

Volker Schwieger

**Nicht-lineare Sensitivitätsanalyse
gezeigt an Beispielen zu bewegten Objekten**

München 2005

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**

Nicht-lineare Sensitivitätsanalyse
gezeigt an Beispielen zu bewegten Objekten

Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart

Habilitationsschrift

vorgelegt von

Dr.-Ing. Volker Schwieger

München 2005

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

Deutsche Geodätische Kommission

Marstallplatz 8 • D – 80 539 München

Telefon +49 - (0)89 - 23 031 -0 / -1113 • Telefax +49 - (0)89 - 23 031 -1283 / -1100

E-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://dgk.badw.de>

Hauptberichter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Möhlenbrink

Mitberichter: Univ.-Prof. Dr.-Ing.habil. Lothar Gründig

Vollzug der Habilitation: 21. Juli 2004

© 2005 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Kurzfassung

Eine wichtige Aufgabenstellung der Ingenieurgeodäsie ist die Auswertung von Messwerten mittels geeigneter Modelle sowie die Validierung und Optimierung dieser Modelle. Da zunehmend komplexere und nicht-lineare Modelle Eingang in ingenieurgeodätische Fragestellungen finden, wird in dieser Arbeit eine von den Modelleigenschaften unabhängigen Validierungsmethode, die varianz-basierte Sensitivitätsanalyse, eingeführt und für bewegte Objekte eingesetzt.

Die Arbeit gibt zunächst einen Überblick über die verschiedenen Methoden der Sensitivitätsanalyse. Dabei konzentriert sie sich auf stichproben-basierte Methoden, die auf Monte-Carlo Simulationen aufbauen. Zunächst werden die Regressionsanalyse, die für lineare Modelle eine geeignete Sensitivitätsanalysemethode darstellt, und die Rangregressionsanalyse, die auch Analysen für nicht-lineare aber monotone Modelle zulässt, beschrieben. Anschließend wird die Bedeutung der von den Modelleigenschaften unabhängigen varianz-basierten Sensitivitätsanalysemethoden herausgearbeitet. Diese sind die Methode nach SOBOL, die durch mehrdimensionale Mittelung zu quantitativen Ergebnissen führt, und der FOURIER Amplitude Sensitivity Test, der dasselbe mit geringerem simulativen Aufwand im Frequenzbereich realisiert.

Die vorgestellten Methoden werden für zwei Beispiele umgesetzt. Zum einen wird die Konfiguration zur Höhenüberwachung einer Kirche beurteilt; zum anderen wird die Trajektorienbestimmung mit Hilfe eines Kreismodells für Kraftfahrzeuge validiert. Beide Anwendungen bedienen sich angepassten KALMAN-Filteralgorithmen.

Für die Höhenüberwachung kann ein lineares Modellverhalten aufgezeigt werden. Außerdem kann abgeleitet werden, dass konfigurationsbedingt die Messgenauigkeiten einiger Höhenmesspunkte im Gegensatz zu denen anderer Messpunkte einen deutlich größeren Einfluss auf die Varianzen der geschätzten Bewegungsparameter haben. Für die Trajektorienbestimmung kann eine wesentliche Beeinflussung der Varianzen der Zustandsparameter der Trajektorie durch die Erfassungsgenauigkeit der GPS Koordinaten festgestellt werden. Das Modell weist nicht nur nicht-lineares sondern auch nicht-additives Verhalten auf.

Abstract

One important task of engineering geodesy is the evaluation of measurements by suitable models and the validation and optimisation of these models. Currently more complex and non-linear models are used in engineering geodesy. Therefore a model independent validation method, the variance-based sensitivity analysis method is introduced and applied to moving objects.

An overview about different sensitivity analysis methods is given. Thereby the focus is on sample-based methods, that base on Monte-Carlo simulation. First of all the regression analysis and the rank regression analysis are described. These methods are used for the sensitivity analysis of linear respectively non-linear but monotone models. Subsequently the importance of a sensitivity analysis methods that are independent of model characteristics is shown. These are SOBOLs method, that uses multidimensional averaging to get quantitative results and the FOURIER Amplitude Sensitivity Test, that realises the same in the frequency domain.

The presented methods are applied for two examples. Firstly the configuration for the height monitoring of a church is validated. Secondly the determination of a trajectory of motor vehicle using a circle model is controlled. For both applications adapted KALMAN filter algorithms are used.

For the height monitoring problem a non-linear model behaviour can not be proved. Besides it can be shown that the variances of some height points have a decisive influence on the variances of the estimated movement parameters. For the second application the analysis shows, that the variances of the state parameters of the trajectory determination are effected decisively by the variances of the GPS coordinates. The model shows a non-linear as well as a non-additive behaviour.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Motivation der Arbeit.....	5
1.2	Sensitivitätsanalyse	5
1.3	Sensitivitätsanalyse in der Ingenieurgeodäsie	6
1.4	Ziel und Aufbau dieser Arbeit	8
2	Grundlagen der Sensitivitätsanalyse	10
2.1	Definition und Ziele der Sensitivitätsanalyse	10
2.2	Überblick zu den Methoden der Sensitivitätsanalyse	11
2.3	Lokale Sensitivitätsanalyse	14
2.4	Globale Sensitivitätsanalyse.....	16
2.4.1	Grundlagen und allgemeine Vorgehensweise	16
2.4.2	Stichprobengenerierung.....	19
2.4.3	Regressions- und Korrelationsanalyse	22
2.4.4	Rangtransformation	25
2.4.5	Varianz-basierte Sensitivitätsanalysemethoden	28
2.4.5.1	Grundlagen.....	28
2.4.5.2	Sobols Methode	29
2.4.5.3	FOURIER Amplitude Sensitivity Test (FAST)	34
2.4.5.4	Korrelierte Eingangsgrößen	40
2.4.6	Zusammenfassung und Eingangsgrößengruppen	42
2.5	Weitere Betrachtungen zur Sensitivitätsanalyse	43
3	Sensitivitätsanalyse in der Ingenieurgeodäsie	46
3.1	Definition der Sensitivitätsanalyse in der Ingenieurgeodäsie	46
3.2	Sensitivität von Überwachungsnetzen.....	49
3.3	Sensitivität gegenüber fehlerhaften Beobachtungen.....	52
3.4	Weitere Anwendungen in der Geodäsie.....	55
3.5	Möglichkeiten der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse	56
4	Untersuchungen zur nicht-linearen Sensitivitätsanalyse für bewegte Objekte	57
4.1	Vorgehensweise	57
4.2	Anwendungsbeispiele.....	57
4.2.1	Exemplarische Funktionen.....	57
4.2.2	Kinematische Höhenüberwachung	59
4.2.3	Multisensorsystem zur Fahrzeugortung.....	63
4.3	Gegenüberstellung der Sensitivitätsanalysemethoden	68
4.4	Sensitivitätsanalyse der Anwendungsbeispiele.....	79
4.4.1	Kinematische Höhenüberwachung	79
4.4.2	Multisensorsystem zur Fahrzeugortung.....	82
5	Zusammenfassung und Ausblick	92
6	Literatur	94
	Anhang A	98
	Anhang B	99
	Lebenslauf und Dank	100

1 Einführung

1.1 Motivation der Arbeit

Eine wichtige Aufgabenstellung der Ingenieurgeodäsie ist die Auswertung von Messwerten in kinematischen Modellen. In der Regel wird sich dabei der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, die auf linearen oder mittels Näherungswerten linear entwickelten und damit linearisierten Ansätzen basiert, bedient. In der Folge beschränkte sich die ingenieurgeodätische Sensitivitätsanalyse auf linear formulierte Problemstellungen.

Mit der zunehmenden Bedeutung von kinematischen Messverfahren durch die Einführung automatischer Messsysteme werden bei schnellen Bewegungsvorgängen wie in der Fahrzeugnavigation immer komplexere Modelle notwendig.

Methoden der nicht-linearen oder von den Modelleigenschaften unabhängigen Sensitivitätsanalyse spielten in der Vergangenheit eine untergeordnete Rolle. Es ist hervorzuheben, dass gerade der Schritt der Linearisierung Untersuchungen bezüglich der Nicht-Linearität der realen Zusammenhänge, die in einem linearisierten Modell abgebildet sind, erforderlich macht. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit von den Modelleigenschaften unabhängige, die varianz-basierten, Sensitivitätsmaße eingesetzt.

1.2 Sensitivitätsanalyse

Um einen Teil der Realität, zum Beispiel ein Bauwerk, ein sich bewegendes Fahrzeug oder das sich verändernde ökologische System, in mathematisch fassbare Zusammenhänge abzubilden, ist ein Modell zu entwickeln. Da ein Modell die Realität bestmöglich annähern sollte – eine Annäherung wird es in jedem Fall immer bleiben – ist es erforderlich, das Modell schrittweise zu entwickeln, zu validieren und zu optimieren.

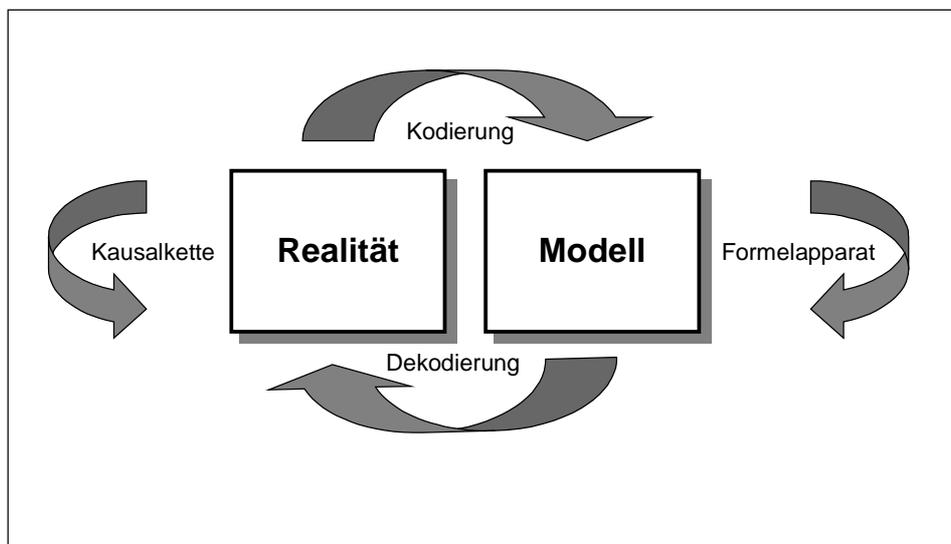


Abb. 1: Formaler Vorgang bei der Modellierung (verändert nach ROSEN 1991)

In der realen Welt verläuft ein Prozess aufgrund von Kausalketten in einem natürlichen System ab. Durch formale Abläufe wird versucht, dieses kausale Verhalten bestmöglich im Modell anzunähern. Die Kodierung der Realität in ein zu entwickelndes Modell sowie die Dekodierung in die Realität liegen in der Hand des

Wissenschaftlers und sind für den Erfolg des Modells von entscheidender Bedeutung. Der Zusammenhang zwischen realem System und Modell wird in Abbildung 1 aufgezeigt.

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Kodierung und Dekodierung stellt die Sensitivitätsanalyse dar. Die Sensitivitätsanalyse untersucht die Sensitivität oder Empfindlichkeit eines Modells bezüglich Änderungen oder Störungen eines Systems. Diese Variationen können sowohl die Eigenschaften des Modells als auch die Charakteristika der Eingangsgrößen betreffen. In der Regel ist der Einfluss auf die Ausgangsgrößen eines Modells das Ziel der Sensitivitätsanalyse. Die Ausgangsgrößen werden in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen oder der Modellvariation analysiert. Die Sensitivitätsanalyse dient im Allgemeinen der Validierung oder der Optimierung von Modellen. Der Begriff der Sensitivitätsanalyse ist in verschiedenen Fachdisziplinen zum Teil unterschiedlich definiert. Einen guten Überblick bieten SALTELLI et al. (2000), die anhand der dargestellten Anwendungen die unterschiedlichen Sichtweisen darlegen.

Die Sensitivitätsanalyse kann auf eine lange Forschungstradition zurückblicken. Seit vielen Jahren beschäftigen sich die Untersuchungen mit der Analyse linearer Modelle. Die Ergebnisse sind in Lehrbüchern zusammengefasst (z.B. CHATTERJEE u. HADI 1988; DEIF 1986). Diese Methoden haben den Nachteil, dass sie für nicht-lineare Modelle – die überwiegende Mehrzahl der real vorliegenden Systeme erfordern eine derartige Modellbildung – keine quantitative Aussage bezüglich der Sensitivität erlauben. Diese Problematik steht durchgehend im Interesse der Forschung, konnte aber erst in den letzten Jahren, zum Einen aufgrund der vergrößerten Rechnerleistungen, zum Anderen aufgrund neuester Entwicklungen im Bereich der globalen und zugleich varianz-basierten Analysemethoden einer Lösung zugeführt werden. Zwei wesentliche Entwicklungen ermöglichen die von den Eigenschaften des Modells unabhängige Sensitivitätsanalyse:

- die Sensitivitätsindizes nach SOBOL und
- die Indizes des FOURIER Amplituden Sensitivitätstests (FAST).

Beide Methoden stellen modellunabhängige varianz-basierte Sensitivitätsmaße zur Verfügung. SOBOLs Sensitivitätsindizes wurden Anfang der neunziger Jahre entwickelt (SOBOL 1990; SOBOL 1993). Für die FAST Indizes wurden die Grundlagen bereits in den siebziger Jahren veröffentlicht (CUKIER et al. 1973, 1975 u. 1978; SCHAIBLY u. SHULER 1973). Die Modellunabhängigkeit konnte für die FAST Methode dagegen erst mit deren Weiterentwicklung zur „erweiterten FAST Methode“ Ende der neunziger Jahre erreicht werden (SALTELLI et al. 1999). Auf Basis der genannten Entwicklungen setzte in den letzten Jahren eine umfassende Forschungstätigkeit ein. Stellvertretend seien die Proceedings zu den Konferenzen „International Symposium on Sensitivity Analysis of Model Output“ in den Jahren 1998 (SAMO 1998), 2001 und 2004 (SAMO 2004) genannt. Eine exzellente Zusammenfassung der Sensitivitätsanalysemethoden findet sich in SALTELLI et al. (2000). Für das Jahr 2004 ist eine Publikation zur Anwendung der Sensitivitätsanalyse in der Praxis angekündigt (SALTELLI et al. 2004). Die Sensitivitätsanalyse stellt folglich einen traditionsreichen, aber auch ausgesprochen aktuellen Forschungsbereich dar, der aus ingenieurgeodätischer Sicht aufgearbeitet und zur Modellierung bewegter Objekte angewendet werden soll.

1.3 Sensitivitätsanalyse in der Ingenieurgeodäsie

Die Ingenieurgeodäsie beschäftigt sich im überwiegenden Maße damit, Messwerte mit Hilfe geeigneter Modelle auszuwerten. Dabei stand in der Vergangenheit und steht auch heute noch die Erzeugung von Koordinaten und anderen geometriebezogenen Maßen im Vordergrund. Diese Maße können zeitunabhängig und zeitabhängig betrachtet werden. Beides ist bereits Gegenstand der ingenieurgeodätischen Praxis. In der Forschung werden dynamische Modelle entwickelt und eingesetzt, die neben der Beschreibung der Geometrie auch die Schätzung dynamischer Ausgangsgrößen beinhalten.

Bisher ist der Begriff Sensitivitätsanalyse in der Ingenieurgeodäsie in sehr starkem Maße mit der Sensitivität von Überwachungsnetzen gegenüber a priori erwarteten individuellen Bewegungen oder vollständigen das Bewegungsverhalten des zu überwachenden Objektes beschreibenden Deformationsmodellen verbunden (z.B. NIEMEIER 1985 oder HECK 1986). Bei diesen Anwendungen kann die Konfiguration eines ingenieur-

geodätischen Netzes aufgrund vorgegebener Deformationsmodelle beurteilt und optimiert werden. Neben der Konfiguration kann auch das stochastische Modell und damit das zu verwendende Instrumentarium diesbezüglich analysiert werden.

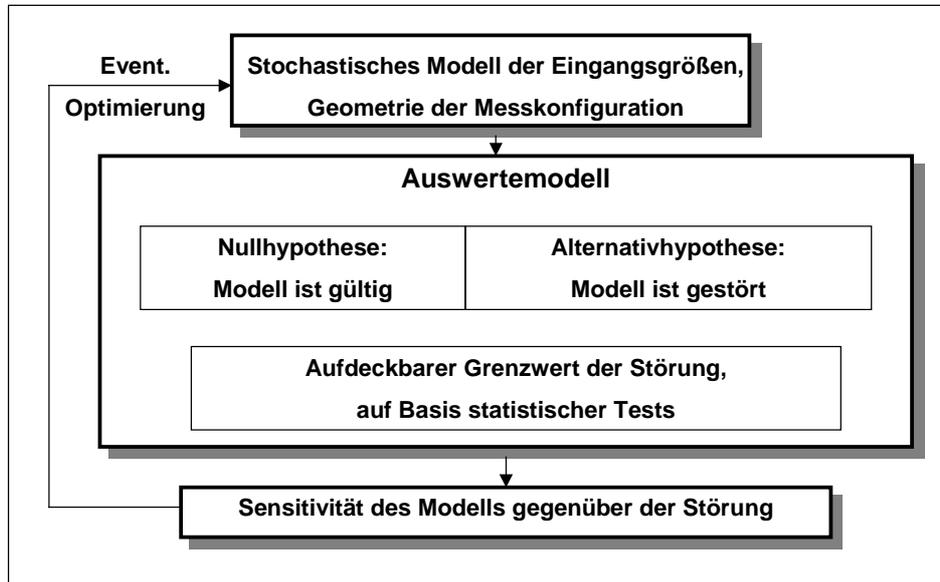


Abb. 2: Vorgehensweise der Sensitivitätsanalyse in der Ingenieurgeodäsie

Allgemein formuliert wird eine Nullhypothese vom ungestörten Modell aufgestellt, der eine Alternativhypothese von einem, in diesem Fall durch die Deformationen beziehungsweise Bewegungen, gestörten Modell gegenübergestellt wird. Bezogen auf diese übergreifende Definition bezüglich gestörter Modelle, kann zum Beispiel auch die Störung eines Ausgleichsmodells durch grobe Fehler, sogenannte Ausreißer, als Sensitivitätsproblem betrachtet werden (GRIMHARDT 1986). Die allgemeine Vorgehensweise ist in Abbildung 2 beschrieben.

Die überwiegende Mehrzahl der Publikationen bezieht sich auf die Optimierung geodätischer Netze, baut dabei auf der durch GAUSS begründeten „Methode der kleinsten Quadrate“ (GAUSS 1809) auf und hat durchgehend Bezüge zur Ausgleichsrechnung (z.B. PELZER 1985; KOCH 1997; NIEMEIER 2002). Die der Ausgleichsrechnung zugrundeliegenden Modelle sind entweder linear oder mittels Näherungswerten linear entwickelt und damit linearisiert. Methoden der nicht-linearen oder sogar von den Modelleigenschaften unabhängigen Sensitivitätsanalyse spielten daher in der Vergangenheit eine untergeordnete Rolle. Es ist aber darauf hinzuweisen, dass gerade der Schritt der Linearisierung Untersuchungen bezüglich der Nicht-Linearität der realen Zusammenhänge erforderlich macht, die in einem linearisierten Modell abgebildet sind.

In den letzten Jahren wurden Forschungsarbeiten vorangetrieben, die ergänzend zur Ausgleichsrechnung nach kleinsten Quadraten eingesetzt werden können. KUTTERER (1994, 1999) erweiterte die Methoden der Ausgleichsrechnung nach kleinsten Quadraten durch Verfahren der Intervallmathematik basierend auf DEIF (1986). Er zeigt die Nutzbarkeit dieser Methoden vor allem für zuverlässigkeitsbezogene Fragestellungen auf. WIESER (2002) zeigt den Einsatz robuster Sensitivitätsmaße gleichfalls für den Bereich der Zuverlässigkeit auf. Den beiden vorgestellten Arbeiten ist jedoch – wie den auf der Ausgleichsrechnung basierenden Methoden – gemein, dass das zu untersuchende Modell dem Analysten bis in die Einzelheiten bekannt sein muss. Im Rahmen dieser Arbeit wird dagegen eine Methode vorgestellt, die ohne Kenntnis über die Eigenschaften des zu untersuchenden Modells verwertbare Informationen zur Sensitivitätsanalyse liefert.

1.4 Ziel und Aufbau dieser Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Zielsetzungen verfolgt: eine methodisch motivierte und eine an konkreten Anwendungen orientierte.

Die Arbeit soll zum Einen aufzeigen, dass die varianz-basierte Sensitivitätsanalyse unabhängig von den Eigenschaften des zu analysierenden Modells einsetzbar ist. Im Extremfall kann ein unbekannter Computercode mit dieser Methode auf Sensitivität gegenüber den Eingangsgrößen analysiert werden. Zum Anderen dient die Arbeit dem Gewinn neuer Erkenntnisse in den später beschriebenen Anwendungen für bewegte Objekte. Diese Zielsetzungen erfordern die im Folgenden aufgeführte Gliederung.

Nach der Einleitung werden im zweiten Kapitel die theoretischen Grundlagen der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse beschrieben. Hierfür wird zunächst ein Überblick bezüglich Definitionen, Zielen und Methoden der Sensitivitätsanalyse gegeben. Danach werden die meist analytisch ermittelten lokalen Sensitivitätsmaße vorgestellt, da diese die Ableitung der – im Rahmen dieser Arbeit zentralen – globalen Sensitivitätsmaße erleichtern. Anschließend erfolgt eine ausführliche Darstellung der globalen Sensitivitätsanalyse. Dabei handelt es sich um Methoden, die sich der Monte-Carlo-Simulation bedienen, das heißt mit zufällig generierten Stichproben arbeiten. Für lineare Modelle können hierfür Methoden der Regressions- und Korrelationsanalyse angewandt werden. Für nicht-lineare, aber monotone Modelle kann auf die Rangtransformation mit nachgeschalteter Regressions- und Korrelationsanalyse zurückgegriffen werden. Zentraler Abschnitt dieses Kapitels ist aber, wie bereits erwähnt, die Entwicklung der varianz-basierten modellunabhängigen Sensitivitätsmaße. Hier werden SOBOLs Sensitivitätsindizes und die FAST Indizes ausführlich erläutert. Das Kapitel schließt mit der Aufarbeitung von Definitionen und Methoden zu Sensitivitätsanalyse in verschiedenen Fachgebieten ab.

Das dritte Kapitel beschreibt die Definition des Begriffs Sensitivität für das Fachgebiet der Geodäsie und hier insbesondere der Ingenieurgeodäsie. Die Sensitivitätsanalyse für Überwachungsnetze und die Sensitivität gegenüber fehlerhaften Beobachtungen werden detailliert beschrieben. Außerdem erfolgt die Integration der in der Geodäsie bekannten Sensitivitätsanalysemaße in den allgemeinen Kontext der Sensitivitätsanalyse.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der Anwendung der Regressionsanalyse und der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse auf zwei Beispiele aus dem ingenieurgeodätischen Anwendungsbereich. Dabei werden zum Einen die beiden Beispiele genutzt, um die Möglichkeiten der Sensitivitätsanalyse aufzuzeigen, und zum Anderen wird gezeigt, dass sich die zuvor dargestellten Sensitivitätsmaße sehr gut eignen, um Modelleigenschaften wie Nicht-Linearität zu erkennen.

Im ersten Beispiel wird die Höhenüberwachung einer Kirche behandelt. Das zugehörige Nivellementsnetz wurde über einen Zeitraum von drei Jahrzehnten in mehreren Epochen vermessen, so dass eine kinematische Auswertung durchgeführt werden kann. Ein komplexer Ansatz modelliert die Geschwindigkeiten als polynomiale Fläche 2.Ordnung. Er umfasst die Schätzung der Parameter der Geschwindigkeitsfläche. Die Sensitivitätsanalyse zeigt den Einfluss individueller Höhenänderungen auf die verschiedenen Flächenparameter auf. Es kann gezeigt werden, dass der Einfluss der einzelnen Höhenmesspunkte auf die Parameter der Geschwindigkeitsfläche geometriebedingt unterschiedlich ist.

Die zweite Anwendung kommt aus dem hochaktuellen Forschungsgebiet der Kraftfahrzeugnavigation und basiert auf der Bestimmung der Parameter einer Trajektorie als Zustandsgrößen eines KALMAN-Filters (zweidimensionale Position, Orientierung und Geschwindigkeit) sowie zusätzlich die Zentripetalbeschleunigung. Die Eingangsgrößen sind die Messgrößen: horizontale Koordinaten, Orientierungsänderungen und Streckeninkremente. Die durchgeführte Sensitivitätsanalyse untersucht die Sensitivitätsindizes in Abhängigkeit von unterschiedlichen Fahrsituationen und zeigt dabei, dass der Einfluss der Messgrößen auf die Ausgangsgrößen zum Einen sehr unterschiedlich und zum Anderen vom jeweiligen Fahrverhalten abhängig ist.

Das abschließende Kapitel stellt die wesentlichen Ergebnisse der zuvor betrachteten – in unterschiedlichen Zeitskalen und Dynamikbereichen ablaufenden – Anwendungen zusammen. Dabei wird gezeigt, dass die

varianz-basierten Sensitivitätsmaße sich sehr gut eignen, um für die beiden Anwendungen die Modelleigenschaften zu identifizieren. Auch die Eingangsgrößen, deren Varianzen die Varianzen der Ausgangsgrößen am stärksten beeinflussen, können identifiziert werden. Für die Höhenüberwachung kann abgeleitet werden, dass konfigurationsbedingt die Messgenauigkeit für einige Höhenmesspunkte einen deutlich größeren Einfluss auf die Varianzen der geschätzten Geschwindigkeitsflächenparameter nimmt als dieselbe der weiteren Höhenmesspunkte. Für die Trajektorien-schätzung kann aufgrund der Sensitivitätsanalyse eine wesentliche Beeinflussung der Varianz der Trajektorie durch die Erfassungsgenauigkeit der GPS-bestimmten Koordinaten festgestellt werden.

2 Grundlagen der Sensitivitätsanalyse

2.1 Definition und Ziele der Sensitivitätsanalyse

Mit der Sensitivitätsanalyse untersucht man nach SALTELLI et al. (2000) die Beziehungen zwischen Informationen, die in ein Modell eingeführt werden und denen, die aus demselben Modell herauskommen. In Analogie zur Systemtheorie soll von Eingangsgrößen (Input) und Ausgangsgrößen (Output) gesprochen werden.

Originär werden in der Sensitivitätsanalyse nur die Unsicherheiten der Eingangsgrößen behandelt; die Unsicherheiten der Modelleigenschaften und Modellparameter können inzwischen ebenfalls berücksichtigt werden. Die Sensitivitätsanalyse kann demzufolge zur Validierung von Modellen eingesetzt werden. Als Eingangsgrößen werden neben den variablen Daten, in der Regel Messgrößen beziehungsweise Beobachtungen, auch einzelne Modellparameter oder das Gesamtmodell aufgefasst. CHATTERJEE und HADI (1988) sprechen von der Sensitivität gegenüber Variablen, Beobachtungen und Modellannahmen. Dieses unterscheidet die Sensitivitätsanalyse von den Definitionen in der Systemtheorie, bei der die modellbezogenen Parameter nicht als Eingangsgrößen aufgefasst werden. Abbildung 3 zeigt die generelle Vorgehensweise im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse.

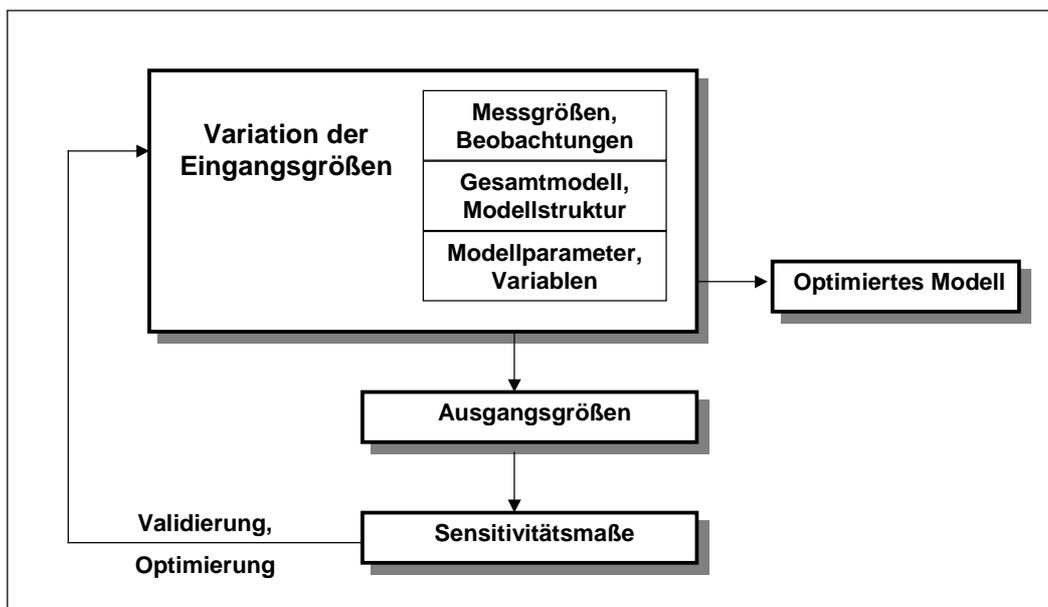


Abb. 3: Vorgehensweise bei der Sensitivitätsanalyse

Die Ziele der Sensitivitätsanalyse können unterschiedlich definiert werden; gemein sind allen Zielsetzungen und Methoden der Sensitivitätsanalyse die Analyse der Beziehungen zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen eines Modells. Nachfolgend werden die verschiedenen Ziele von Sensitivitätsanalysen aufgeführt (erweitert nach SALTELLI et al. 2000). Die Ziele sind nicht immer streng trennbar und können zum Teil mit identischen Analysemethoden erreicht werden.

- **Modellvalidierung**
Die Modellvalidierung untersucht die Übereinstimmung von Realität und Modell. Der Gegenstand der Analyse ist folglich die Gültigkeit des Modells im Vergleich mit realen Prozessen.
- **Modelloptimierung**
Die Modelloptimierung beschäftigt sich mit der Effizienzsteigerung des Modells, insbesondere hinsichtlich der Reduktion der Komplexität von Modellen aufgrund von Parametern oder Modell-

eigenschaften, die keine Rolle bei der Bestimmung der Ausgangsgrößen spielen. Es können beispielsweise Modellparameter bestimmt werden, die ohne Informationsverlust eliminiert werden können. Häufig wird in der Literatur auch hier von Modellvalidierung gesprochen.

- **Identifikation wichtiger Eingangsgrößen**

Dieses Ziel umfasst das Aufstellen einer Reihenfolge der Eingangsgrößen in Abhängigkeit von der numerischen Größe des Einflusses. Die Reihenfolge wird als qualitative Festlegung des Einflusses bezeichnet, die numerische Größe als quantitative Festlegung desselben. Die Ergebnisse können Grundlage einer Modelloptimierung sein.

- **Identifikation von Modelleigenschaften**

Mit Hilfe der in den nachfolgenden Abschnitten vorgestellten Sensitivitätsanalysemethoden können grundlegende Modelleigenschaften wie Linearität oder Additivität festgestellt oder überprüft werden. Auch die Ermittlung von modellbedingten Abhängigkeiten unter den Eingangsgrößen kann Ziel einer derartigen Sensitivitätsanalyse sein.

- **Risikobewertung**

Zur Risikoabschätzung ist zunächst eine Grenzfunktion anzugeben, bei der ein Versagen des zu analysierenden Modells erwartet wird. Anschließend erfolgt eine Sensitivitätsanalyse für den Bereich dieser Grenzfunktion, die beispielsweise für das Versagen kritische Eingangsgrößen identifiziert. Dieses kann wiederum auf Basis der Reihenfolge der Eingangsgrößen erfolgen.

2.2 Überblick zu den Methoden der Sensitivitätsanalyse

Die Methoden zur Sensitivitätsanalyse lassen sich zunächst grob in die Screening Methoden, die nur qualitative Aussagen erlauben, und in Methoden, die quantitative Aussagen zulassen, einteilen. Die erstgenannten Methoden werden insbesondere dann eingesetzt, wenn einerseits eine Vielzahl von Eingangsgrößen berücksichtigt werden muss und andererseits die Modelle sehr komplex sind und daher die quantitativen Methoden nur unter sehr hohem Rechenaufwand einzusetzen sind. Sie dienen dann zur ersten Priorisierung der Eingangsgrößen und damit zur Herabsetzung des Rechenaufwandes für die quantitativen Methoden, da bei deren Durchführung bereits Vorinformationen vorhanden sind. Typische Screening Methoden sind die „one-at-a-time-Experimente“ (OAT-Design) und das Morris-Design (z.B. CAMPOLONGO et al. 2000b; MORRIS 2004). Die in der Geodäsie genutzten Modelle erfordern in der Regel kein Screening, da der Rechenaufwand für eine vollständige Sensitivitätsanalyse beispielsweise im Vergleich zu einer Sicherheitsabschätzung zur Nuklearabfallbeseitigung (SALTELLI u. TARANTOLA 2002) oder Modellierung ökologischer Systeme (OSIDELE u. BECK 2004) gering ist. Andererseits weisen gerade geodätische Auswertemodelle häufig eine sehr hohe Anzahl an Eingangsgrößen, den Messgrößen oder Beobachtungen, auf. Wie in Abschnitt 2.4.5.4 gezeigt wird, können aber Messgrößen zu Gruppen zusammengefasst und auf diesem Weg eine quantitative Sensitivitätsanalyse ermöglicht werden. Der Fokus dieser Arbeit liegt folglich auf den quantitativen Methoden.

Des Weiteren wird zwischen lokalen und globalen quantitativen Methoden unterschieden. Das Kennzeichen der lokalen Methoden ist die Variation von immer nur einer Einflussgröße zur selben Zeit, wobei die anderen Eingangsgrößen festgehalten werden. Die Sensitivitätsmaße sind folglich eindimensional und basieren durchgehend auf partiellen Ableitungen; zum Beispiel die normierten Sensitivitätsindizes nach Abschnitt 2.3. Die lokalen Methoden können als äquivalent zu den Methoden der Differentialanalyse angesehen werden. Sie erlauben nur Aussagen bezüglich des Modellverhaltens innerhalb eines Intervalls um den Wert, an dem die partielle Ableitung gebildet wurde. Für lineare Modelle umfasst dieses Intervall den gesamten Modellbereich. Lokale Sensitivitätsmaße sind für lineare Modelle folglich als global anzusehen.

Im Gegensatz hierzu werden bei den globalen quantitativen Methoden sowohl die Verteilungsfunktionen der Eingangsgrößen als auch die gleichzeitige Variation aller Eingangsgrößen berücksichtigt. Die Sensitivitätsmaße beziehen sich nicht nur auf ein Intervall des Modells, da die Eingangsgrößen den gesamten möglichen

Variationsbereich durchlaufen. Die sich ergebenden Sensitivitätsmaße sind folglich für den gesamten Modellbereich gültig. Auf diesem Wege werden auch die Abhängigkeiten unter den verschiedenen Eingangsgrößen berücksichtigt. Die Vorgehensweise führt zu mehrdimensional gemittelten Sensitivitätsmaßen (z.B. CAMPOLONGO et al. 2000a). Globale Methoden sind folglich gegenüber lokalen Methoden zu bevorzugen; sie erfordern aber auch einen größeren Rechenaufwand, da sie auf Simulationsmethoden wie der Monte-Carlo-Methode basieren (vergleiche Abschnitt 2.4: Regressionsanalyse und verwandte Methoden, SOBOLs Methode, FAST).

Eine weitere essentielle Eigenschaft ist die Modellunabhängigkeit der Sensitivitätsanalysemethode. Es existieren Methoden, die nur auf lineare Modelle anzuwenden sind; andere sind auf monotone oder additive Modelle beschränkt. Nur einige wenige Methoden und damit auch nur wenige Sensitivitätsmaße können unabhängig vom eingesetzten Modell verwendet werden. Diesen letztgenannten Maßen soll im Rahmen dieser Arbeit Priorität eingeräumt werden, da sie den Vorteil der fehlerfreien Anwendung ohne weitere Kenntnis des Modellverhaltens beinhalten. Für Modelle mit bekannten nachfolgend aufgeführten Eigenschaften können weniger aufwendige Methoden eingesetzt werden.

An dieser Stelle werden zunächst die zuvor genannten Modelleigenschaften definiert. Bei einem linearen Modell lässt sich die Ausgangsgröße Y immer mit Hilfe der Koeffizienten c_0 bis c_n in der Form

$$Y = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cdot X_i \quad (2.2.1)$$

aus den Eingangsgrößen X_i ableiten. Lineare Modelle (z.B. in der Ausgleichsrechnung) werden häufig aufgrund ihrer wenig komplexen Struktur eingesetzt. Die Vereinfachung der in der Regel nicht-linearen Realität ist für viele Anwendungsfälle aus Gründen der Effizienz wünschenswert und bei geringer Abweichung von der Realität auch zulässig.

Die Definition eines monotonen Modells wird wie folgt gegeben. Es ist zunächst von Folgen für Eingangs- oder Ausgangsgrößen mit je u Realisierungen auszugehen. Dabei ist es für die Monotoniedefinition zunächst ohne Bedeutung, ob es sich um Realisierungen y_k der Ausgangsgröße Y oder $x_{i,k}$ der Eingangsgrößen X_i mit $k = 1, 2, \dots, u$ handelt, daher wird nur die Definition für die Ausgangsgröße angegeben. Eine Folge von Realisierungen y_k heißt

$$\begin{aligned} \text{monoton steigend für } & y_k < y_{k+1} \quad \text{mit } k = 1, 2, \dots, u-1 \quad \text{und} \\ \text{monoton fallend für } & y_k > y_{k+1} \quad \text{mit } k = 1, 2, \dots, u-1. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Eine Folge, die entweder monoton fallend oder monoton steigend ist, heißt monoton.

Liegen mehrere Eingangsgrößen X_i vor, so heißt eine Folge von u Realisierungen der n Eingangsgrößen gleichzeitig monoton wachsend, wenn für jede Eingangsgröße die Folge ihrer Realisierungen eine monoton wachsende Folge bildet. Dieser Zusammenhang kann auf die Bezeichnungen gleichzeitig monoton fallend und gleichzeitig monoton übertragen werden. Ein Modell heißt in der Folge monoton, wenn jede gleichzeitig monotone Folge von Realisierungen der Eingangsgrößen eine monotone Folge von Realisierungen der Ausgangsgrößen ergibt.

Bei einem additiven Modell kann man die Abhängigkeit der Ausgangsgröße Y von den Eingangsgrößen X_i so darstellen:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n f_i(X_i). \quad (2.2.3)$$

Ein Modell ist genau dann additiv, wenn das zweimalige Ableiten des Modells nach zwei verschiedenen Eingangsgrößen immer den Wert Null ergibt. Ist ein Modell additiv, so kann jede Eingangsgröße auch einzeln variiert werden, um das Modellverhalten korrekt zu analysieren.

Abschließend sei bemerkt, dass die linearen Modelle spezielle additive Modelle darstellen. Ein lineares Modell weist daher immer auch additive Eigenschaften auf. Ein monotonen Modell kann dagegen additiv sein, muss es aber nicht. Abbildung 4 fasst die Modelleigenschaften und deren Zusammenhänge zusammen.

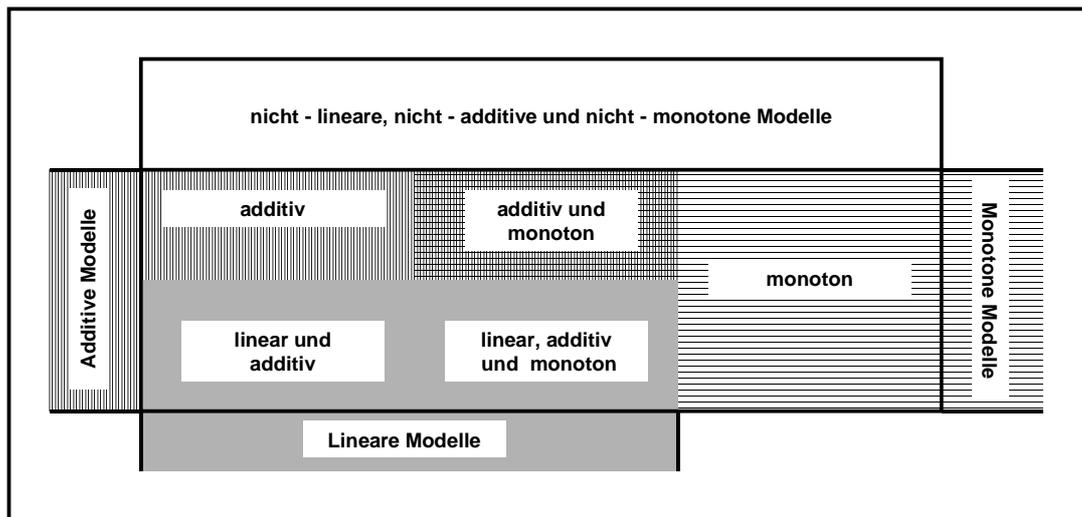


Abb. 4: Modelleigenschaften

Tabelle 1 führt die wesentlichen – zum Teil in den nachfolgenden Kapiteln behandelten – Sensitivitätsanalysemethoden auf und stellt sie in den Zusammenhang der zuvor beschriebenen Eigenschaften. Die in dieser Arbeit umgesetzten Sensitivitätsanalysemethoden sind fett gedruckt.

Tab. 1: Ausgewählte Sensitivitätsanalysemethoden und deren Eigenschaften
(in dieser Arbeit umgesetzte Methoden sind fett dargestellt)

Sensitivitätsanalysemethoden	Aussage	Gültigkeit	Modelleinschränkung
OAT-Design	qualitativ	lokal	linear
Morris-Design	qualitativ	global	nein
Normierte Sensitivitätsindizes	quantitativ	lokal	linear
Regressions- und Korrelationsanalyse	quantitativ	global	linear
Rangregressions- und Rangkorrelationsanalyse	quantitativ	global	monoton und additiv
Sensitivitätsindizes 1. Ordnung (SOBOL / FAST)	quantitativ	global	additiv
SOBOLs Sensitivitätsindizes	quantitativ	global	nein
Erweiterte FAST Indizes	quantitativ	global	Nein

2.3 Lokale Sensitivitätsanalyse

In diesem Abschnitt wird eine vektorielle Ausgangsgröße $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ mit dem Eingangsgrößenvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ betrachtet. Die lokalen Sensitivitätsmaße beziehen sich auf die Nominalwerte für die Eingangsgrößen, also auf die gewählten Näherungswerte \mathbf{X}_0 . Besteht zwischen den Eingangsgrößen X_i und den Ausgangsgrößen Y_j ein linearer Zusammenhang, so sind die numerisch festgelegten lokalen Sensitivitätsmaße unabhängig von der Wahl der \mathbf{X}_0 . Eine Anwendung in der Geodäsie ist die Ausgleichung von Nivellementsnetzen (z.B. PELZER 1985, NIEMEIER 2002). In diesem Fall wird ein lineares Gauß-Markov-Modell herangezogen. In der Folge können für diese Anwendung bedenkenlos lokale Sensitivitätsmaße herangezogen werden.

Liegt kein lineares Modell vor, so hilft man sich häufig, indem das zunächst nicht-lineare Modell mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird, linearisiert wird. Das Ergebnis ist ein linearisiertes Modell, das aber nur korrekte Ergebnisse für \mathbf{Y} liefert, wenn die \mathbf{X}_0 so gewählt werden, dass sie repräsentativ sind und innerhalb der möglichen Variationsbreite für die Eingangsgrößen das linearisierte Modell und das nicht-lineare realitätsnähere Modell übereinstimmen. Diese Eigenschaft soll in der Folge als Linearitätsbedingung bezeichnet werden.

In der Folge sollen hier einige lokale Sensitivitätsmaße aufgeführt werden. Zur weiteren Vertiefung sei auf TURANYI u. RABITZ (2000) verwiesen. Alle lokalen Sensitivitätsmaße basieren auf partiellen Ableitungen der m Ausgangsgrößen Y_j nach den n Eingangsgrößen X_i . Im Rahmen der Sensitivitätsanalyse spricht man von Sensitivitätskoeffizienten

$$S_{ji} = \frac{\partial Y_j}{\partial X_i} \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, m \quad \text{und } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3.1)$$

die eine nicht symmetrische Sensitivitätsmatrix aufbauen

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.3.2)$$

Diese Sensitivitätsmatrix kann mit der Jacobi-Matrix, wie sie beispielsweise bei der Fehlerfortpflanzung genutzt wird (z.B. PELZER 1985), gleichgesetzt werden. Für eine einzelne Ausgangsgröße entartet die Matrix in (2.3.2) zum Zeilenvektor.

Die in (2.3.1) definierten Sensitivitätskoeffizienten erlauben eine Aussage bezüglich der Änderung der Ausgangsgrößen bei Änderung der Einflussgrößen. Diese Aussage ist abhängig von den Einheiten der verschiedenen Eingangsgrößen. Diese Problematik erfordert die Normierung der Sensitivitätskoeffizienten;

beispielsweise mit Hilfe des Quotienten von Eingangsgröße zu Ausgangsgröße $\frac{X_i}{Y_j}$ (BRAYTON und

SPENCE 1980). Außerdem gehen die Eingangsgrößen mit unterschiedlichen Gewichten, die durch Standardabweichungen σ_{X_i} festgelegt werden, in die Modellauswertung ein. In der Folge beeinflussen auch die Standardabweichungen σ_i die Ergebnisse, mit anderen Worten die Ausgangsgrößen Y_j , sowie deren Varianzen σ_j . Dieses kann mit einer varianzbezogenen Normierung berücksichtigt werden. In diesem Fall wird ein Quotient von Standardabweichung der Ausgangsgröße zu Standardabweichung der Eingangsgröße

$\frac{\sigma_i}{\sigma_j}$ genutzt. Da diese Arbeit sich schwerpunktmäßig mit varianz-basierten Methoden beschäftigt, wird hier nur die auf den Standardabweichungen aufbauende Lösung betrachtet. Diese erlaubt Aussagen über den Einfluss der Variation der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgrößen. Man nutzt die nachfolgend aufgeführten normierten Sensitivitätskoeffizienten

$$S_{ji}^{\sigma} = \frac{\partial Y_j}{\partial X_i} \cdot \frac{\sigma_{X_i}}{\sigma_{Y_j}} \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, m \quad \text{und } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3.3)$$

die wiederum eine nicht symmetrische Matrix, die normierte Sensitivitätsmatrix aufbauen

$$\mathbf{S}^{\sigma} = \begin{pmatrix} S_{11}^{\sigma} & S_{12}^{\sigma} & \cdots & S_{1n}^{\sigma} \\ S_{21}^{\sigma} & S_{22}^{\sigma} & \cdots & S_{2n}^{\sigma} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{m1}^{\sigma} & S_{m2}^{\sigma} & \cdots & S_{mn}^{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Diese normierten Sensitivitätskoeffizienten haben für lineare Modelle den Vorteil, dass

$$\sum_{i=1}^n (S_{ji}^{\sigma})^2 = 1 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, m \quad (2.3.5)$$

gilt. Diese Bedingung zeigt für lineare Modelle, dass unabhängig von der Anzahl der Gesamtkoeffizienten und den gewählten Nominalwerten \mathbf{X}_0 , unmittelbar der Anteil der Eingangsgröße X_i an der Varianz einer Ausgangsgröße Y_j abgeschätzt werden kann

$$S_{ji}^2[\%] = (S_{ji}^{\sigma})^2 \cdot 100. \quad (2.3.6)$$

An dieser Stelle sei die Bemerkung erlaubt, dass die analytische Methode zur Gewinnung von $\frac{\partial Y_j}{\partial X_i}$ nicht in allen Fällen realisierbar ist, insbesondere wenn die Modelle sehr komplex oder unbekannt sind. In der Regel wird man in diesen Fällen den Differentialkoeffizienten numerisch durch den Differenzenkoeffizienten $\frac{\Delta Y_j}{\Delta X_i}$ approximieren

$$\frac{\partial Y_j}{\partial X_i} \approx \frac{\Delta Y_j}{\Delta X_i} = \frac{Y_j(X_1, X_2, \dots, X_i + \Delta X_i, \dots, X_n) - Y_j(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)}{\Delta X_i}. \quad (2.3.7)$$

Zur Festlegung der Veränderung ΔX_i der Eingangsgröße X_i ist zwischen Nicht-Linearität und Rechengenauigkeit abzuwägen. Ist das analysierte Modell stark nicht-linear, so kann durch eine zu große Abweichung vom Wert X_i die Linearitätsbedingung verletzt und in der Folge die Ergebnisse verfälscht sein. Auf der anderen Seite kann die Festlegung eines zu kleinen ΔX_i dazu führen, dass Änderungen in Y_j nicht feststellbar sind und eventuell Rundungsfehler des Rechners eine größere Rolle spielen als das funktionale Modell. Es verbleibt eine Entscheidung des Nutzers, hier einen geeigneten Wert festzulegen.

BRAYTON und SPENCE (1980) weisen darauf hin, dass auch bei lokalen Maßen – entgegen den bisherigen Ausführungen – Beziehungen zwischen Eingangsgrößen berücksichtigt werden können. Hierfür ist analytisch mehrfach abzuleiten; um die Abhängigkeiten zweier Eingangsgrößen zum Beispiel X_1 und X_2 festzustellen, sind lokale Sensitivitätsmaße 2. Ordnung zu berechnen

$$S_{j12} = \frac{\partial^2 Y_j}{\partial X_1 \partial X_2} \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.3.8)$$

Dieses sei hier nur zur Vervollständigung angegeben.

In der Regel werden lokale Sensitivitätsmaße nur dann eingesetzt, wenn die Verwendung globaler Sensitivitätsmaße

- aufgrund bekannter Modelleigenschaften nicht erforderlich ist oder
- einen zu hohen Berechnungsaufwand verursachen würde.

Komplexe Modelle erfordern häufig selbst bei modernsten Großrechenanlagen einen sehr hohen Rechenaufwand. In diesen Fällen ist es – liegen plausible Nominalwerte vor – gerechtfertigt, lokale Maße zu verwenden, um Ergebnisse in einem Zeitraum zu erzielen, der den Nutzer zufriedenstellt.

2.4 Globale Sensitivitätsanalyse

2.4.1 Grundlagen und allgemeine Vorgehensweise

Allgemein gesprochen zeichnen sich globale Sensitivitätsanalysemethoden im Gegensatz zu den zuvor behandelten lokalen Methoden durch ihre Gültigkeit für den gesamten Modellbereich aus. Zusätzlich wird bei den globalen Methoden die Beschränkung auf gleichzeitige Änderung nur eines Parameters aufgehoben.

Die in diesem Kapitel 2.4 präsentierten Sensitivitätsanalysemethoden dienen der Analyse von Modellen mit unterschiedlichen Charakteristika. An dieser Stelle sollen die Einsatzmöglichkeiten der Methoden einführung deutlich gemacht werden:

- Regressions- und Korrelationsanalyse (Abschnitt 2.4.3)
Analyse linearer Modelle
- Rangregressions- und –korrelationsanalyse (Abschnitt 2.4.4)
Analyse nicht-linearer, aber monotoner und additiver Modelle
- SOBOLs Methode und FAST Methode (Indizes 1.Ordnung) (Abschnitt 2.4.5)
Analyse nicht-linearer, nicht monotoner, aber additiver Modelle
- SOBOLs Methode und FAST Methode (Gesamteffekte) (Abschnitt 2.4.5)
Analyse von Modellen unabhängig von ihren Charakteristika

Außerdem werden bei den in diesem Kapitel behandelten globalen Sensitivitätsanalysemethoden die Sensitivitätsmaße durchgängig auf der Basis von Stichproben für die Grundgesamtheit erzeugt. Man spricht daher von stichproben-basierten Methoden oder Monte-Carlo-Methoden. Ein wesentlicher Vorteil der Monte-Carlo-Methoden ist die Tatsache, dass das Modell unbekannt sein darf; das heißt, dass beispielsweise ein unbekannter Computercode durchlaufen werden kann und die Analyse der Modellberechnungen trotzdem zu realistischen Ergebnissen führt. Analytisch bestimmte Sensitivitätsmaße, wie beispielsweise die normierten Sensitivitätskoeffizienten des Kapitels 2.3, setzen dagegen ein bekanntes Modell voraus. Die auch in anderen Forschungsbereichen wie zum Beispiel der Varianzanalyse genutzte Monte-Carlo-Methode wird häufig auch als Monte-Carlo-Analyse oder Monte-Carlo-Simulation bezeichnet. Die Methode hat ihren Ursprung in der näherungsweise Berechnung von bestimmten Integralen und ihre Bezeichnung hat ihren Grund in ihrem auf Zufallszahlen basierendem Vorgehen und der damit in Verbindung gebrachten Stadt Monte Carlo (SOBOL 1991, FISHMAN 1995).

Bevor die allgemeine Vorgehensweise bei den Monte-Carlo-basierten Sensitivitätsmethoden beschrieben wird, sollen zunächst einige Ausführungen zur Genauigkeit dieser Methode vorangestellt werden. Da es sich um ein Näherungsverfahren handelt, muss die Güte der Näherung beurteilt werden.

Zur Ableitung der Genauigkeit einer Monte-Carlo-Methode ist auf den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückzugreifen, mit dem CRAMER (1946) für ausreichend großes u die asymptotische Normalverteilung einer Summe von voneinander unabhängiger Zufallsgrößen mit beliebiger Verteilungsfunktion nachgewiesen hat. Setzt man für eine Summe von stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen X_i eine gleichartige Wahrscheinlichkeitsverteilung voraus, also mindestens identische Erwartungswerte und identische Varianzen,

$$\begin{aligned}\mu &= E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_u), \\ \sigma^2 &= E(V(X_1)) = E(V(X_2)) = \dots = E(V(X_u)), \\ \sigma_{ij} &= 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, u ; i \neq j,\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

so ergeben sich für die Summe X_{sum} der Zufallsgrößen X_i der Erwartungswert μ_{sum} und die Varianz σ_{sum}^2

$$\begin{aligned}\mu_{sum} &= E(X_{sum}) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_u) = u \cdot \mu \text{ und} \\ \sigma_{sum}^2 &= E(V(X_{sum})) = E(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_u^2) = u \cdot \sigma^2.\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes folgt X_{sum} für große Zahlen u asymptotisch der Normalverteilung, dabei sind die Bedingungen der Gleichung (2.4.1) nicht streng einzuhalten. Es ist aber Sorge zu tragen, dass nicht eine Zufallsgröße oder deren Varianz die Anderen numerisch deutlich in den Hintergrund drängt. Diese Beziehung findet in der Geodäsie bei der synthetischen Konstruktion von Kovarianzmatrizen unter Nutzung des Elementarfehlermodells Anwendung (PELZER 1974, SCHWIEGER 1999). Bei Erfüllung des zentralen Grenzwertsatzes gilt die bekannte Wahrscheinlichkeitsbeziehung

$$\begin{aligned}P(\mu_{sum} - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{sum} < X_{sum} < \mu_{sum} + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{sum}) &= 1 - \alpha \\ P(u \cdot \mu - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{u} < X_{sum} < u \cdot \mu + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{u}) &= 1 - \alpha\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

mit μ_{sum} Erwartungswert der Summenzufallsgröße,

α Irrtumswahrscheinlichkeit und

$y_{1-\frac{\alpha}{2}}$ Quantil der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Die Ungleichung kann nun umgeformt werden:

$$\begin{aligned}P\left(\mu - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{u}} < \frac{X_{sum}}{u} < \mu + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{u}}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(-y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{u}} < \frac{X_{sum}}{u} - \mu < +y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{u}}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(\left|\frac{X_{sum}}{u} - \mu\right| < y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{u}}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^u X_i}{u} - \mu\right| < y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{u}}\right) &= 1 - \alpha.\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

Für den Anwendungsfall der Monte-Carlo-Methode handelt es sich nicht um u verschiedene Zufallsgrößen, sondern um u Realisierungen derselben Zufallsgröße. Der zentrale Grenzwertsatz behält aber Gültigkeit, wenn stochastische Unabhängigkeit der Realisierungen gewährleistet ist. In diesen Fall steht u für den

Umfang der Stichprobe, die zur Simulation einer Zufallsgröße X generiert wurde. Die Summe der Zufallsgrößen wird durch die Summe der Realisierungen x_i ersetzt

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^u x_i}{u} - \mu\right| < y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{u}}\right) = 1 - \alpha. \quad (2.4.5)$$

Den Formeln (2.4.4) und (2.4.5) ist zu entnehmen, dass für eine unendlich große Anzahl von u Zufallsgrößen oder gleichbedeutend für u Realisierungen einer Zufallsgröße der Mittelwert mit dem Erwartungswert zusammenfällt. Unter Vorgabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit α kann ein Grenzwert für die Approximation abgeschätzt werden, da sowohl das Quantil der Normalverteilung als auch der Stichprobenumfang u und die Standardabweichung σ bekannt sind. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ wird dieser Grenzwert bei der Approximation nicht überschritten. Man kann anhand obiger Formel leicht erkennen, dass eine lineare Genauigkeitssteigerung nur bei quadratischer Erhöhung des Stichprobenumfangs zu erreichen ist. Dieses hat die Methode in der Vergangenheit häufig als nicht praktikabel erscheinen lassen. Inzwischen hat sich jedoch die Rechenleistung der Computer deutlich erhöht und für viele Probleme lassen sich genaue Lösungen erzeugen. Außerdem kann die Genauigkeitssteigerung durch spezielle Verfahren der Stichprobengenerierung (Kapitel 2.4.2) effizienter gestaltet werden.

Nach der Ableitung der Genauigkeit Monte-Carlo-basierter Methoden, soll nun die generelle Vorgehensweise einer hierauf basierenden Sensitivitätsanalyse angegeben werden.

1. Festlegung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Eingangsgrößen

Die Festlegung erfolgt aufgrund von empirischen Messungen, Expertenmeinungen oder theoretischer Voraussetzungen wie physikalisch bedingter Grenzwerte. Es wird von n Eingangsgrößen ausgegangen.

2. Generierung von Stichproben für die Eingangsgrößen

Die Stichprobenerzeugung kann mit verschiedenen der Auswertung angepassten Methoden umgesetzt werden. Der Stichprobenumfang sei mit $u \cdot n$ gegeben, wobei u die Anzahl der Realisierungen pro Eingangsgröße bezeichnet. Zur weiterführenden Erklärung sei auf das Kapitel 2.4.2 verwiesen.

3. Modellauswertung

Hierbei wird das zu analysierende Modell u -mal durchlaufen und auf diesem Wege u Realisierungen für jede der m Ausgangsgrößen ermittelt.

4. Varianzanalyse

Die Varianzanalyse beschäftigt sich mit der Analyse der Verteilungsfunktionen der Ausgangsgrößen. Wichtigste Kenngrößen sind dabei der Mittelwert und die Varianz der simulierten Verteilung, sowie höhere Momente der Verteilungsfunktion. Zur Varianzanalyse wird im Rahmen dieser Arbeit auf weitere Ausführungen verzichtet, da sie einerseits nicht zentraler Gegenstand dieser Arbeit ist und andererseits die Grundlagen bereits in der mathematischen Literatur hinlänglich ausführlich und nachvollziehbar beschrieben sind (z.B. SCHEFFE 1959).

5. Sensitivitätsanalyse

Die abschließende Sensitivitätsanalyse beschäftigt sich mit der Analyse der Sensitivität der Ausgangsgrößen hinsichtlich des Einflusses der Eingangsgrößen. Die unterschiedlichen Vorgehensweisen werden in den Kapiteln 2.4.3 bis 2.4.5 beschrieben.

Erwähnt werden soll an dieser Stelle, dass die varianz-basierten Methoden eine Untergruppe der stichproben-basierten Methoden darstellen. In der Literatur werden diese oft als gesonderte Methoden-Gruppe aufgeführt. Die stichproben-basierten Methoden werden aufgrund der Generierung der Stichprobe so genannt. Dagegen steht die varianz-basierte Sensitivitätsanalyse für die Nutzung der Varianz als Indikator für die Einflüsse der Einflussgrößen. Diese Bezeichnung ist zunächst unabhängig von der Methode zur

Stichprobengenerierung. Varianz-basierte Methoden zielen auf die Zerlegung der Varianz der Ausgangsgröße in Abhängigkeit von den Einflussgrößen wie Eingangsgrößen oder Modellparametern.

Die sich unterscheidenden Fragestellungen der Varianzanalyse und der Sensitivitätsanalyse sollen an dieser Stelle anhand der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse gegenübergestellt werden, um die unterschiedlichen Aufgabenstellungen zu verdeutlichen.

- Die Varianzanalyse beantwortet die Frage: „*Wie kann die Unsicherheit der Ausgangsgröße beschrieben werden, wenn ich die Unsicherheit der Eingangsgrößen kenne ?*“
- Die Sensitivitätsanalyse beantwortet die Frage: „*Welchen Anteil haben die einzelnen Eingangsgrößen und deren statistische Eigenschaften an der Unsicherheit der Ausgangsgröße ?*“

2.4.2 Stichprobengenerierung

Bei der Stichprobenerzeugung werden Zahlen generiert, die zufälligen Charakter aufweisen und dabei der zuvor definierten Verteilungsfunktion folgen (vergleiche Abschnitt 2.4.1). In der Regel werden daher zunächst gleichverteilte Zufallszahlen für eine Eingangsgröße im Intervall zwischen 0 und 1 erzeugt. Im Anschluss daran werden diese Zufallszahlen in den Wahrscheinlichkeitsraum der Verteilungsfunktion transformiert (z.B. ERMAKOV 1975). Für einige Wahrscheinlichkeitsverteilungen können auch direkt Zufallszahlen erzeugt werden (z.B. SOBOL 1991, PRESS et al. 1988). Streng genommen können Zufallszahlen nur durch physikalische Experimente gewonnen werden. Ersatzweise können Tabellen von bereits erzeugten Zufallszahlenfolgen genutzt werden. In der Regel werden Zufallszahlen aber durch auf Rechnern implementierte Algorithmen erzeugt; folglich werden die Zufallszahlen deterministisch bestimmt. Streng genommen ist daher von Pseudo-Zufallszahlen zu sprechen. Nachfolgend werden aber die auf diesem Wege berechneten Zahlen als Zufallszahlen adressiert, da reine Zufallszahlen nur sehr aufwendig zu erzeugen sind.

Jede Stichprobe ist als Matrix \mathbf{X} unabhängig von der Art der Erzeugung so aufgebaut, dass für jede Einflussgröße X_i eine Spalte mit u Realisierungen x_{ki} vorliegt. Das Modell wird in der Folge für jede Zeile ausgewertet. Es existieren am Ende folglich auch u Realisierungen für die Ausgangsgröße Y . Vereinfachend wird an dieser Stelle davon ausgegangen, dass nur eine Ausgangsgröße vorliegt. Der allgemeine Aufbau einer Stichprobenmatrix sei nachfolgend angegeben

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{u1} & x_{u2} & \cdots & x_{un} \end{pmatrix}; \quad (2.4.6)$$

dabei bezeichnet beispielsweise x_{21} die zweite Realisierung von X_1 .

Um die Genauigkeit der Monte-Carlo-Methode zu erhöhen oder durch Verminderung des Stichprobenumfangs den Rechenaufwand zu reduzieren, werden Methoden angewandt, die einen stärker deterministischen Charakter haben und einer Gleichverteilung besser approximieren. Nachfolgend werden für die Sensitivitätsanalyse optimierte Methoden vorgestellt, die berücksichtigen, dass mehrere Eingangsgrößen vorliegen und eine Gesamtstichprobe zu bilden ist. Dabei werden außerdem die speziellen Vorgehensweisen bei der Stichprobenerzeugung bezüglich der Methoden der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse behandelt.

Zufällige Stichprobengenerierung

Es existieren eine Vielzahl von Methoden zur Erzeugung von (Pseudo-)Stichproben. Zur allgemeinen Darstellung der verschiedenen Methoden sei zum Beispiel auf FISHMAN (1995), NIEDERREITER (1992), ERMAKOV(1975) oder SOBOL (1991) verwiesen. Im Rahmen dieser Arbeit kommt die lineare

Kongruenzmethode zum Einsatz. Sie ist in den genannten Büchern beschrieben und wird auch als Methode der Reste bezeichnet, da sich z_i in Gleichung (2.4.7) als Rest bei der Division einer ganzzahligen linearen Funktion durch einen Wert M ergibt, der Modulus genannt wird. Allgemein gesprochen basiert sie auf den Zusammenhängen

$$\begin{aligned} z_i &= a \cdot z_{i-1} + c \pmod{M} \quad \text{und} \\ x_i &= \frac{z_i}{M} ; \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

dabei sind die x_i die linear-kongruenten (Pseudo-)Zufallszahlen, a und c sind unter Einschränkungen frei wählbare Konstanten, die zwischen 1 und M bzw. 0 und $M - 1$ liegen müssen. Der Modulus bestimmt sich in Abhängigkeit von der geforderten Genauigkeit und sollte eine sehr große positive ganze Zahl sein; typische Werte sind $M = 2^{32}$ oder $M = 2^{48}$. Für die Zahlenfolge z_i kann ein Startwert z_1 frei gewählt werden. Die Zufallsfolge x_i ergibt sich gleichverteilt im Intervall zwischen 0 und 1. Die Zufallszahlen können für alle Sensitivitätsanalysen, die mittels Regressions- und Korrelationsanalyse umgesetzt werden, als Basis dienen.

Latin Hypercube Sampling (LHS)

Das Latin Hypercube Sampling ist die mehrdimensionale Verallgemeinerung des in der Versuchsplanung eingesetzten Methode der lateinischen Quadrate. Ein deutscher Begriff wurde hierfür nicht eingeführt, daher wird nachfolgend die Abkürzung LHS verwendet. Beim LHS handelt es sich um ein Spezialverfahren zur Generierung geschichteter Stichproben (MCKAY et al. 1979). Das Verfahren wird auf mehrdimensionale Stichproben angewandt. Im Allgemeinen wird der Stichprobenbereich für jede Eingangsgröße in Subintervalle eingeteilt (ERMAKOW 1975). Beim LHS wird für jede Eingangsgröße der Stichprobenbereich in Abschnitte gleicher Wahrscheinlichkeit eingeteilt. Die Anzahl der Intervalle ist für alle Eingangsgrößen gleich groß. In jedem Intervall wird ein zufälliger Wert erzeugt. Hierbei wird nach Algorithmen der zufälligen Stichprobengenerierung vorgegangen. Die Stichprobenwerte der verschiedenen Intervalle der einzelnen Eingangsgrößen werden zufällig mit Stichprobenwerten aus den Intervallen für die anderen Eingangsgrößen kombiniert. Ein Datensatz wird aus einer zufälligen Kombination der Intervallwerte der verschiedenen Eingangsgrößen gebildet, dabei wird kein Intervallwert mehrfach verwendet. Die Anzahl der Datensätze ist mit der Anzahl der Intervalle pro Eingangsgröße gleichzusetzen. Die generierten Stichproben können gleichfalls für alle Sensitivitätsanalysen, die mittels Regressions- und Korrelationsanalyse umgesetzt werden, als Basis dienen.

Die Ergebnisse nachfolgender Varianz- und Sensitivitätsanalysen sind auch bei kleinen Stichproben recht stabil (IMAN u. HELTON 1988, 1991). Trotzdem spielt auch hier die individuelle Einteilung in Intervalle durch den Nutzer eine Rolle für das Ergebnis. In jedem Fall wird die Schätzung der Ausgangsgröße mit geringerer Varianz erhalten. Die Reduktion der Varianz ist um so größer, um so geringer die Abweichung des analysierten Modells von der Additivität ist (IPSC 2003).

Zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten oder Varianzen können sogenannte r-LHS („replicated LHS“) Stichproben erzeugt werden. Dabei wird zunächst eine LHS-Stichprobe erzeugt. Danach werden r Kombinationen der Spalten der LHS-Stichprobe gebildet, wobei jede Spalte für eine Eingangsgröße steht. Die Gesamtanzahl der anschließend zu realisierenden Modelldurchläufe beziehungsweise der Gesamtstichprobenumfang u ergibt sich durch Festlegung der Anzahl der Replikate r und des Stichprobenumfangs der originären LHS-Stichprobe u_{LHS} zu

$$u = r \cdot u_{LHS} . \tag{2.4.8}$$

Die einzelnen Stichproben sind dabei nicht voneinander unabhängig und führen damit zur Berechnung bedingter Varianzen.

LP_τ -Methode

Diese Methode sorgt auf Basis von LP_τ -Folgen für gleichmäßig verteilte Punkte im Einheitshyperwürfel.

Dabei erzeugen LP_τ -Folgen sogenannte P_τ -Gitter, für die jeder Subhyperwürfel mit dem Volumen $\frac{2^\tau}{n}$, mit

n als Anzahl der Eingangsgrößen und damit auch der Dimension des Hyperwürfels, jeweils 2^τ Gitterpunkte enthält. Die Methode basiert auf einer Veröffentlichung von SOBOL (1966) und wurde anschließend von diesem weiterentwickelt. Die Vorgehensweise zur Generierung entsprechender Stichproben ist ausführlich in SOBOL (1991) erläutert; eine Zusammenfassung liefern BRATLEY u. FOX (1988). Eine vertiefende Beschreibung unterbleibt hier aufgrund der komplexen Herleitung. Allgemein gesprochen realisiert die LP_τ -Methode eine strenge Gleichverteilung für unendlich lange Folgen; bereits für geringen Stichprobenumfang u_{LP} wird näherungsweise Gleichverteilung erreicht. Die LP_τ -Methode weist eine höhere Genauigkeit als

rein zufallsbasierte Methoden auf. Die Genauigkeitssteigerung gelingt mit $\frac{1}{u_{LP}}$ anstatt mit $\frac{1}{\sqrt{u}}$, wie in

Gleichung (2.4.5) für die rein zufallsbasierten Methoden angegeben. Es ist darauf hinzuweisen, dass die Methode nur für Stichproben bis zur Dimension 52 bessere Ergebnisse liefert als die zufallsbasierten Methoden (CHAN et al. 2000). Der Stichprobenumfang u_{LP} berechnet sich als Potenz zur Basis 2. Nach IPSC (2003) ist mindestens die zehnfache Anzahl der Eingangsgrößen zu wählen. Neben der Verwendung für Methoden der Regressions- und Korrelationsanalyse wird aufbauend auf den LP_τ -Folgen auch eine Stichprobenstrategie für die Sensitivitätsanalyse nach SOBOL entwickelt (Abschnitt 2.4.5.2).

Sobols Methode

Basierend auf den LP_τ -Folgen werden bedingte Stichproben, wie im Fall der r-LHS, erzeugt. Man generiert zunächst zwei Stichproben gleichen Umfangs; das heißt, dass zwei Matrizen von der Dimension ursprünglicher Stichprobenumfang u_{LP} mal Anzahl der Eingangsgrößen n entstehen. Beide Matrizen können nun miteinander kombiniert werden. Dabei werden jeweils Spalten der einen Matrix durch Spalten der anderen Matrix bei der Varianzberechnung ersetzt. Alle nicht ersetzten Spalten bleiben unverändert (IPSC 2003). Jede Spalte der Matrizen enthält eine Stichprobe des Umfangs u_{LP} für eine Eingangsgröße. Wird beispielsweise nur eine Spalte ersetzt, das heißt, die Werte beider Matrizen sind für diese Spalte identisch, so erhält man den Effekt 1.Ordnung; werden alle Spalten bis auf eine Spalte ersetzt, so ergibt sich der Gesamteffekt (näheres zu den genannten Begriffen in Abschnitt 2.4.5.2). Jede einzelne zu berechnende bedingte Varianz erfordert u_{LP} Modellberechnungen. Die Gesamtstichprobenanzahl u , mit andern Worten die Anzahl der Modellberechnungen, beträgt insgesamt $u_{LP} \cdot 2^n$, da alle möglichen Kombinationen bei der Berechnung bedingter Varianzen $u_{LP} \cdot (2^n - 1)$ und der Erwartungswert der Ausgangsgröße u_{LP} Auswertungen erfordern. Die Effekte 1.Ordnung als auch die Gesamteffekte benötigen dabei jeweils $u_{LP} \cdot n$ Modellauswertungen. Auch in diesem Fall ist der Erwartungswert zu bestimmen. Außerdem kann die Bestimmung der Gesamtvarianz numerisch stabiler unter Nutzung nur einer der beiden Stichproben berechnet werden, daher sind weitere u_{LP} Modellberechnungen notwendig (IPSC 2003). Beschränkt man sich auf die Berechnung der Effekte 1.Ordnung und der Gesamteffekte (vergleiche hierzu Abschnitt 2.4.5.2), so verringert sich der Rechenaufwand daher auf $u_{LP}(2 \cdot n + 2)$; zusammengefasst gilt:

$$\begin{aligned}
 u &= u_{LP} \cdot (2^n - 1) + u_{LP} = u_{LP} \cdot 2^n && \text{für alle Ordnungen und} \\
 u &= u_{LP} \cdot 2 \cdot n + 2 \cdot u_{LP} = u_{LP} \cdot (2 \cdot n + 2) && \text{für Effekte 1.Ordnung und Gesamteffekte.}
 \end{aligned}
 \tag{2.4.9}$$

Diese Stichprobenerzeugung wird nur in Zusammenhang mit der Bestimmung von SOBOLs Sensitivitätsindizes eingesetzt, da diese Sensitivitätsindizes nur auf diese Weise erzeugt werden können.

FOURIER Amplitude Sensitivity Test (FAST)

Da die Stichprobengenerierung für diese varianz-basierte Sensitivitätsanalysemethode sich deutlich von den anderen Methoden unterscheidet und außerdem nicht von der Vorgehensweise der FAST Methode zu trennen ist, wird sie nicht an dieser Stelle behandelt, sondern in Abschnitt 2.4.5.3.

2.4.3 Regressions- und Korrelationsanalyse

Eine erste Möglichkeit, globale, mehrdimensional gemittelte Sensitivitätsmaße zu ermitteln, ist die lineare **Regressionsanalyse**. Wie im Folgenden gezeigt wird, kann sie zur quantitativen Sensitivitätsanalyse von linearen Modellen genutzt werden. Die Verwendung nicht-linearer Regressionsanalysen erfordert die zumindest näherungsweise Kenntnis des nicht-linearen funktionalen Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgangsgrößen, um mit diesen Methoden einen Erkenntnisgewinn zu erzielen. Da dieser Zusammenhang häufig unbekannt ist, beschränkt sich die folgende Darstellung auf die lineare Regressionsanalyse.

In diesem Abschnitt wird von nur einer Ausgangsgröße ausgegangen, so dass der Index *j* für die Ausgangsgrößen entfallen kann. Dieses wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auch für die nachfolgenden Abschnitte gelten.

Das funktionale Modell einer Regression – bezogen auf den hier zu diskutierenden Zusammenhang zwischen den Realisierungen der Eingangsgrößen X_i und der Ausgangsgröße Y – kann wie folgt dargestellt werden (siehe beispielsweise NIEMEIER 2002 oder HELTON u. DAVIS 2000)

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot X_i,
 \tag{2.4.10}$$

mit b_0, b_1, \dots, b_n als zu schätzende Regressionskoeffizienten

und \hat{Y} als ausgeglichene Ausgangsgröße.

Abbildung 5 zeigt die Abhängigkeit von X und Y am Beispiel einer Regression mit zwei Regressionskoeffizienten mit jeweils u Realisierungen.

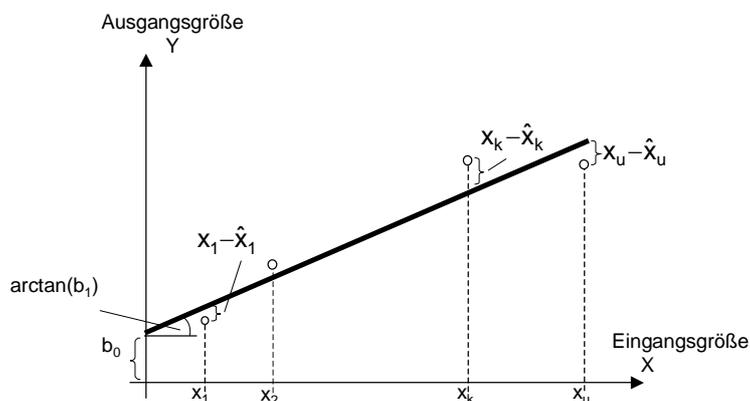


Abb. 5: Beziehungen bei der Regressionsanalyse mit zwei Regressionskoeffizienten

Zur Durchführung einer Regressionsanalyse müssen insgesamt $n \cdot u$ Realisierungen für die n Eingangsgrößen X_i und die u Realisierungen von Y als Ergebnisse der Modellauswertungen zur Verfügung stehen. Die Regressionskoeffizienten ergeben sich im Ansatz nach kleinsten Quadraten unter Annahme gleichgenauer und unabhängiger Eingangsgrößen zu

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{y}), \quad (2.4.11)$$

mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - Vektor der Regressionskoeffizienten,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{u1} & \cdots & x_{un} \end{pmatrix}$ - Matrix der Realisierungen der Eingangsgrößen,

$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_u \end{pmatrix}$ - Vektor der Realisierungen der Ausgangsgröße.

Die Matrix \mathbf{X} enthält für eine Regressionsanalyse sowohl die Stichprobenmatrix nach Gleichung (2.4.6) als auch eine Spalte mit Einsen, um auch den Regressionskoeffizienten b_0 schätzen zu können. Nach Schätzung der Regressionskoeffizienten kann zum Einen die ausgeglichene Ausgangsgröße \hat{Y} berechnet und zum Anderen mittels \mathbf{b} zu jeder Zeile von \mathbf{X} eine Realisierung der Ausgangsgröße \hat{y}_k berechnet werden:

$$\hat{y}_k = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_{ki} \quad \text{mit } k = 1, 2, \dots, u. \quad (2.4.12)$$

Für lineare Regressionsmodelle ist die folgende Varianzzerlegung gültig (z.B. HELTON u. DAVIS 2000)

$$\sum_{k=1}^u (y_k - \bar{y})^2 = \sum_{k=1}^u (\hat{y}_k - \bar{y})^2 + \sum_{k=1}^u (\hat{y}_k - y_k)^2, \quad (2.4.13)$$

mit $\bar{y} = \frac{1}{u} \sum_{k=1}^u y_k$.

Handelt es sich beim zu analysierenden Modell tatsächlich um ein lineares Modell, wird der zweite Term auf der rechten Seite in Gleichung (2.4.13) zu Null.

Das multiple Bestimmtheitsmaß R^2 stellt einen normierten Wert dar

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^u (\hat{y}_k - \bar{y})^2}{\sum_{k=1}^u (y_k - \bar{y})^2}, \quad (2.4.14)$$

der unter der Bedingung, dass $\sum_{k=1}^u (\hat{y}_k - y_k)^2 = 0$ gilt, den Prozentsatz für die Bestimmtheit der Ausgangsgröße aus den Eingangsgrößen angibt. Das Bestimmtheitsmaß R^2 ist daher ein Kriterium für die Linearität und zugleich ein erster Indikator für ein nicht-monotones Modell (HELTON u. DAVIS 2000):

$$\begin{aligned}
&\text{lineares Modell} & R^2 = 1, \\
&\text{nicht lineares Modell} & R^2 < 1, \\
&\text{nicht - monotones Modell} & R^2 \ll 1.
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Sind die Eingangsgrößen X_i voneinander unabhängig, mit anderen Worten sind die Spalten der Matrix \mathbf{X} zueinander orthogonal, so kann das multiple Bestimmtheitsmaß als Summe der Einflüsse der individuellen Eingangsgrößen R_i^2 aufgeschrieben werden (HELTON u. DAVIS 2000)

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_n^2 \quad \text{mit} \quad R_i^2 = \frac{b_i^2 \cdot \sum_{k=1}^u (x_{ki} - \bar{x}_i)^2}{\sum_{k=1}^u (y_k - \bar{y})^2}, \tag{2.4.16}$$

$$\text{mit } \bar{x}_i = \frac{\sum_{k=1}^u x_{ki}}{u}.$$

Berücksichtigt man die Zusammenhänge

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^u (y_k - \bar{y})^2}{u-1}} \quad \text{und} \quad \sigma_{X_i} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^u (x_{ki} - \bar{x}_i)^2}{u-1}},$$

so gilt

$$R_i^2 = \frac{b_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2}{\sigma_Y^2}. \tag{2.4.17}$$

Setzt man nun

$$\beta_i = b_i \cdot \frac{\sigma_{X_i}}{\sigma_Y} = \sqrt{R_i^2} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.4.18}$$

so erhält man normierte Regressionskoeffizienten β_i , die im Gegensatz zu den lokalen normierten Sensitivitätskoeffizienten ein mehrdimensional gemittelt Sensitivitätsmaß darstellen; dass heißt, dass bei diesem Analyseverfahren alle Eingangsgrößen gleichzeitig variiert werden. Man sollte jedoch in Erinnerung behalten, dass dieser Zusammenhang nur für orthogonale Spalten der Matrix \mathbf{X} gilt.

Es gilt aufgrund von Gleichung (2.4.16) bzw. (2.4.18) nun für

$$\begin{aligned}
&\text{lineare Modelle} & \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 1, \\
&\text{nicht - lineare Modelle} & \sum_{i=1}^n \beta_i^2 < 1.
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Die normierten Regressionskoeffizienten β_i sind ein weiteres Maß für die Linearität eines Modells oder, anders formuliert, bei Vorliegen einer linearen Beziehung zwischen Y und \mathbf{X} sind die β_i als globale Sensitivitätsmaße zu betrachten. Sollen prozentuale Anteile an der Gesamtvarianz angegeben werden, so gilt

$$\beta_i^2 [\%] = \beta_i^2 \cdot 100 \quad \text{für lineare Modelle.} \tag{2.4.20}$$

Der Wert β_i^2 kann unter der Bedingung, dass keine linearen Abhängigkeiten innerhalb der Matrix \mathbf{X} bestehen, als in Prozent angegebener Einfluss von X_i auf Y bezeichnet werden. Dieser ermittelte Prozent-

satz gilt streng nur für lineare Modelle, da sich R^2 nur dann zu Eins ergibt. Weist das Modell nicht-linearen Charakter auf, so werden Varianzanteile nicht berücksichtigt und R^2 spiegelt den Prozentsatz des Einflusses der Eingangsgröße auf die Ausgangsgrößenvarianz nicht streng wieder. Ergibt sich beispielsweise ein R^2 von 0,8, so bleiben 20 % der Ausgangsgrößenvarianz bei der Sensitivitätsanalyse unberücksichtigt.

Bei einem nicht-monotonen Modell ist die Aussage der β_i bezüglich der Sensitivitätsanalyse nachhaltig gestört; prozentuale Aussagen sind nicht möglich.

Eng verwandt mit der Regressionsanalyse ist die **Korrelationsanalyse**. Allgemein berechnet sich der als Maß der linearen Abhängigkeit zwischen X und Y zu betrachtende Korrelationskoeffizient (nach PEARSON) zu

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sum_{k=1}^u (x_k - \bar{x}) \cdot (y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^u (x_k - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^u (y_k - \bar{y})^2}}. \quad (2.4.21)$$

Für ein Regressionsmodell, das nur die Regressionskoeffizienten b_0 und b_1 enthält, fallen Korrelationskoeffizient und normierter Regressionskoeffizient zusammen (TAUBENHEIM 1969; HELTON u. DAVIS 2000):

$$r_{xy} = \beta_1. \quad (2.4.22)$$

Von Bedeutung sind weiterhin die partiellen Korrelationskoeffizienten (siehe z.B. TAUBENHEIM 1969 oder HELTON u. DAVIS 2000), die den linearen Zusammenhang zwischen X_i und Y unter Ausschluss der linearen Effekte der anderen Eingangsgrößen messen. Ein Wert von Eins zeigt lineare Abhängigkeit an. Die Korrelationskoeffizienten und die partiellen Korrelationskoeffizienten sind globale Sensitivitätsmaße für lineare Modelle.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei auf eine weitere Anwendungsmöglichkeit der Regressionsanalyse hingewiesen, die auch der Sensitivitätsanalyse zuzurechnen ist. Soll überprüft werden, ob ein Regressionsmodell sensitiv gegenüber allen Eingangsgrößen ist, so können Methoden der Regressionsanalyse genutzt werden. In diesem Fall ist abzuschätzen, welche Eingangsgrößen überhaupt einen Einfluss auf die Ausgangsgröße haben. Dabei kann nach NIEMEIER (2002) von einem Modell mit maximaler Koeffizientenanzahl ausgegangen werden und die Signifikanz einzelner Regressionskoeffizienten oder Koeffizientengruppen mittels t- beziehungsweise F-Test überprüft werden und so das Modell schrittweise reduziert werden. Die entgegengesetzte Herangehensweise ist die schrittweise Erweiterung des Regressionsmodells um weitere Koeffizienten, die nach ihrer Bedeutung geordnet sind. In diesem Fall wird mit einem Koeffizienten begonnen und die Änderung der Varianz der Ausgangsgröße beurteilt. Steigt diese bei Erhöhung der Anzahl der Regressionskoeffizienten an, so liegt eine Überparametrisierung vor, und der Koeffizient ist nicht im Modell zu berücksichtigen. Die Grundlagen der statistischen Tests der Regressionsanalyse sind beispielsweise in CHATTERJEE u. HADI (1988) oder NIEMEIER (2002) veröffentlicht.

2.4.4 Rangtransformation

Der Korrelationskoeffizient nach PEARSON und der normierte Regressionskoeffizient sind nur für die Sensitivitätsanalyse linearer Modelle geeignet (vergleiche Abschnitt 2.4.3). Aus diesem Grund wurden andere Korrelationsmaße entwickelt, die nicht auf den Werten der Stichprobe basieren, sondern auf der Reihenfolge der Realisierungen, dem Rang $R(x_i)$. Der kleinste Stichprobenwert $x_{i/\min}$ der Eingangsgröße

X_i erhält den Wert $R(x_{i/\min}) = 1$, der zweitkleinste den Wert $R(x_{i/\min 2}) = 2$ und so weiter. Dieser Vorgang wird als **Rangtransformation** bezeichnet.

In Abbildung 6 wird die Vorgehensweise am Beispiel einer Parabel gezeigt. Man erkennt, dass für diesen idealen Fall aus der nicht-linearen Parabel $Y = f_1(X)$ ein linearer Zusammenhang $R(Y) = f_2(R(X))$ abgeleitet wird.

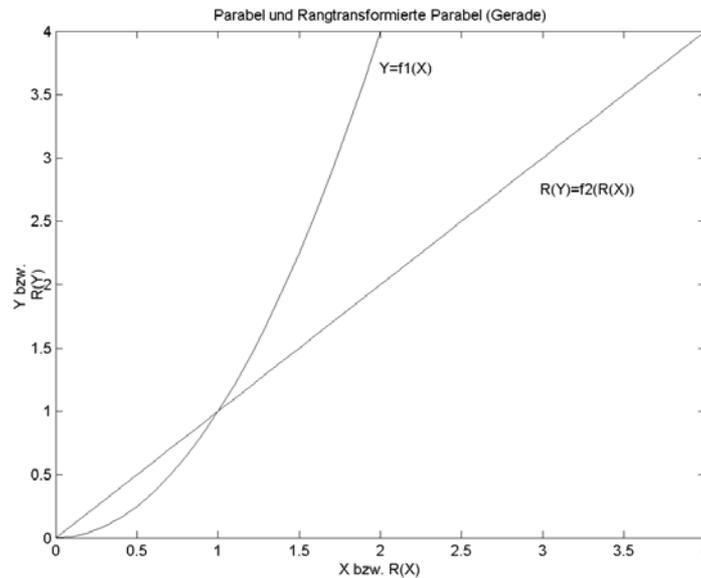


Abb. 6: Rangtransformation für die Funktionswerte einer Parabel

Das zuvor Geschriebene wird auch für die Ausgangsgröße Y umgesetzt. Sind sowohl für die Eingangs- als auch für die Ausgangsdaten keine identischen numerischen Werte x_{ki} beziehungsweise y_k zu finden, so spricht man davon, dass die Daten ohne Bindungen vorliegen. Liegen dagegen Bindungen zum Beispiel in den Eingangsdaten vor, das heißt, dass für verschiedene x_{ki} identische numerische Werte x_{kgl} im Datenmaterial vorliegen, so gilt für:

$$R(x_{kgl}) = \frac{R(x_{gr}) + R(x_{kl})}{2} \quad \text{mit } kgl = 1, 2, \dots, n_{gl} \quad (2.4.23)$$

mit n_{gl} Anzahl der x_{ki} mit identischem numerischen Wert x_{kgl} ,

$R(x_{gr})$ Rang des ersten Wertes größer x_{kgl} ,

$R(x_{kl})$ Rang des ersten Wertes kleiner x_{kgl} .

Für $R(y_k)$ gelten selbstverständlich die selben Berechnungsformeln.

Hier sei erwähnt, dass auf den Index i für die Eingangsgrößen X_i aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet wird. Die Formeln sind jedoch für jede der n Eingangsgrößen gültig. Der Index wird auch für die folgenden Darstellungen nicht mitgeführt.

Auf Basis rangtransformierter Datensätze können Regressions- und Korrelationsanalysen durchgeführt werden. Die **Regressionsanalyse** führt zu normierten Rangregressionskoeffizienten βR_i und multiplen Bestimmtheitsmaßen für rangtransformierte Daten $R(R^2)$, die als Indikatoren für monotone Modelle eingesetzt werden können:

$$\begin{aligned} \text{monotone Modelle} \quad R(R^2) &= \sum_{i=1}^n \beta R_i^2 = 1, \\ \text{nicht - monotone Modelle} \quad R(R^2) &= \sum_{i=1}^n \beta R_i^2 < 1. \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

Analog zu Gleichung (2.4.17), können prozentuale Anteile an der Gesamtvarianz angegeben werden

$$\beta R_i^2 [\%] = \beta R_i^2 \cdot 100 \quad \text{für monotone Modelle.} \quad (2.4.25)$$

Bei der **Korrelationsanalyse** wird in der Regel der Rangkorrelationskoeffizient nach SPEARMAN, der als Indikator für die Monotonie eines Modells genutzt werden kann, verwendet. Hierfür werden die Berechnungsformeln für den Korrelationskoeffizient nach PEARSON auf die Ränge angewandt

$$r_{xy}^{SP} = \frac{\sum_{k=1}^u (R(x_k) - R(\bar{x})) \cdot (R(y_k) - R(\bar{y}))}{\sqrt{\sum_{k=1}^u (R(x_k) - R(\bar{x}))^2 \cdot \sum_{k=1}^u (R(y_k) - R(\bar{y}))^2}} \quad (2.4.26)$$

mit $R(x_k)$ und $R(y_k)$ als rangtransformierte Realisierungen der Eingangs- und Ausgangsgrößen und $R(\bar{x})$ und $R(\bar{y})$ als Mittelwerte der rangtransformierten Realisierungen.

Der Mittelwert rangtransformierten Daten lässt sich mit Hilfe der Beziehung

$$\sum_{k=1}^u R(x_k) = \sum_{k=1}^u R(y_k) = \sum_{k=1}^u k = \frac{u \cdot (u + 1)}{2} \quad (2.4.27)$$

vereinfacht als

$$R(\bar{x}) = R(\bar{y}) = \frac{1}{u} \sum_{i=k}^u k = \frac{(u + 1)}{2} \quad (2.4.28)$$

darstellen. Zusätzlich gilt

$$\sum_{k=1}^u R(x_k) \cdot R(\bar{x}) = \sum_{k=1}^u R(y_k) \cdot R(\bar{y}) = u \cdot \frac{u + 1}{2} \cdot \frac{u + 1}{2}. \quad (2.4.29)$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich der allgemeingültige Zusammenhang

$$r_{xy}^{SP} = \frac{\sum_{k=1}^u R(x_k) \cdot R(y_k) - \frac{u \cdot (u + 1)^2}{4}}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^u R^2(x_k) - \frac{u \cdot (u + 1)^2}{4} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^u R^2(y_k) - \frac{u \cdot (u + 1)^2}{4} \right)}}. \quad (2.4.30)$$

Liegen sowohl Eingangs- als auch Ausgangsdaten ohne Bindungen vor, so kann der Korrelationskoeffizient nach SPEARMAN vereinfacht wie folgt angegeben werden (SACHS 1997):

$$r_{xy}^{SP} = 1 - 6 \cdot \frac{\sum_{k=1}^u (R(x_k) - R(y_k))^2}{u \cdot (u^2 - 1)}. \quad (2.4.31)$$

Der Korrelationskoeffizient nach SPEARMAN kann als Indikator für die Monotonie eines Modells genutzt werden:

$$\begin{aligned} r^{SP} > 0 & \quad \text{gleichsinnig monotoner Zusammenhang,} \\ r^{SP} < 0 & \quad \text{gegensinnig monotoner Zusammenhang,} \\ r^{SP} \approx 0 & \quad \text{kein monotoner Zusammenhang.} \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

Es soll hier angemerkt werden, dass mit den rangtransformierten Daten neben den bereits erwähnten normierten Rangregressionskoeffizienten, multiplen Regressionsmaßen für rangtransformierte Daten und SPEARMAN Korrelationskoeffizienten auch partielle Rangkorrelationskoeffizienten berechnet werden können. Die Aussage bezüglich aller Maße bleibt unverändert, wenn das untersuchte Modell linear ist. Wird ein nicht-lineares, aber monotonen Modell betrachtet, so verbessert die Rangtransformation unter Bedingung gleichzeitiger Monotonie der Eingangsgrößen (vergleiche Abschnitt 2.2) die Ergebnisse. Das erkennt man zunächst an der Höhe des multiplen Bestimmtheitsmaßes. Dieses erhöht sich bei nicht-linearen, aber monotonen Modellen und repräsentiert damit eine bessere Approximation der Ausgangsgröße durch die Eingangsgrößen. Die nach der Rangtransformation erhaltenen Sensitivitätsmaße ergeben daher ein besseres Bild von den Einflüssen der einzelnen X_i (siehe z.B. HELTON und DAVIS 2000). Die Ergebnisse dürfen aber nicht als eine funktionale Beschreibung zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen missinterpretiert werden (IMAN und CONOVER 1979), sondern dienen nur dem Erkennen sensitiver Eingangsgrößen. Zur statistisch begründeten Überprüfung der Modell-Monotonie eines Modells sei auf HELTON und DAVIS (2000) verwiesen.

2.4.5 Varianz-basierte Sensitivitätsanalysemethoden

2.4.5.1 Grundlagen

Bisher wurden globale Sensitivitätsanalysemethoden betrachtet, die für eine quantitative Sensitivitätsanalyse linearer Modelle (Kapitel 2.4.3, Regressionsanalyse) oder nicht-linearer aber monotoner Modelle (Kapitel 2.4.4, Rangtransformation) geeignet sind. Innerhalb dieses Kapitels werden globale Sensitivitätsmaße entwickelt, die unabhängig von den Modelleigenschaften eine quantitative Aussage bezüglich der Sensitivität erlauben. Diese Gruppe von Sensitivitätsmaßen wird unter Nutzung sogenannter bedingter Varianzen berechnet und bezieht sich auf den Anteil an der Varianz der Ausgangsgröße, der von einer Eingangsgröße erzeugt wird. Daher werden diese Methoden varianz-basierte Sensitivitätsanalysemethoden genannt. Erwähnt werden soll an dieser Stelle, dass die varianz-basierten Methoden eine Untergruppe der Monte-Carlo- beziehungsweise stichproben-basierten Methoden darstellen.

Die varianz-basierten Sensitivitätsmaße S_i^{gl} werden Korrelationsverhältnisse oder Wichtigkeitsmaße genannt. Sie nutzen den Quotienten der bedingten Varianz $\sigma_{E(Y/X_i)}^2$ zur Gesamtvarianz der Ausgangsgröße σ_Y^2 (vergleiche (2.4.70) für die FAST Methode)

$$S_i^{gl} = \frac{\sigma_{E(Y/X_i)}^2}{\sigma_Y^2}. \quad (2.4.33)$$

Die bedingte Varianz $\sigma_{E(Y/X_i)}^2$ soll als Varianz für den Erwartungswert der Ausgangsgröße Y unter der Bedingung aufgefasst werden, dass der wahre Wert für X_i bekannt ist. In den nachfolgenden Abschnitten werden SOBOLs Methode und der FOURIER Amplituden Sensitivitätstest zur Berechnung der Korrelationsverhältnisse präsentiert. Auf die Methode der Ableitung mittels r-LHS Stichproben wird hier verzichtet, da das Verfahren detailliert in CHAN et al. (2000) beschrieben ist.

Im Allgemeinen umfasst die Sensitivitätsanalyse einen weiten Rahmen unterschiedlicher Problemstellungen und Vorgehensweisen (Kapitel 2.1). Die varianz-basierte Sensitivitätsanalyse konzentriert sich dagegen auf zwei wesentliche Aufgaben:

1. Identifikation wichtiger Eingangsgrößen

Die Identifikation des Anteils der Eingangsgrößen an der Varianz der Ausgangsgröße bei Festhalten der jeweiligen Eingangsgröße an ihrem wahren Wert ist Gegenstand dieser Aufgabenstellung. Es

geht folglich darum, die Wichtigkeit der Eingangsgrößen quantitativ zu erfassen. Hierauf aufbauend können Modelloptimierungen umgesetzt werden.

2. Risikobewertung

Das Erreichen einer vorgegebenen Zielvarianz für die Ausgangsgröße wird hier als Zielfunktion verstanden. Die Elimination oder Reduktion von Einflüssen der Eingangsgrößen auf die Varianz der Ausgangsgröße ist Ziel dieser Aufgabenstellung. Eine Anwendung stellt zum Beispiel die Minimierung der Unsicherheit einer Risikoprognose dar.

An dieser Stelle sollen einige kurze Ausführungen zum Stichprobenumfang vorausgeschickt werden. Um zuverlässige und genaue Ergebnisse einer Sensitivitätsanalyse zu erhalten, ist der Stichprobenumfang so lange zu erhöhen bis sich das jeweilige Sensitivitätsmaß nur noch im Rahmen der gewünschten Genauigkeit verändert. Aussagen zum benötigten Stichprobenumfang können nur auf empirischem Wege erfolgen, da die grundlegenden Formeln in Kapitel 2.4.2 zur Genauigkeitsabschätzung bei der Monte-Carlo-Analyse für die Stichproben der Eingangsgrößen gelten. Die globalen Sensitivitätsmaße dagegen basieren auf speziellen Methoden zur Stichprobengenerierung und werden erst nach den Modellauswertungen bestimmt. In CROSETTO und TARANTOLA (2001) wird gezeigt, dass mit etwa 200 Stichprobenwerten ein zuverlässiges und genaues Ergebnis für die in 2.4.5.3 vorgestellte FAST Methode erreicht wird. Eine weitere Erhöhung des Stichprobenumfangs ergibt nur geringfügige Änderungen der Sensitivitätsmaße und deren Standardabweichungen. Diese Aussagen können nicht ohne Weiteres auf andere wissenschaftliche Fragestellungen übertragen werden, da die Genauigkeit der Sensitivitätsmaße von der Komplexität des betrachteten Modells abhängt. Insbesondere spielen die Eigenschaften Linearität und Additivität eine große Rolle. In Kapitel 4 werden Untersuchungen zu einfachen und komplexeren ingenieurgeodätischen Modellen durchgeführt.

2.4.5.2 Sobols Methode

Die von SOBOL (1993) entwickelte Methode ist eine Möglichkeit, globale Sensitivitätsindizes zu berechnen. Die nachfolgend bereitgestellten Sensitivitätsindizes 1.Ordnung beschreiben die Sensitivität eines additiven Modells vollständig. Die gleichfalls in diesem Abschnitt entwickelten Gesamteffekte berücksichtigen die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Eingangsgrößen im Modell und sind in ihrer Aussage unabhängig von den Modelleigenschaften des zu analysierenden Modells.

Nach der Stichprobengenerierung für die Eingangsgrößen \mathbf{X} und den anschließenden Modellauswertungen kann der Schätzwert s_y^2 für die Varianz der Ausgangsgröße σ_y^2 bestimmt werden durch

$$s_y^2 = \frac{1}{u_{LP} - 1} \sum_{k=1}^{u_{LP}} (y_k - \bar{y})^2 = \frac{1}{u_{LP} - 1} \sum_{k=1}^{u_{LP}} y_k^2 - \bar{y}^2, \quad (2.4.34)$$

mit u_{LP} als Stichprobenumfang nach Kapitel 2.4.2

und \bar{y} als Schätzwert für den Erwartungswert $E(Y)$

$$\bar{y} = \frac{1}{u_{LP}} \sum_{k=1}^{u_{LP}} y_k. \quad (2.4.35)$$

Die Varianz σ_y^2 lässt sich immer als Summe des Erwartungswerts der bedingten Varianz $E(\sigma_{Y/X_i}^2)$ und der Varianz des bedingten Erwartungswertes $\sigma_{E(Y/X_i)}^2$ darstellen (SALTELLI 2004)

$$\sigma_y^2 = E(\sigma_{Y/X_i}^2) + \sigma_{E(Y/X_i)}^2. \quad (2.4.36)$$

Dabei spricht man bei $\sigma_{E(Y/X_i)}^2$ vom Einfluss 1.Ordnung von X_i auf Y . Die numerische Größe von $V(E(Y/X_i)) = \sigma_{E(Y/X_i)}^2$ identifiziert die Bedeutung der Eingangsgröße. Ein großer Wert korrespondiert mit einem großem Einfluss auf die Varianz der Ausgangsgröße. Da bei der in diesem Kapitel nachfolgend vorgestellten Vorgehensweise die bedingte Varianz direkt mit verschiedenen x_{ki} berechnet wird, soll $\sigma_{E(Y/X_i)}^2$ vereinfachend mit σ_{Y/X_i}^2 ersetzt werden. Die einzelnen Stichprobenwerte x_{ki} sind dabei zufällig unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsfunktion für X_i verteilt.

Um den Einfluss der Eingangsgröße X_i bestimmen zu können, unterscheiden sich die Stichprobenwerte x_{ki} für die jeweilige Eingangsgröße X_i in den Zeilen der nachfolgend aufgeführten Stichprobenmatrizen \mathbf{X} und \mathbf{X}' nicht (vergleiche Kapitel 2.4.2):

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{u_{LP}1} & \cdots & x_{u_{LP}i} & \cdots & x_{u_{LP}n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'_{11} & \cdots & x'_{1i} & \cdots & x'_{1n} \\ x'_{21} & \cdots & x'_{2i} & \cdots & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_{u_{LP}1} & \cdots & x'_{u_{LP}i} & \cdots & x'_{u_{LP}n} \end{pmatrix}. \quad (2.4.37)$$

Die beiden Matrizen werden zur Berechnung der verschiedenen bedingten Varianzen herangezogen. Für jede bedingte Varianz σ_{Y/X_i}^2 wird mit verschiedenen x_{ki} ein Schätzwert s_{Y/X_i}^2 bereitgestellt

$$s_{Y/X_i}^2 = \frac{1}{u_{LP} - 1} \sum_{k=1}^{u_{LP}} (y_{ki} \cdot y'_{ki})^2 - \bar{y}^2 = \hat{U}_i - \bar{y}^2 \quad (2.4.38)$$

$$\text{mit } \hat{U}_i = \frac{1}{u_{LP} - 1} \sum_{k=1}^{u_{LP}} (y_{ki} \cdot y'_{ki})^2.$$

Dabei stehen y_{ki} und y'_{ki} für die Realisierungen von Y unter Nutzung von \mathbf{X} beziehungsweise \mathbf{X}' . Da nur für die Eingangsgröße X_i in beiden Matrizen identische Realisierungen $x_{ki} = x'_{ki}$ vorliegen, ist davon auszugehen, dass für die Multiplikation $y_{ki} \cdot y'_{ki}$ in Gleichung (2.4.38) der Anteil der x_{ki} nicht zufällig streut. Wird innerhalb der Stichprobe für X_i beispielsweise der maximale Wert $x_{(\max)_i}$ generiert, so wird dessen Einfluss auf die Ausgangsgröße Y mit demselben maximalen Einfluss multipliziert. Das gilt für alle anderen Eingangsgrößen nicht, da hier ein maximaler Einfluss aufgrund der zufälligen Streuung nicht mit sich selbst multipliziert wird. \hat{U}_i nimmt folglich bei großem Einfluss von X_i einen großen Wert an:

$$\hat{U}_i \approx s_Y^2 + \bar{y}^2 \quad (\text{für großem Einfluss von } X_i). \quad (2.4.39)$$

Nutzung von Gleichung (2.4.34) und die näherungsweise Gültigkeit von $y_{ki} \approx y'_{ki}$ aufgrund des überwiegenden Einflusses von X_i und $x_{ki} = x'_{ki}$ führen zu dem Zusammenhang

$$s_Y^2 + \bar{y}^2 = \frac{1}{u_{LP} - 1} \sum_{k=1}^{u_{LP}} y_k^2 \approx \frac{1}{u_{LP} - 1} \sum_{k=1}^{u_{LP}} (y_{ki} \cdot y'_{ki}), \quad (2.4.40)$$

für großem Einfluss von X_i (siehe 2.4.37),

der die Basis für Gleichung (2.4.39) liefert.

Für eine Eingangsgröße X_i , die fast keinen Einfluss auf die Ausgangsgröße hat, ergibt sich dagegen ein kleiner Wert für \hat{U}_i , da in (2.4.37) in diesem Fall die Spalten für X_i gestrichen werden können. Folglich ist unter Nutzung von Gleichung (2.4.35)

$$\frac{1}{u_{LP} - 1} \sum_{k=1}^{u_{LP}} y_{ki} \cdot y'_{ki} \approx \left(\frac{1}{u_{LP}} \sum_{k=1}^{u_{LP}} y_k \right) \text{ bei geringen Einfluss von } X_i \quad (2.4.41)$$

gültig, da alle Zeilen der Matrizen \mathbf{X} und \mathbf{X}' voneinander unabhängig sind. Dieser Zusammenhang führt zur Gleichung

$$\hat{U}_i \approx \bar{y}^2 \text{ (für geringen Einfluss von } X_i). \quad (2.4.42)$$

Die Sensitivitätsmaße S_i^{Sob} können nun durch Normierung mit der Varianz σ_Y^2 beziehungsweise s_y^2 zur Verfügung gestellt werden

$$S_i^{Sob} = \frac{\sigma_{Y/X_i}^2}{\sigma_Y^2} = 1 - \frac{E(\sigma_{Y/X_i}^2)}{\sigma_Y^2} \text{ für } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4.43)$$

Sie werden auch als Korrelationsverhältnisse, Sobols Sensitivitätsfaktoren 1.Ordnung oder Wichtigkeitsmaße bezeichnet. Es können nur deren Schätzwerte bestimmt werden

$$S_i^{Sob} = \frac{s_{Y/X_i}^2}{s_y^2} \text{ für } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4.44)$$

so dass hier eine Unterscheidung zwischen theoretischem und empirischem Wert unterbleiben kann.

In linearen Modellen gilt für die bedingte Varianz nach (2.4.37) grundsätzlich die Beziehung

$$\sigma_{Y/X_i}^2 \leq \sigma_Y^2 \text{ (für lineare Modelle)}. \quad (2.4.45)$$

Für nicht-lineare Modelle muss diese Beziehung nicht gültig sein (SALTELLI 2004). Da die bedingte Varianz über den gesamten Eingangsgrößenbereich berechnet wird, gilt aber in jedem Fall die Reduktion der bedingten Varianz in Relation zur Gesamtvarianz:

$$\text{modellunabhängig } \sigma_{Y/X_i}^2 \leq \sigma_Y^2. \quad (2.4.46)$$

Die Sensitivitätsindizes S_i^{Sob} weisen den Vorteil auf, dass sie auch für einen Großteil der nicht-linearen Modelle, und zwar für die additiven Modelle (SOBOL 1993), der Summenbedingung für lineare Modelle in Gleichung (2.4.19) genügen. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{für additive Modelle } \sum_{i=1}^n S_i^{Sob} &= 1, \\ \text{für nicht - additive Modelle } \sum_{i=1}^n S_i^{Sob} &\leq 1. \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.4.38), (2.4.36), (2.4.44) und (2.4.18) sowie (2.4.19) gilt

$$\text{für lineare Modelle } S_i^{Sob} = \beta_i^2. \quad (2.4.48)$$

Sobols Sensitivitätsindizes 1.Ordnung können zum Einen genutzt werden, um die Additivität von Modellen zu identifizieren, zum Anderen können sie modellunabhängig genutzt werden, um eine Priorisierung der Einflussgrößen vorzunehmen. Für nicht-additive Modelle ist es alleine mit den S_i^{Sob} aber nicht möglich, den Einfluss der Eingangsgrößen auf die Varianz der Ausgangsgrößen quantitativ abzuschätzen, da Effekte

höherer Ordnung – mit anderen Worten Abhängigkeiten der Eingangsgrößen aufgrund des Modells – hierfür zu berücksichtigen sind.

Um den Einfluss zweier Eingangsgrößen auf die Varianz der Ausgangsgröße auszuschalten, können entweder beide Eingangsgrößen gleichzeitig – der Sensitivitätsindex wird in diesem Fall S_{i+j}^{Sob} genannt – oder einzeln festgehalten werden. Liegt für die Sensitivitätsanalyse ein additives Modell vor, so gilt

$$S_{i+j}^{Sob} = \frac{\sigma_{Y/X_i, X_j}^2}{\sigma_y^2} = S_i^{Sob} + S_j^{Sob} \quad (\text{additives Modell}) \quad (2.4.49)$$

dagegen für nicht-additive Modelle

$$S_{i+j}^{Sob} = \frac{\sigma_{Y/X_i, X_j}^2}{\sigma_y^2} > S_i^{Sob} + S_j^{Sob} \quad (\text{nicht - additives Modell}). \quad (2.4.50)$$

Für zwei Eingangsgrößen beschreibt die Differenz zwischen dem kombinierten Index S_{i+j}^{Sob} und der Summe der beiden Einzelfaktoren den Effekt 2.Ordnung

$$S_{\Delta i, j}^{Sob} = S_{i+j}^{Sob} - (S_i^{Sob} + S_j^{Sob}). \quad (2.4.51)$$

Allgemein gesprochen kann die Differenz zwischen einem kombinierten Index und der Summe der Einzelindizes als die Summe der Effekte höherer Ordnung angesehen werden. Liegen nur zwei Eingangsgrößen X_i und X_j vor, so gilt in jedem Fall

$$S_i^{Sob} + S_j^{Sob} + S_{\Delta i, j}^{Sob} = 1. \quad (2.4.52)$$

Für additive Modelle kann auf den Term 2.Ordnung verzichtet werden. Allgemein gilt jedoch für n Eingangsgrößen, dass n Ordnungen vorliegen, die aufaddiert werden müssen

$$\sum_{i=1}^n S_i^{Sob} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n S_{\Delta i, j}^{Sob} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=j+1}^n S_{\Delta i, j, k}^{Sob} + \dots + \sum \dots S_{\Delta i, j, k, \dots, n}^{Sob} = 1. \quad (2.4.53)$$

Dieser Zusammenhang wurde erstmalig von SOBOL (1993) aufgestellt. Unabhängig von den Modelleigenschaften ergibt die Summe in Gleichung (2.4.53) für stochastisch unabhängige Eingangsgrößen immer Eins.

Die in Gleichung (2.4.53) aufgeführten Sensitivitätsindizes verschiedener Ordnungen ermöglichen es, den Gesamteffekt $S_{T_i}^{Sob}$ einer Eingangsgröße X_i zu bestimmen

$$S_{T_i}^{Sob} = S_i^{Sob} + \sum_{j=1}^n S_{\Delta i, j}^{Sob} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n S_{\Delta i, j, k}^{Sob} + \dots + \sum \dots S_{\Delta i, j, k, \dots, n}^{Sob} \quad j, k \neq i, j \neq k. \quad (2.4.54)$$

Dabei ist zu erkennen, dass die Berechnung aller Effekte von n Ordnungen einen hohen Aufwand bedeutet. Insgesamt sind, wie in (2.4.9) aufgeführt,

$$u = u_{LP} \cdot 2^n$$

Sensitivitätsindizes zu berechnen. Aus diesem Grund zeigen SALTELLI u. BOLADO (1998), dass man die bedingte Varianz $\sigma_{Y/X_{-i}}^2$ berechnen kann, in dem alle Eingangsgrößen bis auf die Eingangsgröße X_i festgehalten werden

$$\sigma_{Y/X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n}^2 = \sigma_{Y/X_{-i}}^2. \quad (2.4.55)$$

Zur Berechnung der bedingten Varianz sind in diesem Fall die beiden Stichprobenmatrizen

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{u_{LP}1} & \cdots & x_{u_{LP}i} & \cdots & x_{u_{LP}n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x'_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x'_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{u_{LP}1} & \cdots & x'_{u_{LP}i} & \cdots & x_{u_{LP}n} \end{pmatrix} \quad (2.4.56)$$

zu verwenden, in denen nur die Stichprobe zu X_i variiert wird. Die bedingten Varianz $\sigma_{Y|X_{-i}}^2$ kann äquivalent zu den Formeln (2.4.37) und (2.4.38) abgeleitet werden. Aus dieser bedingten Varianz lässt sich somit der Gesamteffekt für die Eingangsgröße X_i ableiten. Er berechnet sich unter Nutzung der allgemeinen Beziehung (2.4.41) und der Normierung wie in (2.4.44) zu

$$S_{Ti}^{Sob} = \frac{E(\sigma_{Y|X_{-i}}^2)}{\sigma_Y^2} = 1 - \frac{\sigma_{Y|X_{-i}}^2}{\sigma_Y^2}. \quad (2.4.57)$$

Für ein additives Modell fallen der Gesamteffekt und der Sensitivitätseffekt 1. Ordnung überein

$$S_i^{Sob} = S_{Ti}^{Sob} \quad (\text{additives Modell}), \quad (2.4.58)$$

da alle Effekte höherer Ordnung zu Null werden.

Der Gesamteffekt S_{Ti}^{Sob} beantwortet die Frage nach der Änderung der Varianz der Ausgangsgröße bei Elimination aller Effekte der Eingangsgröße X_i . Ist eine Eingangsgröße ohne jeden Einfluss auf die Varianz der Ausgangsgröße, so wird der Gesamteffekt S_{Ti}^{Sob} zu Null, da der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung (2.4.58) zu Eins wird. Lässt sich dagegen die Varianz σ_y^2 nur aus einer Eingangsgröße X_i ableiten, so folgt unmittelbar, dass S_{Ti}^{Sob} zu Eins wird. Die Summe aller Gesamteffekte führt für nicht-additive Modelle immer auf Werte größer Eins, da alle Effekte höherer Ordnung mehrfach in die Berechnung einfließen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n S_{Ti}^{Sob} &= 1 \quad \text{für additive Modelle,} \\ \sum_{i=1}^n S_{Ti}^{Sob} &> 1 \quad \text{für nicht - additive Modelle.} \end{aligned} \quad (2.4.59)$$

Die Berechnung aller Effekte 1. Ordnung und aller Gesamteffekte reicht für eine Sensitivitätsanalyse mit nicht korrelierten Eingangsgrößen aus; beide Aufgaben der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse können gelöst werden. Die Effekte 1. Ordnung beantworten die Frage nach der Identifizierung der wichtigsten Eingangsgrößen, während die Gesamteffekte dem Erreichen einer vorgegebenen Zielvarianz σ_{grenz}^2 für die Ausgangsgröße Y dienen.

Um die zweite Aufgabenstellung, die Risikobewertung, zu behandeln, werden zunächst alle Gesamteffekte und alle Effekte 1. Ordnung berechnet. Anschließend wird wie folgt vorgegangen:

- Der größte Gesamteffekt $\sigma_{Y/\sim X_1}^2$ ist mit der Differenz $\sigma_y^2 - \sigma_{grenz}^2$ zu vergleichen: ist $\sigma_{Y/\sim X_1}^2 > \sigma_y^2 - \sigma_{grenz}^2$, so ist die Prozedur abzuschließen, im anderen Fall ist fortzufahren.
- Hinzunahme des nächstgrößeren Gesamteffektes und Berechnung des kombinierten Faktors $\sigma_{Y/\sim X_1, \sim X_2}^2$ mit anschließendem Vergleich mit der Differenz $\sigma_y^2 - \sigma_{grenz}^2$ wie in Schritt 1.
- Weitere Hinzunahme von Gesamteffekten und Berechnung von kombinierten Effekten, bis der berechnete kombinierte Faktor größer als die Differenz aus Schritt 1 ist.

Bisher wurden stochastische Abhängigkeiten zwischen den Eingangsgrößen in den Ausführungen nicht berücksichtigt. Da viele Zusammenhänge für stochastisch abhängige Eingangsgrößen nicht gelten, kann in diesem Fall keine Aussage bezüglich dem Verhältnis von Gesamteffekten und 1.Ordnung Sensitivitätsindizes gemacht werden. Für weitere Einzelheiten sei auf Kapitel 2.4.5.4 verwiesen.

2.4.5.3 FOURIER Amplitude Sensitivity Test (FAST)

Für diese Sensitivitätsanalysemethode wurde bisher keine deutsche Bezeichnung eingeführt. Aus diesem Grund wird einerseits im Rahmen dieser Arbeit die deutsche Übersetzung FOURIER Amplituden Sensitivitätstest vorgeschlagen und genutzt und andererseits die Abkürzung FAST Methode verwendet. Die FAST Methode wurde von CUKIER et al. (1973, 1975, 1978) und SCHAIBLY und SHULER (1973) entwickelt. Wesentliche Weiterentwicklungen wurden von SALTELLI u. BOLADO (1998) und SALTELLI et al. (1999) vorgenommen. Aufgrund der aufgeführten Weiterentwicklungen können neben den Sensitivitätsindizes 1.Ordnung, die wie SOBOLs Sensitivitätsindizes 1.Ordnung als Korrelationsverhältnisse aufgefasst werden können, Gesamteffekte berechnet werden.

Die Sensitivität wird hier im Frequenzbereich analysiert. Ein Vorteil in Relation zur Methode von SOBOL ist dabei, dass der FOURIER Amplituden Sensitivitätstest mit deutlich weniger Berechnungsschritten auskommt (z.B. CROSETTO und TARANTOLA 2001), da, wie in der Folge gezeigt wird, statt der Auswertung einer mehrdimensionalen Funktion und damit eines Mehrfachintegrals, nur eine ein-dimensionale Funktion betrachtet wird. Nachfolgend ist dieser Übergang prinzipiell für den Erwartungswert $E(Y)$ der Ausgangsgröße aufgezeigt

$$E(Y) = \int \dots \int Y(\mathbf{X}) \cdot p(\mathbf{X}) dx_1 \dots dx_n = \int f(s) ds, \quad (2.4.60)$$

mit $p(\mathbf{X})$ als mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion und

einer Funktion $f(s) = f(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))$, die die Ausgangsgröße Y in Abhängigkeit von dem Parameter s darstellt und damit von der Darstellung in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen X abweicht.

Für die Transformation wird jeder Eingangsgröße X_i mittels der Funktion g eine Frequenz ϖ_i zugeordnet:

$$x_i(s) = g(\sin(\varpi_i \cdot s)) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4.61)$$

Der Parameter s läuft aufgrund des Ergodizitätstheorems (z.B. CUKIER et al. 1973) zwischen $-\pi$ und π . Wäre dieses Theorem nicht anwendbar, so lägen die Integralgrenzen bei $-\infty$ und ∞ . Die Zuordnung einer Frequenz ϖ_i zu einer Eingangsgröße X_i erfolgt zufällig und beeinflusst das Ergebnis der nachfolgenden Analyse nicht, wenn sichergestellt ist, dass die ϖ_i und die zugehörigen Oberschwingungen nicht linear voneinander abhängen (SCHAIBLY und SHULER 1972, SALTELLI et al. 1999).

Nach der Transformation mittels Gleichung (2.4.61) variieren alle Parameter X_i gleichzeitig, wenn s zwischen $-\pi$ und π variiert. Man erreicht damit bei der FAST Methode die mehrdimensionale Mittelung auf anderem Weg als bei SOBOLs Methode. Die Stichprobengenerierung erfolgt daher bei dieser Methode zunächst im eindimensionalen Raum gleichabständig für den Parameter s . Die der Verteilung der Eingangsgrößen zugeordneten Stichprobenwerte beziehungsweise Realisierungen x_{ki} entstehen erst über die Transformation (2.4.61) beziehungsweise (2.4.62).

CHAN et al. (2000) schlagen verschiedene Funktionen g vor und priorisieren

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(t) \quad \text{mit } t = \sin(\varpi_i \cdot s), \quad (2.4.62)$$

die SALTELLI et al. (1996) entnommen ist. Diese Funktionen erzeugen einen Satz von Geraden für den eindimensionalen Raum. Daraus ergibt sich, dass die Realisierungen x_{ki} der X_i im n-dimensionalen Einheitswürfel gleichverteilt sind. Abbildung 7 zeigt beides in graphischer Form. Aufgrund dieser Eigenschaft werden diese Funktionen für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt.

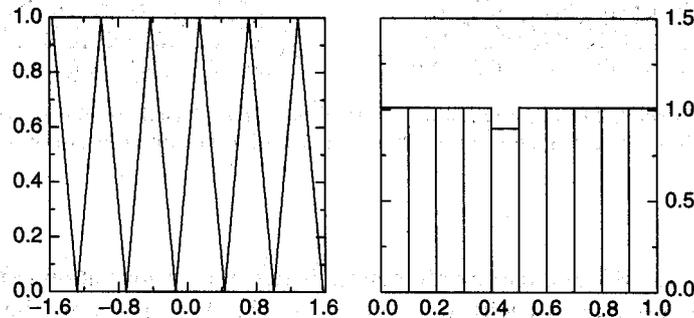


Abb. 7: Links: Funktion $g(t)$ bzw. $x_i(s)$ in Abhängigkeit von s ; rechts: Verteilung der x_{ki} im Einheitswürfel; beides für $\varpi_i = 11$ (CHAN et al. 2000)

Zur Berechnung des Erwartungswertes der Ausgangsgröße wird die Funktion $f(s)$ mit Hilfe der Funktion $g(t)$ dargestellt

$$E(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds \quad (2.4.63)$$

$$\text{mit } f(s) = f(g(\sin(\varpi_1 \cdot s)), g(\sin(\varpi_2 \cdot s)), \dots, g(\sin(\varpi_n \cdot s))),$$

wobei die Funktion $f(s)$ die Ausgangsgröße in Abhängigkeit von dem Parameter s aufzeigt. Auch die Varianz σ_Y^2 lässt sich als Funktion vom Parameter s darstellen:

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(s) ds - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds \right)^2. \quad (2.4.64)$$

Für Erwartungswert und Varianz lassen sich ähnlich wie bei den Sensitivitätsmaßen nach SOBOL empirische Schätzwerte unter Nutzung von Summenfunktionen berechnen. Auf eine explizite Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet.

Die Funktion $f(s)$ in den Gleichungen (2.4.63) und (2.4.64) kann in eine FOURIER-Reihe entwickelt werden

$$y = f(s) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cdot \cos(k \cdot s) + B_k \cdot \sin(k \cdot s)), \quad (2.4.65)$$

mit den FOURIER-Koeffizienten

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(k \cdot s) ds \quad \text{mit } k = 1, 2, \dots, \infty,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(k \cdot s) ds \quad \text{und} \quad (2.4.66)$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds.$$

Für die Gesamtvarianz σ_Y^2 der Ausgangsgröße Y kann unter Nutzung der Eigenschaften von FOURIER-Reihen und Gleichung (2.4.65) (z.B. CUKIER et al. 1973) ein Schätzwert s_Y^2 angegeben werden:

$$s_Y^2 \approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2). \quad (2.4.67)$$

Um den Einfluss einer Eingangsgröße X_i auf die Varianz der Ausgangsgröße abzuschätzen, ist der Einfluss der jeweils zugeordneten Frequenz ϖ_i auf die Gesamtvarianz zu ermitteln. Hierfür sind aufgrund der Alias-Effekte die ganzzahligen Vielfachen von ϖ_i , die Oberschwingungen, zu berücksichtigen. Da mit zunehmender Ordnung die Oberschwingungen in der Regel numerisch an Bedeutung verlieren, braucht die Summe nur bis zu einer maximalen Ordnung m gebildet zu werden. Der Schätzwert s_{Y/X_i}^2 für die bedingte Varianz σ_{Y/X_i}^2 ergibt sich daher zu

$$s_{Y/X_i}^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=1}^m (A_{p\varpi_i}^2 + B_{p\varpi_i}^2). \quad (2.4.68)$$

Die Beschränkung bis zur Ordnung m beinhaltet einen Vernachlässigungsfehler, der um so kleiner ist, um so größer m gewählt wird. Zur Wahl von m sei auf den Abschnitt nach Tabelle 2 verwiesen.

Normiert man die σ_{Y/X_i}^2 mit Hilfe von σ_Y^2 und überträgt dieses auf die zugehörigen Schätzwerte, so ergibt sich das Sensitivitätsmaß S_i^{FAST} zu

$$S_i^{FAST} = \frac{\sigma_{Y/X_i}^2}{\sigma_Y^2} \quad \text{bzw.} \quad S_i^{FAST} = \frac{s_{Y/X_i}^2}{s_Y^2}, \quad (2.4.69)$$

das äquivalent zu den Sensitivitätsindizes 1.Ordnung von SOBOL verwendet werden kann.

Auch hier können die Begriffe Korrelationsverhältnis und Wichtigkeitsmaß benutzt werden. SALTELLI et al. (1999) haben empirisch gezeigt, dass Sobols Sensitivitätsindizes und das Sensitivitätsmaß S_i^{FAST} zu identischen Ergebnissen führen.

Tab. 2: Linear unabhängige Frequenzen bis zur Ordnung $m = 4$ nach SCHAIBLY und SHULER (1973)

Anzahl der Eingangsgrößen	Frequenzen
5	11,21,27,35,39
5	2,42,62,74,90
6	1,21,31,37,45,49
7	17,39,59,69,75,83,87
8	23,55,77,97,107,113,121,125
9	19,59,91,113,133,143,149,157,161
10	25,63,103,135,157,177,187,193,201,205

An dieser Stelle soll die Wahl der Frequenzen ϖ_i und die Ordnung m der harmonischen Schwingungen behandelt werden. Die Anzahl der Frequenzen ist mit der Anzahl der Eingangsgrößen n festgelegt. Die

numerischen Werte für die Frequenzen können prinzipiell frei gewählt werden, wenn sie der Bedingung der linearen Unabhängigkeit genügen. Diese Abhängigkeiten (Alias-Effekte) können nur bis zu einer festzulegenden Ordnung m vermieden werden (SCHAIBLY und SHULER 1973). Dieses spricht für eine Wahl einer möglichst großen Ordnung. In diesem Fall steigt der Stichprobenumfang jedoch an (vergleiche Gleichung (2.4.72)), daher überschreitet die Ordnung nicht die Werte 4 oder 6 (CUKIER et al. 1975). In Abhängigkeit von der Anzahl der Eingangsgrößen und dem Wert m können die bis zur Ordnung m linear unabhängigen Frequenzen festgelegt werden. In SCHAIBLY und SHULER (1973) werden die Frequenzen durch Ausprobieren bestimmt. Dabei wird darauf geachtet, dass ϖ_{\max} möglichst gering ist, damit die Stichprobengröße, wie nachfolgend gezeigt wird, so klein wie möglich ausfällt. In Tabelle 2 sind die linear unabhängigen Frequenzen für unterschiedliche Anzahlen von Eingangsgrößen und $m = 4$ angegeben. Die jeweils größte Frequenz ist als ϖ_{\max} aufzufassen. Die Tabelle stellt einen Ausschnitt der in SCHAIBLY und SHULER (1973) veröffentlichten Tabelle dar. Für $n = 5$ sind zwei Frequenzkombinationen angegeben. Der zweite Satz erfüllt die Forderung nach minimalen ϖ_{\max} nicht, wird aber aus Gründen der Vollständigkeit mitgeführt.

Unter Nutzung des Nyquist-Kriteriums (z.B. KOCH u. SCHMIDT 1994) gilt

$$\varpi_{nyq} = \frac{\pi}{\Delta s} = \frac{u_a}{2}, \quad (2.4.70)$$

mit Δs als äquidistanter Abstand zwischen den einzelnen Stichprobenwerten im ein-dimensionalen Raum und u_a als sich daraus ergebender Stichprobenumfang. Stellt man Gleichung (2.4.70) um und setzt für ϖ_{nyq} die höchste betrachtete Oberschwingung $m \cdot \omega_{\max}$ ein, so ergibt sich

$$u_a = 2 \cdot \varpi_{nyq} = 2 \cdot m \cdot \varpi_{\max}. \quad (2.4.71)$$

Berücksichtigt man, dass ϖ_{nyq} größer als $m \cdot \omega_{\max}$ sein muss, so erhält man für den minimalen Stichprobenumfang u_{\min} (SALTELLI et al. 1999)

$$u_{\min} = 2 \cdot m \cdot \varpi_{\max} + 1. \quad (2.4.72)$$

Auf dieser Weise können Oberschwingungen bis zur Ordnung m bei der Analyse berücksichtigt werden. Der minimale Stichprobenumfang u_{\min} ergibt sich nach Gleichung (2.4.72) unabhängig von der Anzahl der Eingangsgrößen. Diese Tatsache stellt aus Effizienzgründen insbesondere bei großer Eingangsgrößenanzahl einen wesentlichen Vorteil der FAST Sensitivitätsanalysemethode dar.

Bei dem Sensitivitätsindex (2.4.69) werden aufgrund der Gleichung (2.4.62) bei identischem Stichprobenumfang immer dieselben Stichprobenwerte erzeugt. Will man die letztgenannte Eigenschaft vermeiden, so ist diese Gleichung um die Phasenverschiebung φ zu erweitern

$$x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin(\varpi_i \cdot s + \varphi)). \quad (2.4.73)$$

Die Phasenverschiebung wird gleichverteilt vorliegend angenommen, so dass deren Variation im Intervall zwischen $-\pi$ und π die Erzeugung verschiedener Kurvenrealisierungen erlaubt. Es werden in der Folge wie bei SOBOLs Methode unterschiedliche Stichproben erzeugbar. Der Stichprobenumfang berechnet sich in der Folge zu

$$u = (2 \cdot m \cdot \varpi_{\max} + 1) \cdot u_{\varphi} \quad (2.4.74)$$

mit u_φ als Anzahl der Variationen von φ . Die Verwendung mehrerer Stichproben durch die Nutzung verschiedener φ entspricht der Bildung des Erwartungswertes über die bedingte Varianz bei der Methode nach SOBOL mit dem Unterschied, dass dieses bei der FAST Methode nicht zwingend erforderlich ist, da die Möglichkeit $\sigma_{Y/X_i}^2 > \sigma_Y^2$ ausgeschlossen werden kann.

Bisher konnten mit Hilfe der FAST Methode nur Sensitivitätsindizes 1.Ordnung zur Verfügung gestellt werden. Zur Berechnung von Gesamtindizes, die die Informationen bezüglich aller Eingangsgrößen außer der Eingangsgröße X_i berücksichtigen, ist das Spektrum aller Frequenzen vermindert um den Einfluss von ϖ_i zu analysieren. Eine Möglichkeit, dieses zu erreichen, ist die Festlegung einer komplementären Frequenz ϖ'_i , die die Effekte, die nicht durch X_i begründet sind, beschreibt. Zu diesem Zweck ist ϖ_i möglichst hoch und ϖ'_i möglichst klein, zum Beispiel zu Eins, festzulegen. Die komplementäre Frequenz darf nach SALTELLI et al. (1999) den Wert

$$\varpi'_i = \frac{\varpi_i}{2 \cdot m} \quad (2.4.75)$$

nicht überschreiten, da die Nyquist-Bedingung (Gleichung (2.4.70)) sowie Oberschwingungen bis zur Ordnung m zu berücksichtigen sind. Eine lineare Abhängigkeit der Einflüsse von ϖ_i und ϖ'_i wird so vermieden. Setzt man ϖ'_i zu 1, so ergibt sich für ϖ_i der Wert von 8. Wird nur eine Frequenz ϖ'_i für alle Eingangsgrößen genutzt, so wird der Einheitshyperwürfel nur ungenügend abgedeckt. Ein besseres Ausfüllen des Abbildungsraums kann mit der Wahl unterschiedlicher komplementärer Frequenzen ϖ'_{-i} für jede Eingangsgröße erreicht werden. Die größte komplementäre Frequenz darf analog zu Gleichung (2.4.75) nach SALTELLI et al. (1999) den Wert

$$\max(\varpi'_{-i}) = \frac{\varpi_i}{2 \cdot m} \quad (2.4.76)$$

nicht überschreiten. Die den Einflussgrößen zuzuordnenden komplementären Frequenzen ϖ'_{-i} sind zwischen 1 und $\max(\varpi'_{-i})$ möglichst gleichabständig anzuordnen. Der individuelle Frequenzabstand ist nach folgenden Regeln zu bestimmen:

- der Abstand zwischen 2 aufeinanderfolgenden Frequenzen sollte so groß wie möglich sein,
- die Anzahl der Eingangsgrößen, die einer Frequenz zugeordnet sind, sollten so klein wie möglich sein.

Tab. 3: Minimaler Stichprobenumfang für verschiedene ϖ_i und $n = 8$, $\varpi_4 = \varpi_i$ (SALTELLI et al. 1999)

u_{\min}	ϖ_i	$\max(\varpi'_i)$	Frequenz- abstand	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5	ϖ_6	ϖ_7	ϖ_8
65	8	1	0	1	1	1	8	1	1	1	1
129	16	2	1	1	2	1	16	1	2	1	2
257	32	4	1	1	2	3	32	1	2	3	4
513	64	8	1	1	2	3	64	5	6	7	8
1025	128	16	2	1	3	5	128	9	11	13	15
2049	256	32	4	1	5	9	256	17	21	25	29
4097	512	64	8	1	9	17	512	33	41	49	57
8193	1024	128	16	1	17	33	1024	65	81	97	113

In Tabelle 3, die SALTELLI et al. (1999) entnommen ist, werden beispielhaft die komplementären ϖ'_{-i} und der minimale Stichprobenumfang u_{\min} für verschiedene ϖ_i bei 8 Eingangsgrößen angegeben. Die Frequenz ϖ_i ist hier der Eingangsgröße X_4 zugeordnet. Für jede weitere Eingangsgröße X_i wird dasselbe Schema angewandt, wobei ϖ_4 nun durch die X_i zugeordnete Frequenz ϖ_i ersetzt wird.

Für jede Frequenz ϖ_i gilt der minimale Stichprobenumfang nach Gleichung (2.4.72), so dass für die Ableitung eines minimalen Stichprobenumfangs bei Berechnung von Schätzwerten für die Gesamtindizes aller Eingangsgrößen

$$u_{T/\min} = n \cdot (2 \cdot m \cdot \varpi_{\max} + 1) \quad (2.4.77)$$

festzulegen ist. Der Vorteil der FAST Methode von der Anzahl der Eingangsgrößen unabhängig zu sein, geht auf diesem Weg leider verloren. Der tatsächliche Stichprobenumfang ermittelt sich unter Einbeziehung des Faktors u_φ

$$u = n \cdot u_\varphi \cdot (2 \cdot m \cdot \varpi_{\max} + 1). \quad (2.4.78)$$

Zur Festlegung von ϖ_i und u_φ sei auf SALTELLI et al. (1999) und er daraus entnommen Abbildung 8

verwiesen; zu berücksichtigen ist dabei das Verhältnis $\frac{\varpi_i}{u_\varphi}$. Hierfür geben SALTELLI et al. (1999) einen

empirisch bestimmten optimalen Bereich an, der auch in Abbildung 8 aufgezeigt ist. Es wird empfohlen, die Parameter zu wählen, die in den nicht schattierten konischen Bereich fallen. Außerdem sollte aufgrund von Gleichung (2.4.76) $\varpi_i \geq 8$ eingehalten werden, damit $\max(\omega'_{-i})$ mindestens den Wert Eins annehmen kann. Die minimale Stichprobenanzahl kann bei der FAST Methode aufgrund von (2.4.72) und $\varpi_i = 8$ sowie $m = 4$ wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \text{für Indizes 1. Ordnung} \quad u_{\min} &= 65, \\ \text{für Gesamteffekte} \quad u_{T/\min} &= n \cdot 65. \end{aligned} \quad (2.4.79)$$

Zur Anwendung der erweiterten FAST Methode sind daher zunächst die ω_i inklusive ϖ_{\max} sowie m festzulegen. Anschließend können die ϖ'_{-i} ermittelt werden. Unter Nutzung von Abbildung 8 kann der Stichprobenumfang u mittels Variation von u_φ ermittelt werden.

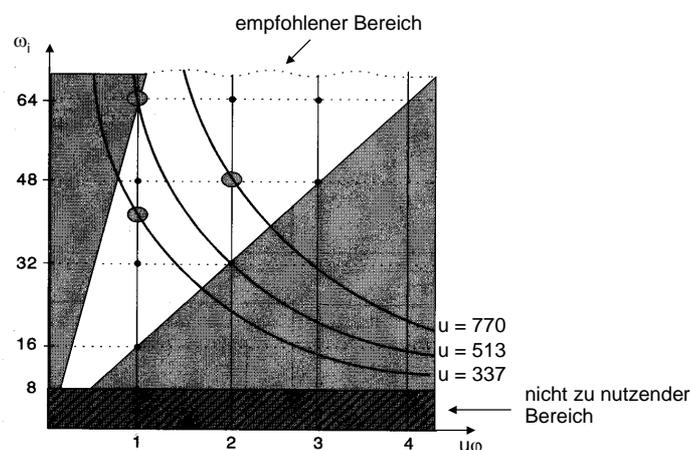


Abb. 8: Darstellung von ϖ_i und u_φ für verschiedene Stichprobenumfänge (SALTELLI et al. 1999)

Ein Schätzwert für die bedingte Varianz $s_{Y/X_{-i}}^2$, die alle nicht von X_i beeinflusste Frequenzen beinhaltet, kann in Anlehnung an Gleichung (2.4.68) angegeben werden

$$s_{Y/X_{-i}}^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=1}^m (A_{p\sigma_{-i}}^2 + B_{p\sigma_{-i}}^2). \quad (2.4.80)$$

Die Gesamtindizes, die äquivalent zu den entsprechenden Maßen von SOBOL sind, werden durch Differenzbildung und Normierung gewonnen

$$S_{Ti}^{FAST} = 1 - \frac{\sigma_{Y/X_{-i}}^2}{\sigma_Y^2} \approx 1 - \frac{s_{Y/X_{-i}}^2}{s_Y^2}. \quad (2.4.81)$$

Da der FOURIER Amplituden Sensitivitätstest die selben Sensitivitätsindizes wie SOBOLs Methode liefert, gelten die selben Summenbedingungen und Zusammenhänge wie im vorausgehenden Abschnitt. Insbesondere gelten die Gleichungen (2.4.47), (2.4.48), (2.4.53), (2.4.58) und (2.4.59). Auch die in Abschnitt 2.4.5.2 angegebenen Vorgehensweisen zur Bestimmung der Wichtigkeit von Einflussgrößen und zum Erreichen einer vorgegebenen Zielvarianz σ_{grenz}^2 für die Ausgangsgröße Y können ohne Änderung übernommen werden.

2.4.5.4 Korrelierte Eingangsgrößen

Die bisherigen Ausführungen zur varianz-basierten Sensitivitätsanalyse, insbesondere die Ausführungen zu additiven Modellen und dem Zusammenhang zwischen Indizes 1.Ordnung und Gesamteffekten (Gleichung (2.4.59)), gelten nur für stochastisch unabhängige Eingangsgrößen. Sobald Korrelationen zwischen den Eingangsgrößen vorliegen, kann die Varianzzerlegung nach Gleichung (2.4.36) nicht mehr vorgenommen werden, obwohl die bedingten Varianzen weiterhin – wenn auch mit geringerer Effizienz – geschätzt werden können (SALTELLI u. TARANTOLA 2002). Im Rahmen dieser Arbeit werden die Untersuchungen auf stochastisch unabhängige Eingangsgrößen eingeschränkt. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass ingenieurgeodätische Auswertungen sich häufig mit korrelierten Eingangs- beziehungsweise Messgrößen beschäftigen. Die Vernachlässigung der Korrelationen kann zu verfälschten Sensitivitätsindizes führen.

Trotzdem sollen hier die neusten Entwicklungen bezüglich korrelierter Eingangsgrößen aufgeführt werden. Die Ausführungen beziehen sich im Wesentlichen auf SALTELLI et al. (2004), SALTELLI u. TARANTOLA (2002) und SALTELLI (2002). In SALTELLI et al. (2004) wird allgemein ein Überblick über das Verhältnis von Sensitivitätsindizes 1.Ordnung S_i^{gl} zu den zugeordneten Gesamteffekten S_{Ti}^{gl} gegeben. Dieser ist hier in Tabelle 4 zusammengefasst. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Sensitivitätsmaße nach SOBOL und FAST mittels einer Abkürzung für globale Sensitivitätsmaße S_i^{gl} beziehungsweise S_{Ti}^{gl} zusammengefasst, da sie nur unterschiedliche Berechnungswege zur Ermittlung derselben Sensitivitätsmaße aufzeigen. Diese Tabelle zeigt, dass bei korrelierten Eingangsgrößen strenge mathematische Aussagen über das zuvor angesprochene Verhältnis nicht immer möglich sind; beispielsweise ist aufgrund der Ungleichungen in der letzten Spalte von Tabelle 4 keine Überprüfung bezüglich der Additivität eines Modells realisierbar.

Tab. 4: Korrelierte Eingangsgrößen und Sensitivitätsindizes

	Stochastisch unabhängige Eingangsgrößen	Stochastisch abhängige Eingangsgrößen
Additives Modell	$S_i^{gl} = S_{Ti}^{gl}$	$S_i^{gl} \geq S_{Ti}^{gl}$
Nicht-additives Modell	$S_i^{gl} \leq S_{Ti}^{gl}$	$S_i^{gl} \neq S_{Ti}^{gl}$

Bei Vorliegen von stochastisch abhängigen Eingangsgrößen können die Effekte 1.Ordnung weiterhin als Sensitivitätsmaße zur Berechnung der Reihenfolge des Einflusses der Eingangsgrößen herangezogen werden. Eine quantitative Aussage ist jedoch nicht mehr ableitbar (SALTELLI 2002).

Da kein Zusammenhang zwischen den Gesamteffekten und den Indizes 1.Ordnung aufgestellt werden kann, ist für die zweite Aufgabe der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse, dem Erreichen einer vorgegebenen Zielvarianz für die Ausgangsgröße, dagegen eine abweichende Vorgehensweise zu empfehlen (SALTELLI und TARANTOLA 2002).

- Der größte Effekt 1.Ordnung σ_{Y/X_1}^2 ist mit der Differenz $\sigma_y^2 - \sigma_{grenz}^2$ zu vergleichen: ist $\sigma_{Y/X_1}^2 > \sigma_y^2 - \sigma_{grenz}^2$, so ist die Prozedur abzuschließen, im anderen Fall ist fortzufahren.
- Berechnung des kombinierten Effektes 2.Ordnung $\sigma_{Y/X_1, X_2}^2$. Die Eingangsgröße X_2 wird dabei über das maximale Maß M_j , das nachfolgend erläutert wird, ausgewählt.
- Überprüfung, ob $\sigma_{Y/X_1, X_2}^2 > \sigma_y^2 - \sigma_{grenz}^2$: ist die Bedingung erfüllt, so ist die Prozedur abzubrechen, im anderen Fall ist fortzufahren.
- Weitere Hinzunahme von Effekten höherer Ordnung bis der berechnete kombinierte Effekt größer als die Differenz $\sigma_y^2 - \sigma_{grenz}^2$ ist. Bei jedem Effekt höherer Ordnung, der hinzugenommen wird, erhöht sich gleichzeitig die Anzahl der Eingangsgrößen unter Nutzung der Maßes M_j .

Das oben angesprochene Maß M_j berechnet sich nach (SALTELLI und TARANTOLA 2002) wie folgt

$$M_j = S(r_j) \cdot (1 - \max_{k \in U} (\rho_{kj})) \cdot \left(1 + \frac{(1 - \sigma_{Y/\sim X_j NK}^2) - \sigma_{EY/X_j NK}^2}{\sigma_{Y/NK}^2} \right)^2 \quad (2.4.82)$$

- mit σ_{NK}^2 Varianzen für den nicht-korrelierten Fall
 ρ_{kj} Korrelationskoeffizient zwischen Eingangsgrößen X_k und X_j ,
 U Menge der bereits festgehaltenen Eingangsgrößen X_1, \dots, X_u ,
 r_j Rang des Effektes 1.Ordnung für die Eingangsgröße X_j ,
 $S(r_j) = \sum_{r=r_j}^n \frac{1}{r}$ SAVAGE Score und
 n Anzahl der Eingangsgrößen.

Das Maß M_j berücksichtigt die Korrelationen zwischen der jeweils betrachteten und den anderen bereits berücksichtigten Eingangsgrößen. Liegen hohe Korrelationen vor, so wird M_j reduziert. Im extremen Fall der linearen Abhängigkeit von einer bereits berücksichtigten Eingangsgröße, wenn also der Korrelationskoeffizient den Wert Eins annimmt, kann M_j mit Null angegeben werden. Offensichtlich ist das eine korrekte Vorgehensweise, da in diesem Fall tatsächlich alle Informationen der Eingangsgröße X_j bereits berücksichtigt wurden.

Zusätzlich berücksichtigt M_j den Grad der Modellinteraktionen, also die Effekte höherer Ordnung, mittels der Differenz $(1 - \sigma_{Y/\sim X_j NK}^2) - \sigma_{Y/X_j NK}^2$, die nach Gleichung (2.4.58) ein Maß für die Nicht-Additivität eines Modells bei stochastisch unabhängigen Eingangsgrößen darstellt. Die effektive Nutzung eines quadratischen Faktors ist empirisch belegt (SALTELLI u. TARANTOLA 2002).

Da der oben beschriebene Ansatz eine hohe Anzahl an Modellrechnungen erfordert, kann er nur für Probleme eingesetzt werden, bei denen eine Modellrechnung nicht länger als einige wenige Minuten benötigt.

Zur Zeit sind Ansätze zur Sensitivitätsanalyse nicht-additiver Modelle mit korrelierten Eingangsgrößen Gegenstand der mathematischen Grundlagenforschung (SAMO 2004). JACQUES et al. (2004) stellen einen neuen Ansatz zur Sensitivitätsanalyse korrelierter Eingangsgrößen vor. Er basiert auf der Aufteilung der Eingangsgrößen in Gruppen. Unter der Voraussetzung, dass Korrelationen nur innerhalb der Gruppen vorliegen und die einzelnen Gruppen untereinander keine stochastischen Abhängigkeiten aufweisen, gelten für die Gruppen wieder die Gleichungen (2.4.47) und (2.4.59). Eine erste empirische Überprüfung wird vorgestellt; weitere Forschungsarbeiten werden angeregt.

2.4.6 Zusammenfassung und Eingangsgrößengruppen

Nachdem in den vorstehenden Abschnitten die verschiedenen Methoden zur globalen Sensitivitätsanalyse ausführlich hergeleitet und vorgestellt wurden, sollen in diesem Abschnitt aus Gründen der Übersichtlichkeit die Sensitivitätsmaße mit ihren Möglichkeiten zur Modellanalyse zusammengestellt werden. Dabei wird einerseits aufgezeigt, welche Sensitivitätsmaße sich zur Identifikation der Modelleigenschaften (Tabelle 5) eignen, andererseits werden die Maße angegeben, die bei vorgegebenen Modelleigenschaften eine quantitative Analyse (Tabelle 6) erlauben. Die Zusammenstellung bezieht sich auf nicht-korrelierte Eingangsgrößen, wie sie im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden. Beide Zusammenstellungen können als roter Faden für die Vorgehensweise in Kapitel 4 genutzt werden.

Tab. 5: Sensitivitätsmaße zur Überprüfung von Modelleigenschaften

	Sensitivitätsmaße	Einzuhaltende Bedingung
lineares Modell	normierte Regressionskoeffizienten β_i	$\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 1$
monotones und additives Modell	normierte Rangregressionskoeffizienten $R\beta_i$	$\sum_{i=1}^n R\beta_i^2 = 1$
additives Modell	Sensitivitätsindizes 1. Ordnung S_i^{Sob} oder S_i^{Fast}	$\sum_{i=1}^n S_i^{Sob} = 1$ oder $\sum_{i=1}^n S_i^{Fast} = 1$
modellunabhängig	Sensitivitätsindizes bis zur maximalen Ordnung $S_{\Delta i, j, \dots, n}^{Sob}$ oder $S_{\Delta i, j, \dots, n}^{Fast}$	$\sum_i^n + \dots + \sum \dots \sum S_{\Delta i, j, \dots, n}^{Sob} = 1$ oder $\sum_i^n + \dots + \sum \dots \sum S_{\Delta i, j, \dots, n}^{Fast} = 1$

Neben den in Tabelle 5 angegebenen Summenbedingungen, können auch weitere Maße zur Identifikation der Modelleigenschaften herangezogen werden. Die numerische Übereinstimmung der Sensitivitätsindizes 1. Ordnung mit den jeweiligen Gesamteffekten (vergleiche Gleichung (2.4.58)) charakterisiert additive Modelle. Das multiple Bestimmtheitsmaß der Regressionsanalyse kann nach Gleichung (2.4.15) die Linearität eines Modells überprüfen.

Tabelle 6 zeigt die entscheidende Bedeutung der varianz-basierten Sensitivitätsanalysemethoden SOBOL und FAST auf. Nur die mit Hilfe dieser Methoden zu ermittelnden Sensitivitätsmaße $S_{T_i}^{Sob}$ und $S_{T_i}^{Fast}$ ermöglichen eine quantitative Sensitivitätsanalyse ohne Kenntnis der Modelleigenschaften.

Tab. 6: Einsetzbarkeit von Sensitivitätsmaßen zur quantitativen Modellanalyse

	β_i	$R\beta_i$	S_i^{Sob}	S_i^{Fast}	$S_{T_i}^{Sob}$	$S_{T_i}^{Fast}$
lineares Modell	ja	ja	ja	ja	ja	ja
monotones und additives Modell	nein	ja	ja	ja	ja	ja
additives Modell	nein	nein	ja	ja	ja	ja
modellunabhängig	nein	nein	nein	nein	ja	ja

Eine wesentliche Erweiterung der varianz-basierten Methoden soll an dieser Stelle eingeführt werden. Häufig interessieren nicht die einzelnen Eingangsgrößen, sondern **Gruppen von Eingangsgrößen**. Um dieses anschaulich zu machen, soll auf den Anwendungsfall der Ausgleichung geodätischer Netze hingewiesen werden. Dort interessiert in der Regel nicht der Einfluss einer einzelnen Richtungsmessung auf die Ausgangsgrößen, die Koordinaten der zu bestimmenden Netzpunkte, sondern der Gesamteinfluss aller Richtungsmessungen. Zu diesem Zwecke wurde unter anderem die Methode der Varianzkomponentenschätzung entwickelt (siehe zum Beispiel PELZER 1985 und NIEMEIER 2002).

Werden bei gleichbleibender Eingangsgrößenanzahl nur Gruppen von Eingangsgrößen analysiert, so wird zum Einen an Übersichtlichkeit gewonnen, zum Anderen auch die Stichprobenanzahl wesentlich gesenkt und damit einige Modelle aufgrund ihrer hohen Eingangsgrößenanzahl überhaupt erst analysierbar gemacht. Die Stichprobenanzahl senkt sich, da die Anzahl der Eingangsgrößen n in Gleichungen (2.4.78) für die FAST Methode und (2.4.9) für SOBOLs Methode mit der Anzahl der Eingangsgruppenanzahl n_{gr} zu ersetzen ist. Die Schätzung Sensitivitätsindizes 1.Ordnung sowie Gesamteffekte kann unverändert umgesetzt werden. Es ist dabei nur darauf zu achten, dass an Stelle der Eingangsgröße X_i die Eingangsgrößengruppe $X_{gr,i}$ rückt. Für die Methode nach SOBOL (Abschnitt 2.4.5.2) bedeutet dieses, dass mehrere Eingangsgrößen gleichzeitig festgehalten werden. Für die erweiterte FAST Methode (Abschnitt 2.4.5.3) wird allen Eingangsgrößen einer Gruppe die selbe Frequenz zugeordnet. Man berechnet folglich – betrachtet man die originären Eingangsgrößen – ein Effekt höherer Ordnung, der alle Abhängigkeiten innerhalb der jeweiligen Gruppe berücksichtigt. Die Bildung von Eingangsgrößengruppen ist sowohl mit SOBOLs Methode (Abschnitt 2.4.5.2) als auch mit der FAST Methode (Abschnitt 2.4.5.3) realisierbar.

2.5 Weitere Betrachtungen zur Sensitivitätsanalyse

In den Abschnitten 2.1 und 2.2 dieses Kapitels wird einerseits die Vielzahl an möglichen Zielsetzungen der Sensitivitätsanalyse vorgestellt und andererseits ein Überblick zu den unterschiedlichen methodischen Vorgehensweise gegeben. Allgemein wird die Sensitivitätsanalyse als Analyse zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgangsgrößen definiert.

Diese übergreifende Definition der Sensitivitätsanalyse ist geprägt von dem berechtigten Ansatz, die Sensitivitätsanalyse als ein eigenständiges Fachgebiet zu etablieren. Dieser Ansatz wird vor allem durch die Überblicksbücher SALTELLI et al. (2000) und SALTELLI et al. (2004) sowie in den Internationalen Konferenzen zu dieser Thematik (z. B. SAMO 1998 oder SAMO 2004) unterstützt. Außerdem beschäftigt

sich ein Gemeinsames Forschungszentrum der Europäischen Union in Ispra (Italien) mit dem Namen *Institute for the Protection and Security of the Citizen* (Institut für den Schutz und die Sicherheit der Bürger) innerhalb der Abteilung *Technological Economic Risk Management* (Technologische ökonomisches Risikomanagement) unter anderem schwerpunktmäßig mit der Entwicklung von Sensitivitätsanalysemethoden. Zielrichtung europäischer Wissenschaft und Politik ist hierbei vor allem die Sensitivitätsanalyse im Sinne der Risikobewertung oder Risikoabschätzung.

Typische Beispiele, die sich mit der Anwendung varianz-basierter und damit modellunabhängiger Sensitivitätsmaße beschäftigen, sind Risikoanalysen zu politischen und ökonomischen Entscheidungsprozessen (TARANTOLA et al. 2004, TARANTOLA et al. 2000), ökologische Modelle (OSIDELE u. BECK 2004), komplexe chemische (CAMPLONGO u. SALTELLI 2000) oder nuklear-physikalische Modelle (DRAPER et al. 2000).

Auf der anderen Seite hat sich der Begriff der Sensitivitätsanalyse in vielen Fachgebieten seit langem etabliert. Er ist dabei häufig mit einer spezifischen Zielsetzung und zum Teil auch mit einem festgelegten methodischen Lösungsweg verknüpft. Hier sollen diese zum Teil recht unterschiedlichen Vorgehensweisen dokumentiert und in den Zusammenhang der zuvor behandelten Methoden gestellt werden. Bewusst ausgeklammert bleiben an dieser Stelle die Zielsetzungen, Definitionen und Methoden der Ingenieurgeodäsie, da sie im nächsten Kapitel gesondert behandelt werden.

In der **Mechanik** wird die Sensitivität eines Strukturmodells gegenüber der Variation von Materialparametern und der Geometrie betrachtet. Hierfür werden Ableitungen kontinuumsmechanischer Größen nach den genannten Variablen, den sogenannten Designvariablen, genutzt, um die Struktur eines Modell mittels Finiter Elemente zu optimieren (z. B. BARTHOLD und STEIN 1994). Es handelt sich folglich prinzipiell um lokale Sensitivitätsmethoden im Sinne der Ausführungen des Abschnittes 2.3. Werden jedoch Zielfunktionen vorgegeben, die bei der Optimierung erreicht werden müssen, so kann von zuverlässigkeitsbasierten Methoden der Sensitivitätsanalyse gesprochen werden, die als globale Sensitivitätsanalysemethode betrachtet werden, da sie die Eigenschaften eines Modells im Optimierungsbereich vollständig untersuchen. Zu weiteren Informationen bezüglich zuverlässigkeitsbasierter Methoden sei beispielsweise auf J. D. CAWLFIELD (2000) verwiesen.

BRAYTON und SPENCE (1980) behandeln mit der Sensitivitätsanalyse zur Optimierung elektronischer Schaltkreise eine sehr spezielle Anwendung. Sie nutzen lokale Sensitivitätsmaße 1. und 2.Ordnung für ihre der **Elektrotechnik** zuzuordnenden Untersuchungen.

ROSENWASSER und YUPUSOV (2000) fassen die Sensitivitätsanalyse als Zweig der **Kybernetik** beziehungsweise Regelungstechnik auf. Sie beschreiben die Zustandsvariablen eines Modells – die im allgemeinen Sinne als Ausgangsgrößen betrachtet werden können – in Abhängigkeit von allen sie beeinflussenden Parametern. Die Ableitung der Zustandsvariablen nach den Parametern werden Sensitivitätsfunktionen 1.Ordnung genannt. Erwähnt sei hier außerdem, dass sie ergänzend die zeit-bezogene Sensitivitätsanalyse, die sich beispielsweise mit der Periode oder der Frequenz als Ausgangsgröße beschäftigt, behandeln. Die Autoren wenden ausschließlich analytische Verfahren zur Ermittlung der Sensitivitätsmaße an. Sie weisen auf die Möglichkeit der analytischen Bestimmung von Sensitivitätsmaßen höherer Ordnung mittels mehrfacher partieller Ableitungen hin. Aufgrund der analytischen Bestimmung der Sensitivitätsmaße und ihrem in der Folge lokalen Charakter sind die Sensitivitätsfunktionen in diesem Wissenschaftsbereich als lokale Sensitivitätsmaße anzusehen.

Die zuvor angesprochenen Zustandsgrößen als Ausgangsgrößen spielen bei der Beschreibung von Systemen eine entscheidende Rolle. Die Systembeschreibung, -validierung und -optimierung gelingt in der Regel unter Nutzung eines KALMAN-Filters (KALMAN 1960). Auch die **Systemtheorie** beschäftigt sich daher mit Methoden der Sensitivitätsanalyse. Hier werden in der Regel optimale Filter mit Mitteln der Sensitivitätsanalyse konstruiert (GELB 1974, SCHRICK 1977). In Analogie zu den Möglichkeiten der Regressionsanalyse werden Modellvereinfachungen so lange vorgenommen, bis das Modell nur noch relevante Parameter und Strukturen enthält. Diese Vereinfachungen können nach GELB (1974) zum Beispiel die Abtaste sowie das deterministische oder stochastische Modell betreffen. Im Gegensatz zur

allgemeinen Definition der Sensitivitätsanalyse wird sich hier auf den Vergleich optimaler und suboptimaler Filter beschränkt. Betrachtet man den Einsatz der mathematischen Methoden, so kommen neben analytischen Methoden, die zu lokalen Sensitivitätsmaßen führen, auch Monte-Carlo-Methoden zum Einsatz, die eine globale Aussage zur Sensitivität der Zustandsgrößen und damit der Ausgangsgrößen bezüglich der Modellvereinfachungen erlauben. In der Regel beschränkt sich die Analyse jedoch auf die Betrachtung der Varianzen der Ausgangsgrößen und kann daher als Varianzanalyse im Sinne von SALTELLI et al. (2000) bezeichnet werden. SCHRICK (1977) verwendet hierfür die gleichfalls gebräuchliche Bezeichnung Kovarianzanalyse.

HEUNECKE (1995) und WELSCH et al. (2000) betrachten die Sensitivität bei der adaptiven dynamischen **KALMAN-Filterung** für die Abhängigkeit der Zustandsgrößen von den als Prozesskoeffizienten betrachteten Materialparametern und finden sich damit in Übereinstimmung mit der Definition der Mechanik. In der vorgestellten Form der partiellen Ableitung handelt es sich um ein lokales Sensitivitätsmaß.

Die vorstehende Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie soll nur einen Einblick in die unterschiedlichen Sichtweisen bezüglich Zielsetzungen und Vorgehensweisen der Sensitivitätsanalyse in Fachgebieten geben, die der Geodäsie und hier insbesondere der Ingenieurgeodäsie benachbart sind, und die einen Bezug zum Thema dieser Arbeit aufweisen. Sie soll außerdem verdeutlichen, dass die in den Abschnitten zur varianz-basierten Sensitivitätsanalyse vorgestellten Sensitivitätsmaße bisher nicht eingesetzt werden. Es wird daher an dieser Stelle klar, dass zum Einen der Begriff der Sensitivitätsanalyse in vielen Fachdisziplinen bekannt ist, zum Anderen aber modellunabhängige Sensitivitätsmaße für den Anwendungsbereich dieser Arbeit bisher nicht genutzt wurden.

3 Sensitivitätsanalyse in der Ingenieurgeodäsie

3.1 Definition der Sensitivitätsanalyse in der Ingenieurgeodäsie

Die Zielsetzungen der ingenieurgeodätischen Sensitivitätsanalyse sind „**Modellvalidierung**“ oder „**Modelloptimierung**“ (NIEMEIER 1985); die weiteren in Abschnitt 2.1 genannten Zielsetzungen wie „*Identifikation wichtiger Eingangsgrößen*“ und „*Identifikation von Modelleigenschaften*“ werden in der Ingenieurgeodäsie nicht aufgegriffen. Die „*Risikobewertung*“ kann indirekt Gegenstand der ingenieurgeodätischen Sensitivitätsanalyse werden, wenn die nachfolgend beschriebene Modellstörung als Grenzwert im Sinne des Modellversagens formuliert ist und eine Optimierung diesbezüglich erfolgt. Diese Vorgehensweise gehört jedoch nicht zum Standardrepertoire des Ingenieurgeodäten und soll daher nicht als übergeordnete Zielsetzung betrachtet werden.

Mit Abschnitt 1.2 ist bereits eine grundlegende Einführung in die Sensitivitätsanalyse für die Fachdisziplin Ingenieurgeodäsie gegeben. Die generelle Vorgehensweise kann in Abbildung 2 abgelesen werden. Daher soll zu Beginn dieses Kapitels diese Vorgehensweise in die in Abbildung 3 des Abschnitts 2.1 aufgeführte generelle Vorgehensweise bei der Sensitivitätsanalyse integriert werden. Hierbei wird deutlich, dass die Ingenieurgeodäsie nur einem kleinen Ausschnitt aus der Vielzahl der möglichen Vorgehensweisen der Sensitivitätsanalyse betrachtet; dieser wird aufbauend auf der Annahme normalverteilter Eingangsgrößen und linearer Modelle durchgängig mit statistisch abgesicherten Methoden umgesetzt.

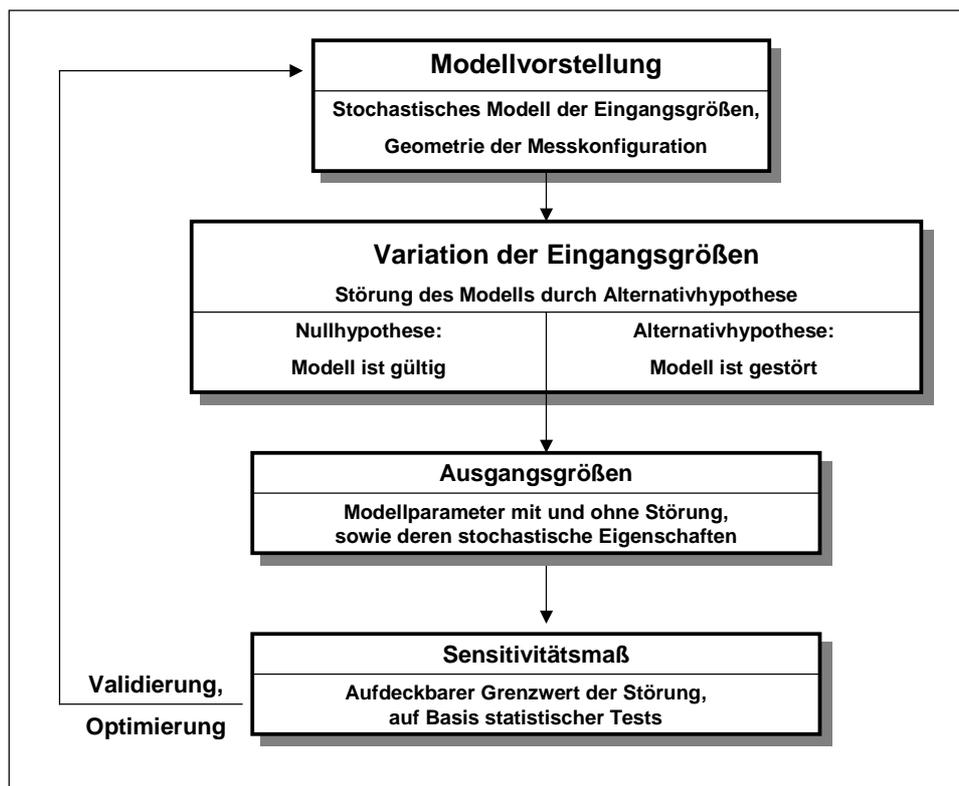


Abb. 9: Ingenieurgeodätische Sensitivitätsanalyse im Rahmen der allgemeinen Vorgehensweise der Sensitivitätsanalyse

Die in der Ingenieurgeodäsie verwendeten Modelle basieren zu einem großen Teil auf der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (z.B. PELZER 1985). Andere Schätzverfahren, die im Zusammenhang mit der Sensitivitätsanalyse in der Geodäsie aufgegriffen werden (z.B. KUTTERER 1999,

WIESER 2002), bleiben für die nachfolgenden Betrachtungen ausgeklammert, da diese Arbeit sich mit der Analyse der Varianz beschäftigt.

Als Eingangsgrößen des Ausgleichungsmodells sind die Beobachtungen aufzufassen; die Ausgangsgrößen sind in der Regel die Koordinaten eines geodätischen Netzes. Da bei der Ausgleichung geodätischer Netze fast durchgängig nicht-lineare Beziehungen zu berücksichtigen sind, müssen die Modellgleichungen an geeigneten Nominalwerten, in der Geodäsie spricht man meist von Näherungswerten, linearisiert werden. Die Gültigkeit des linearisierten Modells hängt daher von der Güte der Näherungswerte ab. Mit einem iterativen Vorgehen im Ausgleichungsprozess kann in der Regel diese Problematik umgangen werden.

Wie bereits in Abschnitt 1.2 geschrieben und in Abbildung 9 gezeigt, geht man in der Ingenieurgeodäsie davon aus, dass der Begriff Sensitivität sich auf die Trennbarkeit von Nullhypothese (Modell ohne Störung) und Alternativhypothese (Modell mit modellierter Störung) bezieht (HEUNECKE 1995, NIEMEIER 2002). Im Sinne der Definition der Sensitivitätsanalyse nach SALTELLI et al. (2000) wird in der Ingenieurgeodäsie nur das Gesamtmodell variiert, um den Einfluss auf die Ausgangsgrößen abzuschätzen. Das Sensitivitätsmaß wird nicht mittels Quotienten, die den Einfluss der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgrößen verdeutlichen, dargestellt, sondern in Maßen, die die angesprochene Trennbarkeit quantifizieren. Diese Maße können im Rahmen einer Optimierung zur Variationen der Eingangsgrößen – wie die Netzkonfiguration oder das stochastische Modell – führen. Werden die hier angesprochenen Trennbarkeitsmaße als Zielfunktionen für eine Optimierung verstanden, so können diese Verfahren der zuverlässigkeitsbasierten Sensitivitätsanalyse zugeordnet werden (z.B. CAWLFIELD 2000).

Die zu modellierende Störung kann als Funktion der Parameter $f(\mathbf{Y})$ dargestellt werden. Im Gegensatz zur geodätischen Literatur sollen die Parameter hier mit \mathbf{Y} bezeichnet werden, um deutlich zu machen, dass es sich um die Ausgangsgrößen im Sinne der Sensitivitätsanalyse handelt. Die Alternativhypothese kann ganz allgemein in Form einer linearen Hypothese

$$H_A : \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (3.1.1)$$

mit $\mathbf{B} = \frac{\partial f(\mathbf{Y})}{\partial \mathbf{Y}}$ und

\mathbf{w} als Konstantenvektor

formuliert werden. Um sicherzustellen, dass es sich um eine im statistischen Sinne testbare Funktion handelt, muss die Funktion \mathbf{B} mit Hilfe einer linearen Transformationsmatrix \mathbf{T} aus der Konfigurationsmatrix der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen \mathbf{A} , ableitbar sein

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}, \quad (3.1.2)$$

mit $\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Y}} \right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{Y})}{\partial \mathbf{Y}} \right)_0$ und

\mathbf{L} als Vektor der Beobachtungen und

$\varphi(\mathbf{Y})$ als Funktion der Ausgangsgrößen.

Der Ausgleichungsalgorithmus nach vermittelnden Beobachtungen bzw. nach GAUSS-MARKOV wird an dieser Stelle als bekannt vorausgesetzt. Er ist in der geodätischen Fachliteratur (z.B. PELZER 1985, NIEMEIER 2002, KOCH 1997, BENNING 2002) detailliert hergeleitet und beschrieben. Im Anhang A wird der Algorithmus inklusive der in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen und Symbole ohne weitere Erläuterungen aufgeführt.

Ist die Alternativhypothese von der Nullhypothese trennbar, so ist eine Modellstörung beziehungsweise Modellerweiterung im statistischen Sinne signifikant nachweisbar. Unter Vorgabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit und einer Testgüte wird bei angenommener Normalverteilung ein statistisch abgesicherter Grenzwert festgelegt, bei dem eine Modellstörung festgestellt werden kann. Der Begriff des Nichtzentralitäts-

parameters, der in Abhängigkeit von oben genannten Wahrscheinlichkeiten festgelegt wird, ist essentieller Bestandteil der ingenieurgeodätischen Sensitivitätsbetrachtungen. Die Berechnung des Nichtzentralitätsparameters hängt von der Testgröße selbst und von deren Wahrscheinlichkeitsverteilung ab. Allgemein betrachtet lässt sich die nachfolgende Testgröße F in Abhängigkeit von der Hypothese in Gleichung (3.1.1) berechnen (NIEMEIER 1979):

$$F = \frac{R \cdot f}{\Omega \cdot h}, \quad (3.1.3)$$

mit $\Omega = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}$,

$$R = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{w})^T \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}} \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{w}),$$

f Freiheitsgrade bei der Ausgleichung,

h Rang der Matrix $(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}} \cdot \mathbf{B})$.

Die quadratische Form R stellt den Zuschlag zur Verbesserungsquadratsumme Ω der Ausgleichung dar, der aufgrund der Einführung der linearen Alternativhypothese nach Gleichung (3.1.1) entsteht. Für die Bezeichnungen der hier nicht eingeführten Matrizen sei auf den Anhang A verwiesen. Die Testgröße F folgt für die Nullhypothese H_0 und für die Alternativhypothese H_A der zentralen beziehungsweise der nicht-zentralen F-Verteilung:

$$\begin{aligned} H_0: F &\sim F_{h,f} \\ H_A: F &\sim F_{h,f,\Lambda} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

mit dem Nichtzentralitätsparameter Λ . Die Verteilungsaussage gilt nur falls die quadratischen Formen Ω und R stochastisch unabhängig sind. Diese Bedingung ist aufgrund von Gleichung (3.1.2) eingehalten.

Aufgrund der Bildung von partiellen Anleitungen (siehe Gleichungen (3.1.1) und (3.1.2)) und der damit bedingten Abhängigkeit von Näherungswerten handelt es sich um lokale Methoden. DING u. COLEMAN (1996a) leiten in Analogie zu Abschnitt 2.3 lokale Sensitivitätsmaße für die vermittelnde Ausgleichung geodätischer Netze her. Sie beschränken sich dabei nicht auf die Sensitivität im Sinne des Abschnitts 3.2.

Basiert das lineare Ausgleichungsmodell oder die lineare Hypothese auf nicht-linearen Funktionen $\varphi(\mathbf{Y})$ bzw. $\mathbf{f}(\mathbf{Y})$, so bietet es sich an, die Methoden der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse zu nutzen, um die Abhängigkeit von den Näherungswerten zu beseitigen. Diese Sensitivitätsanalysemethoden sind in der Ingenieurgeodäsie bisher nicht zum Einsatz gekommen. Zwar wird die Monte-Carlo-Simulation von JOHNSON u. WYATT (1994) zur Optimierung geodätischer Überwachungsnetze eingesetzt, modell-unabhängige Maße wie die in Kapitel 2 vorgestellten Gesamteffekte nach SOBOL oder mittels FAST werden aber bisher nicht verwendet.

Die nachfolgenden Abschnitte vertiefen die Ausführungen zur ingenieurgeodätischen Sensitivitätsanalyse und dehnen den Begriff im Sinne der Trennbarkeit von Null- und Alternativhypothese aus. Eine zu sehr ins Detail gehende Betrachtung unterbleibt, da diese auch der geodätischen Fachliteratur (z.B. PELZER 1985, NIEMEIER 2002, KOCH 1997, BENNING 2002) entnommen werden kann. Die Ausführungen konzentrieren sich auf die Darstellung von Parallelen bei unterschiedlichen Anwendungen und auf die Integration in den Gesamtzusammenhang der Sensitivitätsanalyse.

3.2 Sensitivität von Überwachungsnetzen

Der Ingenieurgeodät ordnet dem Begriff Sensitivitätsanalyse in der Regel die Sensitivität eines Überwachungsnetzes hinsichtlich zu erwartenden Bewegungen zu. Er möchte anhand der Sensitivitätsanalyse überprüfen, ob die Konfiguration und damit die Geometrie des Netzes geeignet ist, um schädliche Bewegungs- oder Spannungszustände zu erkennen. Um Deformationsmodelle mathematisch fassen zu können, wird das Auswertemodell um die die Bewegungen parametrisierenden Größen erweitert. Betrachtungen, Herleitungen und Anwendungen zur Sensitivität bezüglich Deformationsmodellen finden sich beispielsweise in WELSCH (1976), LEONHARD u. NIEMEIER (1980), NIEMEIER u. ROHDE (1982), NIEMEIER u. HOLLMANN (1984), NIEMEIER (1985), HECK (1986) und HECK u. JÄGER (1986). Die Publikationen beschäftigen sich unter anderem mit der Sensitivität von Lage- und Höhennetzen, insbesondere bezüglich rezenter Krustenbewegungen.

Als Ausgangsgrößen im Sinne der bisher betrachteten Sensitivitätsanalyse werden die Koordinaten des Überwachungsnetzes oder die Parameter des Deformationsmodells aufgefasst. Die zu variierenden Eingangsgrößen sind die Beobachtungen, wie Strecken, Richtungen oder gemessene Koordinaten, und im Sinne der in Abschnitt 2.3 beschriebenen globalen Sensitivitätsanalyse auch die Modellstruktur, hier die beiden nach Abbildung 9 gegenüberzustellenden Auswertemodelle. Allerdings wird in diesem Abschnitt nicht die Sensitivität der beiden Modelle gegenüber den Beobachtungen, sondern die Sensitivität gegenüber der Modellerweiterung beziehungsweise Störung betrachtet. Es werden in der Planungsphase Grenzwerte für aufdeckbare Störungen ermittelt, um das geodätische Netz ideal zu konfigurieren und die Beobachtungen mit angepassten Instrumentarium durchzuführen.

Die Sensitivitätsanalyse dient folglich der Optimierung eines ingenieurgeodätischen Netzes im Hinblick auf ein angenommenes Deformationsmodell, das zur Berechnung der Sensitivität als bekannt vorausgesetzt wird. Die Nullhypothese H_0 des Kongruenzmodells der Deformationsanalyse (NIEMEIER 1979) besagt, dass der Deformationsvektor \mathbf{d} , der als Differenz der ausgeglichenen Koordinatenvektoren zweier Mess-epochen

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{y}}_2 - \hat{\mathbf{y}}_1 \quad (3.2.1)$$

bestimmt werden kann, dem Nullvektor entspricht

$$H_0 : \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (3.2.2)$$

Dem wird eine Alternativhypothese H_A entgegengestellt, die einen vom Nullvektor abweichenden Deformationsvektor voraussetzt

$$H_A : \mathbf{d} = \tilde{\mathbf{d}}_A \neq \mathbf{0}. \quad (3.2.3)$$

Formuliert man Null- und Alternativhypothese in der Form, wie in Gleichung (3.1.1) allgemein vorgeschlagen wird, so kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} H_0 : \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Y} &= (-\mathbf{I} \ \mathbf{I}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ H_A : \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Y} &= (-\mathbf{I} \ \mathbf{I}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{d}}_A. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Der Vektor der als wahr angenommenen Deformationen $\tilde{\mathbf{d}}_A$ kann aus einem beliebigen Deformationsmodell hergeleitet werden. In der Regel bestimmt das Modell nur die relativen Bewegungen der Punkte zueinander, nicht aber deren absolute Beträge. Daher wird ein Formvektor \mathbf{g} eingeführt, der die Relativbewegungen enthält und auf Eins normiert ist. Er hängt mit dem Deformationsvektor über einen Faktor m , der nachfolgend als Sensitivitätskriterium genutzt wird, zusammen

$$\tilde{\mathbf{d}}_A = m \cdot \mathbf{g}. \quad (3.2.5)$$

Geht man vom Globaltest auf Deformationen (PELZER 1971) aus und berücksichtigt, dass noch keine Messungen durchgeführt wurden, dass heißt, dass die a priori Varianz der Gewichtseinheit σ_0^2 heranzuziehen ist, so erhält man eine Testgröße C , die im Fall einer zutreffenden Nullhypothese χ^2 -verteilt mit h Freiheitsgraden ist

$$H_0 : C = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \Sigma_{dd}^{-1} \cdot \mathbf{d}}{\sigma_0^2} \sim \chi_h^2 \quad \text{mit} \quad h = \text{rg}(\Sigma_{dd}). \quad (3.2.6)$$

Die Freiheitsgrade berechnen sich aus dem Rang der Matrix Σ_{dd} , die als Kovarianzmatrix der Deformationen die stochastischen Eigenschaften der Deformationen \mathbf{d} beschreibt. Sie berechnet sich für stochastisch unabhängige Messungen in den zwei Messepochen (vergleiche Anhang A) nach

$$\Sigma_{dd} = \Sigma_{\hat{y}\hat{y},1} + \Sigma_{\hat{y}\hat{y},2}; \quad (3.2.7)$$

dabei ist zu bemerken, dass die Kovarianzmatrizen der Koordinaten der Messepochen Eins $\Sigma_{\hat{y}\hat{y},1}$ und Zwei $\Sigma_{\hat{y}\hat{y},2}$ bereits ohne Vorliegen von Beobachtungen \mathbf{L} bereitgestellt werden können. Eine zur Gleichung (3.1.3) äquivalente Darstellung kann für eine Sensitivitätsanalyse bei vorliegenden Beobachtungen \mathbf{L} gewonnen werden. In diesem Fall geht die χ_h^2 -Verteilung in eine F-Verteilung mit h und f Freiheitsgraden über. Gleichung (3.2.6) stellt sich, nach Ersatz von σ_0^2 durch den entsprechenden empirischen Schätzwert $\frac{\Omega}{f}$, in der Folge entsprechend (3.1.3) dar:

$$F = \frac{R}{h} \cdot \frac{f}{\Omega} \quad \text{mit} \quad R = \mathbf{d}^T \cdot \Sigma_{dd} \cdot \mathbf{d}. \quad (3.2.8)$$

Die Nullhypothese der Gleichung (3.2.6) kann in der Form

$$H_0 : E \left(\frac{\mathbf{d}^T \cdot \Sigma_{dd}^{-1} \cdot \mathbf{d}}{\text{rg}(\Sigma_{dd})} \right) = \sigma_0^2 \quad (3.2.9)$$

aufgeschrieben werden. Diese Darstellung beinhaltet die Aussage, dass der Erwartungswert der quadratischen Form $\frac{\mathbf{d}^T \cdot \Sigma_{dd}^{-1} \cdot \mathbf{d}}{\text{rg}(\Sigma_{dd})}$ für unendlich viele Realisierungen asymptotisch gegen σ_0^2 konvergiert.

Trifft dagegen die Alternativhypothese zu, so folgt die Testgröße der Nichtzentralen χ^2 -Verteilung mit derselben Anzahl an Freiheitsgraden

$$H_A : C = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \Sigma_{dd}^{-1} \cdot \mathbf{d}}{\sigma_0^2} \sim \chi_{h,\Lambda}^2. \quad (3.2.10)$$

Zusätzlicher Parameter ist der Nichtzentralitätsparameter Λ , der die Abweichung der Verteilung von der zentralen Lage beschreibt. Der Nichtzentralitätsparameter kann bei bekanntem Deformationsmodell mittels $\tilde{\mathbf{d}}_A$ oder mittels m und \mathbf{g} in der Form

$$\Lambda = \tilde{\mathbf{d}}_A^T \cdot \Sigma_{dd}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_A = m^2 \cdot \mathbf{g}^T \cdot \Sigma_{dd}^{-1} \cdot \mathbf{g} \quad (3.2.11)$$

bereitgestellt werden. Unter Vorgabe von Testgüte γ , Irrtumswahrscheinlichkeit α und Rang $h = \text{rg}(\Sigma_{\text{dd}})$ kann ein Grenzwert Λ_0 festgelegt werden

$$\Lambda_0 = f(h, \alpha, \gamma). \quad (3.2.12)$$

Dieser zeigt auf, wann die beschriebene Modellstörung und damit die Alternativhypothese aufgedeckt werden kann

$$\Lambda > \Lambda_0. \quad (3.2.13)$$

Eine Näherungslösung zur Berechnung von Λ_0 ist in PELZER (1971) enthalten. Die Werte können auch Nomogrammen (z.B. in SCHEFFE 1959) entnommen werden.

Stellt man nun Gleichung (3.2.11) um, ersetzt Λ und m durch Λ_0 beziehungsweise m_0 und zieht die Wurzel, so erhält man mit

$$m_0 = \sqrt{\frac{\Lambda_0}{\mathbf{g}^T \cdot \Sigma_{\text{dd}}^{-1} \cdot \mathbf{g}}}, \quad (3.2.14)$$

einen minimalen Faktor m_0 , der multipliziert mit dem Formvektor zu den minimal aufdeckbaren Deformationen d_0 führt

$$d_0 = m_0 \cdot \mathbf{g}. \quad (3.2.15)$$

In der Folge kann ein ingenieurgeodätisches Netz hinsichtlich eines vorgegebenen Deformationsmodells optimiert werden. Als Sensitivitätsmaß kann der Faktor m_0 aufgefasst werden.

Die in Gleichung (3.2.4) formulierten Hypothesen können entweder in das Ausgleichsmodell integriert oder in einem zweiten Analyseschritt eingebracht werden. Für das Ergebnis des Tests ist dieses unerheblich (ANTONOPOULOS u. NIEMEIER, 1983).

Der bekannte Vektor \mathbf{d}_A kann in der Regel auf Basis eines zu parametrisierenden Deformationsmodells berechnet werden. In diesem Fall wird die Alternativhypothese wie folgt in allgemeiner Form aufgestellt:

$$H_A: \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{Y})}{\partial \mathbf{Y}_1} & \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{Y})}{\partial \mathbf{Y}_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{d}}_A, \quad (3.2.16)$$

mit $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{Y})}{\partial \mathbf{Y}_i}$ für $i = 1, 2$ als partielle Ableitung des Parametervektors \mathbf{p} , der in Abhängigkeit von den

Koordinaten \mathbf{Y} dargestellt werden kann, nach dem jeweiligen Koordinatenvektor \mathbf{Y}_1 bzw. \mathbf{Y}_2 .

Die Parameter können im Sinne der ingenieurgeodätischen Sensitivitätsanalyse auf Signifikanz getestet werden. Diese Testverfahren lassen sich jedoch nicht der ingenieurgeodätischen Sensitivitätsanalyse im engeren Sinne zuordnen. Es zeigen sich aber Parallelen zu den Testverfahren der Regressionsanalyse (Kapitel 2.4.3, BENNING 2002, NIEMEIER 2002).

Das im Bereich der geodätischen Überwachungsnetze genutzte Sensitivitätsmaß ist aufgrund der Ableitungen in Gleichung (3.2.16) von lokalem Charakter. Globale Aussagen können mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation für die Eingangsgrößen gewonnen werden, so dass die Stichprobe jeweils den gesamten möglichen Bereich der Eingangsgröße abdeckt. JOHNSON u. WYATT (1994) setzen die Monte-Carlo-Methode zur Optimierung von Netzkonfiguration und Messepochenabstand von Überwachungsmessungen ein. Sie verzichten aber auf die Sensitivitätsmaße, die eine vom Modellcharakter unabhängige Interpretation

erlauben. Beziehungen zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen wurden für Überwachungsnetze bisher nicht im Sinne der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse betrachtet.

3.3 Sensitivität gegenüber fehlerhaften Beobachtungen

Da die Sensitivitätsanalyse in der Ingenieurgeodäsie sich im Rahmen dieser Arbeit nicht nur mit dem Begriff im engeren Sinne sondern mit der allgemeinen Definition im Sinne der Trennbarkeit von Null- und Alternativhypothese beschäftigen soll, sei dieser Abschnitt dem Schutz gegen grobe Fehler gewidmet und als eine mögliche Ausweitung des Sensitivitätsbegriffs in der Ingenieurgeodäsie gegeben.

Sowohl GRIMHARDT (1986) als auch DING u. COLEMAN (1996a, 1996b) erkennen, dass minimal aufdeckbare Fehler, die im Sprachgebrauch der Geodäsie als Zuverlässigkeitsmaße aufzufassen sind, prinzipiell der Sensitivitätsanalyse zuzuordnen sind. Man betrachtet hier die Sensitivität einer Netzkonfiguration bezüglich einzelner grober Fehler. Nach dem allgemein bekannten Ansatz nach BAARDA (1968) werden minimal aufdeckbare individuelle Fehler Δ_i beurteilt. Die Nullhypothese lautet hier

$$H_0 : \Delta = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \Delta^T = (\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_n), \quad (3.3.1)$$

dass heißt, dass keine groben Fehler vorliegen. Alternativ wird davon ausgegangen, dass bei n Beobachtungen L_i mindestens ein grober Fehler vorliegt

$$H_A : \Delta_i = \tilde{\Delta} \quad \text{für mind. ein } \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3.2)$$

Formuliert man die Nullhypothese wie in Gleichung (3.1.1), so kann nach Erweiterung des Ausgleichungsmodells formal wie folgt vorgegangen werden (NIEMEIER 2002):

$$H_A : \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_i^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{org} \\ \Delta \end{pmatrix} = \tilde{\Delta}_i, \quad (3.3.3)$$

mit $\mathbf{e}_i^T = (0 \quad \dots \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$.

Dabei enthält der Vektor \mathbf{Y} die ursprünglich im Ausgleichungsmodell enthaltenen Parameter \mathbf{Y}_{org} und zusätzlichen die Parameter des erweiterten Ausgleichungsmodells, in diesem Fall den groben Fehler Δ_i in Beobachtung L_i . Um eine Testgröße wie in Gleichung (3.1.3) oder (3.2.6) aufstellen zu können, ist die quadratische Form R zur Verfügung zu stellen. Nach NIEMEIER (2002) gilt

$$R_i = \Delta_i^T \cdot (\mathbf{Q}_{\Delta\Delta})_{ii} \cdot \Delta_i; \quad (3.3.4)$$

außerdem

$$\Delta_i = -\frac{\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_i} \quad \text{und} \quad (\mathbf{Q}_{\Delta\Delta})_{ii} = \frac{1}{\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_i}. \quad (3.3.5)$$

Nach Einsetzen von (3.3.5) in (3.3.4) ergibt sich für die quadratische Form

$$R_i = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_{vv} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_i}. \quad (3.3.6)$$

Die Testgröße ist beim Eintreffen von Nullhypothese H_0 beziehungsweise Alternativhypothese H_A analog zu Gleichung (3.2.6) beziehungsweise (3.2.10) χ^2 -verteilt mit einem Freiheitsgrad, da nur ein zusätzlicher Parameter überprüft wird

$$H_0: C = \frac{R_i}{\sigma_0^2} \sim \chi_1^2$$

$$H_A: C = \frac{R_i}{\sigma_0^2} \sim \chi_{1,\Lambda}^2,$$
(3.3.7)

im nichtzentralen Fall mit dem Nichtzentralitätsparameter Λ . Der Übergang auf eine F -verteilte Testgröße gelingt unter Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit von R_i und Ω in Analogie zu Gleichung (3.2.8) in Abschnitt 3.2.

Da die χ^2 -Verteilung in (3.3.7) nur einen Freiheitsgrad enthält, bietet sich der Übergang auf eine eindimensionale Verteilung an. Die entsprechende Testgröße kann wie folgt angegeben werden

$$N_i = \frac{\sqrt{R_i}}{\sigma_0} = \frac{-\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_i}} = \frac{\Delta_i}{\sigma_{\Delta_i}}.$$
(3.3.8)

Trifft die Nullhypothese zu, folgt die Testgröße der zentralen, im Fall einer zutreffenden Alternativhypothese der nichtzentralen Standardnormalverteilung

$$H_0: N_i \sim N(0,1)$$

$$H_A: N_i \sim N(\delta,1)$$
(3.3.9)

mit $\delta = \sqrt{\Lambda}$ als Nichtzentralitätsparameter der Normalverteilung.

Die Testgröße N_i kann direkt als Nichtzentralitätsparameter δ aufgefasst werden. Unter Vorgabe von Irrtumswahrscheinlichkeit $\bar{\alpha}$, die nach SCHEFFE (1959) auf einen multiplen Test abzustimmen ist, und der Testgüte γ kann auch hier ein Grenzwert δ_0

$$\delta_0 = f(\bar{\alpha}, \gamma)$$
(3.3.10)

ermittelt werden, der aufzeigt, ab wann die Modellstörung aufgrund eines groben Fehlers aufgedeckt werden kann

$$\delta > \delta_0.$$
(3.3.11)

Da ein grober Fehler in der Planungsphase nicht bekannt ist, wird er durch ein Mehrfaches der Standardabweichung der Beobachtung L_i dargestellt

$$\Delta_i = m \cdot \sigma_i.$$
(3.3.12)

Für den Nichtzentralitätsparameter ergibt sich in der Folge die Darstellung

$$\delta = \frac{m \cdot \sigma_i}{\sigma_{\Delta_i}}.$$
(3.3.13)

Setzt man nun den Grenzwert $\delta_{0,i}$ und den Faktor $m_{0,i}$ ein und stellt Gleichung (3.3.13) um, so ergibt sich

$$m_{0,i} = \delta_{0,i} \cdot \frac{\sigma_{\Delta_i}}{\sigma_i}.$$
(3.3.14)

Berücksichtigt man nun, dass das Zuverlässigkeitsmaß z_i sich nach

$$z_i = \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{\Delta_i}} \right)^2 \quad (3.3.15)$$

berechnet, so erhält man

$$m_{0,i} = \frac{\delta_{0,i}}{\sqrt{z_i}}. \quad (3.3.16)$$

Um den minimal aufdeckbaren groben Fehler, der in der Literatur mit ∇_i bezeichnet wird, zu berechnen, ist nach Formel (3.3.12) der Faktor $m_{0,i}$ wieder mit der Standardabweichung σ_i zu multiplizieren

$$\nabla_i = m_{0,i} \cdot \sigma_i. \quad (3.3.17)$$

Setzt man nun Gleichung (3.3.16) in Gleichung (3.3.17) ein, so erhält man den in der Literatur gebräuchlichen Ausdruck für den minimal aufdeckbaren Fehler ∇_i

$$\nabla_i = \delta_{0,i} \cdot \frac{\sigma_i}{\sqrt{z_i}}. \quad (3.3.18)$$

Als Sensitivitätsmaße sind der minimal aufdeckbare Fehler ∇_i oder der Faktor $m_{0,i}$ zu betrachten. Im Sinne einer Optimierung sind diese Maße zu minimieren.

In diesem Zusammenhang soll erwähnt werden, dass es weitere zuverlässigkeitsbezogene Optimierungskriterien gibt. Besonders erwähnenswert sind die Kriterien der äußeren Zuverlässigkeit, die die Auswirkung von ∇_i auf die Ausgleichungsparameter, den Ausgangsgrößen im Sinne der Sensitivitätsanalyse, quantifizieren. Auf diesem Weg kommt man einer Beziehung zwischen Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen im Sinne von Abschnitt 2.1 sehr nahe. Die von GRIMHARDT (1986) aufgestellte Aussage, dass es sich beim Aufdecken grober Fehler um die Sensitivität eines Netzmodells gegenüber diesen Fehlern handelt, kann hier bestätigt werden.

Man erkennt, dass die Vorgehensweise in diesem Abschnitt der des vorhergehenden Abschnittes 3.2 entspricht. Es konnte gezeigt werden, dass es prinzipiell keinen Unterschied macht, ob man minimal aufdeckbare Deformationen oder minimal aufdeckbare grobe Fehler in den Beobachtungen betrachtet. Die Hypothese (3.3.3) kann auf mehrere Beobachtungen, für die gleiche oder auch unterschiedliche $\tilde{\Delta}_i$ anzusetzen sind, erweitert werden. Auf diesem Wege können Systematiken in den Beobachtungen aufgedeckt werden. Darüber hinausgehend kann die allgemeine lineare Alternativhypothese nach Gleichung (3.1.1) für diverse Modellerweiterungen eingesetzt werden. Weitere Ausführungen unterbleiben aber im Rahmen dieser Arbeit, da sich an der Vorgehensweise nichts ändert. Bezüglich globaler varianz-basierter Sensitivitätsanalyse gilt das in den Abschnitten 3.1 und 3.2 Geschriebene.

3.4 Weitere Anwendungen in der Geodäsie

Der Begriff der Sensitivitätsanalyse hat eine lange Tradition bei der **Bestimmung von Schwerefeldkoeffizienten aus gestörten Satellitenbahnen** (z.B. KAULA 1966). Dieses der Geodäsie zugehörige Fachgebiet wird hier nur am Rande mitbehandelt, da es nicht dem ingenieurgeodätischen Aufgabenbereich zuzuordnen ist. Es sollen vielmehr Parallelitäten zu den Abschnitte 3.1 bis 3.3 sowie zu dem Kapitel 2 aufgezeigt werden.

In der Regel wird die Sensitivität einer Satellitenbahn bezüglich der auf sie wirkenden Störbeschleunigungen zur Bestimmung von Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung des Erdschwerefeldes beurteilt. SCHWINTZER (1990) setzt die Varianzkomponentenschätzung ein (z.B. nach SCHEFFE 1959 oder KOCH 1997) und nutzt die von FÖRSTNER (1979) eingeführten Redundanzanteile zur Sensitivitätsanalyse. Er definiert die realen Beobachtungen der Satellitenbahnbestimmung als eine Beobachtungsgruppe und führt Pseudobeobachtungen mit dem Beobachtungswert Null und Varianzen nach KAULA (1966) als zweite Beobachtungsgruppe ein. Die Bedingung der stochastischen Unabhängigkeit zwischen den Beobachtungsgruppen ist damit gegeben. SCHWINTZER betrachtet die Sensitivität der Varianz der Ausgangsgrößen, den Schwerefeldkoeffizienten, bezüglich Eingangsrößengruppen, nicht bezüglich einzelner Eingangsrößen. In der Folge analysiert er den Genauigkeitsgewinn aufgrund der realen Beobachtungen mit Hilfe der Redundanzanteile $r_{PS,i}$ der Pseudo-Beobachtungen für jeden individuellen Schwerefeldkoeffizienten

$$r_{PS,i} = 1 - \frac{\hat{\sigma}_{x,i}^2}{\sigma_{PS,i}^2}, \quad (3.4.1)$$

die die Varianz $\hat{\sigma}_{x,i}^2$ der geschätzten Schwerefeldkoeffizienten mit der a priori Varianz für die Pseudo-Beobachtungen $\sigma_{PS,i}^2$ in Beziehung setzten. Wird der Redundanzanteil $r_{PS,i}$ zu Null, da $\sigma_{PS,i}^2 = \hat{\sigma}_{x,i}^2$ gilt, liefert die Satellitenbahnbeobachtung keinen Beitrag zum Ergebnis. Der ausgeglichene Koeffizient entspricht damit der Pseudo-Beobachtung. Im entgegengesetzten Fall kann der Einfluss der Pseudo-Beobachtung ausgeschlossen werden und der Koeffizient ist mit den Satellitenbahnbeobachtungen gleichzusetzen.

In SCHÄFER (2000) werden vier wesentliche Methoden zur Sensitivitätsbestimmung einer Satellitenbahn gegenübergestellt, die nachfolgend kurz aufgeführt werden.

Zu Beginn der Entwicklung wurden nur die dominierenden Schwerefeldkoeffizienten mit ihren Resonanzeffekten betrachtet. Zur Definition des Begriffs Resonanz in diesem Zusammenhang sei auf KAULA (1966) und SEEBER (2003) verwiesen. SCHÄFER zeigt, dass diese Methode für tieffliegende Satelliten wie zum Beispiel CHAMP (REIGBER et al. 2003) keine ausreichende Repräsentation sensitiver Schwerefeldkoeffizienten liefert. Hier setzen die drei weiteren Methoden an.

Die Methode nach KAULA basiert auf der analytischen Darstellung des Störpotentials in den KEPLERschen Bahnelementen (SEEBER 2003). Die Ergebnisse sind Gewichtsfaktoren, die einen Eindruck von dem Einfluss eines Schwerefeldkoeffizienten auf den Satellitenorbit geben. Sie können als analytisch gewonnene lokale Sensitivitätsmaße nach Abschnitt 2.3 aufgefasst werden, da sie aus Ableitungen an den Nominalwerten berechnet werden.

Alternativ kann ein Referenzorbit mit einem gestörten Orbit verglichen werden. Dabei werden Erdschwerefeldkoeffizienten gestört oder vor der Berechnung der Satellitenbahn eliminiert und in der Folge eine erneute Berechnung durchgeführt. Um den Einfluss auf die Berechnung von Schwerefeldkoeffizienten abzuschätzen, können die Differenzen beider Berechnungen isoliert an ausgezeichneten Orbitstellen oder insgesamt in über die gesamte Satellitenmissionsdauer aufsummierter Form genutzt werden. Diese Methode erfordert aufgrund der numerischen Vorgehensweise einen hohen Rechenaufwand (SCHEINERT 1996).

Die von SCHÄFER (2000) eingesetzte Methode vergleicht FOURIER-Reihenentwicklungen für das Erdschwerefeld und für simulierte Satellitenbahnen. Er berechnet den prozentualen Anteil eines jeden

Koeffizienten des Erdschwerefeldes an der Gesamtamplitude für ausgesuchte kritische Frequenzen der berechneten Satellitenbahn. SCHÄFER erkennt, dass es sich um ein in hohem Maße nicht-lineares Modell handelt und daher die berechneten Anteile nur einen ersten Anhalt bezüglich der Sensitivität der Satellitenbahn zur Bestimmung des Erdschwerefeldes liefern (vergleiche Abschnitt 2.4.5).

Insgesamt kann festgestellt werden, dass im Bereich der Schwerefeldbestimmung der Begriff der Sensitivität eine wichtige Rolle spielt. Die Identifikation wichtiger Eingangsgrößen, den Satellitenbahnbeobachtungen, bezüglich der Ausgangsgrößen, den Schwerefeldkoeffizienten, entspricht einem wesentlichen Ziel der Sensitivitätsanalyse nach Kapitel 2. Die eingesetzte Methodik fällt dabei recht unterschiedlich aus und ist von der erforderlichen Genauigkeit und der verfügbaren Rechnerleistung abhängig. Modellunabhängige Sensitivitätsmaße sind auch hier bisher nicht zum Einsatz gekommen.

In CROSETTO u. TARANTOLA (2001) wird die einzige dem Autor bekannte Anwendung varianz-basierter Sensitivitätsanalysemethoden in Bereich der Geodäsie und Geoinformatik dargestellt. Die erweiterte FAST Methode (Abschnitt 2.4.5.3) wird für eine Überflutungsprognose angewendet. Für ein abgegrenztes Gebiet, der Region Piemont in Italien, werden die stochastischen Eigenschaften von insgesamt dreizehn Eingangsgrößen bereitgestellt. Dabei wird zum Beispiel das digitale Geländemodell als Eingangsgröße aufgefasst. Nachdem die wichtigsten Eingangsgrößen nach der Methode von MORRIS (CAMPOLONGO et al. 2000b) ermittelt wurden, konnten diese Einflüsse mittels der erweiterten FAST Methode analysiert werden. Den bei weitem größten Einfluss hat die Karte der Niederschlagsintensitäten aufgrund ihrer hohen Unsicherheiten in der Erfassung der flächenbezogenen Intensitäten. Die Autoren konnten aufzeigen, dass eine Reduktion der Varianz bei der Erfassung die Ergebnisse der Prognose verbessern könnte. Auf der anderen Seite mussten sie einräumen, dass eine solche Verbesserung bei der Datenerfassung nur mit hohem zeitlichen und finanziellen Aufwand realisierbar ist. Auf diesem Weg wird klar, dass sich die Sensitivitätsanalyse in der Regel nur in der Planungs- und somit Optimierungsphase von Modellen oder Systemen sinnvoll einsetzen lässt. Dabei sind in diesem Anwendungsfall die Möglichkeiten bei der Datenerfassung oder –bereitstellung zu berücksichtigen.

3.5 Möglichkeiten der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse

Die generellen Zielsetzungen der Sensitivitätsanalyse „**Identifikation wichtiger Eingangsgrößen**“ und „**Identifikation von Modelleigenschaften**“ spielen bisher in der Ingenieurgeodäsie nur eine sehr untergeordnete Rolle. Beide Zielsetzungen können dem Ingenieurgeodäten jedoch wertvolle, zum Teil unbekannt, Informationen bezüglich des Verhaltens der von ihm genutzten Modelle, die häufig nicht-lineare Zusammenhänge in linearisierter Form darstellen, liefern.

Außerdem konnte gezeigt werden, dass in ingenieurgeodätischen Anwendungen zur Sensitivitätsanalyse vor allem Fragestellungen, für die Linearität und normalverteilte Beobachtungen beziehungsweise Eingangsgrößen vorausgesetzt werden, behandelt werden. Von diesen Voraussetzungen kann sich aufgrund der in Kapitel 2 vorgestellten Methoden gelöst werden. Auch die analytische Vorgehensweise und der damit lokale Charakter kann überwunden werden. Es wird daher im Kapitel 4 der Ansatz verfolgt, die **varianz-basierten Sensitivitätsanalysemethoden für ingenieurgeodätische Fragestellungen** anzuwenden. Die modellunabhängigen Sensitivitätsmaße werden damit erstmalig in der Ingenieurgeodäsie eingesetzt.

Mit den modellunabhängigen Sensitivitätsmaßen kann eine weit größere Anzahl an Modellen validiert oder optimiert werden, da auch die Modelle, für die es schwer fällt oder es nicht möglich ist, eine lineare Hypothese nach (3.1.1) aufzustellen, einer Sensitivitätsanalyse unterzogen werden können. Die kinematische Positionsbestimmung in der Kraftfahrzeugnavigation mittels des in Kapitel 4.2.3 vorgestellten KALMAN-Filters ist ein Beispiel für die Erweiterung der Einsatzgebiete der Sensitivitätsanalyse. Des Weiteren kann hier im Gegensatz zur Anwendung von CROSETTO u. TARANTOLA (2001) im vorherigen Abschnitt die Sensitivitätsanalyse bereits in der Planungsphase zur Optimierung des Filterdesigns eingesetzt werden.

4 Untersuchungen zur nicht-linearen Sensitivitätsanalyse für bewegte Objekte

4.1 Vorgehensweise

In diesem Kapitel werden die in Abschnitt 2.4 entwickelten globalen Sensitivitätsanalysemethoden für ingenieurgeodätische Anwendungen eingesetzt. Zunächst werden einige einfache für die Geodäsie relevante Funktionen, anhand derer sich die grundlegenden Modelleigenschaften Linearität, Monotonie und Additivität aufzeigen lassen, behandelt (Abschnitt 4.2.1). Anschließend wird ein Schwerpunkt auf kinematische Modelle gelegt. Die Beschreibung der Bewegung steht folglich im Zentrum der vorgestellten Beispiele (Abschnitte 4.2.2 und 4.2.3). Die kinematischen Modelle werden im Hinblick auf ihre Modelleigenschaften analysiert. Außerdem wird der Einfluss der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgrößen beziehungsweise die Sensitivität der Ausgangsgrößen bezüglich der Eingangsgrößen analysiert.

Um die Sensitivitätsanalyse durchzuführen, ist zunächst für die verschiedenen Modelle eine geeignete Sensitivitätsanalysemethode zu finden. Erst im Anschluss daran kann die Analyse der vorgestellten Modelle erfolgen. Um beides klar strukturiert darstellen zu können, wird in diesem Kapitel die folgende Reihenfolge eingehalten

- Vorstellung der Anwendungsbeispiele (Kapitel 4.2),
- Gegenüberstellung der Sensitivitätsanalysemethoden (Kapitel 4.3),
- Sensitivitätsanalyse der Anwendungsbeispiele (Kapitel 4.4).

In Kapitel 4.2 werden dabei jeweils das untersuchte Objekt und das zur Parametrisierung der Bewegung eingesetzte Modell vorgestellt. Kapitel 4.3 führt zur Entscheidung für eine anwendungsspezifische bestmögliche Sensitivitätsanalysemethode. Um zu dieser Entscheidung zu gelangen, sind zunächst die Modelleigenschaften zu identifizieren. In Kapitel 4.4 wird die zuvor identifizierte anwendungsspezifische Sensitivitätsanalysemethode für die vorgestellten Anwendungen eingesetzt. Dabei wird jeweils neben den Modelleigenschaften die Wichtigkeit der Eingangsgrößen quantifiziert. Verschiedene deterministische Verhaltensweisen der jeweiligen bewegten Objekte werden dabei berücksichtigt.

Die einzelnen Schritte einer varianz-basierten Sensitivitätsanalysemethode erfolgen wie in Abschnitt 2.4.1 dargestellt. Die Festlegung der Verteilungsfunktionen erfolgt aufgrund relevanter Publikationen oder Erfahrungen des Autors. Die Erzeugung der Stichproben wird mit der frei im Internet verfügbaren Software SIMLAB (ISPC 2003) umgesetzt. Die einzelnen nachfolgend beschriebenen Modelle werden entweder als interne Modelle in SIMLAB eingegeben oder als externe Modelle als Matlab-Code realisiert; entsprechend werden auch die Modellauswertungen durchgeführt. Die Varianzanalyse, die im Rahmen dieser Arbeit nur am Rande von Bedeutung ist, und die Sensitivitätsanalyse werden wiederum mittels SIMLAB realisiert.

4.2 Anwendungsbeispiele

4.2.1 Exemplarische Funktionen

In diesem Abschnitt werden einige exemplarische Funktionen vorgestellt, die einerseits dem Geodäten vertraut sind, andererseits sich dazu eignen, die in Kapitel 2 dargestellten Methoden und Modelleigenschaften anhand dieser leicht verständlichen Funktionen zu verdeutlichen. Aus dem letzteren Grunde haben diese Funktionen durchgehend nur eine Ausgangsgröße und zwei Eingangsgrößen, die auf unterschiedliche Art und Weise funktional miteinander verknüpft sind.

Alle nachfolgend vorgestellten Funktionen werden mit Hilfe der Methoden Regressionsanalyse, Rangregressionsanalyse, SOBOLs Sensitivitätsindizes und FOURIER Amplituden Sensitivitätstest analysiert

Die einfachste mathematische Funktion, die lineare Eigenschaften aufweist, ist die Summe

$$Y_{sum} = X_1 + X_2 \quad (4.2.1)$$

Es handelt sich um ein lineares Modell mit den Eingangsgrößen X_1 und X_2 , für welches die verschiedenen in den Abschnitten 2.4 beschriebenen und oben aufgeführten Sensitivitätsanalysemethoden identische Ergebnisse liefern müssen.

Um eine Funktion, die nicht-lineare, aber monotone und additive Eigenschaften aufweist, zur Verfügung zu haben, wird wie (4.2.1) eine Summe genutzt. In diesem Fall wird jedoch für die Eingangsgröße X_2 von der Linearität abgewichen und diese zur dritten Potenz erhoben. Diese Summe Y_{kub} soll als „kubische Summe“ bezeichnet werden und kann wie folgt dargestellt werden:

$$Y_{kub} = X_1 + X_2^3. \quad (4.2.2)$$

Um die in Gleichung (4.2.2) vorhandene monotone Eigenschaft zu eliminieren und gleichzeitig die additive Eigenschaft zu erhalten, wird die Summe Y_{sin} zweier Sinusschwingungen gewählt

$$Y_{sin} = \sin(X_1) + \sin(X_2), \quad (4.2.3)$$

da Summen von trigonometrischen Funktionen auch bei der FOURIER-Reihenentwicklung vorkommen und daher dem Geodäten vertraut sind.

Eine weitere in der Geodäsie häufig eingesetzte Funktion ist die Horizontalstrecke. Die Horizontalstrecke Y_{str} berechnet sich in einem kartesischen Koordinatensystem mittels

$$Y_{str} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad (4.2.4)$$

wobei die Größen X_1 und X_2 hier für die Koordinatendifferenzen in den beiden Koordinatenrichtungen stehen. Die Funktion Y_{str} ist nicht-linear und nicht-additiv, aber monoton. Abschließend wird die Kosinus-Exponentialfunktion Y_{kos} aufgrund des nicht-linearen, nicht-monotonen und nicht-additiven Charakters analysiert. Die Funktion ist dem Geodäten aus der Zeitreihenanalyse bekannt (z.B. WELSCH et al. 2000). Die einen Farbigen Rauschprozess parametrisierende Funktion kann wie folgt angegeben werden

$$Y_{kos} = \cos(X_1) \cdot e^{-X_2}. \quad (4.2.5)$$

Dabei kennzeichnet die Eingangsgröße X_1 einen Parameter der Wiederholneigung, während X_2 als Parameter der Erhaltensneigung aufgefasst werden kann.

Tab. 7: Übersicht bezüglich der Modelleigenschaften der exemplarischen Funktionen

Funktion	linear	monoton	additiv	nicht-additiv
Y_{sum}	ja	ja	ja	nein
Y_{kub}	nein	ja	ja	nein
Y_{sin}	nein	nein	ja	nein
Y_{str}	nein	ja	nein	ja
Y_{kos}	nein	nein	nein	ja

Mit diesen exemplarischen Funktionen können die verschiedenen Modelleigenschaften behandelt werden. Tabelle 7 gibt abschließend einem Überblick über die Eigenschaften. Die Funktionen dienen in Abschnitt 4.3 zur Einführung in die empirischen Untersuchungen bezüglich der verschiedenen Sensitivitätsanalysemethoden.

4.2.2 Kinematische Höhenüberwachung

Überwachungsmessungen und die damit in Verbindung stehende Analyse der Geometrieänderungen sind ein zentraler Gegenstand der Ingenieurgeodäsie (WELSCH et al. 2000). Dabei wurde in der Vergangenheit zunächst die diskretisierte Geometrie der Objekte in Form von Koordinaten, die in verschiedenen Messepochen ermittelt wurden, verglichen. Diese Modelle wurden quasi-statische Modelle genannt, inzwischen haben sich die Begriffe Kongruenzmodell oder Identitätsmodell eingebürgert (WELSCH et al. 2000). Die Systemtheorie verwendet hierfür den Begriff random-walk Modell. Die kinematische Analyse beschäftigt sich mit der Beschreibung der Bewegung zwischen zwei oder mehreren Epochen. Dieser Ansatz soll im Rahmen dieses Anwendungsbeispiels verfolgt werden. Modelle, die die Geometrieänderungen bedingenden Kräfte berücksichtigen, werden hier nicht behandelt. Diese Ansätze werden als statische oder – wird auch die Zeit parametrisiert – als dynamische Modelle bezeichnet (WELSCH u. HEUNECKE 2001).

Das in diesem Beispiel zu überwachende Objekt ist die Stiftskirche in Herrenberg. Die Kirche wurde im 13. bis 15. Jahrhundert oberhalb der heutigen Stadt Herrenberg im spätgotischen Stil erbaut. Der Bau erfolgte auf einem Plateau, das auf einer geologisch instabilen, zerklüfteten Gipsmergelschicht mit eingelagerten Gipsbänken gegründet ist. Unterirdische Wasserbewegung, Auslaugung und Auswaschung sowie Hohlraum und Rissbildung stellen die für die Stiftskirche wesentlichen Probleme aufgrund der Gipsmergelschicht dar (RAMSAYER u. RUOPP 1980). Abbildung 10 verdeutlicht die kritische Lage der Stiftskirche oberhalb der Stadt Herrenberg.



Abb. 10: Stiftskirche Herrenberg (Photo: Marcus Philipp)

Aufgrund der Schwere des Glockenturms und des instabilen geologischen Untergrundes wurden relative Vertikalbewegungen innerhalb des Bauwerks und Neigungen des Gesamtbauwerks vermutet. Aus diesem

Die Veränderungen der Geometrie des Höhennetzes werden im Rahmen eines kinematischen Modells in Abhängigkeit von der Zeit modelliert. Das kinematische Modell wird im Rahmen eines diskreten KALMAN-Filters umgesetzt (PELZER 1987). Der KALMAN-Filter Algorithmus (KALMAN 1960) ist hinlänglich bekannt (zum Beispiel: SCHRICK 1977, GELB 1974 oder auch HEUNECKE 1995). Aus diesem Grund ist der Algorithmus für einen diskreten Ansatz im Anhang B zusammengestellt. Nachfolgend werden die Mess- und Zustandsgrößen sowie die benötigten Kovarianzmatrizen aufgestellt. Darüber hinausgehend werden nur Modellbesonderheiten, die eine Abweichung von Anhang B darstellen, vorgestellt.

Als originäre Messgrößen oder Beobachtungen sind die gemessenen Höhenunterschiede aufzufassen. Da diese originären nivellierten Höhenunterschiede nicht mehr rekonstruierbar waren, wird auf die Höhen als Realisierungen innerhalb des Beobachtungsvektors \mathbf{I} zurückgegriffen

$$\mathbf{I} = \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \quad (4.2.6)$$

Die Höhen sind folglich als Eingangsgrößen im Sinne der Sensitivitätsanalyse aufzufassen. Die Elemente der Kovarianzmatrix der Beobachtungen berechnen sich mittels des mittleren Kilometerfehlers, der für das Feinnivellement $\sigma_{Niv/km}$ (KAHMEN 1997) pessimistisch abgeschätzt wird:

$$\sigma_{h,i} = \sigma_{Niv/km} \cdot \sqrt{s} \quad \text{mit} \quad \sigma_{Niv/km} = 1 \frac{mm}{km} \quad \text{und} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2.7)$$

mit s als Nivellementsweg vom Punkt 106a, der den Ausgangspunkt des Feinnivellements darstellt. Die Designmatrix \mathbf{A}_h berechnet sich zunächst für jede Epoche in einfacher Form

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \quad (4.2.8)$$

Die Einheitsmatrix \mathbf{I} kann nur unter der Bedingung, dass alle Höhenmesspunkte in jeder Messepoche beobachtet wurden, genutzt werden. Dieses wird für die Simulationen im Rahmen dieser Untersuchungen vorausgesetzt. Die Matrix wird zur Berechnung der in Anhang B aufgeführten Innovation eingesetzt.

Der in der Deformationsanalyse standardmäßig eingesetzte Ansatz geht von einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung aus (PELZER 1987). Im Rahmen des hier verfolgten Ansatzes parametrisieren die Geschwindigkeiten der einzelnen Höhen eine polynomiale Fläche 2.Ordnung. In der Folge enthält ein Vektor $\hat{\mathbf{z}}$ die Parameter $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4, \hat{z}_5, \hat{z}_6$, die die Koeffizienten der Polynomfläche in einem lokalen Koordinatensystem mit den Achsen X und Y (vergleiche Abb. 11) darstellen

$$\hat{\mathbf{z}}^T = (\hat{z}_1 \quad \hat{z}_2 \quad \dots \quad \hat{z}_6). \quad (4.2.9)$$

Diese Flächenkoeffizienten sollen als Ausgangsgrößen im Sinne der Sensitivitätsanalyse verstanden werden. Jedem Höhenmesspunkt kann dabei ein schwerpunktbezogenes Koordinatenpaar x_i, y_i zugeordnet werden, so dass die skalare Funktion

$$F(x_i, y_i) = \hat{z}_1 + x_i \cdot \hat{z}_2 + y_i \cdot \hat{z}_3 + x_i \cdot y_i \cdot \hat{z}_4 + x_i^2 \cdot \hat{z}_5 + y_i^2 \cdot \hat{z}_6 \quad (4.2.10)$$

die Höhengeschwindigkeit des jeweiligen Flächenpunktes beschreibt. Dieser Ansatz wurde erstmalig in UNTERBERG (1991) zur Integration in ein KALMAN-Filter vorgeschlagen.

Der Zustandsvektor $\hat{\mathbf{y}}_k$ der Epoche k besteht in der Folge aus zwei Subvektoren: dem Vektor der Höhen $\hat{\mathbf{h}}_k$ der Messpunkte sowie dem Vektor $\hat{\mathbf{z}}_k$

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{h}}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{pmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Die zugehörige Kofaktormatrix ist vollständig besetzt, da Korrelationen zwischen den Koeffizienten und den Höhen vorliegen. Sie ist formal wie folgt aufgebaut

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}},k} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{h}},k} & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{h}},\hat{\mathbf{z}},k} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}},\hat{\mathbf{h}},k} & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}},k} \end{pmatrix}. \quad (4.2.12)$$

Zur Problematik der Anfangswerte für Höhen, Flächenkoeffizienten und deren Kovarianzmatrizen sei auf UNTERBERG (1991), HEUNECKE (1995) oder PHILIPP (2002) verwiesen. Hier sei nur erwähnt, dass die Kofaktormatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{h},0}$ der Anfangshöhen \mathbf{h}_0 als Diagonalmatrix aufgebaut ist und den Anfangswerten ein geringes Gewicht zuweist; konkret heißt dieses

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{h},0} = \sigma_{anf}^2 \cdot \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad \sigma_{anf}^2 = 100 \text{ mm}^2. \quad (4.2.13)$$

Zur Prädiktion des Zustandsvektors und seiner Kofaktormatrix von der Epoche k in die Epoche $k+1$ ist die Transitionsmatrix \mathbf{T} (vergleiche Anhang B) wie folgt aufzubauen

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \Delta t \cdot \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (4.2.14)$$

wobei Δt den Zeitabstand der Messepochen bezeichnet und die Matrix

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 \cdot y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 \cdot y_2 & x_2^2 & y_2^2 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n \cdot y_n & x_n^2 & y_n^2 \end{pmatrix}$$

den Einfluss der Flächenparameter $\hat{\mathbf{z}}_k$ auf die prädizierten Höhen $\bar{\mathbf{h}}_{k+1}$ modelliert.

Die Störgrößen wirken sich in Abhängigkeit von Δt nur auf den Subvektor der prädizierten Höhen $\bar{\mathbf{h}}_{k+1}$ aus. Die Störgrößenmatrix \mathbf{S} kann daher wie folgt angegeben werden

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \Delta t \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.2.15)$$

Die Elemente der diagonalen Kofaktormatrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{w},w}$ der Störgrößen \mathbf{w} , die selbst zu Null angenommen werden (Anhang B), werden aufgrund empirischer Untersuchungen mit

$$\sigma_w^2 = 1,5 \text{ mm}^2 \quad (4.2.16)$$

festgelegt. Stellgrößen \mathbf{u} werden bei diesem Ansatz nicht berücksichtigt.

Nachdem die nächsten Schritte des KALMAN-Filters wie in Anhang B beschrieben umzusetzen sind, ist zur Aufdatierung des Zustandsvektors $\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$ in der Epoche $k+1$ die Matrix \mathbf{A}_h um den Anteil der Aufdatierung für die Flächenkoeffizienten zu erweitern

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}_h \quad \mathbf{Q}_{\bar{z}_h, k+1} \cdot \mathbf{A}_h \right), \quad (4.2.17)$$

mit $\mathbf{Q}_{\bar{z}_h, k+1}$ als prädierte Kofaktormatrix, die die Kovarianzen zwischen \bar{z}_{k+1} und \bar{h}_{k+1} enthält.

Die Berechnung des aufdatierten Zustandsvektors und der zugehörigen Kofaktormatrix kann analog zu dem in Anhang B aufgeführten Algorithmus erfolgen.

Abbildung 12 zeigt zur Veranschaulichung des Modells die anhand der tatsächlichen Beobachtungen berechnete Fläche für die Epoche 7 im Jahr 1994 (PHILIPP 2002). Die Geschwindigkeiten nehmen Werte von ca. - 0,7 bis + 0,6 mm / Jahr an.

Die Sensitivitätsanalyse des Abschnittes 4.4.1 wird sich mit der Analyse der Flächenkoeffizienten unter dem Einfluss der gemessenen Höhen beschäftigen.

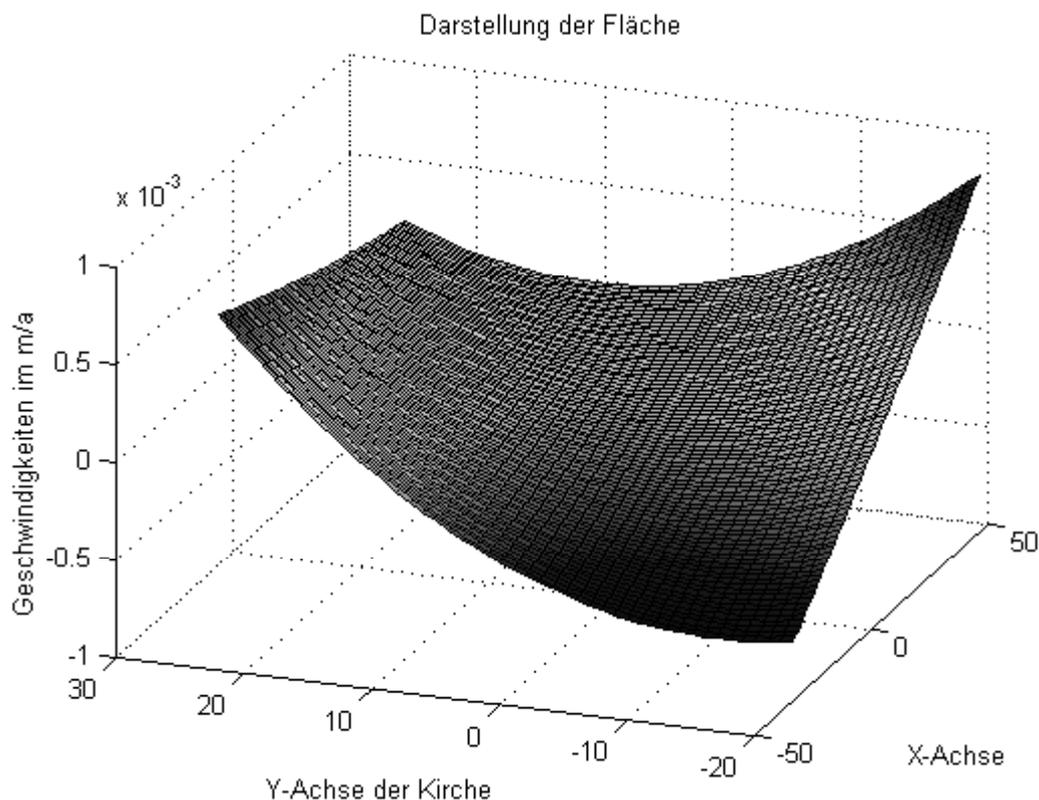


Abb. 12: Polynomiale Fläche für Epoche 7 im Jahr 1994 (PHILIPP 2002)

4.2.3 Multisensorsystem zur Fahrzeugortung

Die Ortung ist eine Aufgabe, die sich – wie die zuvor beschriebene Überwachungsaufgabe – mit bewegten Objekten beschäftigt (z. B. MANSFELD 1998). Im Gegensatz zu Überwachungsaufgaben befinden sich die Objekte – in der Regel Fahrzeuge oder Flugzeuge – in deutlich schnellerer Bewegung. Während sich zu überwachende Objekte wie Bauwerke, Rutschhänge oder gar tektonische Platten um Beträge im Millimeter- bis Zentimeterbereich bewegen, kann bei der Ortung von Bewegungen im Bereich von Metern innerhalb von Sekunden ausgegangen werden. Das nachfolgend beschriebene Modell trägt diesem Sachverhalt Rechnung.

Am Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen der Universität Stuttgart wurde in den letzten Jahren eine Messplattform aufgebaut, die es erlaubt, verschiedenartige Sensoren zur kombinierten oder integrierten Ortung von Fahrzeugen einzusetzen. Die Realisierung dieses Multisensorsystems inklusive Synchronisation der Messwerte und Datenspeicherung soll nicht Gegenstand der Ausführungen sein. Es sei beispielsweise auf GLÄSER u. SCHOLLMEYER (2004) oder SCHOLLMEYER (2003) verwiesen. Die verwendeten Sensoren, ihre Messgrößen, Auflösungen sowie Genauigkeiten sind Tabelle 8 (RAMM u. SCHWIEGER 2004) zu entnehmen.

Tab. 8: Sensoren des Multisensorsystems und ihre Charakteristika (RAMM u. SCHWIEGER 2004)

Sensor	Messdaten	Auflösung	Genauigkeit
GPS-Empfänger	Y, X	$< 1 \text{ m}$	$1 - 3 \text{ m}$
Radsensoren	$\Delta s, \Delta \alpha$	$2 \text{ mm}, 0,1 \text{ gon}$	$0,4 \%$
Korr.geschw.sensor	Δs	$1,9 \text{ mm}$	$0,1 \%$
Drehratensensor	$\Delta \alpha$	$0,2^\circ/\text{s}$	$0,3^\circ/\text{s}$

Man erkennt, dass nur der Global Positioning System (GPS) Empfänger absolute Koordinateninformationen liefert und alle anderen Sensoren zum Teil redundante relative Informationen erzeugen. Korrelationsgeschwindigkeitsmesser und Radsensoren messen überfahrene Streckeninkremente; Drehratensensor und Radsensoren ermitteln die Orientierungsänderungen. Es existiert folglich die Möglichkeit, mit Hilfe des Instrumentariums die Koppelortung (z.B. HOFMANN-WELLENHOF et al. 2003) redundant durchzuführen. Besondere Wichtigkeit gewinnen die Sensoren zur Koppelortung, wenn der GPS Empfänger keine oder sehr schlechte Satellitensignale empfängt. Die Genauigkeit der Positionsschätzung erreicht etwa die Genauigkeitsangaben des im relativen Modus (DGPS) arbeitenden GPS Empfängers in Tabelle 8 (RAMM u. SCHWIEGER 2004).

Die Auswertung der Messdaten erfolgt in einem kinematischen KALMAN-Filter, das alle Messwerte mit dem Fahrzeugmodell zusammenführt. Das für den Ansatz genutzte Fahrzeugmodell orientiert sich an einer stationären Kreisfahrt; das heißt, dass zwischen zwei Messepochen die Trajektorie des Fahrzeuges als Kreisbogen approximiert und dass in diesem Zeitabschnitt eine konstante Geschwindigkeit vorausgesetzt wird. Die stationäre Kreisfahrt ist eine in der Fahrzeugdynamik häufig eingesetzte Vereinfachung der fahrdynamischen Zusammenhänge (MITSCHKE u. WALLENTOWITZ 2004). Der im Rahmen dieses Abschnittes eingesetzte KALMAN-Filter Ansatz baut auf AUSSEMS (1999) auf und wurde bereits in EICHHORN (2005), KUHLMANN u. EICHHORN (2003) sowie RAMM u. SCHWIEGER (2004) vorgestellt. STERNBERG (2000) modelliert die Trajektorie des Fahrzeuges gleichfalls als stationäre Kreisfahrt, nutzt aber im Gegensatz zum nachfolgend aufgeführten Ansatz zum Teil andere Mess- und Zustandsgrößen.

Die Beobachtungen sind in diesem Fall die Messgrößen \mathbf{I}_k der oben beschriebenen Sensoren in einer beliebigen Epoche k

$$\mathbf{I}_k = \begin{pmatrix} Y_{GPS,k} \\ X_{GPS,k} \\ \Delta \alpha_{rad,k} \\ \Delta s_{rad,k} \\ \Delta s_{kor,k} \end{pmatrix} \quad (4.2.18)$$

mit $Y_{GPS,k}, X_{GPS,k}$ GPS Koordinaten,

$\Delta \alpha_{rad,k}$ Orientierungsänderung aus Radsensormessungen,

$\Delta S_{rad,k}$ Streckeninkrement aus Radsensormessungen und

$\Delta S_{kor,k}$ Streckeninkrement aus Korrelationsgeschwindigkeitsmessungen.

Dabei ist darauf hinzuweisen, dass die aus dem Drehratensensor abgeleitete Orientierungsänderung $\Delta\alpha_{dre,k}$ nicht dem Beobachtungsvektor zugeordnet ist, da sie in die Prädiktion eingeht (vergleiche (4.2.22) und (4.2.23)). Die Messgröße $\Delta\alpha_{dre,k}$ wird als Stellgröße im Sinne des Algorithmus in Anhang B betrachtet

$$u_k = \Delta\alpha_{dre,k} \quad (4.2.19)$$

Der Grund für dieses Vorgehen ist die Überwindung der Trägheit des KALMAN-Filters durch die Integration einer Messgröße in die Prädiktionsgleichung.

Die Kofaktormatrix der Beobachtungen wird mit Hilfe der Informationen der Tabelle 8 aufgebaut. Das gilt auch für die Kofaktormatrix \mathbf{Q}_{uu} der Stellgröße u_k , da auch diese originär als Messgröße vorliegt. Zu erwähnen ist außerdem, dass die Kofaktormatrix der Stellgröße auf Grund ihres skalaren Charakters zu einer Varianz σ_u^2 entartet.

Der Zustandsvektor enthält für diese kinematische Anwendung nicht die Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen wie in PELZER (1987) für die Deformationsanalyse mittels KALMAN-Filter vorgeschlagen. Zur Beschreibung des Bewegungsverhaltens eines Fahrzeuges hat sich – wie bereits zuvor erwähnt – der Ansatz mittels Parametrisierung der stationären Kreisfahrt als praktikabel erwiesen. Die Zustandsgrößen $\hat{\mathbf{y}}_k$ lassen sich wie folgt aufschreiben

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \begin{pmatrix} \hat{Y}_k \\ \hat{X}_k \\ \hat{\alpha}_k \\ \hat{v}_k \end{pmatrix}, \quad (4.2.20)$$

mit \hat{Y}_k, \hat{X}_k Fahrzeugkoordinaten,

$\hat{\alpha}_k$ Orientierung des Fahrzeuges,

\hat{v}_k Geschwindigkeit des Fahrzeuges.

Die Designmatrix \mathbf{A} ergibt sich als verbindendes Element von Beobachtungsvektor \mathbf{I}_k (4.2.18) und Zustandsvektor $\hat{\mathbf{y}}_k$ (4.2.20)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\hat{\alpha}_k}{\bar{\alpha}_{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t \end{pmatrix}, \quad (4.2.21)$$

mit $\Delta t = 0,2$ sec Epochenabstand,

$\hat{\alpha}_k, \bar{\alpha}_{k+1}$ aufdatierte bzw. prädierte Orientierungen der Epochen $k, k+1$.

Die Prädiktion erfolgt für die Koordinaten Y_k, X_k anhand des bereits angesprochenen Kreismodells, dass mittels eines nicht-linearen und nicht-additiven Gleichungssystems fortgeschrieben wird

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}_{k+1} \\ \bar{X}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_k \\ \hat{X}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \hat{\alpha}_k & \sin \hat{\alpha}_k \\ -\sin \hat{\alpha}_k & \cos \hat{\alpha}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta Y^L \\ \Delta X^L \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (4.2.22)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta Y^L \\ \Delta X^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot (1 - \cos(\Delta \alpha_{dre,k+1})) \\ R \cdot \sin(\Delta \alpha_{dre,k+1}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \frac{\hat{v}_k \cdot \Delta t}{\Delta \alpha_{dre,k+1}}.$$

Die prädizierten Koordinaten werden mit $\bar{Y}_{k+1}, \bar{X}_{k+1}$ bezeichnet. Anhand von Abbildung 12 wird die Definition der lokalen Koordinatenänderungen $\Delta Y^L, \Delta X^L$ und des Radius R des Kreises für das angesprochene Kreismodell verdeutlicht.

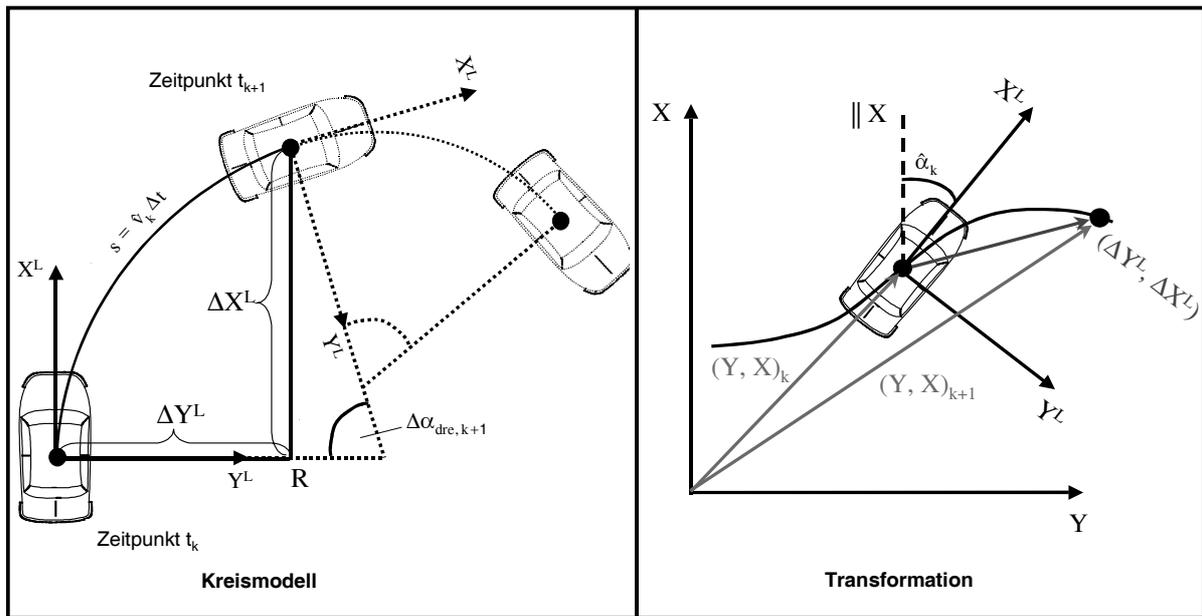


Abb. 12: Kreismodell zur Prädiktion des Zustandsvektors (verändert nach EICHHORN 2005)

Für die Geschwindigkeit \bar{v}_{k+1} und die Orientierung $\bar{\alpha}_{k+1}$ ist der Zusammenhang linear

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{k+1} \\ \bar{v}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{dre,k+1} \\ \hat{v}_k \end{pmatrix}. \quad (4.2.23)$$

Wie bereits zuvor beschrieben, geht die Messgröße $\Delta \alpha_{dre,k+1}$ als Stellgröße in die Prädiktionsgleichung ein. Stellt man nun den oberen Teil der Gleichung (4.2.23) um, so ergibt sich

$$\Delta \alpha_{dre,k+1} = \bar{\alpha}_{k+1} - \hat{\alpha}_k. \quad (4.2.24)$$

Unter Nutzung der Matrix \mathbf{A} (4.2.21), des Zusammenhanges (4.2.24) und des Algorithmus in Anhang B kann abgeleitet werden, dass die Innovation d_α für die Orientierung $\hat{\alpha}_{k+1}$ die Differenz zwischen den beiden Messwerten für die Orientierungsänderung darstellt:

$$\begin{aligned} d_\alpha &= \Delta \alpha_{rad,k+1} - \left(1 - \frac{\hat{\alpha}_k}{\bar{\alpha}_{k+1}}\right) \cdot \bar{\alpha}_{k+1}, \\ \Leftrightarrow d_\alpha &= \Delta \alpha_{rad,k+1} - \bar{\alpha}_{k+1} + \hat{\alpha}_k, \\ \Leftrightarrow d_\alpha &= \Delta \alpha_{rad,k+1} - \Delta \alpha_{dre,k+1}. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

$$\begin{aligned}
d_\alpha &= \Delta\alpha_{rad,k+1} - \left(1 - \frac{\hat{\alpha}_k}{\bar{\alpha}_{k+1}}\right) \cdot \bar{\alpha}_{k+1}, \\
\Leftrightarrow d_\alpha &= \Delta\alpha_{rad,k+1} - \bar{\alpha}_{k+1} + \hat{\alpha}_k, \\
\Leftrightarrow d_\alpha &= \Delta\alpha_{rad,k+1} - \Delta\alpha_{dre,k+1}.
\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

Die Prädiktion der Kofaktormatrix (vergleiche Anhang B) erfolgt mit Hilfe der zu linearisierenden Gleichungen (4.2.22) und (4.2.23) (vergleiche EICHHORN 2005). Die Transitionsmatrix ergibt sich wie folgt

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \hat{v}_k \cdot \Delta t \cdot \frac{\sin \bar{\alpha}_{k+1} - \sin \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{dre,k+1}} & -\Delta t \cdot \frac{\cos \bar{\alpha}_{k+1} - \cos \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{dre,k+1}} \\ 0 & 1 & \hat{v}_k \cdot \Delta t \cdot \frac{\cos \bar{\alpha}_{k+1} - \cos \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{dre,k+1}} & \Delta t \cdot \frac{\sin \bar{\alpha}_{k+1} - \sin \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{dre,k+1}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.2.26}$$

Zusätzlich sind die Einflüsse der Stellgröße u_k und der gleichfalls skalaren Störgröße w , die hier als Störbeschleunigung aufzufassen ist, mit Hilfe der Matrizen \mathbf{B} bzw. \mathbf{S} zu berücksichtigen (vergleiche Anhang B). Für die Stellgrößenmatrix \mathbf{B} gilt

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \hat{v}_k \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{\sin \bar{\alpha}_{k+1}}{\Delta\alpha_{dre,k+1}} + \frac{\cos \bar{\alpha}_{k+1} - \cos \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{dre,k+1}^2} \right) \\ \hat{v}_k \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{\cos \bar{\alpha}_{k+1}}{\Delta\alpha_{dre,k+1}} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{k+1} - \sin \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{dre,k+1}^2} \right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.27}$$

Anhand dieser Darstellung kann man erkennen, dass die Stellgröße u_k keinen Einfluss auf die Prädiktion der Geschwindigkeit \hat{v}_k hat.

Der Erwartungswert der Störbeschleunigung w wird wie in Anhang B zu Null angenommen; die zugehörige Varianz σ_w^2 ist mittels

$$\sigma_w^2 = \left(0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 \tag{4.2.28}$$

empirisch festgelegt. Der Einfluss der Varianz σ_w^2 auf die einzelnen zu präzisierenden Zustandsgrößen wird mit der Störgrößenmatrix \mathbf{S} modelliert:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta\alpha_{dre,k+1}} \cdot (\cos \bar{\alpha}_{k+1} - \cos \hat{\alpha}_k) \\ \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta\alpha_{dre,k+1}} \cdot (\sin \bar{\alpha}_{k+1} - \sin \hat{\alpha}_k) \\ 0 \\ \Delta t \end{pmatrix}. \tag{4.2.29}$$

Alle weiteren hier nicht aufgeführten Rechenschritte werden analog zu Anhang B durchgeführt.

Für die Sensitivitätsanalyse in den Abschnitten 4.3 und 4.4.2 werden nur 6 Epochen des Filters betrachtet, um Übersichtlichkeit zu gewährleisten. Die Ausgangsgrößen sind somit die Komponenten des aufdatierten Zustandsvektors der 6. Epoche. Bereits bei 6 Epochen ergeben sich 36 Eingangsgrößen, da der Beobachtungsvektor \mathbf{I}_k hierfür um die Eingangsgröße Orientierungsänderung aus der Drehratenmessung $\Delta\alpha_{dre,k}$ zu erweitern ist. Aufgrund der Vielzahl an Eingangsgrößen werden diese für einen Teil der Sensitivitätsanalysen in Gruppen zusammengefasst. Es werden zwei Varianten der Gruppenbildung umgesetzt: zum Einen werden jeweils alle Eingangsgrößen einer Messgröße, zum Anderen werden jeweils die Eingangsgrößen einer Epoche zusammengefasst. In beiden Fällen befinden sich 6 Eingangsgrößen in einer Gruppe.

Für viele Größen, die in der Fahrdynamik von Bedeutung sind, wie beispielsweise der Lenkradeinschlagwinkel oder das Lenkmoment, ist nicht die Geschwindigkeit des Fahrzeuges, sondern dessen Zentripetalbeschleunigung a_z von entscheidender Wichtigkeit (MITSCHKE u. WALLENTOWITZ 2004)

$$a_z = \frac{\hat{v}_{k+1}^2}{R} \quad \text{mit Radius : } R = \frac{\hat{v}_{k+1} \cdot \Delta t}{\Delta\alpha} = \frac{\hat{v}_{k+1} \cdot \Delta t}{\hat{\alpha}_{k+1} - \hat{\alpha}_k}. \quad (4.2.30)$$

Die Zentripetalbeschleunigung lässt sich folglich aus den aufdatierten Zustandsgrößen des KALMAN-Filters ableiten. Für die verschiedenen Fahrscenarien (siehe Abschnitt 4.4.2) sind Grenzwerte für die Zentripetalbeschleunigung berücksichtigt. Nach MITSCHKE u. WALLENTOWITZ (2004) gilt, dass der Kraftschluss durch den Haftbeiwert in seitlicher Richtung μ_h begrenzt wird und sich daher die maximale Zentripetalbeschleunigung $a_z(\max)$ zu

$$a_z(\max) = \mu_h(\max) \cdot g \quad (4.2.31)$$

mit g als Gravitationskonstante und $\mu_h(\max) = 0,96$

ergibt. $a_z(\max)$ darf nicht überschritten werden, damit der Gleitzustand für das Fahrzeug vermieden wird. Die Zentripetalbeschleunigung wird aufgrund ihrer Bedeutung für die Fahrdynamik bei der Sensitivitätsanalyse in Abschnitt 4.4.2 zusätzlich zu den Zustandsgrößen betrachtet.

4.3 Gegenüberstellung der Sensitivitätsanalysemethoden

In diesem Abschnitt werden verschiedene Sensitivitätsmaße zur Identifikation der Modelleigenschaften gegenübergestellt, um die Entscheidung für eine Analysemethode in Abschnitt 4.4 zu treffen. Im Einzelnen handelt es sich um die quadrierten normierten Regressionskoeffizienten β_i^2 , die quadrierten normierten Rangregressionskoeffizienten $R\beta_i^2$ die Sensitivitätsindizes 1.Ordnung nach SOBOL S_i^{Sob} und FAST S_i^{Fast} sowie die Gesamteffekte S_{Ti}^{Sob} und S_{Ti}^{Fast} .

Die Möglichkeiten der einzelnen Sensitivitätsmaße werden zunächst anhand der in Abschnitt 4.2.2 vorgestellten **exemplarischen Funktionen** aufgezeigt. Anhand dieser Funktionen sollen die grundlegenden Eigenschaften und Einsatzmöglichkeiten, aber auch Schwierigkeiten der verschiedenen Sensitivitätsmaße empirisch verdeutlicht werden. Für die Funktionen Summe (4.2.1), kubische Summe (4.2.2) und Strecke (4.2.4) wird eine Gleichverteilung im Intervall von 0 bis 1000 zur Simulation der Eingangsgrößen X_1 und X_2 verwendet; für die Sinussumme und die Kosinus-Exponentialfunktion die selbe Verteilung aufgrund der trigonometrischen Funktionen im Intervall von 0 bis 2π . Für die β_i und die $R\beta_i$ werden zufällige Stichproben nach Abschnitt 2.4.2 generiert; für die anderen Indizes werden die methodenspezifischen Verfahren

eingesetzt (vergleiche Abschnitte 2.4.2 und 2.4.5.3). Zusätzlich wurde der Stichprobenumfang variiert. Nach dem Zufallsprinzip wurden Stichproben mit den Umfängen 100, 1 000, 10 000 und 100 000 generiert. Für SOBOLs und die FAST Methode mussten methodenspezifisch andere Stichprobenumfänge festgelegt werden. Minimaler Wert für die FAST Methode ist aufgrund Gleichung (2.4.79) 130, es folgen die Werte 994, 9 986 und 99 986, die sich unter Nutzung der Abbildung 8 in Abschnitt 2.4.5.3 und der möglichst geringen Abweichung von den zuvor aufgeführten Stichprobenumfängen. Bei der Methode nach SOBOL kann aufgrund der Gleichungen (2.4.9) und des in SIMLAB festgelegtem minimalen u_{LP} von 2^4 , ein minimaler Wert von 96 genutzt werden, es folgen 768, 6 144 und 12 288. In den Abbildungen 13 bis 17 werden die Ergebnisse für die jeweiligen Sensitivitätsmaße mit den jeweils höchsten Stichprobenumfängen zusammengestellt.

Die Beurteilung der Modelleigenschaften erfolgt auf Basis der bereits in Tabelle 5 in Kapitel 2.4.6 aufgeführten Bedingungen:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^2 < 1 \Rightarrow \text{Nicht-Linearität}, \quad (4.3.1)$$

$$\sum_{i=1}^n R\beta_i^2 < 1 \Rightarrow \text{Nicht-Monotonie}, \quad (4.3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n S_i^{\text{Sob}} < 1 \Rightarrow \text{Nicht-Additivität}, \quad (4.3.3)$$

$$\sum_{i=1}^n S_i^{\text{FAST}} < 1 \Rightarrow \text{Nicht-Additivität}. \quad (4.3.4)$$

Die ersten drei Abbildungen (13 bis 15) verifizieren auf empirischem Wege die theoretischen Eigenschaften der einzelnen Sensitivitätsmaße. Für die lineare Funktion in Abbildung 13 ergeben sich durchgängig fast identische Sensitivitätsmaße. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die Regressionskoeffizienten β_i mit dem Rangregressionskoeffizienten $R\beta_i$ übereinstimmen, die daher nicht dargestellt werden.

Für die nicht-lineare, aber monotone Funktion „kubische Summe“, für die die Sensitivitätsmaße in Abbildung 14 dargestellt sind, zeigt sich, dass die normierten Rangregressionskoeffizienten und die Sensitivitätsindizes nach SOBOL und FAST geeignet ist, um ein quantitatives Maß zur Sensitivitätsanalyse zu liefern. Hervorzuheben ist an dieser Stelle, dass der normierte Rangregressionskoeffizient für diese Funktion tatsächlich ein zuverlässigeres Resultat als der normierte Regressionskoeffizient ergibt. Auf die Darstellung von X_1 wird in Abbildung 14 verzichtet, da sich die numerischen Werte aller Sensitivitätsmaße aufgrund des in (4.2.2) dargestellten funktionalen Zusammenhangs zu Null ergeben.

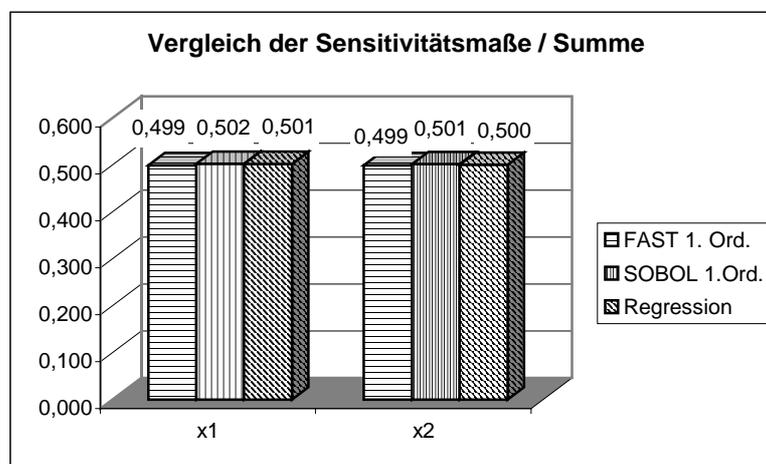


Abb. 13: Sensitivitätsmaße für die exemplarische Funktion $Y = X_1 + X_2$

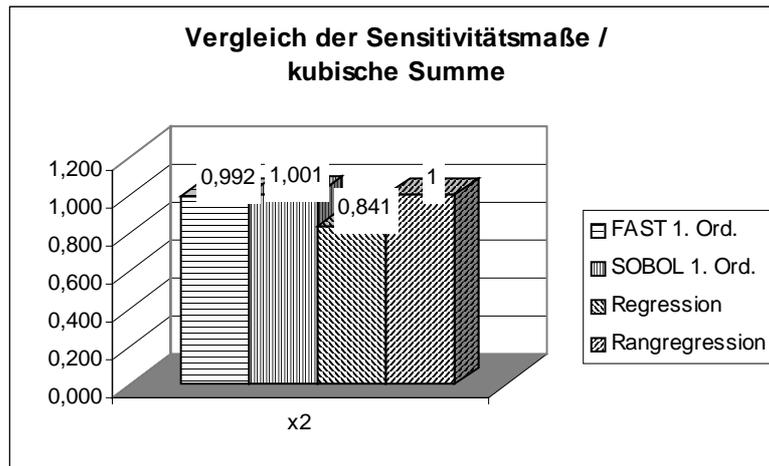


Abb. 14: Sensitivitätsmaße für die exemplarische Funktion $Y = X_1 + X_2^3$ (X_1 nicht dargestellt)

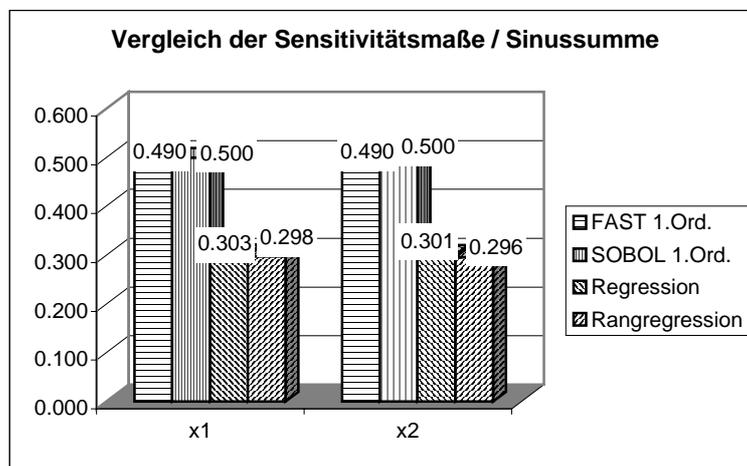


Abb. 15: Sensitivitätsmaße für die exemplarische Funktion $Y = \sin X_1 + \sin X_2$

Abbildung 15 zeigt die Sensitivitätsmaße einer weiteren additiven Funktion, der Summe zweier Sinusschwingungen. Hier wird offensichtlich, dass aufgrund des nicht-linearen und nicht-monotonen Charakters des Zusammenhangs beide regressionsbezogenen Maße versagen. Die Summen der varianz-basierten Maße nach SOBOL oder FAST ergeben einen Wert von etwa Eins (z.B. FAST: 0,49 + 0,49 oder SOBOL: 0,50 + 0,50) und sind daher zur quantitativen Abschätzung der Sensitivität geeignet.

Die für die bisher vorgestellten Beispielfunktionen nicht gezeigten Gesamteffekte sind – bis auf ganz geringe numerische Unsicherheiten – sowohl für SOBOLs Methode und als auch für die FAST Methode identisch mit den jeweils entsprechenden Sensitivitätsindizes 1.Ordnung. Auch diese Identität ist nach Abschnitt 2.4.6 ein Kriterium, dass die Additivität kennzeichnet.

Die Abbildungen 16 und 17 zeigen für die nicht-lineare und nicht-additive, aber monotone Funktion, dass zum Einen die Sensitivitätsindizes 1.Ordnung von denen der regressionsbasierten Maße abweichen, zum Anderen, dass eine Differenz zwischen 1.Ordnung und Gesamteffekt für die varianz-basierten Maße vorliegt. Die Differenzen fallen insgesamt gering aus, da der nicht-additive Charakter des Modells nicht ausgeprägt ist. Erwähnenswert ist außerdem die für diese Funktion sehr gute Übereinstimmung zwischen den varianz-basierten Sensitivitätsmaßen nach SOBOL und FAST.

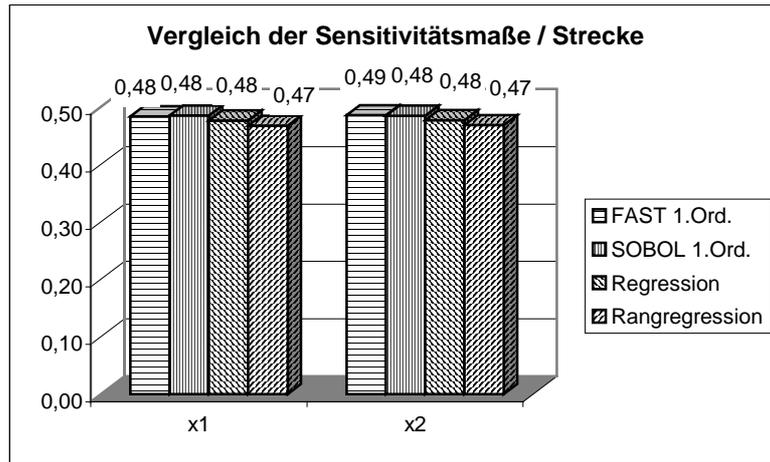


Abb. 16: Sensitivitätsmaße 1.Ordnung für die exemplarische Funktion $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$

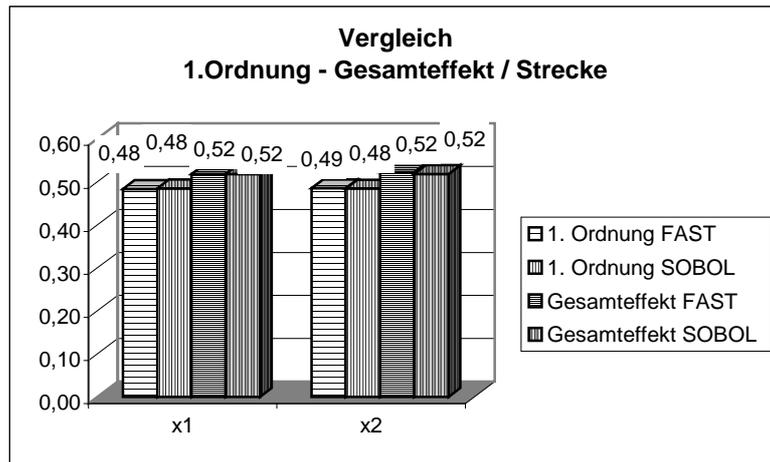


Abb. 17: Sensitivitätsmaße 1.Ordnung und Gesamteffekte; Funktion $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$

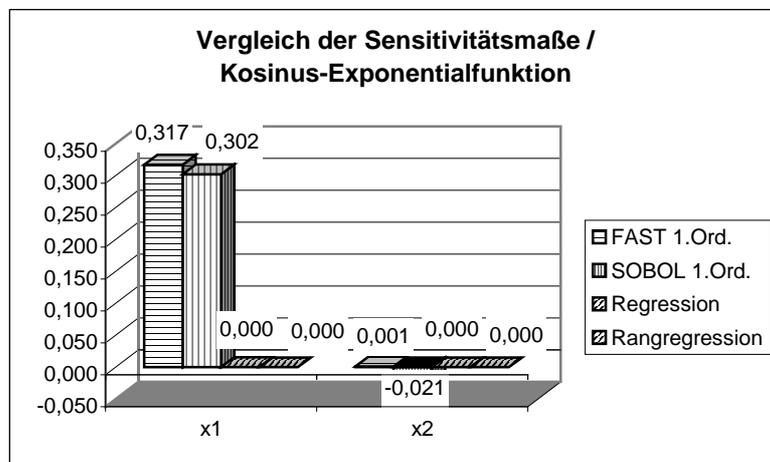


Abb. 18: Sensitivitätsmaße 1.Ordnung für die Funktion $Y = \cos(X_1) \cdot e^{-X_2}$

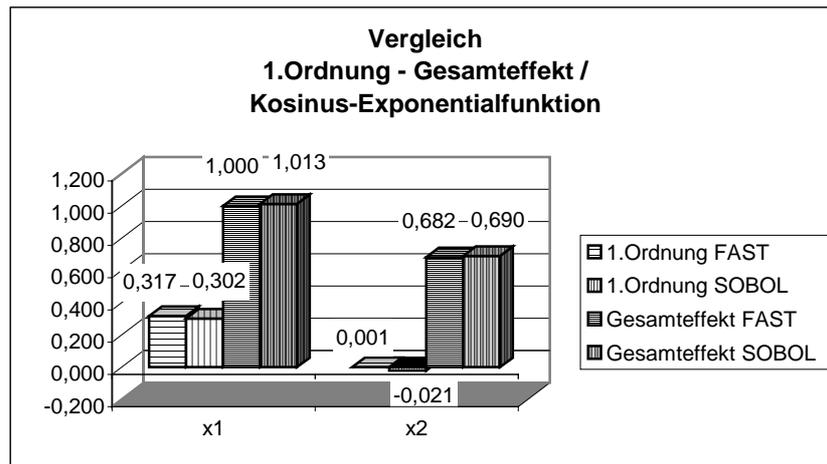


Abb. 19: Sensitivitätsmaße 1.Ordnung und Gesamteffekte; Funktion $Y = \cos(X_1) \cdot e^{-X_2}$

Die letzte Beispielfunktion, die in den Abbildungen 18 und 19 präsentiert ist, ist eine nicht-additive und zusätzlich nicht-monotone Funktion. Es fällt auf, dass für diese Kosinus-Exponentialfunktion die regressionsbezogenen Maße, wie in Gleichung (2.4.15) dargestellt, keine interpretationsfähigen Resultate angeben. Aber auch die Summe der varianz-basierten Methoden ergibt keinen Wert von Eins; SOBOLs Methode liefert sogar nicht realistische negative Sensitivitätsindizes für X_2 . Hier wird es folglich unverzichtbar, die Gesamteffekte zur zusätzlichen Beurteilung heranzuziehen. Insbesondere gewinnt X_2 erst aufgrund der Effekte 2.Ordnung an Bedeutung. Würde man nur den Sensitivitätsindex 1.Ordnung betrachten, so wäre man davon ausgegangen, dass X_2 keinen Einfluss hat. Dieses entspricht offensichtlich nicht der Realität.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass nur die varianz-basierten Sensitivitätsanalysemethoden unabhängig von den Modelleigenschaften quantitative Sensitivitätsaussagen ermöglichen. Dabei sind auch die Effekte höherer Ordnung zu berücksichtigen. Das Verfahren nach SOBOL und die FAST Methode unterscheiden sich dabei nicht signifikant.

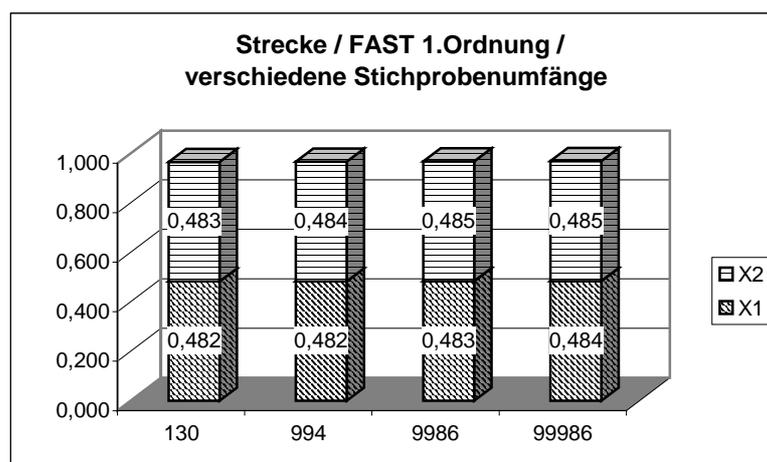


Abb. 20: Konvergenzverhalten der FAST 1.Ordnung; Funktion $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$

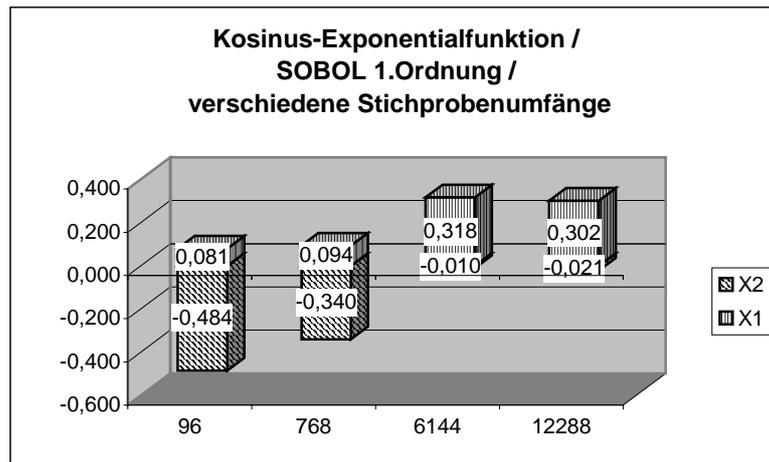


Abb. 21: Konvergenzverhalten für die SOBOL 1.Ordnung; Funktion $Y = \cos(X_1) \cdot e^{-X_2}$

Neben der Entscheidung für ein Sensitivitätsmaß soll untersucht werden, inwieweit der Stichprobenumfang das Ergebnis beeinflusst. Im Gegensatz zu der bisherigen Darstellung werden in den Abbildungen 20 und 21 die einzelnen Sensitivitätsindizes übereinander angeordnet, so dass direkt überprüft werden kann, ob die für die Additivität maßgeblichen jeweiligen Summenwerte von 1 erreicht werden. Dabei ist auf das exzellente Verhalten der FAST - Methode hinzuweisen. Für fast alle Funktionen ändern sich die Sensitivitätsmaße mit aufsteigendem Stichprobenumfang nur unwesentlich. Man kann in der Folge bei fast allen Funktionen den geringsten Stichprobenumfang von 130 wählen und macht einen maximalen Fehler für die Sensitivitätsmaße von 1,5 %. Abbildung 20 zeigt das Konvergenzverhalten für die Funktion $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$. Die Methode nach SOBOL konvergiert langsamer; sie benötigt in der Regel einen Stichprobenumfang von 768, um einen Fehler kleiner 2 % zu erreichen. Abbildung 21 zeigt den Ausnahmefall für die nicht-additive, nicht-monotone Kosinus-Exponential-Funktion. Hier erweist sich SOBOLs Methode als unzuverlässig; es ist ein großer Stichprobenumfang notwendig.

Zusammenfassend betrachtet zeigt die FAST Methode das schnellere und zuverlässigere Konvergenzverhalten und soll daher für die folgenden varianz-basierten Untersuchungen genutzt werden.

Die Aussage zum Stichprobenumfang ist nicht auf jede andere Funktion oder ein beliebiges komplexes Modell zu übertragen. Sie ist jeweils anhand der zu analysierenden Modelle empirisch zu überprüfen.

Die in Abschnitt 4.2.3 und 4.2.4 vorgestellten Modelle werden im nachfolgenden Text bezüglich Sensitivitätsanalysemethode und Stichprobenumfang analysiert. Außerdem sind die verschiedenen Varianten zur Generierung von Stichproben wie das Latin-Hypercube-Sampling (LHS) oder die LP_r -Sequenzen auf ihre Eignung hin zu überprüfen.

Zunächst wird das **kinematische KALMAN-Flächenfilter**, das in Abschnitt 4.2.3 umfassend beschrieben wurde, der Analyse unterzogen. An dieser Stelle soll nur die Eignung einer Sensitivitätsanalysemethode gezeigt werden und letztendlich eine Entscheidung für eine der Methoden herbeigeführt werden.

Die Untersuchungen beschränken sich aus Gründen der Übersichtlichkeit auf 4 Epochen mit jeweils 13 gemessenen Höhen. Insgesamt liegen somit 52 Eingangsgrößen vor. Für die nachfolgenden Ausführungen wird für jede Eingangsgröße eine Gleichverteilung im Intervall von -3cm bis $+3\text{cm}$ simuliert, da größere Bewegungen zwischen zwei Epochen nicht zu erwarten sind. Um einen Einblick in das Verhalten des linearen Modells zu erhalten, werden zufällige Stichproben der Umfänge 100 und 1000 generiert, sowie LHS Stichproben des Umfangs 1000. Beide Methoden zur Stichprobengenerierung werden zur Regressions- und

zur Rangregressionsanalyse genutzt. Die Ergebnisse der Rangkorrelationsanalyse werden nicht präsentiert, da sie sich nur unwesentlich von denen der Regressionsanalyse unterscheiden.

Um das Modellverhalten zu beurteilen, werden die Quadratsummen aller normierten Regressions- bzw. Rangregressionskoeffizienten berechnet. Vergleichend wird die Summe der FAST Indizes 1. Ordnung gebildet. Dafür werden die gemessenen Höhen der 4 Epochen für jeden Punkt zu einer Gruppe zusammengefasst. Die Stichprobengrößen werden mit 845, 9 295 und 99 710 festgelegt, wobei 845 den minimalen Stichprobenumfang bei 13 Eingangsgrößen bzw. Eingangsgrößengruppen darstellt. An dieser Stelle erkennt man den Vorteil der Bildung von Eingangsgrößengruppen: die Reduktion des Stichprobenumfangs und damit des Rechenaufwands. Auf die Nutzung der Methode nach SOBOL wird verzichtet, da sie theoretisch die gleiche Aussage wie die FAST Methode liefern würde und außerdem die FAST Methode, wie anhand vorstehender Beispiele gezeigt wurde, in der Regel schneller konvergiert.

Die Ausgangsgrößen sind die 6 Parameter z_0 bis z_5 , die die in Abschnitt 4.2.3 vorgestellte Geschwindigkeitsfläche parametrisieren. Exemplarisch sind für den Parameter z_3 die verschiedenen Quadratsummen und Summen in Abbildung 22 graphisch dargestellt; die Zusammenfassung für alle 6 Parameter ist in Tabelle 9 aufgeführt. Die Abkürzung „Zuf“ steht dabei für die zufällige Stichprobengenerierung; LHS und FAST sind selbsterklärend. Da nur Aussagen bezüglich der Modelleigenschaften gewonnen werden sollen, werden Abbildung 22 nur die Summen beziehungsweise Quadratsummen der Sensitivitätsmaße dargestellt. Diese erlauben eine Entscheidung bezüglich der Modelleigenschaften auf Basis der Bedingungen (4.3.1) und (4.3.4).

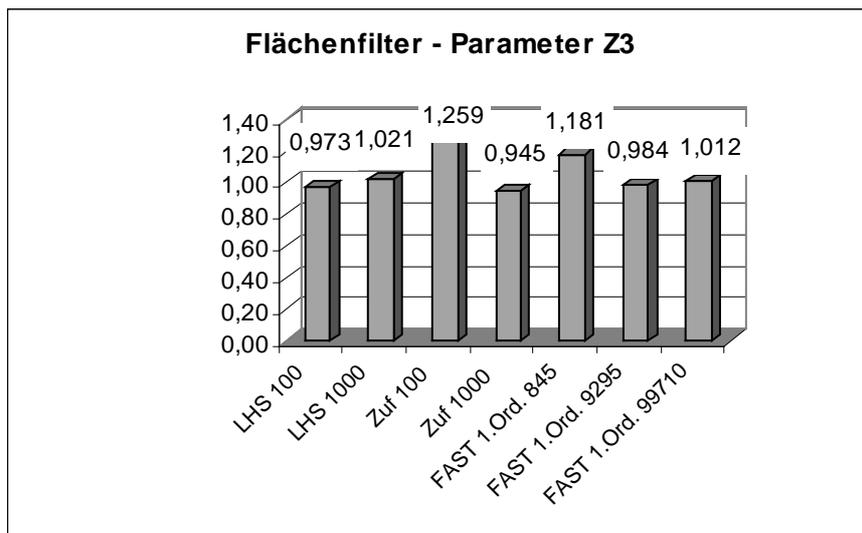


Abb. 22: Verschiedene Sensitivitätsanalysemethoden und Stichprobengenerierungen; Parameter z_3

Aus der hier aufgeführten Analyse ergibt sich kein klares Bild bezüglich des Modellverhaltens. Das Modell erreicht näherungsweise sowohl additive als auch lineare Eigenschaften, da die Summen beziehungsweise Quadratsummen der Sensitivitätsmaße nur in geringem Umfang von Eins abweichen. Abbildung 22 zeigt, dass sich die Summen mit größeren Stichprobenumfang – insbesondere für die FAST Methode – verändern. Kleine Stichprobenumfänge liefern folglich keine korrekten Ergebnisse.

Tab. 9: Sensitivitätsmaße verschiedener Sensitivitätsanalysemethoden für das Flächenfilter

Parameter	$\sum \beta_i^2$				$\sum S_i^{FAST}$		
	LHS 100	LHS 1000	Zuf 100	Zuf 1000	845	9 295	99 710
Z0	0,938	0,954	0,947	1,043	2,291	0,935	0,956
Z1	1,057	1,025	0,737	0,986	1,412	1,154	0,997
Z2	1,221	1,103	0,986	1,052	1,591	1,006	0,977
Z3	0,973	1,021	1,259	0,945	1,181	0,984	1,012
Z4	0,801	1,006	1,038	0,976	1,514	1,076	0,979
Z5	0,850	0,957	0,913	0,968	1,042	0,993	1,021

Da empirisch nicht eindeutig geklärt ist, ob das kinematische Flächenfilter tatsächlich additiv oder sogar linear ist, wird in den nachfolgenden Untersuchungen des Abschnittes 2.4.1 die erweiterte FAST Methode eingesetzt.

Auf diese Weise kann sichergestellt werden, dass die Ergebnisse immer korrekt sind, da auch nicht-additive Modelle mit Hilfe der Gesamteffekte analysiert werden können. Außerdem kann auf diese Weise die Strategie, Eingangsgrößen zu Gruppen zusammenzufassen und damit die Anzahl der Eingangsgrößen zu reduzieren, verfolgt werden (vergleiche Abschnitt 2.4.5.6). Zusätzlich ist bei der Sensitivitätsanalyse in Kapitel 4.4.1 ein möglichst großer Stichprobenumfang zu berücksichtigen, da das Konvergenzverhalten nicht geklärt ist.

Zum Abschluss dieses Kapitels soll ein erster Einblick in das **kinematische KALMAN-Filter zur Trajektorienbestimmung**, der in Abschnitt 4.2.4 vorgestellt wurde, gegeben werden. An dieser Stelle wird gezeigt, welche Sensitivitätsanalysemethode zu bevorzugen ist und welcher Stichprobenumfang zur Analyse anzustreben ist. Zugleich werden die allgemeinen Modelleigenschaften betrachtet.

Um eine überschaubare Anzahl an Eingangsgrößen zu erhalten, wird ein Filterverlauf von 6 Epochen analysiert. Dabei fallen pro Epoche 6 Eingangsgrößen an. Es ergeben sich daher 36 Eingangsgrößen. Die Ausgangsgrößen sind die 4 in Abschnitt 4.2.4 vorgestellten Zustandsgrößen. Zur allgemeinen Evaluierung des Filteransatzes werden hier die am Institut für Anwendungen für Geodäsie im Bauwesen vorliegenden empirisch gewonnenen Daten für das in Abschnitt 4.2.4 vorgestellte Multisensorsystem genutzt. Dabei werden gleichverteilte Werte angenommen. Die Intervallwerte für die Gleichverteilung sind nachfolgend angegeben und beziehen sich auf Epochenabstände von 0,2 Sekunden:

Orientierungsänderungen $\Delta\alpha_{dre}$ und $\Delta\alpha_{rad}$: -0,1 bis +0,1 rad,

Streckeninkremente Δs_{rad} und Δs_{kor} : 0 bis 4 m,

Koordinatendifferenzen ΔY und ΔX : -3,5 bis + 3,5 m.

Die Sensitivitätsanalyse wird mittels Regressionsanalyse, Rangregressionsanalyse und FAST Methode durchgeführt. Auf die Methode nach SOBOL wird aus dem selben Grund wie beim kinematischen Flächenfilter verzichtet. Zusätzlich werden verschiedene Stichprobenumfänge und Stichprobengenerierungsalgorithmen verglichen. Die rein zufällige Stichprobengenerierung wird mit den Umfängen 100, 1 000, 10 000 und 100 000 umgesetzt. Zum Vergleich werden auch die Methoden LHS und LP_τ mit dem Umfang 1 000 beziehungsweise 1 024 realisiert. Mit den bisher genannten Methoden können sowohl die normierten Regressionskoeffizienten als auch – nach der Rangtransformation – die normierten Rangregressionskoeffizienten berechnet werden. Auf die Darstellung der Ergebnisse für die normierten Rangregressionskoeffizienten wird verzichtet, da sie wiederum mit denen der normierten Regressionskoeffizienten zusammenfallen. Für die FAST Methode werden die Stichprobenumfänge 9 828 und 99 972 gewählt. Außerdem wird aufgrund der hohen Eingangsgrößenanzahl die FAST Methode zusätzlich mit 2 Varianten,

die jeweils eine Gruppenbildung für die Eingangsgrößen enthalten, umgesetzt. Zum Einen werden alle Beobachtungen einer Beobachtungsart, wie zum Beispiel die sechs $\Delta\alpha_{dre}$, zu einer Gruppe zusammengefasst, zum Anderen werden alle Beobachtungen einer Epoche zu einer Gruppe zusammengefasst. In jedem der beiden Varianten ergeben sich 6 Gruppen mit jeweils 6 Eingangsgrößen. Abbildung 23 verdeutlicht die beiden Varianten der Gruppenbildung.

	Y_{GPS}	X_{GPS}	$\Delta\alpha_{rad}$	Δs_{rad}	Δs_{kor}	$\Delta\alpha_{dre}$
Epoche 1	$Y_{GPS,1}$	$X_{GPS,1}$	$\Delta\alpha_{rad,1}$	$\Delta s_{rad,1}$	$\Delta s_{kor,1}$	$\Delta\alpha_{dre,1}$
Epoche 2	$Y_{GPS,2}$	$X_{GPS,2}$	$\Delta\alpha_{rad,2}$	$\Delta s_{rad,2}$	$\Delta s_{kor,2}$	$\Delta\alpha_{dre,2}$
Epoche 3	$Y_{GPS,3}$	$X_{GPS,3}$	$\Delta\alpha_{rad,3}$	$\Delta s_{rad,3}$	$\Delta s_{kor,3}$	$\Delta\alpha_{dre,3}$
Epoche 4	$Y_{GPS,4}$	$X_{GPS,4}$	$\Delta\alpha_{rad,4}$	$\Delta s_{rad,4}$	$\Delta s_{kor,4}$	$\Delta\alpha_{dre,4}$
Epoche 5	$Y_{GPS,5}$	$X_{GPS,5}$	$\Delta\alpha_{rad,5}$	$\Delta s_{rad,5}$	$\Delta s_{kor,5}$	$\Delta\alpha_{dre,5}$
Epoche 6	$Y_{GPS,6}$	$X_{GPS,6}$	$\Delta\alpha_{rad,6}$	$\Delta s_{rad,6}$	$\Delta s_{kor,6}$	$\Delta\alpha_{dre,6}$

Abb. 23: Gruppenbildung beim Trajektorienfilter für die FAST Methode

Von den für die FAST Methode erzeugten Stichprobenumfängen werden nur die 9 750 dargestellt, da die darunter liegenden Werte keine aussagekräftigen Ergebnisse liefern. Für die Abbildungen 24 bis 27 gelten die folgenden Abkürzungen: zufällige Stichprobengenerierung „Zuf“, „LHS“ steht für das Latin Hypercube Sampling und „LPT“ für die LP_{τ} - Sequenzen. „FAST“ steht für die FAST Indizes 1.Ordnung und „FAST Beo“ bzw. „FAST Ep“ stehen für der Beobachtungsgruppen- bzw. Epochengruppenbildung der FAST Indizes 1.Ordnung. Hier sind wiederum jeweils die Summen beziehungsweise Quadratsummen der Sensitivitätsmaße dargestellt, um auf Basis der Bedingungen (4.3.1) und (4.3.4) eine Entscheidung bezüglich der Modelleigenschaften zu ermöglichen.

Die Regressionsanalyse zeigt, dass ein Stichprobenumfang von 100 offensichtlich nicht ausreicht, um konvergierende Ergebnisse zu erzeugen. Dagegen sind 1000 Stichprobenwerte unabhängig von der Stichprobenerzeugungsmethode ausreichend, um für die regressionsbasierten Methoden konvergierende Resultate zur erzeugen. Für die FAST Methode ist offensichtlich eine deutlich größere Stichprobe erforderlich, um konvergierende Ergebnisse zu erhalten. Die hohe Anzahl der Eingangsgrößen verlangsamt, wie beim kinematischen Flächenfilter, die Konvergenzgeschwindigkeit.

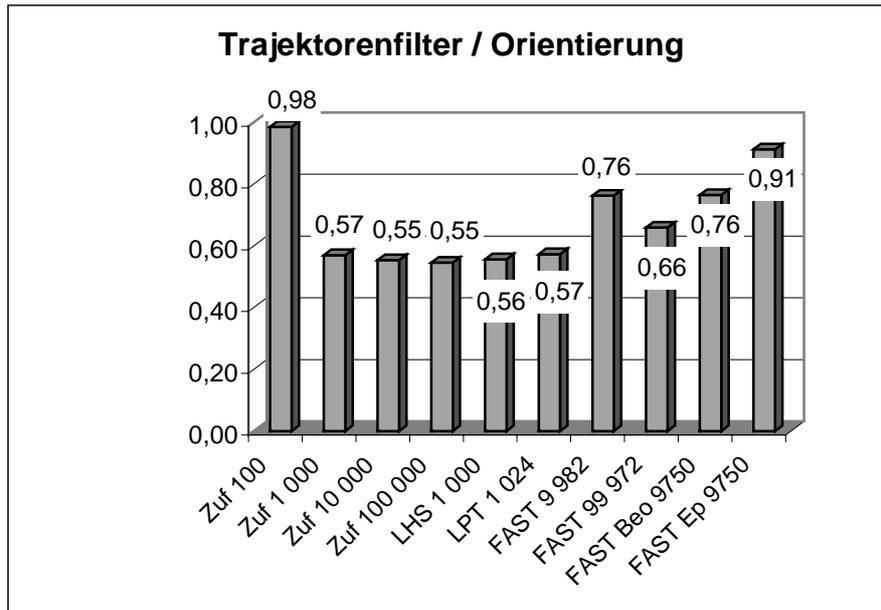


Abb. 24: Identifikation der Modelleigenschaften für die Ausgangsgröße Orientierung

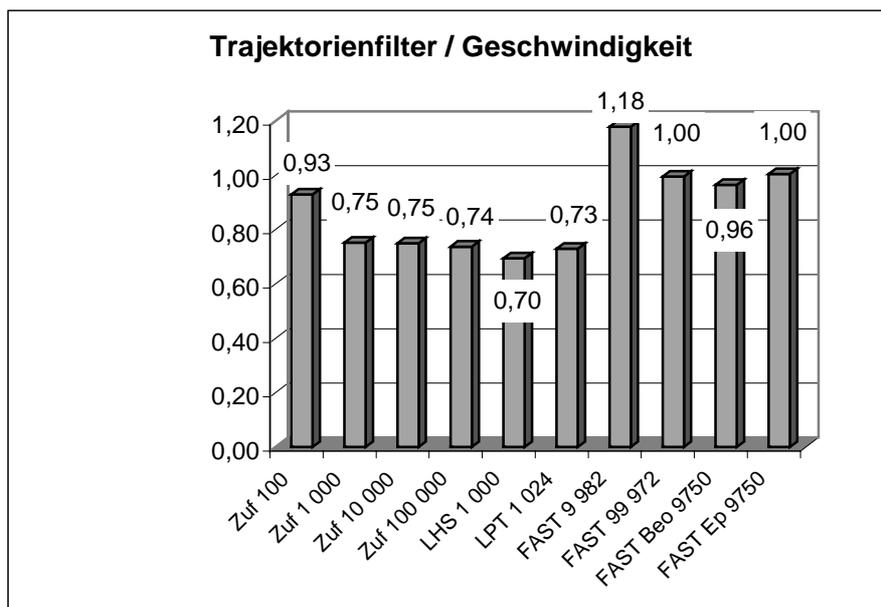


Abb. 25: Identifikation der Modelleigenschaften für die Ausgangsgröße Geschwindigkeit

Die Quadratsummen der normierten Regressionskoeffizienten (Zuf, LHS und LPT) weisen für die Orientierung (Abbildung 24) Werte deutlich kleiner Eins auf. Diese numerischen Werte zeigen ein nicht-lineares Verhalten auf. Für die Koordinaten (Abbildungen 26 und 27) und die Geschwindigkeit (Abbildung 25) ist dieses nicht so deutlich ausgeprägt; die Quadratsummen liegen hier näher an dem Linearität anzeigenden Wert Eins. Außerdem ist festzustellen, dass für die Koordinaten ein fast additives Modell ausgewiesen wird. Dieses spiegelt sich in den FAST Indizes 1.Ordnung wieder, die Werte größer 0,9 erreichen. Für die Orientierung liegen diese Werte zwischen 0,6 und 0,9, was auf eine deutlich stärkere Nicht-Additivität hinweist. Auffallend ist das Geschwindigkeitsverhalten. Es ist als additiv anzusehen, da die Summen der FAST Indizes 1.Ordnung nur geringfügig von dem Wert Eins abweichen. Die nicht

dargestellten normierten Rangregressionskoeffizienten weichen von den normierten Regressionskoeffizienten nur geringfügig ab, so dass ein monotonen und additives Modell ausgeschlossen werden kann.

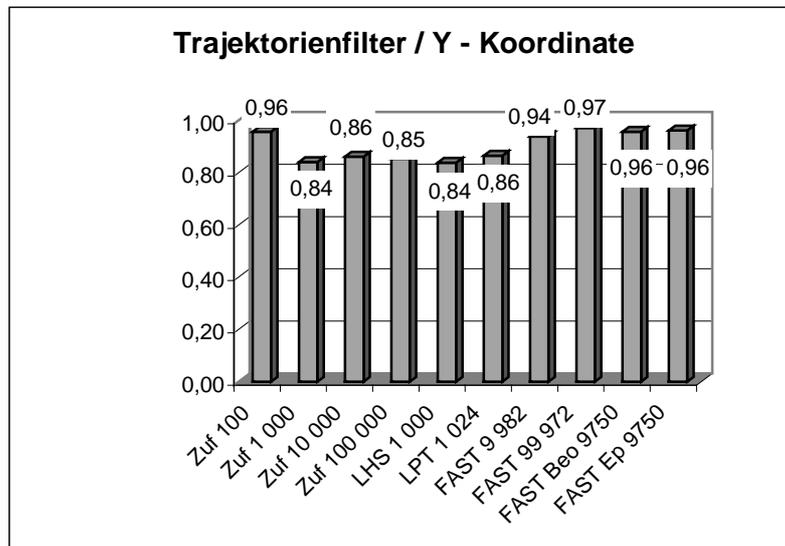


Abb. 26: Identifikation der Modelleigenschaften für die Ausgangsgröße Y-Koordinate

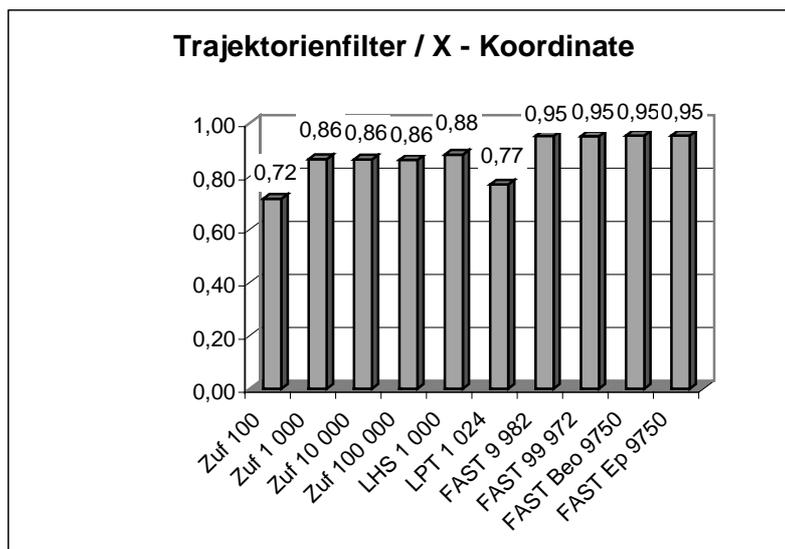


Abb. 27: Identifikation der Modelleigenschaften für die Ausgangsgröße X-Koordinate

Die Gruppenbildung innerhalb der FAST Methode hat für die Geschwindigkeit und die Koordinaten keine Auswirkung auf die dargestellten Summen. Für die Orientierung wird deutlich, dass die Beobachtungsgruppenbildung einen größeren Summenwert erreicht und die Epochengruppenbildung diesen weiter bis auf 0,9 ansteigen lässt. Dieses lässt sich wie folgt interpretieren: die gegenseitige Beeinflussung der Eingangsgrößen, mit anderen Worten der nicht-additive Modellcharakter, wird durch die Gruppenbildung geringer, da die Beeinflussungen innerhalb einer Gruppe berücksichtigt werden. In den Sensitivitätsindizes 1.Ordnung sind für die FAST ohne Gruppenbildung alle Effekte höherer Ordnung nicht enthalten. Dagegen sind in den Sensitivitätsindizes 1.Ordnung für die Beobachtungsgruppen nur Effekte höherer Ordnung zwischen den verschiedenen Beobachtungsgruppen vernachlässigt; für die Epochengruppen gilt dasselbe bezüglich inter-

epochaler Abhängigkeiten. In der Folge kann festgestellt werden, dass das nicht-additive Modellverhalten zum überwiegenden Teil aus den funktionalen Verknüpfungen zwischen den Epochen begründet ist.

Zu erkennen ist außerdem, dass die Resultate der FAST Methode ohne Gruppenbildung einen sehr hohen Rechenaufwand ($n = 99972$) bedingen, bevor sie – zumindest für die nicht-additive Ausgangsgröße Orientierung – Resultate erbringen, die als zuverlässig eingestuft werden können. Dieses ist auf die hohe Eingangsgrößenanzahl zurückzuführen.

Insgesamt lässt sich für das **Trajektorienfilter** für die in Abschnitt 4.4.2 durchzuführende detaillierte Sensitivitätsanalyse ganz allgemein das Folgende feststellen:

- die **erweiterte FAST Methode ist einzusetzen**, da das Modell nicht-additiv ist,
- Nicht-Linearität und Nicht-Additivität sind für die Zustandsgröße Orientierung am stärksten ausgeprägt,
- die Gruppenbildung bei der FAST ist aufgrund des besseren Konvergenzverhaltens und der erhöhten Aussagekraft zu bevorzugen.

4.4 Sensitivitätsanalyse der Anwendungsbeispiele

4.4.1 Kinematische Höhenüberwachung

In Abschnitt 4.3 fiel die Entscheidung bei dem Flächenfilter auf die Sensitivitätsanalysemethode FAST mit möglichst hohem Stichprobenumfang. Um den Rechenaufwand nicht ansteigen zu lassen, wird die in Abschnitt 4.3 genutzte Stichprobenanzahl von 99 710 beibehalten. Die Stichprobengenerierung erfolgt, wie in Abschnitt 4.3, mit einer Gleichverteilung im Intervall von -3 bis $+3$ cm.

Im Gegensatz zur Sensitivitätsanalyse im Sinne der Ingenieurgeodäsie (vergleiche Abschnitt 3.2) soll hier kein deterministisches Deformationsmodell vorgegeben werden. Es wird aber davon ausgegangen, dass die zu erwartenden Deformationen mit der Geschwindigkeitsfläche (Abschnitt 4.2.2) modelliert werden können. Die Sensitivitätsanalyse beschäftigt sich mit dem Einfluss der Varianzen der gemessenen Höhen auf die Varianzen der einzelnen Parameter z_i .

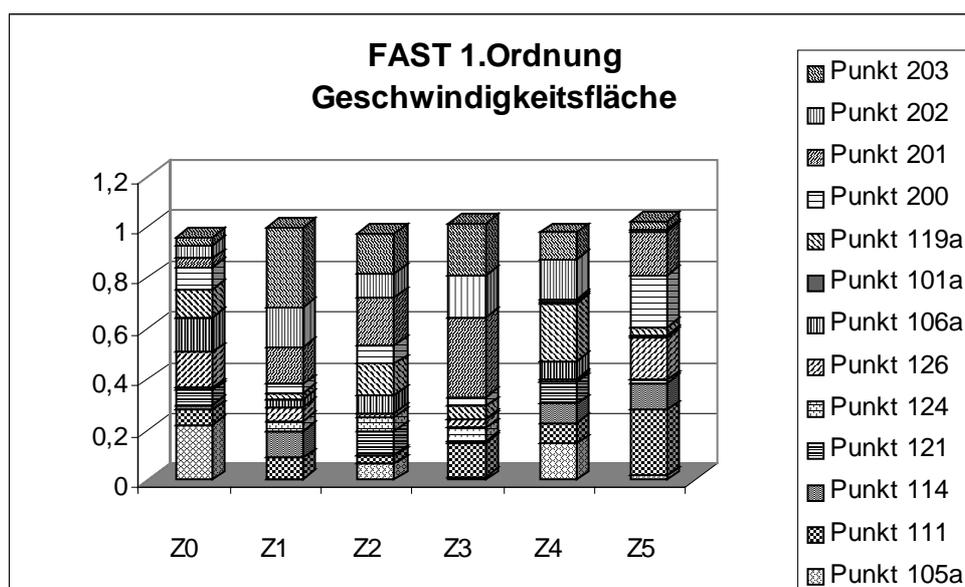


Abb. 28: FAST Indizes 1.Ordnung für die Parameter der Geschwindigkeitsfläche

Würde man alle 52 Eingangsgrößen (vergleiche 4.2.2) individuell berücksichtigen, so wäre der gesamte Analyseprozess nicht überschaubar und vor allem sehr schwer interpretierbar. Wichtig ist für den Analytisten vor allem, den Einfluss eines Punktes auf einen Parameter abzuschätzen. Aus diesem Grund werden die jeweils in 4 Epochen gemessenen Höhen eines Punktes zu einer Eingangsgrößengruppe zusammengezogen. Es verbleiben folglich 13 Eingangsgrößengruppen, deren Namensgebung anhand der jeweiligen Punktnummer erfolgt. Die FAST Indizes 1.Ordnung S_i^{FAST} und die Gesamteffekte S_{Ti}^{FAST} werden in den Abbildungen 28 und 29 präsentiert. Für ein additives Modell gilt dabei die folgende Beziehung

$$\sum_{i=1}^n S_i^{FAST} = \sum_{i=1}^n S_{Ti}^{FAST} = 1. \quad (4.4.1)$$

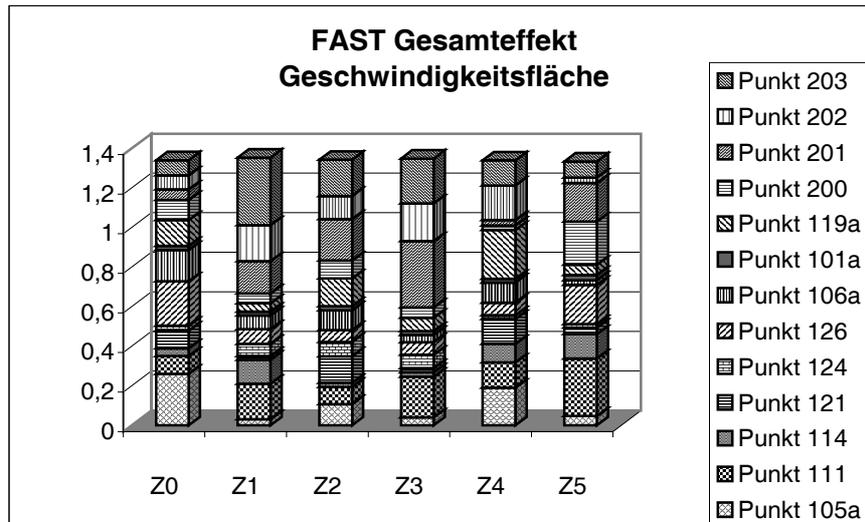


Abb. 29: FAST Gesamteffekte für die Parameter der Geschwindigkeitsfläche

Die Gegenüberstellung der Indizes 1.Ordnung und der Gesamteffekte deutet auf ein in geringen Maße nicht-additives Modell hin. Da die Abweichungen von der Additivität gering sind, können die Unterschiede jedoch auf Schwierigkeiten im Konvergenzverhalten zurückzuführen sein (vergleiche Abschnitt 4.3).

Kommt man nun zur Sensitivitätsanalyse im ursprünglichen Sinne der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse, so ist der Einfluss der Varianz der Eingangsgrößen auf die Varianz der Ausgangsgrößen zu analysieren. In diesem Anwendungsfall ist also der Einfluss der in 4 Epochen gemessenen Höhen auf die Parameter der Geschwindigkeitsfläche zu analysieren. Man erkennt, dass zum Einen nicht alle Punkte vergleichbare Einflüsse aufweisen und dass zum Anderen die Einflüsse nicht bei jedem Parameter auf dieselben gemessenen Höhen zurückzuführen sind. Tabelle 10 führt die numerischen Werte der größten Gesamteffekte für die einzelnen Einflussgrößengruppen in absteigender Reihenfolge auf.

Tab. 10: Gesamteffekte der gemessenen Höhen für die Parameter der Geschwindigkeitsfläche

	Z0	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5
$S_{Ti}^{FAST} > 0,2$	105a: 0,26 126: 0,22	203: 0,34	201: 0,21	201: 0,34 203: 0,23 111: 0,20	119a: 0,25	111: 0,29 200: 0,22
$S_{Ti}^{FAST} > 0,1$	106a: 0,16 119a: 0,13 200: 0,10	202: 0,18 111: 0,18 201: 0,16 114: 0,12	203: 0,18 119a: 0,14 121: 0,13 202: 0,12 105a: 0,11	202: 0,19	105a: 0,19 202: 0,17 203: 0,13 111: 0,13 121: 0,13 106a: 0,10	126: 0,19 201: 0,19 114: 0,12

Insgesamt fällt anhand der Tabelle 10 und der Abbildungen 28 und 29 auf, dass – bis auf für den Parameter z_0 – vor allem die Punkte an den Rändern des zu überwachenden Bereichs (vergleiche Abbildung 11 in Abschnitt 4.2.2) den größten Einfluss auf die Varianz der Parameter haben. Das ist nicht überraschend, da sie über die schwerpunktbezogenen Koordinaten in Gleichung (4.2.14) Einfluss auf die Parameter nehmen. Erwähnenswert ist, dass Punkte mit extremen X-Koordinaten tendenziell vor allem die Varianzen des Parameters z_1 und mit Abstrichen die des Parameters z_4 beeinflussen. Dagegen werden die nur von Y-Koordinaten beeinflussten Varianzen der Parameter z_2 und z_5 mittels der Punkte mit extremen Y-Koordinaten gestützt. Ein eindeutiger Zusammenhang kann jedoch nicht festgestellt werden. Die sowohl von X- als auch von Y-Koordinaten beeinflusste Varianz des Parameters z_3 wird von vier Punkten (201, 203, 111 und 202) wesentlich beeinflusst (Tabelle 10), die mit Ausnahme des Punktes 111, der den Punkte 200 ersetzt, die Eckpunkte des Untersuchungsgebietes darstellen. Bei dem nicht von den Koordinaten abhängigen Parameter z_0 sind die Unterschiede der Einflüsse der Eingangsgrößen geringer. Den größten Einfluss haben hier Punkte, die in der Nähe des Schwerpunktes der Koordinaten liegen.

Um die Genauigkeit der Bestimmung der Geschwindigkeitsflächenparameter zu steigern, sind die Höhen der Punkte 105a, 111, 119a, 126, 201 und 203 genauer zu bestimmen, da diese in Tabelle 10 die höchsten Sensitivitätsmaße zugewiesen bekommen.

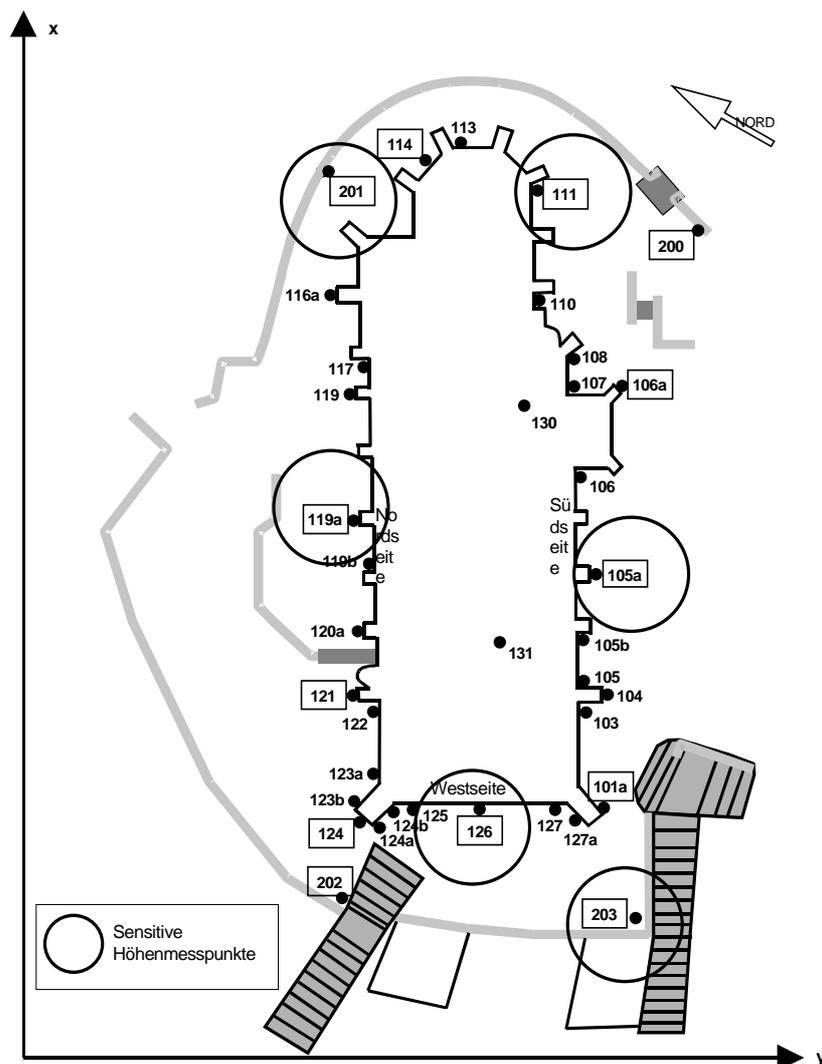


Abb. 30: Stiftskirche Herrenberg und sensitive Höhenmesspunkte

4.4.2 Multisensorsystem zur Fahrzeugortung

Nachdem in Abschnitt 4.3 gezeigt wurde, dass zur Sensitivitätsanalyse zur Fahrzeugortung die FAST Methode mit Gruppenbildung zu priorisieren ist, wird hier nur diese Methode betrachtet. Allerdings werden hier vor allem die Gesamteffekte untersucht, da – wie gleichfalls in 4.3 erkannt wurde – das Modell nicht-additive Eigenschaften aufweist.

Im Gegensatz zum rein zufälligen Streuen der Messwerte innerhalb der vorgegebenen Intervalle in Abschnitt 4.3 werden in diesem Abschnitt verschiedene Fahrscenarien simuliert. Die Szenarien werden in die Klassen Geradeausfahrten und Kurvenfahrten eingeteilt; eine weitere Unterteilung erfolgt bezüglich der Geschwindigkeit beziehungsweise der Beschleunigung. Tabellen 11 und 12 geben systematisierende Übersichten.

Tabelle 11 stellt für Geradeausfahrten verschiedene Szenarien bezüglich konstanter Geschwindigkeit, konstanter Beschleunigung beziehungsweise konstantem Abbremsen sowie Wechsel zwischen den genannten Szenarien dar. Für die Kurvenfahrten in Tabelle 12 wird durchgängig von einer konstanten Geschwindigkeit, folglich einer stationären Kreisfahrt, ausgegangen. Es werden unterschiedliche Radien und unterschiedliche Geschwindigkeiten simuliert, um Fahrten mit gleichen Radien, aber verschiedenen Geschwindigkeiten, sowie mit gleichen Geschwindigkeiten und unterschiedlichen Radien gegenüberstellen zu können. Zusätzlich werden Fahrscenarien simuliert, die der maximal möglichen Zentripetalbeschleunigung sehr nahe kommen (vergleiche (4.2.30) und (4.2.31)). Für einige Radien kann dieser Grenzwert nicht erreicht werden, da die hierfür benötigte Geschwindigkeit vom Kraftfahrzeug nicht gefahren werden kann.

Tab. 11: Überblick über die Geradeausfahrten

Bezeichnung	Charakterisierung	Geschwindigkeit	Beschleunigung
A1	konstante Geschwindigkeit	5,6 m / s	-
A2	konstante Geschwindigkeit	13,9 m / s	-
A3	konstante Geschwindigkeit	27,8 m / s	-
B1	konstante Beschleunigung	0 m / s in Ep. 1	5 m / s ²
B2	konstante Beschleunigung	0 m / s in Ep. 1	10 m / s ²
B3	konstante Beschleunigung	0 m / s in Ep. 1	25 m / s ²
C1	konstantes Abbremsen	0 m / s in Ep. 6	- 5 m / s ²
C2	konstantes Abbremsen	0 m / s in Ep. 6	- 10 m / s ²
C3	konstantes Abbremsen	0 m / s in Ep. 6	- 25 m / s ²
D1	Wechsel von Beschleunigung zur konstanten Geschwindigkeit	15 m / s ab Ep. 3	25 m / s ² bis Ep. 3
D2	Wechsel vom Abbremsen zur konstanten Geschwindigkeit	15 m / s ab Ep. 3	- 25 m / s ² bis Ep. 3

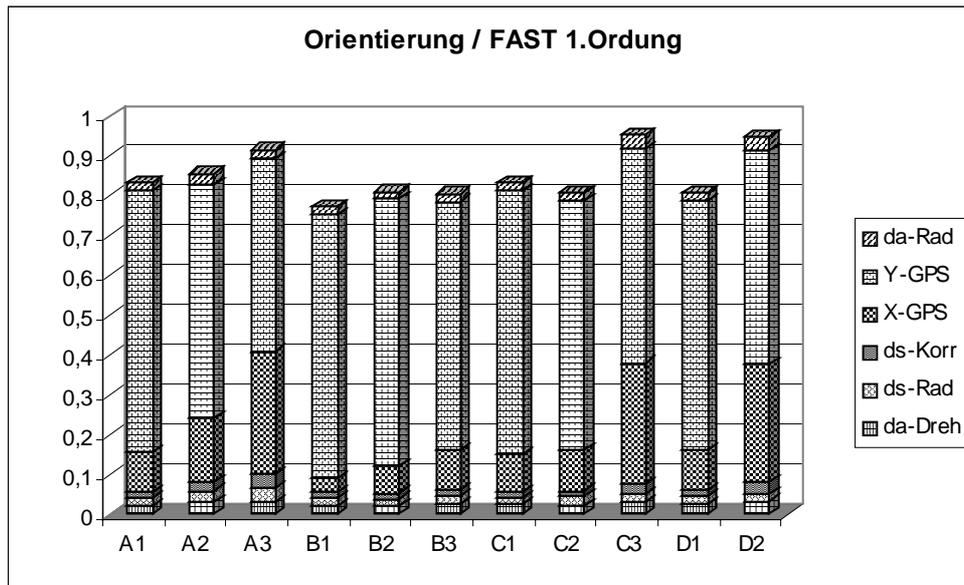


Abb. 31: FAST Indizes 1.Ordnung für die Orientierung; Geradeausfahrten

Die Gesamteffekte werden für die Beobachtungsgruppen (vergleiche Abschnitt 4.3) dargestellt, da es für den Analysten vom vorrangigen Interesse ist, welche Messgrößen den größten Einfluss auf die Ergebnisse haben. Der Einfluss einzelner Epochen, der mit Hilfe der Epochengruppen nachvollzogen werden kann, ist von geringerer Bedeutung und wird daher nicht dargestellt.

Nachfolgend werden die einzelnen Ausgangsgrößen in der Reihenfolge Orientierung, Geschwindigkeit, Y-Koordinate, X-Koordinate und Zentripetalbeschleunigung einzeln analysiert. Dabei ist die Zentripetalbeschleunigung nicht im Zustandsvektor enthalten, sondern wird aufgrund ihrer Bedeutung für die Schätzung fahrdynamischer Parameter aus den Ausgangsgrößen ermittelt.

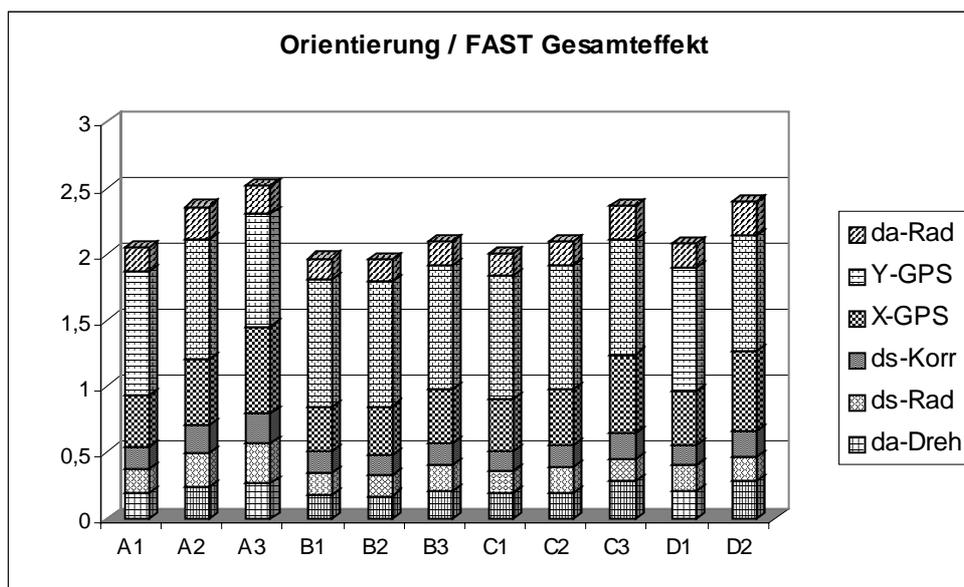


Abb. 32: FAST Gesamteffekte für die Orientierung; Geradeausfahrten

Abbildungen 32 und 33 zeigen die FAST Gesamteffekte, die zur quantitativen Beurteilung von nicht-additiven Modellen heranzuziehen sind, für die **Zustandsgröße Orientierung**. Die Summe der Gesamteffekte ist für jede Fahrvariante deutlich von Eins verschieden. Diese Tatsache erlaubt den Schluss auf ein deutlich nicht-additives Modell.

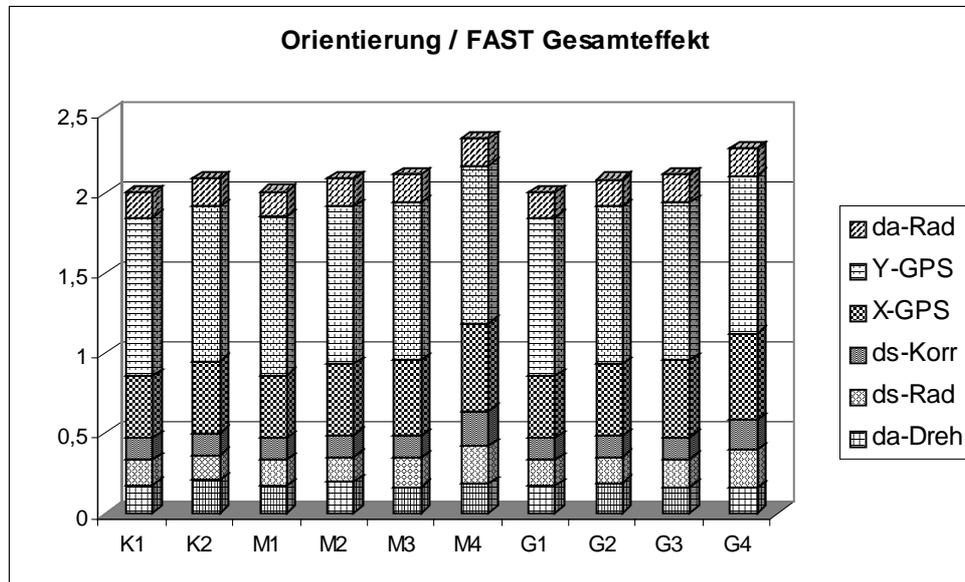


Abb. 33: FAST Gesamteffekte für die Orientierung; Kurvenfahrten

Bei erhöhter Geschwindigkeit erhöht sich bei allen Fahrvarianten die Abweichung von der Additivität. Parallel erhöhen sich die Anteile aller Eingangsgrößen bis auf den der GPS Y-Koordinaten. Den größten Einfluss der Eingangsgrößengruppen weisen die GPS Y-Koordinaten auf, den zweitgrößten Einfluss die GPS X-Koordinaten. Die Anteile der GPS X- und Y-Koordinaten sind dabei von der Anfangsorientierung abhängig. Die Einflüsse der mittels Radsensoren und Drehsensoren gemessenen Orientierungsänderungen auf die Zustandsgröße Orientierung sind gering; das selbe gilt für die Streckeninkremente. Dabei werden den jeweils redundanten Messgrößen fast identischen Sensitivitätsmaße zugewiesen.

Der Kurvenradius hat keinen Einfluss auf die Sensitivitätsmaße. Dagegen steigen die Summe der Gesamteffekte und der Einfluss der GPS X-Koordinate sowohl bei erhöhter Beschleunigung als auch bei verstärktem Abbremsen an. Im Vergleich der Fahrvarianten D1 (Wechsel von Beschleunigung zu konstanter Geschwindigkeit) und D2 (Wechsel vom Abbremsen zu konstanter Geschwindigkeit), zeigt sich, dass D2 höhere Werte als D1 aufweist. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass in D2 von einer hohen Geschwindigkeit abgebremst wird und in D1 von Null auf die selbe Zielgeschwindigkeit beschleunigt wird, kann davon ausgegangen werden, dass die für die Gesamtfahrt durchschnittliche Geschwindigkeit bei der Berechnung der Sensitivitätsmaße zu berücksichtigen ist.

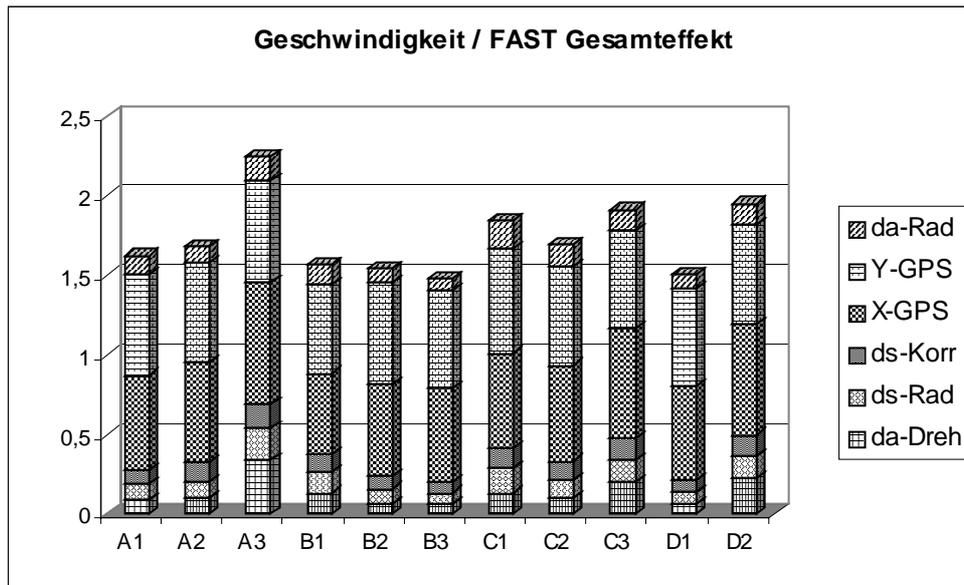


Abb. 34: FAST Gesamteffekte für die Geschwindigkeit; Geradeausfahrten

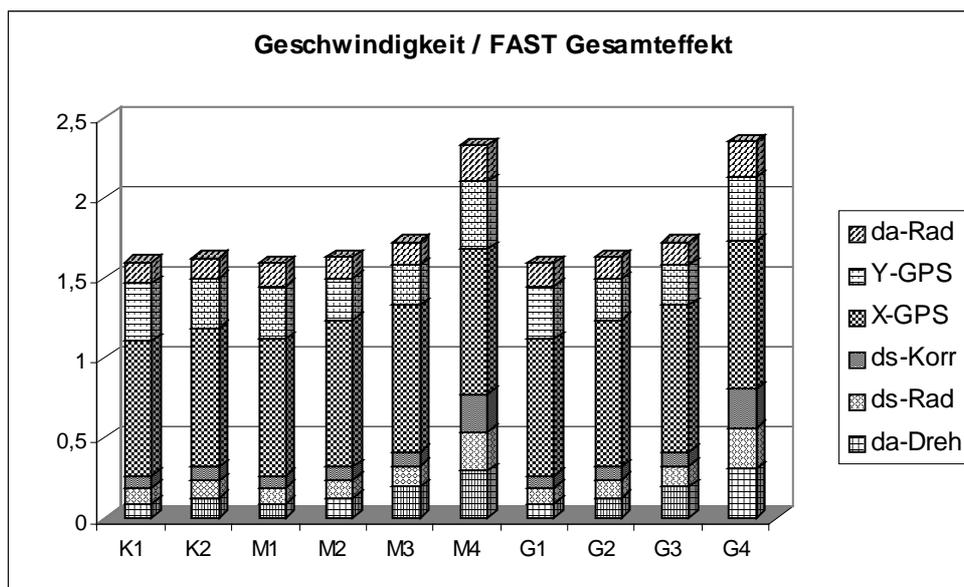


Abb. 35: FAST Gesamteffekte für die Geschwindigkeit; Kurvenfahrten

Auch bei der in den Abbildungen 34 und 35 präsentierten **Zustandsgröße Geschwindigkeit** bleibt die Abhängigkeit der Nicht-Additivität von der Geschwindigkeit bestehen. Erst bei großen Geschwindigkeiten werden – unabhängig von dem Radius – die Abweichungen von der Additivität größer. Das nicht-additive Verhalten fällt hier aber deutlich geringer aus als bei der Zustandsgröße Orientierung. Die Varianz der Geschwindigkeit wird bei allen Fahrten vor allem durch die gemessenen GPS Koordinaten bestimmt; dabei ist deren Einflussverhältnis für Fahrten ohne Orientierungsänderung mit 50:50 anzugeben. Dieses ist mit der Simulation der Geradeausfahrt mit einem Richtungswinkel von 50 gon zu begründen. Kurvenfahrten führen dagegen zu einem deutlich überwiegenen Anteil der GPS X-Koordinaten. Die anderen Messgrößen gewinnen bei hohen Geschwindigkeiten an Einfluss. Die Geradeausfahrten lassen bezüglich Beschleunigung und Abbremsen keine eindeutige Interpretation zu.

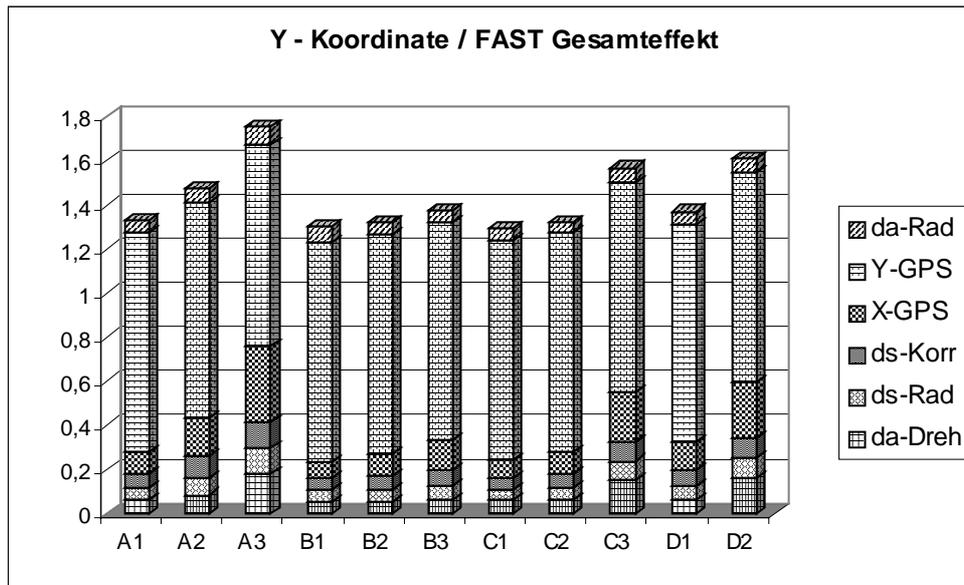


Abb. 36: FAST Gesamteffekte für die Y - Koordinate; Geradeausfahrten

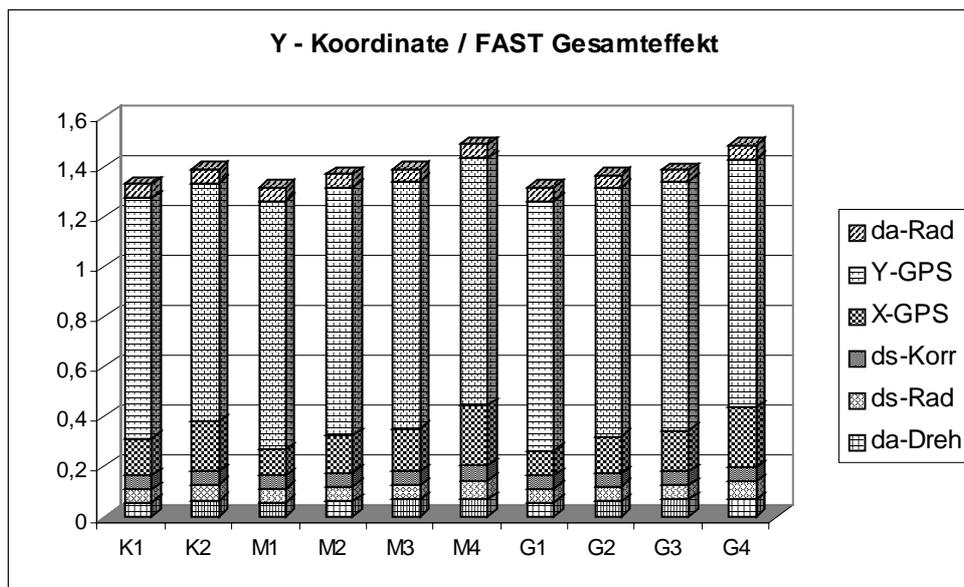


Abb. 37: FAST Gesamteffekte für die Y - Koordinate; Kurvenfahrten

Für die **Zustandsgröße Y - Koordinate** ist die Abweichung von der Additivität noch geringer als für die Zustandsgröße Geschwindigkeit. Wie in den Abbildungen 36 und 37 zu erkennen ist, erreichen die Gesamteffekte Werte zwischen 1,2 und 1,8 im Gegensatz zu Werten bis zu 2,5 bei der Geschwindigkeit und der Orientierung. Es zeigt sich außerdem der deutlich überwiegende Einfluss der gemessenen GPS Y-Koordinaten; er erreicht etwa 80 % der Gesamtvarianz. Alle anderen Eingangsgrößen haben nur einen geringen Einfluss. Die Geschwindigkeit erhöht im Wesentlichen den Einfluss der gemessenen GPS X-Koordinaten sowie die Nicht-Additivität des Modells. Der Kurvenradius ist wiederum ohne Einfluss. Bezüglich des Einflusses der durchschnittlichen Fahrgeschwindigkeit gilt das zur Zustandsgröße Orientierung Geschriebene.

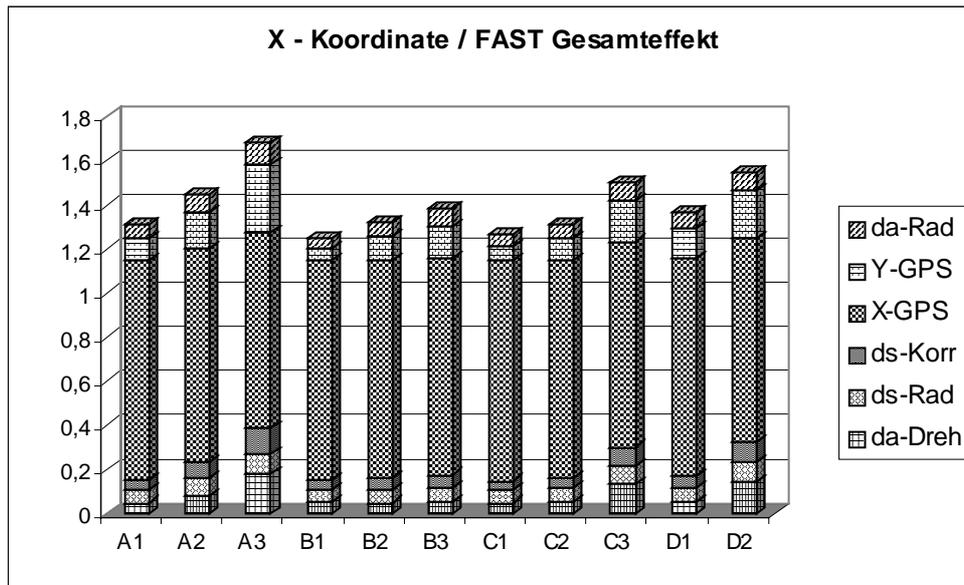


Abb. 38: FAST Gesamteffekte für die X - Koordinate; Geradeausfahrten

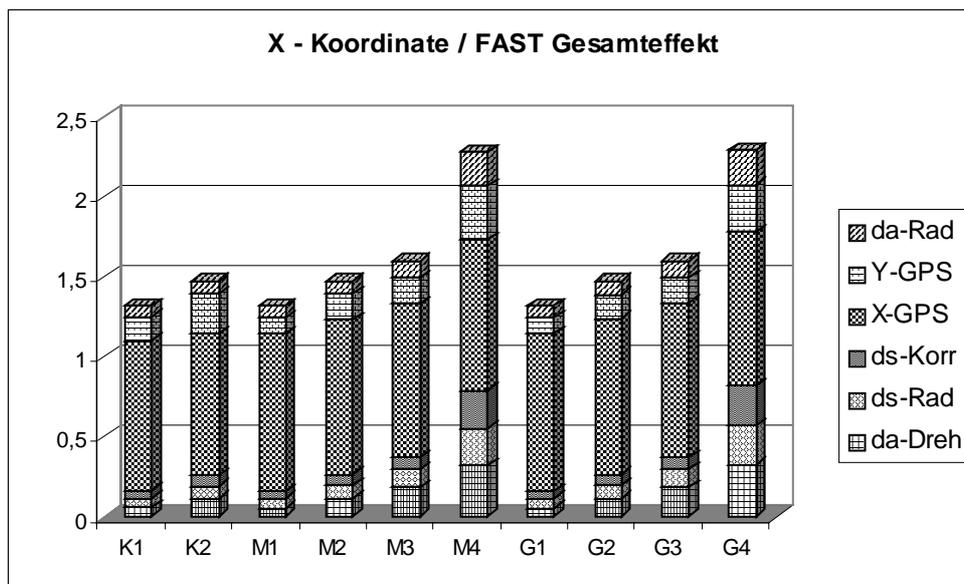


Abb. 39: FAST Gesamteffekte für die X - Koordinate; Kurvenfahrten

Für die in den Abbildungen 38 und 39 gezeigte **Zustandsgröße X - Koordinate** lässt sich die Interpretation der Geradeausfahrten direkt von den Ausführungen zur Zustandsgröße Y - Koordinate übertragen. Die X-Koordinate wird zum weit überwiegenden Anteil von den gemessenen GPS X-Koordinaten beeinflusst. In den Kurvenfahrten erreicht die Summe der Sensitivitätsgesamteffekte jedoch Werte bis zu 2,3. Die Gesamteffekte gleichen mehr dem nicht-additiven Verhalten für die Zustandsgröße Geschwindigkeit als dem der Zustandsgröße Y-Koordinate. Dieses ist auf die modellbedingte Abhängigkeit von Geschwindigkeit und X-Koordinate zurückzuführen, die sich bereits in den Ausführungen zur Zustandsgröße Geschwindigkeit andeutete. Das Ansteigen der Effekte höherer Ordnung ist vor allem auf die größeren Gesamteffekte der Koppelnavigationssensoren, die die Orientierungsänderungen und die Streckeninkremente erfassen, zurück-

zuführen. Bezüglich Geradeausfahrten und dem Einfluss von Radius und Geschwindigkeit bei Kurvenfahrten gelten die Ausführungen zur Zustandsgröße Orientierung.

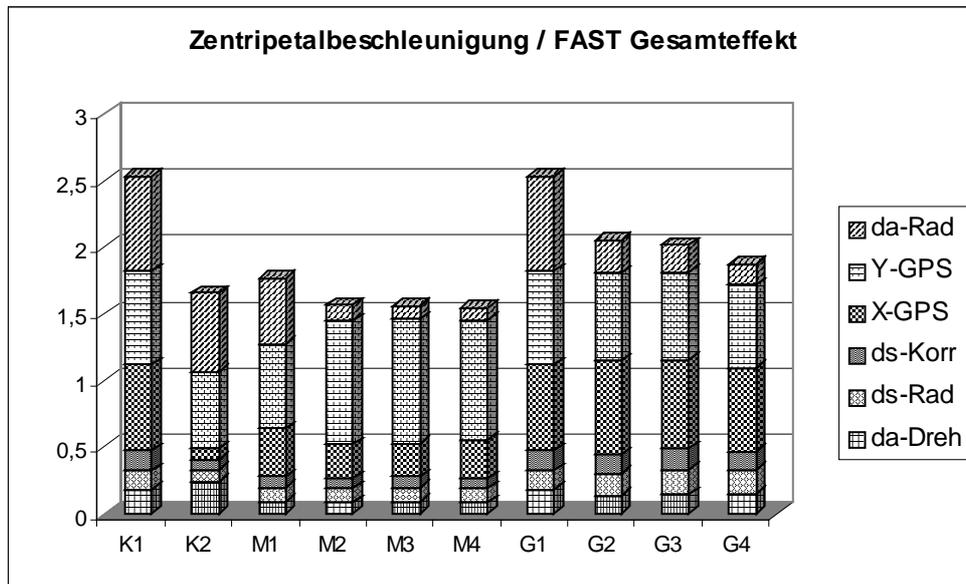


Abb. 40 : FAST Gesamteffekte für die Zentripetalbeschleunigung

Für die **Zentripetalbeschleunigung** können nur die Kurvenfahrten betrachtet werden, da sie sich für die Geradeausfahrten zu Null ergibt (vergleiche (4.2.30)). Hier zeigt sich die größte Abweichung von der Additivität bei geringen Geschwindigkeiten. Der Einfluss der Streckeninkremente ds-Rad und ds-Korr und des Drehratensensors da-Dreh ist für alle Varianten ohne Bedeutung. Beherrschend sind die GPS Y-Koordinaten.

Werden die Radien größer oder die Geschwindigkeit geringer, erhalten die GPS X-Koordinaten vergrößerten Einfluss. Deren Anteil erreicht im Extremfall die selben Werte wie die GPS Y-Koordinaten. Bei kleinen Radien und geringer Geschwindigkeit gilt dieser Zusammenhang nicht. Für geringe Geschwindigkeiten wächst zusätzlich der Anteil der Orientierungsänderungen aus Radsensormessungen da-Rad deutlich und erreicht den Anteil der GPS Y- und X-Koordinaten. Die im Gegensatz zu den Zustandsgrößen stark veränderten Einflüsse lassen sich funktional mit Gleichung (4.2.30) erklären.

Das komplexe Bild der verschiedenen Einflüsse der Eingangsgrößen auf die 5 Ausgangsgrößen ist nicht klar und eindeutig quantifizierbar. In Tabellen 13 und 14 werden die gewonnenen Erkenntnisse und aufgetretenen Tendenzen zusammengefasst. Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

- + steht für eine gleichläufige Tendenz,
- steht für eine gegenläufige Tendenz und
- +/- für eine uneinheitliche Tendenz;
- = bedeutet keinen Einfluss.

Tab. 13: Additivität für die einzelnen Ausgangsgrößen für das Trajektorienfilter

	\hat{Y}_k	\hat{X}_k	$\hat{\alpha}_k$	\hat{v}_k	a_z
$\sum S_{Ti}^{FAST}$	1,29-1,75	1,25-2,29	1,96-2,52	1,48-2,25	1,56-2,53
Geschw. höher	+	+	+	+/-	-
Radius größer	=	=	=	=	+

Bezüglich der Additivität des Modells können anhand Tabelle 13 unter Zuhilfenahme des Kriteriums $\sum S_{Ti}^{FAST}$ für die Additivität (vergleiche Abschnitt 2.4.6) die folgenden Kernaussagen getroffen werden:

- das Modell ist für alle Ausgangsgrößen nicht-additiv,
- für die Ausgangsgröße \hat{Y}_k ist die Abweichung von der Additivität am geringsten,
- für die Ausgangsgröße $\hat{\alpha}_k$ ist die Nicht-Additivität am stärksten ausgeprägt,
- eine erhöhte Geschwindigkeit erhöht für alle Zustandsgrößen die Abweichung von der Additivität,
- ein vergrößerter Radius hat keinen Einfluss auf die Zustandsgrößen,
- die erhöhte Geschwindigkeit vermindert für die Zentripetalbeschleunigung die Abweichung von der Additivität,
- ein vergrößerter Radius erhöht für die Zentripetalbeschleunigung die Abweichung von der Additivität.

Tab. 14: FAST Gesamteffekte für das Trajektorienfilter

	\hat{Y}_k	\hat{X}_k	$\hat{\alpha}_k$	\hat{v}_k	a_z
Primäres S_{Ti}^{FAST}	Y-GPS	X-GPS	Y-GPS	X-GPS	Y-GPS
Wertebereich (primär)	0,91-1,00	0,88-1,00	0,87-0,99	0,56-0,92	0,57-0,94
Sekundäre S_{Ti}^{FAST}	X-GPS	alle	X-GPS	Y-GPS	X-GPS α -Rad
Wertebereich(e) (sek.)	0,35-0,07	0,33-0,05	0,66-0,34	0,66-0,25	0,71-0,09 0,71-0,09
Geschw. höher	+	+	+	+	-
Radius größer	=	=	=	=	+/-

Bezüglich des Anteils der Eingangsgrößen können die vorstehenden Abbildungen und Tabelle 14 wie folgt zusammengefasst werden:

- für alle Ausgangsgrößen haben die Eingangsgrößen Y-GPS oder X-GPS den primären Anteil,
- für alle Ausgangsgrößen gilt dieses auch für die sekundären Ausgangsgrößen (in diesem Fall tritt die jeweils nicht primäre GPS-Koordinate an die sekundäre Stelle),
- für die Ausgangsgröße \hat{X}_k können alle Eingangsgrößen als sekundäre Eingangsgrößen aufgefasst werden,
- für die Ausgangsgröße Zentripetalbeschleunigung kann da-Rad als zusätzliche sekundäre Eingangsgröße identifiziert werden,
- der Einfluss der primären Eingangsgrößen verändert sich für die Fahrscenarien nur unwesentlich, die der Sekundären deutlich,
- der Einfluss der sekundären Eingangsgrößen wird bei erhöhter Geschwindigkeit für alle Zustandsgrößen erhöht; für die Zentripetalbeschleunigung vermindert,
- der Radius ist für die Zustandsgrößen ohne Einfluss.

Die gemessenen GPS Y- und X-Koordinaten beeinflussen alle Ausgangsgrößen am deutlichsten. **Eine Verbesserung der Genauigkeit bei der Erfassung der GPS Koordinaten würde folglich die bei weitem größte Verbesserung zur Optimierung der Multisensorortung hinsichtlich der Varianz der Ausgangsgrößen bedingen.** Das gilt insbesondere unter dem Aspekt, dass für eine Trajektorie die Koordinaten die entscheidenden Ausgangsgrößen sind und die Varianzen der Koordinaten sich zu etwa 80 % aus der Variation der gemessenen GPS Koordinaten zusammensetzen.

Diese Schlussfolgerung sollte jedoch nicht missinterpretiert werden, da das im Rahmen dieses Anwendungsbeispiels simulierte Messszenario davon ausgeht, dass GPS durchgängig verfügbar ist, und zum Anderen nur die Varianzen der Zustandsgrößen des Trajektoreinfilters betrachtet werden.

Entscheidende Kriterien zu Bewertung der Qualität von Multisensorsystemen sind neben der Genauigkeit unter anderem die Verfügbarkeit und die Zuverlässigkeit der Positionsbestimmung. Die Erhöhung dieser Qualitätskriterien gelingt nur in sehr geringem Maße mittels der erhöhten Erfassungsgenauigkeit für die GPS-Koordinaten. Hiefür ist die Stützung der GPS-Positionsbestimmung mit Hilfe von Koppelortungsensoren oder Map-Matching Algorithmen von größerer Bedeutung (RAMM u. SCHWIEGER 2004 und CZOMMER 2001).

5 Zusammenfassung und Ausblick

Vorangestellt sei hier die Bemerkung, dass die varianz-basierten Sensitivitätsmaße auf simulierten Zufallszahlen aufbauen und als empirisch bestimmte Näherungen aufzufassen sind. Sie sind als Alternative zu und nicht als Ersatz für analytisch bestimmte Sensitivitätsmaße zu betrachten.

Zur Methodik der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse

Innerhalb dieser Arbeit werden die verschiedenen stichproben-basierten Sensitivitätsanalysemethoden systematisch aufgearbeitet und angewandt. Es konnte nachgewiesen werden, dass

- die normierten Regressionskoeffizienten lineare Modelle,
- die normierten Rangregressionskoeffizienten monotone und zugleich additive Modelle und
- die varianz-basierten Sensitivitätsmaße 1.Ordnung additive Modelle identifizieren.

Nur die Gesamteffekte der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse ermöglichen unabhängig von den Modelleigenschaften quantitative Sensitivitätsaussagen. Sie können folglich genutzt werden, um die Modelleigenschaften eines komplexen, analytisch nicht beherrschbaren Modells oder eines unbekanntes Modells, in der Regel ein ausführbarer aber unbekannter Computercode, zu erkennen und dieses Modell zu analysieren.

Konvergenzverhalten der varianz-basierten Sensitivitätsmaße

Im Rahmen dieser Arbeit konnte nachgewiesen werden, dass die varianz-basierten Sensitivitätsmaße zum Teil erst bei großen Stichproben aussagekräftige Resultate ergeben. Die Verwendung kleiner Stichprobenumfänge kann zu grob falschen Ergebnissen führen. Es sind folglich immer Analysen mit mehreren Stichprobenumfängen umzusetzen, damit das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang zu erkennen ist. Das Konvergenzverhalten hängt von den Eigenschaften des jeweiligen zu analysierenden Modells sowie insbesondere der Anzahl der Eingangsgrößen ab. Da der Hauptvorteil der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse gerade diese Modellunabhängigkeit darstellt, wird dieser Vorteil hierdurch relativiert. Diesem Mangel ist aber durch die bereits zuvor beschriebene Beobachtung des Konvergenzverhaltens und der darauf aufbauenden Festlegung des Stichprobenumfangs abzuwehren, da auf diesem Weg Analysefehler vermieden werden können. Die varianz-basierten Sensitivitätsmaße erfordern daher häufig einen großen Stichprobenumfang liefern aber dann numerisch stabile Ergebnisse.

Einsatz der varianz-basierten Sensitivitätsanalyse für kinematische Modelle

Die Nützlichkeit der präsentierten Sensitivitätsmaße für die Ingenieurgeodäsie und hier insbesondere für die Analyse von kinematischen Modellen konnte anhand von zwei Anwendungen gezeigt werden. Die Identifikation der Modelleigenschaften ist eine der Aufgaben der globalen varianz-basierten Sensitivitätsanalyse, die für beide kinematische Anwendungsbeispiele gelöst wird. Die zweite gleichfalls gelöste Aufgabe der Sensitivitätsanalyse ist die Identifikation von wesentlichen Eingangsgrößen.

Ergebnisse für die Anwendung „Kinematische Höhenüberwachung“

Das erste Beispiel beschäftigt sich mit der Höhenüberwachung der Stiftskirche Herrenberg. Das Bewegungsverhalten wird mit Hilfe einer polynomialen Fläche 2.Ordnung modelliert. Konkret wird der Einfluss der einzelnen Höhen auf die Schätzung der Parameter dieser Geschwindigkeitsfläche analysiert. Die varianz-basierte Sensitivitätsanalyse führte zu den folgenden Ergebnissen:

- Identifikation von Höhenmesspunkten, die mit erhöhten Genauigkeitsansprüchen zu beobachten sind,
- Bestätigung des linearen Modellansatzes,
- korrekte Ergebnisse bei sehr großem Stichprobenumfang.

Ergebnisse für die Anwendung „Multisensorsystem zur Fahrzeugortung“

Im zweiten Beispiel ist die Bestimmung einer Fahrzeugtrajektorie unter Nutzung eines kinematischen KALMAN-Filters Gegenstand der Untersuchungen. Das Ziel der Analyse ist die Identifikation der wichtigsten Messgrößen für die die Fahrzeugtrajektorie beschreibenden Zustandsgrößen. Die varianz-basierte Sensitivitätsanalyse zeigte die nachfolgenden Resultate:

- Varianz der mittels GPS bestimmten relativen Koordinaten hat den größten Einfluss auf die Varianz der Zustandsgrößen,
- Abhängigkeit der Sensitivitätsmaße von der gefahrenen Geschwindigkeit und nicht von der Kurvigkeit der Trajektorie,
- Identifikation des nicht-linearen und nicht-additiven Modellcharakters,
- korrekte Ergebnisse bei hohem Stichprobenumfang.

Ausblick „Multisensorsystem zur Fahrzeugortung“

Für die Zukunft sollten weitere varianz-basierte Sensitivitätsanalysen zur Konstruktion eines optimalen Filters und eines optimalen Multisensorsystems zur Trajektorienbestimmung umgesetzt werden. Hier sind Modellvariationen, die andere Messgrößen und einen veränderten Zustandsgrößenvektor umfassen, zu analysieren. Diese Untersuchungen bleiben späteren Arbeiten vorbehalten.

Ausblick zu den varianz-basierten Sensitivitätsanalysemethoden

Auf der methodischen Seite ist die varianz-basierte Sensitivitätsanalyse für korrelierte Eingangsgrößen bisher nicht im strengen Sinne gelöst. Ein erster Lösungsvorschlag wurde im Rahmen dieser Arbeit aufgeführt. Es wird zukünftigen Arbeiten vorbehalten sein, diesen weiterzuentwickeln und auf zu analysierende Modelle anzuwenden, da gerade in der Ingenieurgeodäsie sowie in der Mess- und Ortungstechnik häufig korrelierte Eingangsgrößen die Realität am besten abbilden.

6 Literatur

- ANTONOPOULOS, A., NIEMEIER, W. (1983): Formulierung und Test impliziter linearer Hypothesen bei der geodätischen Deformationsanalyse. Schriftenreihe des Studiengangs Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München, Nr. 9, S. 13-28.
- AUSSEMS, T. (1999): Positionsschätzung von Landfahrzeugen mittels KALMAN-Filterung aus Satelliten- und Koppelnavigationsbeobachtungen. Veröffentlichungen des Geodätischen Instituts der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Nr. 55.
- BAARDA, W. (1968): A testing procedure for use in geodetic networks. Publication on geodesy, Netherland Geodetic Commission, Vol. 2, No. 5.
- BARTOLD, F.J., STEIN, E. (1994): Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien bei großen Deformationen. In: Festschrift Prof. Dr.-Ing. H. G. Natke, Curt-Risch-Institut für Dynamik, Schall- und Meßtechnik, Hannover, S. 137-171.
- BENNING, W. (2002): Statistik in Geodäsie, Geo-information und Bauwesen. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.
- BRATLEY, P., FOX, B.L. (1988): Algorithm 659 implementing Sobol's quasirandom sequence generator. ACM Trans. Math. Software, Vol. 14, S. 88-100.
- BRAYTON, K.B., SPENCE, R. (1980): Sensitivity and Optimization. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam – Oxford – New York.
- CAMPOLONGO, F., SALTELLI, A. (2000): Comparing different sensitivity analysis methods on a chemical reactions model. In: SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E.M.: Sensitivity Analysis. John Wiley and Sons, Chichester.
- CAMPOLONGO, F., SALTELLI, A., SORENSEN, T., TARANTOLA, S. (2000a): Hitchhiker's Guide to Sensitivity Analysis. In: SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E.M.: Sensitivity Analysis. John Wiley and Sons, Chichester.
- CAMPOLONGO, F., KLEIJNEN, J., ANDRES, T. (2000b): Screening Methods. In: SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E.M.: Sensitivity Analysis. John Wiley and Sons, Chichester.
- CAWLFIELD, J. D. (2000): Reliability Algorithms: FORM and SORM Methods. In: SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E.M.: Sensitivity Analysis. John Wiley and Sons, Chichester.
- CHAN, K., TARANTOLA, S., SALTELLI, A., SOBOL, I.M. (2000): Variance-based methods. In: SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E.M.: Sensitivity Analysis. John Wiley and Sons, Chichester.
- CHATTERJEE, S., HADI, A.S. (1988): Sensitivity Analysis in linear regression. John Wiley & Sons, New York.
- CRAMER, H. (1946): Mathematical models of statistics. Princeton Mathematical Series. No. 9.
- CROSETTO, M., TARANTOLA, S. (2001): Uncertainty and sensitivity analysis: tools for GIS-based model implementation. International Journal of Geographical Information Science, Vol. 15, No. 5, S. 415-437.
- CUKIER, R.I., FORTUIN, C.M., SHULER, K.E., PETSCHKE, A.G., SCHAIBLY, J.H. (1973): Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. Part I: theory. Journal of chemical physics, Vol. 59, No. 8, S. 3873-3878.
- CUKIER, R.I., SCHAIBLY, J.H., SHULER, K.E. (1975): Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. Part III: Analysis of the approximations. Journal of chemical physics, Vol. 63, No. 3, S. 1140-1149.
- CUKIER, R.I., LEVINE, H.B., SHULER, K.E. (1978): Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems. Journal of Computational Physics, Vol. 26, S. 1-42.
- CZOMMER, R. (2001): Leistungsfähigkeit fahrzeugautonomer Ortungsverfahren auf der Basis von Map-Matching-Techniken. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 535, München.
- DEIF, A. (1986): Sensitivity in Linear Systems. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- DING, X., COLEMAN, R. (1996a): Sensitivity analysis of Gauss-Markov models. Journal of Geodesy, Vol. 70, S. 480-488.
- DING, X., COLEMAN, R. (1996b): Multiple outlier detection by evaluating redundancy contributions of observations. Journal of Geodesy, Vol. 70, S. 489-498.
- DRAPER, D., SALTELLI, A., TARANTOLA, S., PRADO, P. (2000): Scenario and parametric sensitivity and uncertainty analysis in nuclear waste disposal risk assesment: the case of GESAMAC. In: SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E.M.: Sensitivity Analysis. John Wiley and Sons, Chichester.
- EICHHORN, A. (2005): Ein Beitrag zur parametrischen Identifikation von dynamischen Strukturmodellen mit Methoden der adaptiven KALMAN Filterung. Dissertation, Universität Stuttgart (in Druck).
- ERMAKOW, S. M. (1975): Die Monte-Carlo-Methode und verwandte Fragen. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien.
- FERSON, S., HAJAGOS, J., TUCKER, W. T. (2004): Probability bounds analysis is a global sensitivity analysis. In: Proceedings of the Fourth international Symposium on Sensitivity Analysis of Model Output. 08.-11. März 2004 in Santa Fe, USA.

- FISHMAN, G.S. (1995): Monte Carlo: Concepts, algorithms and applications. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- FÖRSTNER, W. (1979): Konvergenzbeschleunigung bei der a posteriori Varianzschätzung. Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 149-156.
- GAUSS, C. F. (1809): Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Hamburg.
- GELB, A. (Hrsg., 1974): Applied optimal estimation. The M.I.T. Press, Cambridge, USA.
- GLÄSER, A. (2002): Bericht zu den Höhen-Kontrollmessungen an der Stiftskirche Herrenberg, Stuttgart (unveröffentlicht).
- GLÄSER, A., SCHOLLMAYER, R. (2004): Messwerterfassung und -synchronisation in Multisensorsystemen. In: SCHWIEGER, V., FOPPE, K. (Red., 2004): Kinematische Messmethoden – Vermessung in Bewegung, DVW Schriftenreihe, Band 45, Wißner Verlag, Augsburg.
- GRIMHARDT, H. (1986): Sensitivitätsanalyse Geodätischer Netze. Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 34-40.
- HECK, B. (1986): Sensitivitätsanalyse geodätischer Deformationsnetze. Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 169-181.
- HECK, B., JÄGER, R. (1986): Zur Sensitivität von Strecken- und Streckenverhältnismessungen in Deformationsnetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 459-468.
- HELTON, J. C. (2004): Sampling-based methods for uncertainty and sensitivity analysis. In Proceedings of the Fourth international Symposium on Sensitivity Analysis of Model Output. 08.-11. März 2004 in Santa Fe, USA.
- HELTON, J.C., DAVIS, F.J. (2000): Sampling-based Methods. In: SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E.M.: Sensitivity Analysis. John Wiley and Sons, Chichester.
- HEUNECKE, O. (1995): Zur Identifikation und Verifikation von Deformationsprozessen mittels adaptiver KALMAN-Filterung. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen, Nr. 208, Universität Hannover.
- HOFMANN-WELLENHOF, B., Legat, K., Wieser, M. (2003): Navigation – principles of positioning and guidance. Springer Verlag, Wien – New York.
- IMAN, R. L., CONOVER, W. J. (1979): The use of the rank transform in regression. Technometrics, Vol. 21, No. 4, S. 499-509.
- IMAN, R. L., HELTON, J. C. (1988): A comparison of uncertainty and sensitivity analysis for computer models. Risk Analysis, Vol. 8, S. 71-90.
- IMAN, R. L., HELTON, J. C. (1991): The repeatability of uncertainty and sensitivity analyses for complex probabilistic risk assessment. Risk Analysis, Vol 11, S. 591-606.
- IPSC (2003): Simlab 2.2 Reference Manual. Institute for the Protection and Security of the Citizen, Joint Research Centre, European Commission, Milano, Italien.
- JACQUES, C., LAVERGNE, C., DEVICTOR, N. (2004): Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated input. In Proceedings of the the Fourth international Symposium on Sensitivity Analysis of Model Output. 08.-11. März 2004 in Santa Fe, USA.
- JOHNSON, H. O., WYATT, F. K. (1994): Geodetic network design for fault mechanics studies. Manuscripta Geodetica, S. 309-323.
- KAHMEN, H. (1997): Vermessungskunde. 19. Auflage, Walter de Gruyter Verlag, Berlin – New York.
- KALMAN, R. E. (1960): A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of basic Engineering, Vol. 82 (Series D), S. 35-45.
- KAULA, W. M. (1966): Theory of satellite geodesy. Blaisdell Publishing Company, Waltham, USA.
- KOCH, K. R. (1997): Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen (3. Auflage). Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.
- KOCH, K. R., SCHMIDT, M. (1994): Deterministische und stochastische Signale. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.
- KUHLMANN, H., EICHHORN, A. (2003): Positionsbestimmung von PKW mit Sensoren der Serienausstattung. DGON-Symposium Positionierung und Navigation, Dresden.
- KUTTERER, H. (1999): On the sensitivity of the results of least-square adjustments concerning the stochastic model. Journal of Geodesy, Vol. 73, S. 350-361.
- KUTTERER, H. (1994): Intervallmathematische Behandlung endlicher Unschärfen linearer Ausgleichungsmodelle. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 423, München.
- LEONHARD, T., NIEMEIER, W. (1980): Diagnosis of Trans-Canada-Levelling Nets by Principal Component Analysis. In: Proceedings on NAVD-Symposium 1980, Ottawa, S. 275-291.
- MANSFELD, W. (1998): Satellitenortung und Navigation. Verlag Vieweg, Braunschweig – Wiesbaden.
- MCKAY, M.D. (1995): Evaluating prediction uncertainty. Technical Report NUREG/CR-6311, US Nuclear Regulatory Commission and Los Alamos National Laboratory.
- MCKAY, M.D. (1996): Variance-based methods for assessing uncertainty importance in NUREG-1150 analysis. Technical Report LA-UR-96-2695, US Nuclear Regulatory Commission and Los Alamos National Laboratory.
- MCKAY, M.D., BECKMANN, R.J., CONOVER, W.J. (1979): A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. Technometrics, Vol. 42, No. 1, S. 55-61.

- MITSCHE, M., WALLENTOWITZ, H. (2004): Dynamik der Kraftfahrzeuge. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg.
- MORRIS, M.D. (2004): Input Screening: Finding the Important Inputs on a Budget. In Proceedings of the the Fourth international Symposium on Sensitivity Analysis of Model Output. 08.-11. März 2004 in Santa Fe, USA.
- NIEDERREITER, H. (1992): Random number generation and quasi-Monte Carlo methods. Regional Conference Series in applied mathematics, Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, USA.
- NIEMEIER, W. (1979): Zur Kongruenz mehrfach beobachteter Netze. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Heft 88.
- NIEMEIER, W. (1985): Anlage von Überwachungsnetzen. In: PELZER, H. (Hrsg.): Geodätische Netze in der Landes- und Ingenieurvermessung. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart, S. 527-558.
- NIEMEIER, W. (2002): Ausgleichsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin – New York.
- NIEMEIER, W., ROHDE, G. (1982): On the optimization of levelling networks with respect to the determination of crustal movements. In: Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Nr. 258, S. 148-161.
- NIEMEIER, W., HOLLMANN, R. (1984): Hauptkomponenten- und Sensitivitätsanalyse Geodätischer Netze aufgezeigt am Überwachungsnetz Varna. In: WadFV Hannover, Nr. 133, S. 61-72.
- OSIDELE, O.O., BECK, M.B. (2004): Food web modelling for investigating ecosystem behaviour in large reservoirs of the south-eastern United States: lessons from Lake Lanier, Georgia. Ecological Modelling, Vol. 173, S. 129-158.
- PELZER, H. (1971): Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 164.
- PELZER, H. (1974): Zur Behandlung singularer Ausgleichsaufgaben. Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 181-194 und 470-488.
- PELZER, H. (Hrsg., 1985): Geodätische Netze in der Landes- und Ingenieurvermessung. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart.
- PELZER, H. (1987): Deformationsuntersuchungen auf Basis kinematischer Bewegungsmodelle. Allgemeine Vermessungsnachrichten, Nr. 2, Wichmann Verlag.
- PHILIPP, M. (2002): Anwendung des kinematischen KALMAN-Filters zur Deformationsanalyse eines Höhennetzes. Studienarbeit im Rahmen des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik der Universität Stuttgart (unveröffentlicht).
- PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A., VETTERELING, T.W. (1988): Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, Großbritannien.
- RAMM, K., SCHWIEGER, V. (2004): Multisensor-ortung für Kraftfahrzeuge. In: SCHWIEGER, V., FOPPE, K. (Red., 2004): Kinematische Messmethoden – Vermessung in Bewegung, DVW Schriftenreihe, Band 45, Wißner Verlag, Augsburg.
- RAMSAYER, K., RUOPP, M. (1980): Bericht und Gutachten über die Lagekontrollmessungen im Bereich der Stiftskirche Herrenberg, Stuttgart (unveröffentlicht).
- REIGBER, C., LÜHR, H., SCHWINTZER, P. (2003): First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies. Springer Verlag, Berlin.
- ROSEN, R. (1991): A Comprehensive Inquiry into the Nature, Origin and Fabrication of Life. Columbia University Press, New York.
- ROSENWASSER, E., YUSUPOV, R. (2000): Sensitivity of automatic control systems. CRC Press Control Series, CRC Press LLC, Boca Raton, London, New York, Washington.
- SACHS, L. (1997): Angewandte Statistik. 8.Auflage, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg.
- SALTELLI, A. (2002): Sensitivity Analysis for importance assessment. Risk Analysis, Vol. 22, No. 3, S. 579-590.
- SALTELLI, A. (2004): Global Sensitivity Analysis – an introduction. Tutorial lecture for Fourth International Conference on Sensitivity Analysis, 08-11.03.2004, Santa Fe, New Mexico, USA.
- SALTELLI, A., BOLADO, R. (1998): An alternative way to compute Fourier Amplitude Sensitivity Test. Computational Statistics and data analysis, Vol. 26, No. 4, S. 445-460.
- SALTELLI, A., TARANTOLA, S. (2002): On the relative importance of input factors in mathematical models: safety assessment for nuclear waste disposal. Journal of the American Statistical Society, Vol. 97, No. 459, S. 702-709.
- SALTELLI, A., TARANTOLA, S., CHAN, K. (1999): A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output. Technometrics, Vol. 41, No. 1, S. 39-56.
- SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E.M. (Hrsg., 2000): Sensitivity Analysis. John Wiley and Sons, Chichester.
- SALTELLI, A., TARANTOLA, S., CAMPOLONGO, F., RATTO, M. (2004): Sensitivity Analysis in Practise: A Guide to Assessing Scientific Models. John Wiley and Sons, Chichester.
- SAMO (1998): Proceedings of the Second International Symposium on Sensitivity Analysis of Model Output. 19.-22. April 1998 in Venedig, Italien, EUR – Report 177758 EN, Luxemburg.
- SAMO (2004): Proceedings of the Fourth International Symposium on Sensitivity Analysis of

- Model Output. 08.-11. März 2004 in Santa Fe, USA. (unter <http://www.jrc.cec.eu.int/uasa/events/SAMO2004> im Internet verfügbar).
- SCHAIBLY, J.H., SHULER, K.E. (1973): Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. Part II, applications. *Journal of chemical physics*, Vol. 59, S. 3879-3888.
- SCHÄFER, C. (2000): Space gravity spectroscopy – the sensitivity analysis of GPS-tracked satellite missions. Dissertation an der Universität Stuttgart, elektronische Veröffentlichung.
- SCHEFFE, H. (1959): *The analysis of variance*. John Wiley and Sons, New York.
- SCHEINERT, M. (1996): Zur Bahndynamik niedrigfliegender Satelliten. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 435, München.
- SCHOLLMEYER, R. (2003): Modulares Messwertfassungssystem am Beispiel der bordautonomen Gleisvermessung. In: *Virtuelle Instrumente in der Praxis*. Band zum Kongress VIP2003, Hüthig Verlag, Heidelberg – München.
- SCHRICK, K.-W. (Hrsg., 1977): *Anwendungen der KALMAN-Filtertechnik*. R.Oldenbourg Verlag, München, Wien.
- SCHWIEGER, V. (1999): Ein Elementarfehlermodell für GPS-Überwachungsmessungen – Konstruktion und Bedeutung interepochaler Korrelationen. *Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover*, Heft 231.
- SCHWINTZER, P. (1990): Sensitivity Analysis in Least Squares Gravity Field Modelling, Redundancy Decomposition of Stochastic a priori Information. Interner Bericht Nr. PS/51/90/DGFI des Deutschen Geodätischen Forschungsinstitutes.
- SEEBER, G. (2003): *Satellite Geodesy*. 2nd edition, Walter de Gruyter, Berlin – New York.
- SOBOL, I.M. (1991): Punkte, die einen mehrdimensionalen Würfel gleichmäßig ausfüllen. *Berichte der Arbeitsgruppe Technomathematik, Universität Kaiserslautern*.
- SOBOL, I.M. (1991): *Die Monte Carlo Methode*. Reihe Deutsch Taschenbücher, Band 41, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main.
- SOBOL, I.M. (1993): Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models. *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, Volume 1(4), S. 407-414. Übersetzung aus dem Russischen von SOBOL, I.M. (1990) in *Matematicheskoe Modelirovanie* 2, S. 112-118.
- STERNBERG, (2000): Zur Bestimmung der Trajektorie von Landfahrzeugen mit einem hybriden Messsystem. *Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformation der Universität der Bundeswehr München*, Heft 67, Neubiberg.
- TARANTOLA, S., JESINGHAUS, J. PUOLAMAA, M. (2000): Global sensitivity analysis: a quality assurance tool in environmental policy modelling. In: SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E.M.: *Sensitivity Analysis*. John Wiley and Sons, Chichester.
- TARANTOLA, S., NARDO, M., SALTELLI, A., KIOUSSIUKIS, I., LISKA, R. (2004): Sensitivity analysis of the e-business readiness composite indicator. In: *Proceedings of the Fourth international Symposium on Sensitivity Analysis of Model Output*. 08.-11. März 2004 in Santa Fe, USA.
- TAUBENHEIM, J. (1969): *Statistische Auswertung Geophysikalischer und Meteorologischer Daten*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig.
- TURANYI, T., RABITZ, H. (2000): Local Methods. In: SALTELLI, A., CHAN, K., SCOTT, E.M.: *Sensitivity Analysis*. John Wiley and Sons, Chichester.
- UNTERBERG, U. (1991): Das KALMAN-Filter als Ansatz für die Auswertung weiträumiger kinematischer Höhennetze. *Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen*, Nr. 170, Universität Hannover.
- WELSCH, W. (1976): Signifikanzen und Sensitivitäten in technischen Netzen. In: *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B*, Nr. 216, S. 154-163.
- WELSCH, W., HEUNECKE, O. (2001): *Models and Terminology for the Analysis of Geodetic Monitoring Observations*. Official Report of the Ad-hoc Committee of the FIG Working Group 6.1, International Federation of Surveyors (FIG).
- WELSCH, W., HEUNECKE, O., KUHLMANN, H. (2000): *Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen*. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.
- WIESER, A. (2002): *Robust and fuzzy techniques of parameter estimation and quality assessment in GPS*. Shaker Verlag GmbH, Aachen.

Anhang A

Ausgleichsalgorithmus nach vermittelnden Beobachtungen

$\tilde{\mathbf{Y}}$	Vektor der wahren Parameter, Anzahl: u
$\tilde{\mathbf{L}}$	Vektor der wahren Beobachtungen
$\tilde{\mathbf{L}} = \varphi(\tilde{\mathbf{Y}})$	Nicht-lineares funktionales Modell
\mathbf{Y}_0	Vektor der genäherten Parameter
$\mathbf{L}_0 = \varphi(\mathbf{Y}_0)$	Vektor der genäherten Beobachtungen
\mathbf{L}	Beobachtungsvektor, Anzahl: n
$\mathbf{l} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0$	Vektor der gekürzten Beobachtungen
$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{Y})}{\partial \mathbf{Y}} \right)_0$	Konfigurationsmatrix
$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}}$	Lineares bzw. linearisiertes funktionales Modell
\mathbf{Q}_{ll}	Kofaktormatrix der Beobachtungen
σ_0^2	Varianz der Gewichtseinheit
$\Sigma_{ll} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{ll}$	Kovarianzmatrix der Beobachtungen / stochastisches Modell
$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{ll}^{-1}$	Gewichtsmatrix
$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})^{-1}$	Kofaktormatrix der Parameter
$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{l}$	Absolutgliedvektor
$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}} \cdot \mathbf{n}$	Vektor der gekürzten ausgeglichenen Parameter
$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}_0 + \hat{\mathbf{y}}$	Ausgeglichener Parametervektor
$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{l}$	Verbesserungsvektor
$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}} \cdot \mathbf{A}^T$	Kofaktormatrix der ausgeglichenen Beobachtungen
$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$	Kofaktormatrix der Verbesserungen
$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} - \mathbf{v}$	Vektor der gekürzten ausgeglichenen Beobachtungen
$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{v}$	Vektor der ausgeglichenen Beobachtungen
$f = n - u + d$	Freiheitsgrade der Ausgleichung mit Datumsdefekt d
$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{f}$	Schätzwert für die Varianz der Gewichtseinheit

Anmerkung: Im Gegensatz zur in der Geodäsie gebräuchlichen Bezeichnung werden die Parameter \mathbf{X} hier mit \mathbf{Y} bezeichnet. Diese Änderung wurde aus Gründen der Konsistenz der Gesamtarbeit vorgenommen, da bei den Methoden der Sensitivitätsanalyse im Allgemeinen die Ausgangsgrößen mit \mathbf{Y} bezeichnet werden. Diese sind im Rahmen der Ausgleichsrechnung als Parameter aufzufassen.

Anhang B

Algorithmus des diskreten KALMAN-Filters

$\hat{\mathbf{y}}_k$	aufdatierter Zustandsvektor (Epoche k)
\mathbf{T}	Transitionsmatrix / Prädiktionsmatrix
\mathbf{w}	Störgrößenvektor; in der Regel $E(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$
$\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \right)_0$	Störgrößematrix
\mathbf{u}	Stellgrößenvektor
$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{u}} \right)_0$	Stellgrößematrix
$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{y}}_k + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}$	präzidierter Zustandsvektor
$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}},k}$	Kofaktormatrix der aufdatierten Zustandsgrößen (Epoche k)
$\mathbf{Q}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}$	Kofaktormatrix der Störgrößen
$\mathbf{Q}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$	Kofaktormatrix der Stellgrößen
$\mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}},k+1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}},k} \cdot \mathbf{T}^T + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} \cdot \mathbf{B}^T + \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{w}\mathbf{w}} \cdot \mathbf{S}^T$	Kofaktormatrix des präzidierten Zustandsvektors
\mathbf{l}_{k+1}	Vektor der gekürzten Beobachtungen (Anhang A)
\mathbf{A}_{k+1}	Konfigurationsmatrix (Anhang A)
$\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{l}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \cdot \bar{\mathbf{y}}_{k+1}$	Innovationsvektor
σ_0^2	Varianz der Gewichtseinheit
$\mathbf{Q}_{\mathbf{l},k+1}$	Kofaktormatrix der Beobachtungen
$\Sigma_{\mathbf{l},k+1} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{l},k+1}$	Kovarianzmatrix der Beobachtungen / stochastisches Modell
$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d},k+1} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l},k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \cdot \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}},k+1} \cdot \mathbf{A}_{k+1}^T$	Kofaktormatrix der Innovationen
$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}},k+1} \cdot \mathbf{A}_{k+1}^T \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d},k+1}^{-1}$	Verstärkungsmatrix
$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \bar{\mathbf{y}}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{d}_{k+1}$	aufdatierter Zustandsvektor (Epoche $k+1$)
$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}},k+1} = \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}},k+1} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d},k+1} \cdot \mathbf{K}_{k+1}^T$	Kofaktormatrix der aufdatierten Zustandsgrößen (Epoche $k+1$)
n_{k+1}	Anzahl der Beobachtungen in Epoche $k+1$
$s_0^2 = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d},k+1} \cdot \mathbf{d}}{n_{k+1}}$	Schätzwert für die Varianz der Gewichtseinheit

Lebenslauf und Dank

Lebenslauf

Personalie

7. Juni 1964	geboren in Springe
30. Juli 1993	Heirat mit Ioana Schwieger geb. Gherghe in Bukarest
20. Januar 1998	Geburt unserer Tochter Irina
6. August 2000	Geburt unseres Sohnes Andrej

Ausbildung

1970 – 1983	Grund- und Hauptschule und Otto-Hahn-Gymnasium in Springe
13. Mai 1983	Allgemeine Hochschulreife
1983 – 1989	Studium der Geodäsie an der Universität Hannover
20. Juli 1989	Bestandene Diplomprüfung zum Diplom-Ingenieur
1989 – 1991	Zivildienst bei der Lebenshilfe für geistig Behinderte Springe e.V.

Beruf

1991 – 1996	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Geodätischen Institut der Universität Hannover
1996 – 2000	Wissenschaftlicher Assistent am Geodätischen Institut der Universität Hannover
22. Dezember 1998	Promotion zum Doktor-Ingenieur
2000 – 2001	Wissenschaftlicher Mitarbeiter beim GeoForschungs-Zentrum Potsdam, Abteilung 1.2: Kinematik und Dynamik der Erde, Entwicklung und Betrieb von Satellitenmissionen
seit 2002	Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart

Dank

Meinen Dank möchte ich all denjenigen aussprechen, die mich beim Erstellen dieser Arbeit in vielfältiger Weise unterstützt haben.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Möhlenbrink danke ich für die großzügige Unterstützung im Rahmen des Habilitationsverfahrens sowie bei meiner Arbeit am Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen. Bei Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing.habil. Lothar Gründig bedanke ich mich für die Übernahme des Koreferats.

Den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Institutes möchte ich gleichfalls meinen Dank aussprechen, da sie während der Erstellung der Habilitationschrift meine reduzierte Verfügbarkeit am Institut akzeptiert und auch in dieser Zeit sehr gut mit mir zusammengearbeitet haben.

Frau Katrin Ramm und Herrn Thomas Hartmann danke ich zum Einen für die fachlichen Diskussionen und Anregungen und zum Anderen für die Durchsicht der Habilitationsschrift. Fragen bezüglich Varianz-basierter Sensitivitätsanalyse und der Software SIMLAB konnte ich jederzeit an Herrn Stefano Tarantola richten. Auch hierfür möchte ich mich bedanken.

Nicht zuletzt danke ich natürlich Ioana, Irina und Andrej, die während der Erstellung dieser Schrift keine leichte Zeit mit mir hatten und mir trotzdem Verständnis und Liebe entgegengebracht haben.