpretieren, mit denen ein (durch Einführung von Koordinatenunbekannten) singuläres Ausgleichungsproblem in ein reguläres überführt wird. In (NIEMEIER 1979) wird die Lösung eines Gauß-Markov-Modells mit einer Koeffizientenmatrix, die nicht den vollen Spaltenrang aufweist, durch Hinzunahme von Bedingungsgleichungen oder Pseudobeobachtungen aufgezeigt. Für eine spezielle Modellerweiterung mit Bedingungsgleichungen in der Form

$$\mathbf{G}^T \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (2.59)$$

¹⁰ Ein Hinweis auf Zentrierung der Koordinaten und anschließender Normierung der Spaltenvektoren von \mathbf{G} ist auch in (WELSCH et al. 2000, S. 145 ff.) zu finden. In (NIEMEIER 2002, S. 218 ff.) wird ebenfalls der Übergang zu einer orthonormalen Matrix \mathbf{G} beschrieben, wobei dieses Ziel mit den dort angegebenen Formeln nur dann erreicht wird, wenn die Koordinaten bereits zentriert sind.

¹¹ Die Begriffe „innere Fehlermatrix“ und „innere Koordinaten“ werden in (PELZER 1971) für die Ergebnisse einer Ausgleichung mit Gesamtpurminimierung verwendet.

¹² \mathbf{G}^T entspricht hier einer Datumsfestlegung in einem maßstabsbestimmten Lagenetz mit 4 Punkten durch festhalten eines Punktes und der Richtung zu einem weiteren Punkt.

wird gezeigt, daß man wieder schätzbare innere Koordinaten mit den Eigenschaften des kürzesten Lösungsvektors und der minimalen Spur der Kofaktorenmatrix erhält, wenn \mathbf{G} die Eigenvektoren zu den Eigenwerten null der Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} enthält. Diese Optimaleigenschaften beziehen sich somit nicht auf das ursprüngliche Ausgleichungsproblem mit $r = \text{Rang}(\mathbf{A})$ zu schätzenden Parametern, sondern auf ein erweitertes Modell, wobei die Erweiterung in diesem Fall wieder in einer Datumsfestlegung besteht. Die Lösung wird dann in (NIEMEIER 1979) auch als „beste lineare bedingt erwartungstreue Schätzung“ (BLICUE)¹³ in Bezug auf die gewählten Bedingungen bezeichnet.

Die oben beschriebene Auswahl von \mathbf{G} ist aber nur eine von vielen denkbaren Möglichkeiten, mit Hilfe von Bedingungsgleichungen über das Datum zu verfügen. Wählt man \mathbf{G} z.B. in der Form (2.58), so erhält man für die Koordinatenzuschläge eine andere Lösung, die aber ebenfalls die Forderung (2.59) erfüllt. Da die Datumsfestlegung zudem von den eingeführten Näherungskordinaten abhängt, ist auch an dieser Stelle eine Eigenschaft schätzbarer Funktionen, nämlich deren Eindeutigkeit, nicht gegeben.

2.1.2.3 Innere Koordinaten als schätzbare Größen aus der Lösung mit Pseudoinverse?

Der Lösungsweg unter Verwendung der Pseudoinverse \mathbf{N}^+ wird in (NIEMEIER 1979) als weitere Möglichkeit zur Berechnung eindeutiger Lösungen in allgemeinen linearen Modellen dargestellt. In (KOCH 1978) findet man ebenfalls Untersuchungen zur generalisierten Inverse und Pseudoinverse aus Bedingungen. Für die Lösung

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}} = \sigma^2 \mathbf{N}^+ \quad (2.60)$$

wird angegeben, daß es sich um eine „beste lineare erwartungstreue Schätzung“ handelt. Danach wird ausgeführt, daß die Transformation von nicht schätzbaren Parametern in schätzbare Funktionen mit Hilfe der Pseudoinverse einer Einführung von Bedingungen entspricht. Als Beispiel wird angegeben, daß in einem freien Netz der aus Näherungskordinaten berechnete Schwerpunkt

$$\bar{X}^0 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p X_i^0, \quad \bar{Y}^0 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p Y_i^0 \quad (2.61)$$

mit dem der ausgeglichenen Koordinaten identisch ist. Die Ausführungen in (KOCH 1978) zeigen somit, daß es sich bei dem Lösungsweg mit der Pseudoinverse lediglich um eine weitere rechentechnische Realisierung einer Datumsfestlegung handelt. Die Aussage, daß es sich bei (2.60) um die „beste lineare erwartungstreue Schätzung“ handelt, gilt also wieder nicht für das ursprüngliche Ausgleichungsproblem mit $r = \text{Rang}(\mathbf{A})$ zu schätzenden Parametern, sondern für ein Modell, daß durch eine Datumsfestlegung *erweitert* wurde. Durch die Lösung mit der Pseudoinverse wird aus der Vielzahl der möglichen Modellerweiterungen lediglich eine spezielle ausgewählt, die zu einer Lösung mit minimaler Spur der Kofaktorenmatrix und kürzestem Lösungsvektor führt. Doch auch diese Lösung hängt wieder von den willkürlich auswählbaren Näherungskordinaten ab, so daß eine Eigenschaft schätzbarer Größen, nämlich deren Eindeutigkeit nicht gegeben ist.

2.1.2.4 Das Äquivalenztheorem von schätzbaren und invarianten Größen

In den vorangegangenen Abschnitten wurde aufgezeigt, daß sich Koordinaten nur in einem um die Datumsfestlegung erweiterten Modell schätzen lassen. Doch auch in diesem erweiterten Modell ergeben sich die inneren Koordinaten nicht eindeutig, da sie von beliebig auszuwählenden Näherungskordinaten abhängen. GRAFAREND und SCHAFFRIN (1976) haben die Äquivalenz von schätzbaren und invarianten Größen untersucht und das folgende Äquivalenztheorem formuliert.

Sei $\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ein spezielles lineares Gauß-Markov-Modell mit den generellen Eigenschaften $o(\mathbf{A}) = n \times m$, $\text{Rang}(\mathbf{A}) \leq m \leq n$. Alle Vektoren $\mathbf{F}\mathbf{x}$ von funktional (speziell linear) unabhängigen Größen sind linear unverzerrt schätzbar, wenn und nur wenn sie invariant sind bezüglich jeder Transformation, die den Beobachtungsvektor \mathbf{I} invariant beläßt.¹⁴

Somit müssen sich schätzbare Größen auch unabhängig von der Datumsfestlegung immer gleich ergeben. Es ist unmittelbar einsichtig, daß Koordinaten (oder Koordinatenzuschläge) *keine* schätzbaren Größen sein können, da sie nicht zu den invarianten Größen eines geodätischen Netzes gehören. Wählt man z.B. bei der Ausgleichung eines freien Lagenetzes anstelle der Näherungskordinaten \mathbf{x}^0 einen um den Winkel α rotierten Koordinatensatz \mathbf{x}_α^0 (eine Transformation, die den Beobachtungsvektor \mathbf{I} invariant beläßt), so erhält man mit $\hat{\mathbf{x}} \neq \hat{\mathbf{x}}_\alpha$ ein Ergebnis, das nicht die Forderung der Invarianz erfüllt.

¹³ Best Linear Conditionally Unbiased Estimation

¹⁴ Übersetzung aus dem Englischen.

2.1.3 Klassifizierung der inneren Koordinaten in Bezug zur Aufgabenstellung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde aufgezeigt, daß die Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung nicht zu den schätzbaren Größen gehören können, in Bezug auf die ursprüngliche Aufgabenstellung, nämlich der Bestimmung der ausgeglichenen Geometrie eines Punkthaufens. Diese Feststellung ist auch an einigen Stellen in der Literatur anzutreffen, so z.B. in (ILLNER 1985, S. 5): „Nicht schätzbare Größen sind dagegen die ausgeglichenen Koordinaten und deren Kofaktoren, die von der Lösungsart und damit von der Wahl der Restriktionen bzw. der Festlegung des freien Datums abhängen.“ Wie ist nun diese Aussage in Verbindung zu bringen, mit den formal richtigen Ausführungen in (PELZER 1971), (KOCH 1978) und (NIEMEIER 1979), in denen den Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung die Eigenschaft der „Schätzbarkeit“ zugesprochen wird? Unerlässlich für die Beantwortung dieser Frage ist eine klare Trennung der Begriffe

- Aufgabenstellung,
- Modellbildung,
- Auswertetechnik.

Besteht die Aufgabe darin, die ausgeglichene Geometrie eines Punkthaufens zu bestimmen, so kann dies in einem Modell geschehen, in dem $r = \text{Rang}(\mathbf{A})$ Unbekannte (z.B. Strecken in einem Lagenetz) eingeführt werden, die die Geometrie gerade eindeutig beschreiben. In Bezug auf diese Aufgabenstellung stellen Koordinaten natürlich keine schätzbaren Größen dar; sie sind im Informationsgehalt der Messungen nicht enthalten.

Eine völlig andere Aufgabenstellung liegt in dem Fall vor, wenn Koordinaten bestimmt werden sollen. Dazu muß die ursprüngliche Aufgabenstellung dahingehend erweitert werden, daß eine Verfügung über das geodätische Datum zu treffen ist. Um diesen Teil der Aufgabenstellung zu erfüllen, wird ein Referenzrahmen (Koordinatensystem) durch die Auswahl von Näherungskoordinaten für die Netzpunkte eingeführt und die datumstragenden Punkte werden festgelegt. Damit die inneren Koordinaten überhaupt zu den schätzbaren Größen gehören können, müssen diese Festlegungen *per Definition* erfolgen; sie stehen somit in den folgenden Schritten nicht mehr zur Disposition.¹⁵

Im Anschluß daran ist ein Modell aufzustellen, das dieser Aufgabenstellung gerecht wird, was derart erfolgen kann, daß das ursprüngliche Modell um eine Datumsdefinition auf Grundlage der ausgewählten Näherungskoordinaten erweitert wird. An dieser Stelle stehen nun verschiedene Möglichkeiten gleichberechtigt nebeneinander, z.B. „Einführung von Bedingungsgleichungen“, „Verwendung der Pseudoinverse“. Bei dieser Begriffsbildung ist aber zu beachten, daß es sich dabei um Möglichkeiten der Modellbildung für ein und dieselbe Aufgabenstellung, nämlich der Bestimmung von Koordinaten unter Berücksichtigung der getroffenen Datumsdefinition, handelt. In Bezug zu *dieser* Aufgabenstellung stellen die Koordinaten einer freien Netzausgleichung, rein formal betrachtet, schätzbare Größen dar.

Zur Auswertetechnik ist anzumerken, daß (z.B. bei der Ausgleichung eines Lagenetzes) nicht das ursprüngliche nichtlineare Problem gelöst wird, sondern daß i.d.R. ein lineares Ersatzproblem aufgestellt und iterativ gelöst wird. Es sei daher an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß sich die Begriffe „Spurminimierung“ und „kürzester Lösungsvektor“ lediglich auf eine rechentechnische Realisierung für das ursprünglich nichtlineare Ausgleichungsproblem beziehen.

Somit konnte die Frage, ob Koordinaten zu den schätzbaren Größen eines geodätischen Netzes gehören, geklärt werden, was dazu beiträgt, die teilweise unterschiedlichen Auffassungen über die Eigenschaften der Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung im richtigen Zusammenhang, nämlich unter Berücksichtigung der tatsächlich zugrunde liegenden Aufgabenstellung, zu sehen.

¹⁵ Somit scheidet die in den Abschnitten 2.1.2.1 bis 2.1.2.4 beschriebene Möglichkeit der Auswahl anderer Näherungskoordinaten (z.B. durch Auswahl eines um den Winkel α rotierten Koordinatensystems) und eine Veränderung der datumstragenden Punkte aus.

2.2 Ebene Koordinatentransformation

Koordinatentransformationen, bei denen Punkte eines Startsystems über eine Abbildungsvorschrift in ein Zielsystem überführt werden, finden bei vielen geodätischen Fragestellungen Anwendung. Im folgenden wird die überbestimmte ebene Ähnlichkeitstransformation (Helmert-Transformation) im Hinblick auf ihre Anwendung in der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze untersucht. Die Koordinaten des Start- und Zielsystems stammen hierbei jeweils aus einer freien Netzausgleichung und weisen somit eine singuläre Kofaktorenmatrix auf. In einer weiteren Ausgleichung soll dann die Transformation erfolgen. Diese Vorgehensweise entspricht dem Konzept der *stufenweisen Ausgleichung*. Damit eine stufenweise Ausgleichung das gleiche Ergebnis wie eine entsprechende Gesamtausgleichung liefert, *müssen* die Kofaktoren aus den vorangegangenen Ausgleichungen streng berücksichtigt werden. Da die Kofaktorenmatrizen jedoch singulär sind, ist deren Weiterverwendung in einem Transformationsansatz nicht ohne weiteres möglich.

Zur Lösung dieses Problems wird zunächst ein Modellansatz entwickelt, mit dem die Erzeugung und Transformation von Koordinaten in einer *Ausgleichung in einem Guß* auf der Grundlage von Beobachtungen erfolgt. Dieses Konzept wird dann für die Transformation von Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix verwendet. Des weiteren wird gezeigt, wie die Transformation ohne die Bereitstellung von Näherungswerten für Translation und Rotation möglich ist. Diese Parameter können nach der Ausgleichung rekonstruiert werden.

2.2.1 Helmert-Transformation (Traditionell)

Den einfachsten Fall einer ebenen Transformation stellt die traditionelle Helmert-Transformation dar. Ausgangspunkt für diese Transformation sind die Koordinaten (x, y) einer Punktgruppe im Startsystem, die mit einer Ähnlichkeitstransformation auf die Koordinaten im Zielsystem (X, Y) transformiert werden sollen. Die Tatsache, daß die Koordinaten im Start- und Zielsystem aus einer vorausgegangenen Ausgleichung stammen, wird hierbei ignoriert. Vielmehr werden folgende „Vereinfachungen“ eingeführt:

- die Koordinaten im Zielsystem werden als gleichgewichtige und unkorrelierte „Beobachtungen“ angesehen,
- die Koordinaten im Startsystem sind feste Größen („fehlerfreie Beobachtungen“).

Mit den Transformationsparametern

X_0, Y_0 ... Translation des Koordinatenursprungs,
 α ... Rotationswinkel,
 m ... Maßstabsfaktor,

ergibt sich dann die bekannte Transformationsvorschrift

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

und in ausmultiplizierter Form

$$\begin{aligned} X &= (m \cos \alpha) x - (m \sin \alpha) y + X_0 \\ Y &= (m \sin \alpha) x + (m \cos \alpha) y + Y_0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Mit den Substitutionen

$$a = m \cos \alpha \quad \text{und} \quad o = m \sin \alpha \quad (2.64)$$

ergeben sich die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= a x - o y + X_0 \\ Y &= o x + a y + Y_0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Dieses Modell ist jedoch z.B. für den Einsatz in der Kongruenzuntersuchung unzureichend, da bei dieser Aufgabenstellung sowohl die stochastischen Eigenschaften des Zielsystems, als auch die des Startsystems exakt zu berücksichtigen sind. Aus diesem Grund wird auf die Parameterschätzung in diesem Modell an dieser Stelle nicht näher eingegangen.¹⁶ In (KOCH 2000) wird ein Weg aufgezeigt, wie eine Transformation unter Berücksichtigung von Gewichtsmatrizen für Start- und Zielsystem erfolgen kann. Dieser Ansatz wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

¹⁶ Die Schätzung der Parameter ist z.B. in (NIEMEIER 2002) dargestellt.

2.2.2 Helmert-Transformation mit variablen Koordinaten in Start- und Zielsystem

Der im folgenden beschriebene Ansatz ist in (KOCH 2000) zu finden. Dort werden sowohl die Koordinaten im Start- als auch im Zielsystem als „Beobachtungen“ angesehen, denen jeweils eine Gewichtsmatrix zugeordnet ist. Ziel ist, die ebenen Koordinaten (x_i, y_i) der Punkte P_i ($i = 1, \dots, k$) im Startsystem mit Hilfe einer Helmert-Transformation in die ebenen Koordinaten (X, Y) der homologen Punkte P_i ($i = 1, \dots, k$) im Zielsystem zu transformieren.

Um diese Aufgabe im linearen Modell mit einer Beobachtung pro Beobachtungsgleichung zu lösen, werden die Koordinaten des Startsystems plus ihre Fehler als zusätzliche unbekannte Parameter der Helmert-Transformation angesehen, also

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= x_i + v_{xi} \\ \hat{y}_i &= y_i + v_{yi} .\end{aligned}\tag{2.66}$$

Sieht man die Definition (2.66) als zusätzliche Beobachtungsgleichungen an, so erhält man die insgesamt $4k$ Beobachtungsgleichungen für die Helmert-Transformation der Punkte P_1 bis P_k

$$\begin{aligned}X_i + v_{X_i} &= X_0 + \hat{x}_i a - \hat{y}_i o \\ Y_i + v_{Y_i} &= Y_0 + \hat{y}_i a + \hat{x}_i o, \quad (i = 1, \dots, k) \\ x_i + v_{x_i} &= \hat{x}_i \\ y_i + v_{y_i} &= \hat{y}_i, \quad (i = 1, \dots, k) .\end{aligned}\tag{2.67}$$

Dieses nichtlineare Ausgleichsproblem kann durch Linearisierung an der Stelle geeigneter Näherungswerte X_0^0, Y_0^0, a^0, o^0 sowie x_i^0, y_i^0 und iterative Berechnung gelöst werden. Faßt man die unbekannt Parameter zu den Vektoren

$$\mathbf{x}_H = \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta a \\ \Delta o \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_K = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix}\tag{2.68}$$

zusammen, dann lauten die Funktionalmatrizen für die ersten $2k$ Beobachtungsgleichungen

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & x_i^0 & -y_i^0 \\ 0 & 1 & y_i^0 & x_i^0 \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} a^0 & -o^0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ o^0 & a^0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^0 & -o^0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & o^0 & a^0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^0 & -o^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & o^0 & a^0 \end{bmatrix} .\tag{2.69}$$

Die verkürzten Beobachtungsvektoren lauten

$$\Delta \mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots \\ X_i - X_0^0 - x_i^0 a^0 + y_i^0 o^0 \\ Y_i - Y_0^0 - y_i^0 a^0 - x_i^0 o^0 \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots \\ x_i - x_i^0 \\ y_i - y_i^0 \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix} .\tag{2.70}$$

Mit den Gewichtsmatrizen \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 der Koordinaten in Ziel- und Startsystem ergibt sich mit dem Varianzfaktor σ^2 das lineare Modell zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{W} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_H \\ \mathbf{x}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{l}_1 + \mathbf{v}_{y1} \\ \Delta \mathbf{l}_2 + \mathbf{v}_{y2} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad D(\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{l}_1 \\ \Delta \mathbf{l}_2 \end{bmatrix} | \sigma^2) = \sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2^{-1} \end{bmatrix} .\tag{2.71}$$

Mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{W}^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{W}^T \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

erhält man die Schätzwerte für die Unbekannten aus den iterativ zu lösenden Normalgleichungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{X} & \mathbf{X}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{W} \\ \mathbf{W}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{X} & \mathbf{W}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{W} + \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_H \\ \mathbf{x}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{P}_1 \Delta_1 \\ \mathbf{W}^T \mathbf{P}_1 \Delta_1 + \mathbf{P}_2 \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Dieser Transformationsansatz soll nun bezüglich der einzuführenden Gewichtsmatrizen näher untersucht werden.

Da Koordinaten keine originären Meßgrößen sind, sondern immer aus einer Parameterschätzung aufgrund von Beobachtungen in Verbindung mit einer Datumsdefinition (Auswahl einer Nullvarianz-Rechenbasis) entstammen, besitzen sie immer eine vollbesetzte singuläre Kofaktorenmatrix, die bei der Transformation zu berücksichtigen ist. Nur dann entspricht eine Koordinatentransformation dem Konzept der stufenweisen Ausgleichung. Alle Lösungsvorschläge, die für die Kofaktorenmatrix der Koordinaten z.B. eine Diagonalmatrix ansetzen, sind nicht sachgemäß und entsprechen nicht mehr dem ursprünglichen Problem.¹⁷ Wie sich der Lösungsweg von (KOCH 2000) verhält, wenn man zu den Koordinaten die vollbesetzten singulären Kofaktorenmatrizen aus einer freien Netzausgleichung berücksichtigt, soll im folgenden aufgezeigt werden.

Gegeben sind die Koordinaten (x_i, y_i) der Punkte P_i ($i = 1, \dots, k$) im Startsystem und die Koordinaten (X_i, Y_i) der Punkte P_i ($i = 1, \dots, k$) im Zielsystem, die jeweils aus einer freien Netzausgleichung stammen.¹⁸ Des weiteren sind die singulären Kofaktorenmatrizen \mathbf{Q}_1 und \mathbf{Q}_2 der Koordinaten in Ziel- und Startsystem bekannt. Die Singularität dieser Matrizen besagt jedoch, daß sie neben stochastischen auch deterministische Informationen (z.B. aus Bedingungen) enthalten (CASPARY 1983). Zur Weiterverarbeitung der singulären Matrizen ist diese deterministische Information zu extrahieren und in der Modellbildung zu berücksichtigen. Werden die Ergebnisse einer freien Netzausgleichung ohne die Modellierung der deterministischen Information der singulären Kofaktorenmatrizen weiterverwendet, so kann der Lösungsweg von (KOCH 2000) natürlich kein Ergebnis liefern. Dies läßt sich auch auf einfache Weise zeigen.

Für den Transformationsansatz (2.72) werden die Gewichtsmatrizen \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 der Koordinaten im Ziel- und Startsystem benötigt. Diese lassen sich aus den Normalgleichungen \mathbf{N}_1 und \mathbf{N}_2 der vorangegangenen freien Netzausgleichungen gewinnen. Wurde in beiden Ausgleichungen der gleiche Wert für die Varianz der Gewichtseinheit σ_0^2 (i.d.R. $\sigma_0^2 = 1$) gewählt, so können die Matrizen \mathbf{N}_1 und \mathbf{N}_2 direkt als Gewichtsmatrizen \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 verwendet werden. Somit ergibt sich die Submatrix $\mathbf{X}^T \mathbf{P}_1$ in (2.72) zu

$$\mathbf{X}^T \mathbf{P}_1 = \mathbf{X}^T \mathbf{N}_1 \quad (2.74)$$

und in ausführlicher Darstellung

$$\mathbf{X}^T \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ x_1^0 & y_1^0 & x_2^0 & y_2^0 & \dots \\ -y_1^0 & x_1^0 & -y_2^0 & x_2^0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{111} & N_{112} & N_{113} & N_{114} & \dots \\ N_{121} & N_{122} & N_{123} & N_{124} & \dots \\ N_{131} & N_{132} & N_{133} & N_{134} & \dots \\ N_{141} & N_{142} & N_{143} & N_{144} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Betrachtet man die ersten zwei Zeilen der Matrix \mathbf{X}^T so fällt auf, daß diese Zeilen gerade Eigenvektoren zum Eigenwert null der Normalgleichungsmatrix \mathbf{N}_1 sind (siehe Abschnitt 2.1.2.1). Aus diesem Grund ergeben sich in der Ergebnismatrix die ersten beiden Zeilen als Nullzeilen. In der Normalgleichungsmatrix (2.73) wird (2.75) dann mit der Matrix \mathbf{X} (die Eigenvektoren stehen in den ersten zwei Spalten) multipliziert. In der Ergebnismatrix $\mathbf{X}^T \mathbf{N}_1 \mathbf{X}$ ergeben sich somit die ersten beiden Zeilen zu Nullzeilen und die ersten zwei Spalten zu Nullspalten.

¹⁷ Dennoch findet man auch in der aktuellen Literatur z.B. folgende Ausführungen: „Aus praktischen Erwägungen ist es sinnvoll, auch die Abhängigkeit zwischen Punktkoordinaten in demselben Koordinatensystem zu vernachlässigen.“ (LENZMANN 2001), oder „Besitzen die Gewichtsmatrizen \mathbf{P}_2 und \mathbf{P}_3 (Anm.: Gewichtsmatrizen der Koordinaten in Ziel- und Startsystem) [...] Diagonalstruktur, was häufig der Fall sein wird [...]“ (KOCH et al. 2000).

¹⁸ Zur Vereinfachung der Darstellung wird angenommen, daß in beiden Systemen eine identische Punktkonfiguration vorliegt und die freie Netzausgleichung jeweils mit Gesamtspurminimierung durchgeführt wurde.

Ebenfalls aufgrund der Multiplikation mit Eigenvektoren ergeben sich in der Matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{W}$ die ersten zwei Zeilen zu Nullzeilen und in $\mathbf{W}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{X}$ die ersten zwei Spalten zu Nullspalten. Somit ergibt sich die Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} in (2.73) zu

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_{33} & N_{34} & N_{35} & N_{36} & \dots \\ 0 & 0 & N_{43} & N_{44} & N_{45} & N_{46} & \dots \\ \hline 0 & 0 & N_{53} & N_{54} & N_{55} & N_{56} & \dots \\ 0 & 0 & N_{63} & N_{64} & N_{65} & N_{66} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

woraus ersichtlich ist, daß sich in dem Lösungsansatz von (KOCH 2000) bei Einführung der Kofaktorenmatrizen \mathbf{Q}_1 und \mathbf{Q}_2 aus einer freien Netzausgleichung eine singuläre Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} ergibt. Die Nullzeilen bzw. -spalten bedeuten in diesem Fall, daß sich die Translationsparameter nicht bestimmen lassen.

Möglichkeiten, das Problem der Transformation variabler Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix zu lösen, bestehen dennoch. In (WOLF 1979) werden allgemeine Lösungswege aufgezeigt, wie die Parameterschätzung sowohl im Gauß-Helmert-Modell (Ausgleichung bedingter Beobachtungen mit Unbekannten), als auch im Gauß-Markov-Modell (Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen) unter Berücksichtigung singulärer Kofaktorenmatrizen erfolgen kann. Unter Verwendung des in (WOLF 1979) aufgeführten Lösungsweges für die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen ist es dann möglich, das Transformationsproblem mit dem funktionalen Ansatz (2.67) auch unter Verwendung singulärer Kofaktorenmatrizen für die Koordinaten im Start- und Zielsystem zu lösen.

Eine weitere Möglichkeit dieses Transformationsproblem zu lösen besteht darin, die Transformation auf der Grundlage einer Minimalkonfiguration fiktiver Beobachtungen zu formulieren. Dies wird in Abschnitt 2.2.5 gezeigt. Dazu wird in den nächsten beiden Abschnitten zunächst aufgezeigt, wie eine Koordinatentransformation auf der Grundlage von Beobachtungen erfolgen kann.

2.2.3 Helmert-Transformation auf der Grundlage von Beobachtungen

Ausgangspunkt sind die im Ziel- und Startsystem ausgeführten Beobachtungen (z.B. Strecken und Winkel) mit ihren Kovarianzmatrizen \mathbf{S}_1 und \mathbf{S}_2 . Da es sich bei den Beobachtungen um Elementarmessungen handelt, sind die Kovarianzmatrizen i.d.R. Diagonalmatrizen¹⁹ und somit immer regulär und invertierbar (PELZER 1974). Somit stehen (nach einer Wahl des Varianzfaktors σ_0^2) auch die Gewichtsmatrizen \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 zur Verfügung. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden in der weiteren Darstellung reine Streckennetze betrachtet.

Die Grundidee des zu entwickelnden Ausgleichungsansatzes besteht darin, die Netzausgleichung und die Transformation in einer *Ausgleichung in einem Guß* durchzuführen. Als Ergebnis erhält man dann direkt ausgeglichene Koordinaten, die die Forderung der exakten Transformierbarkeit homologer Punkte vom Start- ins Zielsystem erfüllen. Zudem erhält man die ausgeglichenen Transformationsparameter. Folgende Unbekannte werden in die Ausgleichung eingeführt:

- X_i, Y_i ... Koordinaten im Zielsystem,
- x_i, y_i ... Koordinaten im Startsystem,
- X_0, Y_0 ... Translation,
- a, o ... Hilfsunbekannte für Rotation und Maßstabsanpassung.

Die Beobachtungsgleichungen im Zielsystem F_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$), mit $n_1 =$ Anzahl der Beobachtungen, lauten

$$F_k = L_{ij} + v_{L_{ij}} = \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2} \quad (2.77)$$

und analog die Beobachtungsgleichungen im Startsystem f_i ($k = 1, 2, \dots, n_2$), mit $n_2 =$ Anzahl der Beobachtungen,

$$f_k = l_{ij} + v_{l_{ij}} = \sqrt{(\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2 + (\hat{y}_j - \hat{y}_i)^2} \quad (2.78)$$

¹⁹ Dieser Fall ist immer dann gegeben wenn Elementarbeobachtungen verwendet werden, die nicht aus einer Vorausgleichung stammen und somit keine mathematischen Korrelationen aufweisen. Physikalische Korrelationen, z.B. um gleiche meteorologische Verhältnisse während der Messungen zu berücksichtigen, sind schwer abzuschätzen, so daß auf deren Einführung zumeist verzichtet wird.

Um auf Grundlage der Beobachtungen Koordinaten bestimmen zu können, muß sowohl im Start- als auch im Zielsystem eine Datumsdefinition erfolgen (siehe Abschnitt 2.1.1). Dies kann derart erfolgen, daß auf Grundlage der Näherungskordinaten (x_i^0, y_i^0) im Startsystem und der Näherungskordinaten (X_i^0, Y_i^0) im Zielsystem jeweils eine Datumsfestlegung mit Hilfe von Bedingungsgleichungen erfolgt. Für diese Datumsfestlegung sind jedoch nur Punkte zu verwenden, die in beiden Systemen vorhanden sind und deren unveränderte Lage angenommen werden kann.²⁰ Da aber folgende Fälle auftreten können

- nicht identische Netzkonfiguration in Start- und Zielsystem, z.B. infolge von Punktzerstörungen,
- die Lagestabilität einzelner Punkte ist nicht gewährleistet,

wird eine Unterteilung in Datumspunkte P_{Di} ($i = 1, 2, \dots, h$; $h \geq 2$) und Nichtdatumspunkte P_{Ni} ($i = 1, 2, \dots, g$) eingeführt. Die Bedingungen für die Datumsfestlegung, vgl. (2.23) und (2.27), lauten somit für das Zielsystem

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{i=1}^h \Delta \hat{X}_{Di} = 0 \\ B_2 &= \sum_{i=1}^h \Delta \hat{Y}_{Di} = 0 \\ B_3 &= \sum_{i=1}^h X_{Di}^0 \Delta \hat{Y}_{Di} - \sum_{i=1}^h Y_{Di}^0 \Delta \hat{X}_{Di} = 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

und für das Startsystem

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum_{i=1}^h \Delta \hat{x}_{Di} = 0 \\ b_2 &= \sum_{i=1}^h \Delta \hat{y}_{Di} = 0 \\ b_3 &= \sum_{i=1}^h x_{Di}^0 \Delta \hat{y}_{Di} - \sum_{i=1}^h y_{Di}^0 \Delta \hat{x}_{Di} = 0 . \end{aligned} \quad (2.80)$$

Die Forderung, daß sich die Koordinaten des Start- auf die des Zielsystems transformieren lassen, wird ebenfalls durch Bedingungsgleichungen eingeführt. Für die Koordinaten der Datumspunkte P_{Di} ($i = 1, 2, \dots, h$; $h \geq 2$) soll

$$\begin{aligned} \hat{X}_{Di} &= \hat{X}_0 + \hat{x}_{Di} \hat{a} - \hat{y}_{Di} \hat{o} \\ \hat{Y}_{Di} &= \hat{Y}_0 + \hat{y}_{Di} \hat{a} + \hat{x}_{Di} \hat{o} \end{aligned} \quad (2.81)$$

erfüllt sein. Daraus ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} b_{xi} &= -\hat{X}_{Di} + \hat{X}_0 + \hat{x}_{Di} \hat{a} - \hat{y}_{Di} \hat{o} = 0 \\ b_{yi} &= -\hat{Y}_{Di} + \hat{Y}_0 + \hat{y}_{Di} \hat{a} + \hat{x}_{Di} \hat{o} = 0 . \end{aligned} \quad (2.82)$$

Entscheidet man sich dafür, das Ausgleichungsproblem durch Linearisierung an der Stelle geeigneter Näherungswerte \mathbf{x}^0 und Iteration zu lösen und faßt man die unbekannt Parameter im Vektor

$$\mathbf{x} = \left[\Delta X_{D1} \quad \Delta Y_{D1} \quad \cdots \quad \Delta X_{Dh} \quad \Delta Y_{Dh} \mid \Delta X_{N1} \quad \Delta Y_{N1} \quad \cdots \quad \Delta X_{Ng} \quad \Delta Y_{Ng} \mid \Delta x_{D1} \quad \Delta y_{D1} \quad \cdots \quad \Delta x_{Dh} \quad \Delta y_{Dh} \mid \Delta x_{N1} \quad \Delta y_{N1} \quad \cdots \quad \Delta x_{Ng} \quad \Delta y_{Ng} \mid \Delta X_0 \quad \Delta Y_0 \quad \Delta a \quad \Delta o \right]^T \quad (2.83)$$

zusammen, erhält man durch Bildung der partiellen Ableitungen der Beobachtungsgleichungen im Zielsystem (2.77) die Funktionalmatrix \mathbf{A}_1 . Durch Linearisierung der Beobachtungsgleichungen im Startsystem (2.78) erhält man die Funktionalmatrix \mathbf{A}_2 , die Linearisierung der Bedingungsgleichungen (2.79) und (2.80) liefert die Matrix \mathbf{B}_{D1} für die Datumsfestlegung des Zielsystems und die Matrix \mathbf{B}_{D2} für das Startsystem. Als letztes folgt die Linearisierung der Bedingungsgleichungen für die Transformierbarkeit (2.82), wodurch man die Matrix \mathbf{B}_T erhält. Eine ausführliche Darstellung aller Matrizen ist in (Anhang A.1) aufgeführt. Der verkürzte Beobachtungsvektor $\Delta \mathbf{l}$ und der Widerspruchsvektor \mathbf{w} lauten

²⁰ Bei Transformationen, die nicht die Untersuchung der Kongruenz zum Ziel haben, ist auch jede andere Datumsfestlegung möglich.

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \vdots \\ L_{ij} - \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2} \\ \vdots \\ \vdots \\ L_{ij} - \sqrt{(x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 - (-X_i^0 + X_0^0 + x_i^0 a^0 - y_i^0 o^0) \\ 0 - (-Y_i^0 + Y_0^0 + y_i^0 a^0 + x_i^0 o^0) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{D1} \\ \mathbf{B}_{D2} \\ \mathbf{B}_T \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

und

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (2.86)$$

erhält man die Schätzwerte für die Unbekannten aus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Dieser Lösungsweg entspricht einer Ausgleichung „in einem Guß“ auf der Grundlage der tatsächlich durchgeführten Beobachtungen. Als Ergebnis erhält man die ausgeglichenen Koordinaten im Start- und Zielsystem und die ausgeglichenen Transformationsparameter.²¹ Unter Verwendung dieser Transformationsparameter ist eine exakte Transformation der Koordinaten homologer Punkte vom Start- ins Zielsystem möglich. Unter Anwendung des Kovarianzfortpflanzungsgesetzes erhält man weiterhin die Kofaktorenmatrix der Unbekannten (Koordinaten in Start- und Zielsystem, Translation, Rotation, Maßstab).

2.2.4 Implizite Formulierung der Transformierbarkeit

Eine Möglichkeit, den zuvor beschriebenen Ansatz zu vereinfachen besteht darin, die Forderung nach exakter Transformierbarkeit der Datumspunkte nicht über die Bedingungsgleichungen (2.82) einzuführen, sondern diese implizit zu berücksichtigen. Dies erfolgt derart, daß man lediglich einen Koordinatensatz, nämlich die Koordinaten (X, Y) des Zielsystems, als Unbekannte ansetzt. Die Koordinaten des Startsystems und die Transformationsparameter werden in diesem Ansatz nicht mehr als Unbekannte eingeführt. Der reduzierte Parametersatz lautet somit

X_i, Y_i ... Koordinaten im Zielsystem,
 m ... Maßstabsfaktor zwischen Start- und Zielsystem.

Diese Vorgehensweise entspricht der Grundidee der „impliziten Hypothesenformulierung“ (ANTONOPOULOS und NIEMEIER 1983, NIEMEIER 2002).

Unter Verwendung des gemeinsamen Koordinatensatzes lauten die Beobachtungsgleichungen F_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$) im Zielsystem²²

$$F_k = L_{ij} + v_{L_{ij}} = \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2}, \quad (2.88)$$

die Beobachtungsgleichungen im Startsystem f_k ($k = 1, 2, \dots, n_2$) ergeben sich zu

$$f_k = l_{ij} + v_{l_{ij}} = \frac{1}{m} \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2}. \quad (2.89)$$

²¹ Die interpretierbaren Transformationsparameter Maßstab m und Rotation α können aus den Hilfsgrößen a und o berechnet werden.

²² Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier wieder ein reines Streckennetz betrachtet.

Um auf Basis der Beobachtungen Koordinaten bestimmen zu können, muß für das Zielsystem eine Festlegung des geodätischen Datums getroffen werden. Dies kann, wie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben, mit Hilfe von Bedingungsgleichungen erfolgen. Dazu wird wieder die bereits beschriebene Unterteilung der Punkte in Datumspunkte P_{D_i} ($i = 1, 2, \dots, h$; $h \geq 2$) und Nichtdatumspunkte P_{N_i} ($i = 1, 2, \dots, g$) vorgenommen, so daß sich die Bedingungsgleichungen wie in (2.79) dargestellt ergeben.

Da nur ein gemeinsamer Koordinatenvektor angesetzt wird, muß berücksichtigt werden, daß die Nichtdatumspunkte P_{N_i} sowohl aus der Datumsdefinition als auch aus der impliziten Formulierung der Transformierbarkeit ausgeschlossen werden. Dies geschieht dadurch, daß für diese Punkte ein zweiter Koordinatensatz als Unbekannte eingeführt wird. Somit erhalten diese Punkte zwei Punktnummern für die Koordinaten im Zielsystem.

Entscheidet man sich wieder dafür, das Ausgleichungsproblem durch Linearisierung an der Stelle geeigneter Näherungswerte \mathbf{x}^0 und Iteration zu lösen und faßt die Unbekannten im Vektor

$$\mathbf{x} = \left[\Delta X_{D1} \quad \Delta Y_{D1} \quad \dots \quad \Delta X_{Dh} \quad \Delta Y_{Dh} \quad \mid \quad \Delta X_{N1} \quad \Delta Y_{N1} \quad \dots \quad \Delta X_{Ng} \quad \Delta Y_{Ng} \quad \mid \quad \Delta m \right]^T \quad (2.90)$$

zusammen, ergibt sich die Funktionalmatrix \mathbf{A} der im Ziel- und Startsystem durchgeführten Beobachtungen zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{Dh}} & \mid & \frac{\partial F_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{Ng}} & \mid & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{Dh}} & \mid & \frac{\partial F_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{Ng}} & \mid & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \mid & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \mid & \vdots \\ \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{Dh}} & \mid & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{Ng}} & \mid & 0 \\ \hline \frac{\partial f_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{Dh}} & \mid & \frac{\partial f_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{Ng}} & \mid & \frac{\partial f_1}{\partial m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{Dh}} & \mid & \frac{\partial f_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{Ng}} & \mid & \frac{\partial f_2}{\partial m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \mid & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \mid & \vdots \\ \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{Dh}} & \mid & \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{Ng}} & \mid & \frac{\partial f_{n2}}{\partial m} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Die Bedingungen \mathbf{B} für die Datumsfestlegung des Zielsystems lauten

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{Dh}} & \mid & \frac{\partial B_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{Ng}} & \mid & \frac{\partial B_1}{\partial m} \\ \frac{\partial B_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{Dh}} & \mid & \frac{\partial B_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{Ng}} & \mid & \frac{\partial B_2}{\partial m} \\ \frac{\partial B_3}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_3}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_3}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial B_3}{\partial Y_{Dh}} & \mid & \frac{\partial B_3}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_3}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_3}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial B_3}{\partial Y_{Ng}} & \mid & \frac{\partial B_3}{\partial m} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & \mid & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & \mid & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mid & 0 \\ -Y_{D1} & X_{D1} & \dots & -Y_{Dh} & X_{Dh} & \mid & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix}.$$

Der verkürzte Beobachtungsvektor $\Delta \mathbf{l}$ und der Widerspruchsvektor \mathbf{w} ergeben sich zu

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \vdots \\ L_{ij} - \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2} \\ \vdots \\ l_{ij} - \frac{1}{m^0} \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.93)$$

Mit der Gewichtsmatrix der Beobachtungen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

und der Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (2.95)$$

erhält man die Schätzwerte für die Unbekannten aus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} . \quad (2.96)$$

Wie der Lösungsweg in Abschnitt 2.2.3, so entspricht auch diese Transformation dem Konzept der „Ausgleichung in einem Guß“ auf Grundlage der originären Beobachtungen. Als Ergebnis erhält man direkt die ausgeglichenen Koordinaten im Zielsystem. Für Punkte, die nicht in die implizite Formulierung der Transformierbarkeit einbezogen wurden, erhält man, aufgrund der Vergabe unterschiedlicher Punktnummern, zwei Koordinatensätze, wobei einer die ausgeglichenen Koordinaten im Zielsystem und der andere die vom Start- ins Zielsystem transformierten Koordinaten beinhaltet.

Möchte man zudem die ausgeglichenen Koordinaten im Startsystem (\hat{x}_i, \hat{y}_i) , sowie die Transformationsparameter Translation \hat{X}_0, \hat{Y}_0 und Rotation $\hat{\alpha}$ bestimmen, so können diese auf folgende Weise rekonstruiert werden.

Ausgehend von den ausgeglichenen Koordinaten (\hat{X}_i, \hat{Y}_i) und dem Maßstabsfaktor \hat{m} wird eine Minimalkonfiguration schätzbarer Größen (z.B. Strecken mit (2.89)) berechnet, die die Geometrie des Netzes im Startsystem gerade eindeutig beschreibt. Die zugehörige reguläre Kofaktorenmatrix erhält man unter Anwendung des Kovarianzfortpflanzungsgesetzes. Mit diesen fiktiven Beobachtungen lassen sich die Koordinaten im Startsystem derart berechnen, daß das Netz im Startsystem die *gleiche Form* wie das im Zielsystem erhält. Obwohl dieses Problem eindeutig lösbar ist (es ist keine Überbestimmung vorhanden), bietet sich die Berechnung der Koordinaten (\hat{x}_i, \hat{y}_i) mit Hilfe einer freien Netzausgleichung an, wobei sich dann alle Verbesserungen zu null ergeben.

Die Transformationsparameter lassen sich dann unter Verwendung beliebiger homologer Punkte rekonstruieren. Der Rotationswinkel $\hat{\alpha}$ ergibt sich aus der Differenz zweier Richtungswinkel zu

$$\hat{\alpha} = \arctan \left(\frac{\hat{Y}_j - \hat{Y}_i}{\hat{X}_j - \hat{X}_i} \right) - \arctan \left(\frac{\hat{y}_j - \hat{y}_i}{\hat{x}_j - \hat{x}_i} \right) . \quad (2.97)$$

Stellt man (2.63) um, erhält man die Translationsparameter aus

$$\begin{aligned} \hat{X}_0 &= \hat{X}_i - (\hat{m} \cos \hat{\alpha}) \hat{x}_i + (\hat{m} \sin \hat{\alpha}) \hat{y}_i \\ \hat{Y}_0 &= \hat{Y}_i - (\hat{m} \sin \hat{\alpha}) \hat{x}_i - (\hat{m} \cos \hat{\alpha}) \hat{y}_i . \end{aligned} \quad (2.98)$$

Ein numerisches Beispiel zu dieser Vorgehensweise ist in Abschnitt 2.2.6.2 aufgeführt. Um eine Fehlerschätzung für die Transformationsparameter zu erhalten, kann man diese zusammen mit den ausgeglichenen Koordinaten des Start- und Zielsystems in die in Abschnitt 2.2.3 beschriebene Ausgleichung einsetzen. Bemerkenswert ist, daß man in diesem Fall direkt die Lösung für die Unbekannten einsetzt, so daß das Problem der Beschaffung von Näherungswerten und die Probleme mit der Linearisierung in diesem Schritt entfallen. Die Bedeutung dieser Vorgehensweise wird insbesondere bei der dreidimensionalen Helmert-Transformation in Abschnitt 2.3 deutlich.

2.2.5 Transformation von Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix

Die Motivation für eine Auseinandersetzung mit dieser Problematik besteht darin, daß die Koordinaten in Start- und Zielsystem oftmals zunächst durch eine freie Netzausgleichung bestimmt werden, so daß sie jeweils eine singuläre Kofaktorenmatrix aufweisen. In einer weiteren Ausgleichung soll danach die Transformation der Koordinaten vom Start- ins Zielsystem unter Berücksichtigung ihrer stochastischen Eigenschaften erfolgen. Diese Vorgehensweise entspricht dem Konzept der *stufenweisen Ausgleichung*, die das gleiche Ergebnis liefert wie die in Abschnitt 2.2.3 und 2.2.4 dargestellten Lösungswege. In (LINKWITZ 1960) ist dazu folgender Satz zu finden:

„Jedes Ausgleichungsproblem kann in eine beliebige Reihe von Teilschritten aufgespalten werden, vorausgesetzt, daß in jedem Folgeschritt die Kofaktoren des vorhergehenden Schrittes berücksichtigt werden.“

Wie jedoch bereits in Abschnitt 2.2.2 gezeigt wurde, ist eine Transformation von Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix nicht ohne weiteres möglich, da diese neben stochastischen auch deterministische Informationen enthalten. Erst wenn man diese deterministischen Informationen extrahiert und in die Modellbildung einfließen lässt, ist die Transformation möglich. Für die Weiterverarbeitung singulärer Kofaktorenmatrizen werden in (CASPARY 1983) folgende Vorgehensweisen angegeben:

- Trennung des deterministischen Anteils durch eine lineare Transformation und Berücksichtigung aller deterministischen Beziehungen im funktionalen Modell. Die das stochastische Modell darstellende Kofaktorenmatrix ist dann positiv definit. Die Berücksichtigung des deterministischen Anteils führt zu einer vermittelnden Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen.
- Lösung der Parameterschätzung mit Hilfe von verallgemeinerten Inversen, wobei aber eine sorgfältige Analyse der durch das Modell belegten Vektorräume nötig ist, denn davon hängt ab, welche g -Inverse als Gewichtsmatrix zulässig ist.

Ein Lösungsansatz für die Transformation von Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix unter Verwendung von verallgemeinerten Inversen ist in (BÄHR 1982) aufgeführt. In (NKUITE 1998) wird aufgezeigt, wie man durch eine Analyse der durch das Modell belegten Vektorräume zu einer Lösung für die Parameterschätzung im linearen Modell mit singulärer Varianzkovarianzmatrix gelangen kann. Im folgenden soll nun ein wesentlich anschaulicherer Lösungsansatz entwickelt werden, in dem die singulären Kofaktorenmatrizen wie folgt verarbeitet werden:

- Trennung der stochastischen Information durch die Verwendung einer Minimalkonfiguration schätzbarer Größen.
- Explizite Berücksichtigung eines zusätzlichen deterministischen Anteils durch die Einführung von Bedingungsgleichungen.

Als Eingangsgrößen für die Transformation stehen aus den vorangegangenen freien Netzausgleichungen folgende Werte zur Verfügung:

- \mathbf{x}_1 ... Koordinatenvektor im Zielsystem
- $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1}$... singuläre Kofaktorenmatrix der Koordinaten im Zielsystem
- σ_{01} ... theoretische Standardabweichung der Gewichtseinheit (vor der Ausgleichung)
- s_{01} ... empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit (nach der Ausgleichung)
- f_1 ... Freiheitsgrad der Netzausgleichung im Zielsystem

und

- \mathbf{x}_2 ... Koordinatenvektor im Startsystem
- $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2}$... singuläre Kofaktorenmatrix der Koordinaten im Startsystem
- σ_{02} ... theoretische Standardabweichung der Gewichtseinheit (vor der Ausgleichung)
- s_{02} ... empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit (nach der Ausgleichung)
- f_2 ... Freiheitsgrad der Netzausgleichung im Startsystem

Aus den Koordinaten wird nun für das Start- und Zielsystem jeweils eine Minimalkonfiguration schätzbarer Größen berechnet, die die Geometrie des Netzes gerade eindeutig beschreibt. In einem maßstabsbestimmten Lagenetz mit p Punkten weist die Kofaktorenmatrix der Koordinaten den Rangdefekt $d = 3$ auf, d.h. die Geometrie dieser Punktgruppe lässt sich durch $n = 2p - d$ schätzbare Größen gerade eindeutig beschreiben. Berechnet man nun für das Zielsystem mit p_1 Punkten eine Minimalkonfiguration von n_1 schätzbaren Größen samt zugehöriger Kofaktorenmatrix

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{F}_1 \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{I}_1\mathbf{I}_1} = \mathbf{F}_1 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1} \mathbf{F}_1^T \quad (2.99)$$

$$\begin{matrix} (n_1 \times 1) & (n_1 \times 2 p_1) & (2 p_1 \times 1) & & (n_1 \times n_1) & (n_1 \times 2 p_1) & (2 p_1 \times 2 p_1) & (2 p_1 \times n_1) \end{matrix}$$

und analog für das Startsystem

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{F}_2 \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{I}_2\mathbf{I}_2} = \mathbf{F}_2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2} \mathbf{F}_2^T, \quad (2.100)$$

$$\begin{matrix} (n_2 \times 1) & (n_2 \times 2 p_2) & (2 p_2 \times 1) & & (n_2 \times n_2) & (n_2 \times 2 p_2) & (2 p_2 \times 2 p_2) & (2 p_2 \times n_2) \end{matrix}$$

so ist die Geometrie der Punktgruppen in Start- und Zielsystem eindeutig beschrieben. Bei der Auswahl der datumsinvarianten Größen in \mathbf{I}_1 und \mathbf{I}_2 ist unerheblich, ob diese Beobachtungen tatsächlich ausgeführt worden sind. Am einfachsten gelingt diese Beschreibung der Geometrie mit Hilfe von Strecken. Diese Festlegung einer Minimalkonfiguration lässt sich zudem sehr leicht automatisieren. Es wird eine (beliebige) Basislinie festgelegt, von deren Endpunkten jeweils die Strecken zu den übrigen Netzpunkten berechnet werden (siehe auch Abbildung 2.4). Für die weitere Verwendung dieser fiktiven Beobachtungen müssen noch deren Gewichtsmatrizen bereitge-

stellt werden. Da die Kofaktorenmatrizen jeweils eine Minimalkonfiguration beschreiben, sind sie regulär und somit invertierbar (vgl. WELSCH 1983a). Somit ergeben sich die (vollbesetzten) Gewichtsmatrizen zu

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_{1,1}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_{1,2}^{-1} . \tag{2.101}$$

Durch die Verwendung einer Minimalkonfiguration schätzbarer Größen ist es somit gelungen, die stochastische Information der singulären Kofaktorenmatrizen $\mathbf{Q}_{x_1 x_1}$ und $\mathbf{Q}_{x_2 x_2}$ zu extrahieren. Nun kann man mit \mathbf{I}_1 , \mathbf{P}_1 und \mathbf{I}_2 , \mathbf{P}_2 die Transformation gemäß Abschnitt 2.2.3 oder 2.2.4 durchführen. Die Berücksichtigung des erforderlichen deterministischen Anteils erfolgt dann innerhalb des Transformationsansatzes über die Bedingungsgleichungen für die Datumsfestlegung (2.79) und (2.80), bzw. nur mit (2.79). Als Näherungskoodinaten für diese Ausgleichung können die vorliegenden Koordinaten x_1 , x_2 verwendet werden, unter der Voraussetzung, daß sich die Datumsfestlegung in den freien Netzausgleichungen auf die homologen Punkte bezieht. Ist dieser Fall nicht gegeben, so sind als Startwerte für die Ausgleichung die ursprünglichen Näherungskoodinaten der freien Netzausgleichungen zu verwenden. Die Unbekannten ergeben sich, je nach gewähltem Transformationsansatz, wie in Abschnitt 2.2.3 bzw. 2.2.4 beschrieben. Die Fehlerschätzung aus einer stufenweisen Ausgleichung wird anhand eines numerischen Beispiels in Abschnitt 2.2.6.3 aufgezeigt.

2.2.6 Numerische Beispiele

Um die Anwendung der in den vorangegangenen Abschnitten entwickelten Transformationsansätze zu veranschaulichen, folgen nun einige numerische Beispiele.

2.2.6.1 Helmert-Transformation auf der Grundlage von Beobachtungen

Für das in Abbildung 2.3 dargestellte Streckennetz liegen die in Tabelle 2.1 aufgeführten Näherungskoodinaten (x^0, y^0) im Start- und (X^0, Y^0) im Zielsystem vor.

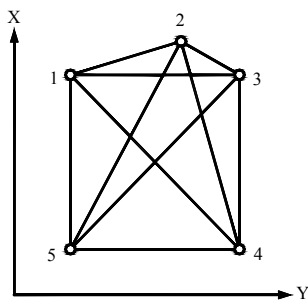


Abbildung 2.3: Streckennetz

Tabelle 2.1: Näherungskoodinaten

Pkt. Nr.	Y^0 [m]	X^0 [m]	y^0 [m]	x^0 [m]
1	100.000	400.000	101.674	403.011
2	300.000	500.000	303.342	499.966
3	400.000	400.000	401.667	398.299
4	400.000	100.000	396.955	98.306
5	100.000	100.000	96.962	103.018

Die Beobachtungen s_{ij} sind in Tabelle 2.2 aufgeführt, als empirische Standardabweichung wird für die Streckenmessungen in Start- und Zielsystem jeweils $s_s = 1$ cm angenommen.

Tabelle 2.2: Streckenmessungen in Ziel- und Startsystem

	$s_{1,2}$ [m]	$s_{1,3}$ [m]	$s_{1,4}$ [m]	$s_{1,5}$ [m]	$s_{2,3}$ [m]	$s_{2,4}$ [m]	$s_{2,5}$ [m]	$s_{3,4}$ [m]	$s_{3,5}$ [m]	$s_{4,5}$ [m]
Zielsystem	223.598	299.990	424.255	300.011	141.422	412.309	447.220	299.988	424.255	300.007
Startsystem	223.761	300.035	424.319	300.025	141.433	412.430	447.409	300.036	424.317	300.023

Wählt man $\sigma_0 = 1$, so ergeben sich die Gewichtsmatrizen der Beobachtungen zu

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s_s)^2} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \frac{1}{(s_s)^2} \end{bmatrix} .$$

Um zu zeigen, wie sich Vorinformationen über verschobene Punkte im Ausgleichungsansatz berücksichtigen lassen, wurde dem Punkt 2 in diesem Beispiel eine Verschiebung im Startsystem aufgeprägt. Dieser Punkt ist somit aus der Datumsdefinition und der Bestimmung der Transformationsparameter auszuschließen. Bei der Lösung des Ausgleichungsproblems durch Linearisierung und Iteration ergeben sich die Funktionalmatrizen \mathbf{A}_1

und \mathbf{A}_2 wie in (Anhang A.1) dargestellt. Als Näherungswerte für die Linearisierung werden die Koordinaten in Tabelle 2.1 verwendet, für die Transformationsparameter wird $X_0^0 = 0$, $Y_0^0 = 0$, $a^0 = 1$ und $o^0 = 0$ gesetzt.

Bei der Aufstellung der Matrizen für die Bedingungen (siehe Anhang A.1) ist zu beachten, daß der Punkt 2 nicht an der Datumsdefinition in \mathbf{B}_{D1} und \mathbf{B}_{D2} teilnimmt und daß die Bedingungen für die Transformierbarkeit in \mathbf{B}_T nur für die Punkte 1, 3, 4 und 5 aufgestellt werden. Des weiteren werden für die Ausgleichung der verkürzte Beobachtungsvektor $\Delta \mathbf{l}$ und der Widerspruchsvektor \mathbf{w}

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} S_{1,2} - \sqrt{(X_2^0 - X_1^0)^2 + (Y_2^0 - Y_1^0)^2} \\ S_{1,3} - \sqrt{(X_3^0 - X_1^0)^2 + (Y_3^0 - Y_1^0)^2} \\ \vdots \\ S_{4,5} - \sqrt{(X_5^0 - X_4^0)^2 + (Y_5^0 - Y_4^0)^2} \\ \hline s_{1,2} - \sqrt{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2} \\ s_{1,3} - \sqrt{(x_3^0 - x_1^0)^2 + (y_3^0 - y_1^0)^2} \\ \vdots \\ s_{4,5} - \sqrt{(x_5^0 - x_4^0)^2 + (y_5^0 - y_4^0)^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 - (-X_1^0 + X_0^0 + x_1^0 a^0 - y_1^0 o^0) \\ 0 - (-Y_1^0 + Y_0^0 + y_1^0 a^0 + x_1^0 o^0) \\ 0 - (-X_3^0 + X_0^0 + x_3^0 a^0 - y_3^0 o^0) \\ 0 - (-Y_3^0 + Y_0^0 + y_3^0 a^0 + x_3^0 o^0) \\ \vdots \\ 0 - (-X_5^0 + X_0^0 + x_5^0 a^0 - y_5^0 o^0) \\ 0 - (-Y_5^0 + Y_0^0 + y_5^0 a^0 + x_5^0 o^0) \end{bmatrix}$$

benötigt. Aus (2.87) erhält man dann nach einigen Iterationen die in Tabelle 2.3 aufgeführte Lösung für die Koordinaten.

Tabelle 2.3: Ausgeglichene Koordinaten in Ziel- und Startsystem mit ihren empirischen Standardabweichungen

Pkt. Nr.	\hat{Y} [m]	\hat{X} [m]	$s_{\hat{y}}$ [cm]	$s_{\hat{x}}$ [cm]	\hat{y} [m]	\hat{x} [m]	$s_{\hat{y}}$ [cm]	$s_{\hat{x}}$ [cm]
1	100.005	400.001	0.3	0.4	101.675	403.016	0.3	0.4
2	299.998	500.002	0.7	0.6	303.345	499.971	0.7	0.6
3	399.996	399.997	0.3	0.3	401.667	398.300	0.3	0.3
4	399.998	100.003	0.4	0.3	396.957	98.305	0.4	0.3
5	100.001	99.998	0.3	0.3	96.959	103.013	0.3	0.3

Die ausgeglichenen Transformationsparameter lauten $\hat{X}_0 = -4.5117$ m, $\hat{Y}_0 = 4.6843$ m, $\hat{a} = 0.99975087$ und $\hat{o} = -0.01570534$. Aus \hat{a} und \hat{o} lassen sich mit

$$\hat{m} = \sqrt{\hat{a}^2 + \hat{o}^2} = 0.99987422 \text{ (-125.8 ppm)}, \quad \hat{\alpha} = \arctan\left(\frac{\hat{o}}{\hat{a}}\right) = -1.000000 \text{ gon}$$

die Transformationsparameter Maßstab und Rotation berechnen. Transformiert man mit diesen Parametern die ausgeglichenen Koordinaten des Startsystems, so erhält man die in Tabelle 2.4 aufgeführten Koordinaten.

Tabelle 2.4: Transformierte Koordinaten des Startsystems

Pkt. Nr.	\hat{y}_T [m]	\hat{x}_T [m]
1	100.005	400.001
2	300.102	500.099
3	399.996	399.997
4	399.998	100.003
5	100.001	99.998

Vergleicht man diese Koordinaten mit denen des Zielsystems in Tabelle 2.3, so ist festzustellen, daß die Forderung nach exakter Transformierbarkeit für die Punkte 1, 3, 4 und 5 erfüllt ist.

Aus den Verbesserungen der Beobachtungen ergibt sich $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 8.2192$. Mit 20 Beobachtungen, 24 Unbekannten und 14 Bedingungen ergibt sich eine Redundanz von 10 und somit eine empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit von $s_0 = 0.9066$.

Die Kofaktoren für die Fehlerschätzung der Translationsparameter können direkt aus der Matrix \mathbf{Q}_{xx} entnommen werden und lauten $q_{X_0} = 1.7719E-05$, $q_{Y_0} = 1.6462E-05$. Die Kofaktoren für Rotation und Maßstab erhält man unter Verwendung des oben dargestellten funktionalen Zusammenhangs über das Kovarianzfortpflanzungsgesetz zu $q_\alpha = 1.1987E-25$ und $q_m = 2.7348E-10$. Durch Multiplikation mit dem empirischen Varianzfaktor s_0^2 erhält man die Varianzen der Transformationsparameter und durch Radizieren die in Tabelle 2.5 aufgeführten empirischen Standardabweichungen.

Tabelle 2.5: Transformationsparameter und ihre empirischen Standardabweichungen

Parameter	Wert	empirische Standardabweichung
\hat{X}_0	-4.5117 m	0.38 cm
\hat{Y}_0	4.6843 m	0.37 cm
$\hat{\alpha}$	-1.000000 gon	0.0 mgon
\hat{m}	0.99987422 (-125.8 ppm)	1.50E-05 (15.0 ppm)

Ebenso erhält man die empirischen Standardabweichungen der Koordinaten, die bereits in Tabelle 2.3 aufgeführt sind.

2.2.6.2 Implizite Formulierung der Transformierbarkeit

Als Beispiel dient das gleiche Netz wie in Abschnitt 2.2.6.1. Der Umstand, daß der Punkt 2 nicht als homologer Punkt verwendet werden soll, wird bei der impliziten Formulierung der Transformierbarkeit dadurch berücksichtigt, daß er im Startsystem zwei Koordinatensätze mit unterschiedlicher Punktnummer zugewiesen bekommt. Zum einen wird der Punkt im Zielsystem mit der Nummer 2 bezeichnet, zum anderen bekommt er die Nummer 200 zugewiesen. Alle anderen Punkte erhalten jeweils nur einen Koordinatensatz als Unbekannte, nämlich die Koordinaten im Zielsystem, wodurch die implizite Formulierung der exakten Transformierbarkeit vom Start- ins Zielsystem erfolgt. Die Näherungskordinaten sind in Tabelle 2.6 aufgeführt.

Tabelle 2.6: Näherungskordinaten

Pkt. Nr.	Y^0 [m]	X^0 [m]
1	100.000	400.000
2	300.000	500.000
3	400.000	400.000
4	400.000	100.000
5	100.000	100.000
200	300.000	500.000

Die in Tabelle 2.7 aufgeführten Beobachtungen sind gleich denen des vorangegangenen Beispiels, es ist lediglich der zusätzliche Punkt 200 berücksichtigt worden, auf den sich die Messungen im Startsystem nun beziehen. Als empirische Standardabweichung der Streckenmessungen wird wieder jeweils $s_s = 1$ cm angenommen. Mit $\sigma_0 = 1$ ergeben sich die Gewichtsmatrizen wieder wie in Abschnitt 2.2.6.1 dargestellt.

Tabelle 2.7: Streckenmessungen in Ziel- und Startsystem

	$s_{1,2}$ [m]	$s_{1,3}$ [m]	$s_{1,4}$ [m]	$s_{1,5}$ [m]	$s_{2,3}$ [m]	$s_{2,4}$ [m]	$s_{2,5}$ [m]	$s_{3,4}$ [m]	$s_{3,5}$ [m]	$s_{4,5}$ [m]
Zielsystem	223.598	299.990	424.255	300.011	141.422	412.309	447.220	299.988	424.255	300.007
Startsystem	$s_{1,200}$ [m]	$s_{1,3}$ [m]	$s_{1,4}$ [m]	$s_{1,5}$ [m]	$s_{200,3}$ [m]	$s_{200,4}$ [m]	$s_{200,5}$ [m]	$s_{3,4}$ [m]	$s_{3,5}$ [m]	$s_{4,5}$ [m]
	223.761	300.035	424.319	300.025	141.433	412.430	447.409	300.036	424.317	300.023

Der Ausschluß von Punkt 2 aus der impliziten Formulierung der Transformierbarkeit erfolgt durch die Verwendung eines zweiten Koordinatensatzes im Zielsystem für diesen Punkt. Daß dieser Punkt nicht an der Datumsdefinition teilnimmt, ist in den Bedingungen der Matrix \mathbf{B} (2.92) zu berücksichtigen.

Bei der Lösung des Ausgleichsproblems durch Linearisierung und Iteration ergibt sich die Funktionalmatrix \mathbf{A} wie in (2.91) aufgezeigt. Als Näherungswerte für die Linearisierung werden die Koordinaten in Tabelle 2.6 verwendet, für den Maßstab wird $m^0 = 1$ gesetzt. Des weiteren werden für die Ausgleichung der verkürzte Beobachtungsvektor $\Delta \mathbf{l}$ und der Widerspruchsvektor \mathbf{w}

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} S_{1,2} - \sqrt{(X_2^0 - X_1^0)^2 + (Y_2^0 - Y_1^0)^2} \\ S_{1,3} - \sqrt{(X_3^0 - X_1^0)^2 + (Y_3^0 - Y_1^0)^2} \\ \vdots \\ S_{4,5} - \sqrt{(X_5^0 - X_4^0)^2 + (Y_5^0 - Y_4^0)^2} \\ \hline s_{1,200} - \frac{1}{m^0} \sqrt{(X_{200}^0 - X_1^0)^2 + (Y_{200}^0 - Y_1^0)^2} \\ s_{1,3} - \frac{1}{m^0} \sqrt{(X_3^0 - X_1^0)^2 + (Y_3^0 - Y_1^0)^2} \\ \vdots \\ s_{4,5} - \frac{1}{m^0} \sqrt{(X_5^0 - X_4^0)^2 + (Y_5^0 - Y_4^0)^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

benötigt. Aus (2.96) erhält man dann nach einigen Iterationen für die Koordinaten die in Tabelle 2.8 aufgeführte Lösung.

Tabelle 2.8: Ausgegliche Koordinaten im Zielsystem mit ihren empirischen Standardabweichungen

Pkt. Nr.	\hat{Y} [m]	\hat{X} [m]	$s_{\hat{Y}}$ [cm]	$s_{\hat{X}}$ [cm]
1	100.005	400.001	0.3	0.4
2	299.998	500.002	0.7	0.6
3	399.996	399.997	0.3	0.3
4	399.998	100.003	0.4	0.3
5	100.001	99.998	0.3	0.3
200	300.102	500.099	0.7	0.8

Der Maßstab ergibt sich zu $\hat{m} = 0.99987422$ (-125.8 ppm). Da sich die Verbesserungen der Beobachtungen gleich zu dem Lösungsweg in Abschnitt 2.2.6.1 ergeben, erhält man wieder $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 8.2192$. Mit 20 Beobachtungen, 13 Unbekannten und 3 Bedingungen beträgt die Redundanz 10, so daß sich die empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit wieder zu $s_0 = 0.9066$ ergibt.

Der Kofaktor für die Fehlerschätzung für den Maßstab kann direkt aus der Matrix \mathbf{Q}_{xx} entnommen werden und lautet $q_m = 2.7348\text{E-}10$. Unter Verwendung von s_0 ergibt sich somit eine empirische Standardabweichung von $s_m = 1.50\text{E-}05$ (15.0 ppm). Die empirischen Standardabweichungen der Koordinaten sind bereits in Tabelle 2.8 aufgeführt. Mit diesem Ansatz erhält man für alle Punkte direkt die ausgeglichenen Koordinaten im Zielsystem (vgl. Tabelle 2.3), die Koordinaten des Punktes 200 sind diejenigen, die sich nach der Transformation des Punktes 2 vom Start- ins Zielsystem ergeben (vgl. Tabelle 2.4).

Nun soll aufgezeigt werden, wie sich die Transformationsparameter \hat{X}_0, \hat{Y}_0 und $\hat{\alpha}$, sowie die ausgeglichenen Koordinaten im Startsystem (\hat{x}_i, \hat{y}_i) rekonstruieren lassen. Unter Verwendung der ausgeglichenen Koordinaten im Zielsystem (\hat{X}_i, \hat{Y}_i) und des Maßstabs \hat{m} wird nun mit (2.89) eine (beliebige) Minimalkonfiguration schätzbarer Größen \mathbf{l}_2 (Tabelle 2.9) und mit (2.100) die zugehörige Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{l}_2}$ berechnet. Diese Matrix ist regulär, so daß sich die erforderliche Gewichtsmatrix zu $\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}_2}^{-1}$ ergibt.

Tabelle 2.9: Minimalkonfiguration schätzbarer Größen (Strecken)

$s_{1,4}$ [m]	$s_{1,5}$ [m]	$s_{200,4}$ [m]	$s_{200,5}$ [m]	$s_{3,4}$ [m]	$s_{3,5}$ [m]	$s_{4,5}$ [m]
424.3115	300.0402	412.4299	447.4045	300.0320	424.3134	300.0353

Damit können nun die Koordinaten des Startsystems derart berechnet werden, daß sie für die homologen Punkte die Forderung nach exakter Transformierbarkeit erfüllen. Obwohl dieses Problem eindeutig lösbar ist, bietet sich an, den Algorithmus einer freien Netzausgleichung anzuwenden (hierbei ergeben sich dann alle Verbesserungen zu null). Zudem erhält man aus dieser Berechnung die Kofaktorenmatrix der Koordinaten im Startsystem, so daß man unter Verwendung von s_0 aus der vorangegangenen Ausgleichung die empirischen Standardabweichungen der Koordinaten angeben kann. Als Näherungskordinaten für das Startsystem (x^0, y^0) werden die Werte aus Tabelle 2.1 verwendet, bei der Datumsfestlegung ist zu beachten, daß in diesem Netz der Punkt 2 nicht an der Datumsdefinition teilnimmt. Als Ergebnis erhält man die in Tabelle 2.10 aufgeführten Koordinaten (vgl. Tabelle 2.3).

Tabelle 2.10: Ausgegliche Koordinaten im Startsystem mit ihren empirischen Standardabweichungen

Pkt. Nr.	\hat{y} [m]	\hat{x} [m]	$s_{\hat{y}}$ [cm]	$s_{\hat{x}}$ [cm]
1	101.675	403.016	0.3	0.4
2	303.345	499.971	0.7	0.6
3	401.667	398.300	0.3	0.3
4	396.957	98.305	0.4	0.3
5	96.959	103.013	0.3	0.3

Nun kann man unter Verwendung beliebiger homologer Punkte die ausgeglichenen Transformationsparameter berechnen. Aus dem Richtungswinkel von z.B. Punkt 1 nach Punkt 4 im Zielsystem

$$\hat{T}_1^4 = \arctan\left(\frac{\hat{Y}_4 - \hat{Y}_1}{\hat{X}_4 - \hat{X}_1}\right) = \arctan\left(\frac{299.994}{-299.998}\right) = 150.000405 \text{ gon}$$

und dem entsprechenden Richtungswinkel im Startsystem

$$\hat{i}_1^4 = \arctan\left(\frac{\hat{y}_4 - \hat{y}_1}{\hat{x}_4 - \hat{x}_1}\right) = \arctan\left(\frac{295.282}{-304.711}\right) = 151.000405 \text{ gon}$$

ergibt sich der Rotationswinkel gemäß (2.97) zu

$$\hat{\alpha} = \hat{T}_1^4 - \hat{i}_1^4 = 150.000405 \text{ gon} - 151.000405 \text{ gon} = -1.000000 \text{ gon} .$$

Mit (2.98) kann man unter Verwendung z.B. von Punkt 1 die Translationsparameter

$$\begin{aligned} \hat{X}_0 &= \hat{X}_1 - (\hat{m} \cos \hat{\alpha}) \hat{x}_1 + (\hat{m} \sin \hat{\alpha}) \hat{y}_1 \\ &= 400.001 - (0.99987422 \cos(-1.000000)) 403.016 + (0.99987422 \sin(-1.000000)) 101.675 \\ &= -4.5117 \text{ m} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{Y}_0 &= \hat{Y}_1 - (\hat{m} \sin \hat{\alpha}) \hat{x}_1 - (\hat{m} \cos \hat{\alpha}) \hat{y}_1 \\ &= 100.005 - (0.99987422 \sin(-1.000000)) 403.016 - (0.99987422 \cos(-1.000000)) 101.675 \\ &= 4.6843 \text{ m} \end{aligned}$$

berechnen.

2.2.6.3 Transformation von Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix

Im folgenden soll das Netz aus Abschnitt 2.2.6.1 einer stufenweisen Ausgleichung unterzogen werden. Im ersten Schritt wird mit den in Tabelle 2.2 aufgeführten Beobachtungen und den Näherungskordinaten aus Tabelle 2.1 für das Netz im Start- und Zielsystem jeweils eine freie Netzausgleichung durchgeführt. Die Datumsdefinition erfolgt mit den Punkten 1, 3, 4 und 5 (Teilspurminimierung). Als Ergebnis erhält man die in Tabelle 2.11 aufgeführten Koordinaten.

Tabelle 2.11: Koordinaten für Ziel- und Startsystem aus freier Netzausgleichung

Pkt. Nr.	Y [m]	X [m]	y [m]	x [m]
1	100.0068	400.0043	101.6728	403.0128
2	299.9989	500.0025	303.3442	499.9706
3	399.9930	399.9932	401.6705	398.3043
4	400.0023	100.0066	396.9531	98.3017
5	99.9979	99.9959	96.9616	103.0155

In beiden Ausgleichungen wurde die theoretische Standardabweichung vor der Ausgleichung mit $\sigma_0 = 1$ gewählt. Die singulären Kofaktorenmatrizen $\mathbf{Q}_{x_1 \times x_1}$ und $\mathbf{Q}_{x_2 \times x_2}$ der ausgeglichenen Koordinaten \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 im Ziel- und Startsystem haben jeweils die Dimension 10×10 und einen Rangdefekt von $d = 3$.

Aus den Verbesserungen der Beobachtungen im Zielsystem ergibt sich $\mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 = 0.6820$. Mit 10 Beobachtungen, 10 Unbekannten und 3 Bedingungen ergibt sich eine Redundanz von $f_1 = 3$ und somit eine empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung von $s_{01} = 0.4768$. Im Startsystem erhält man mit $\mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2 = 3.4831$ und einer Redundanz von $f_2 = 3$ eine empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung von $s_{02} = 1.0775$. Somit stehen nun alle Ausgangsgrößen aus den Netzausgleichungen zur Verfügung. Zudem ist bekannt, daß es sich bei den Punkten 1, 3, 4 und 5 um homologe Punkte handelt.

In einer weiteren Ausgleichung soll nun die Transformation der Koordinaten vom Start- ins Zielsystem erfolgen. Dazu ist zunächst zu überprüfen, ob die empirischen Varianzen der Gewichtseinheit aus beiden Ausgleichungen als gleich angenommen werden können. Die Nullhypothese für den statistischen Test (siehe Abschnitt 4.3.3) lautet

$$H_0: E\{s_{01}^2\} = E\{s_{02}^2\} = \sigma_0^2,$$

die Alternativhypothese ergibt sich zu

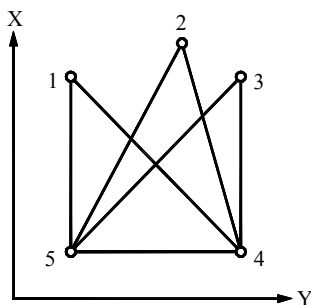
$$H_A: E\{s_{01}^2\} \neq E\{s_{02}^2\},$$

so daß es sich um eine zweiseitige Fragestellung handelt. Zur Durchführung des Tests wird die F -verteilte Testgröße

$$T_F = \frac{s_{02}^2}{s_{01}^2} = \frac{1.0775^2}{0.4768^2} = 5.11$$

gebildet und mit dem Quantil der Fisher-Verteilung verglichen. Dieses ergibt sich mit den Freiheitsgraden $f_1 = f_2 = 3$ und einer angenommenen Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% zu $F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2} = 15.44$. Mit $5.11 < 15.44$ ist gegen die Nullhypothese nichts einzuwenden.

Nun wird eine Minimalkonfiguration schätzbarer Größen (in diesem Fall Strecken) ausgewählt, mit der sich die Netzgeometrie jeweils eindeutig beschreiben läßt. Von vielen denkbaren Möglichkeiten wird die in Abbildung 2.4 dargestellte Konfiguration ausgewählt. Die dazugehörigen fiktiven Beobachtungen werden aus den Koordinaten der freien Netzausgleichungen in Tabelle 2.11 berechnet und sind in Tabelle 2.12 aufgeführt.

**Abbildung 2.4:** Minimalkonfiguration (Strecken)**Tabelle 2.12:** Strecken der Minimalkonfiguration

	Zielsystem	Startsystem
$S_{1,4}$ [m]	424.2592	424.3104
$S_{1,5}$ [m]	300.0084	300.0343
$S_{2,4}$ [m]	412.3074	412.4325
$S_{2,5}$ [m]	447.2200	447.4005
$S_{3,4}$ [m]	299.9866	300.0397
$S_{3,5}$ [m]	424.2587	424.3147
$S_{4,5}$ [m]	300.0044	300.0285

Die Funktionalmatrizen \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 ergeben sich aus einer Linearisierung des funktionalen Zusammenhangs zur Berechnung der Strecken der Minimalkonfiguration. Aus (2.99) und (2.100) erhält man dann die Kofaktoren-

matrizen $\mathbf{Q}_{1,1}$ und $\mathbf{Q}_{1,2}$ der Minimalkonfiguration in Ziel- und Startsystem. Da es sich hierbei um reguläre Matrizen handelt, können die Gewichtsmatrizen \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 einfach durch Inversion mit (2.101) berechnet werden. Somit stehen nun mit \mathbf{I}_1 , \mathbf{P}_1 und \mathbf{I}_2 , \mathbf{P}_2 alle Größen zur Verfügung, um die Transformation nach dem in Abschnitt 2.2.3 oder 2.2.4 beschriebenen Ansatz durchzuführen.

Im folgenden wird die Transformation mit dem in Abschnitt 2.2.3 entwickelten Ansatz durchgeführt. Als Näherungskoodinaten für die Transformation dienen die in Tabelle 2.11 aufgeführten Werte²³, als Näherung für die Transformationsparameter wird $X_0^0 = 0$, $Y_0^0 = 0$, $a^0 = 1$ und $o^0 = 0$ gesetzt. Die Aufstellung der Funktionalmatrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 und die Aufstellung der Matrizen für die Bedingungen \mathbf{B}_{D1} , \mathbf{B}_{D2} und \mathbf{B}_T erfolgt wie in (Anhang A.1) beschrieben. Bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen ist wieder zu beachten, daß der Punkt 2 nicht an der Datumsdefinition und der Bestimmung der Transformationsparameter teilnimmt, da seine Lagestabilität nicht gesichert ist. Die Aufstellung des verkürzten Beobachtungsvektors $\Delta \mathbf{l}$ und des Widerspruchsvektors \mathbf{w} erfolgt mit (2.84) wie in Abschnitt 2.2.6.1 dargestellt. Aus (2.87) erhält man dann nach einigen Iterationen für die Koordinaten die in Tabelle 2.13 aufgeführte Lösung.

Tabelle 2.13: Ausgegliche Koordinaten in Ziel- und Startsystem

Pkt. Nr.	\hat{Y} [m]	\hat{X} [m]	\hat{y} [m]	\hat{x} [m]
1	100.005	400.001	101.675	403.016
2	299.998	500.002	303.345	499.971
3	399.996	399.997	401.667	398.300
4	399.998	100.003	396.957	98.305
5	100.001	99.998	96.959	103.013

Die ausgeglichenen Transformationsparameter lauten $\hat{X}_0 = -4.5117$ m, $\hat{Y}_0 = 4.6843$ m, $\hat{a} = 0.99975087$ und $\hat{o} = -0.01570534$. Aus den Hilfsgrößen \hat{a} und \hat{o} erhält man den Maßstab $\hat{m} = 0.99987422$ (-125.8 ppm) und den Rotationswinkel $\hat{\alpha} = -1.000000$ gon. Wie in Abschnitt 2.2.5 beschrieben, stimmen die Ergebnisse dieser stufenweisen Ausgleiung mit denen aus einer Gesamtausgleichung (vgl. Abschnitt 2.2.6.1) überein.

Aus den Verbesserungen der Beobachtungen dieser dritten Ausgleichung ergibt sich $\mathbf{v}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{v}_3 = 4.0540$, wobei \mathbf{P}_3 die Gewichtsmatrizen der Minimalkonfigurationen in Ziel- und Startsystem beinhaltet. Mit 14 Beobachtungen, 24 Unbekannten und 14 Bedingungen ergibt sich eine Redundanz von $f_3 = 4$ und somit eine empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung von $s_{03} = 1.0067$. Es ist aber zu beachten, daß sich diese Fehlerschätzung nur auf den letzten Ausgleichungsschritt bezieht. Um eine Fehlerschätzung für das Gesamtproblem zu erhalten müssen die Verbesserungen aller Teilschritte berücksichtigt werden. In Anlehnung an (WOLF 1955) ergibt sich diese zu

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{v}_3}{f_1 + f_2 + f_3},$$

d.h., damit eine Fehlerschätzung für das Gesamtproblem überhaupt möglich wird, benötigt man von jeder Teilausgleichung die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen bzw. die empirischen Standardabweichungen der Gewichtseinheit s_{0i} und die jeweiligen Freiheitsgrade f_i . Damit läßt sich obige Formel in der Form

$$s_0^2 = \frac{f_1 s_{01}^2 + f_2 s_{02}^2 + f_3 s_{03}^2}{f_1 + f_2 + f_3}$$

darstellen und man erhält in diesem Beispiel

$$s_0 = \sqrt{\frac{3(0.4768)^2 + 3(1.0775)^2 + 4(1.0067)^2}{3+3+4}} = \sqrt{\frac{8.2192}{10}} = 0.9066.$$

Dieser Wert stimmt mit dem aus der Gesamtausgleichung in Abschnitt 2.2.6.1 überein. Die empirischen Standardabweichungen der Koordinaten und der Transformationsparameter ergeben sich dann wieder wie in Tabelle 2.3 und 2.5 aufgeführt.

²³ Da die Datumsfestlegung in den freien Netzausgleichungen mit Hilfe der homologen Punkte durchgeführt wurde, können die Koordinaten in Tabelle 2.11 als Näherungswerte für die Ausgleichung verwendet werden. Wurde eine Datumsfestlegung getroffen, die nicht mit den homologen Punkten übereinstimmt, so sind die ursprünglichen Näherungskoodinaten in Tabelle 2.1 als Startwerte zu verwenden.

2.2.7 Beurteilung der Transformationsansätze

Der Ausgleichungsansatz der traditionellen Helmert-Transformation ist aufgrund der darin enthaltenen Modellvereinfachungen nicht geeignet, um eine Ausgleichung unter Berücksichtigung der Meßgenauigkeit im Start- und Zielsystem durchzuführen. Dieser Ansatz ist somit im Hinblick auf die Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze mit Hilfe von Transformationsansätzen unzureichend.

Der Ansatz von KOCH (2000) berücksichtigt, daß die Koordinaten in Start- und Zielsystem variable Größen sind. Der Lösungsweg scheidet jedoch verständlicherweise, wenn für die Koordinaten in Start- und Zielsystem die singulären Kofaktorenmatrizen aus den vorangegangenen freien Netzausgleichungen eingeführt werden, ohne daß deren deterministischer Informationsgehalt in die Modellbildung einfließt.

Aus diesem Grund wurden neue Transformationsansätze entwickelt, die auf Grundlage der tatsächlich ausgeführten Messungen in Verbindung mit einer Datumsfestlegung in der Lage sind, alle stochastischen Informationen der Eingangsgrößen streng zu verarbeiten. Liegen als Eingangsgrößen die Koordinaten des Start- und Zielsystems mit ihren singulären Kofaktorenmatrizen aus einer vorangegangenen Ausgleichung vor, so kann daraus jeweils eine Minimalconfiguration schätzbarer Größen als fiktive Beobachtungen berechnet werden, die die Netzgeometrie gerade eindeutig beschreibt. Die Kofaktorenmatrizen dieser schätzbaren Größen sind somit regulär und direkt invertierbar. Die weitere Ausgleichung läuft dann analog zu der mit den originären Meßwerten ab. Die Formulierung der Transformation auf der Grundlage von Meßwerten bietet weitere entscheidende Vorteile:

- Die schätzbaren Größen sind unabhängig von der Datumsfestlegung für die Koordinaten in den vorangegangenen freien Netzausgleichungen,
- die oftmals erforderlichen S-Transformationen um einen einheitlichen Datumsbezug der Koordinaten herzustellen entfallen,
- alle Verfügungen über die Datumsfestlegung und die homologen Punkte erfolgen innerhalb des Transformationsansatzes,
- die Handhabung unterschiedlicher Netzkonfigurationen in Start- und Zielsystem läßt sich auf eine einfache und unmittelbar einsichtige Weise gestalten,
- bei impliziter Formulierung der Forderung nach exakter Transformierbarkeit für die homologen Punkte werden keine Näherungswerte für Translation und Rotation benötigt. Diese Parameter lassen sich nach der Ausgleichung auf einfache Weise rekonstruieren.

Zudem ist anzumerken, daß mit den entwickelten Transformationsansätzen auch sämtliche Spezialfälle (z.B. „Festhalten“ der Koordinaten des Startsystems) bearbeitet werden können. Das Festhalten eines Koordinatenansatzes kann z.B. dadurch erreicht werden, daß die Beobachtungen in diesem System mit Hilfe von Bedingungs-gleichungen als feste Größen eingeführt werden. Eine Simulation dieses Festhaltens einzelner Beobachtungsgruppen in einer Ausgleichung stellt die Einführung größerer Gewichte²⁴ für diese Beobachtungen dar. In (LINKWITZ 1961, S. 353) wird dazu nach umfangreichen Untersuchungen zu verschiedenen Gewichtsannahmen angegeben: „Danach entspricht im allgemeinen eine zehnfache Vergrößerung des Gewichts einem Zwangsanschluß, eine zehnfache Verkleinerung einem Fortlassen der Beobachtung“. Des weiteren ist eine Transformation mehrerer Startsysteme in ein Zielsystem (z.B. bei der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze) mit den Ansätzen aus den Abschnitten 2.2.3 bis 2.2.5 problemlos möglich. In den folgenden Abschnitten soll nun die Grundidee dieser ebenen Transformationsansätze auf räumliche Netze übertragen werden.

2.3 Räumliche Koordinatentransformation

Bei der überbestimmten Ähnlichkeitstransformation räumlicher kartesischer Koordinaten sind grundsätzlich ebenfalls die in Abschnitt 2.2.3 bis 2.2.5 entwickelten Lösungswege möglich. Die Ausarbeitung einer Transformation auf Grundlage der tatsächlich durchgeführten Messungen erscheint aber wenig sinnvoll, aufgrund der Vielzahl von möglichen Beobachtungsgleichungen (z.B. terrestrische Punktbestimmung in lokalen Horizontsystemen, Punktbestimmung mittels GPS). Es wird daher im folgenden davon ausgegangen, daß die dreidimensionalen Koordinaten in Start- und Zielsystem samt ihrer Kofaktorenmatrix bereits aus einer vorangegangenen Netzausgleichung vorliegen. Die Kofaktorenmatrizen sind im allgemeinen singulär mit einem Rangdefekt von $d = 4$ bis $d = 7$ (ILLNER 1985). Die neu zu entwickelnden Ansätze sollen ermöglichen, Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix in Start- und Zielsystem zu transformieren. Zudem sollen die neuen Ansätze in der Lage sein, unterschiedliche Verfügungen zur Datumsfestlegung und unterschiedliche Netzkonfigurationen in Start- und Zielsystem zu verarbeiten.

²⁴ Es ist aber zu beachten, daß die Einführung größerer Gewichte nicht exakt der strengen Lösung mit Bedingungs-gleichungen entspricht und auch nicht entsprechen kann (rein gedanklich müßten dazu die Gewichte auf Unendlich gesetzt werden). Zudem sollte untersucht werden, ob eine zehnfache Vergrößerung des Gewichts tatsächlich ausreichend ist, um die Koordinaten eines Systems festzuhalten.

Zunächst aber wird das Modell der traditionellen Helmerttransformation vorgestellt, im Anschluß daran ein Ansatz, der die Transformation räumlicher variabler Koordinaten ermöglichen soll. Danach erfolgt, auf Grundlage der in Abschnitt 2.2 entwickelten Ansätze, die Verallgemeinerung für räumliche Transformationen. Ein besonderes Gewicht kommt dabei der impliziten Formulierung der Transformierbarkeit zu, bei der die Parameter Translation und Rotation entfallen. Diese lassen sich nach der Ausgleichung exakt rekonstruieren.

2.3.1 Helmert-Transformation (Traditionell)

Ausgangspunkt für den traditionellen Ansatz der räumlichen Helmerttransformation sind die dreidimensionalen kartesischen Koordinaten (x_i, y_i, z_i) einer Punktgruppe im Startsystem, die mit einer räumlichen Ähnlichkeitstransformation auf die Koordinaten (X_i, Y_i, Z_i) im Zielsystem transformiert werden sollen. Die Tatsache, daß die Koordinaten aus vorangegangenen Netzausgleichungen stammen, kann in diesem Ansatz nicht berücksichtigt werden. Vielmehr werden folgende Vereinfachungen, analog zur zweidimensionalen Transformation, eingeführt:

- die Koordinaten im Zielsystem werden als gleichgewichtige und unkorrelierte „Beobachtungen“ angesehen,
- die Koordinaten im Startsystem sind feste Größen.

Die Transformationsvorschrift lautet

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = m \mathbf{R}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, \quad (2.102)$$

mit den Transformationsparametern

X_0, Y_0, Z_0 ... Translation des Koordinatenursprungs,
 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$... Rotationswinkel um die Koordinatenachsen x, y, z ,
 m ... Maßstabsfaktor.

Die Rotationsmatrix, die die Drehungen um die drei Koordinatenachsen in einem rechtsdrehenden Koordinatensystem beschreibt, läßt sich zerlegen in

$$\mathbf{R}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \mathbf{R}_3(\omega_z) \cdot \mathbf{R}_2(\omega_y) \cdot \mathbf{R}_1(\omega_x) \quad . \quad (2.103)$$

Mit den Rotationsmatrizen

$$\mathbf{R}_1(\omega_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & \sin \omega_x \\ 0 & -\sin \omega_x & \cos \omega_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2(\omega_y) = \begin{bmatrix} \cos \omega_y & 0 & -\sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_3(\omega_z) = \begin{bmatrix} \cos \omega_z & \sin \omega_z & 0 \\ -\sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

erhält man

$$\mathbf{R}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \begin{bmatrix} \cos \omega_y \cos \omega_z & \cos \omega_x \sin \omega_z + \sin \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z & \sin \omega_x \sin \omega_z - \cos \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z \\ -\cos \omega_y \sin \omega_z & \cos \omega_x \cos \omega_z - \sin \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z & \sin \omega_x \cos \omega_z + \cos \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z \\ \sin \omega_y & -\sin \omega_x \cos \omega_y & \cos \omega_x \cos \omega_y \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

und in abgekürzter Schreibweise

$$\mathbf{R}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.106)$$

Damit läßt sich die Transformationsvorschrift (2.102) zu

$$\begin{aligned} X &= m (r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z) + X_0 \\ Y &= m (r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z) + Y_0 \\ Z &= m (r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z) + Z_0 \end{aligned} \quad (2.107)$$

angeben.

Wie die ebene Helmert-Transformation in Abschnitt 2.2.1, so ist auch dieser Ansatz aufgrund der vereinfachten Annahmen im stochastischen Modell nicht geeignet, um ihn z.B. in der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze einzusetzen. Auf die Parameterschätzung in diesem Modell wird daher nicht weiter eingegangen.²⁵ In (KOCH et al. 2000) wird ein Ansatz zur räumlichen Helmert-Transformation mit variablen Koordinaten angegeben. Dieser Ansatz wird im folgenden kurz vorgestellt.

2.3.2 Helmert-Transformation mit variablen Koordinaten in Start- und Zielsystem

In Analogie zu dem in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Ansatz, wird in (KOCH et al. 2000) ein Verfahren zur Transformation räumlicher variabler Koordinaten angegeben. Dabei wird berücksichtigt, daß es sich sowohl bei den Koordinaten im Start- als auch im Zielsystem um fehlerbehaftete Größen handelt, die jeweils eine Kovarianzmatrix besitzen. An dieser Stelle tritt jedoch das gleiche Problem wie bei der ebenen Transformation auf: Entstammen die Koordinaten jeweils einer freien Netzausgleichung, so sind deren Kofaktorenmatrizen singulär, was besagt, daß sie neben stochastischen auch deterministische Informationen enthalten. Werden diese deterministischen Informationen nicht in die Modellbildung einbezogen, so kann der Lösungsweg in (KOCH et al. 2000) bei der Verarbeitung singulärer Kofaktorenmatrizen kein Ergebnis liefern.

Wie in Abschnitt 2.2.2, so soll auch an dieser Stelle erwähnt werden, daß es unter Verwendung des in (WOLF 1979) aufgeführten Lösungsweges für die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen möglich ist, das Transformationsproblem mit den in (KOCH et al. 2000) aufgeführten Beobachtungsgleichungen auch unter Verwendung singulärer Kofaktorenmatrizen für die Koordinaten im Start- und Zielsystem zu lösen.

Im folgenden soll nun ein Ansatz entwickelt werden, bei dem zunächst eine Trennung der stochastischen und der deterministischen Informationen der singulären Kofaktorenmatrizen erfolgt. Dies kann dadurch erreicht werden, daß man eine Minimalkonfiguration schätzbarer Größen als fiktive Beobachtungen einführt. Die Berücksichtigung eines zusätzlichen deterministischen Anteils erfolgt dann durch Einführung von Bedingungsgleichungen für die Datumsfestlegung.

2.3.3 Helmert-Transformation auf der Grundlage fiktiver Beobachtungen

Als Ausgangspunkt für die Transformation stehen folgende Werte aus einer freien dreidimensionalen Netzausgleichung des Ziel- und Startsystems zur Verfügung.

- \mathbf{x}_1 ... Koordinatenvektor im Zielsystem
- $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_1}$... singuläre Kofaktorenmatrix der Koordinaten im Zielsystem
- σ_{01} ... theoretische Standardabweichung der Gewichtseinheit (vor der Ausgleichung)
- s_{01} ... empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit (nach der Ausgleichung)
- f_1 ... Freiheitsgrad der Netzausgleichung im Zielsystem

und

- \mathbf{x}_2 ... Koordinatenvektor im Startsystem
- $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_2}$... singuläre Kofaktorenmatrix der Koordinaten im Startsystem
- σ_{02} ... theoretische Standardabweichung der Gewichtseinheit (vor der Ausgleichung)
- s_{02} ... empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit (nach der Ausgleichung)
- f_2 ... Freiheitsgrad der Netzausgleichung im Startsystem

Wie in Abschnitt 2.3.2 erwähnt, ist eine Transformation von Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix nur dann möglich, wenn eine zusätzliche deterministische Information in die Modellbildung einbezogen wird. Gelöst werden kann dieses Problem, in dem man die Transformation auf der Basis schätzbarer Größen in Verbindung mit einer Datumsfestlegung formuliert. Dazu wird aus den Koordinaten in Start- und Zielsystem jeweils eine Minimalkonfiguration schätzbarer Größen berechnet, die die Geometrie gerade eindeutig beschreibt. Eine Übereinstimmung mit tatsächlich ausgeführten Messungen ist nicht erforderlich. Am einfachsten gelingt die Beschreibung der Geometrie mit Hilfe von Strecken. In einem maßstabsbestimmten Netz mit p Punkten und einem Rangdefekt der Kofaktorenmatrix von $d = 6$ sind dazu $n = 3p - d$ Strecken erforderlich.

Im Zielsystem mit p_1 Punkten ist der Vektor der n_1 fiktiven Beobachtungen (Strecken) der Minimalkonfiguration mit der zugehörigen Kofaktorenmatrix

²⁵ Die Schätzung der Parameter ist z.B. in (WELSCH et al. 2000) dargestellt.

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{1|1_1} = \begin{matrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{Q}_{x_1 x_1} & \mathbf{F}_1^T \\ (n_1 \times n_1) & (n_1 \times 3 p_1) & (3 p_1 \times 3 p_1) & (3 p_1 \times n_1) \end{matrix} \quad (2.108)$$

bereitzustellen und ebenso im Startsystem

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{1_2|2} = \begin{matrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{Q}_{x_2 x_2} & \mathbf{F}_2^T \\ (n_2 \times n_2) & (n_2 \times 3 p_2) & (3 p_2 \times 3 p_2) & (3 p_2 \times n_2) \end{matrix}, \quad (2.109)$$

wobei mit \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 der linearisierte funktionale Zusammenhang der Streckenberechnung bezeichnet wird. Die Festlegung einer Minimalkonfiguration läßt sich wieder sehr leicht automatisieren. Es wird ein (beliebiges) Dreieck im Raum ausgewählt, von dessen Endpunkten jeweils die Strecken zu den übrigen Netzpunkten berechnet werden. Für die weitere Verwendung der Beobachtungen müssen noch die zugehörigen Gewichtsmatrizen bereitgestellt werden. Da die Kofaktorenmatrizen jeweils eine Minimalkonfiguration beschreiben, sind sie regulär und somit invertierbar.²⁶ Dann ergeben sich die (vollbesetzten) Gewichtsmatrizen zu

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_{1|1_1}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_{1_2|2}^{-1} \quad (2.110)$$

Nun kann mit \mathbf{I}_1 , \mathbf{P}_1 und \mathbf{I}_2 , \mathbf{P}_2 ein Transformationsansatz auf der Grundlage dieser fiktiven Beobachtungen aufgestellt werden. Folgende Unbekannte werden in diese Ausgleichung eingeführt:

- X_i, Y_i, Z_i ... Koordinaten im Zielsystem,
- x_i, y_i, z_i ... Koordinaten im Startsystem,
- X_0, Y_0, Z_0 ... Translation,
- $\omega_x, \omega_y, \omega_z$... Rotationswinkel um die Koordinatenachsen x, y, z ,
- m ... Maßstabsfaktor.

Die n_1 Beobachtungsgleichungen F_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$) im Zielsystem lauten

$$F_k = L_{ij} + v_{L_{ij}} = \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2 + (\hat{Z}_j - \hat{Z}_i)^2} \quad (2.111)$$

und analog ergeben sich die n_2 Beobachtungsgleichungen f_k ($k = 1, 2, \dots, n_2$) im Startsystem

$$f_k = l_{ij} + v_{l_{ij}} = \sqrt{(\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2 + (\hat{y}_j - \hat{y}_i)^2 + (\hat{z}_j - \hat{z}_i)^2} \quad (2.112)$$

Um auf Grundlage dieser Beobachtungen Koordinaten zu bestimmen, muß im Start- und Zielsystem jeweils eine Datumfestlegung getroffen werden, was wieder in Form von Bedingungsgleichungen erfolgen kann. Dafür sind jedoch nur Punkte zu verwenden, die in beiden Systemen vorhanden sind und deren unveränderte Lage angenommen werden kann. Da jedoch folgende Fälle vorkommen können:

- nicht identische Netzkonfiguration in Start- und Zielsystem,
- die Lagestabilität einzelner Punkte ist nicht gewährleistet,

ist eine Unterteilung in Datumspunkte P_{D_i} ($i = 1, 2, \dots, h$; $h \geq 3$) und Nichtdatumspunkte P_{N_i} ($i = 1, 2, \dots, g$) vorzunehmen. Die Bedingungen für die Datumfestlegung²⁷ im Zielsystem lauten

$$\left. \begin{array}{l} B_1 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{X}_{D_i} = 0 \\ B_2 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{Y}_{D_i} = 0 \\ B_3 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{Z}_{D_i} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ Translationen, } \\ B_4 = \sum_{i=1}^h Y_{D_i}^0 \Delta \hat{Z}_{D_i} - \sum_{i=1}^h Z_{D_i}^0 \Delta \hat{Y}_{D_i} = 0 \\ B_5 = \sum_{i=1}^h Z_{D_i}^0 \Delta \hat{X}_{D_i} - \sum_{i=1}^h X_{D_i}^0 \Delta \hat{Z}_{D_i} = 0 \\ B_6 = \sum_{i=1}^h X_{D_i}^0 \Delta \hat{Y}_{D_i} - \sum_{i=1}^h Y_{D_i}^0 \Delta \hat{X}_{D_i} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ Rotationen.} \\ \end{array} \quad (2.113)$$

²⁶ Es ist zu beachten, daß sich die Kofaktorenmatrizen der Koordinaten in Start- und Zielsystem auf einen einheitlichen Wert für σ_0 beziehen müssen.

²⁷ Es wird davon ausgegangen, daß es sich sowohl im Start- als auch im Zielsystem um ein maßstabsbestimmtes Netz handelt.

Die Datumsfestlegung im Startsystem erfolgt mit

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{x}_{Di} = 0 \\ b_2 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{y}_{Di} = 0 \\ b_3 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{z}_{Di} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{3 Translationen, } b_4 = \sum_{i=1}^h y_{Di}^0 \Delta \hat{z}_{Di} - \sum_{i=1}^h z_{Di}^0 \Delta \hat{y}_{Di} = 0 \\ b_5 = \sum_{i=1}^h z_{Di}^0 \Delta \hat{x}_{Di} - \sum_{i=1}^h x_{Di}^0 \Delta \hat{z}_{Di} = 0 \\ b_6 = \sum_{i=1}^h x_{Di}^0 \Delta \hat{y}_{Di} - \sum_{i=1}^h y_{Di}^0 \Delta \hat{x}_{Di} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{3 Rotationen.} \end{array} \quad (2.114)$$

Die Forderung nach exakter Transformierbarkeit der Koordinaten vom Start- ins Zielsystem wird ebenfalls durch Bedingungsgleichungen formuliert. Für die Koordinaten der Datumspunkte P_{Di} ($i = 1, 2, \dots, h$; $h \geq 3$) soll

$$\begin{aligned} \hat{X}_{Di} &= \hat{m} (\hat{r}_{11} \hat{x}_{Di} + \hat{r}_{12} \hat{y}_{Di} + \hat{r}_{13} \hat{z}_{Di}) + \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_{Di} &= \hat{m} (\hat{r}_{21} \hat{x}_{Di} + \hat{r}_{22} \hat{y}_{Di} + \hat{r}_{23} \hat{z}_{Di}) + \hat{Y}_0 \\ \hat{Z}_{Di} &= \hat{m} (\hat{r}_{31} \hat{x}_{Di} + \hat{r}_{32} \hat{y}_{Di} + \hat{r}_{33} \hat{z}_{Di}) + \hat{Z}_0 \end{aligned} \quad (2.115)$$

erfüllt sein, so daß sich die Bedingungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} b_{xi} &= -\hat{X}_{Di} + \hat{X}_0 + \hat{m} (\hat{r}_{11} \hat{x}_i + \hat{r}_{12} \hat{y}_i + \hat{r}_{13} \hat{z}_i) = 0 \\ b_{yi} &= -\hat{Y}_{Di} + \hat{Y}_0 + \hat{m} (\hat{r}_{21} \hat{x}_i + \hat{r}_{22} \hat{y}_i + \hat{r}_{23} \hat{z}_i) = 0 \\ b_{zi} &= -\hat{Z}_{Di} + \hat{Z}_0 + \hat{m} (\hat{r}_{31} \hat{x}_i + \hat{r}_{32} \hat{y}_i + \hat{r}_{33} \hat{z}_i) = 0 \end{aligned} \quad (2.116)$$

ergeben. Dieses Ausgleichungsproblem kann durch Linearisierung an der Stelle geeigneter Näherungswerte \mathbf{x}^0 und Iteration gelöst werden. Faßt man die unbekannt Parameter im Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta X_{D1} & \Delta Y_{D1} & \Delta Z_{D1} & \cdots & \Delta X_{Dh} & \Delta Y_{Dh} & \Delta Z_{Dh} & \vdots & \Delta X_{N1} & \Delta Y_{N1} & \Delta Z_{N1} & \cdots & \Delta X_{Ng} & \Delta Y_{Ng} & \Delta Z_{Ng} & \vdots \\ \Delta x_{D1} & \Delta y_{D1} & \Delta z_{D1} & \cdots & \Delta x_{Dh} & \Delta y_{Dh} & \Delta z_{Dh} & \vdots & \Delta x_{N1} & \Delta y_{N1} & \Delta z_{N1} & \cdots & \Delta x_{Ng} & \Delta y_{Ng} & \Delta z_{Ng} & \vdots \\ \Delta X_0 & \Delta Y_0 & \Delta Z_0 & \Delta \omega_x & \Delta \omega_y & \Delta \omega_z & \Delta m \end{bmatrix}^T \quad (2.117)$$

zusammen, erhält man durch Bildung der partiellen Ableitungen der Beobachtungsgleichungen im Zielsystem (2.111) die Funktionalmatrix \mathbf{A}_1 . Durch Linearisierung der Beobachtungsgleichungen im Startsystem (2.112) ergibt sich die Funktionalmatrix \mathbf{A}_2 , die Linearisierung der Bedingungsgleichungen (2.113) und (2.114) liefert die Matrizen \mathbf{B}_{D1} und \mathbf{B}_{D2} für die Datumsfestlegung in Ziel- und Startsystem. Danach folgt die Linearisierung der Bedingungsgleichungen für die Transformierbarkeit (2.116), aus der man die Matrix \mathbf{B}_T erhält. Eine ausführliche Darstellung aller Matrizen ist in (Anhang A.2) zu finden.

Der verkürzte Beobachtungsvektor $\Delta \mathbf{l}$ und der Widerspruchsvektor \mathbf{w} lauten

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \vdots \\ L_{ij} - \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2 + (Z_j^0 - Z_i^0)^2} \\ \vdots \\ \vdots \\ l_{ij} - \sqrt{(x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2 + (z_j^0 - z_i^0)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 - (-X_i^0 + X_0^0 + m^0 (r_{11}^0 x_i^0 + r_{12}^0 y_i^0 + r_{13}^0 z_i^0)) \\ 0 - (-Y_i^0 + Y_0^0 + m^0 (r_{21}^0 x_i^0 + r_{22}^0 y_i^0 + r_{23}^0 z_i^0)) \\ 0 - (-Z_i^0 + Z_0^0 + m^0 (r_{31}^0 x_i^0 + r_{32}^0 y_i^0 + r_{33}^0 z_i^0)) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

Mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{D1} \\ \mathbf{B}_{D2} \\ \mathbf{B}_T \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

und der Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (2.120)$$

erhält man die Schätzwerte für die Unbekannten aus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (2.121)$$

Wie bei der ebenen Transformation in Abschnitt 2.2.3, so entspricht auch dieser Lösungsweg einer *Ausgleichung in einem Guß*, d.h. Netzausgleichung und Transformation werden in einer gemeinsamen Ausgleichung durchgeführt. Als Eingangsgrößen werden die fiktiven Beobachtungen einer Minimalkonfiguration mit ihren regulären Kofaktorenmatrizen verwendet. Als Ergebnis erhält man die ausgeglichenen Koordinaten im Start- und Zielsystem und die ausgeglichenen Transformationsparameter mit denen eine exakte Transformation homologer Punkte möglich ist. Die Kofaktoren der Unbekannten (Koordinaten, Translation, Rotationswinkel, Maßstab) lassen sich direkt aus der Inversen der Normalgleichungsmatrix entnehmen.

2.3.4 Implizite Formulierung der Transformierbarkeit

Wie im zweidimensionalen Fall (Abschnitt 2.2.4), läßt sich auch die Modellbildung für die räumliche Transformation dadurch vereinfachen, daß die Forderung nach exakter Transformierbarkeit der Datumpunkte nicht über die Bedingungsgleichungen (2.116) formuliert wird, sondern daß diese Forderung implizit berücksichtigt wird. Dazu wird wieder nur ein Koordinatensatz, nämlich die Koordinaten (X_i, Y_i, Z_i) des Zielsystems, als Unbekannte eingeführt. Da die Koordinaten des Startsystems und die Transformationsparameter Translation und Rotation nicht als Unbekannte eingeführt werden, ergibt sich der reduzierte Parametersatz zu

$$\begin{aligned} X_i, Y_i, Z_i & \dots \text{Koordinaten im Zielsystem,} \\ m & \dots \text{Maßstabsfaktor zwischen Start- und Zielsystem.} \end{aligned}$$

Als Ausgangsgrößen liegen wieder, wie in Abschnitt 2.3.3, die Koordinaten im Start- und Zielsystem aus einer freien dreidimensionalen Netzausgleichung mit ihren singulären Kofaktorenmatrizen vor. Damit wird nun wieder in beiden Systemen mit (2.108) und (2.109) eine Minimalkonfiguration schätzbarer Größen (Strecken) mit den Gewichtsmatrizen (2.110) berechnet, so daß für die Transformation die fiktiven Beobachtungen $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ mit ihren Gewichtsmatrizen $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ zur Verfügung stehen.

Unter Verwendung des reduzierten Parametersatzes lauten die n_1 Beobachtungsgleichungen F_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$) im Zielsystem

$$L_{ij} + v_{L_{ij}} = \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2 + (\hat{Z}_j - \hat{Z}_i)^2} \quad (2.122)$$

und die n_2 Beobachtungsgleichungen f_k ($k = 1, 2, \dots, n_2$) im Startsystem

$$l_{ij} + v_{l_{ij}} = \frac{1}{\hat{m}} \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2 + (\hat{Z}_j - \hat{Z}_i)^2}. \quad (2.123)$$

Die erforderliche Datumsfestlegung im Zielsystem erfolgt mit den Bedingungsgleichungen (2.113), wobei wieder die Unterteilung in Datumpunkte P_{D_i} ($i = 1, 2, \dots, h$; $h \geq 3$) und Nichtdatumpunkte P_{N_i} ($i = 1, 2, \dots, g$) zu beachten ist. Da nur ein gemeinsamer Koordinatenvektor angesetzt wird, muß berücksichtigt werden, daß die Nichtdatumpunkte P_{N_i} sowohl aus der Datumsdefinition als auch aus der impliziten Formulierung der Transformierbarkeit ausgeschlossen werden. Dies geschieht dadurch, daß für diese Punkte zwei Koordinatensätze mit unterschiedlicher Punktnummer im Zielsystem verwendet werden.

Dieses Ausgleichungsproblem kann durch Linearisierung an der Stelle geeigneter Näherungswerte \mathbf{x}^0 und Iteration gelöst werden. Mit dem Vektor der Unbekannten

$$\mathbf{x} = \left[\Delta X_{D1} \quad \Delta Y_{D1} \quad \Delta Z_{D1} \quad \cdots \quad \Delta X_{Dh} \quad \Delta Y_{Dh} \quad \Delta Z_{Dh} \quad ; \quad \Delta X_{N1} \quad \Delta Y_{N1} \quad \Delta Z_{N1} \quad \cdots \quad \Delta X_{Ng} \quad \Delta Y_{Ng} \quad \Delta Z_{Ng} \quad ; \quad \Delta m \right]^T \quad (2.124)$$

ergibt sich die Funktionalmatrix **A** der Beobachtungsgleichungen zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial F_1}{\partial Z_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial F_1}{\partial Z_{Dh}} & \frac{\partial F_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial F_1}{\partial Z_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{Ng}} & \frac{\partial F_1}{\partial Z_{Ng}} & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial F_2}{\partial Z_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial F_2}{\partial Z_{Dh}} & \frac{\partial F_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial F_2}{\partial Z_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{Ng}} & \frac{\partial F_2}{\partial Z_{Ng}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Z_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Z_{Dh}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Z_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{Ng}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Z_{Ng}} & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_{D1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_{Dh}} & \frac{\partial f_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_{N1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{Ng}} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_{Ng}} & \frac{\partial f_1}{\partial m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_{D1}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_{Dh}} & \frac{\partial f_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_{N1}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{Ng}} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_{Ng}} & \frac{\partial f_2}{\partial m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Z_{D1}} & \cdots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Z_{Dh}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Z_{N1}} & \cdots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{Ng}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Z_{Ng}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial m} \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

und die Bedingungen **B** für die Datumsfestlegung im Zielsystem lauten

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Z_{D1}} & \cdots & \frac{\partial B_1}{\partial X_{Dm}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{Dm}} & \frac{\partial B_1}{\partial Z_{Dm}} & \frac{\partial B_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Z_{N1}} & \cdots & \frac{\partial B_1}{\partial X_{Nk}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{Nk}} & \frac{\partial B_1}{\partial Z_{Nk}} & \frac{\partial B_1}{\partial m} \\ \frac{\partial B_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Z_{D1}} & \cdots & \frac{\partial B_2}{\partial X_{Dm}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{Dm}} & \frac{\partial B_2}{\partial Z_{Dm}} & \frac{\partial B_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Z_{N1}} & \cdots & \frac{\partial B_2}{\partial X_{Nk}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{Nk}} & \frac{\partial B_2}{\partial Z_{Nk}} & \frac{\partial B_2}{\partial m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial B_6}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_6}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial B_6}{\partial Z_{D1}} & \cdots & \frac{\partial B_6}{\partial X_{Dm}} & \frac{\partial B_6}{\partial Y_{Dm}} & \frac{\partial B_6}{\partial Z_{Dm}} & \frac{\partial B_6}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_6}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial B_6}{\partial Z_{N1}} & \cdots & \frac{\partial B_6}{\partial X_{Nk}} & \frac{\partial B_6}{\partial Y_{Nk}} & \frac{\partial B_6}{\partial Z_{Nk}} & \frac{\partial B_6}{\partial m} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -Z_{D1} & Y_{D1} & \cdots & 0 & -Z_{Dm} & Y_{Dm} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ Z_{D1} & 0 & -X_{D1} & \cdots & Z_{Dm} & 0 & -X_{Dm} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -Y_{D1} & X_{D1} & 0 & \cdots & -Y_{Dm} & X_{Dm} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

Der verkürzte Beobachtungsvektor $\Delta \mathbf{l}$ und der Widerspruchsvektor \mathbf{w} lauten

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \vdots \\ L_{ij} - \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2 + (Z_j^0 - Z_i^0)^2} \\ \vdots \\ l_{ij} - \frac{1}{m^0} \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2 + (Z_j^0 - Z_i^0)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

Mit der Gewichtsmatrix der fiktiven Beobachtungen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

und der Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (2.129)$$

erhält man die Schätzwerte für die Unbekannten aus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

Als Ergebnis erhält man direkt die ausgeglichenen Koordinaten, die sich nach der Transformation ins Zielsystem ergeben. Für Punkte, die nicht in die implizite Formulierung der Transformierbarkeit einbezogen wurden, erhält man zwei Koordinatensätze aufgrund der Vergabe unterschiedlicher Punktnummern. Ein Koordinatensatz entspricht den ausgeglichenen Koordinaten im Zielsystem, der andere den vom Start- ins Zielsystem transformierten Koordinaten.

Es sei an dieser Stelle nochmals erwähnt, daß die Transformationsparameter Translation und Rotation aufgrund der impliziten Formulierung der Forderung nach Transformierbarkeit nicht im Parametersatz der Ausgleichung vorkommen. Eine bemerkenswerte Eigenschaft des Transformationsansatzes besteht aber darin, daß eine exakte Rekonstruktion dieser Transformationsparameter möglich ist, was nun im folgenden aufgezeigt wird. Ausgehend von den ausgeglichenen Koordinaten im Zielsystem wird mit

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{1}{\hat{m}} \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2 + (\hat{Z}_j - \hat{Z}_i)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{1_2 1_2} = \mathbf{F}_2 \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}_2^T, \quad (2.131)$$

wobei sich \mathbf{F}_2 aus der Linearisierung des funktionalen Zusammenhangs zur Streckenberechnung ergibt, eine Minimalkonfiguration schätzbarer Größen mit der dazugehörigen Kofaktorenmatrix für das Startsystem berechnet. Mit diesen Beobachtungen und der Gewichtsmatrix $\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_{1_2 1_2}^{-1}$ lassen sich die Koordinaten im Startsystem derart berechnen, daß das Netz (bzw. ein durch die homologen Punkte definiertes Teilnetz) im Startsystem die gleiche Form wie das im Zielsystem erhält. Dieses Problem ist eindeutig lösbar, dennoch bietet sich an, für die Bestimmung der Koordinaten den Algorithmus einer freien Netzausgleichung anzuwenden (die Verbesserungen ergeben sich dann sämtlich zu null). Bei der Datumsfestlegung im Startsystem ist darauf zu achten, daß dafür die gleichen Punkte P_D , wie im Zielsystem verwendet werden.

Mit den auf diese Weise bestimmten Koordinaten des Startsystems $(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i)$, die die Forderung nach exakter Transformierbarkeit erfüllen, den ausgeglichenen Koordinaten des Zielsystems $(\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i)$ und dem Maßstab \hat{m} , kann unter Verwendung von 4 beliebigen homologen Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{m}\hat{x}_1 & \hat{m}\hat{y}_1 & \hat{m}\hat{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{m}\hat{x}_1 & \hat{m}\hat{y}_1 & \hat{m}\hat{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{m}\hat{x}_1 & \hat{m}\hat{y}_1 & \hat{m}\hat{z}_1 & 0 & 0 & 1 \\ \hat{m}\hat{x}_2 & \hat{m}\hat{y}_2 & \hat{m}\hat{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{m}\hat{x}_2 & \hat{m}\hat{y}_2 & \hat{m}\hat{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{m}\hat{x}_2 & \hat{m}\hat{y}_2 & \hat{m}\hat{z}_2 & 0 & 0 & 1 \\ \hat{m}\hat{x}_3 & \hat{m}\hat{y}_3 & \hat{m}\hat{z}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{m}\hat{x}_3 & \hat{m}\hat{y}_3 & \hat{m}\hat{z}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{m}\hat{x}_3 & \hat{m}\hat{y}_3 & \hat{m}\hat{z}_3 & 0 & 0 & 1 \\ \hat{m}\hat{x}_4 & \hat{m}\hat{y}_4 & \hat{m}\hat{z}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{m}\hat{x}_4 & \hat{m}\hat{y}_4 & \hat{m}\hat{z}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{m}\hat{x}_4 & \hat{m}\hat{y}_4 & \hat{m}\hat{z}_4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{r}_{11} \\ \hat{r}_{12} \\ \hat{r}_{13} \\ \hat{r}_{21} \\ \hat{r}_{22} \\ \hat{r}_{23} \\ \hat{r}_{31} \\ \hat{r}_{32} \\ \hat{r}_{33} \\ \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_0 \\ \hat{Z}_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{Y}_1 \\ \hat{Z}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{Y}_3 \\ \hat{Z}_3 \\ \hat{X}_4 \\ \hat{Y}_4 \\ \hat{Z}_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} \quad (2.132)$$

aufgestellt werden. Aus der Lösung

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{r} \quad (2.133)$$

erhält man die ausgeglichenen Elemente der Rotationsmatrix (2.106) und die Translationsparameter $\hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{Z}_0$. Daß man die Lösung eines ursprünglich nichtlinearen Problems nun mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems erzeugen kann, liegt daran, daß in (2.132) die ausgeglichenen Koordinaten eingesetzt werden. Aus den Elementen $\hat{r}_{11}, \dots, \hat{r}_{33}$ können dann die ausgeglichenen Rotationswinkel berechnet werden.

Das Element \hat{r}_{31} liefert mit

$$\hat{\omega}_y = \arcsin(\hat{r}_{31}) \quad (2.134)$$

die Lösungen für den Rotationswinkel $\hat{\omega}_y$.²⁸ Des weiteren erhält man aus (2.105)

$$\sin \hat{\omega}_x = \frac{-\hat{r}_{32}}{\cos \hat{\omega}_y}, \quad \cos \hat{\omega}_x = \frac{\hat{r}_{33}}{\cos \hat{\omega}_y} \quad \text{mit } \cos \hat{\omega}_y \neq 0, \quad (2.135)$$

$$\sin \hat{\omega}_z = \frac{-\hat{r}_{21}}{\cos \hat{\omega}_y}, \quad \cos \hat{\omega}_z = \frac{\hat{r}_{11}}{\cos \hat{\omega}_y} \quad \text{mit } \cos \hat{\omega}_y \neq 0 \quad (2.136)$$

und somit

$$\hat{\omega}_x = \arctan\left(\frac{-\hat{r}_{32}}{\hat{r}_{33}}\right), \quad (2.137)$$

$$\hat{\omega}_z = \arctan\left(\frac{-\hat{r}_{21}}{\hat{r}_{11}}\right), \quad (2.138)$$

wobei bei der Berechnung die Division durch null abzufangen und eine Quadrantenabfrage durchzuführen ist.

Damit sind alle Parameter der räumlichen Transformation exakt bestimmt. Bemerkenswert ist, daß für diesen Lösungsweg *keine Näherungswerte* für die Translationen und für die Rotationen benötigt werden. Auch bei großen Rotationswinkeln ergeben sich keinerlei Probleme. Umfangreiche Berechnungen zur Bereitstellung geeigneter Näherungswerte (z.B. SCHMID und HEGGLI 1978) können gänzlich entfallen. Möchte man zudem noch eine Fehlerschätzung für die Transformationsparameter durchführen, so kann man diese nun zusammen mit den ausgeglichenen Koordinaten des Start- und Zielsystems in die in Abschnitt 2.3.3 beschriebene Ausgleichung einsetzen. Da man in diesem Schritt direkt die Lösung für die Unbekannten einsetzt, entfällt das Problem der Beschaffung von Näherungswerten und die Probleme mit der Linearisierung.

2.3.5 Numerisches Beispiel

Für ein dreidimensionales Netz, bestehend aus 6 Punkten, liegen im Start- und Zielsystem die in Tabelle 2.14 aufgeführten kartesischen Koordinaten jeweils aus einer freien Netzausgleichung vor. Wie bei dem Beispiel zur ebenen Transformation, soll auch hier wieder gezeigt werden, wie sich Vorinformationen über verschobene Punkte im Ausgleichungsansatz berücksichtigen lassen. Dem Punkt 2 wurde eine Verschiebung im Startsystem aufgeprägt, so daß er aus der Datumsdefinition und der Bestimmung der Transformationsparameter auszuschließen ist. Dieser Umstand wurde bei der Ausgleichung des Start- und Zielsystems bereits berücksichtigt, indem eine Teilspurminimierung betreffend die Punkte 1, 3, 4, 5 und 6 durchgeführt wurde.

Tabelle 2.14: Koordinaten für Ziel- und Startsystem aus freier Netzausgleichung

Pkt. Nr.	X [m]	Y [m]	Z [m]	x [m]	y [m]	z [m]
1	100.0091	399.9984	30.0500	-62.1612	414.1545	71.7620
2	300.0071	500.0103	49.9800	73.8688	590.8897	43.8771
3	399.9950	399.9883	19.9738	188.7818	543.7506	-30.2942
4	399.9945	100.0048	70.0492	327.5937	272.9708	-28.0556
5	100.0061	99.9967	9.9623	52.6737	143.4312	8.4123
6	299.9953	300.0118	4.9646	139.4120	410.3287	-28.3641

Des weiteren stehen folgende Größen aus den vorangegangenen Ausgleichungen zur Verfügung:

$$\begin{aligned} \sigma_{01} &= 1 && \dots \text{theoretische Standardabweichung der Gewichtseinheit (vor der Ausgleichung)} \\ s_{01} &= 0.9982 && \dots \text{empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit (nach der Ausgleichung)} \\ f_1 &= 3 && \dots \text{Freiheitsgrad der Netzausgleichung im Zielsystem} \end{aligned}$$

²⁸ Mit $\hat{\omega}_y = \pi - \arcsin(\hat{r}_{31})$ existiert noch eine zweite Lösung. Welche von beiden dem Transformationsproblem entspricht, kann durch Einsetzen beider Lösungen überprüft werden.

und die singuläre Kofaktorenmatrix der Koordinaten im Zielsystem

$$Q_{x1x1}=10^{-5} \begin{bmatrix} 1.930 & -0.093 & 0.899 & 0.516 & -0.023 & 2.143 & -0.905 & 0.408 & -0.810 & -0.135 & 0.244 & 0.924 & -0.188 & -0.418 & -0.967 & -0.702 & -0.141 & -0.046 \\ -0.093 & 2.963 & -1.898 & 0.505 & -0.558 & 2.687 & -0.660 & -0.633 & 0.583 & 0.936 & -0.380 & -1.833 & 0.892 & -1.265 & 1.007 & -1.075 & -0.685 & 2.141 \\ 0.899 & -1.898 & 64.071 & 7.460 & 5.277 & -62.386 & 2.285 & -3.770 & -52.802 & -9.307 & 8.984 & 60.749 & 6.548 & 0.154 & -57.516 & -0.425 & -3.471 & -14.502 \\ 0.516 & 0.505 & 7.460 & 8.339 & 0.039 & -3.123 & 0.179 & -1.032 & -8.738 & -0.603 & 0.902 & 7.221 & 1.425 & -0.096 & -8.136 & -1.517 & -0.280 & 2.194 \\ -0.023 & -0.558 & 5.277 & 0.039 & 7.496 & -35.949 & 0.723 & -1.191 & -3.654 & -1.070 & 2.091 & 4.739 & 0.588 & 0.176 & -4.453 & -0.218 & -0.518 & -1.909 \\ 2.143 & 2.687 & -62.386 & -3.123 & -35.949 & 306.062 & -8.344 & 10.075 & 40.750 & 8.640 & -19.420 & -57.339 & -5.032 & -0.653 & 51.761 & 2.593 & 7.311 & 27.213 \\ -0.905 & -0.660 & 2.285 & 0.179 & 0.723 & -8.344 & 2.606 & -0.401 & -1.633 & -0.769 & 0.987 & 2.045 & 0.270 & -0.396 & -1.917 & -1.202 & 0.469 & -0.780 \\ 0.408 & -0.633 & -3.770 & -1.032 & -1.191 & 10.075 & -0.401 & 2.986 & 2.020 & -0.405 & -1.815 & -3.559 & -0.797 & 0.012 & 3.130 & 1.196 & -0.550 & 2.179 \\ -0.810 & 0.583 & -52.802 & -8.738 & -3.654 & 40.750 & -1.633 & 2.020 & 68.730 & 6.968 & -5.715 & -50.450 & -6.399 & -0.640 & 60.058 & 1.874 & 3.752 & -25.536 \\ -0.135 & 0.936 & -9.307 & -0.603 & -1.070 & 8.640 & -0.769 & -0.405 & 6.968 & 4.299 & -0.970 & -8.323 & -2.335 & 0.792 & 7.363 & -1.060 & -0.353 & 3.299 \\ 0.244 & -0.380 & 8.984 & 0.902 & 2.091 & -19.420 & 0.987 & -1.815 & -5.715 & -0.970 & 3.533 & 8.205 & 0.189 & -0.159 & -7.532 & -0.449 & -1.179 & -3.942 \\ 0.924 & -1.833 & 60.749 & 7.221 & 4.739 & -57.339 & 2.045 & -3.559 & -50.450 & -8.323 & 8.205 & 57.770 & 6.023 & 0.371 & -54.799 & -0.669 & -3.183 & -13.270 \\ -0.188 & 0.892 & 6.548 & 1.425 & 0.588 & -5.032 & 0.270 & -0.797 & -6.399 & -2.335 & 0.189 & 6.023 & 3.206 & -0.365 & -6.053 & -0.953 & 0.082 & -0.119 \\ -0.418 & -1.265 & 0.154 & -0.096 & 0.176 & -0.653 & -0.396 & 0.012 & -0.640 & 0.792 & -0.159 & 0.371 & -0.365 & 2.025 & -0.455 & 0.387 & -0.613 & 0.570 \\ -0.967 & 1.007 & -57.516 & -8.136 & -4.453 & 51.761 & -1.917 & 3.130 & 60.058 & 7.363 & -7.532 & -54.799 & -6.053 & -0.455 & 58.165 & 1.574 & 3.850 & -5.908 \\ -0.702 & -1.075 & -0.425 & -1.517 & -0.218 & 2.593 & -1.202 & 1.196 & 1.874 & -1.060 & -0.449 & -0.669 & -0.953 & 0.387 & 1.574 & 3.916 & -0.058 & -2.354 \\ -0.141 & -0.685 & -3.471 & -0.280 & -0.518 & 7.311 & 0.469 & -0.550 & 3.752 & -0.353 & -1.179 & -3.183 & 0.082 & -0.613 & 3.850 & -0.058 & 3.027 & -0.948 \\ -0.046 & 2.141 & -14.502 & 2.194 & -1.909 & 27.213 & -0.780 & 2.179 & -25.536 & 3.299 & -3.942 & -13.270 & -0.119 & 0.570 & -5.908 & -2.354 & -0.948 & 59.215 \end{bmatrix}$$

und ebenso im Startsystem

$$\begin{aligned} \sigma_{02} &= 1 && \dots \text{theoretische Standardabweichung der Gewichtseinheit (vor der Ausgleichung)} \\ s_{02} &= 1.1016 && \dots \text{empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit (nach der Ausgleichung)} \\ f_2 &= 3 && \dots \text{Freiheitsgrad der Netzausgleichung im Startsystem} \end{aligned}$$

und die singuläre Kofaktorenmatrix

$$Q_{x2x2}=10^{-5} \begin{bmatrix} 10.545 & -0.911 & 21.281 & -5.523 & 3.076 & -20.022 & -6.030 & -0.483 & -18.157 & 3.181 & 1.489 & 22.751 & -5.837 & 0.961 & -20.276 & -1.859 & -1.056 & -5.599 \\ -0.911 & 2.703 & -1.155 & 1.970 & -0.190 & 2.969 & -0.603 & -0.778 & 0.465 & 0.321 & 0.120 & -1.528 & 1.333 & -0.884 & 0.105 & -0.139 & -1.160 & 2.113 \\ 21.281 & -1.155 & 56.120 & -16.323 & 7.562 & -57.014 & -13.478 & -2.348 & -47.871 & 8.852 & 3.749 & 57.330 & -13.131 & 2.886 & -52.617 & -3.524 & -3.133 & -12.961 \\ -5.523 & 1.970 & -16.323 & 51.187 & -11.428 & 105.229 & -1.018 & 1.459 & 9.016 & -0.149 & -4.800 & -16.442 & 3.864 & -0.698 & 12.108 & 2.826 & 2.069 & 11.642 \\ 3.076 & -0.190 & 7.562 & -11.428 & 7.810 & -32.311 & -1.215 & -1.061 & -7.245 & 0.600 & 1.539 & 7.831 & -1.703 & 0.621 & -7.567 & -0.759 & -0.909 & -0.581 \\ -20.022 & 2.969 & -57.014 & 105.229 & -32.311 & 261.915 & 3.472 & 5.271 & 42.229 & -4.823 & -12.813 & -57.549 & 13.321 & -2.804 & 49.236 & 8.052 & 7.377 & 23.098 \\ -6.030 & -0.603 & -13.478 & -1.018 & -1.215 & 3.472 & 9.237 & -0.012 & 19.464 & -3.097 & 0.483 & -13.991 & 4.930 & -1.232 & 17.133 & -5.040 & 1.365 & -9.128 \\ -0.483 & -0.778 & -2.348 & 1.459 & -1.061 & 5.271 & -0.012 & 2.601 & 1.130 & -0.892 & -1.389 & -2.110 & 0.225 & -0.404 & 1.986 & 1.162 & -0.029 & 1.343 \\ -18.157 & 0.465 & -47.871 & 9.016 & -7.245 & 42.229 & 19.464 & 1.130 & 62.796 & -8.624 & -2.425 & -48.876 & 14.726 & -3.181 & 56.134 & -7.409 & 4.011 & -22.183 \\ 3.181 & 0.321 & 8.852 & -0.149 & 0.600 & -4.823 & -3.097 & -0.892 & -8.624 & 4.030 & 1.011 & 8.672 & -3.623 & 0.796 & -8.885 & -0.491 & -1.236 & -0.015 \\ 1.489 & 0.120 & 3.749 & -4.800 & 1.539 & -12.813 & 0.483 & -1.389 & -2.425 & 1.011 & 2.909 & 3.635 & -2.019 & -0.180 & -3.063 & -0.964 & -1.461 & -1.896 \\ 22.751 & -1.528 & 57.330 & -16.442 & 7.831 & -57.549 & -13.991 & -2.110 & -48.876 & 8.672 & 3.635 & 59.037 & -13.512 & 2.910 & -53.841 & -3.920 & -2.906 & -13.650 \\ -5.837 & 1.333 & -13.131 & 3.864 & -1.703 & 13.321 & 4.930 & 0.225 & 14.726 & -3.623 & -2.019 & -13.512 & 6.361 & -0.839 & 13.747 & -1.832 & 1.300 & -1.830 \\ 0.961 & -0.884 & 2.886 & -0.698 & 0.621 & -2.804 & -1.232 & -0.404 & -3.181 & 0.796 & -0.180 & 2.910 & -0.839 & 1.968 & -2.988 & 0.315 & -0.500 & 0.373 \\ -20.276 & 0.105 & -52.617 & 12.108 & -7.567 & 49.236 & 17.133 & 1.986 & 56.134 & -8.885 & -3.063 & -53.841 & 13.747 & -2.988 & 55.407 & -1.719 & 3.961 & -5.083 \\ -1.859 & -0.139 & -3.524 & 2.826 & -0.759 & 8.052 & -5.040 & 1.162 & -7.409 & -0.491 & -0.964 & -3.920 & -1.832 & 0.315 & -1.719 & 9.221 & -0.374 & 16.572 \\ -1.056 & -1.160 & -3.133 & 2.069 & -0.909 & 7.377 & 1.365 & -0.029 & 4.011 & -1.236 & -1.461 & -2.906 & 1.300 & -0.500 & 3.961 & -0.374 & 3.150 & -1.933 \\ -5.599 & 2.113 & -12.961 & 11.642 & -0.581 & 23.098 & -9.128 & 1.343 & -22.183 & -0.015 & -1.896 & -13.650 & -1.830 & 0.373 & -5.083 & 16.572 & -1.933 & 53.876 \end{bmatrix}$$

Bevor die Transformation durchgeführt werden kann, ist zunächst zu prüfen, ob die empirischen Varianzen der Gewichtseinheit aus den vorangegangenen Ausgleichungen als gleich genau angenommen werden können. Die Nullhypothese für den statistischen Test (siehe Abschnitt 4.3.3) lautet

$$H_0: E\{s_{01}^2\} = E\{s_{02}^2\} = \sigma_0^2,$$

die Alternativhypothese ergibt sich zu

$$H_A: E\{s_{01}^2\} \neq E\{s_{02}^2\},$$

so daß es sich um eine zweiseitige Fragestellung handelt. Zur Durchführung des Tests wird die F -verteilte Testgröße

$$T_F = \frac{s_{02}^2}{s_{01}^2} = \frac{1.1016^2}{0.9982^2} = 1.22$$

berechnet und mit dem Quantil der Fisher-Verteilung verglichen. Dieses ergibt sich mit den Freiheitsgraden $f_1 = f_2 = 3$ und einer angenommenen Irrtumswahrscheinlichkeit²⁹ von 5% zu $F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2} = 15.44$. Mit $1.22 < 15.44$ kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

²⁹ Kritische Anmerkungen zur Auswahl der „richtigen“ Irrtumswahrscheinlichkeit werden in Abschnitt 4.1 gegeben.

Um die Transformation durchführen zu können, wird nun eine Minimalkonfiguration schätzbarer Größen (Strecken) ausgewählt, mit der sich die Netzgeometrie eindeutig beschreiben läßt. Ausgehend von dem Raumdreieck mit den Eckpunkten 1, 2 und 3 werden alle weiteren Punkte von diesen Eckpunkten aus verbunden. Die dazugehörigen fiktiven Beobachtungen werden mit (2.108) und (2.109) aus den Koordinaten der freien Netzausgleichung berechnet und sind in Tabelle 2.15 aufgeführt.

Tabelle 2.15: Strecken der Minimalkonfiguration in Ziel- und Startsystem

	Zielsystem	Startsystem
$s_{1,2}$ [m]	224.4967	224.7600
$s_{1,3}$ [m]	300.1550	300.3049
$s_{1,4}$ [m]	426.1306	426.3863
$s_{1,5}$ [m]	300.6734	300.8178
$s_{1,6}$ [m]	224.9912	225.1036
$s_{2,3}$ [m]	144.5764	144.6668
$s_{2,4}$ [m]	412.8009	413.0654
$s_{2,5}$ [m]	449.0130	449.3618
$s_{2,6}$ [m]	205.0019	205.2242
$s_{3,4}$ [m]	304.1342	304.2950
$s_{3,5}$ [m]	424.3683	424.5930
$s_{3,6}$ [m]	142.1989	142.2762

Nach der Berechnung der Gewichtsmatrizen (2.110) stehen nun mit \mathbf{I}_1 , \mathbf{P}_1 und \mathbf{I}_2 , \mathbf{P}_2 alle Größen zur Verfügung, um die Transformation nach dem in Abschnitt 2.3.3 oder 2.3.4 beschriebenen Ansatz durchzuführen. Im folgenden wird die Transformation mit impliziter Formulierung der Transformierbarkeit durchgeführt. Als Näherungskordinaten (X_i^0 , Y_i^0 , Z_i^0) werden die in Tabelle 2.14 aufgeführten Werte für das Zielsystem angesetzt.³⁰ Der einzige Transformationsparameter der explizit zu berücksichtigen ist, ist der Maßstabsfaktor für den die Näherung $m^0 = 1$ gewählt wird. Die Aufstellung der Funktionalmatrix \mathbf{A} erfolgt mit (2.125), die Datumsfestlegung erfolgt mit den Bedingungsgleichungen (2.126). Da die Lagestabilität von Punkt 2 nicht gesichert ist, ist dieser Punkt aus der Datumsdefinition und der impliziten Formulierung der Transformierbarkeit auszuschließen. Dies erfolgt derart, daß für diesen Punkt ein weiterer Koordinatensatz mit der Punktnummer 200 eingeführt wird. Für diesen Punkt werden als Näherungskordinaten die gleichen Werte wie für Punkt 2 verwendet. Des weiteren werden der verkürzte Beobachtungsvektor $\Delta \mathbf{l}$ und der Widerspruchsvektors \mathbf{w} benötigt, die sich mit (2.127) zu

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} L_{1,2} - \sqrt{(X_2^0 - X_1^0)^2 + (Y_2^0 - Y_1^0)^2 + (Z_2^0 - Z_1^0)^2} \\ L_{1,3} - \sqrt{(X_3^0 - X_1^0)^2 + (Y_3^0 - Y_1^0)^2 + (Z_3^0 - Z_1^0)^2} \\ \vdots \\ L_{3,6} - \sqrt{(X_6^0 - X_3^0)^2 + (Y_6^0 - Y_3^0)^2 + (Z_6^0 - Z_3^0)^2} \\ \hline l_{1,2} - \frac{1}{m^0} \sqrt{(X_{200}^0 - X_1^0)^2 + (Y_{200}^0 - Y_1^0)^2 + (Z_{200}^0 - Z_1^0)^2} \\ l_{1,3} - \frac{1}{m^0} \sqrt{(X_3^0 - X_1^0)^2 + (Y_3^0 - Y_1^0)^2 + (Z_3^0 - Z_1^0)^2} \\ \vdots \\ l_{3,6} - \frac{1}{m^0} \sqrt{(X_6^0 - X_3^0)^2 + (Y_6^0 - Y_3^0)^2 + (Z_6^0 - Z_3^0)^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ergeben. Stellt man dann das Gleichungssystem (2.130) auf, so erhält man nach einigen Iterationen für die Koordinaten die in Tabelle 2.16 aufgeführte Lösung.

³⁰ Da die Datumsfestlegung in den freien Netzausgleichungen mit Hilfe der homologen Punkte durchgeführt wurde, können die Koordinaten in Tabelle 2.14 als Näherungswerte für die Ausgleichung verwendet werden. Wurde eine Datumsfestlegung getroffen, die nicht mit den homologen Punkten übereinstimmt, so sind die ursprünglichen Näherungskordinaten der freien Netzausgleichung zu verwenden.

Tabelle 2.16: Ausgegliche Koordinaten im Zielsystem mit ihren empirischen Standardabweichungen

Pkt. Nr.	\hat{X} [m]	\hat{Y} [m]	\hat{Z} [m]	$s_{\hat{X}}$ [cm]	$s_{\hat{Y}}$ [cm]	$s_{\hat{Z}}$ [cm]
1	100.006	400.002	29.995	0.4	0.5	2.2
2	300.001	500.006	50.033	1.1	1.0	6.2
3	399.992	399.994	20.005	0.5	0.5	2.3
4	400.003	99.995	69.997	0.6	0.5	2.1
5	100.002	99.999	10.005	0.5	0.4	2.1
6	299.998	300.009	4.998	0.6	0.5	2.1
200	300.102	500.086	50.184	1.1	1.2	6.2

Der ausgeglichene Maßstabsfaktor ergibt sich zu $\hat{m} = 0.99948318$ (-516.8 ppm). Aus den Verbesserungen der Beobachtungen erhält man $\mathbf{v}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{v}_3 = 15.1068$. Mit 24 Beobachtungen, 22 Unbekannten und 6 Bedingungen ergibt sich eine Redundanz von 8 und somit eine empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung von $s_{03} = 1.3742$. Um eine Fehlerschätzung für das Gesamtproblem zu erhalten, müssen die Verbesserungen aller Teilschritte berücksichtigt werden und man erhält

$$s_0^2 = \frac{f_1 s_{01}^2 + f_2 s_{02}^2 + f_3 s_{03}^2}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{3(0.9982)^2 + 3(1.1016)^2 + 8(1.3742)^2}{3+3+8} = \frac{21.7366}{14} = 1.5526$$

und somit eine empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung von $s_0 = 1.2460$. Unter Verwendung der entsprechenden Kofaktoren erhält man damit für den Maßstabsfaktor eine empirische Standardabweichung von 18.1 ppm, die empirischen Standardabweichungen der Koordinaten sind bereits in Tabelle 2.16 aufgeführt.

Als nächstes wird nun gezeigt, wie sich auf der Grundlage der obigen Ausgleichungsergebnisse die ausgeglichenen Koordinaten des Startsystems und die Transformationsparameter Translation und Rotation exakt berechnen lassen. Dazu wird zunächst mit (2.131), unter Verwendung der Koordinaten in Tabelle 2.16 und des Maßstabes \hat{m} , eine Minimalkonfiguration schätzbarer Größen \mathbf{I}_2 (Strecken) mit der Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q}_{1_2,1_2}$ für das Startsystem berechnet. Diese fiktiven Beobachtungen sind in Tabelle 2.17 aufgeführt, die erforderliche Gewichtsmatrix ergibt sich zu $\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_{1_2,1_2}^{-1}$.

Tabelle 2.17: Fiktive Beobachtungen (Strecken) einer Minimalkonfiguration für das Startsystem

	Startsystem
$s_{1,200}$ [m]	224.7561
$s_{1,3}$ [m]	300.3077
$s_{1,4}$ [m]	426.3684
$s_{1,5}$ [m]	300.8233
$s_{1,6}$ [m]	225.1058
$s_{200,3}$ [m]	144.6670
$s_{200,4}$ [m]	413.0631
$s_{200,5}$ [m]	449.3687
$s_{200,6}$ [m]	205.2218
$s_{3,4}$ [m]	304.2930
$s_{3,5}$ [m]	424.5904
$s_{3,6}$ [m]	142.2744

Damit lassen sich dann die Koordinaten des Startsystems berechnen. Dieses Problem ist eindeutig lösbar und somit kein Ausgleichungsproblem. Dennoch bietet sich an, die Koordinaten mit Hilfe einer freien Netzausgleichung zu bestimmen, wobei sich dann alle Verbesserungen zu null ergeben. Zudem erhält man aus dieser Berechnung die Kofaktoren der Koordinaten im Startsystem mit denen dann, unter Verwendung des oben berechneten Wertes für s_0 , eine Fehlerschätzung durchgeführt werden kann. Als Näherungskordinaten (x_i^0 , y_i^0 , z_i^0) werden die in Tabelle 2.14 aufgeführten Werte für das Startsystem verwendet. Bei der Datumsfestlegung ist wieder zu beachten, daß Punkt 2 nicht daran teilnimmt. Als Ergebnis erhält man die ausgeglichenen Koordinaten in Tabelle 2.18.

Tabelle 2.18: Koordinaten im Startsystem mit ihren empirischen Standardabweichungen

Pkt. Nr.	\hat{x} [m]	\hat{y} [m]	\hat{z} [m]	$s_{\hat{x}}$ [cm]	$s_{\hat{y}}$ [cm]	$s_{\hat{z}}$ [cm]
1	-62.137	414.153	71.814	0.9	0.5	2.1
200	73.852	590.897	43.820	2.6	1.0	5.7
3	188.777	543.746	-30.325	0.8	0.5	2.2
4	327.601	272.976	-28.001	0.6	0.5	2.1
5	52.663	143.431	8.370	0.7	0.4	2.1
6	139.396	410.330	-28.397	0.8	0.5	2.0

Unter Verwendung von vier homologen Punkten, in diesem Fall 1, 3, 4 und 5, können nun mit dem Gleichungssystem (2.132) die Rotationsmatrix und die Translationsparameter berechnet werden. Als Ergebnis erhält man

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.84739756 & 0.43177062 & -0.30901701 \\ -0.40532906 & 0.90198307 & 0.14877802 \\ 0.34296609 & -0.00082056 & 0.93934743 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_0 \\ \hat{Z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.9130 \\ -9.2156 \\ -15.7882 \end{bmatrix}$$

und aus (2.134), (2.137) und (2.138) die Rotationswinkel

$$\hat{\omega}_x = 0.055611 \text{ gon}, \quad \hat{\omega}_y = 22.286319 \text{ gon}, \quad \hat{\omega}_z = 28.403138 \text{ gon}.$$

Damit sind alle Parameter der räumlichen Transformation exakt bestimmt. Um eine strenge Fehlerschätzung für alle Unbekannten zu erhalten³¹, können diese nun in den Transformationsansatz in Abschnitt 2.3.3 eingesetzt werden. Als Beobachtungen werden die in Tabelle 2.15 aufgeführten Beobachtungen mit den dazugehörigen Gewichtsmatrizen verwendet, als „Näherungswerte“ für die Koordinaten des Startsystems werden die Werte aus Tabelle 2.18, für das Zielsystem die aus Tabelle 2.16 eingesetzt. Da alle Parameter bereits die exakte Lösung sind, ist keine Iteration erforderlich. Nach dieser Ausgleichung erhält man die gewichtete Verbesserungsquadratsumme der Beobachtungen $\mathbf{v}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{v}_3 = 15.1068$. Mit 24 Beobachtungen, 43 Unbekannten und 27 Bedingungen ergibt sich eine Redundanz von 8 und somit wieder eine empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung von $s_{03} = 1.3742$. Um eine Fehlerschätzung für das Gesamtproblem zu erhalten, müssen die Verbesserungen aller Teilschritte berücksichtigt werden und man erhält

$$s_0^2 = \frac{f_1 s_{01}^2 + f_2 s_{02}^2 + f_3 s_{03}^2}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{3(0.9982)^2 + 3(1.1016)^2 + 8(1.3742)^2}{3 + 3 + 8} = \frac{21.7366}{14} = 1.5526$$

und somit eine empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung von $s_0 = 1.2460$. Unter Verwendung der entsprechenden Kofaktoren lassen sich nun zu allen Unbekannten die empirischen Standardabweichungen angeben. Die Koordinaten mit ihren empirischen Standardabweichungen sind in Tabelle 2.19 aufgeführt.

Tabelle 2.19: Koordinaten in Ziel- und Startsystem mit ihren empirischen Standardabweichungen

Pkt. Nr.	\hat{X} [m]	\hat{Y} [m]	\hat{Z} [m]	$s_{\hat{X}}$ [cm]	$s_{\hat{Y}}$ [cm]	$s_{\hat{Z}}$ [cm]	\hat{x} [m]	\hat{y} [m]	\hat{z} [m]	$s_{\hat{x}}$ [cm]	$s_{\hat{y}}$ [cm]	$s_{\hat{z}}$ [cm]
1	100.006	400.002	29.995	0.4	0.5	2.2	-62.137	414.153	71.814	0.9	0.5	2.1
2	300.001	500.006	50.033	1.1	1.0	6.2	73.852	590.897	43.820	2.6	1.0	5.7
3	399.992	399.994	20.005	0.5	0.5	2.3	188.777	543.746	-30.325	0.8	0.5	2.2
4	400.003	99.995	69.997	0.6	0.5	2.1	327.601	272.976	-28.001	0.6	0.5	2.1
5	100.002	99.999	10.005	0.5	0.4	2.1	52.663	143.431	8.370	0.7	0.4	2.1
6	299.998	300.009	4.998	0.6	0.5	2.1	139.396	410.330	-28.397	0.8	0.5	2.0

Die Transformationsparameter mit ihren empirischen Standardabweichungen sind in Tabelle 2.20 zusammengestellt.

³¹ Eine strenge Fehlerschätzung für die Koordinaten erhält man bereits aus den vorangegangenen Berechnungen, deren Ergebnisse in den Tabellen 2.16 und 2.18 dargestellt sind. Der letzte Berechnungsschritt dient dazu, eine strenge Fehlerschätzung für die Transformationsparameter durchzuführen, da dafür die Kovarianzen zwischen den Koordinaten im Start- und denen im Zielsystem zu berücksichtigen sind.

Tabelle 2.20: Transformationsparameter mit ihren empirischen Standardabweichungen

Parameter	Wert	empirische Standardabweichung
\hat{X}_0	-3.9130 m	0.5 cm
\hat{Y}_0	-9.2156 m	0.5 cm
\hat{Z}_0	-15.7882 m	0.1 cm
$\hat{\omega}_x$	0.055611 gon	0.0 mgon
$\hat{\omega}_y$	22.286319 gon	0.0 mgon
$\hat{\omega}_z$	28.403138 gon	0.0 mgon
\hat{m}	0.99948318 (-516.8 ppm)	1.81E-05 (18.1 ppm)

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, daß diese letzte Ausgleichung nur dazu dient, eine korrekte Fehlerschätzung für die Translationen und Rotationen unter Berücksichtigung aller Kovarianzen zu erhalten.

2.3.6 Beurteilung der Transformationsansätze

Wie bei der ebenen Transformation, so ist auch der Ansatz der traditionellen räumlichen Helmerttransformation aufgrund von stark vereinfachten Modellannahmen nicht geeignet, um eine Ausgleichung unter strenger Berücksichtigung der Meßgenauigkeit im Start- und Zielsystem durchzuführen. Ein erweiterter Ansatz von (KOCH et al. 2000) betrachtet die Koordinaten im Start- und Zielsystem als variable Größen und ermöglicht somit die Einführung von Kovarianzmatrizen für die Koordinaten beider Systeme. Entstammen die Koordinaten jedoch freien Netzausgleichungen, so sind deren Kofaktorenmatrizen singulär und der Lösungsweg von (Koch et al. 2000) kann ohne die Berücksichtigung zusätzlicher deterministischer Informationen kein Ergebnis liefern.

Um die exakte Berücksichtigung der stochastischen Eigenschaften der Koordinaten im Start- und Zielsystem zu ermöglichen, wurde ein neuer Transformationsansatz entwickelt. Auf Grundlage von gegebenen Koordinaten und deren singulären Kofaktorenmatrizen wird jeweils eine Minimalkonfiguration schätzbarer Größen berechnet. Dadurch wird eine Trennung der stochastischen und deterministischen Informationen der singulären Kofaktorenmatrizen erreicht. Die Transformation erfolgt dann auf Grundlage dieser fiktiven Beobachtungen in Verbindung mit einer Datumsfestlegung. Die Grundidee besteht darin, die Beobachtungen derart auszugleichen, daß sich für die homologen Punkte eine exakte Transformierbarkeit der Koordinaten ergibt.

Eine Möglichkeit der Realisierung dieser Grundidee besteht darin, die Koordinaten im Start- und Zielsystem und die sieben Transformationsparameter in einer gemeinsamen Ausgleichung zu bestimmen. Neben der Datumsdefinition im Start- und Zielsystem wird die Forderung nach exakter Transformierbarkeit der homologen Punkte über Bedingungsgleichungen in die Ausgleichung eingeführt. Als Ergebnis erhält man die Koordinaten in Start- und Zielsystem, sowie die sieben Transformationsparameter. Für diese Ausgleichung sind aber neben den Näherungskordinaten auch geeignete Näherungswerte für alle Transformationsparameter bereitzustellen.

Eine weitere Möglichkeit der Realisierung besteht darin, die Forderung nach exakter Transformierbarkeit der homologen Punkte implizit zu formulieren. Dies geschieht dadurch, daß nur die Koordinaten im Zielsystem als Unbekannte für diese Punkte angesetzt werden. Die Transformationsparameter Translation und Rotation brauchen somit nicht explizit in das mathematische Modell aufgenommen werden. Als Ergebnis dieser Ausgleichung erhält man direkt die Koordinaten im Zielsystem. Die ausgeglichenen Beobachtungen erfüllen die Forderung, daß die Form der Netzes (bzw. die Form eines Teilnetzes) in Start- und Zielsystem exakt übereinstimmt. Somit besteht die Möglichkeit, unter Verwendung der ausgeglichenen Beobachtungen des Startsystems auch die Koordinaten in diesem System zu berechnen. Da somit die ausgeglichenen Koordinaten in beiden Systemen vorliegen, können dann, unter Verwendung von vier homologen Punkten, die exakten Werte für die Translation und die Rotation berechnet werden. Mit der impliziten Formulierung der Transformierbarkeit besteht somit die Möglichkeit die Parameter einer räumlichen Ähnlichkeitstransformation *ohne Näherungswerte* für Translation und Rotation exakt zu bestimmen. Ein weiterer Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, daß sich auch die Ergebnisse mehrerer Meßperioden auf einfache Weise in ein gemeinsames Zielsystem transformieren lassen.

Weiterhin ist zu erwähnen, daß sich die entwickelten Transformationsansätzen auch auf sämtliche Spezialfälle (z.B. „Festhalten“ eines Koordinatensatzes) anwenden lassen. Wie in Abschnitt 2.2.7 beschrieben, kann dies über die Einführung von Bedingungsgleichungen oder durch Einführung größerer Beobachtungsgewichte erreicht werden.

3 Methoden der Parameterschätzung

Liegen bei einer Problemstellung mehr Beobachtungen als Unbekannte vor ($n > m$), so ist dieses Problem überbestimmt (Ausgleichungsproblem) und es besteht die Aufgabe, eine Anpassung der Parameter des mathematischen Modells an die empirischen Daten (Meßwerte) auf eine sinnvolle Weise vorzunehmen. Dies kann derart erfolgen, daß für die Beobachtungen die sog. Verbesserungen v_i eingeführt werden und für eine Funktion dieser Verbesserungen eine zusätzliche Forderung (z.B. Minimierung einer Norm) aufgestellt wird. Die am häufigsten aufgestellte Forderung ist, daß die Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen zum Minimum wird, was als Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet wird. Diese wird kurz vorgestellt, wobei insbesondere auf die Problematik der Suche grober Fehler hingewiesen wird.

Werden Modell- und Beobachtungsfehler unbekannter Art und Größe vermutet, so werden oftmals alternative Schätzverfahren eingesetzt. Nach einer Klassifizierung in „resistente“ und „robuste“ Verfahren, werden zwei Schätzer mit hohem Bruchpunkt (L_1 -Schätzer, LMS-Schätzer) vorgestellt. Die numerische Lösung alternativer Parameterschätzungen wird am Beispiel der L_1 -Schätzung näher untersucht. Anhand eines numerischen Beispiels wird gezeigt, daß die Lösung mit Hilfe einer „regewichteten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten“ unter Umständen zu einer falschen Lösung führen kann. Daraufhin wird der Einsatz heuristischer Optimierungsverfahren vorgeschlagen. Bei Ausführungen zur Zuverlässigkeit alternativer Verfahren wird herausgestellt, daß diese auch nicht immer grundsätzlich in der Lage sind, Ausreißer zu erkennen.

Eine Parameterschätzung, die auf rein geometrischen Überlegungen beruht, ist die Ausgleichung nach maximaler Korrelation. Die theoretischen Grundlagen, die auf den Arbeiten von PETROVIC (1991, 2002) beruhen, werden angegeben, danach erfolgt eine Erweiterung für den Fall gewichteter und korrelierter Beobachtungen. Zudem wird bewiesen, unter welchen Umständen die Lösung nach kleinsten Quadraten in der Unterklasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation enthalten ist, was insbesondere für die praktische Anwendung von Bedeutung ist. Die theoretischen Grundlagen werden um die Fälle „Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten“ und „singuläre Ausgleichungsprobleme“ erweitert.

3.1 Parameterschätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Werden an die Beobachtungen sog. Verbesserungen v_i angebracht, so bedarf es für eine Funktion dieser Verbesserungen einer zusätzlichen Forderung. Die am häufigsten aufgestellte Forderung ist, daß die Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen mit

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i^2 \rightarrow \min \quad (3.1)$$

zum Minimum wird, was als Methode der kleinsten Quadrate (oder L_2 -Norm-Schätzung) bezeichnet wird. Diese Parameterschätzung besitzt selbstverständlich die Eigenschaft, daß die Standardabweichung jeder ausgeglichenen Größe minimal wird (Prinzip der minimalen Varianz). Zudem führt die Anwendung dieses Prinzips zu Formeln, die rechentechisch besonders einfach zu handhaben sind. Eine Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ist bereits in den Abschnitten 2.2 und 2.3 dargestellt.

Dieses Schätzprinzip wurde etwa zeitgleich von C.F. GAUSS und A.M. LEGENDRE zu Beginn des 19. Jahrhunderts entdeckt und zunächst auf astronomische Problemstellungen angewendet. Einen interessanten Einblick in die Entstehungsgeschichte bieten Briefwechsel von C.F. GAUSS, die unter „Zur Geschichte der Entdeckung der Methode der kleinsten Quadrate“ in (GAUSS 1900b, S. 136-141) dokumentiert sind und in denen C.F. GAUSS beschreibt, daß er diese Methode seit 1794 vielfach angewendet hat. Eine Diskussion über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate ist ebenfalls unter „Kritische Bemerkungen zur Methode der kleinsten Quadrate“ anhand von Briefwechseln in (GAUSS 1900b, S. 142-148) dokumentiert. Eine Zusammenstellung von Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate ist in (GAUSS 1887) zu finden. Als weiteres grundlegendes Werk ist (HELMERT 1924) anzusehen, worin neben Anmerkungen zur geschichtlichen Entwicklung unter anderem die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen beschrieben wird. Eine Zusammenfassung der historischen Entwicklung und der Gaußschen Begründungen für die Methode der kleinsten Quadrate ist in (CASPARY 1988) zu finden. Zudem werden kritische Anmerkungen zur Anwendung dieser Methode aufgeführt, die jedem Anwender bewußt sein sollten.

Der Durchbruch dieser Methode kam mit den Anwendungen in der Landesvermessung ab ca. 1850. Heutzutage ist die Methode der kleinsten Quadrate die Standard-Auswertemethode für nahezu alle Fragestellungen in der Geodäsie und Geoinformationstechnik. Umfangreiche Softwarepakete erleichtern die Anwendung, so daß diese

Methode (leider) oftmals als Black-box-Verfahren angewendet wird. Auch in der DIN 1319 Teil 4 (DIN 1998) ist die Anwendung dieses Schätzprinzips bei überbestimmten Problemstellungen verankert.

Neben einer rein geometrischen Interpretation der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten, nämlich der Minimierung einer Norm, läßt sich auch eine statistische Begründung finden (Maximum-Likelihood-Schätzung). Dies setzt aber voraus, daß es sich bei den Beobachtungsfehlern um normalverteilte Zufallsgrößen handelt. In (HELMERT 1924, S. 115) wird dazu ausgeführt: „Läßt sich nachweisen, daß das Fehlervorkommen der Gaußschen Form (Anm.: Normalverteilung) [...] entspricht, so erhalten wir [...] durch die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten. Zugleich besitzen diese Werte die größten Gewichte bzw. die kleinsten mittleren Fehler. Entspricht aber das Fehlervorkommen dem Gaußschen Fehlergesetze nicht, so haben wir nicht mehr die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten, dagegen in ihrer Bestimmung immer noch die kleinsten mittleren Fehler [...].“ Diesen warnenden Hinweis kann man an mehreren Stellen in der Literatur finden, so führt z.B. (LINNIK 1961, S. 284) aus, daß die Optimaleigenschaften der Methode der kleinsten Quadrate auf das engste mit der Normalverteilung des Fehlervektors der Beobachtungen verbunden sind.

Es ist aber unbedingt zu beachten, daß Messungen die Forderung nach strenger Normalverteilung *nicht* erfüllen und auch nicht erfüllen können; sie sind bestenfalls näherungsweise normalverteilt (siehe hierzu z.B. CASPARY 1988; PETROVIC 2002, S. 12). Wird den geodätischen Messungen trotzdem eine Normalverteilung zugesprochen³², so handelt es sich hierbei lediglich um eine *Annahme*, die der tatsächlichen Natur der Messungen von Fall zu Fall mal mehr und mal weniger gut entsprechen kann. Besitzt die Verteilungsfunktion lediglich die Eigenschaft der Symmetrie, werden die Ergebnisse einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten in der Literatur oftmals die „plausibelsten“ oder „günstigsten“ genannt (siehe z.B. WELSCH et al. 2000). Doch gerade der Begriff „plausibel“ sollte mit großer Vorsicht verwendet werden, da mit ihm oftmals eine statistische Interpretierbarkeit der Ergebnisse verbunden wird, die aber nur für normalverteilte Beobachtungen sachgemäß ist. Für den Fall, daß

- die Meßfehler nicht normalverteilt sind, oder
- die Meßwerte mit groben Fehlern behaftet sind, oder
- die Modellbildung unvollständig ist (systematische Fehler),

liefert die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zwar immer noch ein Ergebnis, das die Forderung (3.1) erfüllt (also im Sinne der Minimierung einer Norm ein „günstiges“ Ergebnis liefert), eine statistische Interpretation dieser Ergebnisse ist jedoch nicht mehr möglich. Beim Vorliegen grober Fehler in den Daten oder einer unvollständigen Modellbildung liefert die Ausgleichung zudem unrealistische Modellparameter, was zur Folge hat, daß eine Identifikation grober Fehler bzw. fehlender Modellanteile anhand der Residuen oftmals unmöglich ist. Ist zu befürchten, daß es Bereiche gibt, in denen das angesetzte Modell nicht gültig ist (z.B. die Forderung nach exakter Transformierbarkeit von Koordinaten vom Start- ins Zielsystem kann aufgrund von Punktverschiebungen nicht erfüllt werden), oder werden grobe Fehler in den Messungen vermutet, so ist ein Preprocessing erforderlich. Das Ziel aller Voruntersuchungen, unabhängig von der gewählten Methode, besteht grundsätzlich darin, die Daten zu bereinigen und das Modell gegebenenfalls zu erweitern, so daß die Methode der kleinsten Quadrate angewendet werden kann.

Für diese Voruntersuchung stehen verschiedene Strategien zur Verfügung:

1. Suche nach groben und systematischen Fehlern anhand der Ergebnisse einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten in Form einer *Residuenanalyse*. Mit der in (HELMERT 1924) vorgeschlagenen Prüfung der Vorzeichenverteilung der Residuen kann auf das Vorhandensein systematischer Fehler geschlossen werden. Über die Art des systematischen Fehlers lassen sich jedoch i.d.R. keine Rückschlüsse ziehen. Die Elimination von Ausreißern kann sequentiell mit Hilfe des „data snoopings“ erfolgen. Dies kann gelingen, wenn maximal 3 – 5% der Daten verfälscht sind (NIEMEIER 2002), der Erfolg hängt jedoch sehr stark von der Geometrie des Ausgleichungsproblems (Verteilung der Redundanzanteile) ab. Aufgrund der bekannten „Verschmierungseffekte“ (Einfluß grober Fehler auf Nachbarbeobachtungen) bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, stößt dieses Verfahren beim Vorliegen mehrerer Ausreißer schnell an seine Grenzen.
2. Sind mehrere grobe Fehler in den Daten zu befürchten, so ist ein Preprocessing mit einer *anderen Zielfunktion* ratsam. Hierzu zählt die Anwendung der sog. resistenten und robusten Verfahren, die in Abschnitt 3.2 beschrieben werden. Ein typisches resistentes Verfahren ist z.B. die L_1 -Norm-Schätzung mit der Zielfunktion

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \rightarrow \min \quad , \quad (3.2)$$

³² In der DIN 18 709 Teil 4, Nr. 2.5.1, Anm. 2 (DIN 1998) wird dazu ausgeführt: „Wenn nicht besondere Umstände dagegen sprechen, werden die Werte der im Vermessungswesen vorkommenden Meßgrößen als normalverteilt angenommen. Eine Überprüfung dieser Hypothese im Einzelfall ist wegen des gewöhnlich zu geringen Umfangs der Meßreihen nur selten möglich.“

bei der versucht wird, grob fehlerhafte Beobachtungen zu lokalisieren. Eine weitere alternative Zielfunktion, die bei unvollständigen geodätischen Modellen angewendet werden kann, um fehlende Modellanteile zu identifizieren, ist der lineare Korrelationskoeffizient (quadriert) zwischen den Daten l und dem funktionalen Modell $f(u)$, der durch eine Ausgleichung nach maximaler Korrelation (siehe Abschnitt 3.3) mit

$$r^2(l, f(u)) \rightarrow \max \quad (3.3)$$

seinen maximal möglichen Wert annimmt. All diese Verfahren haben die Aufgabe, den Datensatz zu bereinigen bzw. fehlende Modellanteile aufzuzeigen. Die endgültige Parameterschätzung kann danach mit der Methode der kleinsten Quadrate erfolgen.

Neben den dargestellten Strategien ist auch der Einsatz von kombinatorischen Verfahren denkbar. Ein Verfahren, daß auf dieser Grundlage arbeitet, wurde bereits entwickelt und wird als LMS-Schätzer (siehe Abschnitt 3.2.5) bezeichnet. Grundsätzlich soll, unabhängig von der gewählten Methode, als Ergebnis einer Voruntersuchung feststehen, welche *größtmögliche Untergruppe* der Eingangsdaten (evtl. nach einer Vervollständigung des mathematischen Modells) einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten unterzogen werden kann.

Auf dem Gebiet der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze besteht ebenfalls die Aufgabe, aus der Gesamtheit aller Punkte die größtmögliche Untergruppe herauszufinden, die mit der Forderung nach exakter Transformierbarkeit (im Rahmen der Meßgenauigkeit) einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten unterzogen werden kann. Da diese Untergruppe jedoch im voraus nicht bekannt ist, sind ebenfalls Strategien zu entwickeln, diese zu lokalisieren. In der Literatur (z.B. WELSCH et al. 2000) werden dazu i.d.R. sequentielle Verfahren (Einzelpunktanalyse) mit metrischen Kriterien vorgeschlagen. Im nächsten Abschnitt folgen nun einige allgemeine Anmerkungen zum Einsatz und zur numerischen Lösung alternativer Schätzverfahren.

3.2 Parameterschätzung mit alternativen Schätzverfahren

3.2.1 Allgemeines

Sind die Voraussetzungen für eine sachgerechte Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate (vollständiges funktionales Modell, normalverteilte Beobachtungsfehler) nicht erfüllt, so liefert die Ausgleichung unrealistische Modellparameter. Zudem sind, aufgrund der bekannten „Verschmierungeffekte“, fehlende Modellanteile und Ausreißer in den Beobachtungen oftmals nicht mehr anhand der Residuen zu identifizieren. Grob falsche Beobachtungen können verursacht werden z.B. durch Ablesefehler, Punktverwechslungen, Fehler bei der Datenübertragung. Eine unvollständige Modellbildung liegt z.B. vor, wenn bei der Transformation geodätischer Netze Stützpunkte als stabil angenommen werden, obwohl sie sich verschoben haben. Da diese Verschiebungen grundsätzlich eine beliebige Größe und Richtung annehmen können, handelt es sich aber nicht um systematische Einflüsse. Für die Behandlung unvollständiger Modelle, bei denen systematische Anteile fehlen, wurde die Ausgleichung nach maximaler Korrelation entwickelt. Die Grundlagen sind in (PETROVIC 1991, 1997, 2002) zu finden. Anwendungen dieser Methode in der Physikalischen Geodäsie sind in (PETROVIC 1993) dargestellt, Anwendungen im Bereich der Formerkennung sind in (NEITZEL 1998) zu finden.

Mit der Ausgleichung beim Vorliegen von Modell- und Beobachtungsfehlern unbekannter Art beschäftigen sich die sog. resistenten und robusten Verfahren, deren Entwicklung mit den Arbeiten von HUBER und HAMPEL auf dem Gebiet der mathematischen Statistik in den 60er Jahren begann. Ein Überblick über die Entwicklung der robusten Verfahren mit Angabe der wichtigsten Literaturstellen ist in (HAMPEL 2001) zu finden. Seit den 70er Jahren haben die robusten Verfahren auch Einzug in die geodätische Anwendung gefunden (z.B. CAROSIO 1979), einen aktuellen Überblick bieten z.B. (NIEMEIER 2002) und (WICKI 1999). Da in der Geodäsie die alternativen Schätzverfahren zumeist durchweg als „robust“ bezeichnet werden, wird im folgenden eine Klassifizierung vorgenommen, um die Anwendungsbereiche der unterschiedlichen Verfahren klar abzugrenzen.

3.2.2 Klassifizierung alternativer Schätzverfahren

Die folgende Klassifizierung alternativer Schätzverfahren in *resistente* Verfahren und *robuste* Verfahren ist in (CASPARY 1996) zu finden und wird hier kurz dargestellt.

Ein statistisches Verfahren wird als resistent bezeichnet, wenn es unempfindlich gegen Veränderungen der Daten ist. Diese Verfahren dienen vorwiegend der Datenanalyse und diagnostischen Zwecken. Wahrscheinlichkeitstheorie, Annahmen über die Verteilung und statistische Schätzkriterien spielen keine oder nur eine untergeordnete Rolle. Ein typisches Beispiel für ein derartiges Schätzverfahren ist der L_1 -Norm-Schätzer.

Ein Schätzverfahren ist robust, wenn es resistent ist und theoretisch begründete Schätzkriterien (z.B. Effizienz, Konsistenz, asymptotische Normalverteilung) erfüllt. Sie stellen zumeist einen Kompromiß aus mehreren Anforderungen dar und werden unter drei Hauptzielen entwickelt:

1. Der Einfluß einzelner Beobachtungen auf das Schätzergebnis soll überall beschränkt sein.
2. Der Schätzer soll möglichst hohe Effizienz für das parametrische Modell besitzen, das den guten Daten zugrunde gelegt worden ist.
3. Der Schätzer soll einen hohen Bruchpunkt aufweisen, d.h. er soll viele Ausreißer verkraften können.

Zur Gruppe der robusten Schätzer gehören die von HUBER entwickelten M-Schätzer. In Weiterentwicklungen der M-Schätzer wird versucht, bei großen Verbesserungen in den Hebelpunkten³³ deren Einfluß auf das Schätzergebnis zu reduzieren. Die aktuellste Entwicklung auf diesem Gebiet stellt der in (WICKI 1999) entwickelte BIBER³⁴-Schätzer dar. Wie ein sinnvoller Einsatz resistenter und robuster Verfahren erfolgen kann, wird im folgenden Abschnitt aufgezeigt. In Bezug auf die endgültige Parameterschätzung sei aber noch ein warnender Hinweis angeführt, mit dem die Ausführungen in (CASPARY 1996) schließen: „Auf keinen Fall sollten aber Diagnosewerkzeuge für die Parameterschätzung eingesetzt werden“.

3.2.3 Auswertestrategie bei der Anwendung alternativer Schätzverfahren

Zunächst wird die in (NIEMEIER 2002) und (WICKI 1999) vorgeschlagene Anwendung eines modifizierten M-Schätzers (BIBER-Schätzer) dargestellt und kommentiert. Im Anschluß daran wird ein alternativer Berechnungsablauf mit einem vorgeschalteten resistenten Verfahren vorgeschlagen.

Schritt 1: Nach Aufbereitung der Rohdaten und Aufstellung des funktionalen und stochastischen Modells wird eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt. Es wird angenommen, daß nur ein geringer Teil der Beobachtungen fehlerbehaftet ist.

Schritt 2: Ist das Datenmaterial mit groben Fehlern behaftet, so werden für einige Beobachtungen normierte Verbesserungen $|w_i| > c$ auftreten. Der konstante Grenzwert c kann vom Anwender in Abhängigkeit von der Güte der Beobachtungen frei gewählt werden (erfahrungsgemäß wird $2.5 \leq c \leq 4$ gewählt). Aufgrund der bekannten „Verschmierungseffekte“ (Einfluß grober Fehler auf Nachbarbeobachtungen) setzt an dieser Stelle ein iterativer Prozeß ein. Die Beobachtung mit der größten normierten Verbesserung $|w_i| > c$ wird jeweils als Ausreißer eingestuft.

Schritt 3: Die Parameter $\hat{\mathbf{x}}_{\text{rob}}$ und die Verbesserungen \mathbf{v}_{rob} müssen in einem neuen Ausgleichungsablauf bestimmt werden, in dem der Einfluß der als Ausreißer deklarierten Beobachtung reduziert ist. Für den Ausgleichungsansatz

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (3.4)$$

werden verschiedene Möglichkeiten angegeben, den Einfluß einer Beobachtung zu reduzieren:

1. den Anteil an den Normalgleichungen ändern,
2. die Beobachtung selbst zu ändern („Modifikation“ der Beobachtung) oder
3. das Gewicht p_i zu reduzieren.

Da diese Vorgehensweisen gleichwertig sind, schlägt (WICKI 1999) vor, die Beobachtung derart zu verändern, daß die modifizierte normierte Verbesserung $w_{i,\text{mod}} = c$ wird. Dazu werden zwei Berechnungsschritte angegeben

$$d_i = v_i - \text{sign}(v_i) \cdot c \cdot \sigma_{v_i} \quad (3.5)$$

$$l_{i,\text{mod}} = l_i - \frac{d_i}{r_i} \quad (3.6)$$

wobei mit r_i der Redundanzanteil der Beobachtung l_i bezeichnet wird. Mit dem so veränderten Beobachtungsvektor werden die Parameter $\hat{\mathbf{x}}_{\text{rob}}$ und die Verbesserungen \mathbf{v}_{rob} bestimmt. Die Schritte 2 und 3 werden so lange wiederholt, bis alle Verbesserungen in das mittlere Intervall der Schätzfunktion fallen.

³³ Als Hebelpunkte oder -beobachtungen werden solche Beobachtungen bezeichnet, die deutlich entfernt von der geometrischen Anordnung der übrigen Beobachtungen liegen und zudem einen geringen Redundanzanteil aufweisen.

³⁴ Bounded Influence by Standardized Residuals

Ein besonderes Augenmerk soll an dieser Stelle dem Punkt 3 der obigen Aufzählung zukommen. Während sich der Vorgang „Gewichtsreduktion“ noch relativ „harmlos“ anhört, so zeigt sich unter Punkt 2 was sich tatsächlich dahinter verbirgt, nämlich eine Veränderung des Meßwertes, die eine beliebige Größe annehmen kann. Im Laufe der iterativen Fehlersuche kann also der Fall eintreten, daß mehrere Meßwerte manipuliert werden. Da eine Elimination dieser Ausreißer nicht vorgesehen ist, nehmen diese somit auch an der abschließenden Bestimmung der Parameter mit Hilfe des BIBER-Schätzers teil. Für einen Geodäten, der seit jeher auch ein Experte für Meßtechnik ist, ist es natürlich nicht annehmbar, daß ein Berechnungsverfahren einen Teil seiner Messungen solange verändert, bis ein Endergebnis erzielt wird, bei dem mit $|w_i| \leq c$ alle normierten Verbesserungen einen bestimmten Grenzwert nicht überschreiten. Zudem stellt sich die Frage, wie realistisch die derart geschätzten Modellparameter sind. Dazu an dieser Stelle ein Zitat aus (CASPARY 1996): „Alle durch diese Methoden (Anm.: L_1 -Schätzung, Einsatz eines M-Schätzers) aufgedeckten zweifelhaften Beobachtungen sind sorgfältig zu analysieren, eventuell zu streichen und erforderlichenfalls nachzubeobachten. Erst danach erfolgt die Parameterschätzung“. Eine endgültige Parameterschätzung mit dem BIBER-Schätzer erscheint somit nicht sachgemäß, vielmehr sollte er als Diagnosewerkzeug eingesetzt werden, um einen Einblick in die Beschaffenheit der Meßdaten zu ermöglichen. Nach der Bereinigung der Daten kann dann eine endgültige Parameterschätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgen. Auf einen sachgemäßen Einsatz des BIBER-Schätzers weist auch (WICKI 1999, S. 171) hin: „Häufig wird der BIBER-Schätzer der Methode der kleinsten Quadrate vorgeschaltet, um grobe Fehler in den Beobachtungen einfach, effizient und automatisch aufdecken zu können.“

Der prozentuale Anteil fehlerhafter Daten an den Gesamtdaten, bei dem ein Schätzverfahren noch brauchbare Ergebnisse liefert, wird als *Bruchpunkt* bezeichnet. Bei den modifizierten M-Schätzern beträgt dieser Anteil ca. 5 bis 10% (NIEMEIER 2002). Bei der L_1 -Schätzung beträgt dieser Bruchpunkt nahe 50%, eine Eigenschaft, die man sich an dem Median einer Meßreihe leicht veranschaulichen kann. Der LMS-Schätzer weist ebenfalls einen Bruchpunkt von bis zu 50% auf. Ist bei einer Ausgleichung mit einem größeren Anteil fehlerhafter Beobachtungen zu rechnen, wird die Anwendung eines (modifizierten) M-Schätzers fehlerhafte Schätzungen für die Parameter liefern. Ein „sicherer“ Ablauf für die Parameterschätzung könnte daher wie folgt aussehen:

Schritt 1: Nach Aufbereitung der Rohdaten und Aufstellung des funktionalen und stochastischen Modells wird eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt. Ist das Datenmaterial mit groben Fehlern behaftet, so werden für einige Beobachtungen normierte Verbesserungen $|w_i| > c$ auftreten.

Schritt 2: Um einen tieferen Einblick in die Daten zu erhalten, wird ein resistentes Schätzverfahren mit einem hohen Bruchpunkt eingesetzt (z.B. L_1 -Schätzung, LMS-Methode). Die als fehlerhaft einzustufenden Beobachtungen werden eventuell gestrichen oder (falls möglich) nachbeobachtet.

Schritt 3: Da ein geringer Anteil „kleiner“ grober Fehler, insbesondere bei geringer Redundanz des Modells, die Diagnose unerkannt passieren kann, ist der iterative Einsatz eines (modifizierten) M-Schätzers denkbar. Dieser Schritt kann als *vorläufige Parameterschätzung* angesehen werden. Die „herabgewichteten“ bzw. auf ihren Grenzwert „verschobenen“ fehlerhaften Beobachtungen gilt es dann wieder zu analysieren und zu streichen oder gegebenenfalls eine Nachmessung zu veranlassen.

Schritt 4: Ausgleichung der bereinigten Daten nach der Methode der kleinsten Quadrate (L_2 -Schätzung) als *endgültige Parameterschätzung*.

Der Einsatz alternativer Schätzverfahren in der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze ergibt sich aus den obigen Darstellungen unmittelbar. Da gerade in Netzen zur Überwachung von Deformationen mehr als 10% der Punkte verschoben sein können, ist der Einsatz eines (modifizierten) M-Schätzers nicht sinnvoll. Es läuft vielmehr darauf hinaus, eine Diagnose mit einem resistenten Verfahren mit hohem Bruchpunkt anzuwenden. Die Untersuchungen in (KANANI 2000) bestätigen dies: In einem geodätischen Netz, für das Koordinaten in zwei Epochen vorliegen, wurden in 4 von 9 Stützpunkten simulierte Verschiebungen angebracht. Die Anwendung des BIBER-Schätzers bei der Koordinatentransformation lieferte unbrauchbare Ergebnisse, während die Punktverschiebungen mit dem LMS-Verfahren lokalisiert werden konnten.

Wie bereits beschrieben, können die aus der Anwendung resistenter oder robuster Verfahren erhaltenen Ergebnisse nicht als endgültige Parameterschätzung angesehen werden. Die daraus erhaltenen Hinweise sollen vielmehr dazu genutzt werden, fehlerhafte Daten zu eliminieren oder das angesetzte Modell zu verfeinern. Im folgenden sollen nun zwei Verfahren mit hohem Bruchpunkt vorgestellt werden.

3.2.4 L_1 -Schätzer

Die L_1 -Norm-Schätzung, bei der die Summe der Absolutbeträge der Verbesserungen minimiert wird, gehört zu den L_p -Norm-Schätzern

$$L_p = \sum_{i=1}^n |v_i|^p \rightarrow \min, \quad (3.7)$$

mit $p = 2$ erhält man mit

$$L_2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 \rightarrow \min \quad (3.8)$$

die bekannte Methode der kleinsten Quadrate (L_2 -Norm-Schätzer), die aufgrund der bekannten „Verschmierungseffekte“ sehr anfällig gegenüber Ausreißern im Datenmaterial ist. Wählt man $p = 1$, so erhält man mit

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \rightarrow \min \quad (3.9)$$

die Zielfunktion der L_1 -Norm-Schätzung, bei der die Summe der Absolutbeträge der Verbesserungen minimiert wird. Als Ergebnis ergeben sich dann die Verbesserungen von m (Anzahl der Unbekannten) Beobachtungen zu null. Aus dem widerspruchsfreien Gleichungssystem mit diesen Beobachtungen lassen sich dann die Unbekannten berechnen. Im Gegensatz zur Methode der kleinsten Quadrate zeichnet sich diese Ausgleichung durch ein hohes Maß an Robustheit aus. Sie hat einen Bruchpunkt von nahe 50%, d.h. die Ausgangsdaten dürfen bis zu 50% „kontaminiert“ sein (NIEMEIER 2002). Der Begriff „robust“ ist an dieser Stelle aber nicht ganz korrekt, da es sich bei der L_1 -Norm-Schätzung um ein resistentes Verfahren handelt, mit dem versucht wird, ein klares Datenbild zu erzeugen. Nach der Bereinigung des Datenmaterials erfolgt dann die eigentliche Parameterschätzung mit der Methode der kleinsten Quadrate. Untersuchungen zur L_1 -Norm-Schätzung mit Anwendung in der Netzausgleichung und Koordinatentransformation sind z.B. in (FUCHS 1980) zu finden, mit Kongruenzuntersuchungen in Deformationsnetzen durch Minimierung der Summe der Klaffungsbeträge beschäftigen sich (CASPARY et al. 1983), ein robuster Ausreißertest mit Hilfe der L_1 -Norm-Methode wird in (KAMPMANN 1986) vorgestellt.

3.2.5 LMS-Schätzer

Bei der LMS³⁵-Schätzung (ROUSSEEUW 1984) werden aus n Beobachtungen jeweils m (Anzahl der Unbekannten) ausgewählt, um damit die unbekannt Parameter eindeutig (widerspruchsfrei) zu bestimmen. Mit den so erhaltenen Lösungen für die Unbekannten werden für alle Beobachtungen die Verbesserungen berechnet. Diese werden dann quadriert und der Median wird bestimmt. Dieser Vorgang wird für alle möglichen Kombinationen von m Beobachtungen durchgeführt. Als Lösung wird dann diejenige ausgewählt, die die Forderung

$$\text{median}(v_i^2) \rightarrow \min \quad (3.10)$$

erfüllt. Der große Vorteil der LMS-Schätzung besteht darin, daß sie von den Einflüssen der Geometrie befreit ist und sog. Hebelbeobachtungen keinen Einfluß auf die Parameterschätzung ausüben. In (NIEMEIER 2002) wird im Zusammenhang mit Koordinatentransformationen angegeben, daß bei diesem Verfahren auch bis zu 50% fehlerbehafteter Daten (in Stützstellen oder Beobachtungen) zugelassen werden können. Ein Problem der LMS-Schätzung ist die Anzahl der durchzuführenden Rechenschritte um aus den n Beobachtungen alle Kombinationen von m Beobachtungen zu berechnen. In der Kombinatorik wird dieser Fall als „Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge“ bezeichnet, für den es

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (3.11)$$

Möglichkeiten gibt. Auf diese Schwierigkeit weist bereits (KAMPMANN 1993) hin und gibt an, daß bei $n = 50$ Beobachtungen und $m = 10$ Unbekannte, die Anzahl der erforderlichen Unbekanntenbestimmungen

$$50! / (10! \times (50 - 10)!) = 1.02722782E + 10$$

³⁵ Least Median Squares

beträgt. In (ROUSSEEUW und LEROY 1987) findet man dann auch den Vorschlag, die Gesamtanzahl der zu berechnenden Kombinationen zu begrenzen, wobei dann aber nur noch mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit gewährleistet ist, eine brauchbare Kombination zu treffen. Eine Anwendung der LMS-Schätzung bei der Koordinatentransformation ist in (KANANI 2000) zu finden. In (KAMPMANN 1993) wird ebenfalls die Anwendung der LMS-Schätzung untersucht. In einem Beispiel werden 8 Punkte, von denen nur ein Hochwert einen groben Fehler aufweist, einer ebenen affinen Koordinatentransformation unterzogen. Das Ergebnis sind unplausible Werte sowohl für die Transformationsparameter als auch für die Verbesserungen. Der grobe Fehler konnte nicht lokalisiert werden. Wie es zu derart unplausiblen Ergebnissen kommen kann, wird in Abschnitt 3.2.7 dargestellt.

3.2.6 Zur numerischen Lösung alternativer Parameterschätzungen am Beispiel der L_1 -Schätzung

Bei allen resistenten und robusten Schätzverfahren sind nichtlineare Gleichungssysteme³⁶ zu lösen, für die i.d.R. kein direktes Lösungsverfahren angegeben werden kann. Aus diesem Grund müssen iterative Verfahren eingesetzt werden. In (BORUTTA 1988) werden einige Lösungsverfahren für diese Aufgabenstellung vorgestellt, wobei auch die iterative Anwendung des kleinsten Quadrate Algorithmus aufgeführt ist. Diese Vorgehensweise soll nun am Beispiel der Parameterschätzung nach der L_1 -Norm näher untersucht werden. Für diese Aufgabenstellung findet sowohl der Simplex-Algorithmus Anwendung (siehe z.B. FUCHS 1980) als auch die Simulation der L_1 -Schätzung durch eine „iterative regewichtete L_2 -Schätzung“ (siehe z.B. SCHLOSSMACHER 1973, KRARUP et al. 1980, KEGEL 1987). In der Literatur zur mathematischen Statistik wird zur Minimierung der Summe der Absolutwerte der Verbesserungen in (SCHLOSSMACHER 1973) folgender Algorithmus vorgeschlagen.³⁷

1. Löse das normale kleinste Quadrate Problem mit den Gewichtungsfaktoren $p_i = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
2. Mit den generierten kleinste Quadrate-Koeffizienten, $\mathbf{a}(k)$, berechne die Residuen, $v(k)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
3. Löse erneut das kleinste Quadrate Problem mit den Gewichtungsfaktoren $p_i = 1/|v(k)_i|$. (Wenn ein $v(k)_i \approx 0$, setze $p_i = 0$.)
4. Wiederhole die Schritte 2 und 3 bis $|v(k+1)_i - v(k)_i| \cong 0$.

In numerischen Beispielen zeigt SCHLOSSMACHER (1973) die Übereinstimmung der Lösung mit denen, die mit Techniken der Linearen Programmierung erzeugt wurden. Im folgenden soll die Methode der Regewichtung an einfachen numerischen Beispielen untersucht werden.

Beispiel 1: Die Meßreihe mit den Werten $\mathbf{I}^T = [2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 100]$ ist entnommen aus (FUCHS 1984). Die Lösung ist sofort abzulesen, der Median dieser Meßreihe beträgt $x = 2$. Nun soll versucht werden, die Lösung mit dem oben beschriebenen Verfahren zu generieren. Der Schrankenwert für Schritt 3 wird im folgenden mit ε_1 bezeichnet und wird in diesem Beispiel mit $\varepsilon_1 = 1E-5$ gewählt. Somit wird $p_i = 0$ gesetzt, wenn $v(k)_i < 1E-5$. Das Abbruchkriterium in Schritt 4 wird mit ε_2 bezeichnet und in diesem Beispiel mit $\varepsilon_2 = 1E-7$ festgelegt, so daß die Schritte 2 und 3 solange wiederholt werden, bis $|v(k+1)_i - v(k)_i| < 1E-7$.

Der erste Iterationsschritt liefert die kleinste Quadrate Lösung (Mittelwert), in den weiteren Iterationsschritten werden die Gewichte jeweils gemäß Schritt 2 berechnet und damit erneut eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten gemäß Schritt 3 durchgeführt. Mit „delta x“ wird die Differenz zweier aufeinanderfolgender Lösungen bezeichnet, „max delta v“ bezeichnet die maximale Differenz in den Verbesserungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationen.

```

1. Iterationsschritt
-----
x= 21.6000000000
    Gewichte      Verbesserungen
    1.0000000000    19.6000000000
    1.0000000000    19.6000000000
    1.0000000000    19.6000000000
    1.0000000000    19.6000000000
    1.0000000000   -78.4000000000
Summe |v|=          156.8000000000

```

³⁶ Auch wenn die ursprünglichen Beobachtungsgleichungen linear sind (z.B. Nivellement), entstehen durch Einführung robuster Schätzfunktionen nichtlineare Gleichungssysteme.

³⁷ Übersetzung aus dem Englischen, die Notation wurde der vorliegenden Arbeit angepaßt.

```

2. Iterationsschritt
-----
x= 7.7647058824 delta x=-13.83529412
Gewichte Verbesserungen
0.0510204082 5.7647058824
0.0510204082 5.7647058824
0.0510204082 5.7647058824
0.0510204082 5.7647058824
0.0127551020 -92.2352941176
max delta v = 13.8352941176
Summe |v|= 115.2941176471

```

Die Iterationen 3 bis 11 werden aus Platzgründen nicht aufgeführt, es folgt der 12. Iterationsschritt.

```

12. Iterationsschritt
-----
x= 2.0000058413 delta x= -1.752376034e-05
Gewichte Verbesserungen
42799.0306122473 0.0000058413
42799.0306122473 0.0000058413
42799.0306122473 0.0000058413
42799.0306122473 0.0000058413
0.0102040841 -97.9999941587
max delta v = 0.0000175238
Summe |v|= 98.0000175238

```

In diesem Iterationsschritt wird der Schrankenwert ε_1 von den ersten vier Verbesserungen unterschritten, so daß im nächsten Iterationsschritt die Gewichte der zugehörigen Beobachtungen zu null gesetzt werden.

```

13. Iterationsschritt
-----
x=100.0000000000 delta x= 97.99999416
Gewichte Verbesserungen
0.0000000000 98.0000000000
0.0000000000 98.0000000000
0.0000000000 98.0000000000
0.0000000000 98.0000000000
0.0102040822 0.0000000000
max delta v = 97.9999941587
Summe |v|= 392.0000000000

```

Es ist zu erkennen, daß die Lösung, die sich im 12. Schritt noch nahe der Solllösung $x = 2$ befunden hat, nun auf $x = 100$ umspringt. Dies hat nun zur Folge, daß die letzte Verbesserung den Wert null annimmt, was wiederum dazu führt, daß das Gewicht dieser Beobachtung im nächsten Schritt zu null gesetzt wird. Dadurch springt die Lösung im 14. Schritt wieder auf den Wert $x = 2$.

```

14. Iterationsschritt
-----
x= 2.0000000000 delta x=-98.00000000
Gewichte Verbesserungen
0.0102040816 0.0000000000
0.0102040816 0.0000000000
0.0102040816 0.0000000000
0.0102040816 0.0000000000
0.0000000000 -98.0000000000
max delta v = 98.0000000000
Summe |v|= 98.0000000000

```

Im 15. Iterationsschritt springt die Lösung dann wieder auf den Wert $x = 100$ usw. Die Lösung alterniert zwischen den Werten 2 und 100, das Abbruchkriterium für die Iteration wird nicht erreicht. Als Grund für das zu null setzen von Gewichten bei kleinen Residuen nennt SCHLOSSMACHER (1973), daß bei sehr großen Gewichtungsfaktoren numerische Instabilitäten auftreten können, die die Konvergenzrate verlangsamen. Im folgenden soll dieser Aspekt außer acht gelassen werden und das obige Beispiel erneut berechnet werden. Ein zu null setzen von Gewichten erfolgt nicht, als Abbruchkriterium für die Iteration wird wieder $\varepsilon_2 = 1E-7$ gewählt. Die ersten 15 Iterationsschritte werden nicht aufgeführt, im 16. Schritt erhält man:

```

16. Iterationsschritt
-----
x= 2.0000000228 delta x= -6.845220923e-08
  Gewichte   Verbesserungen
10956549.224  0.0000000228
10956549.224  0.0000000228
10956549.224  0.0000000228
10956549.224  0.0000000228
0.0102040816  -97.9999999772
max delta v = 0.0000000685
Summe |v|= 98.0000000685

```

Damit wird in diesem Beispiel das Sollergebnis im Rahmen der gewählten Abbruchschranke erreicht. Daß man aber nicht grundsätzlich davon ausgehen kann, daß die Iteration an der „richtigen“ Stelle abbricht, wird im nächsten Beispiel gezeigt.

Beispiel 2: Gegeben ist die Meßreihe $\mathbf{I}^T = [133.975 \ 133.975 \ 133.975 \ 133.975 \ 135.075 \ 136.075 \ 141.553]$. Die Lösung kann wieder sofort abgelesen werden, der Median beträgt $x = 133.975$. Versucht man, eine Lösung mit Hilfe des SCHLOSSMACHER-Algorithmus zu finden, so ist festzustellen, daß für jedes beliebige Abbruchkriterium $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ keine Lösung gefunden wird. Der Algorithmus läuft auf die Lösung 133.975 zu, dann werden die Verbesserungen so klein, daß die Gewichte der ersten vier Beobachtungen zu null gesetzt werden. Im nächsten Schritt entfernt sich die Lösung dann von diesem Wert, um in den nächsten Schritten wieder darauf zuzulaufen. Ist die Solllösung fast erreicht, werden die Gewichte wieder zu null gesetzt und die Iteration läuft weiter ohne das Abbruchkriterium zu erreichen. Wie im ersten Beispiel soll nun versucht werden, eine Lösung zu erzeugen, indem das zu null setzen der Gewichte ausgeschaltet wird. Als ein mögliches plausibles Abbruchkriterium für die Iteration wird $\varepsilon_2 = 1E-5$ (zwei Zehnerpotenzen mehr als die Meßgenauigkeit der verwendeten Eingangswerte) gewählt. Damit erhält man das folgende Ergebnis.

```

1. Iterationsschritt
-----
x=135.5147142857 delta x=135.5147143
  Gewichte   Verbesserungen
1.0000000000  1.5397142857
1.0000000000  1.5397142857
1.0000000000  1.5397142857
1.0000000000  1.5397142857
1.0000000000  0.4397142857
1.0000000000  -0.5602857143
1.0000000000  -6.0382857143
max delta v = 0.5397142857
Summe |v|= 13.1971428571

2. Iterationsschritt
-----
x=135.0749929176 delta x= -0.4397213681
  Gewichte   Verbesserungen
0.6494711449  1.0999929176
0.6494711449  1.0999929176
0.6494711449  1.0999929176
0.6494711449  1.0999929176
2.2742040286  -0.000070824
1.7848036716  -1.000070824
0.1656099177  -6.4780070824
max delta v = 0.4397213681
Summe |v|= 11.8779929176

3. Iterationsschritt
-----
x= 135.0749858355 delta x= -7.082119993e-06
  Gewichte   Verbesserungen
0.9090967623  1.0999858355
0.9090967623  1.0999858355
0.9090967623  1.0999858355
0.9090967623  1.0999858355
141195.8677499584  -0.0000141645
0.9999929177  -1.0000141645
0.1543684635  -6.4780141645
max delta v = 0.000070821
Summe |v|= 11.8779858355

```

Es ist ersichtlich, daß diese Iteration bei einer falschen Lösung stehengeblieben ist. Der Grund dafür liegt in einem flachen Verlauf der Konvergenzkurve; die Lösungen zweier aufeinanderfolgender Iterationsschritte liegen dabei so nahe beieinander, daß das Iterationsverfahren mit der Abbruchschranke $\varepsilon_2 = 1\text{E-}5$ an der falschen Stelle abbricht. Wählt man daraufhin mit $\varepsilon_2 = 1\text{E-}7$ einen kleineren Wert als Abbruchschranke, so erhält man nach 73 (!) Iterationen das folgende Ergebnis.

```

73. Iterationsschritt
-----
x= 133.9750002441   delta x=-8.138118801e-08
  Gewichte          Verbesserungen
3071962.751        0.0000002441
3071962.751        0.0000002441
3071962.751        0.0000002441
3071962.751        0.0000002441
   0.9090911781    -1.0999997559
   0.4761905500    -2.0999997559
   0.1319609452    -7.5779997559
max delta v =      0.000000814
Summe |v|=         10.7780002441

```

Nun ist die Iteration auf den „richtigen“ Lösungspunkt zugelaufen. Die Abweichung zur Solllösung (die in diesem Fall bekannt ist) beträgt $2.441\text{E-}07$, obwohl das Abbruchkriterium mit $\varepsilon_2 = 1\text{E-}7$ gewählt wurde. Es ist also unbedingt zu beachten, daß sich Abbruchkriterien für Iterationsverfahren lediglich auf die Differenz zweier benachbarter Lösungen beziehen. Wie weit man von der tatsächlichen Lösung entfernt ist, kann nicht abgeschätzt werden. Um das Konvergenzverhalten dieses Beispiels zu veranschaulichen, sind in Abbildung 3.1 die Lösungen x im Iterationsschritt i dargestellt.

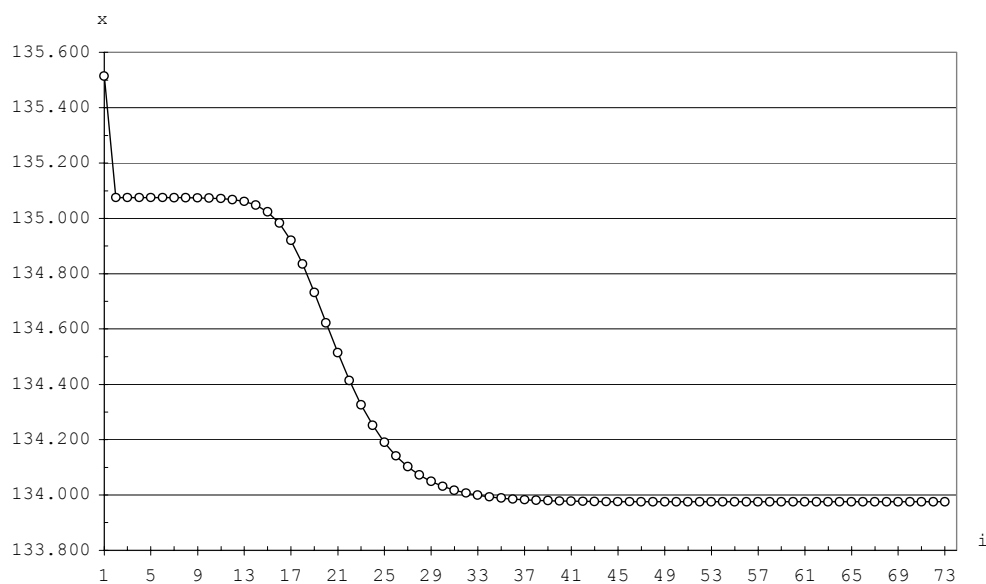


Abbildung 3.1: Lösung x im Iterationsschritt i

In dieser Darstellung ist zu erkennen, daß die Konvergenz in den ersten Schritten sehr langsam ist, dann einen steilen Verlauf annimmt und am Ende wieder sehr langsam wird. Dieses Verhalten kann auch veranschaulicht werden, indem man die Differenz Δx zweier aufeinanderfolgender Lösungen in einem Diagramm darstellt, siehe Abbildung 3.2.

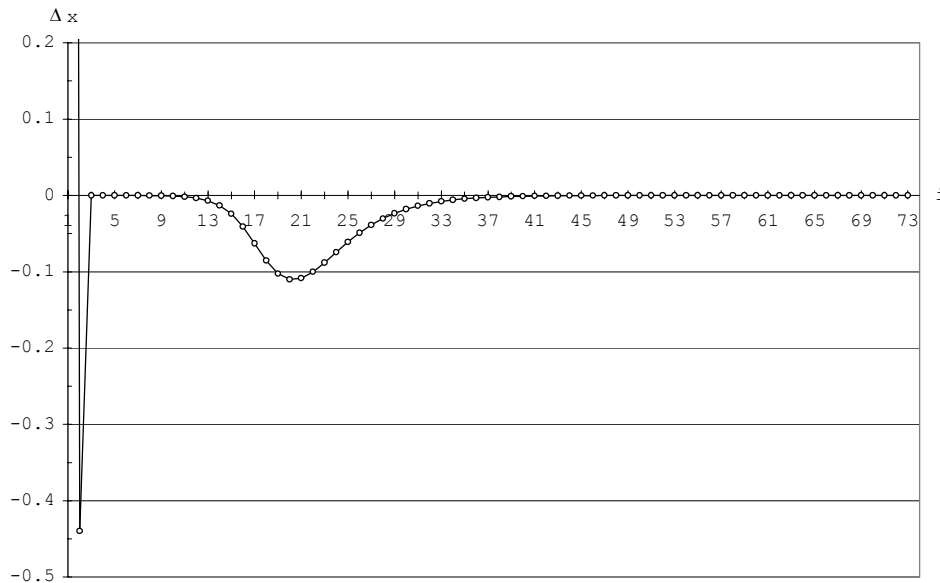


Abbildung 3.2: Differenz Δx der Lösung im Iterationsschritt i zur vorangegangenen Lösung

Daß man auch Fälle finden kann, bei denen der SCHLOSSMACHER-Algorithmus funktioniert, wird im nächsten Beispiel gezeigt. Ein besonderes Augenmerk soll aber darauf gelegt werden, mit welcher Genauigkeit die Solllösung erreicht wird.

Beispiel 3: Gegeben ist die Meßreihe $\mathbf{1}^T = [99.97 \ 99.98 \ 99.99 \ 100.00 \ 100.01 \ 101.00 \ 101.00]$. Das Ergebnis kann wieder sofort abgelesen werden und beträgt $x = 100.00$. Wählt man $\varepsilon_1 = 1E-5$ und $\varepsilon_2 = 1E-7$, so liefert der SCHLOSSMACHER-Algorithmus im 12. Iterationsschritt das folgende Ergebnis.

```

12. Iterationsschritt
-----
x=100.0000005993   delta x= -2.842170943e-14
      Gewichte   Verbesserungen
33.3326674408     0.0300005993
49.9985017568     0.0200005993
99.9940072067     0.0100005993
0.0000000000      0.0000005993
100.0059935116    -0.0099994007
1.0000005993     -0.9999994007
1.0000005993     -0.9999994007
max delta v =      2.842170943e-14
Summe |v|=        2.0700005993

```

Nun wird das Beispiel erneut durchgerechnet, wobei die Schranke für das zu null setzen der Gewichte wieder mit $\varepsilon_1 = 1E-5$ gewählt wird. Um ein Ergebnis zu erzielen, daß näher an der Solllösung liegt als das obige, wird jetzt als Abbruchbedingung für die Iteration $\varepsilon_2 = 1E-14$ festgelegt. Im 13. Iterationsschritt erhält man die folgende Lösung.

```

13. Iterationsschritt
-----
x=100.0000005993   delta x=      0
      Gewichte   Verbesserungen
33.3326674408     0.0300005993
49.9985017569     0.0200005993
99.9940072070     0.0100005993
0.0000000000      0.0000005993
100.0059935113    -0.0099994007
1.0000005993     -0.9999994007
1.0000005993     -0.9999994007
max delta v =      0
Summe |v|=        2.0700005993

```

Vergleicht man die Berechnungen, so ist zu erkennen, daß man in beiden Fällen das gleiche Ergebnis erhält (beide Ergebnisse weichen um $5.993\text{E-}07$ von der Solllösung ab), obwohl bei der zweiten Berechnung ein wesentlich kleinerer Wert für ε_2 gewählt wurde. Der Grund dafür liegt in der Wahl des Schrankenwertes für das zu null setzen von Gewichten. Dieser wurde in beiden Berechnungen mit $\varepsilon_1 = 1\text{E-}5$ gewählt. Dadurch wird die Genauigkeit, mit der bei Anwendung des SCHLOSSMACHER-Algorithmus die in diesem Beispiel bekannte Solllösung erreicht wird, begrenzt.

Den Vorschlag, alternative Parameterschätzungen mit Hilfe einer regewichteten kleinste Quadrate Ausgleichung zu lösen, findet man in der geodätischen Literatur u.a. bei (KRARUP et al. 1980). Speziell für die Ausgleichung nach der L_1 -Norm werden dort die Gewichte mit

$$p = \frac{1}{|v| + c} \quad (3.12)$$

angegeben, wobei $c = \text{const.}$ eine kleine Größe im Vergleich zu den Verbesserungen ist. Des weiteren wird ausgeführt: „Convergence can be proved under mild conditions for $c \rightarrow 0$.“ Ein zu null setzen von sehr großen Gewichten wie in (SCHLOSSMACHER 1973) wird nicht vorgeschlagen. Dadurch ist bei der Verwendung dieses Verfahrens mit der von (SCHLOSSMACHER 1973) erwähnten langsamen Konvergenz bei großen Gewichten zu rechnen. Zudem stellt sich auch hier wieder die Frage nach einem sinnvollen Abbruchkriterium für die Iteration. Der in (KRARUP et al. 1980) vorgeschlagene Lösungsweg soll nun anhand eines numerischen Beispiels untersucht werden.

Beispiel 4: Gegeben ist der Beobachtungsvektor $\mathbf{l}^T = [133.975 \ 133.975 \ 133.975 \ 133.975 \ 135.075 \ 136.075 \ 141.553]$, die Lösung kann wieder sofort abgelesen werden und beträgt $x = 133.975$. Nun soll versucht werden, die Lösung mit Hilfe der in (KRARUP et al. 1980) vorgeschlagenen gewichteten kleinste Quadrate Ausgleichung zu erzeugen. Die Konstante c wird mit $c = 1\text{E-}9$ festgelegt, die Iteration soll abbrechen, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Lösungen den Wert $\varepsilon = 1\text{E-}5$ unterschreitet. Damit erhält man das folgende Ergebnis.

```

1. Iterationsschritt
-----
x=135.5147142857   delta x=   135.5147143
      Gewichte   Verbesserungen
      0.9999999990   1.5397142857
      0.9999999990   1.5397142857
      0.9999999990   1.5397142857
      0.9999999990   1.5397142857
      0.9999999990   0.4397142857
      0.9999999990   -0.5602857143
      0.9999999990   -6.0382857143
Summe |v|=          13.1971428571

2. Iterationsschritt
-----
x=135.0749929184   delta x= -0.4397213673
      Gewichte   Verbesserungen
      0.6494711445   1.0999929184
      0.6494711445   1.0999929184
      0.6494711445   1.0999929184
      0.6494711445   1.0999929184
      2.2742040234   -0.0000070816
      1.7848036748   -1.0000070816
      0.1656099177   -6.4780070816
Summe |v|=          11.8779929184

3. Iterationsschritt
-----
x= 135.0749858390   delta x=-7.079355044e-06
      Gewichte   Verbesserungen
      0.9090967609   1.0999858390
      0.9090967609   1.0999858390
      0.9090967609   1.0999858390
      0.9090967609   1.0999858390
      141231.0634510028   -0.0000141610
      0.9999929195   -1.0000141610
      0.1543684636   -6.4780141610
Summe |v|=          11.8779858390

```

Wie in Beispiel 2, so läuft auch diese Iteration auf eine falsche Lösung zu. Wählt man hingegen die Abbruchschranke mit $\varepsilon = 1E-7$, so erhält man nach 73 Iterationen das folgende Ergebnis.

```

73. Iterationsschritt
-----
x= 133.9750002472    delta x=-8.139434726e-08
      Gewichte      Verbesserungen
3034187.9769192813    0.0000002472
3034187.9769192813    0.0000002472
3034187.9769192813    0.0000002472
3034187.9769192813    0.0000002472
      0.9090911815    -1.0999997528
      0.4761905509    -2.0999997528
      0.1319609453    -7.5779997528
Summe |v|=          10.7780002472

```

Nun ist die Iteration auf den „richtigen“ Lösungspunkt zugelaufen. Wie in Beispiel 2 ist die Abweichung zur Solllösung mit $2.472E-07$ größer, als das gewählte Abbruchkriterium mit $\varepsilon = 1E-7$.

An diesen einfachen numerischen Beispielen konnte bereits gezeigt werden, daß die Simulation der L_1 -Schätzung durch eine Iteration nach Gewichten, trotz eines sinnvoll gewählten Abbruchkriteriums, auf eine falsche Lösung zulaufen kann. Der Grund dafür ist, daß bei einer derartigen Vorgehensweise eine sehr langsame Konvergenzrate entstehen kann. Dies hat zur Folge, daß zwei aufeinanderfolgende Lösungen so dicht beieinander liegen, daß die Iteration abbricht, obwohl der Lösungspunkt nicht erreicht ist. Dies gilt sowohl für den in (SCHLOSSMACHER 1973) vorgeschlagenen Lösungsweg als auch für den in (KRARUP et al. 1980), wobei im letztgenannten Lösungsweg mit einer langsameren Konvergenz zu rechnen ist, da bei sehr kleinen Verbesserungen die Gewichte nicht zu null gesetzt werden. Zudem ist damit zu rechnen, daß sich die aufgezeigten Probleme bei mehrdimensionalen Ausgleichsproblemen verstärken. Weiterhin ist anzumerken, daß bei praktischen Anwendungen die Solllösung natürlich nicht bekannt ist, so daß keine Möglichkeit besteht, das Ergebnis einer derartigen Ausgleichung zu überprüfen. Ein weiterer Nachteil besteht darin, daß alternative Optima nicht bestimmt werden können (KAMP-MANN 1988). Sollte man dennoch mit Programmsystemen arbeiten, in denen Methoden der „Regewichtung“ für die Simulation alternativer Schätzverfahren eingesetzt werden, so ist auf jeden Fall ratsam, die Abbruchschranke für die Iteration möglichst klein zu wählen und evtl. unterschiedliche Abbruchkriterien „auszuprobieren“. Eine endgültige Gewähr für die Richtigkeit des Endergebnisses erhält man damit aber auch nicht.

Als Grund für die Einführung einer Iteration nach Gewichten wird von vielen Autoren angeführt, daß sich dieser Lösungsweg sehr einfach in ein Programm zur kleinsten Quadrate Ausgleichung integrieren läßt. In (SOMOGYI und ZÁVOTI 1993) findet man dann auch für elf verschiedene Schätzfunktionen die entsprechenden Gewichtsfunktionen um die Parameterschätzung mit einer regewichteten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten durchzuführen. Das Problem, bei diesen Iterationen nach Gewichten ein sinnvolles Abbruchkriterium festzulegen, dürfte aber auch hierbei bestehen und sollte Gegenstand weiterer Untersuchungen sein.

Während sich für die Lösung der L_1 -Norm-Schätzung noch der Simplex-Algorithmus (siehe z.B. FUCHS 1980) anbietet, stehen für die übrigen alternativen Schätzverfahren i.d.R. keine weiteren Methoden für die numerische Lösung bereit. Aus diesem Grund soll nun für derartige Problemstellungen der Einsatz sog. heuristischer Verfahren³⁸ vorgeschlagen werden, bei denen durch systematisch-stochastisches Ausprobieren versucht wird, eine (beliebige) Zielfunktion zu optimieren. Derartige Verfahren sind in der geodätischen Anwendung noch nicht weit verbreitet. In (BOBRICH 1995) werden die Grundideen der heuristischen Verfahren vorgestellt und erstmalig für die Ausgleichung eines Lagenetzes nach der Methode der kleinsten Quadrate angewendet. Da für eine derartige Aufgabenstellung aber auch mit der herkömmlichen Lösungsstrategie (Linearisierung der Beobachtungsgleichungen und iterative Lösung des kleinsten Quadrate Algorithmus) eine gleichwertige Lösung erzielt werden kann, fand der heuristische Lösungsansatz wenig Beachtung. In (MAUTZ 2001) werden die heuristischen Verfahren erneut aufgegriffen und erfolgreich auf eine Problemstellung angewendet, bei der keine Näherungswerte vorhanden sind, nämlich der Analyse von Frequenzen in Zeitreihen. Es bietet sich an, diese Verfahren auch bei der Lösung von robusten Parameterschätzungen einzusetzen. Der große Vorteil besteht darin:

- es ist keine Linearisierung der Beobachtungsgleichungen erforderlich,
- es können problemlos beliebige Zielfunktionen optimiert werden,
- globale Optima können gefunden werden,
- Näherungswerte sind nicht erforderlich³⁹.

³⁸ Das Wort „Heuristik“ wurde aus dem griechischen Verb *heuriskein* hergeleitet und bedeutet „finden“ oder „entdecken“. Es wird erzählt, daß Archimedes laut „Heureka“ (Ich habe es herausgefunden!) gerufen hat, als er entdeckte, daß der Schmied den König mit der Krone betrogen hatte.

³⁹ Es ist lediglich ein Intervall anzugeben, in dem die Lösung gesucht wird.

Dem stehen folgende Nachteile gegenüber:

- eine Lösung kann nicht garantiert werden,
- da die Verfahren letztendlich auf Zufallszahlen basieren, ist ein mehrfacher Start des Programms erforderlich, um zu überprüfen, ob tatsächlich das Optimum gefunden wurde,
- ein enormer numerischer Aufwand durch die hohe Anzahl von Iterationen,
- das Auffinden alternativer Optima kann nicht garantiert werden.

Dennoch sind die heuristischen Verfahren, gerade im Hinblick auf die stetig steigende Rechnerleistung, eine sehr interessante Alternative, um eine numerische Lösung für alternative Schätzverfahren herbeizuführen. Der Einsatz dieser Verfahren wird in dieser Arbeit nicht ausgearbeitet, sollte aber Gegenstand weiterer Untersuchungen sein.

3.2.7 Zuverlässigkeit alternativer Schätzverfahren

Als Maß für die globale Zuverlässigkeit eines Schätzverfahrens wird der Bruchpunkt angegeben. Der Bruchpunkt eines Schätzverfahrens ist der Prozentsatz von fehlerhaften Daten beliebiger Größe, der erlaubt ist, bevor das Schätzverfahren falsche Werte liefert bzw. „zusammenbricht“ (NIEMEIER 2002). Der Bruchpunkt für die L_1 -Schätzung und die LMS-Schätzung beträgt bis zu 50%. In (HEKIMOGLU und KOCH 1999) wird ausgeführt, daß dieser Wert die Fähigkeit eines Schätzverfahrens charakterisiert, mit sehr großen Ausreißern zurechtzukommen. Da diese aber in der geodätischen Praxis eher selten auftreten, wurde ein Zuverlässigkeitsmaß entwickelt, für den Fall, daß mehrere kleine Ausreißer im Datenmaterial vorhanden sind. Dieses wird definiert als „minimale mittlere Erfolgsrate“ (minimum mean success rate), in einem gegebenen Ausreißerintervall für eine bestimmte Anzahl von Ausreißern. Untersucht wurden die Schätzverfahren nach HUBER, ein modifizierter M-Schätzer, die LMS-Methode, der ANDREWS-Schätzer und die L_1 -Norm-Schätzung. Für die detaillierten Ergebnisse der Untersuchung an Beispielen der einfachen und multiplen linearen Regression sei auf (HEKIMOGLU und KOCH 1999) verwiesen. Als Zusammenfassung der Untersuchungen läßt sich angeben:

- Bei den alternativen Schätzverfahren kann es vorkommen, daß diese Ausreißer produzieren, obwohl im Datenmaterial keine enthalten waren.
- Die Zuverlässigkeit robuster Methoden ist abhängig von der Anzahl der Unbekannten, der Anzahl und Größenordnung der Ausreißer und von der Art der Ausreißer und der Position (Geometrie) der Beobachtungen.
- Die Zuverlässigkeit robuster Methoden nimmt rapide ab, wenn die Anzahl der Unbekannten zunimmt.

Das Verhalten verschiedener Schätzverfahren in einem geodätischen Netz ist in (BERBER und HEKIMOGLU 2001) untersucht worden. Die untersuchten Methoden waren die Schätzer nach ANDREWS, BEATON-TUKEY, HAMPEL und HUBER, sowie die Dänische Methode, die L_1 -Methode und ein modifizierter M-Schätzer. Damit wurde ein geodätisches Netz als Trilaterationsnetz, als Triangulationsnetz und als kombiniertes Strecken- und Richtungsnetz untersucht. Das oben beschriebene Verhalten der verschiedenen Schätzverfahren war auch hier festzustellen. Zudem wurde ein unterschiedliches Verhalten der Schätzverfahren in den jeweiligen Netzen festgestellt. Insgesamt konnte festgestellt werden, daß die Erfolgsquote auch bei größerer Redundanz niedrig ist. Für alle Schätzverfahren gilt, daß die Geometrie der Beobachtungen eine starke Auswirkung auf die Identifizierung von Ausreißern hat. Eine spezielle Untersuchung des Verhaltens der LMS-Schätzung ist in (HEKIMOGLU 2001) zu finden. Dort wird als Beurteilungskriterium die „lokale Zuverlässigkeit“ (local reliability) eingeführt und das Verhalten der LMS-Schätzung an Beispielen der linearen Regression untersucht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist:

- Die LMS-Methode kann in einigen Fällen Ausreißer produzieren, obwohl in den Daten keine enthalten sind.
- Obwohl der Bruchpunkt des Verfahrens hoch ist, kann nicht garantiert werden, daß alle Ausreißer in einem fehlerbehafteten Datensatz zuverlässig gefunden werden, wenn es sich dabei um Ausreißer kleiner Größenordnung handelt.
- Die Zuverlässigkeit verändert sich zum einen in Abhängigkeit von der Anzahl der Unbekannten und der Anzahl und Größenordnung der Ausreißer und zum anderen in Abhängigkeit von der Art der Ausreißer und der Position (Geometrie) der Beobachtungen.
- Mit einer Zunahme der Anzahl von Ausreißern nimmt die lokale Zuverlässigkeit der LMS-Schätzung ab.
- Je größer die Anzahl der Unbekannten ist, desto niedriger ist die lokale Zuverlässigkeit der LMS-Schätzung.

Abschließend bleibt also festzustellen, daß es eine „Universalmethode“ für die Datenanalyse nicht gibt und der Erfolg eines gewählten Verfahrens immer sehr stark von der Geometrie des jeweiligen Ausgleichungsproblems abhängt.

3.2.8 Weiterführende Schritte

Überträgt man die in den vorangegangenen Abschnitten aufgezeigten Eigenschaften alternativer Parameterschätzungen auf die Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze, so ist festzustellen, daß sich die modifizierten M-Schätzer nicht für diese Aufgabe eignen, da sie lediglich einen Bruchpunkt von maximal ca. 10% aufweisen. Im Gegensatz zu den M-Schätzern, bei denen alle Beobachtungen zur Parameterschätzung herangezogen werden, steht die L_1 -Schätzung und die LMS-Methode. Bei beiden wird nur eine Minimalkonfiguration von Beobachtungen für die Parameterschätzung verwendet, so daß deren Bruchpunkt theoretisch bis zu 50% betragen kann. Untersuchungen anderer Autoren haben aber gezeigt, daß auch der Einsatz dieser Methoden zu unplausiblen Ergebnissen führen kann.

Die Aufgabe, die es im folgenden zu lösen gilt, besteht somit darin, neue Methoden zu entwickeln, die es ermöglichen, die *maximale Untergruppe* aus den Beobachtungen herauszufinden, mit der bei einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten ein verträgliches Ergebnis erzielt werden kann. Diese Methoden sollen auch dann zum Erfolg führen, wenn die bestehenden Verfahren keine brauchbare Lösung liefern. In Bezug auf die Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze bedeutet dies, aus der Gesamtheit aller (Stütz)punkte die größtmögliche Untergruppe stabiler Punkte auch dann zu identifizieren, wenn die bestehenden Verfahren versagen.

Im Hinblick auf diese Aufgabenstellung wird in den folgenden Abschnitten ein neues alternatives Schätzverfahren, nämlich die Ausgleichung nach maximaler Korrelation auf Grundlage der Arbeiten von PETROVIC (1991, 2002) detailliert ausgearbeitet. Der Einsatz dieses Schätzverfahrens erfolgt dann in Kapitel 4.

3.3 Parameterschätzung nach der Methode der maximalen Korrelation

3.3.1 Einführung

Die Grundidee der in (PETROVIC 1991) entwickelten Ausgleichung nach maximaler Korrelation (MCA)⁴⁰ besteht darin, die Parameter des mathematischen Modells derart zu bestimmen, daß der lineare Korrelationskoeffizient (quadriert) zwischen den Daten l und dem Modell $f(u)$ ⁴¹ mit

$$r^2(l, f(u)) \rightarrow \max \quad (3.13)$$

seinen maximal möglichen Wert annimmt. Diese Ausgleichung ist rein geometrisch begründet und die anschauliche Zielsetzung besteht darin, die Formen des Modells in den Daten zu identifizieren.⁴² Diese Ausgleichung kann im Fall einer unvollständigen Modellbildung (z.B. Vorhandensein systematischer Fehler) angewendet werden (PETROVIC 2002). Anders als bei einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten werden die Residuen nicht zum Minimum gezwungen, was in dem oben beschriebenen Fall zu unrealistischen Modellparametern führen kann. Ein weiterer Unterschied besteht darin, daß die Lösung nach maximaler Korrelation in den meisten Fällen nicht eindeutig ist, sondern eine ganze Klasse, die somit auch eine ganze Klasse von Residuensätzen induziert. Diese Mehrdeutigkeit, die auf den ersten Blick nachteilig erscheint, ist aber der große Vorteil einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation, denn in der Klasse der Residuensätze sind auch solche zu finden, die Rückschlüsse auf fehlende Modellanteile ermöglichen. Beispiele dafür sind in (NEITZEL 1998) und (PETROVIC 2002) zu finden.

Im folgenden wird der Formelapparat der Ausgleichung nach maximaler Korrelation im Hinblick auf folgende Anwendungsbereiche detailliert ausgearbeitet:

1. Einsatz bei der Ausgleichung unvollständiger Modelle, z.B. beim Vorhandensein systematischer Fehler. Die Analyse der Ergebnisse erfolgt hierbei durch die Interpretation von Residuenbildern mit dem Ziel, fehlende Modellanteile zu identifizieren.
2. Direkte Verwendung des Betrags des maximalen Korrelationskoeffizienten r^2 als nichtmetrisches Kriterium für die Beurteilung der Ähnlichkeit zwischen den Daten und dem angesetzten Modell.

In dieser Arbeit soll das Ergebnis einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation unter dem in Punkt 2 genannten Aspekt für die Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze eingesetzt werden, indem der Betrag r^2 als nichtmetrisches Kriterium dazu verwendet wird, die Ähnlichkeit von Punktgruppen zu untersuchen. In den heute gebräuchlichen Verfahren geschieht diese Untersuchung i.d.R. mit metrischen Kriterien nach einer kleinste

⁴⁰ MCA = (engl.) Maximum Correlation Adjustment = (dt.) Ausgleichung nach maximaler Korrelation

⁴¹ Im Gegensatz zur Darstellung in den vorangegangenen Kapiteln, werden hier die Unbekannten mit u und nicht mit x bezeichnet, da u unter Umständen nicht alle in x vorhandenen Parameter enthält. Diese Darstellung zielt insbesondere auf die Anwendung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation im Falle einer unvollständigen Modellbildung ab.

⁴² Dies geschieht dadurch, daß ein Formenvergleich zwischen dem unvollständigen funktionalen Modell und den Daten durchgeführt wird. Als Maß für die Ähnlichkeit der Formen dient der Korrelationskoeffizient r^2 .

Quadrate Ausgleichung, ein Überblick ist z.B. in (WELSCH et al. 2000) und (NIEMEIER 2002) zu finden. Da diese Vorgehensweise aber nicht grundsätzlich zum Erfolg führt, wie ein Beispiel in (REINKING 1994) zeigt, gilt zu klären, inwieweit man diese Aufgabe durch eine alternative Parameterschätzung, nämlich einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation, lösen kann.

3.3.2 Der Korrelationskoeffizient

Der Begriff „Korrelation“ wird in dieser Arbeit immer im Sinne der linearen Korrelation verwendet. Sie beschreibt die Beziehung zwischen den Eigenschaften von zwei Sätzen von Objekten, die sich in numerischer Form darstellen lassen. Jedem Objekt sind zwei Werte zugeordnet, alle Objekte werden in einer Menge zusammengefaßt. Diese Menge ist die Domäne (Definitionsereich) zweier reeller Funktionen, deren Werte in einer 1 – 1 Zuordnung stehen. Über die gemeinsame Domäne erfolgt die Realisierung der 1 – 1 Zuordnung, z.B. erfolgt die Zuordnung von Punkten eines geodätischen Netzes in zwei Epochen über die gemeinsame Punktnummer. Für eine endliche Anzahl von Daten kann der Korrelationskoeffizient wie folgt definiert werden (PETROVIC 2002).

Definition 3.1:

Für eine beliebige Menge $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ und zwei beliebige reelle Funktionen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ und $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ wird der Korrelationskoeffizient (quadriert) r^2 zwischen den Mengen $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X}) = \{Y_i : Y_i = f(X_i), X_i \in \mathcal{X}\}$ und $\mathcal{Z} = g(\mathcal{X}) = \{Z_i : Z_i = g(X_i), X_i \in \mathcal{X}\}$ durch die Gleichung

$$r^2 = r^2(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(Z_i - \bar{Z}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2} \quad (3.14)$$

definiert, mit

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i. \quad (3.15)$$

Es ist leicht zu zeigen, daß der Korrelationskoeffizient mit

$$r^2(c_1 + c_2\mathcal{Y}, c_3 + c_4\mathcal{Z}) = r^2(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathfrak{R} \quad (3.16)$$

gegenüber einer Verschiebung oder Streckung der Menge \mathcal{Y} bzw. \mathcal{Z} invariant ist.

Behauptung:

$$r^2(c_1 + c_2\mathcal{Y}, c_3 + c_4\mathcal{Z}) = r^2(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathfrak{R} \quad (3.17)$$

Beweis:

Mit

$$c_1 + c_2\mathcal{Y} = \{c_1 + c_2Y_i : Y_i \in \mathcal{Y}\}, \quad c_3 + c_4\mathcal{Z} = \{c_3 + c_4Z_i : Z_i \in \mathcal{Z}\} \quad (3.18)$$

erhält man

$$\begin{aligned} r^2(c_1 + c_2\mathcal{Y}, c_3 + c_4\mathcal{Z}) &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n (c_1 + c_2Y_i - (c_1 + c_2\bar{Y}))(c_3 + c_4Z_i - (c_3 + c_4\bar{Z})) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (c_1 + c_2Y_i - (c_1 + c_2\bar{Y}))^2 \sum_{i=1}^n (c_3 + c_4Z_i - (c_3 + c_4\bar{Z}))^2} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n (c_2Y_i - c_2\bar{Y})(c_4Z_i - c_4\bar{Z}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (c_2Y_i - c_2\bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (c_4Z_i - c_4\bar{Z})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_2^2 c_4^2 \left(\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(Z_i - \bar{Z}) \right)^2}{c_2^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 c_4^2 \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2} \\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(Z_i - \bar{Z}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2} = r^2(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}). \tag{3.19}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Eine geometrische Interpretation des Korrelationskoeffizienten gemäß Definition 3.1 ist möglich, wenn als Domäne $\mathcal{X} \subseteq \mathfrak{R}^m$ gewählt wird.⁴³ Dann beschreibt r^2 die Beziehung der Graphen der Funktionen f und g zueinander, was geometrisch anschaulich als Formenvergleich interpretiert werden kann. Läßt sich eine Konfiguration in die andere überführen, ist $r^2 = 1$, andernfalls beschreibt r^2 wie gut die transformierte Konfiguration der anderen entspricht.

Die Definition 3.1 ermöglicht, den Korrelationskoeffizienten zwischen einem n -dimensionalen Beobachtungsvektor \mathbf{l} und einem entsprechenden funktionalen Modell \mathbf{f} aufzustellen:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(u)_1 \\ f(u)_2 \\ \vdots \\ f(u)_n \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Die Domäne \mathcal{X} ist in diesem Fall

$$\mathcal{X} = \{i : i = 1, \dots, n\} = \{1, 2, \dots, n\}, \tag{3.21}$$

was z.B. die Beobachtungsnummer sein kann. Aus (3.21) ergibt sich weiterhin

$$X_i = i, \tag{3.22}$$

$$Y_i = f(u)_i, \tag{3.23}$$

$$Z_i = l_i, \tag{3.24}$$

woraus die Darstellung

$$r^2 = r^2(\mathbf{f}, \mathbf{l}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (f(u)_i - \overline{f(u)})(l_i - \bar{l}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (f(u)_i - \overline{f(u)})^2 \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2} \tag{3.25}$$

folgt, mit

$$\overline{f(u)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(u)_i, \tag{3.26}$$

$$\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i. \tag{3.27}$$

⁴³ Wenn man hingegen als Domäne z.B. Personen auswählt und dann den Korrelationskoeffizient z.B. zwischen Körpergröße und Gewicht berechnet, so kann man diesen nicht geometrisch interpretieren.

Nach einigen Umformungen und unter Verwendung von

$$\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l}) = 0 \quad (3.28)$$

erhält man den Korrelationskoeffizienten in der Darstellung

$$r^2 = r^2(\mathbf{f}, \mathbf{l}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n f(u)_i l_i - n \overline{f(u)} \bar{l} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n f^2(u)_i - n \overline{f(u)}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n l_i^2 - n \bar{l}^2 \right)} . \quad (3.29)$$

3.3.3 Definition der Ausgleichung nach maximaler Korrelation

Das Ziel einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation besteht darin, die Unbekannten derart zu bestimmen, daß der Korrelationskoeffizient zwischen dem Modell und den Daten mit

$$r^2(f(u), l) \rightarrow \max \quad (3.30)$$

seinen maximal möglichen Wert annimmt. Diese Ausgleichung läßt sich wie folgt definieren (PETROVIC 2002).

Definition 3.2:

Sei $\mathcal{X} = \{ 1, 2, \dots, n \}$, $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ definiert durch $g(i) = l_i$, $f(u) : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ definiert durch $f(u)(i) = f(u)_i$, weiterhin $F \subseteq \{ f(u) : u \in \mathfrak{R}^m \}$ die gegebene Klasse reeller Funktionen und $\mathcal{Y} = f(u)(\mathcal{X})$, $\mathcal{Z} = g(\mathcal{X})$. Falls ein Element $f(u) \in F$ existiert, so daß $r^2(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = r^2(f(u), l)$ den maximal möglichen Wert bezüglich aller Elemente der Klasse F annimmt, dann ist $f(u)$ die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation.

Damit ist eine Ausgleichung nach maximaler Korrelation für gleichgewichtige Beobachtungen definiert. Im folgenden Abschnitt soll nun die Erweiterung auf gewichtete und korrelierte Beobachtungen erfolgen.

3.3.4 Einführung von Gewichten

Die Einführung von Gewichten in die Ausgleichung nach maximaler Korrelation kann analog zur Vorgehensweise bei einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten erfolgen (siehe z.B. SMART 1958, S. 99; LINNIK 1961, S. 120). Gegeben sind die Beobachtungsgleichungen

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (3.31)$$

und die Gewichtsmatrix \mathbf{P} . Die Zielfunktion einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten lautet

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = (\mathbf{f} - \mathbf{l})^T \mathbf{P} (\mathbf{f} - \mathbf{l}) \rightarrow \min . \quad (3.32)$$

Liegt als Gewichtsmatrix eine Diagonalmatrix⁴⁴ in der Form

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

vor, so läßt sich die Zielfunktion (3.32) darstellen als

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n p_i (f(u)_i - l_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{p_i} f(u)_i - \sqrt{p_i} l_i \right)^2 . \quad (3.34)$$

⁴⁴ Dieser Fall ist immer dann gegeben wenn Elementarbeobachtungen verwendet werden, die nicht aus einer Vorausgleichung stammen und somit keine mathematischen Korrelationen aufweisen. Physikalische Korrelationen, z.B. um gleiche meteorologische Verhältnisse während der Messungen zu berücksichtigen, sind schwer abzuschätzen, so daß auf deren Einführung zumeist verzichtet wird.

Führt man eine Matrix \mathbf{R} ein, für die gilt $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{P}$, so ergibt sich diese zu

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{p_n} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Führt man damit die Transformation

$$\tilde{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 \\ \tilde{l}_2 \\ \vdots \\ \tilde{l}_n \end{bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \sqrt{p_1} l_1 \\ \sqrt{p_2} l_2 \\ \vdots \\ \sqrt{p_n} l_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tilde{f}(u)_1 \\ \tilde{f}(u)_2 \\ \vdots \\ \tilde{f}(u)_n \end{bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sqrt{p_1} f(u)_1 \\ \sqrt{p_2} f(u)_2 \\ \vdots \\ \sqrt{p_n} f(u)_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{bmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sqrt{p_1} v_1 \\ \sqrt{p_2} v_2 \\ \vdots \\ \sqrt{p_n} v_n \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

durch, so läßt sich die Ausgleichung mit Gewichten in ein äquivalentes Ersatzproblem ohne Gewichte mit den Beobachtungsgleichungen

$$\tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (3.37)$$

und der Zielfunktion

$$\tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{l}})^T (\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{l}}) \rightarrow \min \quad (3.38)$$

überführen. Diese Transformation ist sowohl für lineare als auch für nichtlineare Modellgleichungen möglich. Im linearen Modell ergeben sich die Beobachtungsgleichungen mit

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (3.39)$$

zu

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (3.40)$$

Somit lautet die Zielfunktion

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = (\mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{l})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{l}) \rightarrow \min \quad (3.41)$$

Führt man analog zu (3.36) die Transformation

$$\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{R} \mathbf{l}, \quad \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{R} \mathbf{v} \quad (3.42)$$

durch, so erhält man wieder ein Ersatzproblem ohne Gewichte mit den Beobachtungsgleichungen

$$\tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u} \quad (3.43)$$

und der Zielfunktion

$$\tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{l}})^T (\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{l}}) \rightarrow \min \quad (3.44)$$

Ausgehend von den Beobachtungsgleichungen (3.31) und der Zielfunktion (3.32) sollen nun symmetrische Gewichtsmatrizen eingeführt werden, die von der Diagonalform abweichen. Falls \mathbf{P} positiv definit ist, kann die Matrix mit Hilfe einer Cholesky-Zerlegung in das Produkt aus einer unteren Dreiecksmatrix \mathbf{R}^T und einer oberen Dreiecksmatrix \mathbf{R} in der Form

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad (3.45)$$

dargestellt werden. Mit \mathbf{R} kann wieder die Transformation (3.36) erfolgen, so daß sich die transformierten Beobachtungsgleichungen (3.37) mit der Zielfunktion (3.38) ergeben. Im Falle linearer Modellgleichungen führt die Transformation (3.42) wieder auf die Beobachtungsgleichungen (3.43) mit der Zielfunktion (3.44).

3.3.5 Der Korrelationskoeffizient für gewichtete und korrelierte Beobachtungen

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, daß sich ein Ausgleichungsproblem mit Gewichten in ein äquivalentes Ersatzproblem ohne Gewichte transformieren läßt, kann nun auf gleiche Weise auch der Korrelationskoeffizient für gewichtete Beobachtungen aufgestellt werden. Mit der Transformation der Beobachtungen und des funktionalen Modells aus (3.36) ergibt sich dieser zu

$$r^2 = r^2(f(u)_i, p_i, l_i) = r^2(\tilde{f}(u)_i, \tilde{l}_i) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (\tilde{f}(u)_i - \overline{\tilde{f}(u)}) (\tilde{l}_i - \overline{\tilde{l}}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (\tilde{f}(u)_i - \overline{\tilde{f}(u)})^2 \sum_{i=1}^n (\tilde{l}_i - \overline{\tilde{l}})^2} \quad (3.46)$$

mit

$$\overline{\tilde{f}(u)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{f}(u)_i, \quad \overline{\tilde{l}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{l}_i. \quad (3.47)$$

In vektorieller Schreibweise stellt sich der Korrelationskoeffizient (3.46) in der Form

$$r^2 = r^2(\mathbf{f}, \mathbf{P}, \mathbf{l}) = r^2(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{l}}) = \frac{\left((\tilde{\mathbf{f}} - \overline{\tilde{\mathbf{f}}})^T (\tilde{\mathbf{l}} - \overline{\tilde{\mathbf{l}}}) \right)^2}{(\tilde{\mathbf{f}} - \overline{\tilde{\mathbf{f}}})^T (\tilde{\mathbf{f}} - \overline{\tilde{\mathbf{f}}}) (\tilde{\mathbf{l}} - \overline{\tilde{\mathbf{l}}})^T (\tilde{\mathbf{l}} - \overline{\tilde{\mathbf{l}}})} \quad (3.48)$$

dar. Die Vektoren $\tilde{\mathbf{l}}, \overline{\tilde{\mathbf{l}}} \in \mathfrak{R}^n$ beinhalten als Komponenten jeweils den Mittelwert aus allen Komponenten der Vektoren $\tilde{\mathbf{l}}$ bzw. $\overline{\tilde{\mathbf{l}}}$ und können wie folgt gebildet werden:

$$\overline{\tilde{\mathbf{l}}} = \frac{1}{n} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{l}} = \frac{1}{n} \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{l}, \quad \overline{\tilde{\mathbf{f}}} = \frac{1}{n} \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{f}, \quad (3.49)$$

mit

$$\mathbf{K}_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Durch Multiplikation eines beliebigen Vektors \mathbf{b} oder einer Matrix \mathbf{B} mit \mathbf{K} erhält man

$$\mathbf{K}_{(n \times n)} \mathbf{b}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n b_i \\ \sum_{i=1}^n b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_i \end{bmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K}_{(n \times n)} \mathbf{B}_{(n \times m)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n B_{i1} & \sum_{i=1}^n B_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n B_{im} \\ \sum_{i=1}^n B_{i1} & \sum_{i=1}^n B_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n B_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n B_{i1} & \sum_{i=1}^n B_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n B_{im} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

d.h. die Komponenten einer Spalte bestehen aus der Spaltensumme des Ausgangsvektors \mathbf{b} bzw. der Ausgangsmatrix \mathbf{B} . Eine Multiplikation des Vektors $\tilde{\mathbf{l}}$ mit der Matrix \mathbf{K} und anschließender Division durch n führt somit in (3.49) zu dem gesuchten Vektor $\overline{\tilde{\mathbf{l}}}$ und analog zu $\overline{\tilde{\mathbf{f}}}$. Unter Verwendung von (3.49) lassen sich die einzelnen Terme des Korrelationskoeffizienten (3.48) in der Form

$$(\tilde{\mathbf{l}} - \overline{\tilde{\mathbf{l}}}) = \left(\mathbf{R} \mathbf{l} - \frac{1}{n} \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{l} \right) = \underbrace{\left(\mathbf{E} - \frac{1}{n} \mathbf{K} \right)}_{\mathbf{M}} \mathbf{R} \mathbf{l} = \mathbf{M} \mathbf{R} \mathbf{l} \quad \text{und analog} \quad (\tilde{\mathbf{f}} - \overline{\tilde{\mathbf{f}}}) = \mathbf{M} \mathbf{R} \mathbf{f} \quad (3.52)$$

darstellen. Die Matrix \mathbf{M} , mit der nun die Mittelbildung und Zentrierung der Daten erfolgt, läßt sich allgemein darstellen als

$$\mathbf{M}_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{n}\right) & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \left(1 - \frac{1}{n}\right) & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Diese Matrix ist idempotent, was nun gezeigt wird.

Behauptung:

Matrix \mathbf{M} ist idempotent, d.h. es gilt

$$\mathbf{M}\mathbf{M} = \mathbf{M}. \quad (3.54)$$

Beweis:

Bildet man das Produkt $\mathbf{M}\mathbf{M}$, so ergibt sich

$$\mathbf{M}\mathbf{M} = \left(\mathbf{E} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\right)\left(\mathbf{E} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\right) = \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{n}\mathbf{E}\mathbf{K} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\mathbf{E} + \frac{1}{n^2}\mathbf{K}\mathbf{K}. \quad (3.55)$$

Unter Verwendung von (3.51) ergibt sich das Produkt $\mathbf{K}\mathbf{K}$ zu

$$\mathbf{K}_{(n \times n)}\mathbf{K}_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & n \end{bmatrix} = n\mathbf{K}_{(n \times n)} \quad (3.56)$$

und man erhält aus (3.55)

$$\mathbf{M}\mathbf{M} = \left(\mathbf{E} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\right)\left(\mathbf{E} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\right) = \mathbf{E} - \frac{2}{n}\mathbf{K} + \frac{1}{n^2}\mathbf{K}\mathbf{K} = \mathbf{E} - \frac{2}{n}\mathbf{K} + \frac{1}{n^2}n\mathbf{K} = \mathbf{E} - \frac{1}{n}\mathbf{K} = \mathbf{M} \quad (3.57)$$

q.e.d.

Für den Zähler des Korrelationskoeffizienten in (3.48) ergibt sich somit

$$\left(\left(\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\tilde{\mathbf{f}}}\right)^T \left(\tilde{\mathbf{I}} - \bar{\tilde{\mathbf{I}}}\right)\right)^2 = \left(\left(\mathbf{R}\mathbf{f} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{f}\right)^T \left(\mathbf{R}\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{I}\right)\right)^2 = \left(\left(\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{f}\right)^T \left(\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{I}\right)\right)^2 = \left(\mathbf{f}^T \mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{I}\right)^2 = \left(\mathbf{f}^T \mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{I}\right)^2. \quad (3.58)$$

Für den Nenner erhält man

$$\left(\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\tilde{\mathbf{f}}}\right)^T \left(\tilde{\mathbf{f}} - \bar{\tilde{\mathbf{f}}}\right) = \left(\mathbf{R}\mathbf{f} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{f}\right)^T \left(\mathbf{R}\mathbf{f} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{f}\right) = \left(\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{f}\right)^T \left(\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{f}\right) = \mathbf{f}^T \mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{f} \quad (3.59)$$

und

$$\left(\tilde{\mathbf{I}} - \bar{\tilde{\mathbf{I}}}\right)^T \left(\tilde{\mathbf{I}} - \bar{\tilde{\mathbf{I}}}\right) = \left(\mathbf{R}\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{I}\right)^T \left(\mathbf{R}\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{I}\right) = \left(\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{I}\right)^T \left(\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{I}\right) = \mathbf{I}^T \mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{I}^T \mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{I}. \quad (3.60)$$

Faßt man

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{R} = \mathbf{P} - \frac{1}{n}\mathbf{R}^T \mathbf{K}\mathbf{R} \quad (3.61)$$

als eine transformierte Gewichtsmatrix auf, so erhält man mit

$$r^2 = r^2(\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{P}}, \mathbf{I}) = \frac{\left(\mathbf{f}^T \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{I}\right)^2}{\left(\mathbf{f}^T \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{f}\right)\left(\mathbf{I}^T \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{I}\right)} \quad (3.62)$$

eine verallgemeinerte Darstellung des Korrelationskoeffizienten, die sowohl für gewichtete als auch für korrelierte Beobachtungen angewendet werden kann. Im Falle gleichgewichtiger Beobachtungen ist $\mathbf{R} = \mathbf{E}$ zu setzen und es ergibt sich aus (3.61)

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{M}. \quad (3.63)$$

Die verallgemeinerte Darstellung des Korrelationskoeffizienten kann damit auch für diesen Fall verwendet werden.

3.3.6 Eigenschaften der Lösung

Aus der Definition 3.2 ist ersichtlich, daß, wie bei allen anderen Ausgleichungsproblemen, die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation in einer festgelegten Klasse \mathbf{F} gesucht wird. Die Fälle, in denen man für das Ausgleichungsproblem eine nicht eindeutige Lösung erhält, ergeben sich aus (3.19). Daraus folgt der Satz (PETROVIC 1991):

Satz 3.1:

Wird die Lösung f der Ausgleichung nach maximaler Korrelation in einer Klasse \mathbf{F} gesucht mit der Eigenschaft

$$f \in \mathbf{F} \quad \& \quad c_1, c_2 \in \mathfrak{R} \Rightarrow c_1 + c_2 f \in \mathbf{F}, \quad (3.64)$$

dann gilt für jede Lösung $f_0 \in \mathbf{F}$, daß alle Funktionen $c_1 + c_2 f_0 \in \mathbf{F}$ ebenfalls Lösungen des gleichen Problems sind. Mit (3.64) besteht die Lösung nach maximaler Korrelation somit aus einer ganzen Unterklasse

$$\{f : f = c_1 + c_2 f_0 \quad \forall c_1, c_2 \in \mathfrak{R}\} \subseteq \mathbf{F}. \quad (3.65)$$

Falls anstelle von (3.64) lediglich die Eigenschaft

$$f \in \mathbf{F} \quad \& \quad c_1 \in \mathfrak{R} \Rightarrow c_1 + f \in \mathbf{F} \quad (3.66)$$

gilt, dann generiert jede Lösung f_0 die Klasse

$$\{f : f = c_1 + f_0 \quad \forall c_1 \in \mathfrak{R}\} \subseteq \mathbf{F} \quad (3.67)$$

und im Falle

$$f \in \mathbf{F} \quad \& \quad c_2 \in \mathfrak{R} \Rightarrow c_2 f \in \mathbf{F} \quad (3.68)$$

eine Klasse der Form

$$\{f : f = c_2 f_0 \quad \forall c_2 \in \mathfrak{R}\} \subseteq \mathbf{F}. \quad (3.69)$$

Eine besondere Bedeutung besitzt der erste Fall, denn wenn (3.64) erfüllt ist, beinhaltet die Unterklasse der Lösungen nach maximaler Korrelation auch die Lösung nach kleinsten Quadraten. Der Beweis dieser Eigenschaft wurde in (PETROVIC 1991) für den Fall zentrierter Meß- und Funktionswerte geführt. Im folgenden soll der Beweis in einer allgemeineren Form für unzentrierte Meß- und Funktionswerte geführt werden.

Behauptung:

Besitzt eine Funktion die Eigenschaft

$$f \in \mathbf{F} \quad \& \quad c_1, c_2 \in \mathfrak{R} \Rightarrow c_1 + c_2 f \in \mathbf{F}, \quad (3.70)$$

so ist die Lösung nach kleinsten Quadraten in der Unterklasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation enthalten, d.h. wenn die Forderung

$$\sum_{i=1}^n v_i v_i \rightarrow \min \quad (3.71)$$

erfüllt ist, nimmt der Korrelationskoeffizient (3.25) mit

$$r^2(\mathbf{f}, \mathbf{l}) \rightarrow \max \quad (3.72)$$

seinen maximal möglichen Wert bezüglich der Klasse \mathbf{F} an.

Beweis:

Die Quadratsumme der Verbesserungen S einer Funktion (3.70) ist

$$S = S(c_1, c_2) = \sum_{i=1}^n (c_1 + c_2 f_i - l_i)^2. \quad (3.73)$$

Zur Bestimmung des Minimums der Funktion S werden zunächst die partiellen Ableitungen nach c_1 und c_2 gebildet

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = 2 \sum_{i=1}^n (c_1 + c_2 f_i - l_i) = 2nc_1 + 2nc_2 \bar{f} - 2n\bar{l}, \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_2} = 2 \sum_{i=1}^n f_i (c_1 + c_2 f_i - l_i) = 2nc_1 \bar{f} + 2c_2 \sum_{i=1}^n f_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n f_i l_i. \quad (3.75)$$

Setzt man dann die partiellen Ableitungen zu null

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial c_2} = 0, \quad (3.76)$$

erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} nc_1 + nc_2 \bar{f} &= n\bar{l} \\ nc_1 \bar{f} + c_2 \sum_{i=1}^n f_i^2 &= \sum_{i=1}^n f_i l_i. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Stellt man die erste Gleichung nach

$$c_1 = \bar{l} - c_2 \bar{f} \quad (3.78)$$

um und setzt c_1 in die zweite Gleichung ein, so erhält man

$$c_2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i l_i - n\bar{l}\bar{f}}{\sum_{i=1}^n f_i^2 - n\bar{f}^2} = \gamma_2 \quad (3.79)$$

Setzt man die Lösung für c_2 in (3.78) ein, ergibt sich

$$c_1 = \bar{l} - \gamma_2 \bar{f} = \gamma_1. \quad (3.80)$$

Somit nimmt die Funktion $S = S(c_1, c_2)$ dann ein Minimum an, wenn $c_1 = \gamma_1$ und $c_2 = \gamma_2$. Daraus folgt, daß

$$S = S(c_1, c_2) > S(\gamma_1, \gamma_2) = S_1 \quad \text{für alle } c_1 \neq \gamma_1, c_2 \neq \gamma_2 \quad (3.81)$$

ist. Die minimale Quadratsumme der Verbesserungen S_1 ist

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n (\gamma_1 + \gamma_2 f_i - l_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\gamma_1^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 f_i + \gamma_2^2 f_i^2 - 2l_i(\gamma_1 + \gamma_2 f_i) + l_i^2) \\ &= n\gamma_1^2 + 2n\gamma_1 \gamma_2 \bar{f} + \gamma_2^2 \sum_{i=1}^n f_i^2 - 2n\gamma_1 \bar{l} - 2\gamma_2 \sum_{i=1}^n f_i l_i + \sum_{i=1}^n l_i^2. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Eine Erweiterung um den Term $n\bar{l}^2$ (Addition und gleichzeitige Subtraktion) ergibt

$$S_1 = n\gamma_1^2 + 2n\gamma_1 \gamma_2 \bar{f} + \gamma_2^2 \sum_{i=1}^n f_i^2 - 2n\gamma_1 \bar{l} - 2\gamma_2 \sum_{i=1}^n f_i l_i + n\bar{l}^2 + \sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{n\gamma_1^2 + 2n\gamma_1\gamma_2\bar{f} + \gamma_2^2 \sum_{i=1}^n f_i^2 - 2n\gamma_1\bar{l} - 2\gamma_2 \sum_{i=1}^n f_i l_i + n\bar{l}^2}{\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2} + 1 \right) \left(\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2 \right) \\
&= \left(1 - \frac{2n\gamma_1\bar{l} + 2\gamma_2 \sum_{i=1}^n f_i l_i - n\gamma_1^2 - 2n\gamma_1\gamma_2\bar{f} - \gamma_2^2 \sum_{i=1}^n f_i^2 - n\bar{l}^2}{\underbrace{\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2}_R} \right) \left(\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Einsetzen von (3.80) in den Ausdruck R liefert

$$R = \frac{2n\bar{l}(\bar{l} - \gamma_2\bar{f}) + 2\gamma_2 \sum_{i=1}^n f_i l_i - n(\bar{l} - \gamma_2\bar{f})^2 - 2n\gamma_2\bar{f}(\bar{l} - \gamma_2\bar{f}) - \gamma_2^2 \sum_{i=1}^n f_i^2 - n\bar{l}^2}{\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2} \tag{3.84}$$

und nach der Zusammenfassung gleichartiger Terme

$$R = \frac{2\gamma_2 \left(\sum_{i=1}^n f_i l_i - n\bar{f}\bar{l} \right) - \gamma_2^2 \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 - n\bar{f}^2 \right)}{\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2}. \tag{3.85}$$

Setzt man (3.79) in (3.85) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}
R &= \left(\frac{2 \left(\sum_{i=1}^n f_i l_i - n\bar{f}\bar{l} \right) \left(\sum_{i=1}^n f_i l_i - n\bar{f}\bar{l} \right)}{\sum_{i=1}^n f_i^2 - n\bar{f}^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n f_i l_i - n\bar{f}\bar{l} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 - n\bar{f}^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 - n\bar{f}^2 \right)^2} \right) \bigg/ \left(\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2 \right) \\
&= \frac{2 \left(\sum_{i=1}^n f_i l_i - n\bar{f}\bar{l} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n f_i l_i - n\bar{f}\bar{l} \right)}{\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 - n\bar{f}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2 \right)} \\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^n f_i l_i - n\bar{f}\bar{l} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 - n\bar{f}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2 \right)} = r_1^2
\end{aligned} \tag{3.86}$$

und man erkennt, daß dieser Ausdruck mit dem Korrelationskoeffizient in (3.29) übereinstimmt. Setzt man (3.86) in (3.83) ein, so erhält man die Quadratsumme der Verbesserungen

$$S_1 = (1 - r_1^2) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2 \right)}_{= \text{const.}}. \tag{3.87}$$

Daraus folgt, daß $S_1 < S$ nur dann erfüllt ist, wenn $r_1^2 > r^2$ ist, d.h. die Quadratsumme der Verbesserungen wird nur dann minimal, wenn der Korrelationskoeffizient maximal ist. Somit liegt die Lösung nach kleinsten Quadraten in der Unterklasse von F in der der Korrelationskoeffizient seinen maximalen Wert annimmt.

q.e.d.

Die besondere Bedeutung dieser Eigenschaft liegt darin, daß man eine Basislösung f_0 mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten erzeugen kann, um im Anschluß daran durch Variation von c_1 und c_2 die Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation zu generieren. Stellt man (3.87) um, so kann man zudem mit

$$r_1^2 = 1 - \frac{S_1}{\sum_{i=1}^n l_i^2 - n\bar{l}^2} \quad (3.88)$$

den Wert des maximalen Korrelationskoeffizienten aus der Quadratsumme der Verbesserungen S_1 berechnen. Des weiteren läßt sich anhand von (3.88) erkennen, daß der maximale Korrelationskoeffizient, den man aus einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation erhält, die Eigenschaft der Datumsinvarianz aufweist.⁴⁵

3.3.7 Direkte Lösung des MCA-Problems

In der Ausgleichung nach maximaler Korrelation soll die Lösung derart bestimmt werden, daß der Korrelationskoeffizient (3.46) mit $r^2 \rightarrow \max \leq 1$ seinen maximalen Wert annimmt. Ist $f_0 \in \mathbf{F}$ eine Lösung dieses Ausgleichungsproblems, dann erfüllen die Unbekannten u_k das folgende Gleichungssystem (vgl. PETROVIC 2002)

$$F_k = \left(\sum_{i=1}^n (\tilde{l}_i - \bar{l}) \frac{\partial \tilde{f}(u)_i}{\partial u_k} \right) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{f}^2(u)_i - n\overline{\tilde{f}(u)}^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n \tilde{f}(u)_i (\tilde{l}_i - \bar{l}) \right) \left(\sum_{i=1}^n \tilde{f}(u)_i \frac{\partial \tilde{f}(u)_i}{\partial u_k} - n\overline{\tilde{f}(u)} \frac{\partial \overline{\tilde{f}(u)}}{\partial u_k} \right) = 0 \quad (3.89)$$

mit

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n \text{ (Anzahl der Beobachtungen),} \\ k &= 1, 2, \dots, m \text{ (Anzahl der Unbekannten).} \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist i.d.R. nicht linear und somit nicht direkt lösbar. Für die Lösung bieten sich die folgenden Methoden an:

1. Unter Verwendung geeigneter Näherungswerte wird das Gleichungssystem an der Stelle u_0 linearisiert, so daß sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (F_1)_{u_0} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial u_1} \right)_{u_0} \Delta u_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial u_2} \right)_{u_0} \Delta u_2 + \dots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial u_m} \right)_{u_0} \Delta u_m &= 0 \\ &\vdots \\ (F_m)_{u_0} + \left(\frac{\partial F_m}{\partial u_1} \right)_{u_0} \Delta u_1 + \left(\frac{\partial F_m}{\partial u_2} \right)_{u_0} \Delta u_2 + \dots + \left(\frac{\partial F_m}{\partial u_m} \right)_{u_0} \Delta u_m &= 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

ergibt. Die Lösung $u = u_0 + \Delta u$ wird dann wieder als Näherungslösung in (3.90) eingesetzt. Dieser Vorgang ist so lange zu wiederholen, bis ein festgelegtes Abbruchkriterium erreicht ist.

2. Es wird versucht, das Gleichungssystem (3.89) algebraisch soweit zu vereinfachen, daß es direkt lösbar wird. Ist dies nicht möglich, so kann mit diesem vereinfachten System eine Lösung durch Linearisierung und Iteration gesucht werden.
3. Einsatz der in Abschnitt 3.2.6 vorgestellten heuristischen Optimierungsverfahren, die ohne Linearisierung auskommen und bei denen durch systematisch-stochastisches Ausprobieren diejenigen Unbekannten gesucht werden, die eine ausgewählte Zielfunktion (hier r^2) maximieren.

Im linearen Modell besteht zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten ein linearer Zusammenhang, so daß sich die Beobachtungsgleichungen, nach der Transformation in ein ungewichtetes Problem (3.42), zu

$$\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} \quad (3.91)$$

ergeben, mit

⁴⁵ Wendet man die Ausgleichung nach maximaler Korrelation z.B. bei der Ausgleichung eines geodätischen Netzes an, so ergibt sich der maximale Korrelationskoeffizient unabhängig von der Datumsfestlegung, da er mit $r^2 = r^2(v_i, l_i)$ lediglich eine Funktion der ursprünglichen Beobachtungen l_i und der Verbesserungen v_i ist.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1m} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nm} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 \\ \tilde{l}_2 \\ \vdots \\ \tilde{l}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \vdots \\ \tilde{v}_m \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Stellt man die Forderung

$$r^2(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{l}}) \rightarrow \max \quad (3.93)$$

auf, wird aus (3.89) wegen

$$\tilde{f}(u)_i = \sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}(u)_i}{\partial u_k} = \tilde{a}_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m) \quad (3.95)$$

und

$$\frac{\partial \overline{\tilde{f}(u)}}{\partial u_k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (3.96)$$

der Ausdruck

$$F_k = \left(\sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ik} (\tilde{l}_i - \bar{l}) \right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij} u_j \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij} u_j \right) \right) - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij} (\tilde{l}_i - \bar{l}) u_j \right) \\ \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij} \tilde{a}_{ik} u_j - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ik} \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{a}_{ij} u_j \right) \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (3.97)$$

der für den Fall ungewichteter Beobachtungen auch in (PETROVIC 2002) zu finden ist. Im Gegensatz zu einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten ist dieses System nicht linear und somit ebenfalls wie (3.89) nicht elementar lösbar. Die Lösung ist auch in diesem Fall nur mit einer der oben unter den Punkten 1 bis 3 genannten Wege möglich.

3.3.8 Lösung des MCA-Problems über eine erweiterte L_2 -Ausgleichung

Es besteht aber die Möglichkeit eine Lösung zu gewinnen, ohne das Gleichungssystem (3.89) bzw. (3.97) direkt zu lösen. Betrachtet man zunächst das lineare Modell, so ist aus (3.91) und (3.92) ersichtlich, daß es die Eigenschaft (3.68) besitzt, da für jede beliebige Auswahl der Unbekannten u_1, u_2, \dots, u_m die dazugehörige Auswahl $u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*$ ($u_j^* = c_2 u_j$) existiert, so daß

$$c_2 \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}^* \quad (3.98)$$

ist. Somit ist die Lösung nach maximaler Korrelation nicht eindeutig, sondern eine ganze Klasse. Da das Modell aber nicht immer auch die stärkere Eigenschaft (3.64) aufweist, muß die zugeordnete Lösung nach kleinsten Quadraten nicht unbedingt eine der Lösungen nach maximaler Korrelation sein. Wenn jedoch eine Spalte von $\tilde{\mathbf{A}}$ mit

$$\exists j \in \{1, 2, \dots, m\} : \tilde{a}_{ij} = a \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.99)$$

gleiche Elemente enthält, besitzt das Modell auch die stärkere Eigenschaft (3.64).⁴⁶ In diesem Fall läßt sich die Lösung nach maximaler Korrelation sehr einfach finden. Die Lösungen bilden die Klasse

$$\{f : f = c_1 + c_2 f_0 \quad \forall c_1, c_2 \in \mathfrak{R}\} \subseteq \mathbf{F}, \quad (3.100)$$

⁴⁶ Es ist zu beachten, daß das Vorhandensein dieser Eigenschaft erst nach der Berücksichtigung der Gewichte (Transformation von \mathbf{A} nach $\tilde{\mathbf{A}}$) beurteilt werden kann.

wobei f_0 eine beliebige aus der Menge aller Lösungen sein kann. Wie in Abschnitt 3.3.6 gezeigt, enthält die Klasse in diesem Fall auch die Lösung nach kleinsten Quadraten, so daß man diese als Grundlösung f_0 auswählen kann, um daraus die Klasse (3.100) zu generieren. Da im allgemeinen die Bedingung (3.99) nicht erfüllt ist, kann folgende Vorgehensweise gewählt werden. Da, wie in Abschnitt 3.3.2 gezeigt,

$$r^2(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{I}}) = r^2(c_1\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{I}}) \quad (3.101)$$

mit

$$c_1 \in \mathfrak{R}, \quad \mathbf{e}_{(n \times 1)} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T \quad (3.102)$$

gilt, hat

$$\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{A}}^* \mathbf{u}^* \quad (3.103)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1m} & | & 1 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2m} & | & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nm} & | & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ \hline c_1 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

die gleiche Lösung nach maximaler Korrelation für u_1, u_2, \dots, u_m wie (3.91). Da das Gleichungssystem (3.103) die wichtige Eigenschaft (3.64) besitzt, kann aus der Lösung f_0 der erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten die Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation mit (3.65) generiert werden. Somit konnte gezeigt werden, daß man die Lösung des Gleichungssystems (3.91) aus einer erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten erhalten kann.

Um die Lösung nach maximaler Korrelation für nichtlineare Modellgleichungen zu finden, muß das Gleichungssystem (3.89) gelöst werden. Dieses ist nicht linear und nicht elementar lösbar. In Analogie zur Vorgehensweise bei linearen Modellen soll nun eine Strategie entwickelt werden, mit der es möglich ist, auch in diesem Fall die Lösung aus einer erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zu generieren. Nachdem die Gewichte mit Hilfe der Transformation (3.36) berücksichtigt wurden, ist zu prüfen, ob das nichtlineare Modell eine der Eigenschaften (3.64), (3.66) oder (3.68) aufweist.⁴⁷ Ist keine dieser Eigenschaften erfüllt, bietet sich folgende Vorgehensweise an.⁴⁸ Da

$$r^2(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{I}}) = r^2(c_1\mathbf{e} + c_2\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{I}}) \quad (3.105)$$

gilt, hat

$$\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{f}}^* \quad (3.106)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{f}}^* = c_1\mathbf{e} + c_2\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2\tilde{f}(u)_1 \\ c_1 + c_2\tilde{f}(u)_2 \\ \vdots \\ c_1 + c_2\tilde{f}(u)_n \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

die gleiche Lösung nach maximaler Korrelation für die Unbekannten u_1, u_2, \dots, u_m wie (3.37). Da das funktionale Modell nun die Eigenschaft (3.64) aufweist, kann aus der Lösung f_0 der erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten die Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation mit (3.65) erzeugt werden. Die Lösung des erweiterten Modells nach der Methode der kleinsten Quadrate kann durch Linearisierung und Iteration erfolgen. Eine Zusammenstellung von Gebrauchsformeln für die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation mit Hilfe einer erweiterten L_2 -Ausgleichung ist in (Anhang B) aufgeführt.

Während die Eigenschaften des Modells im linearen Fall sofort ersichtlich sind, können bei nichtlinearen Gleichungen Fälle auftreten, bei denen die Eigenschaften nicht sofort zu erkennen sind. Erweitert man dann das Modell um eine Eigenschaft, die das Modell bereits enthält, so wird das Ausgleichungsproblem singulär. Ein Beispiel, bei dem es zunächst so aussieht, als ob keine der Eigenschaften (3.64), (3.66), (3.68) erfüllt ist, soll dies verdeutlichen. Gegeben sind die nichtlinearen Modellgleichungen

⁴⁷ Diese Überprüfung ist mit den nichtlinearen Modellgleichungen durchzuführen und nicht mit einem linearisierten Ersatzproblem.

⁴⁸ Die Lösungsstrategie für die anderen Fälle ist in Anhang B.2 aufgeführt.

$$\begin{aligned}
l_1 + v_1 &= x + 0.5x^3 + y = f_1 \\
l_2 + v_2 &= 2x + 0.5x^3 - 2y = f_2 \\
l_3 + v_3 &= -x + 0.5x^3 - 3y = f_3 \\
l_4 + v_4 &= 3x + 0.5x^3 + 4y = f_4
\end{aligned} \tag{3.108}$$

und die in Tabelle 3.1 aufgeführten gleichgewichtigen Beobachtungen.

Tabelle 3.1: Beobachtungen

l_1	l_2	l_3	l_4
7.5	6.5	-0.5	14.5

Um das Ausgleichungsproblem nach maximaler Korrelation mit Hilfe einer erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zu lösen, muß das funktionale Modell die Eigenschaft (3.64) aufweisen bzw. um diese Eigenschaft erweitert werden. Um zu prüfen, welche Eigenschaften das Modell bereits aufweist, bietet sich folgende Strategie an. Zunächst wird das Modell um die Eigenschaft (3.66) erweitert und man erhält

$$\mathbf{f}_1^* = \begin{bmatrix} c_1 + x + 0.5x^3 + y \\ c_1 + 2x + 0.5x^3 - 2y \\ c_1 - x + 0.5x^3 - 3y \\ c_1 + 3x + 0.5x^3 + 4y \end{bmatrix}. \tag{3.109}$$

Um die Lösung zu berechnen, wird dieses erweiterte funktionale Modell nun unter Verwendung geeigneter Näherungswerte $c_1^0 = 0, x^0 = 2, y^0 = 1$ linearisiert und man erhält die Funktional- und die Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} 219 & 12 & 29 \\ 12 & 30 & 0 \\ 29 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{3.110}$$

Da die Determinante $\det(\mathbf{N}^*) \neq 0$ ist, war die Eigenschaft (3.66) noch nicht im Modell enthalten. Um zu prüfen, ob das Modell (3.108) bereits die Eigenschaft (3.68) aufweist, wird die Erweiterung

$$\mathbf{f}_2^* = \begin{bmatrix} c_2(x + 0.5x^3 + y) \\ c_2(2x + 0.5x^3 - 2y) \\ c_2(-x + 0.5x^3 - 3y) \\ c_2(+3x + 0.5x^3 + 4y) \end{bmatrix} \tag{3.111}$$

durchgeführt. Nach einer Linearisierung dieses erweiterten funktionalen Modells mit den Näherungswerten $c_2^0 = 1, x^0 = 2, y^0 = 1$, erhält man die Funktional- und die Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 8 & -2 & 6 \\ 5 & -3 & -1 \\ 9 & 4 & 14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} 219 & 12 & 218 \\ 12 & 30 & 54 \\ 218 & 54 & 282 \end{bmatrix}. \tag{3.112}$$

Auch hier ist $\det(\mathbf{N}^*) \neq 0$, somit war die Eigenschaft (3.68) ebenfalls noch nicht im Modell enthalten. Erweitert man aufgrund dieser Voruntersuchungen das ursprüngliche Modell (3.108) zu

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} c_1 + c_2(x + 0.5x^3 + y) \\ c_1 + c_2(2x + 0.5x^3 - 2y) \\ c_1 + c_2(-x + 0.5x^3 - 3y) \\ c_1 + c_2(+3x + 0.5x^3 + 4y) \end{bmatrix}, \tag{3.113}$$

so ergibt sich

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 7 \\ 8 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 1 & 14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} 219 & 12 & 29 & 218 \\ 12 & 30 & 0 & 54 \\ 29 & 0 & 4 & 26 \\ 218 & 54 & 26 & 282 \end{bmatrix}, \quad (3.114)$$

wobei nun allerdings $\det(\mathbf{N}^*) = 0$ ist. Warum dies der Fall ist wird klar, wenn man das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7.5 &= c_1 + c_2(x + 0.5x^3 + y) \\ 6.5 &= c_1 + c_2(2x + 0.5x^3 - 2y) \\ -0.5 &= c_1 + c_2(-x + 0.5x^3 - 3y) \\ 14.5 &= c_1 + c_2(3x + 0.5x^3 + 4y) \end{aligned} \quad (3.115)$$

explizit auflöst. Dann erhält man mit

$$c_1 = 4.5 - \frac{4}{c_2^2}, \quad z = \frac{1}{c_2}, \quad x = 2z \quad (3.116)$$

eine Lösung, bei der mit $c_1 = c_1(c_2)$ ein Parameter frei wählbar ist. Durch diese funktionale Abhängigkeit von c_1 und c_2 ist die Singularität dieses Gleichungssystems erklärt. Durch Variation des Parameters c_2 läßt sich die Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation generieren. Wählt man z.B. $c_2 = 2$, so erhält man die Lösung

$$c_1 = 3.5, \quad z = 0.5, \quad x = 1.0 \quad (3.117)$$

Da die Eigenschaften des funktionalen Modells im Allgemeinfall jedoch nicht explizit bekannt sind, bietet sich folgende Vorgehensweise zur Erzeugung der Klasse aller Lösungen an. Als Ausgangspunkt dient das singuläre System (3.113). Die Singularität wird nun derart beseitigt, daß man $c_2 \in \mathfrak{R}$ beliebig auswählt und in das funktionale Modell einsetzt. Wählt man wieder $c_2 = 2$, so erhält man⁴⁹

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} c_1 + 2(x + 0.5x^3 + y) \\ c_1 + 2(2x + 0.5x^3 - 2y) \\ c_1 + 2(-x + 0.5x^3 - 3y) \\ c_1 + 2(+3x + 0.5x^3 + 4y) \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

Nach einer Linearisierung mit den Näherungswerten $c_1^0 = 0, x^0 = 2, y^0 = 1$ erhält man die Funktionalmatrix, die Normalgleichungsmatrix und den verkürzten Beobachtungsvektor

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 1 \\ 16 & -4 & 1 \\ 10 & -6 & 1 \\ 18 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} 876 & 48 & 58 \\ 48 & 120 & 0 \\ 58 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} -6.5 \\ -5.5 \\ 1.5 \\ -13.5 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

und nach einigen Iterationsschritten die Lösung

$$c_1 = 3.5, \quad z = 0.5, \quad x = 1.0, \quad (3.120)$$

die mit der Lösung aus dem explizit aufgelösten nichtlinearen Gleichungssystem übereinstimmt. Die Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation wird also in diesem Fall derart erzeugt, daß man für jede Wahl von $c_2 \in \mathfrak{R}$ eine erneute Ausgleichung durchführt. In den Standardfällen, in denen keine funktionale Abhängigkeit zwischen c_1 und c_2 besteht, ist dies nicht erforderlich, dort kann man aus einer Basislösung f_0 nur durch Variation der Parameter c_1 und c_2 die gesamte Klasse der Lösungen nach maximaler Korrelation erzeugen.

⁴⁹ Eine weitere Möglichkeit über den Parameter c_2 zu verfügen, besteht darin, daß man ihn über eine Bedingungsgleichung festlegt, siehe hierzu Abschnitt 3.3.9.

3.3.9 MCA mit Bedingungen zwischen den Unbekannten

Gegeben sind die Beobachtungen l_i mit ihren Gewichten p_i . Zusätzlich zu den Beobachtungsgleichungen in der Form

$$l_i + v_i = f(u)_i, \quad i = (1, 2, \dots, n) \quad (3.121)$$

bestehen noch p Bedingungen

$$b(u)_j = s_j, \quad j = (1, 2, \dots, p), \quad (3.122)$$

die von den Unbekannten zu erfüllen sind. Bei einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten ist dies der Fall der vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten. Diese Bedingungen können berücksichtigt werden, indem die (nichtlinearen) Bedingungsgleichungen so umgeformt werden, daß p Unbekannte durch die übrigen $m - p$ Unbekannten ausgedrückt werden. Diese werden dann in die n Beobachtungsgleichungen (3.121) eingesetzt. Lassen sich die Bedingungsgleichungen nicht umformen, so müssen sie (und auch die Beobachtungsgleichungen) linearisiert werden. Im linearen Modell ist die beschriebene Substitution immer möglich (HRISTOW 1961). Nach dieser Substitution läßt sich das gesamte Problem wieder in Form von Beobachtungsgleichungen (3.121) mit $m - p$ Unbekannten darstellen, mit denen dann die Ausgleichung nach maximaler Korrelation durchgeführt werden kann.

Um die Lösung wieder aus einer erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zu generieren, müssen zuerst die Gewichte mit

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{R}\mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{R}\mathbf{f} \quad (3.123)$$

berücksichtigt werden. Danach werden die Bedingungen in die Modellgleichungen eingesetzt, die sich dann zu $\tilde{\mathbf{f}}_B$ ergeben. Nun ist zu prüfen, welche der Eigenschaften (3.64), (3.66), (3.68) das Modell $\tilde{\mathbf{f}}_B$ erfüllt. Im Allgemeinen, in dem keine der Eigenschaften vorhanden ist, ist folgendermaßen vorzugehen. Da

$$r^2(\tilde{\mathbf{f}}_B, \tilde{\mathbf{I}}) = r^2(c_1\mathbf{e} + c_2\tilde{\mathbf{f}}_B, \tilde{\mathbf{I}}) \quad (3.124)$$

gilt, hat

$$\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{f}}_B^* \quad (3.125)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{f}}_B^* = c_1\mathbf{e} + c_2\tilde{\mathbf{f}}_B = \begin{bmatrix} c_1 + c_2\tilde{f}_B(u)_1 \\ c_1 + c_2\tilde{f}_B(u)_2 \\ \vdots \\ c_1 + c_2\tilde{f}_B(u)_n \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

die gleiche Lösung nach maximaler Korrelation für die Unbekannten u_1, u_2, \dots, u_{m-p} wie (3.121) in Verbindung mit (3.122). Da das funktionale Modell (3.126) nun die Eigenschaft (3.64) aufweist, kann die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation aus einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten generiert werden. Ein numerisches Beispiel dazu ist in Abschnitt 3.3.11.3 aufgeführt.

Ist das Einsetzen der Bedingungen in das funktionale Modell nicht möglich, da sich die Bedingungsgleichungen nicht jeweils nach einer Unbekannten auflösen lassen, ist auch hier eine Vorgehensweise möglich, die bei der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten oftmals Verwendung findet, nämlich die Ränderung der Normalgleichungsmatrix mit den Bedingungen⁵⁰ (z.B. GOTTHARDT 1968). Nach der Einführung der Gewichte ist wieder zu überprüfen, welche der Eigenschaften (3.64), (3.66), (3.68) die Modellgleichungen $\tilde{\mathbf{f}}$ unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen $b(u)_j = s_j$ erfüllen. Während beim Einsetzen der Bedingungen die Eigenschaften im Modell $\tilde{\mathbf{f}}_B$ sofort überprüft werden können, ist dies bei der Ränderung nicht unmittelbar ersichtlich. Im Allgemeinen, insbesondere bei nichtlinearen Beobachtungsgleichungen unterschiedlicher Art (z.B. Strecken und Richtungen), ist eine Erweiterung des Modells in der Form

⁵⁰ Diese Vorgehensweise liefert die gleichen Ergebnisse wie das Einsetzen der Bedingungen in die Beobachtungsgleichungen, bei der sog. Ränderung handelt es sich nur um eine weitere rechentechnische Möglichkeit, Bedingungen in das Modell einzuführen.

$$\tilde{\mathbf{f}}^* = c_1 \mathbf{e} + c_2 \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_1 \\ c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_2 \\ \vdots \\ c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_n \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

durchzuführen.⁵¹ Dieses Modell wird an der Stelle der Näherungswerte \mathbf{u}^0 und \mathbf{c}^0 linearisiert und man erhält

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_1)}{\partial u_1} & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_1)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_1)}{\partial u_m} & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_1)}{\partial c_1} & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_1)}{\partial c_2} \\ \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_2)}{\partial u_1} & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_2)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_2)}{\partial u_m} & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_2)}{\partial c_1} & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_2)}{\partial c_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_n)}{\partial u_1} & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_n)}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_n)}{\partial u_m} & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_n)}{\partial c_1} & \frac{\partial(c_1 + c_2 \tilde{f}(u)_n)}{\partial c_2} \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 \frac{\partial(\tilde{f}(u)_1)}{\partial u_1} & c_2 \frac{\partial(\tilde{f}(u)_1)}{\partial u_2} & \dots & c_2 \frac{\partial(\tilde{f}(u)_1)}{\partial u_m} & 1 & \tilde{f}(u)_1 \\ c_2 \frac{\partial(\tilde{f}(u)_2)}{\partial u_1} & c_2 \frac{\partial(\tilde{f}(u)_2)}{\partial u_2} & \dots & c_2 \frac{\partial(\tilde{f}(u)_2)}{\partial u_m} & 1 & \tilde{f}(u)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_2 \frac{\partial(\tilde{f}(u)_n)}{\partial u_1} & c_2 \frac{\partial(\tilde{f}(u)_n)}{\partial u_2} & \dots & c_2 \frac{\partial(\tilde{f}(u)_n)}{\partial u_m} & 1 & \tilde{f}(u)_n \end{bmatrix}$$

und die Linearisierung der Bedingungsgleichungen liefert

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial b(u)_1}{\partial u_1} & \frac{\partial b(u)_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial b(u)_1}{\partial u_m} & \frac{\partial b(u)_1}{\partial c_1} & \frac{\partial b(u)_1}{\partial c_2} \\ \frac{\partial b(u)_2}{\partial u_1} & \frac{\partial b(u)_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial b(u)_2}{\partial u_m} & \frac{\partial b(u)_2}{\partial c_1} & \frac{\partial b(u)_2}{\partial c_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial b(u)_p}{\partial u_1} & \frac{\partial b(u)_p}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial b(u)_p}{\partial u_m} & \frac{\partial b(u)_p}{\partial c_1} & \frac{\partial b(u)_p}{\partial c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial b(u)_1}{\partial u_1} & \frac{\partial b(u)_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial b(u)_1}{\partial u_m} & 0 & 0 \\ \frac{\partial b(u)_2}{\partial u_1} & \frac{\partial b(u)_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial b(u)_2}{\partial u_m} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial b(u)_p}{\partial u_1} & \frac{\partial b(u)_p}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial b(u)_p}{\partial u_m} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.129)$$

Der verkürzte Beobachtungsvektor und der Widerspruchsvektor lauten

$$\Delta \tilde{\mathbf{I}}^* = \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{f}}^*(\mathbf{u}^0) = \tilde{\mathbf{I}} - (c_1 \mathbf{e} + c_2 \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^0)) = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 - (c_1^0 + c_2^0 \tilde{f}(u^0)_1) \\ \tilde{l}_2 - (c_1^0 + c_2^0 \tilde{f}(u^0)_2) \\ \vdots \\ \tilde{l}_n - (c_1^0 + c_2^0 \tilde{f}(u^0)_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{s} - \mathbf{b}(\mathbf{u}^0) = \begin{bmatrix} s_1 - b(u^0)_1 \\ s_2 - b(u^0)_2 \\ \vdots \\ s_p - b(u^0)_p \end{bmatrix}. \quad (3.130)$$

Aus

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^{*\top} \tilde{\mathbf{A}}^* & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^{*\top} \Delta \tilde{\mathbf{I}}^* \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

erhält man dann nach einigen Iterationen die Lösung für die Unbekannten

$$\mathbf{u}^{*\top} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n \mid c_1 \quad c_2], \quad (3.132)$$

wobei u_1, u_2, \dots, u_n die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation mit Bedingungen zwischen den Unbekannten ist. Ein numerisches Beispiel zu diesem Lösungsweg ist in Abschnitt 3.3.11.3 zu finden.

⁵¹ Erweitert man das Modell irrtümlich um eine Eigenschaft, die schon vorhanden ist, so wird die Normalgleichungsmatrix singular.

3.3.10 MCA bei singulären Ausgleichungsproblemen

Werden in einem Ausgleichungsproblem mehr Unbekannte eingeführt, als man tatsächlich aus den Messungen bestimmen kann, so erhält man nach der Linearisierung der Beobachtungsgleichungen

$$l_i + v_i = f(u)_i \quad i = (1, 2, \dots, n) \quad (3.133)$$

eine Funktionalmatrix \mathbf{A} , die nicht den vollen Spaltenrang aufweist. Der Rangdefekt beträgt in diesem Fall

$$d = m - r \quad (3.134)$$

mit

m ... Anzahl der Unbekannten,
 r ... Rang (\mathbf{A}).

Um diesen Rangdefekt zu beheben und eine Lösung herbeizuführen, werden d Bedingungsgleichungen

$$g(u)_j = s_j \quad j = (1, 2, \dots, d) \quad (3.135)$$

benötigt. Grundsätzlich können beliebige Bedingungen eingeführt werden, sie müssen lediglich in der Lage sein, den Rangdefekt von \mathbf{A} bzw. \mathbf{N} zu beheben. Da man somit aber beliebige Lösungen erhält, werden oftmals Bedingungen ausgewählt, die zu gewissen „Optimaleigenschaften“ führen. Wählt man im linearen bzw. linearisierten Modell die Matrix der Bedingungen \mathbf{G} derart, daß in ihr die Eigenvektoren bezüglich des d -fachen Eigenwertes $\lambda = 0$ der Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} zusammengefaßt sind, so erhält man eine Lösung mit minimaler Länge des Lösungsvektors und mit minimaler Spur der Kofaktorenmatrix der Unbekannten (siehe auch Abschnitt 2.1).

Die Lösung eines derartigen Ausgleichungsproblems nach maximaler Korrelation kann wieder, analog zu Abschnitt 3.3.9, durch eine erweiterte Ausgleichung nach kleinsten Quadraten erfolgen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Bedingungen hier überhaupt erst eine Lösung ermöglichen. Entscheidet man sich dafür, das Ausgleichungsproblem durch Ränderung der Normalgleichungsmatrix mit den Bedingungen zu lösen, so ergibt sich die Funktionalmatrix $\tilde{\mathbf{A}}^*$ wie in (3.128) dargestellt. Die Matrix der Bedingungen lautet in allgemeiner Form

$$\mathbf{G}^T = \left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{\partial g(u)_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u)_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g(u)_1}{\partial u_m} & \frac{\partial g(u)_1}{\partial c_1} & \frac{\partial g(u)_1}{\partial c_2} \\ \frac{\partial g(u)_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u)_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g(u)_2}{\partial u_m} & \frac{\partial g(u)_2}{\partial c_1} & \frac{\partial g(u)_2}{\partial c_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g(u)_d}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u)_d}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g(u)_d}{\partial u_m} & \frac{\partial g(u)_d}{\partial c_1} & \frac{\partial g(u)_d}{\partial c_2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{\partial g(u)_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u)_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g(u)_1}{\partial u_m} & 0 & 0 \\ \frac{\partial g(u)_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u)_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g(u)_2}{\partial u_m} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g(u)_d}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u)_d}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g(u)_d}{\partial u_m} & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.136)$$

Werden in \mathbf{G} die Eigenvektoren zu den Eigenwerten null der Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} eingesetzt und wird die Bedingungsgleichung in der Form

$$\mathbf{G}^T \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad (3.137)$$

aufgestellt, erhält man nach einigen Iterationen aus dem Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{\mathbf{A}}^{*T} \tilde{\mathbf{A}}^* & \mathbf{G} & & \mathbf{u}^* \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} & & \mathbf{k} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{k} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{A}}^{*T} \Delta \tilde{\mathbf{I}}^* \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (3.138)$$

die Lösung

$$\mathbf{u}^{*T} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m \mid c_1 \quad c_2] \quad (3.139)$$

mit kürzestem Lösungsvektor und minimaler Spur der Kofaktorenmatrix für die Unbekannten u_1, u_2, \dots, u_m . Aufgrund der Modellerweiterung (3.127) sind die ausgeglichenen Parameter u_1, u_2, \dots, u_m zugleich Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation. Ein numerisches Beispiel zu diesem Ausgleichungsproblem ist in Abschnitt 3.3.11.4 aufgeführt.

3.3.11 Numerische Beispiele

Die folgenden numerischen Beispiele dienen dazu, die Handhabung des Formelapparates der Ausgleichung nach maximaler Korrelation zu veranschaulichen. Konkrete Anwendungsziele, wie z.B. das Erkennen systematischer Fehler, werden nicht behandelt. Die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation wird durchweg durch eine erweiterte Ausgleichung nach kleinsten Quadraten, in Form einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen, erzeugt.

3.3.11.1 MCA ohne Gewichte

In dem in Abbildung 3.3 dargestellten Netz sollen die Koordinaten des Neupunktes 6 durch Streckenmessungen zu den Festpunkten 1 bis 5 bestimmt werden. Die Koordinaten der Festpunkte 1 bis 5 und die Näherungskoodinaten des Punktes 6 sind in Tabelle 3.2 aufgeführt.

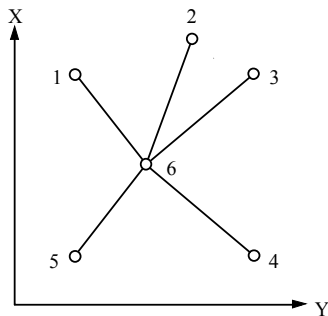


Abbildung 3.3: Streckennetz

Tabelle 3.2: Festpunkt- und Näherungskoodinaten

Pkt. Nr.	Y [m]	X [m]
1	100.000	400.000
2	300.000	500.000
3	400.000	400.000
4	400.000	100.000
5	100.000	100.000
6	250.0	300.0

Die Streckenmessungen, die in diesem Beispiel als gleichgewichtig angenommen werden, sind in Tabelle 3.3 aufgeführt.

Tabelle 3.3: Streckenmessungen

$s_{1,6}$ [m]	$s_{2,6}$ [m]	$s_{3,6}$ [m]	$s_{4,6}$ [m]	$s_{5,6}$ [m]
180.293	206.079	180.365	250.062	249.961

Die Ausgleichung nach maximaler Korrelation soll nun mit Hilfe einer erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten gemäß Abschnitt 3.3.8 erfolgen. Dazu ist zunächst festzustellen, welche der Eigenschaften (3.64), (3.66), (3.68) das funktionale Modell

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \sqrt{(X_6 - 400)^2 + (Y_6 - 100)^2} \\
 f_2 &= \sqrt{(X_6 - 500)^2 + (Y_6 - 300)^2} \\
 f_3 &= \sqrt{(X_6 - 400)^2 + (Y_6 - 400)^2} \\
 f_4 &= \sqrt{(X_6 - 100)^2 + (Y_6 - 400)^2} \\
 f_5 &= \sqrt{(X_6 - 100)^2 + (Y_6 - 100)^2}
 \end{aligned} \tag{3.140}$$

bereits aufweist. Da die Gleichungen keinen additiven Term aufweisen, ist die Eigenschaft (3.66) nicht vorhanden. Um zu erkennen, ob die Eigenschaft (3.68) erfüllt ist, wird exemplarisch die erste Gleichung mit einem Faktor c_2 multipliziert. Es ist zu prüfen, ob

$$c_2 \sqrt{(X_6 - 400)^2 + (Y_6 - 100)^2} \in \mathbf{F} \tag{3.141}$$

gilt. Formt man diesen Ausdruck um, so erhält man

$$\sqrt{(c_2 X_6 - 400 c_2)^2 + (c_2 Y_6 - 100 c_2)^2}, \tag{3.142}$$

wobei sich $c_2 X_6$ und $c_2 Y_6$ zu

$$c_2 X_6 = X_6^*, \quad c_2 Y_6 = Y_6^* \tag{3.143}$$

zusammenfassen lassen. Da sich die Ausdrücke $400 c_2$ und $100 c_2$ jedoch nicht zusammenfassen lassen, entsteht mit

$$\sqrt{(X_6^* - 400 c_2)^2 + (Y_6^* - 100 c_2)^2} \notin \mathbf{F} \quad (3.144)$$

ein Ausdruck, der nicht zu der Klasse von Funktionen in (3.140) gehört. Somit besitzt das Gleichungssystem (3.140) weder die Eigenschaft (3.66) noch die Eigenschaft (3.68) und die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation ist in diesem Falle eindeutig.

Da für die Ausgleichung nach maximaler Korrelation mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten die Eigenschaft (3.64) gegeben sein muß, wird das ursprüngliche Modell (3.140) nun um diese Eigenschaft erweitert zu

$$\begin{aligned} f_1^* &= c_2 \sqrt{(X_6 - 400)^2 + (Y_6 - 100)^2} + c_1 \\ &\quad \vdots \\ f_5^* &= c_2 \sqrt{(X_6 - 100)^2 + (Y_6 - 100)^2} + c_1 \end{aligned} \quad (3.145)$$

und man erhält die Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} s_{1,6} + v_{s_{1,6}} &= c_2 \sqrt{(X_6 - 400)^2 + (Y_6 - 100)^2} + c_1 = f_1^* \\ &\quad \vdots \\ s_{5,6} + v_{s_{5,6}} &= c_2 \sqrt{(X_6 - 100)^2 + (Y_6 - 100)^2} + c_1 = f_5^* \end{aligned} \quad (3.146)$$

Unter Verwendung der in Tabelle 3.2 aufgeführten Näherungskoodinaten Y_6^0 , X_6^0 und der Werte $c_1^0 = 0$, $c_2^0 = 1$ kann der funktionale Zusammenhang linearisiert werden. Mit der Funktionalmatrix

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^*}{\partial X_6} & \frac{\partial f_1^*}{\partial Y_6} & \frac{\partial f_1^*}{\partial c_1} & \frac{\partial f_1^*}{\partial c_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_5^*}{\partial X_6} & \frac{\partial f_5^*}{\partial Y_6} & \frac{\partial f_5^*}{\partial c_1} & \frac{\partial f_5^*}{\partial c_2} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

und dem verkürzten Beobachtungsvektor

$$\Delta \mathbf{l}^* = \begin{bmatrix} s_{1,6} - s_{1,6}^0 \\ \vdots \\ s_{5,6} - s_{5,6}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,6} - \left(c_2^0 \sqrt{(X_6^0 - 400)^2 + (Y_6^0 - 100)^2} + c_1^0 \right) \\ \vdots \\ s_{5,6} - \left(c_2^0 \sqrt{(X_6^0 - 100)^2 + (Y_6^0 - 100)^2} + c_1^0 \right) \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

lassen sich die bekannten Formeln zur Lösung einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten anwenden und man erhält nach einigen Iterationsschritten für die Unbekannten die in Tabelle 3.4 aufgeführten Werte.

Tabelle 3.4: Lösung der erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten

Y_6 [m]	X_6 [m]	c_1 [m]	c_2
249.943	300.138	0.7147	0.996745

Unter Verwendung der Unbekannten X_6 und Y_6 (Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation) können nun mit (3.140) die ausgeglichenen Funktionswerte berechnet werden. Diese bilden den Vektor \mathbf{f} , die in Tabelle 3.3 aufgeführten Beobachtungen bilden den Vektor \mathbf{l} . Da die Beobachtungen als gleichgewichtig angenommen wurden, ergibt sich die transformierte Gewichtsmatrix⁵² unter Berücksichtigung von (3.53) und (3.63) zu

⁵² Im Falle gleichgewichtiger Beobachtungen wird mit Hilfe dieser Matrix nur die Zentrierung durchgeführt.

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}. \quad (3.149)$$

Setzt man \mathbf{f} , \mathbf{I} und $\tilde{\mathbf{P}}$ in den Korrelationskoeffizienten (3.62) ein, so erhält man $r^2 = 0.999999838612$.

3.3.11.2 MCA mit vollbesetzter Gewichtsmatrix

Als Beispiel wird wieder das in Abbildung 3.3 dargestellte Netz mit den Koordinaten in Tabelle 3.2 verwendet, jedoch soll nun für die Streckenmessungen in Tabelle 3.3 eine vollbesetzte (positiv definite) Gewichtsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.1500 & -0.2000 & -0.5000 & 0.0300 \\ 0.1500 & 0.9250 & 0.3500 & -0.3125 & -0.4705 \\ -0.2000 & 0.3500 & 1.0100 & 0.0360 & -0.4760 \\ -0.5000 & -0.3125 & 0.0360 & 1.0366 & 0.1490 \\ 0.0300 & -0.4705 & -0.4760 & 0.1490 & 0.9845 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

eingeführt werden. Um die Gewichtsverhältnisse in der Ausgleichung nach maximaler Korrelation zu berücksichtigen, wird mit \mathbf{P} eine Cholesky-Zerlegung durchgeführt und man erhält die obere Dreiecksmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.15 & -0.20 & -0.50 & 0.03 \\ 0 & 0.95 & 0.40 & -0.25 & -0.50 \\ 0 & 0 & 0.90 & 0.04 & -0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.80 \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

mit der die Transformation (3.36) in eine Problemstellung ohne Gewichte durchgeführt werden kann. Mit

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.15 & -0.20 & -0.50 & 0.03 \\ 0 & 0.95 & 0.40 & -0.25 & -0.50 \\ 0 & 0 & 0.90 & 0.04 & -0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180.293 \\ 206.079 \\ 180.365 \\ 250.062 \\ 249.961 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57.600 \\ 80.425 \\ 97.343 \\ 227.550 \\ 199.969 \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

erhält man den Beobachtungsvektor und mit

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.15 & -0.20 & -0.50 & 0.03 \\ 0 & 0.95 & 0.40 & -0.25 & -0.50 \\ 0 & 0 & 0.90 & 0.04 & -0.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + 0.15f_2 - 0.20f_3 - 0.50f_4 + 0.03f_5 \\ 0.95f_2 + 0.40f_3 - 0.25f_4 - 0.50f_5 \\ 0.90f_3 + 0.04f_4 - 0.30f_5 \\ 0.85f_4 + 0.06f_5 \\ 0.80f_5 \end{bmatrix}. \quad (3.153)$$

das funktionale Modell für dieses Ersatzproblem. Setzt man die Gleichungen aus (3.140) für f_1, \dots, f_5 ein, so läßt sich analog zum ersten Beispiel zeigen, daß das funktionale Modell weder die Eigenschaft (3.66) noch (3.68) aufweist. Um die Lösung nach maximaler Korrelation über eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zu generieren, ist das Modell daher zu

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1^* &= c_2(f_1 + 0.15f_2 - 0.20f_3 - 0.50f_4 + 0.03f_5) + c_1 \\ \tilde{f}_2^* &= c_2(0.95f_2 + 0.40f_3 - 0.25f_4 - 0.50f_5) + c_1 \\ \tilde{f}_3^* &= c_2(0.90f_3 + 0.04f_4 - 0.30f_5) + c_1 \\ \tilde{f}_4^* &= c_2(0.85f_4 + 0.06f_5) + c_1 \\ \tilde{f}_5^* &= c_2(0.80f_5) + c_1 \end{aligned} \quad (3.154)$$

zu erweitern.

Die Beobachtungsgleichungen ergeben sich somit zu

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{1,6} + \tilde{v}_{s_{1,6}} &= c_2(f_1 + 0.15f_2 - 0.20f_3 - 0.50f_4 + 0.03f_5) + c_1 = \tilde{f}_1^* \\ &\vdots \\ \tilde{s}_{5,6} + \tilde{v}_{s_{5,6}} &= c_2(0.80f_5) + c_1 = \tilde{f}_5^* \end{aligned} \quad (3.155)$$

Diese werden dann an der Stelle der Näherungswerte für die Unbekannten linearisiert. Mit der Funktionalmatrix

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial X_6} & \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial Y_6} & \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial c_1} & \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial c_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}_5^*}{\partial X_6} & \frac{\partial \tilde{f}_5^*}{\partial Y_6} & \frac{\partial \tilde{f}_5^*}{\partial c_1} & \frac{\partial \tilde{f}_5^*}{\partial c_2} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

und dem verkürzten Beobachtungsvektor

$$\Delta \tilde{\mathbf{I}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{s}_{1,6} - \tilde{s}_{1,6}^0 \\ \vdots \\ \tilde{s}_{5,6} - \tilde{s}_{5,6}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_{1,6} - \tilde{f}_1^*(u^0) \\ \vdots \\ \tilde{s}_{5,6} - \tilde{f}_5^*(u^0) \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

kann man eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten durchführen und erhält nach einigen Iterationsschritten die in Tabelle 3.5 aufgeführte Lösung für die Unbekannten.

Tabelle 3.5: Lösung der erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten

Y_6 [m]	X_6 [m]	c_1 [m]	c_2
249.918	300.131	0.2702	0.998368

Unter Verwendung der Unbekannten X_6 und Y_6 (Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation)⁵³ können nun mit (3.140) die Komponenten des Vektors \mathbf{f} berechnet werden. Die in Tabelle 3.3 aufgeführten Beobachtungen bilden den Vektor \mathbf{l} . Die transformierte Gewichtsmatrix ergibt sich aus (3.61) unter Verwendung von (3.53) und (3.151) zu

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0.80000 & -0.07000 & -0.42000 & -0.52800 & 0.01200 \\ -0.07000 & 0.68300 & 0.10800 & -0.34330 & -0.49030 \\ -0.42000 & 0.10800 & 0.76800 & 0.00520 & -0.49580 \\ -0.52800 & -0.34330 & 0.00520 & 1.03268 & 0.14648 \\ 0.01200 & -0.49030 & -0.49580 & 0.14648 & 0.98288 \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

Setzt man \mathbf{f} , \mathbf{l} und $\tilde{\mathbf{P}}$ in (3.62) ein, so erhält man mit $r^2 = 0.999999965782$ den Wert des Korrelationskoeffizienten nach einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation.

3.3.11.3 MCA mit Bedingung zwischen den Unbekannten

Gegeben sind die nichtlinearen Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} l_1 + v_1 &= x = f_1 \\ l_2 + v_2 &= x^2 + y^2 = f_2 \\ l_3 + v_3 &= x^3 = f_3 \\ l_4 + v_4 &= y^3 - x^2 = f_4 \\ l_5 + v_5 &= y^2 = f_5 \end{aligned} \quad (3.159)$$

die Beobachtungen mit ihren Gewichten sind in Tabelle 3.6 aufgeführt. Zudem sollen die Unbekannten die Bedingung $b(u) = x^2 - y = s$, mit $s = 0$ erfüllen.

⁵³ Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Parameter c_1 und c_2 nicht zur Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation gehören. Sie wurden lediglich als Hilfsgrößen eingeführt, um das MCA-Problem mit Hilfe einer erweiterten L_2 -Ausgleichung zu generieren. Entscheidet man sich z.B. für eine Lösung des MCA-Problems gemäß Abschnitt 3.3.7, entfällt die Einführung zusätzlicher Parameter.

Tabelle 3.6: Beobachtungen und Gewichte

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
Beobachtung	2.000	20.100	7.800	60.200	16.000
Gewicht	1.21	0.81	1.44	1.00	0.64

Als erstes sind die Gewichte zu berücksichtigen. Da \mathbf{P} hier eine Diagonalmatrix ist, läßt sich die erforderliche Matrix \mathbf{R} sehr einfach berechnen mit $r_{ii} = \sqrt{p_{ii}}$ und $r_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Die Transformation (3.36) in eine Problemstellung ohne Gewichte liefert für den Beobachtungsvektor und das funktionale Modell

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1.1 & & & & \\ & 0.9 & & & \\ & & 1.2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1.0 \\ & & & & & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.000 \\ 20.100 \\ 7.800 \\ 60.200 \\ 16.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.200 \\ 18.090 \\ 9.360 \\ 60.200 \\ 12.800 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 1.1x \\ 0.9x^2 + 0.9y^2 \\ 1.2x^3 \\ y^3 - x^2 \\ 0.8y^2 \end{bmatrix}. \quad (3.160)$$

Nun wird die nichtlineare Bedingungsleichung nach $y = x^2$ umgestellt und in $\tilde{\mathbf{f}}$ eingesetzt und man erhält

$$\tilde{\mathbf{f}}_B = \begin{bmatrix} 1.1x \\ 0.9x^2 + 0.9x^4 \\ 1.2x^3 \\ x^6 - x^2 \\ 0.8x^4 \end{bmatrix}. \quad (3.161)$$

Danach ist zu prüfen, ob das funktionale Modell eine der Eigenschaften (3.64), (3.66), (3.68) aufweist. Da dies nicht der Fall ist, ist die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation in diesem Fall eindeutig. Um diese Lösung über eine erweiterte Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zu generieren, wird mit

$$\tilde{\mathbf{f}}_B^* = \begin{bmatrix} c_1 + c_2(1.1x) \\ c_1 + c_2(0.9x^2 + 0.9x^4) \\ c_1 + c_2(1.2x^3) \\ c_1 + c_2(x^6 - x^2) \\ c_1 + c_2(0.8x^4) \end{bmatrix}. \quad (3.162)$$

das Modell derart erweitert, daß es die Eigenschaft (3.64) aufweist. Um die Lösung zu berechnen, wird das erweiterte funktionale Modell nun unter Verwendung der Näherungswerte $x^0 = 2$, $c_1^0 = 0$ und $c_2^0 = 1$ linearisiert. Mit der Funktionalmatrix

$$\tilde{\mathbf{A}}_B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_{B_1}^*}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{f}_{B_1}^*}{\partial c_1} & \frac{\partial \tilde{f}_{B_1}^*}{\partial c_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}_{B_5}^*}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{f}_{B_5}^*}{\partial c_1} & \frac{\partial \tilde{f}_{B_5}^*}{\partial c_2} \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

und dem verkürzten Beobachtungsvektor

$$\Delta \tilde{\mathbf{I}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 - \tilde{l}_1^0 \\ \vdots \\ \tilde{l}_5 - \tilde{l}_5^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 - \tilde{f}_{B_1}^*(u^0) \\ \vdots \\ \tilde{l}_5 - \tilde{f}_{B_5}^*(u^0) \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

läßt sich der bekannte Algorithmus einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten anwenden und man erhält nach einigen Iterationen die in Tabelle 3.7 aufgeführte Lösung für die Unbekannten,

Tabelle 3.7: Lösung der erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten

x	c_1	c_2
1.9999	-0.0931	1.005256

wobei x die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation ist. Die Auflösung der Bedingungsgleichung liefert $y = 3.9996$.

Wie in Abschnitt 3.3.9 beschrieben, kann das Ausgleichungsproblem auch durch Ränderung der Normalgleichungsmatrix mit der Bedingung gelöst werden. Die Einführung der Gewichte erfolgt analog zu obiger Vorgehensweise. Zur Verfügung stehen somit $\tilde{\mathbf{I}}$ und $\tilde{\mathbf{f}}$ (3.160). Da das Modell unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung keine der Eigenschaften (3.64), (3.66), (3.68) aufweist, ist es eine Erweiterung in der Form

$$\tilde{\mathbf{f}}^* = \begin{bmatrix} c_1 + c_2(1.1x) \\ c_1 + c_2(0.9x^2 + 0.9y^2) \\ c_1 + c_2(1.2x^3) \\ c_1 + c_2(y^3 - x^2) \\ c_1 + c_2(0.8y^2) \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

erforderlich, so daß die Eigenschaft (3.64) erfüllt ist. Die Linearisierung dieses erweiterten Modells und der Bedingungsgleichung liefert

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial c_1} & \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial c_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}_5^*}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{f}_5^*}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{f}_5^*}{\partial c_1} & \frac{\partial \tilde{f}_5^*}{\partial c_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial b(u)}{\partial x} & \frac{\partial b(u)}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.166)$$

Der verkürzte Beobachtungsvektor und der Widerspruchsvektor lauten

$$\Delta \tilde{\mathbf{I}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 - \tilde{l}_1^0 \\ \vdots \\ \tilde{l}_5 - \tilde{l}_5^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 - \tilde{f}_1^*(u^0) \\ \vdots \\ \tilde{l}_5 - \tilde{f}_5^*(u^0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = [s - b(u^0)] = [0 - ((x^0)^2 - (y^0)^2)]. \quad (3.167)$$

Mit den Startwerten $x^0 = 2$, $y^0 = 4$, $c_1^0 = 0$ und $c_2^0 = 1$ erhält man aus der Auflösung von (3.131) nach einigen Iterationen das in Tabelle 3.8 aufgeführte Ergebnis (vgl. Tabelle 3.7).

Tabelle 3.8: Lösung der erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten

x	y	c_1	c_2
1.9999	3.9996	-0.0931	1.005256

Mit den ausgeglichenen Werten für die Unbekannten x und y , die die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation sind, können mit (3.159) die ausgeglichenen Funktionswerte berechnet werden, die den Vektor \mathbf{f} bilden. Die Beobachtungen in Tabelle 3.6 bilden den Vektor \mathbf{l} . Die transformierte Gewichtsmatrix wird gemäß (3.61) berechnet und ergibt sich zu

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0.968 & -0.198 & -0.264 & -0.220 & -0.176 \\ -0.198 & 0.648 & -0.216 & -0.180 & -0.144 \\ -0.264 & -0.216 & 1.152 & -0.240 & -0.192 \\ -0.220 & -0.180 & -0.240 & 0.800 & -0.160 \\ -0.176 & -0.144 & -0.192 & -0.160 & 0.512 \end{bmatrix}. \quad (3.168)$$

Setzt man \mathbf{f} , \mathbf{l} und $\tilde{\mathbf{P}}$ in den Korrelationskoeffizienten (3.62) ein, so erhält man $r^2 = 0.999974154731$.

3.3.11.4 MCA bei singulärem Ausgleichungsproblem

In dem in Abbildung 3.4 dargestellten Streckennetz sollen die Koordinaten der Punkte 1 bis 5 über eine freie Netzausgleichung bestimmt werden. Die erforderlichen Näherungskoodinaten sind in Tabelle 3.9 aufgeführt.

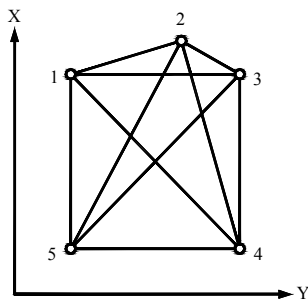


Abbildung 3.4: Streckennetz

Tabelle 3.9: Näherungskoodinaten

Pkt. Nr.	Y^0 [m]	X^0 [m]
1	100.0	400.0
2	300.0	500.0
3	400.0	400.0
4	400.0	100.0
5	100.0	100.0

Als Beobachtungen liegen die in Tabelle 3.10 aufgeführten unkorrelierten Streckenmessungen mit unterschiedlichen Gewichten vor.

Tabelle 3.10: Streckenmessungen und Gewichte

	$s_{1,2}$	$s_{1,3}$	$s_{1,4}$	$s_{1,5}$	$s_{2,3}$	$s_{2,4}$	$s_{2,5}$	$s_{3,4}$	$s_{3,5}$	$s_{4,5}$
Strecke [m]	223.643	299.960	424.229	300.044	141.425	412.304	447.239	299.950	424.233	300.028
Gewicht	1.21	1.00	0.64	1.00	1.44	0.81	0.49	1.00	0.64	1.00

Wird das funktionale Modell in der Form

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \\
 f_2 &= \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} \\
 &\vdots \\
 f_{10} &= \sqrt{(X_5 - X_4)^2 + (Y_5 - Y_4)^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.169}$$

aufgestellt, so entsteht ein singuläres Ausgleichungsproblem mit einem Rangdefekt von $d = 3$. Dieser kann durch Einführung von d Bedingungsgleichungen für die Unbekannten, analog zu (2.23) und (2.27), behoben werden. Um die Lösung dieser Ausgleichung nach maximaler Korrelation über eine erweiterte Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zu generieren, müssen die Eigenschaften des Modells untersucht werden. Dazu werden im ersten Schritt die Gewichte mit Hilfe der Transformation (3.36) berücksichtigt. Die Elemente der dafür erforderlichen Matrix \mathbf{R} lassen sich wieder mit $r_{ii} = \sqrt{p_{ii}}$ und $r_{ij} = 0$ für $i \neq j$ berechnen. Die Transformation in eine Problemstellung ohne Gewichte liefert für den Beobachtungsvektor und das funktionale Modell

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{I}}^T &= [1.1 \cdot 223.643 \quad 1.0 \cdot 299.960 \quad 0.8 \cdot 424.229 \quad 1.0 \cdot 300.044 \quad 1.2 \cdot 141.425 \\
 &\quad 0.9 \cdot 412.304 \quad 0.7 \cdot 447.239 \quad 1.0 \cdot 299.950 \quad 0.8 \cdot 424.233 \quad 1.0 \cdot 300.028], \\
 \tilde{\mathbf{f}}^T &= [1.1f_1 \quad 1.0f_2 \quad 0.8f_3 \quad 1.0f_4 \quad 1.2f_5 \quad 0.9f_6 \quad 0.7f_7 \quad 1.0f_8 \quad 0.8f_9 \quad 1.0f_{10}].
 \end{aligned}
 \tag{3.170}$$

Im nächsten Schritt ist zu prüfen, ob das Modell eine der Eigenschaften (3.64), (3.66), (3.68) aufweist. Da die Modellgleichungen $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{10}$ in (3.170) keinen gemeinsamen additiven Term aufweisen, ist die Eigenschaft (3.66) nicht vorhanden. Um zu erkennen, ob die Eigenschaft (3.68) erfüllt ist, wird exemplarisch die erste Gleichung mit einem Faktor c_2 multipliziert. Es gilt zu prüfen, ob

$$1.1c_2\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \in \mathbf{F}
 \tag{3.171}$$

gilt. Formt man diesen Ausdruck um, so erhält man

$$1.1\sqrt{(c_2X_2 - c_2X_1)^2 + (c_2Y_2 - c_2Y_1)^2} \quad ,
 \tag{3.172}$$

wobei sich die Ausdrücke $c_2 X_2$, $c_2 X_1$, und $c_2 Y_2$, $c_2 Y_1$ zu

$$c_2 X_2 = X_2^*, c_2 X_1 = X_1^* \quad \text{und} \quad c_2 Y_2 = Y_2^*, c_2 Y_1 = Y_1^* \quad (3.173)$$

zusammenfassen lassen. Damit entsteht mit

$$1.1 \sqrt{(X_2^* - X_1^*)^2 + (Y_2^* - Y_1^*)^2} \in \mathbf{F} \quad (3.174)$$

ein Ausdruck, der zu der selben Klasse von Funktionen gehört wie \tilde{f}_1 in (3.170). Da sich dies auch für die übrigen Gleichungen zeigen läßt, besitzt das Modell in (3.170) die Eigenschaft (3.68). Da diese Eigenschaft auch unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen erhalten bleibt, ist die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation nicht eindeutig, sondern eine ganze Klasse.

Da für die Ausgleichung nach maximaler Korrelation mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten die Eigenschaft (3.64) gegeben sein muß, wird das Modell in (3.170) nun zu dieser Eigenschaft erweitert und man erhält die Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{1,2} + \tilde{v}_{s_{1,2}} &= c_1 + 1.1 \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \tilde{f}_1^* \\ &\vdots \\ \tilde{s}_{4,5} + \tilde{v}_{s_{4,5}} &= c_1 + 1.0 \sqrt{(X_5 - X_4)^2 + (Y_5 - Y_4)^2} = \tilde{f}_{10}^* \end{aligned} \quad (3.175)$$

Das linearisierte funktionale Modell und die Matrix der Bedingungen, vgl. (2.21), ergeben sich zu

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial x_5} & \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial y_5} & \frac{\partial \tilde{f}_1^*}{\partial c_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}_{10}^*}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{f}_{10}^*}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_{10}^*}{\partial x_5} & \frac{\partial \tilde{f}_{10}^*}{\partial y_5} & \frac{\partial \tilde{f}_{10}^*}{\partial c_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -Y_1^0 & X_1^0 & \dots & -Y_{10}^0 & X_{10}^0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.176)$$

Mit dem verkürzten Beobachtungsvektor

$$\Delta \tilde{\mathbf{I}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{s}_{1,2} - \tilde{s}_{1,2}^0 \\ \vdots \\ \tilde{s}_{4,5} - \tilde{s}_{4,5}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_{1,2} - \tilde{f}_1^*(u^0) \\ \vdots \\ \tilde{s}_{4,5} - \tilde{f}_{10}^*(u^0) \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

erhält man aus der Auflösung von (3.138) nach einigen Iterationen für $c_1 = 0.0515$ und die in Tabelle 3.11 aufgeführten Koordinaten.⁵⁴

Tabelle 3.11: Eine Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation

Pkt. Nr.	Y [m]	X [m]
1	100.035	399.992
2	300.020	499.985
3	399.940	399.956
4	399.987	100.056
5	100.017	100.011

Unter Verwendung der ausgeglichenen Koordinaten können mit (3.169) die ausgeglichenen Funktionswerte berechnet werden, die den Vektor \mathbf{f} bilden. Die Beobachtungen in Tabelle 3.10 bilden den Vektor \mathbf{I} . Die transformierte Gewichtsmatrix wird gemäß (3.61) berechnet. Setzt man \mathbf{f} , \mathbf{I} und $\tilde{\mathbf{P}}$ in den Korrelationskoeffizienten (3.62) ein, so erhält man $r^2 = 0.999999964988$.

⁵⁴ Da die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation in diesem Beispiel nicht eindeutig ist, repräsentiert die Lösung nur eine aus der Klasse aller Lösungen. Die Klasse aller Lösungen kann mit (3.69) erzeugt werden.

4 Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze

Die generelle Zielsetzung bei der Auswertung geodätischer Meßdaten, nämlich aus der Gesamtmenge aller Eingangsdaten die größtmögliche Untergruppe konsistenter Daten zu finden, kann sehr anschaulich anhand der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze demonstriert werden. Bei dieser Aufgabenstellung besteht die Zielsetzung, aus der Gesamtheit aller Netzpunkte (bzw. aller Stützpunkte) diejenige Untergruppe zu lokalisieren, für die die Hypothese der Kongruenz angenommen werden kann.

Da die Beurteilung von Meßgrößen und Ausgleichsergebnissen i.d.R. mit Hilfe von statistischen Testverfahren durchgeführt wird, werden dazu einige Anmerkungen gegeben. Insbesondere wird auf das Problem einer sinnvollen Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit eingegangen. Es wird die Anwendung eines „umgekehrten statistischen Tests“ vorgeschlagen.

Danach wird die generelle Methodik und das Verfahren der Kongruenzuntersuchung, so wie es sich in der aktuellen Literatur darstellt, kurz aufgezeigt. Anhand eines numerischen Beispiels wird die Lokalisierung verschobener Punkte durch eine sukzessive Einzelpunktanalyse untersucht.

Unter Verwendung eines Transformationsansatzes aus Abschnitt 2.2 und der theoretischen Grundlagen aus Abschnitt 3.3 erfolgt dann die Kongruenzuntersuchung mit Hilfe einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation.

4.1 Anmerkungen zu den statistischen Testverfahren

4.1.1 Allgemeine Strategie

Bei allen geodätischen Aufgabenstellungen kommt der Beurteilung der Meßergebnisse oder daraus abgeleiteten Größen eine zentrale Bedeutung zu. Wie diese Beurteilung, die grundsätzlich unter Berücksichtigung der Meßgenauigkeit erfolgt, generell durchgeführt wird, läßt sich an folgendem Beispiel veranschaulichen. Gegeben sind zwei Meßwerte x_i und x_j für die selbe Größe (z.B. Strecke von Punkt A nach Punkt B). Die Annahme, daß die Abweichung $\Delta x = x_j - x_i$ lediglich auf Meßungenauigkeiten beruht, wird angenommen, falls

$$|\Delta x| \leq T \cdot \sigma \quad (4.1)$$

ist. In dieser Darstellung repräsentiert σ eine Fehlerschätzung für die Größe Δx , der Wert T stellt einen sinnvoll zu wählenden Faktor dar. Die Fehlerschätzung sollte auf möglichst gesicherten Erkenntnissen beruhen. Bei Streckenmessungen z.B. sollte man einen Wert wählen, der als theoretische Standardabweichung σ_s vom Gerätehersteller angegeben wird. Denkbar ist auch, die empirische Standardabweichung s_s , die aus der Erfahrung mit dem verwendeten Gerät über einen längeren Zeitraum stammt, als Grundlage zu nehmen. Entnimmt man die Fehlerschätzung einer Ausgleichung, so sollte diese einen möglichst großen Freiheitsgrad aufweisen. Zudem ist zu beachten, daß eine derartige Fehlerschätzung aufgrund unrichtiger Annahmen über die Verteilung der Meßfehler (siehe Abschnitt 3.1) verfälscht sein kann. Auch für den Wert T besteht die Möglichkeit, diesen anhand von Erfahrungswerten abzuschätzen und das Produkt $T \cdot \sigma$ als eine Grenze für die Beurteilung der Abweichung $|\Delta x|$ aufzufassen. Ein Beispiel dafür ist die Anwendung der bekannten „ 3σ -Regel“, bei der $T = 3$ gewählt wird.

Heutzutage wird die Beurteilung von Meßergebnissen i.d.R. unter Anwendung statistischer Testverfahren durchgeführt. Voraussetzung für deren Anwendung sind immer gewisse Annahmen über die Verteilung der zu testenden Größen. Derartige Tests können also nur insoweit sinnvolle Ergebnisse liefern, wie diese Annahmen auch tatsächlich gelten (siehe hierzu die Anmerkungen zur Verteilung von Meßfehlern in Abschnitt 3.1). Die Auswahl eines Schrankenwertes T , unterhalb dessen eine Hypothese angenommen werden kann, erfolgt durch die Festlegung einer Irrtumswahrscheinlichkeit α . Für die Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze wird i.d.R. der Wert $\alpha = 5\%$ verwendet. Ob dieser Wert immer allen Situationen gerecht werden kann (siehe Abschnitt 4.1.2 und 4.1.3), sollte man zumindest als Frage im Hinterkopf behalten.

Die Grundlagen der statistischen Testverfahren sind z.B. in (WELSCH et al. 2000) und (NIEMEIER 2002) zu finden, so daß auf eine ausführliche Darstellung an dieser Stelle verzichtet werden kann. Der grundsätzliche Ablauf eines statistischen Tests gestaltet sich wie folgt:

1. Aufstellen der Nullhypothese H_0 , Formulierung der Alternativhypothese H_A als zweiseitige oder einseitige Fragestellung.
2. Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau) α , bzw. der Sicherheitswahrscheinlichkeit $P = 1 - \alpha$.

3. Berechnung einer Prüfgröße.
4. Testentscheidung aufgrund des Vergleichs der Prüfgröße mit einem Schrankenwert.

Die statistischen Tests für die Anwendungsbeispiele

- a) Vergleich einer normalverteilten Größe mit ihrem gegebenen Erwartungswert,
- b) Vergleich des Erwartungswertes zweier normalverteilter Meßgrößen, die das gleiche Phänomen beschreiben,
- c) Vergleich einer empirischen Standardabweichung s_0 mit der theoretischen Standardabweichung σ_0 ,
- d) Vergleich von zwei empirisch ermittelten Standardabweichungen s_{01} und s_{02}

sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt. Die Alternativhypothese ist hierbei zunächst als zweiseitige Fragestellung, danach jeweils als einseitige Fragestellung formuliert.

Tabelle 4.1: Zusammenstellung statistischer Testverfahren

	Test	Nullhypothese H_0	Alternativhypothese H_A	Prüfgröße	Schrankenwert	Annahme von H_0 , wenn
a)	t -Test	$E\{x\} = \mu$	$E\{x\} \neq \mu$; $E\{x\} < \mu$, $E\{x\} > \mu$	$T_t = \frac{ x - \mu }{s_x}$	$t_{f, 1-\alpha}$	$T_t \leq t_{f, 1-\alpha}$
b)	t -Test	$E\{\Delta x\} = E\{x_j\} - E\{x_i\} = 0$	$E\{\Delta x\} \neq 0$; $E\{\Delta x\} < 0$, $E\{\Delta x\} > 0$	$T_t = \frac{ \Delta x }{s_{\Delta x}}$	$t_{f_{ges}, 1-\alpha}$	$T_t \leq t_{f_{ges}, 1-\alpha}$
c)	χ^2 -Test	$E\{s_0^2\} = \sigma_0^2$	$E\{s_0^2\} \neq \sigma_0^2$; $E\{s_0^2\} < \sigma_0^2$, $E\{s_0^2\} > \sigma_0^2$	$T_{\chi^2} = \frac{f \cdot s_0^2}{\sigma_0^2}$	$\chi_{f, 1-\alpha}^2$	$T_{\chi^2} \leq \chi_{f, 1-\alpha}^2$
d)	F -Test	$E\{s_{01}^2\} = E\{s_{02}^2\} = \sigma_0^2$	$E\{s_{01}^2\} \neq E\{s_{02}^2\}$; $E\{s_{01}^2\} < E\{s_{02}^2\}$, $E\{s_{01}^2\} > E\{s_{02}^2\}$	$T_F = \frac{s_{01}^2}{s_{02}^2}$ mit $s_{01} > s_{02}$	$F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$	$T_F \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$

Hat man sich für die Anwendung eines statistischen Tests entschieden, so stellt sich als nächstes die wichtige Frage nach der Testgüte.

4.1.2 Testgüte

Statistische Tests sind nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α möglich. Mit diesem Wert ist die Wahrscheinlichkeit festgelegt, mit der die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig ist (Fehler erster Art). Bezogen auf die Deformationsanalyse bedeutet dies, daß Deformationen angezeigt werden, obwohl sie nicht vorhanden sind. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Nullhypothese angenommen wird obwohl sie falsch ist (Fehler zweiter Art), wird mit β bezeichnet. Es ist sofort einzusehen, daß das Begehen eines Fehlers zweiter Art in der Deformationsanalyse schwerwiegende Folgen haben kann, denn in diesem Fall werden Deformationen nicht angezeigt, obwohl sie vorhanden sind. Die Wahrscheinlichkeit $\gamma = 1 - \beta$, mit der die Alternativhypothese angenommen werden kann, wird als Testgüte (Trennschärfe, Macht des Tests) bezeichnet. Die Testgüte nimmt also um so mehr zu, je kleiner der Wert β wird. Eine Verkleinerung von β entspricht andererseits einer Vergrößerung von α (vgl. WELSCH 1975). Zudem hängt die Wahrscheinlichkeit β von dem Nichtzentralitätsparameter λ ab. Je größer dieser Wert ist, um so weiter liegen Null- und Alternativhypothese auseinander, d.h. die Trennschärfe des Tests wird größer. Für die Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze wird die Berechnung der Nichtzentralität λ in (PELZER 1971) mit

$$\lambda = \frac{\tilde{\mathbf{d}}^T \mathbf{Q}_d^{-1} \tilde{\mathbf{d}}}{\sigma_0^2} \quad (4.2)$$

angegeben. Um diesen Wert zu berechnen ist es allerdings nicht ausreichend, eine rein qualitative Alternativhypothese („es liegen Deformationen vor“) zu treffen, sondern man muß dafür den wahren Vektor der Deformationen $\tilde{\mathbf{d}}$ mit der dazugehörigen Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_d bereits kennen. Dies ist jedoch a priori nicht (bestenfalls näherungsweise) möglich, so daß eine Aussage über die Nichtzentralität zwischen Null- und Alternativhypothese nicht möglich ist. Wählt man jedoch bei gleichbleibender Nichtzentralität λ einen größeren Wert für die Irrtumswahrscheinlichkeit α , so nimmt die Testgüte γ zu (siehe Abbildung 4.1). Dieser Vorteil bedingt aber wiederum, daß die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler erster Art zu begehen, ansteigt. Somit ist leicht einzusehen, daß die Wahl von α einen sehr sorgfältig auszuwählenden Kompromiß zwischen Irrtumswahrscheinlichkeit und Testgüte darstellt.

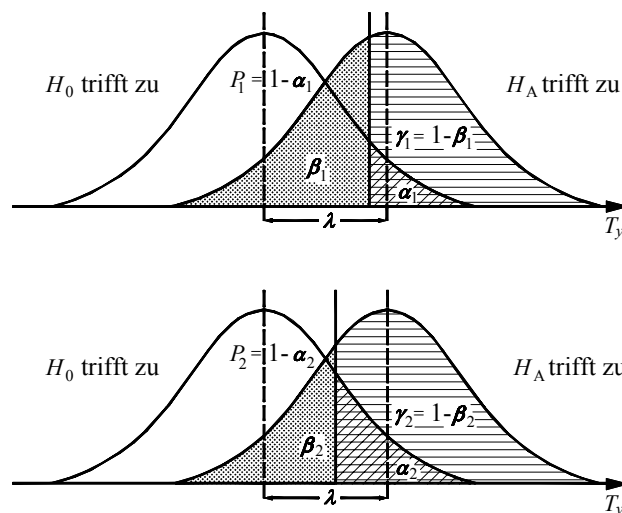


Abbildung 4.1: Zunahme der Testgüte $\gamma_2 > \gamma_1$ wenn bei gleichbleibender Nichtzentralität λ mit $\alpha_2 > \alpha_1$ die Irrtumswahrscheinlichkeit erhöht wird

Wie die Festlegung der statistischen Sicherheit (Sicherheitwahrscheinlichkeit) $P = 1 - \alpha$ jedoch in der Regel erfolgt, beschreibt (MORGENSTERN 1964, S. 196) wie folgt: „Durch Gewohnheit, Gesetz und Aberglauben üblich gewordene Werte sind 0.95, 0.99, 0.995.“ Dieses Zitat ist bereits in (PELZER 1971) zu finden und auch NIEMEIER (2002) benutzt in diesem Zusammenhang die Begriffe „Gesetz, Überlieferung und Aberglauben“. Dennoch wird in der Regel in der Deformationsanalyse der feste Wert $\alpha = 5\%$ verwendet. Das dies nicht immer sinnvoll ist, beschreibt (DETREKÖI 1975) anhand von Deformationsuntersuchungen an den Kaimauern der Donau bei Budapest. Man sollte also bei Wahl von α stets bemüht sein, die individuellen Eigenschaften des zu untersuchenden Netzes möglichst gut zu berücksichtigen, oder wie (WELSCH 1982) in einem anderen Zusammenhang schreibt: „Denn jedes Netz ist ein Individuum, dessen ‚persönliche‘ Behandlung je nach Ausdehnung, Genauigkeit, Zuverlässigkeit und Zweckbestimmung wünschenswert ist“. Wie man einen tieferen Einblick in das zu untersuchende Netz bekommen kann, soll Gegenstand des folgenden Abschnittes sein.

4.1.3 Der umgekehrte statistische Test

Die Frage, die sich bei der Anwendung statistischer Tests grundsätzlich stellt, ist die nach der Sicherheitwahrscheinlichkeit. Wie zuvor beschrieben, wird diese zumeist aus dem Bereich von 0.90 bis 0.995 gewählt, wobei die Auswahl von Erfahrungswerten oder anderen Vorgaben abhängt. Bei Deformationsanalysen wird zumeist eine Sicherheitwahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ angesetzt. Ein statistischer Test in dieser Form führt aber zu einer reinen ja/nein-Entscheidung bezüglich der aufgestellten Nullhypothese. Um einen tieferen Einblick in das zu untersuchende Problem zu bekommen, ist es daher wesentlich sinnvoller, sich zunächst anzuschauen bei welcher Sicherheitwahrscheinlichkeit die Nullhypothese angenommen werden kann. Dies hat auch bereits (DETREKÖI 1975) erkannt und bezeichnet diese Strategie als „umgekehrten Test“.

Diese Strategie kann sowohl für einen Globaltest (Abschnitt 4.3.4), als auch für den multiplen Einzeltest (Abschnitt 5.2.1.3) angewendet werden. Zur Veranschaulichung soll nun der Globaltest für die Kongruenzuntersuchung eines Lagenetzes mit den Freiheitsgraden $h = 6$ und $f = 12$ betrachtet werden. Die nach (4.13) berechnete Testgröße beträgt $T_F = 1.72$. Setzt man nun eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ an, so erhält man das Quantil der FISHER-Verteilung zu $F_{h,f,1-\alpha} = 3.00$ und mit $T_F < F_{h,f,1-\alpha}$ kann die Nullhypothese („es liegen keine Deformationen vor“) nicht verworfen werden.

Für den umgekehrten Test wird mit den Werten $h = 6$, $f = 12$ und $T_F = 1.72$ die Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet, mit der die Nullhypothese gerade noch angenommen werden kann. In diesem Fall ergibt sich $\alpha_{\max} = 0.20$, was bedeutet, daß die Nullhypothese bereits bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $P_{\min} = 80\%$ angenommen werden kann. Dieser Wert ermöglicht einen wesentlich tieferen Einblick in die tatsächlichen Verhältnisse eines geodätischen Netzes als der Test mit einer festen Grenze für die Sicherheitswahrscheinlichkeit. Wenn in einer weiteren Folgepoche der Wert P_{\min} sprunghaft ansteigt (z.B. in diesem Fall auf 90%), so kann das bereits ein Hinweis für das Vorhandensein von Deformationen sein, obwohl diese bei einer festen Grenze von $P = 95\%$ noch nicht angezeigt würden (vgl. auch DETREKÖI 1975). Ein weiterer Vorteil dieser Auswahl der Irrtumswahrscheinlichkeit liegt darin, daß sich auch eine Festlegung von $\alpha > 5\%$ für die Überwachung eines Objektes begründen läßt, womit sich die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler zweiter Art zu begehen, reduziert.

4.2 Generelle Methodik der Kongruenzuntersuchung

4.2.1 Allgemeines Prinzip

Die grundlegende Aufgabe bei der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze besteht darin, gesicherte Aussagen über die Verformung des zu untersuchenden Objektes zu erhalten. Dieses wird dazu durch eine endliche Anzahl von Punkten diskretisiert, die durch Beobachtung eines Überwachungsnetzes bestimmt werden. Beim Netzaufbau sind zwei Fälle zu unterscheiden. Besteht das Netz nur aus Punkten, die mit dem zu untersuchenden Objekt verbunden sind, so können nur relative Aussagen über die Verformungen getroffen werden. Ein derartiges Netz wird als *Relativmodell* bezeichnet. Besteht das Netz zusätzlich aus Punkten, die außerhalb des Deformationsbereiches liegen, so können die Deformationen in Bezug auf einen festen Bezugsrahmen, der durch die Stützpunkte definiert wird, bezogen werden. Ein derartiger Netzaufbau wird als *Absolutmodell* bezeichnet. In Abbildung 4.2 sind die grundsätzlichen Verhältnisse dargestellt.

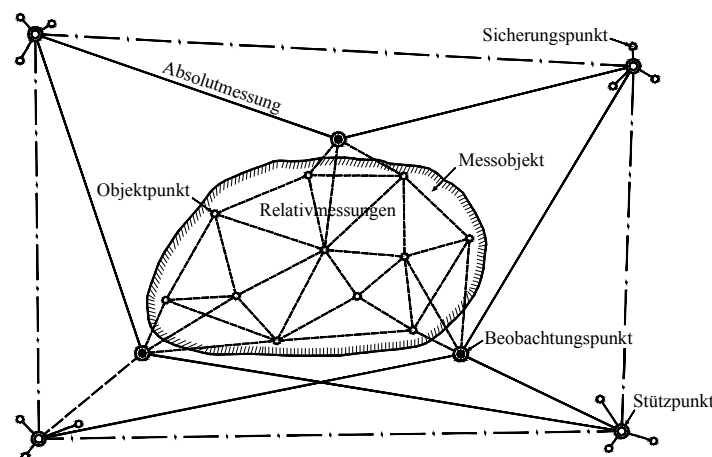


Abbildung 4.2: Netzaufbau für die Kongruenzuntersuchung (nach: WELSCH et al. 2000)

Da für die Beschreibung des Überwachungsnetzes und der aufgetretenen Objektdeformationen Koordinaten bzw. Koordinatendifferenzen verwendet werden, ist die wichtige Frage nach der Datumsfestlegung zu klären. Im Absolutmodell erfolgt diese Festlegung über die Stützpunkte. Durch einen Kongruenztest ist zuvor zu überprüfen, ob die Stützpunkte tatsächlich stabil geblieben sind. Die Beschreibung der aufgetretenen Deformationen erfolgt dann bezüglich dieser Datumsfestlegung. Im Relativmodell ist im voraus kein Teilnetz bekannt, das Träger des geodätischen Datums sein soll. Hier besteht die Aufgabe, zunächst alle kongruenten Punktgruppen zu lokalisieren und danach zu entscheiden, durch welches Teilnetz das Datum definiert werden soll. Die aufgedeckten Deformationen sind dann relative Bewegungen bezüglich des datumsdefinierenden Teilnetzes.

Die heutzutage gebräuchliche Auswertestrategie zur Kongruenzuntersuchung ist ausführlich in (WELSCH et al. 2000) und (NIEMEIER 2002) dargestellt. Grundsätzlich gliedert sich diese Untersuchung in zwei Teilschritte (vgl. NIEMEIER 2002):

1. Globaler Kongruenztest: Gibt es zwischen den Messungen überhaupt signifikante Punktverschiebungen?
2. Lokalisierung: Welche Punkte haben sich signifikant verschoben?

Diese Teilschritte basieren auf der Analyse metrischer Kriterien. Dabei werden Klaffungen von Koordinaten oder datumsinvarianten Elementen unter Berücksichtigung ihrer stochastischen Eigenschaften mit Hilfe statistischer Testverfahren untersucht.

4.2.2 Der Globaltest

Die Durchführung des Globaltests erfolgt unter Berücksichtigung des Netzaufbaus. Beim zweistufigen Netzaufbau des Absolutmodells wird die Hypothese der Kongruenz zunächst nur für die Gruppe der Stützpunkte aufgestellt, beim einstufigen Netzaufbau des Relativmodells, bei dem a priori keine Stützpunkte bekannt sind, umfaßt diese Untersuchung alle Punkte des Netzes.

4.2.3 Lokalisierung von Deformationen durch Einzelpunktanalyse

Kann nach einem geeigneten Globaltest davon ausgegangen werden, daß sich signifikante Punktverschiebungen zwischen den zu untersuchenden Epochen ergeben haben, ist die Suche nach möglichst kongruenten Punktgruppen erforderlich. Im einfachsten Fall ist lediglich eine Unterteilung in stabile und instabile Punkte vorzunehmen, wobei die Lageänderung der instabilen Punkte zu den „inhomogenen“ Deformationen zu zählen ist, die keiner Gesetzmäßigkeit folgt. Die Untersuchung gewinnt an Komplexität, wenn zudem von Punktgruppen mit „homogenen“ Deformationserscheinungen ausgegangen werden muß. Grundsätzlich ist das Punktfeld auf folgende Punktgruppen zu untersuchen:

- Stabile Punkte,
- Punkte mit inhomogenem Deformationsverhalten,
- eine oder mehrere Punktgruppen mit homogenem Deformationsverhalten.

Bei dieser Untersuchung ist wieder zwischen zweistufigem (Absolutmodell) und einstufigem (Relativmodell) Netzaufbau zu unterscheiden. Hat ein Globaltest das Vorliegen signifikanter Deformationen ergeben, wird ausgehend von der gesamten, in den Globaltest einbezogenen, Punktgruppe mit p Punkten jeweils sukzessive ein Punkt P_i ($i = 1, \dots, p$) untersucht. Der Punkt, der dabei den größten Beitrag zu den Deformationen geliefert hat, wird der Gruppe der instabilen Punkte zugeordnet. Danach wird der Globaltest mit den verbleibenden $p - 1$ Punkten wiederholt. Zeigen sich dann immer noch signifikante Deformationen, wird das Eliminationsverfahren mit den verbliebenen $p - 1$ Punkten fortgesetzt. Die Suche nach instabilen Punkten wird dann abgebrochen, wenn der Globaltest keine signifikanten Deformationen mehr nachweisen kann. Im Relativmodell werden anfangs alle Punkte in die Untersuchung einbezogen, im Absolutmodell nur die Stützpunkte. Als Ergebnis erhält man die als unverändert eingestufteten Referenzpunkte, die dann als datumstragende Bezugsbasis für die weitere Analyse der Objektpunkte dienen. Diese Vorgehensweise wird auch als „Rückwärtsstrategie“ bezeichnet.

Nach der Lokalisierung einer stabilen Punktgruppe als Bezugsbasis kann nun sukzessive jeder Objektpunkt dahingehend überprüft werden, ob er der Gruppe der stabilen Punkte hinzugefügt werden kann. Dazu wird jeder Objektpunkt zunächst einzeln in die Gruppe der stabilen Punkte aufgenommen und ein Globaltest durchgeführt. Der Punkt, der nach Bestehen des Globaltests den kleinsten Zuschlag zu den Deformationen liefert, wird dann endgültig in die Gruppe der stabilen Punkte aufgenommen, ohne aber an der Datumsdefinition teilzunehmen. Dieses sukzessive Verfahren ist abgeschlossen, wenn kein Punkt mehr gefunden werden kann, der dieser Gruppe zugeordnet werden kann. Diese Vorgehensweise wird als „Vorwärtsstrategie“ bezeichnet.

4.3 Das Verfahren der Kongruenzuntersuchung in der aktuellen Literatur

Seit ca. 1970 wurden intensive Forschungen zum Thema Kongruenzuntersuchung und Deformationsanalyse geodätischer Netze durchgeführt. Stellvertretend für die Vielzahl von Publikationen seien die Arbeiten von (PELZER 1971) und (NIEMEIER 1979) genannt. Schließlich hat sich ein Verfahren herauskristallisiert, daß in der aktuellen Literatur (WELSCH et al. 2000, NIEMEIER 2002) dargestellt ist. Dieses Verfahren wird im folgenden kurz dargestellt, im Anschluß daran folgt ein numerisches Beispiel.

4.3.1 Das Basismodell

Das Basismodell für die Überprüfung der Kongruenz eines in mehreren Epochen gemessenen Netzes besteht aus dem mathematischen Modell und einer Nullhypothese

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{1}\} &= \mathbf{Ax} \\ H_0: \mathbf{Hx} &= \mathbf{w} = \mathbf{0} \\ \text{Cov}\{\mathbf{1}\} &= \sigma_0^2 \mathbf{Q} \quad , \end{aligned} \quad (4.3)$$

wobei die Nullhypothese der Kongruenz H_0 als lineare Hypothese in Form von Bedingungsgleichungen mit der Koeffizientenmatrix \mathbf{H} formuliert ist. Die Funktionalmatrix \mathbf{A} enthält die Submatrizen \mathbf{A}_{ii} ($i = 1, \dots, k$, mit $k =$ Anzahl der Epochen) der Einzelepochen, die Kofaktorenmatrix \mathbf{Q} besteht aus den Kofaktorenmatrizen der Beobachtungen \mathbf{Q}_{ii} in den einzelnen Epochen. Geht man davon aus, daß mit $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{0}$ keine interepochalen Korrelationen, sowohl für die Parameter als auch für die Beobachtungen vorhanden sind, können die einzelnen Epochen zunächst einer getrennten Ausgleichung unterzogen werden.

4.3.2 Getrennte Ausgleichung der Einzelepochen

Durch eine getrennte Ausgleichung kann das Netz jeder Epoche auf Zuverlässigkeit untersucht werden (Beurteilung der Redundanzanteile der Beobachtungen, Suche nach Ausreißern). Zudem kann für jede Epoche die empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit s_{0_i} bestimmt werden. Werden die Kongruenzuntersuchungen, wie bei den gebräuchlichen Verfahren üblich, mit Hilfe von Koordinatendifferenzen durchgeführt, so sind bei der Ausgleichung der Einzelepochen bereits Verfügungen über das Datum zu treffen:

- Für die Ausgleichung der Einzelepochen sind jeweils die gleichen Näherungskordinaten zu verwenden.
- Bei nicht identischen Netzkonfigurationen ist das Datum so festzulegen, daß dieses nur durch die homologen Punkte aller Vergleichsepochen definiert wird. Dies kann z.B. durch eine Netzausgleichung mit Teilspurminimierung erreicht werden.

Für eine Kongruenzuntersuchung mit datumsinvarianten Elementen sind diese Forderungen nicht notwendig. Die Einzelausgleichungen können jeweils mit beliebigen Näherungskordinaten durchgeführt werden und auch die Bedingungsgleichungen für die freie Netzausgleichung können beliebig gewählt werden.

4.3.3 Gemeinsamer Varianzfaktor der Vergleichsepochen

Um die Anwendung statistischer Testverfahren für den Vergleich von zwei (oder mehr) Epochen zu ermöglichen, müssen sich die Gewichtsmatrizen \mathbf{P}_i auf den gleichen Wert σ_0^2 beziehen. Für den Vergleich von zwei Epochen ist somit sicherzustellen, daß die empirischen Varianzen $s_{0_1}^2$ und $s_{0_2}^2$, mit

$$s_{0_i}^2 = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i}{n_i - (u_i - d_i)} = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i}{n_i - r_i} = \frac{\Omega_i}{f_i} \quad , \quad (4.4)$$

übereinstimmen. Anzumerken ist, daß sich diese empirischen Varianzen aus den Verbesserungen der Meßwerte ergeben und somit unabhängig von der Wahl der Bedingungen für die Datumsfestlegung in einer freien Netzausgleichung und unabhängig von einer willkürlichen Auswahl der Näherungskordinaten sind. Die Nullhypothese für den statistischen Test lautet (vgl. Tabelle 4.1)

$$H_0: E\{s_{0_1}^2\} = E\{s_{0_2}^2\} = \sigma_0^2 \quad (4.5)$$

mit der F -verteilten Testgröße

$$T_F = \frac{s_{0_1}^2}{s_{0_2}^2} \quad . \quad (4.6)$$

Um einen statistischen Test durchführen zu können ist es unerlässlich, zur Nullhypothese die zugehörige Alternativhypothese aufzustellen, denn davon hängt ab, ob es sich um eine einseitige oder um eine zweiseitige Fragestellung handelt. In diesem Fall lautet die Alternativhypothese

$$H_A: E\{s_{0_1}^2\} \neq E\{s_{0_2}^2\} \quad , \quad (4.7)$$

d.h. es handelt sich um eine zweiseitige Fragestellung. Nach Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau) α ist somit der Quantil-Wert der FISHER-Verteilung $F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}$ zu verwenden. Ergibt der Test, daß mit

$$T_F \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2} \quad (4.8)$$

der Quantil-Wert nicht überschritten wird, so ist gegen die Nullhypothese nichts einzuwenden. Für weitere statistische Tests wird dann der Gesamtwert der empirischen Einheitsvarianz

$$s_0^2 = \sum_{i=1}^k \Omega_i / \sum_{i=1}^k f_i = \Omega / f \quad , \quad (4.9)$$

mit k = Anzahl der Epochen, anstelle der Einzelvarianzen verwendet. Führt der Test zur Ablehnung der Hypothese, so sind die Kovarianzmatrizen der Beobachtungen der einzelnen Epochen durch Methoden der Varianzkomponentenschätzung zu modifizieren. Dieser Vorgang wird auch als „homogenisieren“ (NIEMEIER 1985, WELSCH et al. 2000) bezeichnet.

4.3.4 Der Globaltest

In (4.3) ist die Nullhypothese der Kongruenz H_0 der Netze in den Vergleichsepochen als lineare Hypothese formuliert. Für den Fall, daß H_0 tatsächlich gilt, hat diese Bedingung keinen Einfluß auf das Ausgleichsergebnis, andernfalls erhält man die Quadratsumme der Verbesserungen zu

$$\Omega_H = \Omega + R \quad (4.10)$$

mit

Ω ... Quadratsumme der Verbesserungen ohne Einbeziehung der Hypothese,
 R ... Zuschlag zur Verbesserungsquadratsumme aufgrund der Hypothese.

In (4.3) ist die Nullhypothese als Bedingung zwischen Vektoren formuliert. Im Falle der Gültigkeit der Nullhypothese, können die skalaren Werte R/h und Ω/f als äquivalente Vergleichsgrößen eingeführt werden (siehe z.B. WELSCH et al. 2000). Damit geht die Nullhypothese über in

$$H_0: R / h = \Omega / f \quad . \quad (4.11)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Datumsfestlegung für die Ausgleichung der Einzelepochen identisch ist, ergibt sich h zu

$$h = \text{Rang}\{\mathbf{Q}_{x_1, x_1}\} = \text{Rang}\{\mathbf{Q}_{x_2, x_2}\} \quad . \quad (4.12)$$

Die F -verteilte Testgröße zur Überprüfung der Nullhypothese ergibt sich somit zu

$$T_F = \frac{R / h}{\Omega / f} = \frac{\theta^2}{\Omega / f} \quad . \quad (4.13)$$

Der Ausdruck

$$\theta = \sqrt{R / h} \quad (4.14)$$

wird nach (PELZER 1971) als „mittlere Klaffung“ bezeichnet. Um den Test durchführen zu können, ist auch an dieser Stelle zunächst die Frage nach der Alternativhypothese zu stellen. Liegen Deformationen vor, so übersteigt die mittlere Klaffung die Meßgenauigkeit und somit handelt es sich mit der Alternativhypothese

$$H_A: R / h \geq \Omega / f \quad (4.15)$$

um eine einseitige Fragestellung und das Quantil der FISHER-Verteilung ist mit $F_{h, f, 1-\alpha}$ zu verwenden. Wird der Grenzwert der FISHER-Verteilung mit

$$T_F \leq F_{h, f, 1-\alpha} \quad (4.16)$$

nicht überschritten, so kann die Hypothese der Kongruenz mit der gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit α angenommen werden.

Für die Berechnung des Zuschlags R in (4.10) bestehen mehrere Möglichkeiten, z.B.

- Explizite Hypothesenformulierung (HECK et al. 1977),
- Implizite Hypothesenformulierung (ANTONOPOULOS und NIEMEIER 1983),
- Hypothesenformulierung mit datumsinvarianten Funktionen (WELSCH 1983b),

wobei letztere den großen Vorteil bietet, daß diese von allen Problemen, die mit dem geodätischen Datum zusammenhängen, befreit ist. Es werden nur Elemente verwendet, die sich aus jeder zwangsfreien Ausgleichung gleich ergeben (z.B. Höhenunterschiede in einem Nivellementnetz oder Strecken und Winkel in einem Lagenetz). Dabei ist unerheblich, ob diese Elemente tatsächlich beobachtet wurden, da sie sich aus den ausgeglichenen Koordinaten berechnen lassen. Die Auswahl der Elemente kann beliebig erfolgen, es muß lediglich gewährleistet sein, daß die Netzgeometrie durch eine Minimalkonfiguration vollständig beschrieben wird. Werden mehr Elemente verwendet, so hat dies aufgrund der linearen Abhängigkeit der überschüssigen Elemente von denen der Minimalkonfiguration keinen Einfluß auf die Teststatistik. Die Nullhypothese für den Test mit datumsinvarianten Elementen lautet

$$H_0: E \{ \hat{\mathbf{I}}_1 \} = E \{ \hat{\mathbf{I}}_2 \} . \quad (4.17)$$

Daraus wird die lineare Hypothese

$$H_0: \begin{bmatrix} -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}_1 \\ \hat{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{d}\mathbf{l} = 0 . \quad (4.18)$$

Stellt man die datumsinvarianten Elemente als Funktionen der ausgeglichenen Koordinaten dar, so erhält man

$$H_0: \begin{bmatrix} -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{d}\mathbf{l} = 0 . \quad (4.19)$$

Im Falle, daß ein lineares Ausgleichungsproblem vorliegt (z.B. Nivellementnetz), sind die Funktionalmatrizen in Epoche eins und zwei identisch, so daß gilt

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{L} . \quad (4.20)$$

Damit erhält man aus (4.19)

$$\mathbf{d}\mathbf{l} = \hat{\mathbf{I}}_2 - \hat{\mathbf{I}}_1 = \mathbf{L}(\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1) = \mathbf{L}\mathbf{d} . \quad (4.21)$$

Der Zuschlag zur Verbesserungsquadratsumme R ergibt sich damit zu

$$R = \mathbf{d}\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{l}}^{-1} \mathbf{d}\mathbf{l} = \mathbf{d}^T \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}} \mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L} \mathbf{d} , \quad \text{mit } \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}} = \mathbf{Q}_{x_1 x_1} + \mathbf{Q}_{x_2 x_2} . \quad (4.22)$$

Dieser Weg zur Berechnung der Größe R wird in (WELSCH 1983b) angegeben und ist in gleicher Form auch in der aktuellen Literatur (WELSCH et al. 2000) zu finden, wobei jedoch der Hinweis fehlt, daß dieser Rechengang nur für lineare Probleme gelten kann, für die (4.20) erfüllt ist. Liegt dagegen ein nichtlineares Ausgleichungsproblem vor (z.B. Strecken- und Richtungsnetz), zu dessen Lösung eine Linearisierung durchgeführt wird, kann aufgrund der aufgetretenen Deformationen nicht mehr davon ausgegangen werden, daß die Funktionalmatrizen \mathbf{L}_1 und \mathbf{L}_2 gleich sind. Daher erscheint es sinnvoller, den Differenzenvektor in der Form

$$\mathbf{d}\mathbf{l} = \hat{\mathbf{I}}_2 - \hat{\mathbf{I}}_1 = \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{L}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (4.23)$$

aufzustellen. Mit

$$R = \mathbf{d}\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{l}}^{-1} \mathbf{d}\mathbf{l} = [\mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{L}_1 \hat{\mathbf{x}}_1]^T (\mathbf{L}_1 \mathbf{Q}_{x_1 x_1} \mathbf{L}_1^T + \mathbf{L}_2 \mathbf{Q}_{x_2 x_2} \mathbf{L}_2^T)^{-1} [\mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{L}_1 \hat{\mathbf{x}}_1] \quad (4.24)$$

erhält man dann einen verallgemeinerten Ausdruck für die Berechnung des Wertes R . Wählt man für die Beschreibung des Netzes eine Minimalkonfiguration (siehe Abbildung 4.3), so kann anstelle einer generalisierten Inverse $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{l}}^{-1}$ die reguläre Inverse $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{l}}^{-1}$ verwendet werden.

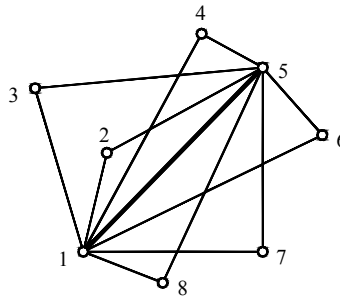


Abbildung 4.3: Minimalkonfiguration aus dreizehn Strecken für ein Lagenetz mit acht Punkten

4.3.5 Lokalisierung der Deformationen durch Einzelpunktanalyse

Hat der Globaltest ergeben, daß signifikante Deformationen vorliegen, so besteht nun die Aufgabe aus dem Gesamtnetz die kongruenten Teilnetze zu lokalisieren. Dazu wird sukzessive untersucht, welche Auswirkung die Eliminierung jedes einzelnen Punktes auf die Verbesserungsquadratsumme R hat. Für die Durchführung statistischer Tests ist die quadratische Form R in stochastisch unabhängige Klaffungsanteile $R = R_f + R_b$ zu zerlegen. Der Summand R_f repräsentiert den Anteil der als fest angenommen Punkte, R_b steht für den Anteil des Punktes, für den eine Bewegung vermutet wird. Für die Berechnung der Werte R_b bzw. R_f stehen mehrere Verfahren zur Verfügung:

- Lokalisierung durch Klaffungszerlegung (NIEMEIER 1976, 1985),
- Lokalisierung mit impliziter Hypothesenformulierung (ANTONOPOULOS und NIEMEIER 1983),
- Lokalisierung mit S-Transformation (NIEMEIER 1985),
- Klaffungszerlegung nach Cholesky (CASPARY und SCHWINTZER 1980),
- Klaffungszerlegung durch Spektralanalyse (PELZER 1976),
- Lokalisierung mit datumsinvarianten Größen (WELSCH 1983b).

Aus der Gesamtheit aller Punkte wird dann der als verschoben angenommen, der in einem Lokalisierungsschritt den größten Wert R_b (bzw. den kleinsten Wert R_f) liefert. Dieser wird dann aus der Liste der homologen Punkte gestrichen. Zudem ist bei allen Verfahren, außer der datumsinvarianten Lokalisierung, eine Datumstransformation durchzuführen, wenn dieser Punkt an der Datumsdefinition beteiligt war. Bei der Lokalisierung mit datumsinvarianten Elementen erübrigen sich die Überlegungen zur Problematik des geodätischen Datums. Die Lokalisierung verschobener Punkte erfolgt, indem die quadratische Form (4.24) jeweils neu berechnet wird, wobei sukzessive die Elemente unberücksichtigt bleiben, die den zu untersuchenden Punkt bestimmen (WELSCH 1983b). In Abbildung 4.4 ist diese Vorgehensweise für den Punkt 4 dargestellt. Auf diese Weise erhält man aus (4.24) direkt den Wert R_f , von denen der kleinste auf den auszuscheidenden Punkt hinweist.

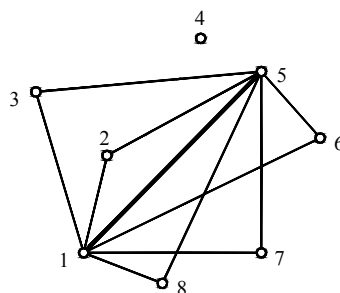


Abbildung 4.4: Auswahl datumsinvarianter Größen (Strecken) in einem Lagenetz für einen Globaltest ohne Punkt 4

Wurde ein Punkt eliminiert, entscheidet ein erneuter Globaltest, ob die Nullhypothese der Kongruenz angenommen werden kann. Dafür wird in die Testgröße (4.13) die mittlere Klaffung

$$\theta_F^2 = R_F / h_F \quad (4.25)$$

mit $h_F = h - h_b$ (für einen Nivellementpunkt ist $h_b = 1$, für einen Lagepunkt ist $h_b = 2$) eingesetzt.

4.3.6 Numerisches Beispiel

In (REINKING 1994) wird ein numerisches Beispiel angeführt, bei dem eine im voraus bekannte kongruente Punktgruppe unter Anwendung einer „Lokalisierung mit S-Transformation“ (NIEMEIER 1985) nicht gefunden werden kann. Als Ursache dafür gibt (REINKING 1994) an, daß beim „Zusammentreffen von ungünstiger Geometrie“ (die kongruente Punktgruppe liegt am Rande des Netzes) und „großen Deformationen“ den Punkten am Rande des Netzes bei der Datumstransformation große Restklaffungen zugewiesen werden. Dieser Argumentation ist jedoch nicht zu folgen, da es sich bei dem Wert R_f um eine Größe handelt, die sich bei den datumsabhängigen Verfahren (bei korrekter Berücksichtigung der Datumsproblematik) gleich ergibt zu dem Wert R_f , der sich aus der zuvor beschriebenen datumsinvarianten Vorgehensweise ergibt.

Zur Veranschaulichung soll nun ein Netz, das in Anlehnung an das Beispiel in (REINKING 1994) konzipiert wurde, mit Hilfe einer datumsinvarianten Lokalisierung untersucht werden. Das in Abbildung 4.5 dargestellte Netz besteht aus zehn Punkten, die Punkte 7, 8 und 9 bilden eine kongruente Punktgruppe, Maßstabsunterschiede zwischen den Epochen sind nicht vorhanden. Eine Unterteilung in Stütz- und Objektpunkte ist nicht gegeben, so daß es sich um ein Relativmodell handelt. Die Näherungskoodinaten für die Netzausgleichung sind in Tabelle 4.2 aufgeführt.

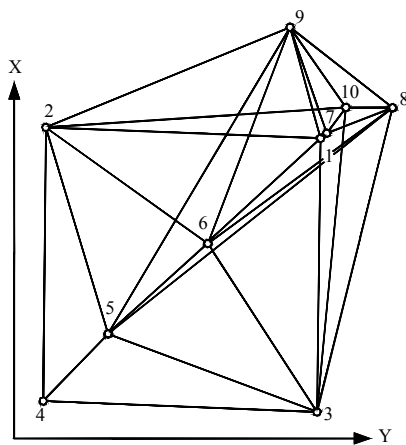


Abbildung 4.5: Streckennetz, nicht alle Strecken dargestellt (nach: REINKING 1994)

Tabelle 4.2: Näherungskoodinaten für die Kongruenzuntersuchung (aus: REINKING 1994)

Pkt. Nr.	Epoche I		Epoche II	
	Y^0 [m]	X^0 [m]	y^0 [m]	x^0 [m]
1	220.00	220.00	222.00	217.50
2	20.00	220.00	22.50	222.50
3	220.00	20.00	217.50	17.50
4	20.00	20.00	16.00	25.50
5	70.00	70.00	68.00	73.00
6	140.00	140.00	140.00	140.50
7	225.00	220.00	225.00	220.00
8	275.00	240.00	275.00	240.00
9	200.00	300.00	200.00	300.00
10	240.00	240.00	242.00	237.50

In beiden Epochen wurden jeweils alle möglichen Strecken gemessen, die Beobachtungen in Epoche 1 sind in Tabelle 4.3 aufgeführt.

Tabelle 4.3: Streckenmessungen in Epoche 1

s_{ij}	$j = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
$i = 1$	199.991	199.990	282.834	212.143	113.141	4.994	58.520	82.470	28.313
2		282.844	199.998	158.120	144.241	204.996	255.783	196.959	220.897
3			199.988	158.105	144.244	200.072	226.779	280.730	220.910
4				70.718	169.721	286.394	336.812	332.864	311.121
5					98.985	215.712	266.317	264.172	240.415
6						116.728	167.987	170.895	141.427
7							53.864	83.811	24.994
8								96.051	35.010
9									72.124

Die Streckenmessungen in Epoche 2 sind in Tabelle 4.4 aufgeführt. Als empirische Standardabweichung wird für alle Strecken in beiden Epochen $s_s = 1$ cm angesetzt.

Tabelle 4.4: Streckenmessungen in Epoche 2

s_{ij}	$j = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
$i = 1$	199.560	200.056	281.615	211.174	112.489	3.887	57.575	85.391	28.266
2		282.929	197.113	156.287	143.294	202.528	253.115	193.668	219.997
3			201.665	159.480	145.381	202.632	229.808	283.033	221.370
4				70.422	169.125	285.504	336.282	330.465	309.860
5					98.669	215.059	265.975	262.581	239.442
6						116.395	167.705	170.408	140.766
7							53.854	83.811	24.386
8								96.057	33.102
9									75.302

Als erstes erfolgt die Ausgleichung der Einzelepochen jeweils als freies Netz mit Gesamtspurminimierung, wobei die theoretische Standardabweichung jeweils mit $\sigma_0 = 1$ cm angenommen wird. Da bei der Kongruenzuntersuchung mit datumsinvarianten Größen die Wahl der Näherungskordinaten für die Ausgleichung der Einzelepochen beliebig ist, werden die Koordinaten aus Tabelle 4.2 verwendet. Damit ergeben sich die ausgeglichenen Koordinaten in Tabelle 4.5.

Tabelle 4.5: Koordinaten aus der freien Netzausgleichung

Pkt. Nr.	Epoche I		Epoche II	
	\hat{Y} [m]	\hat{X} [m]	\hat{y} [m]	\hat{x} [m]
1	220.003	219.991	222.006	217.502
2	20.005	220.006	22.500	222.509
3	219.996	19.993	217.505	17.500
4	19.999	20.000	15.999	25.500
5	70.003	70.000	68.003	73.002
6	140.005	139.997	139.998	140.495
7	224.997	220.007	225.002	219.996
8	275.003	240.004	275.004	239.996
9	199.988	300.002	199.992	299.998
10	240.001	240.001	241.990	237.501

mit den Kofaktorenmatrizen $\mathbf{Q}_{x_1x_1}$ und $\mathbf{Q}_{x_2x_2}$. Die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen und die empirische Einheitsvarianz für Epoche 1 ergibt sich zu

$$\Omega_1 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 = 4.5460\text{E} - 03 \quad \text{und} \quad s_{0_1}^2 = \Omega_1 / f_1 = 4.5460\text{E} - 03 / 28 = 1.6236\text{E} - 04$$

und für Epoche 2 erhält man

$$\Omega_2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2 = 2.4644\text{E} - 03 \quad \text{und} \quad s_{0_2}^2 = \Omega_2 / f_2 = 2.4644\text{E} - 03 / 28 = 8.8015\text{E} - 05$$

Zur Überprüfung der Nullhypothese (4.5) wird nun gemäß (4.6) die Testgröße

$$T_F = \frac{s_{0_1}^2}{s_{0_2}^2} = \frac{1.6236\text{E} - 04}{8.8015\text{E} - 05} = 1.84$$

gebildet und mit dem Quantil der Fisher-Verteilung verglichen. Mit den Freiheitsgraden $f_1 = f_2 = 28$ und einer angenommenen Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% ergibt sich für $F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2} = 2.13$. Mit $1.84 < 2.13$ kann somit die Nullhypothese angenommen werden und mit

$$s_0^2 = \sum_{i=1}^2 \Omega_i / \sum_{i=1}^2 f_i = (4.5460\text{E} - 03 + 2.4644\text{E} - 03) / (28 + 28) = 1.2519\text{E} - 04$$

ein gemeinsamer Varianzfaktor für beide Epochen eingeführt werden. Der Globaltest kann mit einer Minimal-konfiguration aus h Elementen durchgeführt werden. In diesem Fall besteht eine Minimal-konfiguration aus $h = 17$ Strecken, die das Netz gerade eindeutig beschreiben. Aus (4.24) erhält man den Zuschlag zur Verbesserungsquadratsumme $R = 53.3$. Damit wird gemäß (4.13) die Testgröße

$$T_F = \frac{R/h}{\Omega/f} = \frac{53.3/17}{1.2519E-04} = 25043$$

gebildet und mit dem Quantil der Fisher-Verteilung verglichen. Mit den Freiheitsgraden $h = 17, f = 56$ und einer angenommenen Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% ergibt sich für $F_{h, f, 1-\alpha} = 1.81$, somit liegen signifikante Deformationen vor.

Zum Auffinden der kongruenten Punktgruppe wird nun die Strategie der Einzelpunktanalyse angewendet. Wie in Abschnitt 4.3.5 beschrieben, wird dazu jeweils ein Punkt aus dem Netz ausgeschlossen und ein Globaltest mit einer Minimalkonfiguration datumsinvarianter Größen (Strecken) durchgeführt. Damit erhält man für jedes Teilnetz einen Wert R_f , wobei der Punkt, der zu dem geringsten Wert für R_f geführt hat als verschoben gilt. Die Ergebnisse für den ersten Lokalisierungsschritt sind in Tabelle 4.6 aufgeführt.

Tabelle 4.6: Werte R_f nach dem ersten Lokalisierungsschritt

Punkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_f	50.2	43.0	45.2	43.2	48.8	52.0	49.1	48.1	40.5	50.0

Aus diesem Ergebnis ist ersichtlich, daß ebenfalls wie in (REINKING 1994), der Punkt 9 fälschlicherweise aus der Gruppe der stabilen Punkte zu entfernen ist, da er zu dem niedrigsten Wert für R_f führt. Da die Lokalisierung dieses Punktes nur mit datumsinvarianten Größen erfolgt ist, ist der Grund für diese falsche Lokalisierung jedoch nicht in der Datumsübertragung zu suchen, wie in (REINKING 1994) ausgeführt wird.

4.3.7 Weiterführende Schritte

Nachdem die generelle Methodik und der Formelapparat für die Kongruenzuntersuchung vorgestellt wurde, wurde ein numerisches Beispiel berechnet, mit dem Ergebnis, daß fälschlicherweise ein stabiler Punkt als verschoben lokalisiert wurde. Da diese Untersuchung nur mit Hilfe datumsinvarianter Elemente durchgeführt wurde, kann das Versagen der Analyse nicht in einer fehlerhaften Datumsübertragung liegen, wie in (REINKING 1994) ausgeführt wird.

Kritische Anmerkungen zu dem in den vorangegangenen Abschnitten dargestellten Verfahren sind in (CASPARY und BORUTTA 1986) zu finden. Dort wird insbesondere die schrittweise Verbesserung des Modells kritisiert. Da in allen Schritten die Methode der kleinsten Quadrate zur Parameterschätzung verwendet wird, auch wenn das Modell noch sehr grob ist und unentdeckte Einzelpunktbewegungen vorhanden sind, wird auf die Gefahr hingewiesen, daß auf der Grundlage nicht optimaler Schätzergebnisse Entscheidungen für das weitere Vorgehen getroffen werden müssen. Weiter wird darauf hingewiesen, daß durch das Aneinanderreihen von statistischen Tests keine Aussage mehr darüber möglich ist, mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit das endgültige Modell behaftet ist. In (CASPARY und BORUTTA 1986) wird die Schlußfolgerung gezogen, daß der Mangel der üblichen Vorgehensweise nicht durch eine Verfeinerung der bisher entwickelten Methoden beseitigt werden kann, sondern nur durch den Übergang auf andere Schätzverfahren, die der Natur der Aufgabenstellung besser angepaßt sind. Danach wird der Einsatz des M-Schätzers nach HUBER, die L_1 -Norm-Schätzung und die Dänische Methode aufgezeigt. Weitere Ausführungen zur Kongruenzuntersuchung mit alternativen Schätzverfahren sind z.B. in (CASPARY et al. 1983) und (BORUTTA 1988) zu finden.

Die Frage, warum sich der Einsatz robuster Schätzverfahren in der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze nicht durchgesetzt hat, ergibt sich aus den Ausführungen in Abschnitt 3.2.7. Betrachtet man zudem das numerische Beispiel in Abschnitt 4.3.6, so ist sofort einzusehen, daß auch die Anwendung eines robusten Verfahrens nicht zum Erfolg führen kann, da von 10 Punkten lediglich 3 stabil sind. Dies entspricht einem Anteil „kontaminierter Daten“ an den Gesamtdaten von 70%, womit auch jedes robuste Verfahren überfordert ist. Auf den Umstand, daß die Leistungsfähigkeit selbst der robustesten Verfahren bei einer Anzahl „kontaminierter Parameter“ $\geq 50\%$ überschritten wird, weist auch (NIEMEIER 2002, S. 375) hin.

Im folgenden Abschnitt soll nun die Kongruenzuntersuchung nicht mehr auf der Grundlage von Ausgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgen, sondern es soll der Einsatz einer anderen Zielfunktion untersucht werden. Diese Zielfunktion ist der Korrelationskoeffizient, der nach einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation dazu eingesetzt werden soll, die Ähnlichkeit von Formen zu vergleichen.

4.4 Kongruenzuntersuchung durch Ausgleichung nach maximaler Korrelation

4.4.1 Allgemeines Prinzip

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist wieder ein geodätisches Netz, für das Messungen in zwei Epochen⁵⁵ vorliegen. Zunächst ist es ratsam, dieses Netz jeweils in einer freien Netzausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen, um eventuelle Ausreißer in den Beobachtungen zu eliminieren. Danach ist zu überprüfen, ob zwischen den Vergleichsepochen Deformationen aufgetreten sind. Dazu bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- Durchführung eines Globaltests wie in Abschnitt 4.3.4 beschrieben, wobei der Test unter Verwendung datumsinvarianter Elemente ratsam ist, da hierbei alle Überlegungen zur Festlegung des geodätischen Datums entfallen.
- Ausgleichung aller Messungen nach der Methode der kleinsten Quadrate mit einem der in Kapitel 2 beschriebenen Transformationsansätze. Für ein zweidimensionales Netz ist die Transformation in den Abschnitten 2.2.3 bis 2.2.5 aufgeführt, für ein dreidimensionales Netz ist diese in den Abschnitten 2.3.3 und 2.3.4 dargestellt. Nach dieser Ausgleichung kann anhand der Residuen beurteilt werden, welche Auswirkung die Annahme der Kongruenz hat. Übersteigen die normierten Verbesserungen mit $|w_i| > c$ einen bestimmten Grenzwert (i.d.R. wird $2.5 \leq c \leq 4$ gewählt), so ist dies ein Zeichen dafür, daß Deformationen vorhanden sind.

Hat diese Untersuchung ergeben, daß sich Punktverschiebungen zwischen den zu untersuchenden Epochen ergeben haben, so ist die Suche nach möglichst kongruenten Punktgruppen durchzuführen. Diese Suche soll nun mit Hilfe einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation durchgeführt werden. Als funktionales Modell wird dazu, je nach Aufgabenstellung, einer der Transformationsansätze aus Abschnitt 2.2 oder 2.3 verwendet. Die theoretischen Grundlagen der Ausgleichung nach maximaler Korrelation sind in Abschnitt 3.3 dargestellt.

Als besonders hilfreich erweist sich, daß sich die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation aus einer erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten erzeugen läßt (siehe Abschnitt 3.3.8 und Anhang B). Somit ist der ausgewählte Transformationsansatz lediglich zu erweitern und die Lösung dieses erweiterten Modells nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert dann eine der Lösungen aus der Unterklasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation. Die Verwendung des Ergebnisses der Ausgleichung nach maximaler Korrelation soll derart erfolgen, daß der maximale Korrelationskoeffizient als nichtmetrisches Kriterium für die Beurteilung der Ähnlichkeit von Formen eingesetzt wird. Um stabile Punktgruppen zu lokalisieren wird folgende Vorgehensweise gewählt.

Ausgehend von der Gesamtheit aller in den Globaltest einbezogenen p Punkte, wird jeweils sukzessive ein Punkt P_i ($i = 1, \dots, p$) untersucht. Dies geschieht dadurch, daß der zu untersuchende Punkt in dem Transformationsansatz aus der Bedingung der Transformierbarkeit und der Datumsdefinition ausgeschlossen wird. Nach einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation wird dann der Korrelationskoeffizient berechnet. Derjenige Punkt, nach dessen Eliminierung sich der größte Korrelationskoeffizient r^2 ergeben hat, wird als verschoben eingestuft und aus der Gruppe der stabilen Punkte ausgeschlossen. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis ein Globaltest die Annahme der Kongruenz ergibt oder alle normierten Verbesserungen mit $|w_i| \leq c$ akzeptiert werden können.

Diese Strategie entspricht der traditionellen Vorgehensweise der sukzessiven Einzelpunktanalyse, nur das jetzt anstelle eines metrischen Entscheidungskriteriums, der Korrelationskoeffizient nach einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation als nichtmetrisches Kriterium verwendet wird. Damit soll nun das numerische Beispiel aus Abschnitt 4.3.6 bearbeitet werden, um die Frage zu klären, ob die falsche Lokalisierung in der Wahl der verwendeten Zielfunktion für die Ausgleichung begründet liegt.

⁵⁵ Eine Verallgemeinerung auf die Untersuchung mehrerer Epochen ist, unter Verwendung von einem der in Abschnitt 2.2 und 2.3 dargestellten Transformationsansätze, problemlos möglich.

4.4.2 Numerisches Beispiel

Als numerisches Beispiel wird wieder das in Abbildung 4.5 dargestellte Streckennetz verwendet. Die Streckenmessungen, für die in beiden Epochen eine empirische Standardabweichung von $s_s = 1$ cm angesetzt wird, sind in Tabelle 4.3 und 4.4 aufgeführt. Ein Maßstabsunterschied zwischen den Epochen ist nicht vorhanden, eine Unterteilung in Stütz- und Objektpunkte ist nicht gegeben. Dieses Beispiel ist so konzipiert, daß die Punkte 7, 8 und 9 eine kongruente Punktgruppe bilden. Mit einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation soll versucht werden, diese zu lokalisieren. Als mathematisches Modell wird der Transformationsansatz mit impliziter Formulierung der Transformierbarkeit (siehe Abschnitt 2.2.4) verwendet. Die dafür erforderlichen Näherungswerte für die Koordinaten im Zielsystem sind in Tabelle 4.7 aufgeführt.

Tabelle 4.7: Näherungskordinaten für das Zielsystem
(aus: REINKING 1994)

Pkt. Nr.	Y^0 [m]	X^0 [m]
1	220.00	220.00
2	20.00	220.00
3	220.00	20.00
4	20.00	20.00
5	70.00	70.00
6	140.00	140.00
7	225.00	220.00
8	275.00	240.00
9	200.00	300.00
10	240.00	240.00

Wie in Abschnitt 2.2.4 dargestellt, wird die implizite Formulierung der Transformierbarkeit dadurch erreicht, daß nur ein Koordinatenvektor, nämlich die Koordinaten im Zielsystem, als Unbekannte eingeführt wird. Die Beobachtungsgleichungen für die Messungen im Zielsystem ergeben sich gemäß (2.88) zu

$$L_{ij} + v_{L_{ij}} = \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2} \quad ,$$

die des Startsystems gemäß (2.89) zu

$$l_{ij} + v_{l_{ij}} = \frac{1}{\hat{m}} \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2} \quad .$$

Da in diesem Beispiel kein Maßstabsunterschied zwischen Start- und Zielsystem besteht, vereinfachen sich die Beobachtungsgleichungen des Startsystems in diesem Beispiel zu

$$l_{ij} + v_{l_{ij}} = \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2} \quad .$$

Zudem sind gemäß (2.92) noch die Bedingungen für die Datumsfestlegung einzuführen.

Die Ausgleichung nach maximaler Korrelation soll über die in Abschnitt 3.3.8 entwickelte erweiterte Ausgleichung nach kleinsten Quadraten erfolgen. Dazu ist zunächst zu untersuchen, welche der Eigenschaften (3.64), (3.66), (3.68) das funktionale Modell bereits ausweist. Da die Beobachtungsgleichungen keinen gemeinsamen additiven Term aufweisen, ist die Eigenschaft (3.66) nicht vorhanden. Um zu überprüfen, ob die Eigenschaft (3.68) erfüllt ist, werden die Modellgleichungen mit einem Faktor c_2 multipliziert. Es gilt zu prüfen, ob

$$c_2 \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \in \mathbf{F}$$

erfüllt ist. Formt man diesen Ausdruck um, erhält man

$$\sqrt{(c_2 X_j - c_2 X_i)^2 + (c_2 Y_j - c_2 Y_i)^2} \quad .$$

Mit den Substitutionen

$$c_2 X_j = X_j^*, \quad c_2 X_i = X_i^*, \quad c_2 Y_j = Y_j^*, \quad c_2 Y_i = Y_i^*$$

erhält man mit

$$\sqrt{(X_j^* - X_i^*)^2 + (Y_j^* - Y_i^*)^2} \in \mathbf{F}$$

ein Ausdruck, der zu der selben Klasse von Funktionen wie das ursprüngliche funktionale Modell gehört. Somit weisen die Modellgleichungen bereits die Eigenschaft (3.68) auf. Da für die Lösung über eine erweiterte Ausgleichung nach kleinsten Quadraten die Eigenschaft (3.64) erfüllt sein muß, ist eine Erweiterung um einen additiven Term c_1 vorzunehmen. Somit ergeben sich die erweiterten Beobachtungsgleichungen im Zielsystem zu

$$L_{ij} + v_{L_{ij}} = \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2} + \hat{c}_1$$

und im Startsystem zu

$$l_{ij} + v_{l_{ij}} = \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2} + \hat{c}_1 .$$

Führt man mit diesem erweiterten Modell eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten durch, so repräsentiert die Lösung eine aus der Unterklasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation.

In der ersten Ausgleichung nach maximaler Korrelation wird Punkt 1 aus der impliziten Formulierung der Transformierbarkeit ausgeschlossen. Dies geschieht dadurch, daß dieser Punkt im Zielsystem zwei Koordinatensätze mit unterschiedlicher Punktnummer zugewiesen bekommt. Zum einen wird der Punkt mit der Punktnummer 1 bezeichnet, zum anderen erhält er die Punktnummer 100. Als Näherungskoodinaten wird $Y_{100}^0 = 220.00$ und $X_{100}^0 = 220.00$ verwendet. Des weiteren ist zu beachten, daß dieser Punkt nicht mehr an der Datumsdefinition teilnimmt.

Dieses Ausgleichungsproblem kann dann durch Linearisierung an der Stelle der Näherungskoodinaten und Iteration gelöst werden. Faßt man die Unbekannten im Vektor

$$\mathbf{x} = [\Delta X_2 \quad \Delta Y_2 \quad \cdots \quad \Delta X_{10} \quad \Delta Y_{10} \quad \Delta X_1 \quad \Delta Y_1 \quad \Delta X_{100} \quad \Delta Y_{100} \quad \Delta c_1]^T$$

zusammen, so ergeben sich die Funktionalmatrix \mathbf{A} und die Matrix der Bedingungen für die Datumsfestlegung \mathbf{B} analog zu (2.91) und (2.92). Der verkürzte Beobachtungsvektor und der Widerspruchsvektor lauten

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \vdots \\ L_{i,j} - \left(\sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2} + c_1^0 \right) \\ \vdots \\ \vdots \\ l_{i,j} - \left(\sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2} + c_1^0 \right) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Mit (2.94) bis (2.96) erhält man nach einigen Iterationen mit den in Tabelle 4.8 aufgeführten Koordinaten eine Lösung aus der Unterklasse aller Lösungen der Ausgleichung nach maximaler Korrelation.

Tabelle 4.8: Koordinaten aus der Ausgleichung nach maximaler Korrelation

Pkt. Nr.	Y [m]	X [m]
1	220.268	219.760
2	20.936	219.595
3	220.366	19.013
4	19.577	21.068
5	70.117	70.313
6	140.452	139.739
7	224.710	220.262
8	274.464	240.772
9	198.897	300.033
10	240.480	239.204
100	221.011	218.351

Der Wert c_1 ergibt sich zu $c_1 = 0.0294$. Unter Verwendung der ausgeglichenen Koordinaten (Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation) können nun mit den ursprünglichen Beobachtungsgleichungen des Start- und Zielsystems die ausgeglichenen Funktionswerte berechnet werden. Diese bilden den Vektor \mathbf{f} . Zusammen mit den Beobachtungen in Tabelle 4.3 und 4.4, die den Vektor \mathbf{I} bilden, und unter Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse kann mit (3.62) der Korrelationskoeffizient berechnet werden. Aber es besteht noch eine weitere Möglichkeit, diesen Wert zu berechnen. Bei der erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten fällt die Quadratsumme der gewichteten Verbesserungen $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ an, so daß der Korrelationskoeffizient unter Verwendung von (3.88) aus

$$r^2 = 1 - \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\mathbf{I}^T \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{I}}$$

berechnet werden kann. Mit $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 5028.975$ und $\mathbf{I}^T \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{I} = 67825036.701$ ergibt sich der Korrelationskoeffizient zu $r^2 = 0.999925853702$. Dies ist der Wert des Korrelationskoeffizienten nach einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation, bei der Punkt 1 aus der impliziten Formulierung der Transformierbarkeit und der Datumsdefinition ausgeschlossen wurde.

In den nächsten Lokalisierungsschritten wird nun wieder jeweils eine Ausgleichung nach maximaler Korrelation durchgeführt, wobei jeweils sukzessive ein Punkt aus der Formulierung der Transformierbarkeit und der Datumsdefinition ausgeschlossen wird. Die Ergebnisse für den maximalen Korrelationskoeffizienten sind (ohne Darstellung der Zwischenschritte) in Tabelle 4.9 zusammengestellt.

Tabelle 4.9: Maximale Korrelationskoeffizienten

ohne Punkt	r^2
1	0.999925853702
2	0.999936671384
3	0.999933430022
4	0.999936376716
5	0.999928125633
6	0.999923364945
7	0.999927609155
8	0.999929209976
9	0.999940370636
10	0.999926983836

Es gilt die Annahme, daß derjenige Punkt, nach dessen Eliminierung sich der größte Korrelationskoeffizient ergibt, als verschoben angesehen werden soll. Betrachtet man das Ergebnis in Tabelle 4.9 so ist zu erkennen, daß die Eliminierung von Punkt 9 den größten Korrelationskoeffizienten liefert. Da aber in diesem Beispiel bekannt ist, daß Punkt 9 zu einer stabilen Gruppe gehört, ist diese Schlußfolgerung nicht zutreffend.

4.5 Beurteilung der Verfahren und weiterführende Schritte

Ebenso wie die sukzessive punktweise Elimination mit metrischen Kriterien in Abschnitt 4.3.6, so hat auch die sukzessive Eliminierung mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten als nichtmetrisches Kriterium nach einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation, in dem betrachteten numerischen Beispiel nicht zur korrekten Lösung geführt. Im folgenden soll nun die Frage erörtert werden, warum es zu diesem „falschen“ Ergebnis gekommen ist.

Der Grund für das Versagen der Lokalisierung mit metrischen Kriterien liegt jedenfalls nicht darin begründet, daß einigen Punkten beim Zusammentreffen von „ungünstiger Geometrie“ und „großen Deformationen“ bei einer datumsübertragenden Transformation große Restklaffungen zugewiesen werden, wie in (REINKING 1994) ausgeführt wird. Diese Behauptung läßt sich sehr leicht durch eine Analyse mit datumsinvarianten Elementen widerlegen.

Mit Hilfe der Ausgleichung nach maximaler Korrelation wird auf plausible Weise ein Formenvergleich durchgeführt. Doch auch hierbei wurde ein stabiler Punkt als verschoben lokalisiert.

Der Grund für das Scheitern beider Verfahren liegt in der Strategie der *sukzessiven Einzelpunktanalyse*. Während eines Lokalisierungsschrittes wird hierbei jeweils immer nur *ein* Punkt als verschoben verdächtigt, für die *übrigen* Punkte wird implizit angenommen, daß sie sich *nicht* verschoben haben. Dies gilt unabhängig von dem verwendeten Entscheidungskriterium (Metrik oder Form). Somit lassen sich auch die Ergebnisse der Untersuchungen in Abschnitt 4.3.6 und 4.4.2 erklären. Der Punkt 9 ist tatsächlich derjenige, der die Kongruenz beider Netze am meisten stört, wenn man die übrigen Punkte als nicht verschoben annimmt. Es gibt aber keine Gewähr dafür, daß die tatsächlich kongruente Punktgruppe in der Untergruppe, die nach der sukzessiven Elimination von einzelnen Punkten verbleibt, enthalten ist. Sind nämlich mehrere Punkte verschoben, so können diese Punkte derart Einfluß auf die Entscheidungsgröße nehmen, daß es zu Fehlinterpretationen kommen kann. Vergleichbar ist diese Situation mit der Suche nach Ausreißern mittels „data snooping“. Auch dort wird bei der sukzessiven Elimination angenommen, daß nur ein Ausreißer im Datenmaterial vorhanden ist. Liegt eine größere Anzahl vor, so kann es auch dort passieren, daß Ausreißer an den falschen Stellen angezeigt werden.

In Bezug auf die Kongruenzuntersuchung besteht der Ausweg darin, *alle möglichen* Untergruppen zu untersuchen, d.h. hat ein Globaltest mit p Punkten ergeben, daß Deformationen vorhanden sind, so sind *alle* Untergruppen mit $p-1$ Punkten zu untersuchen. Kann die Hypothese der Kongruenz danach nicht angenommen werden, so sind, ausgehend von der Gesamtheit aller p Punkte, *alle* Untergruppen mit $p-2$ Punkten zu untersuchen. Hat dies nicht zum Erfolg geführt, so sind, wieder ausgehend von der Gesamtheit aller p Punkte, *alle* Untergruppen mit $p-3$ Punkten zu untersuchen usw. Es gilt folgender Satz:

Die Lokalisierung kongruenter Punktgruppen in mehrfach beobachteten geodätischen Netzen ist grundsätzlich eine Aufgabe der Kombinatorik.

Daß man mit den Verfahren der sukzessiven Einzelpunktanalyse nicht grundsätzlich in der Lage ist, eine kombinatorische Suche zu simulieren, haben die numerischen Beispiele in Abschnitt 4.3.6 und 4.4.2 gezeigt.⁵⁶

Die Notwendigkeit, aus der Gesamtmenge der Netzknoten alle möglichen Teilmengen zu bilden, die gemeinsame Kongruenzeigenschaften haben, wird auch von (REINKING 1994) erkannt. Zur Lösung dieses Problems wird das Verfahren „Kongruenzvergleich und Clusterbildung“ vorgeschlagen. Zur Untersuchung von zwei Epochen zwischen denen kein Maßstabsunterschied besteht, wird ausgehend von der Menge aller Punkte (Null-Cluster), eine Basis mit den Punkten i und j (Strecke s_{ij}) ausgewählt, für die in einem statistischen Test die Annahme der Kongruenz nicht widerlegt werden kann. Dann werden alle noch dem Null-Cluster zugeordneten Punkte untersucht. Der zu untersuchende Punkt k wird vorläufig in den Cluster mit der Basis P_iP_j aufgenommen und die Transformationsparameter werden bestimmt. Danach wird der Differenzvektor zwischen den Koordinaten der ersten Epoche und der transformierten zweiten Epoche für diesen Cluster berechnet und auf Signifikanz getestet. Ist die Abweichung nicht signifikant, wird der Punkt k diesem Cluster endgültig zugeschlagen und mit einem Clusterzähler belegt. Auf diese Weise werden alle Punkte des Null-Clusters bearbeitet. Danach wird eine neue Basis aus dem verbliebenen Null-Cluster ausgewählt und die übriggebliebenen Punkte auf Zugehörigkeit getestet. Dieses in (REINKING 1994) vorgestellte Verfahren stellt somit eine Variante der in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen „Vorwärtsstrategie“ dar, bei der es prinzipiell möglich ist, mehrere kongruente (bzw. ähnliche) Punktgruppen zu identifizieren. Da aber Punkte, die einmal einem Cluster fest zugeordnet sind, bei den weiteren Untersuchungen nicht mehr in Frage gestellt werden, ist auch dieses Verfahren nicht in der Lage, eine Suche in allen Kombinationen zu simulieren.

⁵⁶ Es lassen sich natürlich auch „gutmütige“ Beispiele finden, bei denen eine sukzessive Einzelpunktanalyse zum Erfolg führen kann.

Nach den Ausführungen zur Kongruenzuntersuchung soll nun eine generelle Methodik entwickelt werden, mit der eine kombinatorische Suche konsistenter Datengruppen möglich wird. Diese soll dann für den speziellen Fall der Kongruenzuntersuchung ausgearbeitet und anhand des numerischen Beispiels aus Abschnitt 4.3.6 getestet werden.

5 MSS - Die Methode der maximalen Untergruppe

5.1 Theorie und generelle Methodik

Die Zielsetzung, Ausreißer in den Daten zu eliminieren, so daß bei einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten akzeptable Residuen entstehen, ist ein grundlegendes Problem in der Analyse geodätischer Meßdaten. Da dieses Problem weder mit der sukzessiven Analyse einzelner Beobachtungen nach einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten, noch mit der Anwendung resistenter oder robuster Schätzverfahren in allen Fällen gelöst werden kann, stellt sich die Frage nach einer neuen Herangehensweise für diese Problematik. Betrachtet man die alternativen Schätzverfahren etwas näher, so fällt das LMS-Verfahren auf, da hierbei, im Gegensatz zu allen anderen Methoden, die Lösung mit Hilfe der Kombinatorik gesucht wird. Das hat den Vorteil, daß diese Methode von allen Einflüssen der Geometrie des Ausgleichungsproblems befreit ist. Die Problematik der „Hebelpunkte“ ist bei diesem Verfahren ausgeschaltet. Da aber jeweils immer nur eine Minimalkonfiguration gesucht wird, kann diese Methode unter Umständen zu unplausiblen Ergebnissen führen.

Die Grundidee, Ausgleichungsprobleme mit Hilfe der Kombinatorik zu lösen, soll im folgenden beibehalten werden. Es soll eine neue Strategie entwickelt werden, mit der es möglich ist, das eigentliche Ziel, nämlich die maximale Untergruppe konsistenter Daten zu finden, auf direktem Wege anzugehen. Diese neue Methode wird mit dem Namen „MSS - Die Methode der maximalen Untergruppe“⁵⁷ bezeichnet.

*Mit „MSS“ wird im folgenden die Methode bezeichnet, bei der mit einer kombinatorischen Suche die maximale Untergruppe aus der Gesamtheit aller Daten gesucht wird, die in einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten ein verträgliches Ergebnis liefert.*⁵⁸

In den folgenden Abschnitten werden zunächst die Grundprinzipien für die Suche nach einer derartigen Untergruppe aufgezeigt, im Anschluß daran wird eine spezielle Strategie für die Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze entwickelt.

5.1.1 Allgemeines Prinzip

Eine Methode, Ausreißer in den Daten zu eliminieren, stellt das Preprocessing mit Hilfe resistenter und robuster Schätzverfahren dar, bei denen versucht wird, den Einfluß fehlerhafter Beobachtungen auf das Schätzergebnis möglichst gering zu halten. Bei der L_1 -Norm-Schätzung und der LMS-Schätzung wird jeweils eine minimale Untergruppe (Minimalkonfiguration) gesucht, für die sich dann die Verbesserungen der Beobachtungen zu null ergeben. Die Beurteilung der übrigen Daten erfolgt dann in Bezug zu dieser minimalen Untergruppe. Daß diese Vorgehensweise nicht immer zu brauchbaren Ergebnissen führt, ist in Abschnitt 3.2.7 dargelegt.

Eine weitere Methode zur Suche einer konsistenten Untergruppe stellt das sog. data snooping dar. Hierbei wird, ausgehend von der Gesamtheit aller Beobachtungen, jeweils die Beobachtung mit der größten normierten Verbesserung $|w_i| > c$ (i.d.R. wird $2.5 \leq c \leq 4$ gewählt) eliminiert. Danach erfolgt eine erneute Ausgleichung. Liegen dann immer noch normierte Verbesserungen über dem angesetzten Grenzwert, wird die Elimination fortgesetzt. Diese sukzessive Vorgehensweise führt aber nur dann zum Erfolg, wenn der Anteil von Ausreißern an den Beobachtungen gering ist. Übersteigt dieser einen Anteil von ca. 5% (in Abhängigkeit von der Geometrie), kann dieses Verfahren aufgrund der bekannten Verschmierungseffekte nicht zum Erfolg führen. Der Grundgedanke, ausgehend von der Gesamtheit aller Beobachtungen eine verträgliche Untergruppe mit maximaler Größe zu suchen, soll aber in den folgenden Überlegungen beibehalten werden.

Die Grundidee besteht darin, ausgehend von der Gesamtheit aller Beobachtungen, *alle* möglichen Untergruppen von Beobachtungen zu bilden und mit diesen eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten durchzuführen. Das Ziel, die größte Untergruppe konsistenter Beobachtungen zu finden, für die alle $|w_i| \leq c$ sind, läuft somit auf ein Problem der Kombinatorik hinaus. Die Grundidee, eine Datenanalyse mit Hilfe kombinatorischer Verfahren durchzuführen, ist in der Geodäsie noch nicht sehr weit verbreitet. Das einzige Verfahren, daß mit Hilfe einer kombinatorischen Suche arbeitet, ist der LMS-Schätzer (siehe Abschnitt 3.2.5), dessen Anwendung bei geodätischen Fragestellungen z.B. in (KANANI 2000) beschrieben wird.

⁵⁷ MSS = (engl.) Maximum Subsample = (dt.) Maximale Untergruppe. Bei der Namensgebung wurde bewußt auf die Begriffe „Kombination“ oder „kombinatorisch“ verzichtet, da diese im Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten stehen, z.B. „Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae“ (GAUSS 1900a) oder „Combination of Observations“ (SMART 1958).

⁵⁸ Wann man ein Ergebnis als „verträglich“ annehmen kann, ist von der zugrundeliegenden Aufgabenstellung abhängig. Ein mögliches Beurteilungskriterium sind die normierten Verbesserungen der Beobachtungen oder ein statistischer Test (z.B. Globaltest bei der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze).

Die Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze stellt einen Spezialfall der generellen Zielsetzung dar. Hierbei sind es die verschobenen Punkte, die bewirken, daß die Hypothese der Kongruenz nicht angenommen werden kann. Diese Ausreißer werden dadurch unschädlich gemacht, indem sie aus der Formulierung der Hypothese ausgeschlossen werden. Bei den herkömmlichen Verfahren wird versucht, die Gruppe der stabilen Punkte durch sequentielle Untersuchung einzelner Punkte zu identifizieren (siehe Abschnitt 4.3.5). Daß diese Vorgehensweise falsche Ergebnisse liefern kann, wurde in den Abschnitten 4.3.6 und 4.4.2 anhand eines numerischen Beispiels gezeigt. Die Suche nach kongruenten Punktgruppen läuft ebenfalls auf ein kombinatorisches Problem hinaus.

5.1.2 Direkte Lösung des MSS-Problems

Gegeben ist ein Ausgleichungsproblem mit n Messungen und m Unbekannte. Alle Kombinationen mit „brute force“ durchzuprobieren ist natürlich bei größeren Problemen auch bei heutiger Rechnerleistung nicht realistisch. So bestehen bei einem Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannte insgesamt

$$K = \sum_{i=1}^r \binom{n}{n-i} = \sum_{i=1}^r \frac{n!}{(n-i)! i!} \quad \text{mit } r = \text{Redundanz} \quad (5.1)$$

mögliche Kombinationen, um eine Lösung zu berechnen. Ob jedoch immer alle Kombinationen berechnet werden müssen, hängt davon ab, wie groß der maximale Anteil fehlerhafter Daten an den Gesamtdaten sein kann. Bezeichnet man diesen prozentualen Anteil mit α , so ergibt sich die Anzahl der zu berechnenden Lösungen zu

$$K = \sum_{i=1}^s \binom{n}{n-i} = \sum_{i=1}^s \frac{n!}{(n-i)! i!} \quad \text{mit } s = \alpha \cdot n \leq r. \quad (5.2)$$

In einem Beispiel mit $n = 50$ Beobachtungen, $m = 10$ Unbekannte und einem Anteil kontaminierter Daten von bis zu $\alpha = 30\%$ (15 fehlerhafte Beobachtungen) wären somit

$$\binom{50}{49} + \binom{50}{48} + \binom{50}{47} + \dots + \binom{50}{35} = 3.7157E+12$$

Ausgleichungen zu berechnen, bis die maximale Untergruppe gefunden wird, die ein verträgliches Ergebnis liefert. Es ist sofort einzusehen, daß auch bei dieser Einschränkung der zu untersuchenden Kombinationen ein nicht vertretbarer Rechenaufwand entstehen kann.

Die Frage, die es nun zu beantworten gilt, ist die nach einer Strategie, die Anzahl der möglichen Kombinationen soweit einzuschränken, daß eine Lösung mit vertretbarem Aufwand erzielt werden kann.

5.1.3 Zufallsbasierte Auswahl von Kombinationen

Eine allgemeine Einschränkung der Kombinationen kann erreicht werden, in dem nicht grundsätzlich alle Kombinationen untersucht werden, sondern daß per Zufallsgenerator jeweils eine festgelegte Anzahl von Untergruppen untersucht wird. Dabei kann dann allerdings nicht mehr garantiert werden, daß tatsächlich die maximale Untergruppe gefunden wird. Um diesem Umstand entgegenzuwirken, sollten die nicht zu berücksichtigenden Beobachtungen derart aus der Ausgleichung eliminiert werden, daß ihre Gewichte zu null gesetzt werden. Somit nehmen diese Beobachtungen nicht an der Parameterschätzung teil, erhalten aber Verbesserungen, anhand derer man sowohl die Größe des groben Fehlers ablesen kann als auch erkennen kann, ob eine Beobachtung doch zur Gruppe der verträglichen Daten zugeschlagen werden kann.

5.1.4 Vorauswahl bei der Ausgleichung direkt beobachteter Größen

Die Ausgleichung direkt beobachteter Größen ist ein einfacher Fall der Ausgleichung, an dem sich sehr anschaulich das Auffinden der größten Gruppe verträglicher Beobachtungen demonstrieren läßt.⁵⁹ Als Beispiel dienen 10 Streckenmessungen $\mathbf{I}^T = [100.101 \ 99.926 \ 100.005 \ 100.004 \ 100.017 \ 100.059 \ 100.065 \ 100.060 \ 100.008 \ 99.933]$ mit einer empirischen Standardabweichung von $s_s = 1.0$ cm. Gesucht ist die maximale Untergruppe, die bei einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten akzeptable Residuen liefert. Als Kriterium werden die normierten Verbesserungen $|w_i|$ herangezogen; das Ergebnis wird akzeptiert, wenn alle $|w_i| \leq 3$ sind.

⁵⁹ Daß in diesem einfachen Beispiel auch andere Methoden zur Ausreißersuche erfolgreich sein können, wird außer acht gelassen. Es geht lediglich darum, die Grundidee der Suche nach einer maximalen Untergruppe zu veranschaulichen.

Schritt 1: Zunächst werden die Beobachtungen ihrer Größe nach geordnet und man erhält die in Tabelle 5.1 dargestellte Reihenfolge.

Tabelle 5.1: Beobachtungen der Größe nach geordnet

Beob.-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Beobachtung	99.926	99.933	100.004	100.005	100.008	100.017	100.059	100.060	100.065	100.101

Schritt 2: Als nächstes wird eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten mit allen Beobachtungen durchgeführt. Als Ergebnis erhält man $\hat{x} = 100.0178$ und die in Tabelle 5.2 aufgeführten normierten Verbesserungen.

Tabelle 5.2: Normierte Verbesserungen nach einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten

Beob.-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
norm. Verb.	9.68	8.94	1.45	1.35	1.03	0.08	4.34	4.45	4.98	8.77

Schritt 3: Anstatt im folgenden Schritt alle Untergruppen mit 9 Strecken zu untersuchen, wird nun folgende Überlegung eingeführt. Bei den geordneten Beobachtungen in Tabelle 5.1 werden nur *benachbarte* Werte überhaupt zu einer Lösung führen können. So ist es z.B. unnötig, bei der Suche nach einer 4er Gruppe die Beobachtungen Nr. 1, 2, 9 und 10 miteinander zu kombinieren. Somit sind lediglich zwei 9er Gruppen, drei 8er Gruppen, vier 7er Gruppen usw. zu untersuchen. Die ausgeglichenen Werte für die beiden 9er Kombinationen lauten $\hat{x} = 100.0086$ und 100.0280 , die normierten Verbesserungen sind in Tabelle 5.3 aufgeführt.

Tabelle 5.3: Normierte Verbesserungen nach der Ausgleichung mit jeweils neun Beobachtungen

Beob.-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
norm. Verb.	8.76	8.01	0.48	0.38	0.06	0.90	5.35	5.46	5.99	
Beob.-Nr.		2	3	4	5	6	7	8	9	10
norm. Verb.		10.08	2.55	2.44	2.12	1.17	3.29	3.39	3.92	7.74

Die weiteren Zwischenschritte, in denen keine akzeptable Untergruppe gefunden werden kann, sind nicht dargestellt. Erst die Untersuchung der 4er Gruppen liefert das gesuchte Ergebnis. Die ausgeglichenen Werte für die dargestellten Kombinationen lauten $\hat{x} = 99.9670$, 99.9875 , 100.0085 , 100.0222 , 100.0360 , 100.0502 und 100.0712 , die normierten Verbesserungen der jeweiligen Kombinationen sind in Tabelle 5.4 aufgeführt.

Tabelle 5.4: Normierte Verbesserungen nach der Ausgleichung mit jeweils vier Beobachtungen

Beob.-Nr.	1	2	3	4						
norm. Verb.	4.73	3.93	4.27	4.39						
Beob.-Nr.		2	3	4	5					
norm. Verb.		6.29	1.91	2.02	2.37					
Beob.-Nr.			3	4	5	6				
norm. Verb.			0.52	0.40	0.06	0.98				
Beob.-Nr.				4	5	6	7			
norm. Verb.				1.99	1.65	0.61	4.24			
Beob.-Nr.					5	6	7	8		
norm. Verb.					3.23	2.19	2.66	2.77		
Beob.-Nr.						6	7	8	9	
norm. Verb.						3.84	1.01	1.13	1.70	
Beob.-Nr.							7	8	9	10
norm. Verb.							1.41	1.30	0.72	3.44

Es ist ersichtlich, daß die Beobachtungen Nr. 3, 4, 5 und 6 die maximale Untergruppe bilden, für die alle normierten Verbesserungen unter dem festgelegten Grenzwert bleiben. Die Anzahl der berechneten Kombinationen beträgt 27. Im Gegensatz dazu wären 847 Kombinationen zu berechnen gewesen, wenn man statt der sinnvollen, alle möglichen berechnet hätte. Daß sich dieses Verhältnis von ca. 1:30 sehr schnell zu Gunsten der Gruppenbildung verschiebt, wird deutlich wenn man aus 20 Beobachtungen eine 4er Gruppe lokalisiert. Für eine Berechnung in allen Kombinationen sind dabei 1 047 224 Ausgleichungen zu berechnen, werden nur benachbarte Werte

untersucht, so erhält man das Ergebnis bereits nach 152 Ausgleichungen. Das Verhältnis zwischen beiden Berechnungen beträgt in diesem Fall ca. 1: 6890.

Möchte man neben der maximalen Gruppe noch weitere Gruppen von Beobachtungen finden, so kann man die Untersuchung mit den verbleibenden Beobachtungen 1, 2, 7, 8, 9 und 10 fortsetzen.

Nachdem an diesem einfachen Beispiel gezeigt werden konnte, daß die MSS-Lösung durch den Ausschluß von unmöglichen Kombinationen mit vertretbarem Aufwand gefunden werden kann, soll dieser Grundgedanke nun dazu verwendet werden, eine Strategie für die Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze zu entwickeln. Das Ziel besteht auch bei dieser Aufgabenstellung darin, von vornherein unmögliche Kombinationen aus der Untersuchung auszuschließen, so daß die MSS-Lösung mit möglichst geringem Aufwand gefunden werden kann.

5.2 Anwendung der MSS-Methode bei der Kongruenzuntersuchung

Gegeben ist ein geodätisches Netz, für das Beobachtungen in zwei Epochen vorliegen. Nach der getrennten Ausgleichung der Einzelepochen als freies Netz kann mit einem Globaltest überprüft werden, ob Punktverschiebungen zwischen den zu untersuchenden Epochen aufgetreten sind. Ist dies der Fall, so besteht die Aufgabe, aus der Gruppe aller Punkte die maximale Untergruppe stabiler Punkte zu identifizieren. Im Relativmodell umfaßt diese Untersuchung alle Punkte des Netzes, im Absolutmodell die sog. Stützpunkte. Wie bereits beschrieben, kann diese maximale Gruppe in jedem Fall durch eine Untersuchung aller Punktombinationen gefunden werden. Um jedoch nicht alle Kombinationen berechnen zu müssen, sollen nur diejenigen Punkte untersucht werden, bei denen überhaupt die Aussicht besteht, daß sie eine kongruente Gruppe bilden können. Dazu wird im folgenden eine Strategie für die Voruntersuchung unter Verwendung datumsinvarianter Elemente (Strecken) entwickelt.

5.2.1 Voruntersuchung mit Hilfe metrischer Kriterien

Für diese Voruntersuchung werden auf Grundlage der ausgeglichenen Koordinaten in Epoche 1 und in Epoche 2 jeweils alle möglichen Strecken berechnet. Aus diesen lassen sich die Streckendifferenzen dl_i berechnen, mit denen eine erste Beurteilung der aufgetretenen Deformationen möglich ist. Diese Information gilt es dann derart aufzubereiten, daß man „unmögliche“ Kombinationen von vornherein aus der weiteren Suche ausschließen kann.

Zunächst werden aus den ausgeglichenen Koordinaten alle Strecken in Epoche 1 und 2 mit ihren Kofaktorenmatrizen

$$\hat{\mathbf{I}}_1 = \mathbf{F}_1 \hat{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{Q}_{1_1} = \mathbf{F}_1 \mathbf{Q}_{x_1 x_1} \mathbf{F}_1^T \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{I}}_2 = \mathbf{F}_2 \hat{\mathbf{x}}_2, \quad \mathbf{Q}_{1_2} = \mathbf{F}_2 \mathbf{Q}_{x_2 x_2} \mathbf{F}_2^T \quad (5.3)$$

berechnet. Daraus läßt sich der Differenzvektor und dessen Kofaktorenmatrix

$$\mathbf{dl} = \hat{\mathbf{I}}_2 - \hat{\mathbf{I}}_1, \quad \mathbf{Q}_{dl} = \mathbf{Q}_{1_1} + \mathbf{Q}_{1_2} \quad (5.4)$$

berechnen. Zudem steht der gemeinsame empirische Varianzfaktor s_0^2 zur Verfügung. Anhand dieser Ausgangswerte kann nun entschieden werden, welche der Differenzen dl_i einen gewissen Grenzwert überschreitet und somit auf Punktverschiebungen hinweist. Im folgenden sollen nun mehrere Möglichkeiten für die Wahl eines Grenzwertes aufgezeigt werden.

5.2.1.1 Beurteilung anhand von Erfahrungswerten

Wie in Abschnitt 4.1.1 beschrieben, kann ein sinnvoller Grenzwert für die Beurteilung der Differenz zweier Meßergebnisse aus Erfahrungswerten abgeleitet werden. Die Annahme $E\{dl\} = 0$ wird abgelehnt, falls

$$|dl| > T \cdot \sigma_{dl} \quad (5.5)$$

ist. Der Wert der theoretischen Standardabweichung σ_{dl} kann dabei auf Genauigkeitsangaben des Instrumentenherstellers basieren, eine weitere Möglichkeit besteht darin, einen empirischen Wert s_{dl} zu verwenden. Der Wert T kann als Erfahrungswert gewählt werden. Oftmals wird $T = 3$ verwendet, was zu dem bekannten 3σ -Kriterium führt. Die Tatsache, daß es sich bei dem Wert dl um das Ergebnis einer Ausgleichung handelt, bleibt bei dieser Vorgehensweise unberücksichtigt. Diese Tatsache kann berücksichtigt werden, indem man

$$s_{dl} = s_0 \sqrt{q_{dl}} \quad (5.6)$$

wählt.

5.2.1.2 Beurteilung anhand des „Signal-Rausch-Verhältnisses“

Um unmögliche Konfigurationen auszuschließen, wird die Abweichung dl zwischen zwei datumsinvarianten Größen (Strecken) als „Signal“ und die empirische Standardabweichung s_{dl} als „Rauschen“ angesehen. Somit bezeichnet der Quotient

$$q = \frac{|dl|}{s_{dl}} \quad (5.7)$$

das „Signal-Rausch-Verhältnis“. Mit Verweis auf die Informationstheorie kann man davon ausgehen, daß es sich bei $q > 5$ um signifikante Abweichungen handelt (NIEMEIER 1976). Untersucht man alle Komponenten dl_i des Differenzvektors \mathbf{dl} , so können alle Abweichungen mit $q_i > 5$ als signifikant angesehen werden. Alle Strecken, die eine derartige Abweichung aufweisen, können somit nicht Bestandteil einer kongruenten Punktgruppe sein.

5.2.1.3 Beurteilung anhand eines multiplen t -Tests

Die einzelnen Elemente dl_i des Differenzvektors \mathbf{dl} können auch mit dem Grenzwert aus einem statistischen Testverfahren verglichen werden. Als Ausgangsgrößen für diesen Test ist der Vektor der Beobachtungsdifferenzen \mathbf{dl} und die zugehörige Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{dl} bereitzustellen. Werden in einem Lagenetz mit p Punkten alle möglichen Strecken berechnet, besteht der Vektor \mathbf{dl} aus $p(p-1)/2$ Komponenten von denen h , siehe (4.12), linear unabhängig sind. Da aber $p(p-1)/2 > h$ ist, sind alle Elemente dl_i miteinander korreliert, so daß ein multipler t -Test lediglich als Näherung angesehen werden kann. Die Nullhypothese für den Vergleich der Strecken l_i in Epoche 1 und 2 lautet

$$H_0: E\{dl_i\} = 0 \quad (5.8)$$

mit

$$dl_i = l_{i_2} - l_{i_1} \quad (5.9)$$

Da die Beobachtungsdifferenzen aufgrund von Deformationen sowohl positives als auch negatives Vorzeichen annehmen können, handelt es sich um eine zweiseitige Fragestellung mit der Alternativhypothese

$$H_A: E\{dl_i\} \neq 0 \quad (5.10)$$

Verwendet man für beide Epochen gemäß Abschnitt 4.3.3 einen gemeinsamen empirischen Varianzfaktor s_0^2 , so ergibt sich die empirische Standardabweichung der Beobachtungsdifferenzen zu

$$s_{dl_i} = s_0 \sqrt{q_{dl_{ii}}} \quad (5.11)$$

Die Testgröße lautet

$$T_i = \frac{|dl_i|}{s_{dl_i}} = \frac{|dl_i|}{s_0 \sqrt{q_{dl_{ii}}}} \quad (5.12)$$

und wird mit dem Wert $t_{f, 1-\alpha/2}$ verglichen, wobei sich der Freiheitsgrad f mit $f = f_1 + f_2$ als Summe der Freiheitsgrade der Einzelepochen ergibt. Wird mit

$$T_i \leq t_{f, 1-\alpha/2} \quad (5.13)$$

der Grenzwert der t -Verteilung nicht überschritten, so kann die Nullhypothese (5.8) nicht verworfen werden. Um die Analogie zu (5.5) zu verdeutlichen, kann dieser Test auch in der Form

$$|dl_i| \leq s_{dl_i} \cdot t_{f, 1-\alpha/2} \quad (5.14)$$

dargestellt werden. Da jedoch nicht nur eine einzelne Abweichung für sich untersucht werden soll, sondern Rückschlüsse auf das gesamte Netz getroffen werden sollen, wird ein Grenzwert \bar{t} gesucht mit der Eigenschaft

$$P \left\{ T_{i_1} \leq \bar{t} \wedge T_{i_2} \leq \bar{t} \wedge \dots \wedge T_{i_n} \leq \bar{t} \mid H_0 \right\} = 1 - \alpha / 2 \quad (5.15)$$

Wären die Werte \bar{T}_{i_j} stochastisch unabhängig, so ließe sich der Grenzwert nach (PELZER 1976) angeben zu

$$\bar{t} = t_{f, 1-\bar{\alpha}/2} \quad \text{mit} \quad \bar{\alpha} = \alpha / h \quad (5.16)$$

Da die einzelnen Werte dl_i jedoch korreliert sind, sind somit auch die Werte \bar{T}_{t_i} korreliert, so daß der Test

$$|dl_i| < t_{f, 1-\bar{\alpha}/2} s_{dl_i} \quad (5.17)$$

als Näherung anzusehen ist, bei dem eine Abweichungen als signifikant anzusehen ist, wenn sie den Grenzwert deutlich übersteigt. Möglichkeiten für die Abstimmung des Testniveaus für getrennte aber nicht unabhängige Einzeltests werden in (Niemeier 2002) mit $\bar{\alpha} = \alpha / n$ und $\bar{\alpha} = \alpha / r$ angegeben (mit n = Anzahl der Beobachtungen, r = Redundanz des Ausgleichsproblems). Somit ist es möglich, für jedes Element des Differenzvektors \mathbf{dl} eine Aussage zu treffen, ob eine einzelne Abweichung dl_i signifikant ist. Diese Information gilt es nun weiterzuverarbeiten, so daß daraus Aussagen über mögliche kongruente Punktgruppen abgeleitet werden können.

5.2.2 Topologiematrix kongruenter Punktgruppen

Wurden beim Vergleich zweier Epochen unzulässige Streckendifferenzen festgestellt, so werden diese nicht mehr in die weiteren Untersuchungen einbezogen. Mit den verbleibenden Strecken kann nun anhand topologischer Beziehungen eine Lokalisierung möglicher kongruenter Punktgruppen durchgeführt werden. Topologische Beziehungen in einem Netz lassen sich allgemein durch eine Kanten-Knoten-Matrix beschreiben; die Verwendung einer derartigen Matrix für geodätische Fragestellungen ist z.B. in (GRÜNDIG 1988) und (LINKWITZ 1999) beschrieben. Die Knoten des Netzes sind durch Kanten verbunden. Werden die Beobachtungen den Kanten zugeordnet, so lassen sich die topologischen Beziehungen in einer Kanten-Knoten-Matrix \mathbf{C} abbilden. Für ein Netz mit fünf Punkten, zwischen denen alle möglichen Strecken gemessen wurden (Abbildung 5.1), ergibt sich die Topologiematrix in Tabelle 5.5. In \mathbf{C} wird die i -te Beobachtung dem j -ten Punkt zugeordnet. Es gilt folgende Definition:

- $c_{ij} = 1$, wenn die i -te Beobachtung vom Punkt j ausgeht,
- $c_{ij} = -1$, wenn die i -te Beobachtung im Punkt j endet,
- $c_{ij} = 0$, in allen übrigen Fällen.

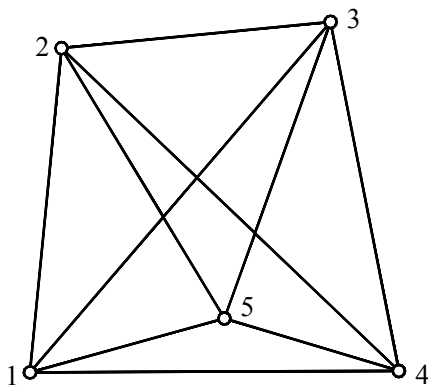


Abbildung 5.1: Streckennetz mit fünf Punkten

Tabelle 5.5: Kanten-Knoten-Matrix für ein Streckennetz mit fünf Punkten

	Punkt 1	Punkt 2	Punkt 3	Punkt 4	Punkt 5
$s_{1,2}$	1	-1	0	0	0
$s_{1,3}$	1	0	-1	0	0
$s_{1,4}$	1	0	0	-1	0
$s_{1,5}$	1	0	0	0	-1
$s_{2,3}$	0	1	-1	0	0
$s_{2,4}$	0	1	0	-1	0
$s_{2,5}$	0	1	0	0	-1
$s_{3,4}$	0	0	1	-1	0
$s_{3,5}$	0	0	1	0	-1
$s_{4,5}$	0	0	0	1	-1

Bildet man mit dieser Kanten-Knoten-Matrix den Ausdruck $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$, so erhält man die symmetrische Knoten-Knoten-Matrix in Tabelle 5.6.

Tabelle 5.6: Knoten-Knoten-Matrix für ein Netz mit fünf Punkten und Streckenmessungen zwischen allen Punkten

	Punkt 1	Punkt 2	Punkt 3	Punkt 4	Punkt 5
Punkt 1	4	-1	-1	-1	-1
Punkt 2	-1	4	-1	-1	-1
Punkt 3	-1	-1	4	-1	-1
Punkt 4	-1	-1	-1	4	-1
Punkt 5	-1	-1	-1	-1	4

Die Elemente der Knoten-Knoten-Matrix \bar{C} haben die folgende Bedeutung:

\bar{C}_{ii} = Anzahl der im Punkt i zusammentreffenden Kanten,

\bar{C}_{ij} = -1, wenn eine Kantenverbindung zwischen Punkt i und Punkt j besteht,

\bar{C}_{ij} = 0, wenn keine Kantenverbindung zwischen Punkt i und Punkt j besteht.

Für die Suche nach möglichen kongruenten Punktgruppen werden für das Netz im Start- und Zielsystem jeweils alle möglichen Streckenverbindungen berechnet. Nach der Untersuchung der Streckendifferenzen werden nur die Streckenverbindungen in die Matrix C eingetragen deren Abweichung akzeptiert wurde. Dann wird die zugehörige Knoten-Knoten-Matrix \bar{C} gebildet, in der die Lokalisierung möglicher kongruenter Punktgruppen wie folgt durchgeführt wird:

1. Suche über alle \bar{C}_{ii} das maximale Element $\bar{C}_{ii} = \max$.
2. Suche über alle \bar{C}_{ij} , wie viele Elemente n mit $\bar{C}_{ij} \geq \max$ gefunden werden. Ist $n \geq \max + 1$, so können kongruente Punktgruppen mit $\max + 1$ Punkten vorliegen.
3. Ist die Anzahl der gefundenen Punkte n gleich dem Wert $\max + 1$, kann getestet werden, ob zwischen diesen Punkten alle Streckenverbindungen existieren. Ist dies der Fall, so ist diese Gruppe ein Kandidat für eine mögliche kongruente Punktgruppe.
4. Ist $n > \max + 1$, so sind mit den gefundenen Punkten alle möglichen Kombinationen zu bilden und zu prüfen, ob für diese Kombinationen alle Streckenverbindungen vorhanden sind. Die Punktgruppen, in denen alle Streckenverbindungen existieren, sind Kandidaten für eine kongruente Punktgruppe.
5. Die Kandidaten für eine kongruente Punktgruppe werden unter Anwendung des Globaltests (Abschnitt 4.3.4) untersucht, wobei sich die Hypothesenformulierung mit datumsinvarianten Elementen (Strecken) anbietet. Konnte eine stabile Gruppe gefunden werden, so sind, unter der Annahme daß unterschiedliche kongruente Gruppen keine gemeinsamen Punkte aufweisen, die entsprechenden Zeilen und Spalten in der Matrix \bar{C} zu streichen und die Suche nach weiteren Gruppen kann mit Schritt 1 fortgesetzt werden.
6. Konnte keine kongruente Punktgruppe gefunden werden, wird $\max = \max - 1$ gesetzt und die Lokalisierung mit Schritt 2 fortgesetzt.

Die Suche nach möglichen kongruenten Gruppen soll nun an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden. In dem in Abbildung 5.2 dargestellten Netz wurden in zwei Epochen alle Strecken berechnet. Die Beurteilung der Streckendifferenzen soll anhand des Signal-Rausch-Verhältnisses (Abschnitt 5.2.1.2) erfolgen. Die Testgrößen q (5.7) sind in sortierter Reihenfolge in Tabelle 5.7 aufgelistet.

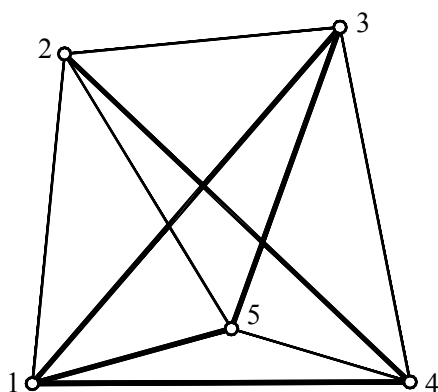


Abbildung 5.2: Netz mit fünf Punkten. Strecken, deren Abweichung akzeptiert wird, sind in dickerer Strichstärke dargestellt.

Tabelle 5.7: Testgröße q

i	Testgröße
1	$q_{dl_{2,5}} = 6.8$
2	$q_{dl_{1,2}} = 5.9$
3	$q_{dl_{2,3}} = 5.5$
4	$q_{dl_{4,5}} = 5.4$
5	$q_{dl_{3,4}} = 5.2$
6	$q_{dl_{1,4}} = 1.7$
7	$q_{dl_{3,5}} = 1.3$
8	$q_{dl_{1,3}} = 1.1$
9	$q_{dl_{2,4}} = 0.9$
10	$q_{dl_{1,5}} = 0.4$

Da die ersten fünf Werte mit $q > 5$ über dem Grenzwert liegen, beschränkt sich die Suche nach der maximalen Gruppe stabiler Punkte auf ein Suchfenster von Zeile 6 bis 10. Nur diese Streckenverbindungen werden in eine

Kanten-Knoten-Matrix C eingetragen, die sich dann wie in Tabelle 5.8 dargestellt ergibt. Die zugehörige Knoten-Knoten-Matrix \bar{C} ist in Tabelle 5.9 dargestellt.

Tabelle 5.8: Kanten-Knoten-Matrix

	Pkt. 1	Pkt. 2	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5
$s_{1,3}$	1	0	-1	0	0
$s_{1,4}$	1	0	0	-1	0
$s_{1,5}$	1	0	0	0	-1
$s_{2,4}$	0	1	0	-1	0
$s_{3,5}$	0	0	1	0	-1

Tabelle 5.9: Knoten-Knoten-Matrix

	Pkt. 1	Pkt. 2	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5
Pkt. 1	3	0	-1	-1	-1
Pkt. 2	0	1	0	-1	0
Pkt. 3	-1	0	2	0	-1
Pkt. 4	-1	-1	0	2	0
Pkt. 5	-1	0	-1	0	2

Die Lokalisierung möglicher kongruenter Punktgruppen anhand der Knoten-Knoten-Matrix \bar{C} geschieht in diesem Beispiel wie folgt:

- Das maximale Diagonalelement ist $\bar{C}_{11} = \max = 3$, was auf das Vorhandensein eines Vierecks deutet, da im Eckpunkt eines Vierecks drei Seiten auftreten.
- Es kann nur $n = 1$ Element mit $\bar{C}_{ii} \geq \max$ gefunden werden, so daß kein Viereck vorliegen kann.
- Setze $\max = \max - 1 = 2$.
- Es können $n = 4$ Elemente mit $\bar{C}_{ii} \geq \max$ gefunden werden, so daß mehrere Dreiecke vorliegen können.
- Mit den gefundenen Punkten 1, 3, 4 und 5 lassen sich folgende Dreiecke bilden: 1/3/4, 1/3/5, 1/4/5, 3/4/5. Die Überprüfung, ob in jedem Dreieck alle Streckenverbindungen vorhanden sind, entspricht einer Untersuchung der Knoten-Knoten-Matrizen in Tabelle 5.10, die sich aus Tabelle 5.9 ergeben.

Tabelle 5.10: Knoten-Knoten-Matrizen zur Überprüfung der Streckenverbindungen

	Pkt. 1	Pkt. 3	Pkt. 4
Pkt. 1	3	-1	-1
Pkt. 3	-1	2	0
Pkt. 4	-1	0	2

	Pkt. 1	Pkt. 3	Pkt. 5
Pkt. 1	3	-1	-1
Pkt. 3	-1	2	-1
Pkt. 5	-1	-1	2

	Pkt. 1	Pkt. 4	Pkt. 5
Pkt. 1	3	-1	-1
Pkt. 4	-1	2	0
Pkt. 5	-1	0	2

	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5
Pkt. 3	2	0	-1
Pkt. 4	0	2	0
Pkt. 5	-1	0	2

Da die Matrix \bar{C} symmetrisch ist, kann man anhand der Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen erkennen, ob in der zu untersuchenden Punktgruppe alle Streckenverbindungen vorhanden sind. Dies ist nur für die Kombination der Punkte 1, 3, 5 der Fall, so daß ein kongruentes Dreieck vorliegen kann. Die Hypothese der Kongruenz kann dann mit einem Globaltest, der nur diese Punkte umfaßt, überprüft werden. In diesem Beispiel wird angenommen, daß die Nullhypothese der Kongruenz angenommen werden kann.

- Möchte man untersuchen, ob sich weitere Gruppen finden lassen, so sind die Zeilen und Spalten der lokalisierten Punkte 1, 3 und 5 aus der ursprünglichen Matrix \bar{C} in Tabelle 5.9 zu streichen und man erhält die in Tabelle 5.11 dargestellte Knoten-Knoten-Matrix als Ausgangspunkt für eine weitere Suche.

Tabelle 5.11: Knoten-Knoten-Matrix

	Punkt 2	Punkt 4
Punkt 2	1	-1
Punkt 4	-1	2

- Ohne Darstellung der Zwischenschritte wird als Ergebnis eine weitere Gruppe bestehend aus den Punkten 2 und 4 gefunden.

Vergleicht man den Aufwand, mit dem die größte kongruente Punktgruppe gefunden wurde, so ist zunächst zu erwähnen, daß man bereits in diesem kleinen Beispiel bei einer Berechnung aller Kombinationen insgesamt

$$K = \binom{5}{4} + \binom{5}{3} = 15$$

Ausgleichungen hätte berechnen müssen. Dem gegenüber steht die wenig rechenintensive Aufstellung und Untersuchung der Topologiematrizen und nur eine Ausgleichung um die gefundene Punktgruppe zu überprüfen. Die Voruntersuchung führt also zu einer erheblichen Reduzierung des Rechenaufwandes, so daß die kombinatorische Suche nach der maximalen Gruppe stabiler Punkte auch in größeren Netzen praktikabel ist. Weiterhin ist anzumerken, daß sich das Aufstellen der Topologiematrizen und die Suche nach möglichen kongruenten Punktgruppen sehr leicht automatisieren läßt und somit in bereits bestehende Programme integriert werden kann.

5.2.3 Voruntersuchung mit Hilfe nichtmetrischer Kriterien

Sind große Maßstabsunterschiede zwischen den Netzen zu erwarten, so ist die Kongruenzuntersuchung unter Verwendung eines Transformationsansatzes aus Abschnitt 2.2 oder 2.3 durchzuführen, da erst *nach* der Berücksichtigung des Maßstabs eine Aussage über die Kongruenz getroffen werden kann. Eine Voruntersuchung anhand von Streckendifferenzen ist somit nicht möglich. An ihre Stelle tritt in diesem Fall die Untersuchung der Maßstabsverhältnisse. Dazu werden mit (5.3) wieder alle möglichen Streckenverbindungen in Epoche 1 und 2 berechnet, danach werden für alle Strecken die Maßstabsfaktoren bestimmt und der Größe nach sortiert. Da der Maßstab jedoch unbekannt ist, kann kein festes Kriterium für die Beurteilung angewendet werden. Dennoch besteht auch in diesem Fall die Möglichkeit, die Kombinationen derart einzuschränken, daß unmögliche Konfigurationen gar nicht erst untersucht werden. Als Kriterium für die Vorauswahl wird eine Abschätzung für die empirische Standardabweichung des Maßstabsfaktors verwendet. Gegeben ist eine Strecke l_{i1} in Epoche 1 und l_{i2} in Epoche 2. Als Standardabweichung für diese Strecken $s_{l_{i1}}$ und $s_{l_{i2}}$ kann z.B. die Herstellerangabe für die Genauigkeit der Streckenmessung mit einem EDM verwendet werden oder ein Wert auf Grundlage der Kofaktorenmatrizen aus (5.3) in Verbindung mit der empirischen Standardabweichung der Gewichtseinheit s_0 . Mit dem funktionalen Zusammenhang

$$m = \frac{l_{i1}}{l_{i2}} \quad (5.18)$$

erhält man über das Kovarianzfortpflanzungsgesetz für die empirische Standardabweichung des Maßstabes

$$s_m^2 = \left(\frac{1}{l_{i2}}\right)^2 s_{l_{i1}}^2 + \left(\frac{l_{i1}}{l_{i2}^2}\right)^2 s_{l_{i2}}^2 \quad (5.19)$$

Setzt man $l_{i1} = l_{i2}$, so ergibt sich

$$s_m = \frac{1}{l_{i2}} \sqrt{s_{l_{i1}}^2 + s_{l_{i2}}^2} \quad (5.20)$$

Setzt man für l_{i2} die kürzeste Strecke im Netz ein und wählt einen Toleranzfaktor T (z.B. $T = 3$), erhält man mit

$$T_m = T \cdot s_m \quad (5.21)$$

eine Toleranzbreite für den Maßstabsfaktor. Damit läßt sich die Größe eines Suchfensters festlegen, mit der in der Liste der sortierten Maßstabsfaktoren nach der größten ähnlichen Punktgruppe als Kandidat für eine kongruente Gruppe gesucht wird. Strecken, die außerhalb dieses Suchfensters liegen, werden nicht in die Suche einbezogen. Nachdem die Koordinatentransformation mit p Stützpunkten zu nicht akzeptablen Residuen geführt hat und somit das Vorhandensein von Deformationen angezeigt wurde, erfolgt die Suche der größten ähnlichen Punktgruppe wie folgt:

1. Berechne mit T_m die Größe des Suchfensters, in denen ähnliche Punktgruppen gesucht werden.
2. Beginne das Maßstabsfenster in der Zeile $i = 1$ in der Liste der sortierten Maßstäbe.
3. Suche in dem Maßstabsfenster, ob eine ähnliche Punktgruppe mit $p - 1$ Punkten gefunden werden kann. Dies erfolgt mit den Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Topologiematrizen. Konnte eine (oder mehrere) Gruppe(n) gefunden werden, so ist diese ein Kandidat für eine kongruente Punktgruppe.

4. Beginne mit dem Maßstabsfenster in der Zeile $i = i + 1$ und führe Schritt 3 aus.
5. Ist das Ende der Maßstabsliste erreicht und konnten mögliche kongruente Punktgruppen gefunden werden, ist die Suche beendet. Konnte keine Gruppe mit $p - 1$ Punkten gefunden werden, so wird die Suche für $p - 2$ Punkte mit Schritt 2 fortgesetzt, usw.
6. Nach dieser Voruntersuchung wird nun für jede gefundene Kombination eine Ausgleichung mit einem der in Abschnitt 2.2 oder 2.3 entwickelten Transformationsansätze gerechnet, in der jeweils die gefundenen Punkte als homologe Punkte verwendet werden. Die Lösung, die die kleinsten normierten Verbesserungen $|w_i| \leq c$ aufweist, wird als endgültige Lösung ausgewählt.

Diese Strategie soll nun an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden. Für das Netz in Abbildung 5.2 wurden für alle Streckenverbindungen die Maßstabsfaktoren berechnet und der Größe nach sortiert. Die Standardabweichung der Streckenmessung betrug 2 mm + 3 ppm in Epoche 1 und 4 mm + 1 ppm in Epoche 2, die kürzeste Strecke im Netz beträgt 53 m. Damit ergibt sich die Größe des Suchfensters zu

$$T_m = 3 \cdot \frac{1}{53} \sqrt{0.0022^2 + 0.0041^2} = 263 \text{ ppm} \quad .$$

Verwendet man diesen Wert als Toleranzbreite für den Maßstabsfaktor, ergeben sich die in Tabelle 5.12 eingezeichneten Suchfenster.

Tabelle 5.12: Maßstabsliste mit Suchfenster

i	Maßstabsfaktor [ppm]
1	$m_{s_{1,2}} = -515.2$
2	$m_{s_{2,5}} = -366.8$
3	$m_{s_{1,5}} = -7.3$
4	$m_{s_{3,5}} = 2.0$
5	$m_{s_{1,3}} = 4.3$
6	$m_{s_{1,4}} = 12.9$
7	$m_{s_{2,4}} = 29.7$
8	$m_{s_{4,5}} = 238.4$
9	$m_{s_{3,4}} = 264.7$
10	$m_{s_{2,3}} = 419.5$

Die Suche nach Kandidaten für die maximale Gruppe stabiler Punkte läuft wie folgt ab:

- Da die Koordinatentransformation mit $p = 5$ Stützpunkten zu nicht akzeptablen Residuen geführt hat, wird im nächsten Schritt nach einem ähnlichen Viereck gesucht.
- Beginnend mit der ersten Zeile wird ein Suchfenster mit einer maximalen Breite von 263 ppm aufgebaut.
- Da in diesem Suchfenster nur 2 Strecken vorhanden sind, kann kein Viereck vorliegen.
- Nun wird ein neues Suchfenster, beginnend in der zweiten Zeile aufgebaut. In diesem Beispiel führt das nicht zum Erfolg.
- Das nächste Suchfenster beginnt in der dritten Zeile und enthält in diesem Beispiel sechs Elemente, so daß ein Viereck vorliegen kann. Um dies zu überprüfen, wird die Kanten-Knoten-Matrix \mathbf{C} in Tabelle 5.13 und daraus die Knoten-Knoten-Matrix $\bar{\mathbf{C}}$ in Tabelle 5.14 gebildet.

Tabelle 5.13: Kanten-Knoten-Matrix

	Pkt. 1	Pkt. 2	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5
$m_{s_{1,5}}$	1	0	0	0	-1
$m_{s_{3,5}}$	0	0	1	0	-1
$m_{s_{1,3}}$	1	0	-1	0	0
$m_{s_{1,4}}$	1	0	0	-1	0
$m_{s_{2,4}}$	0	1	0	-1	0
$m_{s_{4,5}}$	0	0	0	1	-1

Tabelle 5.14: Knoten-Knoten-Matrix

	Pkt. 1	Pkt. 2	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5
Pkt. 1	3	0	-1	-1	-1
Pkt. 2	0	1	0	-1	0
Pkt. 3	-1	0	2	0	-1
Pkt. 4	-1	-1	0	3	-1
Pkt. 5	-1	0	-1	-1	3

- Anhand der Knoten-Knoten-Matrix in Tabelle 5.14 ist zu erkennen, daß nur in den Punkten 1, 4 und 5 jeweils drei Kanten auftreten und somit kein Viereck vorliegen kann.
- In den weiteren Suchfenstern kann (ohne Darstellung der Zwischenschritte) ebenfalls kein Viereck gefunden werden.
- Beginnend mit dem ersten Suchfenster wird nun versucht, ähnliche Dreiecke zu lokalisieren. Im ersten Suchfenster kann kein Dreieck gefunden werden. Die Untersuchung des zweiten Suchfensters anhand der Knoten-Knoten-Matrix in Tabelle 5.14 ergibt, daß in den Punkten 1, 3, 4 und 5 mindestens zwei Seiten auftreten. Um zu überprüfen, welche Dreiecke sich mit diesen Punkten bilden lassen, werden alle Kombinationen gebildet und die dazugehörigen Knoten-Knoten-Matrizen in Tabelle 5.15 untersucht.

Tabelle 5.15: Knoten-Knoten-Matrizen für die Suche nach Dreiecken

	Pkt. 1	Pkt. 3	Pkt. 4
Pkt. 1	3	-1	-1
Pkt. 3	-1	2	0
Pkt. 4	-1	0	3

	Pkt. 1	Pkt. 3	Pkt. 5
Pkt. 1	3	-1	-1
Pkt. 3	-1	2	-1
Pkt. 5	-1	-1	3

	Pkt. 1	Pkt. 4	Pkt. 5
Pkt. 1	3	-1	-1
Pkt. 4	-1	3	-1
Pkt. 5	-1	-1	3

	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5
Pkt. 3	2	0	-1
Pkt. 4	0	3	-1
Pkt. 5	-1	-1	3

- Nur bei den Punktkombinationen 1/3/5 und 1/4/5 weisen alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen den Wert -1 auf, so daß diese jeweils ein Dreieck bilden, daß als Kandidat für eine kongruente Punktgruppe in Frage kommt.
- Im dritten Suchfenster werden die Dreiecke 1/3/4 und 3/4/5 gefunden, im vierten Suchfenster erneut das Dreieck 1/3/4. Die Untersuchung der weiteren Suchfenster ergibt keine weiteren Dreiecke.
- Nach dieser Voruntersuchung wird nun für jede Kombination eine Transformation gerechnet, in der jeweils die gefundenen Punkte als Stützpunkte verwendet werden. Aus den Berechnungen wird dann diejenige mit den kleinsten normierten Verbesserungen $|w_i| < c$ als endgültige Lösung ausgewählt. In diesem Beispiel ist das die Gruppe 1/3/5.

Vergleicht man den Aufwand, mit dem die kongruente Punktgruppe gefunden wurde, so sind zunächst die Untersuchungen der Topologie in den jeweiligen Maßstabsfenstern zu nennen. Im Anschluß daran sind in diesem Beispiel 4 Koordinatentransformationen durchzuführen, in denen jeweils die Punkte 1/3/5, 1/4/5, 1/3/4 und 3/4/5 als Stützpunkte verwendet werden. Dem gegenüber stehen 15 Ausgleichungen, wenn man alle möglichen Kombinationen berechnen würde (siehe Abschnitt 5.2.2). Allgemein ist zu erwarten, daß die Untersuchung von Netzen, bei denen ein Maßstabsunterschied besteht, aufwendiger ist, als der in Abschnitt 5.2.2 beschriebene Fall. Dies liegt darin begründet, daß der Maßstab unbekannt ist und somit mehrere Suchfenster aufgebaut werden müssen. Zudem sind diese Suchfenster aufgrund der näherungsweisen Fehlerabschätzung für den Maßstab unter Umständen sehr breit, wodurch mehr Kandidaten für kongruente Gruppen gefunden werden als tatsächlich vorhanden sind. Dennoch führt die Voruntersuchung auch in diesem Fall zu einer erheblichen Reduzierung des Rechenaufwandes, so daß die kombinatorische Suche nach der maximalen Gruppe stabiler Punkte auch in größeren Netzen praktikabel ist.

5.2.4 Vergleich mehrerer Messepochen

Liegen mehr als zwei Messepochen vor, so besteht die Aufgabe, eine Aussage zu treffen, welche Punkte über den gesamten Untersuchungszeitraum als stabil eingestuft werden können. Dies kann mit Hilfe eines kumulativen Mehrepochenvergleichs oder durch einen mehrfachen Vergleich mit einer Referenzmessung (z.B. der Null-epoche) erfolgen. In beiden Fällen kann die MSS-Methode angewendet werden, wobei sich (analog zum Zweiepochenvergleich) eine Voruntersuchung mit metrischen oder nichtmetrischen Kriterien anbietet. Das Ergebnis dieser Voruntersuchung kann wieder mit Hilfe von Topologiematrizen weiterverarbeitet werden, um Kandidaten für eine kongruente Punktgruppe zu finden.

5.2.4.1 Kumulativer Mehrepochenvergleich

Sind keine Maßstabsunterschiede zwischen den Netzen der zu untersuchenden Epochen zu befürchten, so kann eine Voruntersuchung mit metrischen Kriterien (Abschnitt 5.2.1) durchgeführt werden. Hat ein Globaltest, der alle zu untersuchenden k Epochen umfaßt, das Vorliegen signifikanter Punktverschiebungen angezeigt, so besteht als erstes die Aufgabe zu klären, ab welcher Epoche diese Verschiebungen aufgetreten sind. Diese Untersuchung wird als „zeitliche Lokalisierung“ bezeichnet und ist ausführlich in (NIEMEIER 1979) beschrieben. Die Methoden zur zeitlichen Lokalisierung mit Hilfe statistischer Tests können als ausreichend angesehen werden, wobei aber auch an dieser Stelle auf die Anwendung eines „umgekehrten statistischen Tests“ (siehe Abschnitt 4.1.3) hingewiesen sei. Der nächste Auswerteschritt besteht dann darin, zu klären, welche Punkte signifikant verschoben sind. Dieser Schritt, der als „geometrische Lokalisierung“ bezeichnet wird, erfolgt z.B. in (NIEMEIER 1979) durch eine sukzessive Einzelpunktuntersuchung. Die Probleme, die sich aus einer derartigen Vorgehensweise ergeben können, wurden bereits in Abschnitt 4.5 dargelegt, so daß sich für die geometrische Lokalisierung wieder die MSS-Methode in Verbindung mit einer Voruntersuchung mit Hilfe von Topologiematrizen anbietet. Dazu sind aus den Epochen, in denen keine Punktverschiebungen aufgetreten sind, durch gemeinsame Ausgleichung aller Meßwerte „mittlere“ Koordinaten zu berechnen, die auch als „kumulierte“ Koordinaten (NIEMEIER 1979) bezeichnet werden. Unter Verwendung dieser Koordinaten können dann alle möglichen Strecken zwischen den Punkten des Netzes berechnet werden. Zudem werden in einer Einzelausgleichung Koordinaten für die Punkte der als verändert eingestuften Epoche berechnet, aus denen ebenfalls alle möglichen Strecken berechnet werden. Für die Voruntersuchung werden dann die Differenzen der Strecken zwischen gleichen Punkten gebildet und Streckenverbindungen, deren Abweichung akzeptiert wurde, werden in eine Kanten-Knoten-Matrix C eingetragen. Damit wird dann die Knoten-Knoten-Matrix \bar{C} gebildet, in der die Suche nach Kandidaten für eine kongruente Punktgruppe analog zum Vergleich von zwei Epochen (Abschnitt 5.2.2) erfolgt.

Sind Maßstabsunterschiede zwischen den Epochen zu befürchten, empfiehlt sich eine Voruntersuchung mit nicht-metrischen Kriterien (Abschnitt 5.2.3). Für die gemeinsame Ausgleichung der Messungen mehrerer Epochen ist ein Transformationsansatz zu wählen, um unterschiedliche Netzmaßstäbe berücksichtigen zu können. Zweckmäßigerweise ist für die Transformation die in Abschnitt 2.2.4 und 2.3.4 beschriebene implizite Formulierung der Transformierbarkeit zu wählen, da man mit einem derartigen Ansatz sofort „mittlere“ Koordinaten im Zielsystem erhält. Treten beim Hinzufügen einer Folgeepoche erstmals unzulässige normierte Verbesserungen mit $|w_i| > c$ auf, so setzt die „geometrische Lokalisierung“, d.h. die Suche nach Kandidaten für eine ähnliche Punktgruppe ein. Dazu sind aus den Epochen, in denen keine Punktverschiebungen aufgetreten sind, „mittlere“ Koordinaten im Zielsystem zu berechnen. Unter Verwendung dieser Koordinaten werden dann alle möglichen Strecken zwischen den Netzpunkten berechnet. Mit Hilfe einer freien Netzausgleichung werden zudem Koordinaten für die Punkte der als verändert eingestuften Epoche berechnet, aus denen dann ebenfalls alle möglichen Strecken berechnet werden. Danach werden die Maßstabsfaktoren der Strecken zwischen gleichen Punkten gebildet und der Größe nach sortiert. Nachdem die Größe des Suchfensters, mit dem in der Liste der sortierten Maßstäbe nach ähnlichen Punktgruppen gesucht werden soll, festgelegt wurde, erfolgt die weitere Auswertung wieder analog zu dem Vergleich von zwei Epochen.

5.2.4.2 Mehrfacher Vergleich mit einer Referenzepoche

Für den mehrfachen Vergleich mit einer Referenzepoche stehen zwei Möglichkeiten zur Auswahl. Liegen z.B. $k = 4$ zu untersuchende Epochen vor, so kann man die erste Messung (Nullepoche) als Referenz ansehen und einen Vergleich der Epochen 1 - 2, 1 - 3 und 1 - 4 durchführen. Man kann den Vergleich aber auch als Untersuchung aufeinanderfolgender Epochen 1 - 2, 2 - 3 und 3 - 4 durchführen. Als Referenzepoche dient dann die jeweils vorangegangene Epoche. In beiden Fällen sind als Voruntersuchung $k - 1$ Zweiepochenvergleiche gemäß Abschnitt 5.2.1 bis 5.2.3 durchzuführen. Als Ergebnis liegen dann die Punkte vor, die zwischen den jeweiligen Vergleichsepochen als Kandidaten für eine stabile Gruppe in Frage kommen. Die Streckenverbindungen zwischen diesen Punkten werden jeweils in eine Kanten-Knoten-Matrix eingetragen, aus denen sich die Knoten-Knoten-Matrizen $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_{k-1}$ berechnen lassen. Um eine Aussage über Punkte zu erhalten, die über den

gesamten Vergleichszeitraum als stabile Gruppe gelten können, sind die Informationen der einzelnen Knoten-Knoten-Matrizen in einer Matrix \overline{C}_{gesamt} zusammenzufassen. Die Elemente dieser Matrix ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\overline{C}_{gesamt_{ii}} &= \text{Kleinsten Wert aus den Diagonalelementen } \overline{C}_{1_{ii}}, \overline{C}_{2_{ii}}, \dots, \overline{C}_{(k-1)_{ii}}, \\ \overline{C}_{gesamt_{ij}} &= -1, \text{ wenn alle entsprechenden Elemente } \overline{C}_{1_{ij}}, \overline{C}_{2_{ij}}, \dots, \overline{C}_{(k-1)_{ij}} \text{ mit dem Wert } -1 \text{ belegt sind,} \\ \overline{C}_{gesamt_{ij}} &= 0, \text{ wenn nicht alle entsprechenden Elemente } \overline{C}_{1_{ij}}, \overline{C}_{2_{ij}}, \dots, \overline{C}_{(k-1)_{ij}} \text{ mit } -1 \text{ belegt sind.}\end{aligned}$$

Durch eine Auswertung der Matrix \overline{C}_{gesamt} gemäß Abschnitt 5.2.2 erhält man eine Aussage über die größtmögliche Punktgruppe, die über den gesamten Untersuchungszeitraum als stabile Gruppe in Frage kommt. Diese Punkte können dann als stabile Punkte in eine gemeinsame Ausgleichung (mit impliziter Formulierung der Kongruenz) aller vorliegenden Meßepochen eingeführt werden. Ein Globaltest, der dann alle k Epochen gleichzeitig einbezieht, gibt Aufschluß darüber, ob die gefundenen Punkte tatsächlich bereits eine kongruente Gruppe bilden. Verwendet man für die gemeinsame Ausgleichung einen Transformationsansatz, so kann diese Beurteilung anhand der normierten Verbesserungen der Beobachtungen erfolgen. Hat sich die Kongruenz der ausgewählten Punktgruppe nicht bestätigt, so sind die nächstkleineren Punktgruppen mit Hilfe der Matrix \overline{C}_{gesamt} zu bilden und zu untersuchen.

Um die Vorgehensweise beim mehrfachen Vergleich mit einer Referenzepeche zu veranschaulichen, dient das folgende Beispiel, bei dem $k = 4$ Epochen vorliegen, die jeweils mit der ersten Epoche verglichen werden. Der Vergleich der Epochen 1 - 2 hat ergeben, daß die in Abbildung 5.3 in dickerer Strichstärke dargestellten Streckendifferenzen akzeptiert werden konnten. Trägt man diese Information in eine Kanten-Knoten-Matrix ein, so kann man daraus die in Tabelle 5.16 dargestellte Knoten-Knoten-Matrix \overline{C}_1 berechnen.

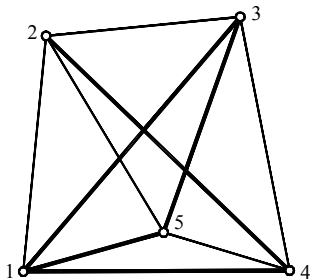


Abbildung 5.3: Vergleich der Epochen 1 - 2. Strecken, deren Abweichung akzeptiert wurde, sind in dickerer Strichstärke dargestellt.

Tabelle 5.16: Knoten-Knoten-Matrix \overline{C}_1

	Pkt. 1	Pkt. 2	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5
Pkt. 1	3	0	-1	-1	-1
Pkt. 2	0	1	0	-1	0
Pkt. 3	-1	0	2	0	-1
Pkt. 4	-1	-1	0	2	0
Pkt. 5	-1	0	-1	0	2

Das Ergebnis des Epochenvergleichs 1 - 3 ist in Abbildung 5.4 und Tabelle 5.17 aufgeführt.

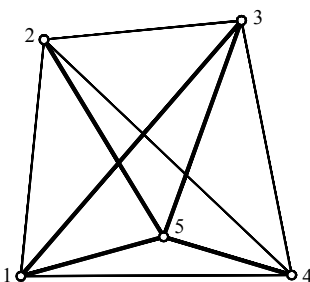


Abbildung 5.4: Vergleich der Epochen 1 - 3

Tabelle 5.17: Knoten-Knoten-Matrix \overline{C}_2

	Pkt. 1	Pkt. 2	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5
Pkt. 1	2	0	-1	0	-1
Pkt. 2	0	1	0	0	-1
Pkt. 3	-1	0	2	0	-1
Pkt. 4	0	0	0	1	-1
Pkt. 5	-1	-1	-1	-1	4

Der Vergleich der Epochen 1 - 4 ist in Abbildung 5.5 graphisch dargestellt, die zugehörige Knoten-Knoten-Matrix ist in Tabelle 5.18 aufgeführt.

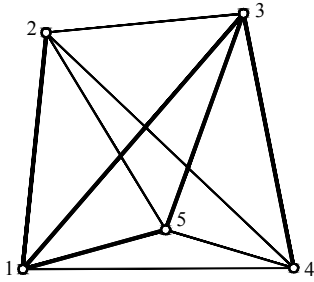


Abbildung 5.5: Vergleich der Epochen 1 - 4

Tabelle 5.18: Knoten-Knoten-Matrix \bar{C}_3

	Pkt. 1	Pkt. 2	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5
Pkt. 1	3	-1	-1	0	-1
Pkt. 2	-1	1	0	0	0
Pkt. 3	-1	0	3	-1	-1
Pkt. 4	0	0	-1	1	0
Pkt. 5	-1	0	-1	0	2

Die Informationen aus den Knoten-Knoten-Matrizen \bar{C}_1 , \bar{C}_2 und \bar{C}_3 werden nun gemäß der oben aufgeführten Bildungsvorschrift in der Knoten-Knoten-Matrix \bar{C}_{gesamt} zusammengefaßt, die sich dann wie in Tabelle 5.19 aufgeführt ergibt. Streicht man in dieser Matrix die Zeilen und Spalten, deren Elemente ausschließlich den Wert $\bar{C}_{gesamt_{ij}} = 0$ enthalten, so erhält man das in Tabelle 5.20 aufgeführte Endergebnis.

Tabelle 5.19: Knoten-Knoten-Matrix \bar{C}_{gesamt}

	Pkt. 1	Pkt. 2	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5
Pkt. 1	2	0	-1	0	-1
Pkt. 2	0	1	0	0	0
Pkt. 3	-1	0	2	0	-1
Pkt. 4	0	0	0	1	0
Pkt. 5	-1	0	-1	0	2

Tabelle 5.20: Knoten-Knoten-Matrix \bar{C}_{gesamt}

	Pkt. 1	Pkt. 3	Pkt. 5
Pkt. 1	2	-1	-1
Pkt. 3	-1	2	-1
Pkt. 5	-1	-1	2

In Tabelle 5.20 ist zu erkennen, daß drei Diagonalelemente mit dem Wert 2 belegt sind, so daß ein Dreieck vorliegen kann. Da alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonale mit dem Wert -1 belegt sind, bestehen zwischen den Punkten 1, 3 und 5 alle Streckenverbindungen, so daß tatsächlich ein Dreieck als Kandidat für eine kongruente Punktgruppe vorliegt. Führt man diese Punkte als stabile Punkte in eine gemeinsame Ausgleichung aller vorliegenden Epochen ein, so kann anhand eines Globaltests oder der Interpretation der normierten Verbesserungen der Beobachtungen entschieden werden, ob das Dreieck 1/3/5 tatsächlich eine stabile Gruppe bildet.

5.2.5 Numerisches Beispiel

Als numerisches Beispiel wird wieder das in Abbildung 4.5 dargestellte Streckennetz mit den in Tabelle 4.3 und 4.4 aufgeführten Streckenmessungen verwendet. Eine Unterteilung in Stütz- und Objektpunkt ist nicht gegeben, ein Maßstabsunterschied zwischen den Epochen ist nicht vorhanden. Dieses Beispiel ist so konzipiert, daß die Punkte 7, 8 und 9 eine kongruente Gruppe bilden. Bei der Einzelpunktanalyse in den Abschnitten 4.3.6 und 4.4.2 wurde der Punkt 9 fälschlicherweise als verschoben identifiziert. Nun soll versucht werden, die kongruente Punktgruppe mit Hilfe des MSS-Verfahrens zu identifizieren.

Zunächst werden beide Epochen unter Verwendung der in Tabelle 4.2 aufgeführten Näherungskordinaten jeweils einer freien Netzausgleichung unterzogen. Aus den ausgeglichenen Koordinaten werden dann in jeder Epoche mit (5.3) jeweils alle möglichen Strecken und die dazugehörige Kofaktorenmatrix berechnet. Da kein Maßstabsunterschied zwischen den zu untersuchenden Epochen zu befürchten ist, kann eine Voruntersuchung mit metrischen Kriterien gemäß Abschnitt 5.2.1 durchgeführt werden. Dazu werden aus den Strecken in Epoche 1 und 2 die Differenzen

$$dl_{i,j} = (l_{i,j})_2 - (l_{i,j})_1$$

berechnet, deren Werte in Tabelle 5.21 aufgeführt sind.

Tabelle 5.21: Streckendifferenzen zwischen Epoche 1 und 2

dl_{ij} [m]	$j = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
$i = 1$	-0.429	0.055	-1.230	-0.944	-0.635	-1.096	-0.955	2.906	<u>-0.018</u>
2		0.095	-2.891	-1.841	-0.937	-2.475	-2.673	-3.291	-0.902
3			1.667	1.362	1.158	2.558	3.023	2.317	0.444
4				-0.281	-0.594	-0.903	-0.501	-2.405	-1.265
5					-0.309	-0.625	-0.356	-1.611	-0.975
6						-0.340	-0.294	-0.466	-0.664
7							<u>-0.003</u>	<u>0.007</u>	-0.604
8								<u>-0.001</u>	-1.894
9									3.178

Diese Streckendifferenzen gilt es nun zu beurteilen, was anhand von Erfahrungswerten gemäß Abschnitt 5.2.1.1 erfolgen kann. Bei einer Meßgenauigkeit von 1 cm a priori, die sich mit 1.1 cm aus der Ausgleichung bestätigt hat (siehe Abschnitt 4.3.6) und einem Faktor von $T = 3$ ergibt sich aus (5.5) ein Grenzwert von 3 cm. Somit sind lediglich die in Tabelle 5.21 unterstrichenen Abweichungen akzeptabel.

Des weiteren besteht die Möglichkeit, den Quotienten $|dl_{i,j}|/m_{dl_{i,j}}$ zu bilden und das „Signal-Rausch-Verhältnis“ gemäß Abschnitt 5.2.1.2 zu beurteilen. Daraus ergibt sich, daß die in Tabelle 5.22 unterstrichenen Werte akzeptabel sind (vgl. Tabelle 5.21).

Tabelle 5.22: Testgrößen für die Beurteilung der Streckendifferenzen

$ dl_{i,j} /m_{dl_{i,j}}$	$j = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
$i = 1$	42.41	5.29	155.69	117.89	78.72	120.48	112.35	260.73	<u>2.22</u>
2		9.76	224.45	146.99	79.65	245.27	297.48	298.41	92.19
3			126.65	107.17	99.52	248.39	267.18	273.13	43.70
4				36.78	75.76	114.15	60.55	259.42	159.52
5					39.04	77.91	42.67	174.80	121.25
6						42.04	35.12	50.60	81.94
7							<u>0.35</u>	<u>0.62</u>	73.76
8								<u>0.05</u>	193.34
9									273.67

Daneben besteht auch die Möglichkeit, den Quotienten mit einem multiplen t -Test zu beurteilen. Dazu ist zunächst die reduzierte Sicherheitswahrscheinlichkeit $\bar{\alpha}$ zu bestimmen. Setzt man für die Untersuchung des Gesamtnetzes eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ an, so ergibt sich die reduzierte Irrtumswahrscheinlichkeit gemäß (5.16) zu

$$\bar{\alpha} = \frac{5\%}{17} = 0.3\% \quad .$$

Ermittelt man damit den Grenzwert \bar{t} , wobei zu beachten ist, daß es sich um eine zweiseitige Fragestellung handelt, so erhält man

$$\bar{t} = t_{f, 1-\bar{\alpha}/2} = t_{56, 0.85} = 3.11$$

und man erkennt, daß lediglich für die in Tabelle 5.22 bereits unterstrichenen Werte die Nullhypothese (5.8) nicht verworfen werden kann.

Die Information über die zunächst als unverändert angenommenen Strecken aus Tabelle 5.21 bzw. 5.22 werden nun mit Hilfe von Topologiematrizen gemäß Abschnitt 5.2.2 weiterverarbeitet. Dazu werden die Strecken, deren Differenz akzeptiert wurde, mit den Werten „1“ und „-1“, die übrigen mit dem Wert „0“ in eine Kanten-Knoten-Matrix C eingetragen. Diese ergibt sich dann wie in Tabelle 5.23 dargestellt.

Tabelle 5.23: Kanten-Knoten-Matrix für die als unverändert angenommenen Strecken

	Pkt. 1	Pkt. 2	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5	Pkt. 6	Pkt. 7	Pkt. 8	Pkt. 9	Pkt. 10
$s_{1,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$s_{1,10}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
$s_{2,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$s_{7,8}$	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
$s_{7,9}$	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0
$s_{7,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_{8,9}$	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
$s_{8,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$s_{9,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Bildet man damit die Knoten-Knoten-Matrix \bar{C} , so ergibt sich diese wie in Tabelle 5.24 dargestellt.

Tabelle 5.24: Knoten-Knoten-Matrix auf Grundlage der als unverändert angenommenen Strecken

	Pkt. 1	Pkt. 2	Pkt. 3	Pkt. 4	Pkt. 5	Pkt. 6	Pkt. 7	Pkt. 8	Pkt. 9	Pkt. 10
Pkt. 1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
Pkt. 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Pkt. 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Pkt. 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Pkt. 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Pkt. 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Pkt. 7	0	0	0	0	0	0	2	-1	-1	0
Pkt. 8	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1	0
Pkt. 9	0	0	0	0	0	0	-1	-1	2	0
Pkt. 10	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Daraus ist sofort ersichtlich, daß die Punkte 7, 8, 9 ein kongruentes Dreieck bilden können, da auf der Hauptdiagonalen der Wert „2“ steht und die übrigen Elemente mit dem Wert „-1“ belegt sind. Eine weitere kombinatorische Suche ist in diesem Beispiel nicht erforderlich. Um die Kongruenz dieses Teilnetzes zu testen, wird der Wert R_f berechnet. Mit den dazu erforderlichen Werten

$$d_{\text{ll}} = \begin{bmatrix} -0.0029 \\ 0.0007 \\ -0.0006 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_{\text{dl}} = \begin{bmatrix} 0.5770 & -0.1762 & 0.1293 \\ -0.1762 & 1.0087 & 0.1746 \\ 0.1293 & 0.1746 & 1.1686 \end{bmatrix}$$

erhält man aus (4.24) den Wert $R_f = 5.5680\text{E}-05$. Mit $h_f = 3$ ergibt sich das Quadrat der mittleren Klaffung (4.25) zu

$$\theta_F^2 = 5.5680\text{E}-05 / 3 = 1.8560\text{E}-05 \quad .$$

Mit der empirischen Einheitsvarianz $s_0^2 = 1.2519\text{E}-04$ (siehe Abschnitt 4.3.6) kann man die Testgröße

$$T_F = \frac{1.8560\text{E}-05}{1.2519\text{E}-04} = 0.148$$

aufstellen und mit dem Grenzwert der FISHER-Verteilung vergleichen. Mit den Freiheitsgraden $h_f = 3$ und $f = 56$ und einer angenommenen Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ ergibt sich für $F_{h_f, f, 1-\alpha} = 2.77$. Mit $0.148 < 2.77$ kann somit die Nullhypothese der Kongruenz für diese Punktgruppe nicht verworfen werden. Führt man den umgekehrten statistischen Test gemäß Abschnitt 4.1.3 durch, so erhält man mit $\alpha_{\text{max}} = 93\%$ die Irrtumswahrscheinlichkeit, bei der die Nullhypothese gerade noch angenommen werden kann. Mit anderen Worten: Schon bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $P_{\text{min}} = 1 - \alpha_{\text{max}} = 7\%$ kann die Nullhypothese der Kongruenz in diesem Beispiel angenommen werden.

Nachdem die erste kongruente Punktgruppe gefunden wurde, soll nun nach weiteren Gruppen gesucht werden. Dazu werden in Tabelle 5.24 die Zeilen und Spalten der gefundenen Punkte und alle Zeilen und Spalten, die ausschließlich den Wert null enthalten, gestrichen und man erhält die Knoten-Knoten-Matrix in Tabelle 5.25.

Tabelle 5.25: Knoten-Knoten-Matrix

	Pkt. 1	Pkt. 10
Pkt. 1	1	-1
Pkt. 10	-1	1

Es ist zu erkennen, daß es sich hierbei um die Strecke zwischen Punkt 1 und 10 handelt, die auf Kongruenz überprüft werden kann. Mit den Werten

$$\mathbf{dl} = [-0.0179] \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{dl}} = [0.5214]$$

erhält man aus (4.24) den Wert $R_F = 6.1481\text{E}-04$. Mit $h_F = 1$ ergibt sich das Quadrat der mittleren Klaffung (4.25) zu

$$\theta_F^2 = 6.1481\text{E}-04 / 1 = 6.1481\text{E}-04 \quad .$$

Mit der empirischen Einheitsvarianz $s_0^2 = 1.2519\text{E}-04$ kann man die Testgröße

$$T_F = \frac{6,1481\text{E}-04}{1.2519\text{E}-04} = 4.911$$

aufstellen. Mit den Freiheitsgraden $h_F = 1$, $f = 56$ und einer angenommenen Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ ergibt sich für $F_{h_F, f, 1-\alpha} = 4.01$. Mit $4.91 > 4.01$ kann die Nullhypothese der Kongruenz für diese Punktgruppe nicht angenommen werden. Führt man den umgekehrten statistischen Test gemäß Abschnitt 4.1.3 durch, so erhält man mit $\alpha_{\max} = 3\%$ die Irrtumswahrscheinlichkeit, bei der die Nullhypothese noch angenommen werden könnte. Erst bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $P_{\min} = 1 - \alpha_{\max} = 97\%$ könnte also die Nullhypothese der Kongruenz angenommen werden. Da man aber stets bemüht sein sollte, den Wert für die Irrtumswahrscheinlichkeit nicht zu klein zu wählen, um die Gefahr, einen Fehler zweiter Art zu begehen, zu reduzieren (siehe Abschnitt 4.1.3), ist es nicht sinnvoll, für dieses Netz den Wert α auf 3% herabzusetzen. Im Gegenteil kann man bei diesem Netz aufgrund des umgekehrten statistischen Tests für die Punktgruppe 7, 8, 9 überlegen, ob man anstelle des üblicherweise verwendeten Wertes von $\alpha = 5\%$ einen größeren Wert für die Irrtumswahrscheinlichkeit bei der Untersuchung weiterer Epochen verwendet.

Abschließend läßt sich feststellen, daß in diesem Beispiel, in dem die sukzessive Einzelpunktanalyse sowohl mit metrischen (siehe Abschnitt 4.3.6), als auch mit nichtmetrischen Kriterien (siehe Abschnitt 4.4.2) versagt hat, die kongruente Punktgruppe 7, 8, 9 mit Hilfe der MSS-Methode gefunden werden konnte. Die Voruntersuchung mit Hilfe von Topologiematrizen hat dabei zu einer erheblichen Verringerung des Rechenaufwandes beigetragen. Hätte man tatsächlich alle Kombinationen gebildet, so wären in diesem Beispiel bis zu

$$K = \binom{10}{9} + \binom{10}{8} + \dots + \binom{10}{3} = 967$$

Untersuchungsschritte erforderlich gewesen.⁶⁰ Im Anschluß an die erfolgreiche Lokalisierung kann nun die endgültige Ausgleichung mit einem der Transformationsansätze aus Abschnitt 2.2.3 oder 2.2.4 erfolgen. Die Datumsdefinition und die Formulierung der Transformierbarkeit erfolgt dabei über die Punkte 7, 8 und 9.

⁶⁰ In diesem Beispiel hat sich sogar der „Idealfall“ der kombinatorischen Suche ergeben. Aufgrund der Voruntersuchungen wurden die „unmöglichen“ Kombinationen schon soweit eliminiert, daß die verbliebene Kombination direkt die Lösung darstellt.

5.3 Beurteilung des Verfahrens

Mit der Methode der maximalen Untergruppe (MSS) konnte eine Strategie entwickelt werden, mit der es auf der Grundlage einer kombinatorischen Suche möglich ist, die maximale Untergruppe konsistenter Daten sicher zu identifizieren. Die Vorteile gegenüber den bestehenden Methoden liegen darin, daß der Anteil inkonsistenter Daten wesentlich höher sein kann, als bei der Anwendung resistenter und robuster Verfahren, die einen maximalen Bruchpunkt von 50% aufweisen. Bei der MSS-Methode besteht diese Einschränkung nicht, hierbei kann der Anteil bis zu $((n-m)/n) \cdot 100$ [%] (mit n = Anzahl der Beobachtungen und m = Anzahl der Unbekannten) betragen. Zudem ist diese Methode aufgrund der kombinatorischen Suche von den Verschmierungseffekten und der Problematik der Hebelpunkte befreit. Weiterhin können die bekannten statistischen Testverfahren direkt angewendet werden, wobei auf die Anwendung des „umgekehrten statistischen Tests“ (siehe Abschnitt 4.1.3) hingewiesen sei, so daß für das Endergebnis eine exakte Aussage über die Irrtumswahrscheinlichkeit möglich ist. In Bezug auf die praktische Anwendung ist zu erwähnen, daß sich die kombinatorische Suche problemlos in bereits bestehende Software für die Ausgleichung nach kleinsten Quadraten integrieren läßt. Das Endergebnis der kombinatorischen Suche kann dann direkt als endgültige Parameterschätzung verwendet werden.

Wird die MSS-Methode bei der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze eingesetzt, so wird es möglich, jede kongruente Punktgruppe, unabhängig von der Größe und der Lage, zu identifizieren. Für die lokalisierte Punktgruppe ist eine exakte Aussage über die Irrtumswahrscheinlichkeit möglich, da keine statistischen Tests aneinandergereiht werden.⁶¹ Der Behauptung in (CASPARY und BORUTTA 1986), daß der Mangel der üblichen Vorgehensweise (Einzelpunktanalyse auf Grundlage einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten) „nur durch den Übergang auf andere (Anm.: robuste) Schätzverfahren, die der Natur der Aufgabenstellung besser angepaßt sind“ beseitigt werden kann, kann aufgrund der Untersuchungen in diesem Kapitel widersprochen werden. In dem untersuchten numerischen Beispiel, bei dem die sukzessive Einzelpunktanalyse versagt, sind 7 von 10 Punkten verschoben, was einem Anteil inkonsistenter Daten von 70% entspricht. In diesem Fall hätte auch die Anwendung eines resistenten Schätzverfahrens nicht zum Erfolg geführt. Erst durch die Abkehr vom Prinzip der sukzessiven Untersuchung und dem Einsatz einer kombinatorischen Suche erhält man eine Strategie, die der Natur der Aufgabenstellung tatsächlich entspricht.

Um das Ergebnis der kombinatorischen Suche auch bei umfangreicheren Ausgleichungsproblemen in akzeptabler Rechenzeit zu erhalten, sollten „unmögliche“ Kombinationen von vornherein aus der Untersuchung ausgeschlossen werden. Für den Fall der Kongruenzuntersuchung wurde dafür eine spezielle Strategie entwickelt, die den Untersuchungsaufwand erheblich verringert.

Unter Verwendung einer speziellen Strategie für den Ausschluß unmöglicher Kombinationen oder einer zufallsbasierten Auswahl (siehe Abschnitt 5.1.3), kann aus der Grundidee der kombinatorischen Suche, auch für jede andere Aufgabenstellung ein praktikables Verfahren entwickelt werden.

⁶¹ Die Aneinanderreihung mehrerer statistischer Tests bei der sukzessiven Elimination verschobener Punkte ist ein Kritikpunkt, den (CASPARY und BORUTTA 1986) angeführt haben.

6 Schlußbetrachtung

Bei vielen geodätischen Aufgabenstellungen liegen oftmals Daten vor, die mit groben Fehlern behaftet sind oder für die das angesetzte funktionale Modell zum Teil nicht zutreffend ist. Das Konzept für die Datenanalyse besteht dann darin, aus der Gesamtmenge aller Daten die maximale Untergruppe konsistenter Daten herauszufinden, die dann, evtl. nach einer Vervollständigung des mathematischen Modells, in einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zu akzeptablen Residuen führt.

Der erste Schritt der Datenanalyse besteht darin, einen Nachweis zu erbringen, daß die Eingangsdaten mit inkonsistenten Werten behaftet sind. Dafür bietet die bestehende Literatur mehrere Möglichkeiten, z.B. Interpretation der normierten Verbesserungen oder Anwendung statistischer Tests, die als ausreichend angesehen werden können.

Der zweite Schritt, die maximale Untergruppe konsistenter Daten zu lokalisieren, gestaltet sich wesentlich schwieriger. Die Methoden in der bestehenden Literatur, diese Untergruppe zu finden, sind vielfältig und reichen vom „data snooping“ nach einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten, bis hin zu einer Vielzahl von robusten und resistenten Schätzverfahren. In dieser Arbeit soll nicht bestritten werden, daß diese Methoden unter Umständen zum Erfolg führen können, Untersuchungen anderer Autoren haben aber bereits auf die Grenzen und Probleme beim Einsatz resistenter und robuster Verfahren hingewiesen.

Im Hinblick auf die Diskussion bestehender und der Entwicklung neuer Methoden am Beispiel der Kongruenzuntersuchung wird zunächst dargestellt, wie sich aus relativen Messungen mit Hilfe einer freien Netzausgleichung Koordinaten erzeugen lassen. Es wird gezeigt, daß bei einer Ausgleichung mit Gesamtpurminimierung alle Punkte gleichberechtigt an der Festlegung einer „Nullvarianz-Rechenbasis“ teilnehmen. Zudem wird geklärt, daß es sich bei den Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung nicht um schätzbare Größen für das ursprüngliche Ausgleichungsproblem handelt. Erst nachdem man das Modell per Definition um eine Datumsfestlegung erweitert, können sie als schätzbare Größen innerhalb dieses neuen Modells aufgefaßt werden.

Die Weiterverarbeitung von Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung in einer ebenen oder räumlichen Koordinatentransformation ist nicht ohne weiteres möglich, da deren Kofaktorenmatrizen singulär sind. Vereinzelt sind in der Literatur bereits Lösungsvorschläge für die Verarbeitung singulärer Kofaktorenmatrizen zu finden (z.B. Verwendung von verallgemeinerten Inversen, Analyse der durch das Modell belegten Vektorräume), diese erscheinen aber, aufgrund ihrer geringen Anschaulichkeit, wenig praktikabel. Daher wird ein neues Konzept, das auf der Verwendung (fiktiver) Beobachtungen in Verbindung mit einer Datumsfestlegung beruht, entwickelt. Damit gelingt es auf unmittelbar einsichtige Weise, den stochastischen Anteil der singulären Kofaktorenmatrizen zu extrahieren, so daß deren Weiterverarbeitung in einem Transformationsansatz problemlos möglich ist. Zudem wird gezeigt, daß sich die Parameter Translation und Rotation durch eine implizite Formulierung der Transformierbarkeit aus dem Parametersatz entfernen lassen. Damit wird eine Transformation ohne Bereitstellung von Näherungswerten für diese Größen möglich. Bemerkenswert ist, daß sich die Parameter Translation und Rotation nach der Ausgleichung exakt rekonstruieren lassen.

Nach diesen Untersuchungen zur Modellbildung werden verschiedene Möglichkeiten der Parameterschätzung dargestellt, wobei insbesondere auf die Schwierigkeiten bei der Erkennung grober Fehler bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate hingewiesen wird. Sind in den Eingangsdaten mehrere Beobachtungen enthalten, die grob falsch sind oder solche, für die das angesetzte funktionale Modell unvollständig ist, kommen oftmals resistente oder robuste Schätzverfahren zum Einsatz. Probleme bei der numerischen Lösung werden anhand der L_1 -Norm-Schätzung aufgezeigt. Bei dem in der Literatur oftmals vorgeschlagenen Verfahren der „Iteration nach Gewichten“ wird gezeigt, daß dieses unter Umständen zu falschen Ergebnissen führen kann. Als Alternative für die numerische Lösung wird der Einsatz heuristischer Optimierungsverfahren vorgeschlagen. Bei Ausführungen zur Zuverlässigkeit alternativer Schätzverfahren wird darauf hingewiesen, daß diese auch nicht immer in der Lage sind, grobe Fehler sicher zu lokalisieren.

Danach wird, auf Grundlage der Arbeiten von (PETROVIC 1991, 2002), mit der Ausgleichung nach maximaler Korrelation (MCA) ein alternatives Schätzverfahren, dessen Begründung rein geometrischer Natur ist, detailliert ausgearbeitet, so daß eine Berücksichtigung der stochastischen Eigenschaften der Eingangsgrößen möglich wird. Zudem wird gezeigt, daß die MCA-Lösung aus einer erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten generiert werden kann. Es wird ein kompletter Formelapparat für die Untersuchung unvollständiger Modelle bereitgestellt. Zudem kann diese Ausgleichung in der Form angewendet werden, daß der Korrelationskoeffizient als Maß für die Ähnlichkeit von Formen verwendet wird.

Wie bei vielen Aufgabenstellungen, so erfolgt auch bei der Kongruenzuntersuchung die Beurteilung von Meßgrößen und Ausgleichungsergebnissen mit Hilfe statistischer Testverfahren. Dazu wird insbesondere auf die Schwierigkeit einer sinnvollen Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit hingewiesen und die Anwendung eines „umgekehrten statistischen Tests“ vorgeschlagen, mit dem man einen tieferen Einblick in das zu untersuchende Problem erhalten kann. Im Anschluß daran wird die generelle Methodik der Kongruenzuntersuchung mit dem dazugehörigen Formelapparat kurz dargestellt. Hierbei wird mit Hilfe einer sukzessiven Analyse einzelner Punkte versucht, die maximale Gruppe stabiler Punkte zu identifizieren. Anhand eines numerischen Beispiels wird gezeigt, daß diese Vorgehensweise nicht grundsätzlich in der Lage ist, die stabilen Punkte zu identifizieren.

Daraufhin wird versucht, das gleiche Beispiel mit Hilfe der Ausgleichung nach maximaler Korrelation zu lösen. Wie in der klassischen Vorgehensweise erfolgt auch hier die sukzessive Untersuchung von Einzelpunkten. Diese Vorgehensweise führt aber ebenfalls nicht zu einer korrekten Lösung.

Bei der Beurteilung der untersuchten Verfahren wird herausgestellt, daß die aufgetretenen Probleme nicht in den verwendeten Ausgleichungsmethoden und Testverfahren selbst begründet liegen, sondern vielmehr in der Strategie der sukzessiven Anwendung. Es wird herausgestellt, daß die Lokalisierung einer Untergruppe konsistenter Daten grundsätzlich eine Aufgabe der Kombinatorik ist. Daß die Verfahren der sukzessiven Untersuchung einzelner Elemente nicht in der Lage sind, eine kombinatorische Suche zu simulieren, hat das untersuchte numerische Beispiel gezeigt.

Nachdem sich die Grenzen der bestehenden Verfahren gezeigt haben, wird eine neue Methode entwickelt, mit der es grundsätzlich möglich ist, mit Hilfe einer kombinatorischen Suche die maximale Untergruppe aus der Gesamtheit aller Daten herauszufinden, die in einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten akzeptable Residuen liefert. Diese Methode wird mit dem Namen „MSS - Die Methode der maximalen Untergruppe“ bezeichnet. Da aber eine Untersuchung aller möglichen Kombinationen bei umfangreicheren Ausgleichungsproblemen auch bei heutiger Rechnerleistung nicht realisierbar ist, werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie sich Kombinationen, bei denen von vornherein keine brauchbare Lösung zu erwarten ist, ausschließen lassen.

Diese Grundidee wird für die Kongruenzuntersuchung detailliert ausgearbeitet. Anhand des numerischen Beispiels, bei dem die sukzessive Untersuchung einzelner Punkte versagt hat, wird aufgezeigt, daß es mit der neuen Methode gelingt, die kongruente Punktgruppe zu lokalisieren. Bemerkenswert ist, daß man mit der „MSS-Methode“ auch dann eine Lösung erzielen kann, wenn selbst die robustesten Verfahren mit einem Bruchpunkt von bis zu 50% versagen.

Mit der „MSS-Methode“ steht nun ein plausibles und unmittelbar einsichtiges Verfahren für die Datenanalyse zur Verfügung, daß sich gerade im Hinblick auf die stetig zunehmende Rechnerleistung als echte Alternative zu den bisherigen Auswertestrategien (z.B. „data snooping“, Einsatz robuster Schätzverfahren) anbietet. Die entscheidenden Vorteile sind:

- Der Anteil inkonsistenter Daten an den Gesamtdaten darf wesentlich größer sein, als bei den resistenten und robusten Schätzverfahren.
- Aufgrund der kombinatorischen Suche ist die „MSS-Methode“ von den sog. Verschmierungseffekten und der Hebelpunkt-Problematik befreit.
- Die bekannten statistischen Verfahren können angewendet werden.
- Die kombinatorische Suche kann problemlos in bereits bestehende Auswertesoftware integriert werden.
- Das Endergebnis kann direkt als endgültige Parameterschätzung verwendet werden.

Daß eine kombinatorische Suche erfolgreich sein muß, ist unmittelbar einsichtig. Eine Anwendung dieser Methode war aber bisher aufgrund des unter Umständen enormen Zeitaufwandes nicht denkbar. Daß sich die Anzahl der zu untersuchenden Kombinationen sehr stark einschränken läßt, wurde am Beispiel der Kongruenzuntersuchung gezeigt, so daß aus der Grundidee eine praktikable Methode geworden ist. Somit ist das Endergebnis auch bei umfangreicheren Aufgabenstellungen in akzeptabler Rechenzeit zu erzielen.

Die Untersuchungen auf dem Gebiet der Kongruenzuntersuchung ermutigen dazu, die „MSS-Methode“ auch auf andere geodätische Anwendungen zu übertragen, wie z.B. der Suche nach groben Fehlern oder in der automatischen Formenerkennung.

Literaturverzeichnis

- ANTONOPOULOS, A., NIEMEIER, W. (1983): Formulierung und Test impliziter linearer Hypothesen bei der geodätischen Deformationsanalyse. In: Welsch, W. (Hrsg.), Deformationsanalysen '83, Schriftenreihe Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen, Hochschule der Bundeswehr München, Nr. 9
- BÄHR, H.-G. (1982): Eine verallgemeinerte Lösung für die überbestimmte Koordinatentransformation zwischen ausgeglichenen geodätischen Netzen. Zeitschrift für Vermessungswesen 107, Nr. 5, S. 194-206
- BERBER, S., HEKIMOGLU, S. (2001): What is the Reliability of Robust Estimators in Networks? In: First International Symposium on Robust Statistics and Fuzzy Techniques in Geodesy and GIS. A. Carosio, H. Kutterer (editors), Swiss Federal Institute of Technology Zurich (ETH), Institute of Geodesy and Photogrammetry, IGP-Bericht Nr. 295, S. 61-66
- BOBRICH, J. (1995): Zur Anwendung Heuristischer Verfahren in der Geodäsie. DVW-Hessen-/DVW-Thüringen-Mitteilungen, Heft 1/1995, S. 60 - 68
- BORUTTA, H. (1988): Robuste Schätzverfahren für geodätische Anwendungen. Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr München, Nr. 33
- CAROSIO, A. (1979): Robuste Ausgleichung. Vermessung Photogrammetrie Kulturtechnik 77, Nr. 11, S. 293-297
- CASPARY, W., SCHWINTZER, P. (1980): Mathematische und statistische Methoden zur Aufdeckung kleiner relativer Bewegungen von Punktgruppen in geodätischen Netzen. In: VIII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung, Zürich 1980, S. B 13/1-B13/13
- CASPARY, W. (1983): Zur Singularität von Varianz-Kovarianz-Matrizen. Zeitschrift für Vermessungswesen 108, Nr. 6, S. 209-215
- CASPARY, W., CHEN, Y.Q., KÖNIG, R. (1983): Kongruenzuntersuchungen in Deformationsnetzen durch Minimierung der Summe der Klaffungsbeträge. In: Welsch, W. (Hrsg.), Deformationsanalysen '83, Schriftenreihe Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen, Hochschule der Bundeswehr München, Nr. 9
- CASPARY, W., BORUTTA, H. (1986): Geometrische Deformationsanalyse mit robusten Schätzverfahren. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten 93, Nr. 8-9, S. 315-326
- CASPARY, W. (1988): Fehlerverteilungen, Methode der kleinsten Quadrate und robuste Alternativen. Zeitschrift für Vermessungswesen 113, Nr. 3, S. 123-133
- CASPARY, W. (1996): Anmerkungen zum robusten Schätzen. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten 103, Nr. 7, S. 287-289
- DETREKŐI, A. (1975): Anwendung der mathematisch-statistischen Tests bei der Auswertung der geodätischen Deformationsmessungen. 1. International Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods. Krakow, 22.-24.09.1975. FIG Commission 6 (Ed.): Proceedings, pp. 294-301
- DIN (1998): DIN-Taschenbuch 111, Vermessungswesen, Normen (Bauwesen 12). Herausgeber: DIN Deutsches Institut für Normung e.V. 6. Auflage, Beuth Verlag GmbH, Berlin, Wien, Zürich
- FUCHS, H. (1980): Untersuchungen zur Ausgleichung durch Minimieren der Absolutsumme der Verbesserungen. Dissertation, Technische Universität Graz
- FUCHS, H. (1984): Interactive bundle adjustment with metric and non-metric images including terrestrial observations and conditions. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing XXV, Commission III, pp. 301-309, Rio de Janeiro
- GAUSS, C.F. (1887): Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. Physica-Verlag Würzburg, Neudruck 1964
- GAUSS, C.F. (1900a): Carl Friedrich Gauss Werke Vierter Band, Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen in Commission bei B.G. Teubner in Leipzig, 1900

- GAUSS, C.F. (1900b): Carl Friedrich Gauss Werke Achter Band, Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen in Commission bei B.G. Teubner in Leipzig, 1900
- GRAFAREND, E., SCHAFFRIN, B. (1976): Equivalence of Estimable Quantities and Invariants in Geodetic Networks. *Zeitschrift für Vermessungswesen* 101, Nr. 11, S. 485-491
- GOTTHARDT, E. (1968): Einführung in die Ausgleichsrechnung. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe
- GRÜNDIG, L. (1988): Datenverwaltungskonzepte für typische Aufgaben aus der Ingenieurgeodäsie. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 336, München
- HAMPEL, F. (2001): Robust statistics: a brief introduction and overview. In: First International Symposium on Robust Statistics and Fuzzy Techniques in Geodesy and GIS. A. Carosio, H. Kutterer (editors), Swiss Federal Institute of Technology Zurich (ETH), Institute of Geodesy and Photogrammetry, IGP-Bericht Nr. 295, S. 13-17
- HECK, B., KUNTZ, E., MEIER-HIRMER, B. (1977): Deformationsanalyse mittels relativer Fehlerellipsen. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 84, Nr. 3, S. 78-87
- HEKIMOGLU, S. (2001): Local Reliability of the Least Median of Squares Method. In: First International Symposium on Robust Statistics and Fuzzy Techniques in Geodesy and GIS. A. Carosio, H. Kutterer (editors), Swiss Federal Institute of Technology Zurich (ETH), Institute of Geodesy and Photogrammetry, IGP-Bericht Nr. 295, S. 67-72
- HEKIMOGLU, S., KOCH, K.-R. (1999): How can reliability of the robust methods be measured. *Proceedings of the Third Turkish-German Joint Geodetic Days, Istanbul*, pp. 179-196
- HELMERT, F.R. (1924): Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 3. Auflage, Teubner Verlag, Leipzig
- HRISTOW, W.K. (1961): Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematischen Statistik und Methode der kleinsten Quadrate. VEB Verlag für Bauwesen Berlin
- ILLNER, I. (1985): Datumsfestlegung in freien Netzen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 309, München
- KAMPMANN, G. (1986): Robuster Ausreißertest mit Hilfe der L1-Norm-Methode. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 93, Nr. 4, S. 139-147
- KAMPMANN, G. (1988): Zur Kombinativen Norm-Schätzung mit Hilfe der L1-, der L2- und der Boskovic-Laplace-Methode mit den Mitteln der Linearen Programmierung. *Veröffentlichungen des Geodätischen Instituts der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen*, Nr. 43
- KAMPMANN, G. (1993): Auswertetechniken bei der überbestimmten Koordinatentransformation. *BDVI-FORUM* 3/1993, S. 139-152
- KANANI, E. (2000): Robust Estimators for Geodetic Transformations and GIS. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Mitteilungen Nr. 70
- KEGEL, G. (1987): Zur Lokalisierung grober Datenfehler mit Hilfe robuster Ausgleichungsverfahren. *Vermessungstechnik* 35, Nr. 10, S. 348-350
- KOCH, K.-R. (1978): Hypothesentests bei singulären Ausgleichsproblemen. *Zeitschrift für Vermessungswesen* 103, Nr. 1, S. 1-10
- KOCH, K.-R. (2000): Beispiele zur Parameterschätzung, zur Festlegung von Konfidenzregionen und zur Hypothesenprüfung. *Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn*, Nr. 87
- KOCH, K.-R., FRÖHLICH, H., BRÖKER, G. (2000): Transformation räumlich variabler Koordinaten. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten* 107, Nr. 8-9, S. 293-295
- KRARUP, T., JUHL, J., KUBIK, K. (1980): Götterdämmerung over Least Squares Adjustment. *Proceedings XIV. Congress ISPRS, Hamburg, International Archives of Photogrammetry, XXIII, B3, Commission III*, pp. 369-378
- LENZMANN, L. (2001): Zur Bestimmung der Transformationsparameter nach der Methode der kleinsten Quadrate. *Zeitschrift für Vermessungswesen* 126, Nr. 6, S. 361-365

- LINKWITZ, K. (1960): Über die Systematik verschiedener Formen der Ausgleichsrechnung. Zeitschrift für Vermessungswesen 85, Nr. 5, S. 156-166, Nr. 6, S. 191-204, Nr. 7, S. 243-254
- LINKWITZ, K. (1961): Über den Einfluß verschiedener Gewichtsannahmen auf das Ausgleichsergebnis bei bedingten Beobachtungen. Zeitschrift für Vermessungswesen 86, Nr. 6, S. 1179-166, Nr. 7, S. 239-245, Nr. 9, S. 344-354
- LINKWITZ, K. (1999): About the generalised analysis of network-type entities. In: Krumm, F. und Schwarze, V. (Hrsg.): Quo vadis geodesia ... ? Festschrift for Erik W. Grafarend on the occasion of his 60th birthday. Universität Stuttgart, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Report Nr. 199.6, S. 279-293
- LINNIK, J.W. (1961): Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1961
- MAUTZ, R. (2001): Zur Lösung nichtlinearer Ausgleichsprobleme bei der Bestimmung von Frequenzen in Zeitreihen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 532, München
- MEISSL, P. (1962): Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 50, Nr. 5, S. 159-165, Nr. 6, S. 186-194
- MEISSL, P. (1969): Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehlertheorie eines Punkthaufens. In: Rinner, K., Killian, K., Meissl, P., Beiträge zur Theorie der geodätischen Netze im Raum, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Nr. 61, München
- MITTERMAYER, E. (1972): Zur Ausgleichung freier Netze. Zeitschrift für Vermessungswesen 97, Nr. 11, S. 481-489
- MORGENSTERN, D. (1964): Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg
- NEITZEL, F. (1998): Untersuchungen zur Formenerkennung durch Ausgleichung nach maximaler Korrelation. In: Freeden, W. (Editor), Progress in Geodetic Science at GW 98, Shaker Verlag, Aachen, S. 299-306.
- NIEMEIER, W. (1976): Grundprinzip und Rechenformeln einer strengen Analyse geodätischer Deformationsmessungen. In: VII. Internationaler Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision, Beiträge, Band II. Darmstadt, 29.09.-08.10.1976. Technische Hochschule Darmstadt (Hrsg.), THD Schriftenreihe Wissenschaft und Technik, Darmstadt 1977, S. 465-482
- NIEMEIER, W. (1979): Zur Kongruenz mehrfach beobachteter geodätischer Netze. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 88, Hannover
- NIEMEIER, W. (1985): Deformationsanalyse. In: Pelzer (Hrsg.), Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, S. 559-623
- NIEMEIER, W. (2002): Ausgleichsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin, New York 2002
- NKUIE, G. (1998): Ausgleichung mit singulärer Varianzkovarianzmatrix am Beispiel der geometrischen Deformationsanalyse. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 501, München
- PELZER, H. (1971): Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 164, München
- PELZER, H. (1974): Zur Behandlung singulärer Ausgleichsaufgaben I und II. Zeitschrift für Vermessungswesen 99, Nr. 5, S. 181-194 und Nr. 11, S. 479-488
- PELZER, H. (1976): Über die statistischen Eigenschaften der Ergebnisse von Deformationsmessungen. In: VII. Internationaler Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision, Beiträge, Band II. Darmstadt, 29.09.-08.10.1976. Technische Hochschule Darmstadt (Hrsg.), THD Schriftenreihe Wissenschaft und Technik, Darmstadt 1977, S. 483-498
- PETROVIC, S. (1991): Geometry of the Correlation Coefficient and its Application in Geodesy. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 71
- PETROVIC, S. (1993): Maximal correlation adjustment in physical geodesy. In: H. Montag and Ch. Reigber (editors): Geodesy and Physics of the Earth, International Association of Geodesy, Symposium No. 112, Springer-Verlag, 1993, pp. 242-245

- PETROVIC, S. (1997): Maximum Correlation Adjustment and incomplete Models. Proceedings of the Second Turkish-German Joint Geodetic Days, Berlin, S. 687-694
- PETROVIC, S. (2002): Parameterschätzung für unvollständige funktionale Modelle in der Geodäsie. Habilitationsschrift, vorgelegt bei der Fakultät für Bauingenieurwesen und Angewandte Geowissenschaften, Technische Universität Berlin
- REINKING, J. (1994): Geodätische Analyse inhomogener Deformationen mit nichtlinearen Transformationsfunktionen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 413, München
- ROUSSEEUW, P.J. (1984): Least Median of Squares Regression. Journal of the American Statistical Association, Volume 79, Number 388, pp. 871-880
- ROUSSEEUW, P.J., LEROY, A.M. (1987): Robust regression and outlier detection. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore
- SCHAFFRIN, B. (1975): Zur Verzerrtheit von Ausgleichungsergebnissen. Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn, Nr. 39
- SCHLOSSMACHER, E.J. (1973): An Iterative Technique for Absolute Deviations Curve Fitting. Journal of the American Statistical Association, Volume 68, Number 344, pp. 857-859
- SCHMID, H. H., HEGGLI, S. (1978): Räumliche Koordinatentransformation. Mitteilungen Nr. 23, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich
- SMART, W.M. (1958): Combination of Observations. Cambridge at the University Press 1958
- SOMOGYI, J., ZÁVOTI, J. (1993): Robust Estimation with Iteratively Reweighted Least-Squares Method. Acta Geodaetica et Montanistica Hungarica 28, pp. 413-420
- WELSCH, W. (1975): Über die Sensitivitätsanalyse geodätischer Kontrollnetze. 1. International Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods. Krakow, 22.-24.09.1975. FIG Commission 6 (Ed.): Proceedings, pp. 353-366
- WELSCH, W. (1982): Einige Erweiterungen der Deformationsermittlung in geodätischen Netzen durch Methoden der Strainanalyse. In: Joo, I., Detreköi, A. (Editors): III. International Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods. Budapest, 25.-27.08.1982. Proceedings, pp. 83-97. Akademiai Kiado, Budapest 1983
- WELSCH, W. (1983a): Finite element analysis of strain patterns from geodetic observations across a plate margin. Tectonophysics, 97 (1983), Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, pp. 57-71
- WELSCH, W. (1983b): On the capability of finite element strain analysis as applied to deformation investigations. XVII. FIG International Congress, paper 608.5, Sofia 1983
- WELSCH, W., HEUNECKE, O., KUHLMANN, H. (2000): Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen. In: Möser, M., Müller, G., Schlemmer, H., Werner, H. (Hrsg.), Handbuch Ingenieurgeodäsie, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg
- WICKI, F. (1999): Robuste Schätzverfahren für die Parameterschätzung in geodätischen Netzen. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Mitteilungen Nr. 67
- WOLF, H. (1955): Zur Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen, zwischen denen Abhängigkeiten bestehen. Zeitschrift für Vermessungswesen 80, Nr. 12, S. 432-440
- WOLF, H. (1979): Singuläre Kovarianzen im Gauß-Helmert-Modell. Zeitschrift für Vermessungswesen 104, Nr. 10, S. 437-442

Anhang

A Transformationen

A.1 Ebene Helmert-Transformation auf der Grundlage von Beobachtungen

Als Ausgangspunkt für diesen Transformationsansatz werden die im Ziel- und Startsystem ausgeführten Beobachtungen \mathbf{l}_1 und \mathbf{l}_2 mit ihren Gewichtsmatrizen \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 verwendet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden in der weiteren Darstellung reine Streckennetze betrachtet.

Das Ziel des Ausgleichungsansatzes besteht darin, die Netzausgleichung und die Transformation in einer *Ausgleichung in einem Guß* durchzuführen. Daraus erhält man dann direkt ausgeglichene Koordinaten, die die Forderung der exakten Transformierbarkeit homologer Punkte vom Start- ins Zielsystem erfüllen und die ausgeglichenen Transformationsparameter. Folgende Unbekannte werden eingeführt:

- X_i, Y_i ... Koordinaten im Zielsystem,
- x_i, y_i ... Koordinaten im Startsystem,
- X_0, Y_0 ... Translation,
- a, o ... Hilfsunbekannte für Rotation und Maßstabsanpassung.

Die Beobachtungsgleichungen im Zielsystem F_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$), mit $n_1 =$ Anzahl der Beobachtungen, lauten:

$$F_k = L_{ij} + v_{L_{ij}} = \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2} \quad . \quad (\text{A.1})$$

Die Beobachtungsgleichungen im Startsystem f_k ($k = 1, 2, \dots, n_2$), mit $n_2 =$ Anzahl der Beobachtungen, lauten:

$$f_k = l_{ij} + v_{l_{ij}} = \sqrt{(\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2 + (\hat{y}_j - \hat{y}_i)^2} \quad . \quad (\text{A.2})$$

Um auf Grundlage der Beobachtungen Koordinaten bestimmen zu können, muß sowohl im Start- als auch im Zielsystem eine Datumsdefinition erfolgen. Dazu wird auf Grundlage der Näherungskordinaten (x_i^0, y_i^0) im Startsystem und der Näherungskordinaten (X_i^0, Y_i^0) im Zielsystem eine Datumsfestlegung mit Hilfe von Bedingungsgleichungen getroffen. Nach einer Unterteilung in Datumspunkte P_{D_i} ($i = 1, 2, \dots, h$; $h \geq 2$) und Nichtdatumspunkte P_{N_i} ($i = 1, 2, \dots, g$), ergeben sich die Bedingungsgleichungen für die Datumsfestlegung des Zielsystems zu

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{i=1}^h \Delta \hat{X}_{D_i} = 0 \\ B_2 &= \sum_{i=1}^h \Delta \hat{Y}_{D_i} = 0 \\ B_3 &= \sum_{i=1}^h X_{D_i}^0 \Delta \hat{Y}_{D_i} - \sum_{i=1}^h Y_{D_i}^0 \Delta \hat{X}_{D_i} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

und für das Startsystem zu

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum_{i=1}^h \Delta \hat{x}_{D_i} = 0 \\ b_2 &= \sum_{i=1}^h \Delta \hat{y}_{D_i} = 0 \\ b_3 &= \sum_{i=1}^h x_{D_i}^0 \Delta \hat{y}_{D_i} - \sum_{i=1}^h y_{D_i}^0 \Delta \hat{x}_{D_i} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Die Forderung, daß sich die Koordinaten des Start- auf die des Zielsystems transformieren lassen, wird ebenfalls durch Bedingungsgleichungen eingeführt. Für die Koordinaten der Datumspunkte P_{D_i} soll

$$\begin{aligned}\hat{X}_{Di} &= \hat{X}_0 + \hat{x}_{Di}\hat{a} - \hat{y}_{Di}\hat{o} \\ \hat{Y}_{Di} &= \hat{Y}_0 + \hat{y}_{Di}\hat{a} + \hat{x}_{Di}\hat{o}\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

erfüllt sein. Daraus ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}b_{xi} &= -\hat{X}_{Di} + \hat{X}_0 + \hat{x}_{Di}\hat{a} - \hat{y}_{Di}\hat{o} = 0 \\ b_{yi} &= -\hat{Y}_{Di} + \hat{Y}_0 + \hat{y}_{Di}\hat{a} + \hat{x}_{Di}\hat{o} = 0.\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Entscheidet man sich dafür, das Ausgleichungsproblem durch Linearisierung an der Stelle geeigneter Näherungswerte \mathbf{x}^0 und Iteration zu lösen und faßt man die unbekannt Parameter im Vektor

$$\mathbf{x} = \left[\Delta X_{D1} \quad \Delta Y_{D1} \quad \cdots \quad \Delta X_{Dh} \quad \Delta Y_{Dh} \mid \Delta X_{N1} \quad \Delta Y_{N1} \quad \cdots \quad \Delta X_{Ng} \quad \Delta Y_{Ng} \mid \right. \\ \left. \Delta x_{D1} \quad \Delta y_{D1} \quad \cdots \quad \Delta x_{Dh} \quad \Delta y_{Dh} \mid \Delta x_{N1} \quad \Delta y_{N1} \quad \cdots \quad \Delta x_{Ng} \quad \Delta y_{Ng} \mid \Delta X_0 \quad \Delta Y_0 \quad \Delta a \quad \Delta o \right]^T \quad (\text{A.7})$$

zusammen, ergibt sich die Funktionalmatrix⁶² \mathbf{A}_1 der Beobachtungsgleichungen im Zielsystem zu

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial F_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{Ng}} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial F_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{Ng}} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{Ng}} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial F_1}{\partial X_0} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial o} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial F_2}{\partial X_0} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n1}}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial y_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n1}}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial y_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n1}}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_0} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial a} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial o} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial F_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_{Ng}} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial F_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_{Ng}} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{D1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{N1}} & \cdots & \frac{\partial F_{n1}}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial Y_{Ng}} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⁶² Die partiellen Ableitungen werden jeweils an den Näherungsstellen \mathbf{x}^0 gebildet.

und die Funktionalmatrix \mathbf{A}_2 im Startsystem

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial f_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_{Ng}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial f_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_{Ng}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_{Ng}} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial f_1}{\partial X_0} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_0} & \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial o} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial f_2}{\partial X_0} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_0} & \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial X_0} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial Y_0} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial a} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial o} \end{array} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{Dh}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{Dh}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial y_{D1}} & \dots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial y_{Dh}} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{Ng}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{Ng}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial y_{Ng}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Als nächstes folgen die Bedingungsgleichungen⁶³ für die Datumsfestlegung und die exakte Transformierbarkeit in Matrixschreibweise $\mathbf{B} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w}$. Die Bedingungen \mathbf{B}_{D1} für die Datumsfestlegung im Zielsystem lauten

$$\mathbf{B}_{D1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{Ng}} \\ \frac{\partial B_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{Ng}} \\ \frac{\partial B_3}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_3}{\partial Y_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_3}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial B_3}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial B_3}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_3}{\partial Y_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_3}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial B_3}{\partial Y_{Ng}} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} \frac{\partial B_1}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial B_1}{\partial y_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial B_1}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial B_1}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial B_1}{\partial X_0} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_0} & \frac{\partial B_1}{\partial a} & \frac{\partial B_1}{\partial o} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial B_2}{\partial y_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial B_2}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial B_2}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial B_2}{\partial X_0} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_0} & \frac{\partial B_2}{\partial a} & \frac{\partial B_2}{\partial o} \\ \frac{\partial B_3}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial B_3}{\partial y_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_3}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial B_3}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial B_3}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial B_3}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_3}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial B_3}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial B_3}{\partial X_0} & \frac{\partial B_3}{\partial Y_0} & \frac{\partial B_3}{\partial a} & \frac{\partial B_3}{\partial o} \end{array} \right] \quad (\text{A.10})$$

⁶³ Wobei die partiellen Ableitungen wieder jeweils an den Näherungsstellen \mathbf{x}^0 gebildet werden.

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & a & -o & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 1 & 0 & x_{D1} & -y_{D1} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & o & a & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 1 & y_{D1} & x_{D1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & a & -o & | & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 1 & 0 & x_{Dh} & -y_{Dh} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & | & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & o & a & | & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 1 & y_{Dh} & x_{Dh} \end{bmatrix}.$$

Der verkürzte Beobachtungsvektor $\Delta \mathbf{l}$ und der Widerspruchsvektor \mathbf{w} lauten

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \vdots \\ L_{ij} - \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2} \\ \vdots \\ l_{ij} - \sqrt{(x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 - (-X_i^0 + X_0^0 + x_i^0 a^0 - y_i^0 o^0) \\ 0 - (-Y_i^0 + Y_0^0 + y_i^0 a^0 + x_i^0 o^0) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{D1} \\ \mathbf{B}_{D2} \\ \mathbf{B}_T \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

und

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (\text{A.15})$$

erhält man die Schätzwerte für die Unbekannten aus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & | & \mathbf{B}^T \\ \hline \mathbf{B} & | & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hline \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{l} \\ \hline \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Als Ergebnis erhält man:

- \hat{X}_i, \hat{Y}_i ... ausgeglichene Koordinaten im Zielsystem,
- \hat{x}_i, \hat{y}_i ... ausgeglichene Koordinaten im Startsystem,
- \hat{X}_0, \hat{Y}_0 ... ausgeglichene Translationsparameter,
- \hat{a}, \hat{o} ... ausgeglichene Werte für die Hilfsunbekannten.

Aus den Hilfsunbekannten lassen sich die ausgeglichenen Werte für die interpretierbaren Transformationsparameter Rotation $\hat{\alpha}$ und Maßstab \hat{m} berechnen.

A.2 Räumliche Helmert-Transformation auf der Grundlage fiktiver Beobachtungen

Als Ausgangspunkt für die Transformation stehen folgende Werte aus einer freien dreidimensionalen Netzausgleichung des Ziel- und Startsystems zur Verfügung.

\mathbf{x}_1	... Koordinatenvektor im Zielsystem
$\mathbf{Q}_{x_1x_1}$... singuläre Kofaktorenmatrix der Koordinaten im Zielsystem
σ_{01}	... theoretische Standardabweichung der Gewichtseinheit (vor der Ausgleichung)
s_{01}	... empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit (nach der Ausgleichung)
f_1	... Freiheitsgrad der Netzausgleichung im Zielsystem

und

\mathbf{x}_2	... Koordinatenvektor im Startsystem
$\mathbf{Q}_{x_2x_2}$... singuläre Kofaktorenmatrix der Koordinaten im Startsystem
σ_{02}	... theoretische Standardabweichung der Gewichtseinheit (vor der Ausgleichung)
s_{02}	... empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit (nach der Ausgleichung)
f_2	... Freiheitsgrad der Netzausgleichung im Startsystem

Da eine Transformation von Koordinaten mit singulärer Kofaktorenmatrix nur dann möglich ist, wenn eine zusätzliche deterministische Information in die Modellbildung einbezogen wird, wird folgender Lösungsweg besprochen:

1. Extrahierung des stochastischen Anteils der Kofaktorenmatrizen durch die Verwendung einer Minimalkonfiguration schätzbarer Größen (hier Strecken) als fiktive Beobachtungen,
2. Berücksichtigung eines zusätzlichen deterministischen Anteils in Form einer Datumsfestlegung mit Hilfe von Bedingungsungleichungen.

Mit dieser Strategie kann dann ein Transformationsansatz auf Grundlage der fiktiven Beobachtungen aufgestellt werden. Im Zielsystem mit p_1 Punkten ist der Vektor der n_1 fiktiven Beobachtungen (Strecken) der Minimal-konfiguration mit der zugehörigen Kofaktorenmatrix

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{I_1I_1} = \begin{matrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{Q}_{x_1x_1} & \mathbf{F}_1^T \\ (n_1 \times n_1) & (n_1 \times 3p_1) & (3p_1 \times 3p_1) & (3p_1 \times n_1) \end{matrix} \quad (\text{A.17})$$

bereitzustellen und ebenso im Startsystem

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{I_2I_2} = \begin{matrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{Q}_{x_2x_2} & \mathbf{F}_2^T \\ (n_2 \times n_2) & (n_2 \times 3p_2) & (3p_2 \times 3p_2) & (3p_2 \times n_2) \end{matrix}, \quad (\text{A.18})$$

wobei mit \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 der linearisierte funktionale Zusammenhang der Streckenberechnung bezeichnet wird. Da die fiktiven Beobachtungen jeweils eine Minimalkonfiguration beschreiben, sind deren Kofaktorenmatrizen regulär und somit ergeben sich die erforderlichen Gewichtsmatrizen zu

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_{I_1I_1}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_{I_2I_2}^{-1}. \quad (\text{A.19})$$

Nun kann mit \mathbf{I}_1 , \mathbf{P}_1 und \mathbf{I}_2 , \mathbf{P}_2 ein Transformationsansatz auf der Grundlage dieser fiktiven Beobachtungen aufgestellt werden. Folgende Unbekannte werden eingeführt:

X_i, Y_i, Z_i	... Koordinaten im Zielsystem,
x_i, y_i, z_i	... Koordinaten im Startsystem,
X_0, Y_0, Z_0	... Translation,
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$... Rotationswinkel um die Koordinatenachsen x, y, z ,
m	... Maßstabsfaktor.

Die n_1 Beobachtungsgleichungen F_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$) im Zielsystem lauten:

$$F_k = L_{ij} + v_{L_{ij}} = \sqrt{(\hat{X}_j - \hat{X}_i)^2 + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_i)^2 + (\hat{Z}_j - \hat{Z}_i)^2} \quad (\text{A.20})$$

Die n_2 Beobachtungsgleichungen f_k ($k = 1, 2, \dots, n_2$) im Startsystem lauten:

$$f_k = l_{ij} + v_{l_{ij}} = \sqrt{(\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2 + (\hat{y}_j - \hat{y}_i)^2 + (\hat{z}_j - \hat{z}_i)^2} . \quad (\text{A.21})$$

Um auf Grundlage der Beobachtungen Koordinaten bestimmen zu können, muß sowohl im Start- als auch im Zielsystem eine Datumsdefinition erfolgen. Dazu wird auf Grundlage der Näherungskordinaten (x_i^0, y_i^0, z_i^0) im Startsystem und der Näherungskordinaten (X_i^0, Y_i^0, Z_i^0) im Zielsystem eine Datumsfestlegung mit Hilfe von Bedingungsgleichungen getroffen. Nach einer Unterteilung in Datumspunkte P_{D_i} ($i = 1, 2, \dots, h$; $h \geq 3$) und Nichtdatumspunkte P_{N_i} ($i = 1, 2, \dots, g$), ergeben sich die Bedingungsgleichungen für die Datumsfestlegung des Zielsystems zu

$$\left. \begin{array}{l} B_1 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{X}_{D_i} = 0 \\ B_2 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{Y}_{D_i} = 0 \\ B_3 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{Z}_{D_i} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{3 Translationen, } B_4 = \sum_{i=1}^h Y_{D_i}^0 \Delta \hat{Z}_{D_i} - \sum_{i=1}^h Z_{D_i}^0 \Delta \hat{Y}_{D_i} = 0 \\ B_5 = \sum_{i=1}^h Z_{D_i}^0 \Delta \hat{X}_{D_i} - \sum_{i=1}^h X_{D_i}^0 \Delta \hat{Z}_{D_i} = 0 \\ B_6 = \sum_{i=1}^h X_{D_i}^0 \Delta \hat{Y}_{D_i} - \sum_{i=1}^h Y_{D_i}^0 \Delta \hat{X}_{D_i} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{3 Rotationen.} \\ \text{(A.22)} \end{array}$$

Die Datumsfestlegung im Startsystem erfolgt mit

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{x}_{D_i} = 0 \\ b_2 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{y}_{D_i} = 0 \\ b_3 = \sum_{i=1}^h \Delta \hat{z}_{D_i} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{3 Translationen, } b_4 = \sum_{i=1}^h y_{D_i}^0 \Delta \hat{z}_{D_i} - \sum_{i=1}^h z_{D_i}^0 \Delta \hat{y}_{D_i} = 0 \\ b_5 = \sum_{i=1}^h z_{D_i}^0 \Delta \hat{x}_{D_i} - \sum_{i=1}^h x_{D_i}^0 \Delta \hat{z}_{D_i} = 0 \\ b_6 = \sum_{i=1}^h x_{D_i}^0 \Delta \hat{y}_{D_i} - \sum_{i=1}^h y_{D_i}^0 \Delta \hat{x}_{D_i} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{3 Rotationen.} \\ \text{(A.23)} \end{array}$$

Die Forderung nach exakter Transformierbarkeit der Koordinaten vom Start- ins Zielsystem wird ebenfalls durch Bedingungsgleichungen formuliert. Für die Koordinaten der Datumspunkte P_{D_i} soll

$$\begin{aligned} \hat{X}_{D_i} &= \hat{m} (\hat{r}_{11} \hat{x}_{D_i} + \hat{r}_{12} \hat{y}_{D_i} + \hat{r}_{13} \hat{z}_{D_i}) + \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_{D_i} &= \hat{m} (\hat{r}_{21} \hat{x}_{D_i} + \hat{r}_{22} \hat{y}_{D_i} + \hat{r}_{23} \hat{z}_{D_i}) + \hat{Y}_0 \\ \hat{Z}_{D_i} &= \hat{m} (\hat{r}_{31} \hat{x}_{D_i} + \hat{r}_{32} \hat{y}_{D_i} + \hat{r}_{33} \hat{z}_{D_i}) + \hat{Z}_0 \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

erfüllt sein, so daß sich die Bedingungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} b_{xi} &= -\hat{X}_{D_i} + \hat{X}_0 + \hat{m} (\hat{r}_{11} \hat{x}_i + \hat{r}_{12} \hat{y}_i + \hat{r}_{13} \hat{z}_i) = 0 \\ b_{yi} &= -\hat{Y}_{D_i} + \hat{Y}_0 + \hat{m} (\hat{r}_{21} \hat{x}_i + \hat{r}_{22} \hat{y}_i + \hat{r}_{23} \hat{z}_i) = 0 \\ b_{zi} &= -\hat{Z}_{D_i} + \hat{Z}_0 + \hat{m} (\hat{r}_{31} \hat{x}_i + \hat{r}_{32} \hat{y}_i + \hat{r}_{33} \hat{z}_i) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

ergeben. Dieses Ausgleichungsproblem kann durch Linearisierung an der Stelle geeigneter Näherungswerte \mathbf{x}^0 und Iteration gelöst werden. Faßt man die unbekannt Parameter im Vektor

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} \Delta X_{D1} & \Delta Y_{D1} & \Delta Z_{D1} & \cdots & \Delta X_{Dh} & \Delta Y_{Dh} & \Delta Z_{Dh} & \vdots & \Delta X_{N1} & \Delta Y_{N1} & \Delta Z_{N1} & \cdots & \Delta X_{Ng} & \Delta Y_{Ng} & \Delta Z_{Ng} & \vdots \\ \Delta x_{D1} & \Delta y_{D1} & \Delta z_{D1} & \cdots & \Delta x_{Dh} & \Delta y_{Dh} & \Delta z_{Dh} & \vdots & \Delta x_{N1} & \Delta y_{N1} & \Delta z_{N1} & \cdots & \Delta x_{Ng} & \Delta y_{Ng} & \Delta z_{Ng} & \vdots \\ \Delta X_0 & \Delta Y_0 & \Delta Z_0 & \Delta \omega_x & \Delta \omega_y & \Delta \omega_z & \Delta m \end{array} \right]^T \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{N1}} & \frac{\partial f_1}{\partial z_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial f_1}{\partial z_{Ng}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{N1}} & \frac{\partial f_2}{\partial z_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial f_2}{\partial z_{Ng}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial y_{N1}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial z_{N1}} & \dots & \frac{\partial f_{n2}}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial f_{n2}}{\partial z_{Ng}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \quad (A.28)$$

Nun folgen die Bedingungsgleichungen für die Datumsfestlegung und die exakte Transformierbarkeit in Matrixschreibweise $\mathbf{B} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w}$. Die Matrix \mathbf{B}_{D1} für die Datumsfestlegung im Zielsystem lautet

$$\mathbf{B}_{D1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Z_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial Z_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial B_1}{\partial Z_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_{Ng}} & \frac{\partial B_1}{\partial Z_{Ng}} \\ \frac{\partial B_2}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Z_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial Z_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial B_2}{\partial Z_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_{Ng}} & \frac{\partial B_2}{\partial Z_{Ng}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial B_6}{\partial X_{D1}} & \frac{\partial B_6}{\partial Y_{D1}} & \frac{\partial B_6}{\partial Z_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_6}{\partial X_{Dh}} & \frac{\partial B_6}{\partial Y_{Dh}} & \frac{\partial B_6}{\partial Z_{Dh}} & \frac{\partial B_6}{\partial X_{N1}} & \frac{\partial B_6}{\partial Y_{N1}} & \frac{\partial B_6}{\partial Z_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_6}{\partial X_{Ng}} & \frac{\partial B_6}{\partial Y_{Ng}} & \frac{\partial B_6}{\partial Z_{Ng}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial B_1}{\partial y_{D1}} & \frac{\partial B_1}{\partial z_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial z_{Dh}} & \frac{\partial B_1}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial B_1}{\partial y_{N1}} & \frac{\partial B_1}{\partial z_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial B_1}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial B_1}{\partial z_{Ng}} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial B_2}{\partial y_{D1}} & \frac{\partial B_2}{\partial z_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial z_{Dh}} & \frac{\partial B_2}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial B_2}{\partial y_{N1}} & \frac{\partial B_2}{\partial z_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial B_2}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial B_2}{\partial z_{Ng}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial B_6}{\partial x_{D1}} & \frac{\partial B_6}{\partial y_{D1}} & \frac{\partial B_6}{\partial z_{D1}} & \dots & \frac{\partial B_6}{\partial x_{Dh}} & \frac{\partial B_6}{\partial y_{Dh}} & \frac{\partial B_6}{\partial z_{Dh}} & \frac{\partial B_6}{\partial x_{N1}} & \frac{\partial B_6}{\partial y_{N1}} & \frac{\partial B_6}{\partial z_{N1}} & \dots & \frac{\partial B_6}{\partial x_{Ng}} & \frac{\partial B_6}{\partial y_{Ng}} & \frac{\partial B_6}{\partial z_{Ng}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial X_0} & \frac{\partial B_1}{\partial Y_0} & \frac{\partial B_1}{\partial Z_0} & \frac{\partial B_1}{\partial \omega_x} & \frac{\partial B_1}{\partial \omega_y} & \frac{\partial B_1}{\partial \omega_z} & \frac{\partial B_1}{\partial m} \\ \frac{\partial B_2}{\partial X_0} & \frac{\partial B_2}{\partial Y_0} & \frac{\partial B_2}{\partial Z_0} & \frac{\partial B_2}{\partial \omega_x} & \frac{\partial B_2}{\partial \omega_y} & \frac{\partial B_2}{\partial \omega_z} & \frac{\partial B_2}{\partial m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial B_6}{\partial X_0} & \frac{\partial B_6}{\partial Y_0} & \frac{\partial B_6}{\partial Z_0} & \frac{\partial B_6}{\partial \omega_x} & \frac{\partial B_6}{\partial \omega_y} & \frac{\partial B_6}{\partial \omega_z} & \frac{\partial B_6}{\partial m} \end{bmatrix} \quad (A.29)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -Z_{D1} & Y_{D1} & \dots & 0 & -Z_{Dh} & Y_{Dh} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Z_{D1} & 0 & -X_{D1} & \dots & Z_{Dh} & 0 & -X_{Dh} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -Y_{D1} & X_{D1} & 0 & \dots & -Y_{Dh} & X_{Dh} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

Die Bedingungen \mathbf{B}_{D2} für die Datumsfestlegung im Startsystem ergibt sich analog zu

$$\mathbf{B}_{D2} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -z_{D1} & y_{D1} & \dots & 0 & -z_{Dh} & y_{Dh} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{D1} & 0 & -x_{D1} & \dots & z_{Dh} & 0 & -x_{Dh} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -y_{D1} & x_{D1} & 0 & \dots & -y_{Dh} & x_{Dh} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \quad (A.30)$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 m \left(x_{D1} \frac{\partial r_{11}}{\partial \omega_x} + y_{D1} \frac{\partial r_{12}}{\partial \omega_x} + z_{D1} \frac{\partial r_{13}}{\partial \omega_x} \right) \\
 m \left(x_{D1} \frac{\partial r_{21}}{\partial \omega_x} + y_{D1} \frac{\partial r_{22}}{\partial \omega_x} + z_{D1} \frac{\partial r_{23}}{\partial \omega_x} \right) \\
 m \left(x_{D1} \frac{\partial r_{31}}{\partial \omega_x} + y_{D1} \frac{\partial r_{32}}{\partial \omega_x} + z_{D1} \frac{\partial r_{33}}{\partial \omega_x} \right) \\
 \vdots \\
 m \left(x_{Dh} \frac{\partial r_{11}}{\partial \omega_x} + y_{Dh} \frac{\partial r_{12}}{\partial \omega_x} + z_{Dh} \frac{\partial r_{13}}{\partial \omega_x} \right) \\
 m \left(x_{Dh} \frac{\partial r_{21}}{\partial \omega_x} + y_{Dh} \frac{\partial r_{22}}{\partial \omega_x} + z_{Dh} \frac{\partial r_{23}}{\partial \omega_x} \right) \\
 m \left(x_{Dh} \frac{\partial r_{31}}{\partial \omega_x} + y_{Dh} \frac{\partial r_{32}}{\partial \omega_x} + z_{Dh} \frac{\partial r_{33}}{\partial \omega_x} \right)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 m \left(x_{D1} \frac{\partial r_{11}}{\partial \omega_y} + y_{D1} \frac{\partial r_{12}}{\partial \omega_y} + z_{D1} \frac{\partial r_{13}}{\partial \omega_y} \right) \\
 m \left(x_{D1} \frac{\partial r_{21}}{\partial \omega_y} + y_{D1} \frac{\partial r_{22}}{\partial \omega_y} + z_{D1} \frac{\partial r_{23}}{\partial \omega_y} \right) \\
 m \left(x_{D1} \frac{\partial r_{31}}{\partial \omega_y} + y_{D1} \frac{\partial r_{32}}{\partial \omega_y} + z_{D1} \frac{\partial r_{33}}{\partial \omega_y} \right) \\
 \vdots \\
 m \left(x_{Dh} \frac{\partial r_{11}}{\partial \omega_y} + y_{Dh} \frac{\partial r_{12}}{\partial \omega_y} + z_{Dh} \frac{\partial r_{13}}{\partial \omega_y} \right) \\
 m \left(x_{Dh} \frac{\partial r_{21}}{\partial \omega_y} + y_{Dh} \frac{\partial r_{22}}{\partial \omega_y} + z_{Dh} \frac{\partial r_{23}}{\partial \omega_y} \right) \\
 m \left(x_{Dh} \frac{\partial r_{31}}{\partial \omega_y} + y_{Dh} \frac{\partial r_{32}}{\partial \omega_y} + z_{Dh} \frac{\partial r_{33}}{\partial \omega_y} \right)
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 m \left(x_{D1} \frac{\partial r_{11}}{\partial \omega_z} + y_{D1} \frac{\partial r_{12}}{\partial \omega_z} + z_{D1} \frac{\partial r_{13}}{\partial \omega_z} \right) \\
 m \left(x_{D1} \frac{\partial r_{21}}{\partial \omega_z} + y_{D1} \frac{\partial r_{22}}{\partial \omega_z} + z_{D1} \frac{\partial r_{23}}{\partial \omega_z} \right) \\
 m \left(x_{D1} \frac{\partial r_{31}}{\partial \omega_z} + y_{D1} \frac{\partial r_{32}}{\partial \omega_z} + z_{D1} \frac{\partial r_{33}}{\partial \omega_z} \right) \\
 \vdots \\
 m \left(x_{Dh} \frac{\partial r_{11}}{\partial \omega_z} + y_{Dh} \frac{\partial r_{12}}{\partial \omega_z} + z_{Dh} \frac{\partial r_{13}}{\partial \omega_z} \right) \\
 m \left(x_{Dh} \frac{\partial r_{21}}{\partial \omega_z} + y_{Dh} \frac{\partial r_{22}}{\partial \omega_z} + z_{Dh} \frac{\partial r_{23}}{\partial \omega_z} \right) \\
 m \left(x_{Dh} \frac{\partial r_{31}}{\partial \omega_z} + y_{Dh} \frac{\partial r_{32}}{\partial \omega_z} + z_{Dh} \frac{\partial r_{33}}{\partial \omega_z} \right)
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 r_{11}x_{D1} + r_{12}y_{D1} + r_{13}z_{D1} \\
 r_{21}x_{D1} + r_{22}y_{D1} + r_{23}z_{D1} \\
 r_{31}x_{D1} + r_{32}y_{D1} + r_{33}z_{D1} \\
 \vdots \\
 r_{11}x_{Dh} + r_{12}y_{Dh} + r_{13}z_{Dh} \\
 r_{21}x_{Dh} + r_{22}y_{Dh} + r_{23}z_{Dh} \\
 r_{31}x_{Dh} + r_{32}y_{Dh} + r_{33}z_{Dh}
 \end{array}$$

mit den in Tabelle A.1 aufgeführten partiellen Ableitungen.

Tabelle A.1: Partielle Ableitungen der Komponenten der Rotationsmatrix

	nach $\partial \omega_x$	nach $\partial \omega_y$	nach $\partial \omega_z$
∂r_{11}	0	$-\sin \omega_y \cos \omega_z$	$-\cos \omega_y \sin \omega_z$
∂r_{12}	$-\sin \omega_x \sin \omega_z + \cos \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z$	$\sin \omega_x \cos \omega_y \cos \omega_z$	$\cos \omega_x \cos \omega_z - \sin \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z$
∂r_{13}	$\cos \omega_x \sin \omega_z + \sin \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z$	$-\cos \omega_x \cos \omega_y \cos \omega_z$	$\sin \omega_x \cos \omega_z + \cos \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z$
∂r_{21}	0	$\sin \omega_y \sin \omega_z$	$-\cos \omega_y \cos \omega_z$
∂r_{22}	$-\sin \omega_x \cos \omega_z - \cos \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z$	$-\sin \omega_x \cos \omega_y \sin \omega_z$	$-\cos \omega_x \sin \omega_z - \sin \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z$
∂r_{23}	$\cos \omega_x \cos \omega_z - \sin \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z$	$\cos \omega_x \cos \omega_y \sin \omega_z$	$-\sin \omega_x \sin \omega_z + \cos \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z$
∂r_{31}	0	$\cos \omega_y$	0
∂r_{32}	$-\cos \omega_x \cos \omega_y$	$\sin \omega_x \sin \omega_y$	0
∂r_{33}	$-\sin \omega_x \cos \omega_y$	$-\cos \omega_x \sin \omega_y$	0

Der verkürzte Beobachtungsvektor $\Delta \mathbf{l}$ und der Widerspruchsvektor \mathbf{w} lauten

$$\Delta \mathbf{l} = \begin{bmatrix} L_{ij} - \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2 + (Z_j^0 - Z_i^0)^2} \\ \vdots \\ L_{ij} - \sqrt{(x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2 + (z_j^0 - z_i^0)^2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 - (-X_i^0 + X_0^0 + m^0 (r_{11}^0 x_i^0 + r_{12}^0 y_i^0 + r_{13}^0 z_i^0)) \\ 0 - (-Y_i^0 + Y_0^0 + m^0 (r_{21}^0 x_i^0 + r_{22}^0 y_i^0 + r_{23}^0 z_i^0)) \\ 0 - (-Z_i^0 + Z_0^0 + m^0 (r_{31}^0 x_i^0 + r_{32}^0 y_i^0 + r_{33}^0 z_i^0)) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

Mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{D1} \\ \mathbf{B}_{D2} \\ \mathbf{B}_T \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

und der Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (\text{A.34})$$

erhält man die Schätzwerte für die Unbekannten aus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

Als Ergebnis erhält man:

- $\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i$... ausgeglichene Koordinaten im Zielsystem,
- $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$... ausgeglichene Koordinaten im Startsystem,
- $\hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{Z}_0$... ausgeglichene Translationsparameter,
- $\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z$... ausgeglichene Rotationswinkel um die Koordinatenachsen x, y, z ,
- \hat{m} ... ausgeglichener Maßstabsfaktor.

B Gebrauchsformeln für die Ausgleichung nach maximaler Korrelation

Um die praktische Anwendung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation zu erleichtern, wird im folgenden ein Formelapparat zusammengestellt, der auf der Lösung einer erweiterten Ausgleichung nach kleinsten Quadraten basiert (siehe Abschnitt 3.3.8). Diese Formelzusammenstellung soll insbesondere aufzeigen, wie bestehende Programme zur Parameterschätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate erweitert werden können, um eine Lösung nach maximaler Korrelation zu generieren. Alle im folgenden verwendeten Bezeichnungen basieren auf der bekannten Darstellung einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit den Matrizen und Vektoren

\mathbf{A}	... Funktionalmatrix
\mathbf{l}	... Beobachtungsvektor
\mathbf{P}	... Gewichtsmatrix
\mathbf{u}	... Vektor der Unbekannten
\mathbf{u}_0	... Vektor der Näherungswerte für die Unbekannten
$\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)$... Beobachtungen als Funktion der Unbekannten
$\Delta\mathbf{l}$... Verkürzter Beobachtungsvektor ($\mathbf{l} - \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)$)
\mathbf{N}	... Normalgleichungsmatrix ($\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$)
\mathbf{n}	... „rechte Seite“ des Normalgleichungssystems ($\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l}$ bzw. $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\Delta\mathbf{l}$)

Für die Modellerweiterung werden benötigt

\mathbf{R}	... Cholesky-Zerlegung der Gewichtsmatrix $\mathbf{P} = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$
c_1	... für die additive Modellerweiterung
c_2	... für die multiplikative Modellerweiterung
n	... Anzahl der Beobachtungen
\mathbf{e}^T	... Einsvektor ($\mathbf{e}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$)

B.1 Lineare Modellgleichungen

Sind die ursprünglichen Modellgleichungen linear, so ist die „ c_2 -Eigenschaft“ (3.68) immer erfüllt. Ist zudem die „ c_1 -Eigenschaft“ (3.66) erfüllt, so daß (3.64) gilt, dann ist die Lösung der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zugleich eine aus der Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation. Diese Lösung kann dann als Basislösung \mathbf{f}_0 dazu verwendet werden, um durch Variation der Parameter c_1 und c_2 die gesamte Klasse mit $c_1\mathbf{e} + c_2\mathbf{f}_0$ zu erzeugen.

„ c_1 -Eigenschaft“ nicht enthalten

Ist die „ c_1 -Eigenschaft“ (3.66) nicht enthalten, so muß das Modell entsprechend erweitert werden.

Beobachtungen mit Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse:

$$\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{R}\mathbf{l} \quad . \quad (\text{B.1})$$

Funktionalmatrix mit Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse und Modellerweiterung:

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = [\mathbf{R}\mathbf{A} \mid \mathbf{e}] \quad . \quad (\text{B.2})$$

Normalgleichungsmatrix:

$$\tilde{\mathbf{N}}^* = \tilde{\mathbf{A}}^{*T}\tilde{\mathbf{A}}^* = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{A}^T\mathbf{R}^T\mathbf{e} \\ \hline \mathbf{e}^T\mathbf{R}\mathbf{A} & \mathbf{e}^T\mathbf{e} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{N} & \mathbf{A}^T\mathbf{R}^T\mathbf{e} \\ \hline \mathbf{e}^T\mathbf{R}\mathbf{A} & n \end{array} \right] \quad . \quad (\text{B.3})$$

Rechte Seite:

$$\tilde{\mathbf{n}}^* = \tilde{\mathbf{A}}^{*T}\tilde{\mathbf{l}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^T\mathbf{R}^T & \\ \hline \mathbf{e}^T & \end{array} \right] [\mathbf{R}\mathbf{l}] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l} & \\ \hline \mathbf{e}^T\mathbf{R}\mathbf{l} & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{n} \\ \hline \mathbf{e}^T\mathbf{R}\mathbf{l} \end{array} \right] \quad . \quad (\text{B.4})$$

Unbekannte:

$$\mathbf{u}^* = \tilde{\mathbf{N}}^{*-1}\tilde{\mathbf{n}}^* = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{N} & \mathbf{A}^T\mathbf{R}^T\mathbf{e} \\ \hline \mathbf{e}^T\mathbf{R}\mathbf{A} & n \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \mathbf{n} \\ \hline \mathbf{e}^T\mathbf{R}\mathbf{l} \end{array} \right], \quad \mathbf{u}^{*T} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m \mid c_1] \quad . \quad (\text{B.5})$$

Setzt man die Unbekannten u_1, u_2, \dots, u_m in das ursprüngliche Modell $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ ein, so erhält man die Basislösung \mathbf{f}_0 . Durch Variation des Parameters c_2 kann mit $c_2\mathbf{f}_0$ die Klasse aller Lösungen generiert werden.

B.2 Nichtlineare Modellgleichungen

Nach Berücksichtigung der Gewichte ist zu ermitteln, welche der Eigenschaften (3.64), (3.66), (3.68) das nichtlineare Modell aufweist. Um die Lösung nach maximaler Korrelation mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zu erzeugen, ist das Modell so zu erweitern, daß die „ c_1 - c_2 -Eigenschaft“ (3.64) erfüllt ist. Danach können die nichtlinearen Modellgleichungen linearisiert werden und die Lösung mit Hilfe des bekannten Algorithmus einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten iterativ berechnet werden.

Erfüllen die ursprünglichen Modellgleichungen bereits die „ c_1 - c_2 -Eigenschaft“ (3.64) dann ist die Lösung der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten zugleich eine aus der Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation. Diese Lösung kann dann als Basislösung \mathbf{f}_0 dazu verwendet werden, um durch Variation der Parameter c_1 und c_2 die gesamte Klasse mit $c_1\mathbf{e} + c_2\mathbf{f}_0$ zu erzeugen.

„ c_1 -Eigenschaft“ nicht enthalten

Enthält das ursprüngliche Modell nur die „ c_2 -Eigenschaft“ (3.68) ist es noch um die „ c_1 -Eigenschaft“ (3.66) zu erweitern.

Beobachtungen mit Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{R}\mathbf{I} \quad . \quad (\text{B.6})$$

Beobachtungen als Funktion der Unbekannten im erweiterten Modell unter Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse:

$$\tilde{\mathbf{f}}^*(\mathbf{u}_0) = [c_1\mathbf{e} + \mathbf{R}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)] \quad . \quad (\text{B.7})$$

Verkürzter Beobachtungsvektor:

$$\Delta\tilde{\mathbf{I}}^* = \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{f}}^*(\mathbf{u}_0) = \mathbf{R}\mathbf{I} - [c_1\mathbf{e} + \mathbf{R}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)] = \mathbf{R}[\mathbf{I} - \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)] - c_1\mathbf{e} = \mathbf{R}\Delta\mathbf{I} - c_1\mathbf{e} \quad . \quad (\text{B.8})$$

Funktionalmatrix mit Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse und der Modellerweiterung:

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = [\mathbf{R}\mathbf{A} \mid \mathbf{e}] \quad . \quad (\text{B.9})$$

Normalgleichungsmatrix:

$$\tilde{\mathbf{N}}^* = \tilde{\mathbf{A}}^{*\text{T}}\tilde{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{R}^{\text{T}}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{R}\mathbf{A} & \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{R}^{\text{T}}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{R}\mathbf{A} & n \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B.10})$$

Rechte Seite:

$$\tilde{\mathbf{n}}^* = \tilde{\mathbf{A}}^{*\text{T}}\Delta\tilde{\mathbf{I}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{R}^{\text{T}} \\ \mathbf{e}^{\text{T}} \end{bmatrix} [\mathbf{R}\Delta\mathbf{I} - c_1\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{P}\Delta\mathbf{I} - c_1\mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{R}^{\text{T}}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{R}\Delta\mathbf{I} - c_1\mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} - c_1\mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{R}^{\text{T}}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{R}\Delta\mathbf{I} - nc_1 \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B.11})$$

Unbekannte:

$$\mathbf{u}^* = \tilde{\mathbf{N}}^{*-1}\tilde{\mathbf{n}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{R}^{\text{T}}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{R}\mathbf{A} & n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n} - c_1\mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{R}^{\text{T}}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^{\text{T}}\mathbf{R}\Delta\mathbf{I} - nc_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{*\text{T}} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m \mid c_1] \quad . \quad (\text{B.12})$$

Setzt man die Unbekannten u_1, u_2, \dots, u_m in das ursprüngliche Modell $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ ein, so erhält man die Basislösung \mathbf{f}_0 . Durch Variation des Parameters c_2 kann mit $c_2\mathbf{f}_0$ die Klasse aller Lösungen generiert werden.

„ c_2 -Eigenschaft“ nicht enthalten

Enthält das ursprüngliche Modell nur die „ c_1 -Eigenschaft“ (3.66), so ist es um die „ c_2 -Eigenschaft“ (3.68) zu erweitern.

Beobachtungen mit Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{R}\mathbf{I} \quad . \quad (\text{B.13})$$

Beobachtungen als Funktion der Unbekannten:

$$\tilde{\mathbf{f}}^*(\mathbf{u}_0) = [c_2\mathbf{R}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)] \quad . \quad (\text{B.14})$$

Verkürzter Beobachtungsvektor:

$$\Delta \tilde{\mathbf{I}}^* = \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{f}}^*(\mathbf{u}_0) = \mathbf{R}\mathbf{I} - c_2 \mathbf{R}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{R}[\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)] \quad . \quad (\text{B.15})$$

Funktionalmatrix mit Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse und der Modellerweiterung:

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = [c_2 \mathbf{R}\mathbf{A} \mid \mathbf{R}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)] \quad . \quad (\text{B.16})$$

Normalgleichungsmatrix:

$$\tilde{\mathbf{N}}^* = \tilde{\mathbf{A}}^{*\top} \tilde{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} c_2^2 \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A} & c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \\ c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2^2 \mathbf{N} & c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \\ c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B.17})$$

Rechte Seite:

$$\tilde{\mathbf{n}}^* = \tilde{\mathbf{A}}^{*\top} \Delta \tilde{\mathbf{I}}^* = \begin{bmatrix} c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{R}^\top \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{R}^\top \end{bmatrix} [\mathbf{R}(\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0))] = \begin{bmatrix} c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{P}(\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P}(\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B.18})$$

Unbekannte:

$$\mathbf{u}^* = \tilde{\mathbf{N}}^{*-1} \tilde{\mathbf{n}}^* = \begin{bmatrix} c_2^2 \mathbf{N} & c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \\ c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{P}(\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P}(\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{*\top} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m \mid c_2] \quad . \quad (\text{B.19})$$

Einsetzen der Unbekannten u_1, u_2, \dots, u_m in das ursprüngliche Modell $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ liefert die Basislösung \mathbf{f}_0 . Durch Variation des Parameters c_1 kann mit $c_1 \mathbf{e} + \mathbf{f}_0$ die Klasse aller Lösungen der Ausgleichung nach maximaler Korrelation erzeugt werden.

„ c_1 -Eigenschaft“ und „ c_2 -Eigenschaft“ nicht enthalten

Enthält das ursprüngliche Modell keine der beiden Eigenschaften, so ist es um die „ c_1 -Eigenschaft“ (3.66) und um die „ c_2 -Eigenschaft“ (3.68) zu erweitern.

Beobachtungen mit Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{R}\mathbf{I} \quad . \quad (\text{B.20})$$

Beobachtungen als Funktion der Unbekannten:

$$\tilde{\mathbf{f}}^*(\mathbf{u}_0) = [c_1 \mathbf{e} + c_2 \mathbf{R}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)] \quad . \quad (\text{B.21})$$

Verkürzter Beobachtungsvektor:

$$\Delta \tilde{\mathbf{I}}^* = \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{f}}^*(\mathbf{u}_0) = \mathbf{R}\mathbf{I} - [c_1 \mathbf{e} + c_2 \mathbf{R}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)] = \mathbf{R}[\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)] - c_1 \mathbf{e} \quad . \quad (\text{B.22})$$

Funktionalmatrix mit Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse und der Modellerweiterung:

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = [c_2 \mathbf{R}\mathbf{A} \mid \mathbf{e} \mid \mathbf{R}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)] \quad . \quad (\text{B.23})$$

Normalgleichungsmatrix:

$$\tilde{\mathbf{N}}^* = \tilde{\mathbf{A}}^{*\top} \tilde{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} c_2^2 \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A} & c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{e} & c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \\ c_2 \mathbf{e}^\top \mathbf{R} \mathbf{A} & \mathbf{e}^\top \mathbf{e} & \mathbf{e}^\top \mathbf{R} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \\ c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{e} & \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2^2 \mathbf{N} & c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{e} & c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \\ c_2 \mathbf{e}^\top \mathbf{R} \mathbf{A} & n & \mathbf{e}^\top \mathbf{R} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \\ c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{e} & \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B.24})$$

Rechte Seite:

$$\tilde{\mathbf{n}}^* = \tilde{\mathbf{A}}^{*\top} \Delta \tilde{\mathbf{I}}^* = \begin{bmatrix} c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{R}^\top \\ \mathbf{e}^\top \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{R}^\top \end{bmatrix} [\mathbf{R}(\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) - c_1 \mathbf{e}] = \begin{bmatrix} c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{P}(\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) - c_1 c_2 \mathbf{A}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^\top \mathbf{R}(\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) - c_1 \mathbf{e}^\top \mathbf{e} \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{P}(\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) - c_1 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B.25})$$

Unbekannte:

$$\mathbf{u}^* = \tilde{\mathbf{N}}^{*-1} \tilde{\mathbf{n}}^* = \begin{bmatrix} c_2^2 \mathbf{N} & c_2 \mathbf{A}^T \mathbf{R}^T \mathbf{e} & c_2 \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \\ c_2 \mathbf{e}^T \mathbf{R} \mathbf{A} & n & \mathbf{e}^T \mathbf{R} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \\ c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^T \mathbf{R}^T \mathbf{e} & \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^T \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_2 \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) - c_1 c_2 \mathbf{A}^T \mathbf{R}^T \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T \mathbf{R} (\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) - c_1 \mathbf{e}^T \mathbf{e} \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - c_2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) - c_1 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)^T \mathbf{R}^T \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{u}^{*T} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m \mid c_1 \mid c_2] .$$

Setzt man die Unbekannten u_1, u_2, \dots, u_m in das ursprüngliche Modell $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ ein, so erhält man die Lösung der Ausgleichung nach maximaler Korrelation, die in diesem Fall eindeutig ist, da das ursprüngliche Modell keine der Eigenschaften (3.64), (3.66), (3.68) aufweist.

