

Franziska Wild-Pfeiffer

**Auswirkungen topographisch-isostatischer Massen
auf die Satellitengradiometrie**

München 2007

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**

Auswirkungen topographisch-isostatischer Massen
auf die Satellitengradiometrie

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
von der Fakultät für
Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Franziska Wild-Pfeiffer
aus Markgröningen

München 2007

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

Deutsche Geodätische Kommission

Alfons-Goppel-Straße 11 • D – 80 539 München

Telefon +49 - (0)89 - 23 031 -0 / -1113 • Telefax +49 - (0)89 - 23 031 -1283 / -1100

E-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://dgk.badw.de>

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing.habil. Dr.h.c. Bernhard Heck

Korreferent: em.Prof. Dr.-Ing.habil. Dr.techn.h.c.mult. Dr.-Ing.E.h.mult. Erik W. Grafarend

Tag der mündlichen Prüfung: 23.5.2007

© 2007 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Zusammenfassung

Die topographischen und isostatischen Reduktionsmethoden sowie moderne Konzepte der Gravitationsfeldmodellierung wie z.B. die RTM-Methode (**R**esidual **T**errain **M**odelling) und die **R**emove-**R**estore-**T**echnik (RRT) erfordern die Berechnung der gravitativen Einflüsse von Volumenelementen, die üblicherweise durch Quader dargestellt werden.

In der terrestrischen und flugzeuggestützten Gravitationsfeldbestimmung werden die Formeln für das Potential und seine ersten Ableitungen ausgewertet, während sich die zweiten Ableitungen z.B. auf die Analyse der im Frühjahr 2008 startenden Satellitengradiometriemission GOCE (**G**ravity and **S**tady-**S**tate **O**cean **C**irculation **E**xperiment) beziehen. Speziell dort spielt die Reduktion von topographisch-isostatischen Effekten im Sinne der Remove-Restore-Technik eine wichtige Rolle, um ein glattes Gravitationsfeld zur Fortsetzung der Daten auf das Geoid zu erzeugen. Eine weitere Anwendung stellt die externe Kalibrierung eines GOCE-Gradiometers dar.

In der Arbeit werden die Modellierung im Ortsbereich und die Modellierung im Spektralbereich behandelt. Im Ortsbereich können die Gravitationseffekte von Volumenelementen durch Quader, Punktmassen, Massenschichten, Massenlinien und Tesseroiden beschrieben werden. Für alle erwähnten Massenelemente bis auf das Tesseroid sind diese Volumenintegrale analytisch lösbar. Die elliptischen Integrale des Tesseroids lassen sich durch halbanalytische oder rein numerische Methoden lösen. Basierend auf dem verallgemeinerten Helmertschen Kondensationsmodell und verschiedenen isostatischen Modellen wie dem klassischen Airy-Heiskanen-Modell, dem Pratt-Hayford-Modell, der Kombination des Airy-Heiskanen-Modells (Kontinente) und des Pratt-Hayford-Modells (Ozeane) und dem Erdkrustenmodell werden die topographisch-isostatischen Effekte für eine GOCE-ähnliche Satellitenbahn berechnet. Die verschiedenen Berechnungsmethoden werden hinsichtlich der Genauigkeit und der Rechenzeit verglichen. Die klassischen isostatischen Modelle, das erste und zweite Kondensationsmodell von Helmert und das Erdkrustenmodell werden im Hinblick auf ein glattes Restfeld in Satellitenhöhe untersucht. Die Berechnungen im Ortsbereich werden den Berechnungen des Spektralbereichs gegenübergestellt.

Testrechnungen zeigen, dass die Aufteilung der topographisch-isostatischen Massen in Tesseroiden – unabhängig von deren Berechnungsmethode – die genauesten Ergebnisse in geringer Rechenzeit im Vergleich zu anderen Massenelementen liefert.

Des Weiteren wird gezeigt, dass topographische und isostatische Effekte in der Satellitengradiometrie signifikant sind. Die Größenordnung dieser Effekte beträgt jeweils ca. 8 E.U. in den zweiten radialen Ableitungen des topographischen und isostatischen Potentials in einer Satellitenhöhe von 260 km (GOCE ähnlicher Orbit). Teilweise heben sich topographische und isostatische Effekte auf, sodass der kombinierte Effekt eine Größenordnung von ca. 0.8 E.U. hat. Das spektrale Verhalten des Airy-Heiskanen-Modells und des ersten Helmertschen Kondensationsmodells ist praktisch identisch. Das zweite Helmertsche Kondensationsmodell verursacht einen kleinen topographisch-isostatischen Effekt, was bedeutet, dass das Restfeld nach der topographisch-isostatischen Reduktion unter diesen Modellannahmen eher rau bleibt; die Fortsetzung der Daten nach unten wird dadurch nicht vereinfacht. Die Untersuchungen zum Spektralbereich bestätigen die Ergebnisse der Modellierung im Ortsbereich.

In Bezug auf die Rechenzeit und Auflösung des digitalen Geländemodells wird in globalen Anwendungen die Kugelfunktionsentwicklung der Modellierung durch Massenelemente vorgezogen. In regionalen Anwendungen ist jedoch die Modellierung und Approximation durch einzelne Massenelemente (insbesondere Tesseroiden) sinnvoll.

Summary

Topographic and isostatic reduction methods as well as modern concepts of gravitational modelling like the **Residual Terrain Modelling (RTM)** or the **Remove-Restore-Technique (RRT)** require the computation of the gravitational effects of volume elements which are usually represented by prisms.

In terrestrial and airborne gravity field determination the formulae for the gravitational potential and its first order derivatives have been evaluated, while second order derivatives are related to the analysis of upcoming satellite gravity gradiometry missions of **GOCE (Gravity and Steady-State Ocean Circulation Experiment)** type. In satellite gradiometry the gravitational signals from the Earth's topography and its isostatic compensation are still existent in the gravity gradients observed along the satellite orbit. Due to the high-frequency behaviour of the combined topographic-isostatic effect, downward continuation of the gravitational signal from satellite height to sea level is rather difficult, requiring some mathematical method of regularization. Thus, it is inevitable to smooth the gravity field by a topographic-isostatic reduction. Another application of topographic and isostatic reductions is the external calibration of the **GOCE** gravity gradiometer.

In the paper, two types of mass modelling are presented: the modelling of the masses in the space domain is opposed to the modelling in the frequency domain. In the space domain the gravitational effects of volumetric mass elements can be presented by prisms, point masses, mass layers, mass lines and tesseroids. The volume integrals are analytically solvable for all mentioned mass elements, except the tesseroid. Approximate solutions of the elliptic integrals related to the tesseroid can be produced by semi-analytical or purely numerical methods. Based on the generalized Helmert model and different isostatic models such as the classical Airy-Heiskanen model, the Pratt-Hayford model, the combination of the Airy-Heiskanen model (land area) and the Pratt-Hayford model (ocean area) and the crust density model, the topographic-isostatic effects are calculated for a **GOCE**-like satellite orbit. The efficiency of the various approaches concerning precision and CPU time is investigated, a comparison between the classical isostatic models and the generalized Helmert model respectively the crust density model is made concerning their ability to produce a smooth gravitational field in satellite height. The investigations in the space domain are compared to the frequency domain results.

Test computations show the high numerical efficiency of the subdivision of the topographic-isostatic masses in tesseroids, computed with different methods, in comparison to other mass elements. The tesseroid approach produces the most accurate results in an acceptable computation time.

It has become evident that topographic and isostatic effects are significant in satellite gradiometry, showing an order of magnitude of about 10 E.U. in the second vertical derivatives of the topographic and isostatic potentials at a satellite altitude of 260 km (approximately **GOCE** orbit). Topographic and isostatic effects cancel out at a large extent. The combined effect has an order of magnitude of about 1 E.U.. The spectral behaviour of the Airy-Heiskanen model is practically equivalent to the first Helmert model. The second condensation model of Helmert produces small topographic-isostatic reduction terms, thus the residual field after having applied topographic-condensation reduction will remain rather rough; due to this underestimation the residual field (after removing the effect of the topographic-isostatic masses from the observed gravity gradients) is expected not to be as smoothed as in the case of the first Helmert or Airy-Heiskanen model. The investigations in the frequency domain confirm the results of the space domain evaluations.

Regarding the computation time and the resolution of the digital elevation model, the spherical harmonic expansion is the preferable method for global applications. For regional applications, however, the modelling and approximation via tesseroidal mass elements is useful.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	3
Summary.....	4
Inhaltsverzeichnis	5
1 Einleitung, Ziel und Aufbau der Arbeit	7
2 Schwerefeldmodellierung - Modellierung von Massenwirkungen	9
2.1 Globale Schwerefeldbestimmung	10
2.2 Lokale Schwerefeldmodellierung	12
2.3 Modellierung von Massenwirkungen.....	14
3 Methoden der Massenmodellierung im Ortsbereich	16
3.1 Mathematische und geometrische Grundlagen	16
3.2 Modellierung von Massenwirkungen.....	18
3.2.1 Tesseroid.....	19
3.2.2 Quader.....	25
3.2.3 Punktmasse	28
3.2.4 Massenschicht.....	30
3.2.5 Massenlinie	31
3.3 Modellierung des topographischen Effekts.....	32
3.4 Modellierung des isostatischen Effekts.....	33
3.4.1 Modell von Airy-Heiskanen	33
3.4.2 Modell von Pratt-Hayford.....	34
3.4.3 Kombination des Airy-Heiskanen-/Pratt-Hayford-Modells.....	36
3.4.4 Kondensationsmodelle von Helmert.....	37
3.4.5 Modell von Vening Meinesz.....	38
3.4.6 Erdkrustenmodelle	38
3.4.7 Einsatz der verschiedenen Massenkörper und Berechnungsvarianten	40
3.5 Numerische Untersuchungen zur Genauigkeit der Rechenformeln	40
3.5.1 Vergleich der Berechnungsmethoden bezüglich der analytischen Lösung und der Rechenzeit	40
3.5.2 Vergleich der Massenelemente bezüglich der Entfernung zum Aufpunkt.....	49
3.5.3 Auswirkung der Elliptizität auf den topographisch-isostatischen Effekt	53
3.6 Numerische Ergebnisse für verschiedene isostatische Modelle.....	56
4 Methoden der Massenmodellierung im Spektralbereich.....	68
4.1 Mathematische Grundlagen	68
4.2 Modellierung des topographischen Effekts.....	69
4.3 Modellierung des isostatischen Effekts.....	70
4.3.1 Modell von Airy-Heiskanen	70
4.3.2 Kondensationsmodelle von Helmert.....	72
4.3.3 Erdkrustenmodelle	72

4.4	Nummerische Untersuchungen	73
4.4.1	Vergleich der Modellierungen des Ortsbereichs und des Spektralbereichs bezüglich der analytischen Lösung für eine Kugelschale.....	73
4.4.2	Nummerische Ergebnisse für das topographische Modell und die verschiedenen isostatischen Modelle	74
4.4.3	Untersuchung des Einflusses der Reihenentwicklung von t' im Fall des Airy-Heiskanen-Modells.....	85
4.4.4	Vergleich des in Kugelfunktionen entwickelten Tensors des Ortsbereichs mit dem Tensor des Spektralbereichs	87
5	Schlussfolgerungen und Ausblick.....	91
A	Anhang.....	93
A.1	Elemente des Marussi-Tensors – direkte analytische Integration	93
A.2	Nummerische Integration.....	99
A.3	Taylorreihenentwicklung Tesseroid – partielle Ableitungen	103
A.4	Taylorreihenentwicklung Quader – partielle Ableitungen.....	110
A.5	Statistiken der Eigenwerte zur Untersuchung der Elliptizität	114
A.6	Statistiken der Eigenwerte zur Untersuchung verschiedener isostatischer Modelle	115
	Abbildungsverzeichnis	118
	Tabellenverzeichnis	121
	Literaturverzeichnis	124
	Lebenslauf	129
	Dank	129

1 Einleitung, Ziel und Aufbau der Arbeit

Das Schwerfeld der Erde ist ständigen räumlichen und zeitlichen Variationen unterworfen. Hauptursache hierfür ist die Massenverteilung im Erdinneren. Eine genaue Kenntnis des Erdschwerfelds hilft, die Prozesse im Erdinneren, die Zusammenhänge mit der Atmosphäre und Hydrosphäre in Form von Ozeanzirkulation, globalem Wasserkreislauf etc. besser zu verstehen (siehe Ilk 2005; Ilk et al. 2005). Die neuen Schwerfeldmissionen CHAMP (**Challenging Minisatellite Payload**), GRACE (**Gravity Recovery And Climate Experiment**) und GOCE (**Gravity and Steady-State Ocean Circulation Experiment**) ermöglichen es, Daten mit flächenmäßig großer Überdeckung in kurzer Zeit, hoher räumlicher Auflösung und (homogener) Genauigkeit zu erhalten. Mittels dieser Daten ist es möglich, globale und regionale (statische) Erdgravitationsmodelle mit einer Genauigkeit und räumlichen Detailliertheit zu erstellen, wie sie früher noch nie da gewesen ist. Eine wichtige Anwendung in der Geodäsie ist die hochgenaue Bestimmung des Geoids bzw. des Quasigeoids als globale Referenzfläche für Höhensysteme.

Topographische und isostatische Massen, das sind die Massen der Kontinente und Ozeane und deren Ausgleichsmassen, beeinflussen das Gravitationsfeld der Erde. Diese Massen spiegeln sich hauptsächlich in den kurzen Wellenlängen des Gravitationsfelds wider. Im Rahmen der Lösung der geodätischen Randwertaufgabe werden die Schweremesswerte um den topographisch-isostatischen Effekt reduziert. Mittels der topographischen Reduktion wird die Annahme, dass sich keine Massen oberhalb des Geoids bzw. des Ellipsoids zur Lösung der Laplace-Gleichung im Außenraum der Erde befinden, erfüllt. Die isostatische Reduktion führt zu einer Glättung der reduzierten Messwerte, welche die Auswertung vereinfacht. Durch die Kombination der topographischen und isostatischen Reduktion reproduziert das dadurch geschaffene Referenzmodell zur Lösung der Randwertaufgabe die Messgrößen gut (vgl. Engels 2006). Es können verschiedene isostatische Modelle unterschieden werden, wobei immer beachtet werden muss, dass diese Modelle teilweise erhebliche Abweichungen zur geophysikalischen Realität aufweisen. Die Effekte der topographischen und isostatischen Massen werden auch in der im Frühjahr 2008 startenden Satellitenmission GOCE sichtbar sein.

Ziel der Arbeit ist es, den Einfluss der topographischen und isostatischen Massen auf die Satellitengravidimetrie, die Messung von Schweregradienten in Satellitenhöhe, zu bestimmen und dasjenige isostatische Modell zu finden, welches das Satellitensignal am stärksten glättet. Dadurch lässt sich die harmonische Fortsetzung der Daten nach unten verbessern und die Verstärkung von Fehlern in den Daten (Instrumentenfehler, Fehler durch äußere Einflüsse etc.) durch die Aufrauung des Erdgravitationsfelds bei der Fortsetzung auf das Geoid minimieren. Es ist zu untersuchen, welche Art der Modellierung, die des Ortsbereichs oder die des Spektralbereichs, optimal hinsichtlich Rechenzeit und Genauigkeit ist. Bei der (globalen) Modellierung des Spektralbereichs entwickelt man eine Funktion (z.B. Höhe der Topographie) nach Kugelflächenfunktionen. Die Ortsbereichmodellierung besteht in der Aufteilung der Massen in einzelne Massenelemente und deren analytischer, halbanalytischer oder numerischer Berechnung. Des Weiteren sind die verschiedenen Elemente zur Approximation der Massen hinsichtlich der Genauigkeit und der Entfernung zum Aufpunkt zu vergleichen. Da die Berechnungen alle auf der sphärischen Approximation des Geoids basieren, muss der Einfluss der Elliptizität bestimmt werden. Die Berechnung der Wurzeln/Antiwurzeln des Airy-Heiskanen-Modells können geschlossen oder in Form einer Reihenentwicklung gelöst werden. Die jeweiligen Auswirkungen werden untersucht.

In Kapitel 2 wird zunächst die Schwerfeldmodellierung vorgestellt. Dabei kann zwischen globaler und lokaler Schwerfeldmodellierung unterschieden werden. Im Zuge der globalen Schwerfeldmodellierung wird auf die drei neuen Schwerfeldmissionen CHAMP, GRACE und GOCE eingegangen und erläutert, welcher Fortschritt in Form von räumlicher Auflösung und Genauigkeit gegenüber früheren globalen Modellen erreicht wird. Abschließend wird erklärt, welche Bedeutung die Modellierung von Massenwirkungen, speziell der topographischen und isostatischen Massen, hat.

Bei der Modellierung der topographischen und isostatischen Massen wird zwischen der Modellierung im Ortsbereich und der Modellierung im Spektralbereich unterschieden.

In Kapitel 3 wird die Modellierung im Ortsbereich erläutert. Es werden mathematische und geometrische Grundlagen vorgestellt und verschiedene Massenelemente und Berechnungsmethoden präsentiert. Es sind dies die Massenelemente Tesseroid, Quader, Punktmasse, Massenschicht und Massenlinie. Des Weiteren

wird auf die Modellierung des topographischen Effekts eingegangen. Es werden verschiedene isostatische Modelle vorgestellt. Neben den klassischen isostatischen Modellen von Airy-Heiskanen und Pratt-Hayford wird deren Kombination behandelt. Außerdem werden die beiden Kondensationsmodelle von Helmert und ein Erdkrustenmodell analysiert. Das regionale Vening Meinesz-Modell wird erläutert, aber nicht weiter verwendet. Den Abschluss bilden numerische Untersuchungen zur Genauigkeit der Rechenformeln in Form eines Vergleichs der Berechnungsmethoden bezüglich der analytischen Lösung und der Rechenzeit, eines Vergleichs der Massenelemente bezüglich der Entfernung zum Aufpunkt und einer Untersuchung zur Auswirkung der Elliptizität auf den topographisch-isostatischen Effekt. Es werden Ergebnisse verschiedener isostatischer Modelle gezeigt, mit dem Hintergrund, ein isostatisches Modell zu finden, welches am besten glättet, um die Fortsetzung der Daten nach unten zu vereinfachen.

Die Modellierung des Spektralbereichs bildet das Kapitel 4. Es werden analog zu Kapitel 3 die mathematischen und geometrischen Grundlagen vorgestellt. Die Modellierung des topographischen Effekts wird ebenso wie die Modellierung des isostatischen Effekts präsentiert. Es werden in diesem Kapitel nur das isostatische Modell von Airy-Heiskanen, die Kondensationsmodelle von Helmert und das Erdkrustenmodell harmonisch analysiert. Abschließend werden numerische Ergebnisse für verschiedene isostatische Modelle vorgestellt, der Einfluss der Reihenentwicklung der Wurzeltiefe im Fall des Airy-Heiskanen-Modells untersucht und der in Kugelfunktionen entwickelte Tensor der Schweregradienten für die beiden Rechenverfahren verglichen.

Den Abschluss der Arbeit bildet Kapitel 5 mit Schlussfolgerungen und einem Ausblick auf künftige Untersuchungen.

2 Schwerefeldmodellierung - Modellierung von Massenwirkungen

Das Ziel der Physikalischen Geodäsie ist die Bestimmung des Schwerefelds. Die Kenntnis des Schwerefelds und seine Variation spielen eine zentrale Rolle in den Geowissenschaften und stehen direkt in Verbindung mit dem Massentransport und der Massenverteilung im Erdinnern (Abbildung 2.1; siehe Ilk et al. 2005).

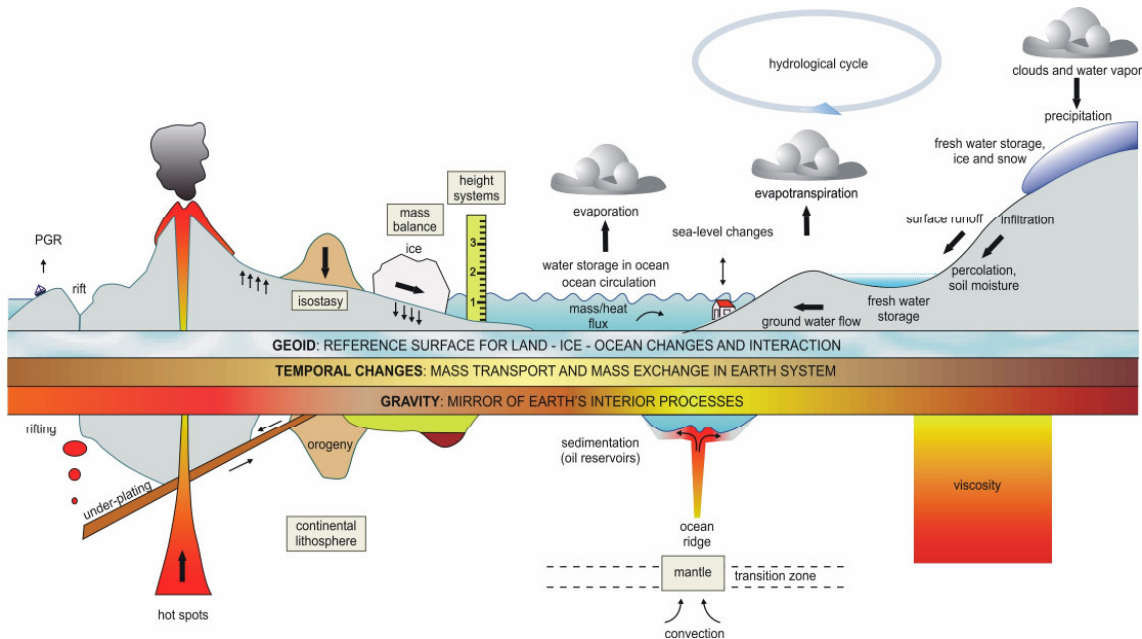


Abbildung 2.1 Die Wechselbeziehung zwischen Schwere, Schwerevariationen, Massentransport und Massenverteilung (vgl. Ilk et al. 2005)

Durch die neuen Schwerefeldmissionen (siehe Kapitel 2.1) und der damit verbundenen Qualitätsverbesserung des Gravitationsfelds sowie der Erhöhung der räumlichen Auflösung der Meeres- und Erdoberfläche und ihrer zeitlichen Variation, ist es erstmalig möglich, den globalen Massentransport im System Erde sowie Auswirkungen auf die Schwere und die Meeres- und Eisoberfläche zu bestimmen. Anwendungen kommen aus allen Bereichen der Geowissenschaften. In der Geophysik spielen u.a. die Bestimmung der glazial-isostatischen Prozesse, der lateralen Variationen der Viskosität des Mantels, des globalen Massentransports im Mantel und die Verbesserung globaler Krusten- und Lithosphärenmodelle eine Rolle. Auch können die neuen Satellitendaten und deren Kombination mit Gravimetrie- und Altimetriedaten zur Bestimmung der Dichte im Erdinnern („inverses Problem“) verwendet werden (vgl. Moritz 1990; Krappmann 1996). Das Geoid dient in der Geodäsie als absolute Bezugsfläche für die Modellierung ozeanischer Strömungen. Es ermöglicht eine Vereinheitlichung von verschiedenen Höhensystemen und die Kombination von ellipsoidischen, mit GPS ermittelten, und physikalisch definierten Höhen. Weitere Beispiele der Nutzung der Schwerefeldinformation sind u.a. in ESA (1999) und Rummel et al. (2002) zu finden.

Die Schwerefeldbestimmung als geodätische Randwertaufgabe umfasst die Bestimmung der physikalischen Erdoberfläche und des Schwerefelds aus Messungen auf oder oberhalb der Erdoberfläche. Hier wird als unbekanntes Randfläche entweder das Geoid (Theorie von Stokes) oder das Quasigeoid (Theorie von Molodenskii) eingeführt. Nach Torge (2003) kann zwischen der globalen (vgl. Kapitel 2.1) und der lokalen (vgl. Kapitel 2.2) Schwerefeldmodellierung unterschieden werden.

2.1 Globale Schwerefeldbestimmung

Globale Schwerefeldmodellierungen basieren auf einer Kugelfunktionsentwicklung des Schwerefelds (siehe Kapitel 4). Der langwellige Teil der Entwicklung wurde in der Pre-CHAMP-Ära aus Satelliten-Trackingdaten abgeleitet, weshalb man auch von „Satellite-only“-Modellen spricht. Beispiele für solche Modelle sind die in Schwintzer et al. (1997) beschriebenen GRIM4-Modelle (Geoforschungszentrum Potsdam und Groupe de Recherches de Géodésie Spatiale, Toulouse). Vollständig entwickelt ist das Modell GRIM4-S4 bis Grad und Ordnung 60. Die Kombination dieser Modelle niederen Grades mit terrestrischen Schwereanomalien und altimetrischen Geoidhöhen führt zu sog. kombinierten Geopotentialmodellen. Ein Beispiel für ein solches Geopotentialmodell ist das aus Satelliten-tracking-, terrestrischen Schwereanomalien- und Satellitenaltimetriedaten zusammengesetzte EGM96 (Lemoine et al. 1998). Der maximale Entwicklungsgrad beträgt $n = 360$.

Um die Vorgänge im Erdinnern, die Dynamik der Ozeane etc. besser verstehen zu können, ist es notwendig, die räumliche Auflösung und Genauigkeit des Gravitationsfelds der Erde zu steigern. Dies erfordert niedrig fliegende Satelliten und hoch empfindliche Sensoren. Mittels des Satellite-to-Satellite Tracking und der Satellitengradiometrie wird dies ermöglicht (vgl. u.a. Rummel et al. 2002; Rummel 2003; Ilk et al. 2005; Mayer-Gürr 2006).

Die erste Mission dieser neuen Satellitengeneration ist die im Jahr 2000 gestartete Satellitenmission CHAMP (**C**hallenging **M**inisatellite **P**ayload). Hauptziele dieser Mission sind die Schaffung eines globalen Referenzmodells für das Schwere- und Magnetfeld und die Überwachung der Ozeanzirkulation (Reigber et al. 2005a; Reigber et al. 2006). Messprinzip dieser Mission ist das Satellite-to-Satellite-Tracking (SST) im high-low-Modus (vgl. Abbildung 2.2 a)). Hierunter versteht man die kontinuierliche Entfernungsmessung zwischen zwei Satelliten, hier dem CHAMP-Satellit (low-Modus) und den GPS-Satelliten (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem) (high-Modus). Neben einem GPS-Empfänger trägt der CHAMP-Satellit u.a. Laser-Reflektoren zur SLR-Entfernungsmessung von Bodenstationen (**S**atellite **L**aser **R**anging), einen Beschleunigungsmesser zur Messung und Kompensation der Oberflächenkräfte und Magnetometersysteme an Bord. Mit der polnahen Bahn (Inklination $i = 87^\circ$) und einer anfänglichen Bahnhöhe von ca. 450 km wird eine Schwerefelderfassung bis Grad und Ordnung 70 erwartet (vgl. Abbildung 2.3, Tabelle 2.1). Ende der Mission wird voraussichtlich in den Jahren 2008 - 2009 sein.

Die Satellitenmission GRACE (**G**ravity **R**ecovery **A**nd **C**limate **E**xperiment) ist die zweite Mission dieser neuen Generation. Sie besteht aus zwei baugleichen Satelliten, die im Abstand von ca. 220 km auf einer nahezu kreisförmigen Bahn fliegen. Gestartet wurde sie im Jahr 2002 mit dem Hauptziel, die Erdanziehung und ihre zeitliche Änderung zu messen, Auskunft über die vertikale Temperaturverteilung zu geben etc. (Reigber et al. 2005b). Messprinzip dieser Mission ist ergänzend zum Satellite-to-Satellite-Tracking im high-low-Modus das SST im low-low-Modus (vgl. Abbildung 2.2 b)). Zwischen den beiden GRACE-Satelliten werden die Entfernungen und die Entfernungsänderungen mittels Mikrowellen-Entfernungsmesser mit μm -Genauigkeit gemessen. Zusätzlich zu GPS-Empfänger und K-Band-Entfernungsmesser sind noch ein Beschleunigungsmesser und eine Sternkamera an Bord. Mittels der Sternkamera kann die genaue Orientierung des Satelliten bestimmt werden. Mit der Flughöhe von ca. 450 km und der Inklination von $i = 89^\circ$ ergibt sich eine Schwerefeldauflösung bis Grad und Ordnung 150 (vgl. Abbildung 2.3, Tabelle 2.1). Die ursprünglich vorgesehene Missionszeit von 5 Jahren wird voraussichtlich bis Ende 2009 verlängert.

Die dritte Satellitenmission ist die GOCE-Mission (**G**ravity and **S**tady-State **O**cean **C**irculation **E**xperiment) (vgl. ESA 1996; ESA 1999; Müller 2001; Rebhan et al. 2000; Drinkwater et al. 2003; Drinkwater et al. 2007). Der Start dieser Mission ist für Frühjahr 2008 geplant. Ziel der Mission ist die Bestimmung der kurzwelligen bis mittelwelligen Anteile des statischen Erdgravitationsfelds mit hoher Genauigkeit, um daraus Schwereanomalien der Genauigkeit von 1 mgal und ein cm-genaues Geoid abzuleiten (vgl. Rummel et al. 2007). Messprinzip ist neben dem GPS-Tracking, welches den langwelligen Signalanteil durch Analyse der Satellitenbahnen bestimmt, die Satelliten-Schweregradiometrie (SGG – **S**atellite **G**ravity **G**radiometry). Hierunter versteht man das Messen von differentiellen Beschleunigungen in allen drei Raumrichtungen (vgl. Abbildung 2.2 c)).

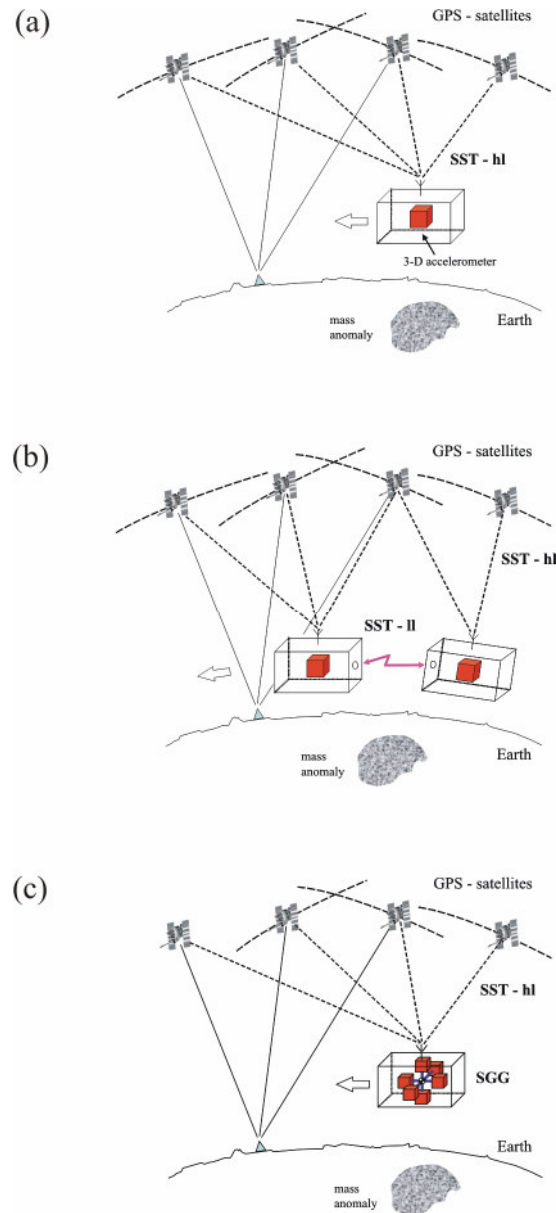


Abbildung 2.2 Messprinzip des SST im high-low Modus (a), des SST im low-low Modus kombiniert mit dem high-low Modus (b) und der Satellitengradiometrie kombiniert mit dem high-low Modus (c) (vgl. Rummel et al. 2002)

Realisiert wird dies durch sechs dreiachsige Beschleunigungsmesser, die als Paare in zueinander senkrechten Richtungen mit Basislinien von 50 cm angeordnet sind. Man spricht hier auch von der sog. Diamantstellung des Gradiometers. In erdgerichteter Orientierung verläuft die x-Achse in Flugrichtung und die z-Achse in radialer Richtung. Die y-Achse ergänzt das orthogonale Dreibein und verläuft senkrecht zur Bahnebene. Die beobachteten Beschleunigungsmessungen bezüglich einer Basislinie liefern die Gradienten des Erdgravitationsfelds bzw. die zweiten Ableitungen des Potentials. Es sind neun Ableitungen, die einen symmetrischen Tensor 2. Stufe bilden. Die Maximalwerte der Tensorkomponenten in einer Flughöhe von 300 km können nach Müller (2001) wie folgt angegeben werden:

$$V_{\max} \approx \begin{pmatrix} 1350 & 1 & 1 \\ & 1350 & 5 \\ \text{symm.} & & -2700 \end{pmatrix} \text{E.U.} \quad (2.1)$$

Die Einheit dieser zweiten Ableitungen des Potentials ist Eötvös (E.U.). 1 E.U. entspricht 10^{-9} s^{-2} . Die Werte von V_{\max} können um ± 5 E.U. aufgrund der Bahnexzentrizität und der polaren Abplattung variieren. Die

Messgenauigkeit der einzelnen Komponenten des Tensors beträgt in den Hauptdiagonalelementen ± 0.001 E.U. und in den Nebendiagonalelementen ± 0.01 E.U.. Dies entspricht im Frequenzraum ca. $3 \text{ mE/Hz}^{1/2}$ innerhalb der Messbandbreite von 5 mHz bis 100 mHz. Fehler, die die Genauigkeit beeinflussen, sind Instrumentenfehler (Bias, Skalierungsfaktor der Beschleunigungsmesser, Misalignment, Nichtorthogonalität der Akzelerometerachsen), Fehler durch die Kopplung zwischen Instrument und Satellit und Fehler durch äußere Einflüsse (z.B. nicht-gravitativ Kräfte) (vgl. ESA 1999; Bouman 2000; Müller 2001; Stummer 2006). Mit der Flughöhe von ca. 250 km auf einer sonnensynchronen Bahn (Inklination von $i = 96.5^\circ$) ergibt sich eine Schwerefeldauflösung bis Grad und Ordnung 200 (vgl. Abbildung 2.3, Tabelle 2.1). Durch das Satellite-to-Satellite Tracking können die langen Wellenlängen, mittels der Gradiometrie die mittel- und kurzwelligen Anteile des statischen Schwerefelds ermittelt werden. Die geplante Missionsdauer beträgt 20 Monate.

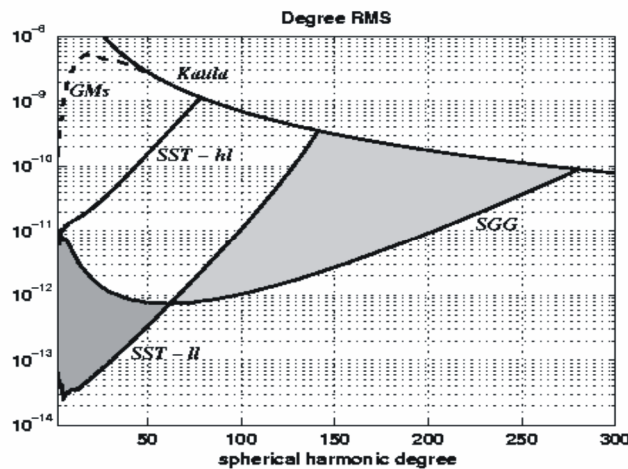


Abbildung 2.3 Grad-RMS-Kurve des SST im high-low Modus, des SST im low-low Modus und der Satellitengradiometrie (vgl. Pail 2006)

Tabelle 2.1 Entwicklungsgrad und räumliche Auflösung der Schwerefeldmissionen CHAMP, GRACE, GOCE

	GRIM4-S4	CHAMP	GRACE	GOCE
Entwicklungsgrad	60	70	150	200
Räumliche Auflösung ($\lambda/2$)	350 km	300 km	150 km	100 km

2.2 Lokale Schwerefeldmodellierung

In der lokalen (gravimetrischen und altimetrischen) Schwerefeldmodellierung werden mittels der Stokesschen Formel (Heiskanen und Moritz 1967) punktweise Geoidhöhen N oder Quasigeoidhöhen ζ hoher Genauigkeit berechnet (vgl. Gleichung (2.2)). Nach Sansò und Rummel (1997) hängt die Schwerefeldauflösung nur von der Dichte und der Qualität der vorliegenden Daten ab. Die Stokessche Integralformel lautet:

$$N = \frac{R}{4\pi \cdot \gamma} \cdot \iint_{\sigma} S(\psi) \cdot \Delta g \cdot d\sigma. \quad (2.2)$$

Die Schwereanomalie Δg lässt sich für den Fall der Geoidbestimmung durch $\Delta g = g_0 - \gamma_0$ bzw. für den Fall der Quasigeoidbestimmung durch $\Delta g = g_p - \gamma_Q$ darstellen. Hierbei sind g_0 die Schwere am Geoid bzw. γ_0 die Normalschwere am Ellipsoid und g_p der an der Erdoberfläche gemessene Schwerewert bzw. γ_Q die Normalschwere im Telluroidpunkt. Der Normalschwerewert γ entspricht dem mittleren Normalschwerewert über der Erdoberfläche bei der Geoidhöhenberechnung bzw. bei der Quasigeoidhöhenberechnung dem Normalschwerewert des Telluroidpunkts. In der Regel wird als Normalschwerfeld ein Referenzfeld vom Somigliana-Pizetti-Typ verwendet (vgl. Moritz 1984). Die Stokes-Funktion $S(\psi)$ ist eine Gewichtsfunktion, die vom Abstand ψ zwischen dem Aufpunkt P und dem „Quellpunkt“, d.h. dem Flächenelement $d\sigma$ mit der Schwereanomalie Δg , abhängt. $S(\psi)$ resultiert aus der Stokes-Helmert-Funktion $S(r, \psi)$, die im Zusammenhang mit der Lösung für den Außenraum der Kugel als Kernfunktion auftritt. Nach Pick et al. (1973) S. 473-479 gilt für $S(r, \psi)$

$$S(r, \psi) = \frac{2R}{\ell} + \frac{R}{r} - \frac{5R^2}{r^2} \cdot \cos \psi - \frac{3R^2}{r^2} \cdot \cos \psi \cdot \ln \left(\frac{r + \ell - R \cdot \cos \psi}{2r} \right) - \frac{3R \cdot \ell}{r^2}, \quad (2.3)$$

$$\ell = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos \psi}.$$

Für die Stokessche Funktion auf dem Rand der Erde mit $r = R$ folgt:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} + 1 - 5 \cdot \cos \psi - 6 \cdot \sin \frac{\psi}{2} - 3 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right). \quad (2.4)$$

Es ist zu erkennen, dass die Stokessche Funktion für $\psi = 0^\circ$ gegen unendlich geht. Die Nullstellen liegen bei $\psi = 39^\circ$ und 118° . Aufgrund der Singularität im Aufpunkt muss die direkte Umgebung des Aufpunkts gesondert betrachtet werden. Mit der Annahme einer ebenen Approximation, der Reihenentwicklung von Δg und anschließender gliedweiser Integration erhält man für die direkte Umgebung des Aufpunkts in erster Näherung

$$N = \frac{s_0}{\gamma} \cdot \Delta g, s_0 = R \cdot \psi_0. \quad (2.5)$$

ψ_0 stellt den Integrationsradius der inneren Zone dar. Die Auswertung der Stokesschen Formel für den übrigen Bereich erfolgt mittels FFT-Techniken (vgl. u.a. Schwarz et al. 1990), falls in Δg das Restsignal klein genug ist. Zur Berechnung der Höhenanomalie ζ nach Molodenskii wird die Gleichung (2.2) um das gravimetrische Zusatzglied G_1 erweitert, das den Einfluss der Geländegestalt enthält. Eine Erweiterung der Stokesschen Integralformel (2.2) unter Einbeziehung ellipsoidischer Effekte ist mit der ellipsoidischen Bruns-Formel (vgl. Ardalán und Grafarend 2001; Grafarend et al. 1999) gegeben.

Da bei diesen lokalen Berechnungen oftmals Datenlücken, z.B. an den Polkappen, auftreten, die Daten keine homogene Verteilung und Genauigkeit aufweisen und der langwellige Anteil des Schwerfelds durch globale Geopotentialmodelle gut erfasst ist, insbesondere seitdem CHAMP- und GRACE-Daten zur Verfügung stehen, ist man dazu übergegangen, Kombinationslösungen mittels der sog. Remove-Restore-Technik (vgl. u.a. Denker et al. 1986; Denker und Tziavos 1999; Lehmann 1994; Denker 2006) oder auch RCR (**R**emove-**C**ompute-**R**estore)-Technik (vgl. Forsberg und Tscherning 1997; Featherstone et al. 2004; Seitz et al. 2004; Sjöberg 2005) im Rahmen der Geoid- bzw. Quasigeoidbestimmung anzuwenden. Hierunter versteht man die Superposition der langwelligen (lw), mittelwelligen (mw) und kurzwelligen (kw) Anteile des Schwerfelds. Der langwellige Anteil wird durch ein globales Kugelfunktionsmodell beschrieben, lokale digitale Gelände- modelle repräsentieren den kurzwelligen Anteil und der mittelwellige Anteil ergibt sich als residualer Anteil aus der Subtraktion des langwelligen und kurzwelligen Anteils vom Messwert. Diese Kombination ist für alle Funktionale des Störpotentials T gültig: für die Potentiale

$$T = T_{lw} + T_{mw} + T_{kw}, \quad (2.6)$$

für die Schwereanomalien

$$\Delta g = \Delta g_{lw} + \Delta g_{mw} + \Delta g_{kw} \quad (2.7)$$

und für die Quasigeoidhöhen

$$\zeta = \zeta_{lw} + \zeta_{mw} + \zeta_{kw} \quad (2.8)$$

In einem ersten Schritt, dem Remove-Schritt, erfolgt eine punktweise Reduktion der Schwereanomalien (Gleichung (2.7)) um den langwelligigen Anteil und eine Glättung der Anomalien durch eine residuale Geländekorrektur (kurzwelliger Anteil). Bei der Residualtopographie wird nur der hochfrequente Anteil modelliert, da der langwellige Anteil bereits im globalen Schwerefeldmodell enthalten ist. Diese Modellierung bezeichnet man auch als RTM-Modellierung (**R**esidual **T**errain **M**odelling) (vgl. u.a. Forsberg 1984), da die Referenztopographie (RTM-Fläche) bei dieser Korrektur das globale topographische Modell des Kugelfunktionsmodells repräsentiert (siehe Abbildung 2.4).

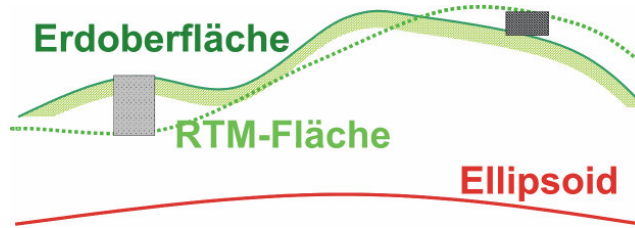


Abbildung 2.4 Residual Terrain Modelling (vgl. Seitz et al. 2004)

Im Compute-Schritt werden die residualen Schwereanomalien auf ein Gitter interpoliert und mittels der Stokeschen Formel (Gleichung (2.2)) in Geoid- bzw. Quasigeoidhöhen umgerechnet. Im Restore-Schritt werden die Anteile des globalen Modells und der Residualtopographie in den Geoid- bzw. Quasigeoidhöhen addiert. Der Einfluss des residualen Geländes kann durch verschiedene Massenelemente approximiert werden (vgl. Kapitel 3). Die RTM-Methode kann sinngemäß auch bei der Auswertung von Gradiometerdaten angewendet werden.

2.3 Modellierung von Massenwirkungen

Die Quelle des Gravitationsfelds ist die Massenverteilung im Innern der Erde. Die topographischen Massen und die Kompensationsmassen stellen die Hauptursachen der Unregelmäßigkeiten dieses Gravitationsfelds dar. Neben der RCR-Technik führt eine topographisch-isostatische Reduktion basierend auf verschiedenen isostatischen Modellen und Kondensationsmodellen zu einem glatten Gravitationsfeld. Diese Glättung (vgl. Heiskanen und Moritz 1967, Kapitel 3-9.) hat zur Folge, dass sich alle gemessenen Schwerewerte auf ein einheitliches Bezugsniveau beziehen und eine Schwereprädiktion und Schwereinterpretation vereinfacht möglich ist (u.a. Grüniger 1990; Abd-Elmotaal 1991; Tsoulis 1999a; Mladek 2006).

In der Fluggravimetrie und der Schwerefeldbestimmung durch Satellitenmissionen ist die Bestimmung des Potentialfelds der Erde ein sog. „schlecht gestelltes Problem“, in schwächerem Maße auch bei der terrestrischen Gravimetrie (vgl. Moritz 1966; Moritz 1990, S. 185). Die Feinstruktur des Gravitationsfelds wird mit zunehmender Höhe gedämpft. Die Rekonstruktion der Feinstruktur aus Flug- oder Satellitendaten führt bei der Fortsetzung nach unten zu einer Verstärkung des Messrauschens, von Instrumentenfehlern etc. (vgl. Abbildung 2.5a)). Diese Schlechtgestelltheit kann nach Kusche (2002) erstens durch eine Regularisierung z.B. nach Tykhonov und zweitens durch iterative Verfahren zur Lösung des Normalgleichungssystems, z.B. mittels Mehrgitterverfahren, beseitigt werden. Um die Schlechtgestelltheit des Ersatzproblems nach der Regularisierung zu minimieren, wird vorgeschlagen, wie im terrestrischen Fall eine topographisch-isostatische Reduktion an den Flug- oder Satellitendaten anzubringen. Die reduzierten Daten in Flug- und Satellitenhöhe sind folglich homogener und glatter und die Interpolation der Daten und die Rekonstruktion der Feinstruktur des Gravitationsfelds wird verbessert (vgl. Abbildung 2.5b)).

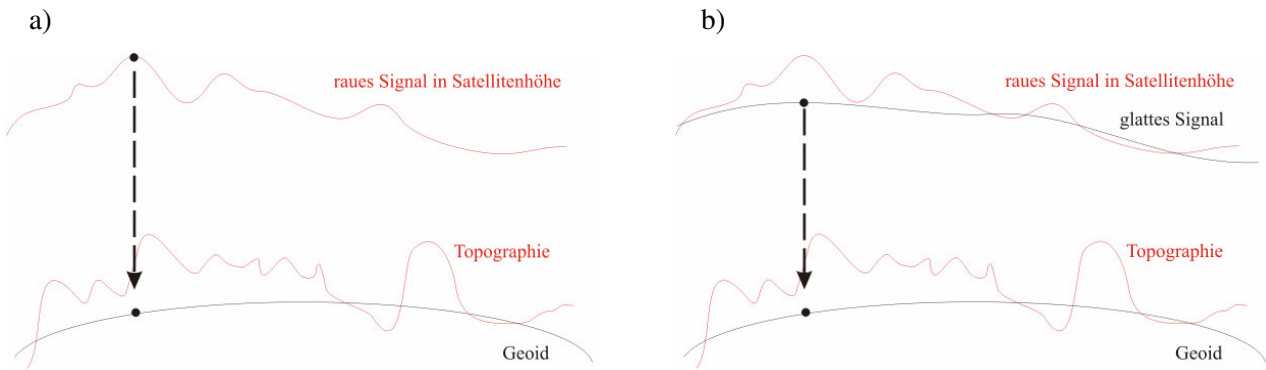


Abbildung 2.5 Gravitationsfeld in Satellitenhöhe: rau (a), geglättet (b)

In Janák et al. (2007) wird gezeigt, dass die topographisch-isostatische Reduktion des ersten Kondensationsmodells von Helmert eine vielversprechende Methode zur Glättung der Satellitendaten ist. Zu beachten ist, dass der Effekt der topographischen und isostatischen Massen in Form des indirekten Effekts nach der Fortsetzung der Daten auf das Geoid berücksichtigt wird (vgl. Makhloof und Ilk 2005).

Im Hinblick auf die geplante Satellitengradiometrie-Mission GOCE stellt die Kalibrierung des Gradiometers neben der harmonischen Fortsetzung der Daten nach unten eine weitere Anwendung der topographisch-isostatischen Reduktion dar (vgl. Koop et al. 2001; Bouman und Koop 2003; Wild und Heck 2005). Unter der externen Kalibrierung versteht man den Vergleich der intern kalibrierten Messungen mit unabhängigen, externen Messwerten, z.B. mit nach oben fortgesetzten terrestrischen Schwerewerten und anschließender Korrektur der Messwerte. Die gemessenen Gravitationsgradienten werden demnach mit dem Gravitationsfeld der Erde in Verbindung gebracht.

Die Modellierung der topographischen und isostatischen Massen ist eine zentrale Aufgabe in der Geodäsie. Es können prinzipiell zwei Methoden unterschieden werden: die analytischen und numerischen Methoden im Ortsbereich (vgl. Kapitel 3) und die sphärisch harmonische Entwicklung im Spektralbereich (vgl. Kapitel 4). Für die Abgrenzung der einzelnen Massenelemente im Ortsbereich werden die geographischen Gitternetzlinien herangezogen und die Grundflächen der einzelnen Massenelemente als Rechtecke angenommen. In der Praxis werden deshalb häufig Quader zur Approximation der Massen verwendet (vgl. Mader 1951; Nagy 1966; Forsberg 1984; Tsoulis 1999; Nagy et al. 2000,2002). Nach Grüninger (1990) und Kuhn (2000) ist es auch möglich, Punktmassen, Masselinien und Massenschichten zur Massenmodellierung zu verwenden. Eine weitere Variante stellt die radiale Integration der Volumenintegrale und numerische Berechnung der 2D-Integrale dar (vgl. Martinec 1998; Novák et al. 2001; Heck 2003). In Seitz und Heck (2001) und Heck und Seitz (2007) wird das Tesseroid als ein weiteres Massenelement vorgestellt. Alternativ zur Modellierung im Ortsbereich ist es üblich, das Gravitationspotential der Massen und dessen Ableitungen in Kugelfunktionen zu entwickeln (u.a. Forsberg 1984; Schwarz et al. 1990) bzw. eine Technik zu verwenden, bei der Orts- und Spektralbereich kombiniert werden (vgl. Tsoulis 1999). In Kuhn und Seitz (2005) findet ein Vergleich der Modellierung des Ortsbereichs und des Spektralbereichs für das Potential statt.

In dieser Arbeit werden die oben genannten Massenelemente und ihre Auswirkungen verglichen, jedoch nicht nur für das Potential und die Schwere, sondern mit Blick auf die kommende GOCE-Mission auch hinsichtlich der zweiten Ableitungen des Potentials. Ein Vergleich der Modellierung des Ortsbereichs mit der des Spektralbereichs wird global für die Elemente des Marussi-Tensors hinsichtlich Genauigkeit und Rechenzeit vorgenommen.

3 Methoden der Massenmodellierung im Ortsbereich

Die Lösung des Newtonschen Integrals erfolgt durch die Aufteilung der Massen in einzelne Volumenelemente anhand von geographischen Gitternetzlinien. Dies ist naheliegend, da die digitalen Geländemodelle üblicherweise in dieser Struktur vorliegen.

Im Folgenden werden die mathematischen und geometrischen Grundlagen aufgezeigt (vgl. Kapitel 3.1) und verschiedene Massenelemente und Berechnungsmethoden präsentiert (vgl. Kapitel 3.2). Es sind dies die Massenelemente Tesseroid, Quader, Punktmasse, Massenschicht und Massenlinie. Des Weiteren wird in Kapitel 3.3 auf die Modellierung des topographischen Effekts eingegangen bzw. in Kapitel 3.4. werden verschiedene isostatische Modelle vorgestellt. Neben den klassischen isostatischen Modellen von Airy-Heiskanen und Pratt-Hayford wird deren Kombination behandelt. Außerdem werden die beiden Kondensationsmodelle von Helmert und ein Erdkrustenmodell analysiert. Das regionale Vening Meinesz-Modell wird erläutert, aber nicht weiter verwendet. Anschließend werden die einzelnen Berechnungsmethoden in Kapitel 3.5 hinsichtlich Genauigkeit, Rechenzeit und Entfernung zum Aufpunkt verglichen und die Auswirkung der Elliptizität auf den topographisch-isostatischen Effekt ermittelt. In Kapitel 3.6 werden Ergebnisse verschiedener isostatischer Modelle gezeigt, mit dem Ziel, ein isostatisches Modell zu finden, welches am besten glättet, um die Fortsetzung der Daten nach unten zu vereinfachen.

3.1 Mathematische und geometrische Grundlagen

Das äußere Schwerfeld der Erde lässt sich im Allgemeinen unter Vernachlässigung bzw. nach Reduktion zeitabhängiger Effekte – insbesondere lunisolarer, Erd- und Meereszeiten und atmosphärischer Einflüsse – durch das stationäre Schwerpotential W beschreiben (vgl. Heck 1984). Dieses setzt sich aus dem Gravitationspotential V und dem Zentrifugalpotential Z zusammen. In Grafarend (2000) wird das zeitabhängige Gravitationsfeld der topographischen und isostatischen Massen beschrieben, wobei das stationäre Gravitationsfeld Gegenstand dieser Arbeit ist. Für das Gravitationspotential gilt unter Anwendung des Newtonschen Volumenintegrals

$$V = G \cdot \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{\ell} \cdot d\Omega \quad \text{mit } \Omega = \Omega(\lambda', \varphi', \xi), \quad 0 \leq \lambda' < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi' \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \xi \leq r(\lambda', \varphi'), \quad (3.1)$$

wobei $r(\lambda', \varphi')$ den Radius der Erdoberfläche, $G = 6.572 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ die Gravitationskonstante, ρ die ortsabhängige Dichte, ℓ den Abstand zwischen dem Aufpunkt und dem variablen Quellpunkt und $d\Omega$ das Volumenelement darstellt. Für die gravitative Anziehung gilt

$$\mathbf{g} = \text{grad } W \quad (3.2)$$

bzw. unter Vernachlässigung des Zentrifugalanteils folgt

$$\mathbf{g} = \text{grad } V = (V_x \quad V_y \quad V_z)^T. \quad (3.3)$$

Die einzelnen Komponenten der Schwerebeschleunigung ergeben sich in kartesischen Koordinaten zu

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.4)$$

bzw. in sphärischen Koordinaten wird der Schwerevektor durch die folgende Formel dargestellt

$$\mathbf{g} = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad \frac{1}{r \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial V}{\partial r} \right)^T. \quad (3.5)$$

Für die in der Gradiometrie benötigten zweiten Ableitungen des Potentials gilt in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \text{grad } \mathbf{g} = \text{grad grad } V = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

mit

$$V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, V_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \text{ etc.} \quad (3.7)$$

bzw. in sphärischen Koordinaten (vgl. Tscherning 1976)

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + r \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right), M_{12} = \frac{1}{r^2 \cdot \cos \varphi} \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \lambda} + \tan \varphi \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) = M_{21} \\ M_{13} &= \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = M_{31} \\ M_{22} &= \frac{1}{r^2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + r \cdot \cos^2 \varphi \cdot \frac{\partial V}{\partial r} - \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \\ M_{23} &= \frac{1}{r \cdot \cos \varphi} \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \lambda} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) = M_{32}, M_{33} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Diese 9 Elemente werden als Schweregradiententensor, Eötvös-Tensor oder auch Marussi-Tensor bezeichnet. Aus der Eigenschaft des Schwerefelds wirbelfrei zu sein

$$\text{rot } \mathbf{g} = \text{rot grad } V = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

folgt für die Komponenten des Tensors die Symmetrieeigenschaft

$$V_{xy} = V_{yx}, V_{xz} = V_{zx}, V_{yz} = V_{zy}. \quad (3.10)$$

Mit der zusätzlichen Bedingung der Laplacegleichung

$$\Delta = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0 \quad (3.11)$$

enthält der Marussi-Tensor damit 5 voneinander unabhängige Elemente.

Je nachdem, ob kartesische oder ellipsoidische bzw. sphärische Koordinaten die Grundlage für die Berechnung des Potentials und seiner ersten und zweiten Ableitungen bilden, erhält man das Potential, den Schwerevektor und den Marussi-Tensor im lokalen Kantensystem des Quaders oder im topozentrischen System des Aufpunkts Q (Horizontsystem) (vgl. Kapitel 2.3). Im Fall des lokalen Systems des Quaders erfolgt deshalb noch eine Transformation in das am Ortsvektor oder an der Ellipsoidnormalen orientierte Aufpunktsystem.

Die Transformation vom lokalen Kantensystem des Quaders in das System des Aufpunkts erfolgt über ein konventionelles, globales geodätisches Äquatorsystem, da vorausgesetzt wird, dass die räumlichen kartesischen oder ellipsoidischen Koordinaten des Aufpunkts Q und des Punkts P' in der Mitte der Quaderdeckfläche bekannt sind (siehe Abbildung 3.1). Der Effekt der Lotabweichungen wird im Folgenden vernachlässigt.

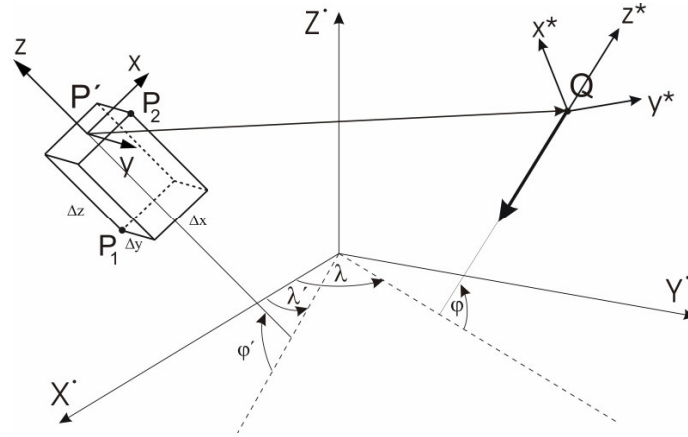


Abbildung 3.1 Transformation vom lokalen System des Quaders in das System des Aufpunkts Q

Für die Transformation des Schwerevektors gilt nach Grüninger (1990) und Kuhn (2000)

$$\mathbf{g}^* = \underbrace{\mathbf{S}_x \cdot \mathbf{R}_y \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda) \cdot \left(\mathbf{S}_x \cdot \mathbf{R}_y \left(\frac{\pi}{2} - \varphi' \right) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda') \right)^T}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{g}. \quad (3.12)$$

\mathbf{R}_y und \mathbf{R}_z beschreiben Drehmatrizen der Rotationen um die y- und die z-Achse, während \mathbf{S}_x eine Spiegelung der x-Achse darstellt. Für die Transformationsmatrix \mathbf{R} gilt

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi' + \cos \varphi \cdot \cos \varphi' & c_2 \cdot \sin \varphi & -c_1 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi' + \cos \varphi \cdot \sin \varphi' \\ -c_2 \cdot \sin \varphi' & c_1 & c_2 \cdot \cos \varphi' \\ -c_1 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi' + \sin \varphi \cdot \cos \varphi' & -c_2 \cdot \cos \varphi & c_1 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi' + \sin \varphi \cdot \sin \varphi' \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

wobei

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos \lambda \cdot \cos \lambda' + \sin \lambda \cdot \sin \lambda' = \cos(\lambda - \lambda'), \\ c_2 &= \sin \lambda \cdot \cos \lambda' - \cos \lambda \cdot \sin \lambda' = \sin(\lambda - \lambda'). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Den Marussi-Tensor im topozentrischen System des Aufpunkts Q erhält man durch

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}^T, \quad (3.15)$$

wobei \mathbf{M} der Marussi-Tensor im Kantensystem des Quaders ist.

3.2 Modellierung von Massenwirkungen

Bei der Modellierung von topographischen und isostatischen Massen unterscheidet man Massenkörper, die auf kartesischer oder ellipsoidischer bzw. sphärischer Gitternetzeinteilung basieren, je nachdem ob sie im Nah- oder Fernbereich eines Aufpunkts liegen.

In den letzten Jahren wird im Nahbereich, in dem die Topographie in der Regel in kartesischer Gitternetzeinteilung (z.B. Gauß-Krüger-Koordinaten) vorliegt, das Gelände in Quader eingeteilt (vgl. Mader 1951; Nagy et al. 1974, 2000, 2002). Aufgrund der zeitaufwändigen Berechnung des Gravitationsfelds durch Quader werden auch andere Massenelemente wie das Tesseroid (vgl. Seitz und Heck 2001; Heck und Seitz 2007), die Punktmasse, die Massenlinie und die Massenschicht zur Modellierung der topographischen Massen verwendet. Die letzten drei Massenelemente werden u.a. in Grüninger (1990) beschrieben und finden häufig bei der Modellierung des Fernbereichs Anwendung, während der Quader in der unmittelbaren Umgebung des Berechnungspunkts eingesetzt wird.

Das Gravitationspotential der topographischen und isostatischen Massen kann mittels des Newton-Integrals (siehe Formel (3.1)) beschrieben werden. Zur Modellierung der Massen werden diese in einzelne Volumenelemente Ω_i aufgeteilt, wobei die Dichte ρ_i als konstant angenommen wird:

$$V(Q) = G \cdot \sum_i \rho_i \cdot \iiint_{\Omega_i} \frac{d\Omega_i}{\ell} \quad \text{mit } \Omega = \sum_i \Omega_i. \quad (3.16)$$

Das Dreifachintegral jedes Volumenelements ist im Fall des Quaders (vgl. Kapitel 3.2.2), der Punktmasse (vgl. Kapitel 3.2.3), der Massenschicht (vgl. Kapitel 3.2.4) und der Massenlinie (vgl. Kapitel 3.2.5) analytisch lösbar. Im Fall des Quaders lässt sich der Integrand auch in eine Taylorreihe entwickeln („MacMillan-Approximation“, MacMillan 1930; Forsberg 1984), wobei der Term nullter Ordnung dem Potential einer Punktmasse entspricht (vgl. Kapitel 3.2.3). Im Fall des Tesseroids existiert keine analytische Lösung (vgl. Kapitel 3.2.1); eine Variante das Dreifachintegral zu lösen stellt die rein numerische Berechnung mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) dar. Eine Alternative ist die Taylorreihenentwicklung des Integranden; der Term nullter Ordnung entspricht der Punktmasse (vgl. Kapitel 3.2.3). Das elliptische Integral lässt sich auch durch eine Aufteilung in ein eindimensionales Integral über den radialen Parameter ξ , für das eine analytische Lösung existiert, und ein zweidimensionales Flächenintegral, das mittels Quadraturmethoden, speziell der Gauß-Legendre-Kubatur (2D), berechnet wird, lösen. Die Approximation von Tesseroiden mittels Quadern (vgl. Kapitel 3.2.2) bei sphärischer Gitternetzenteilung unter der Annahme der Massengleichheit stellt eine weitere Möglichkeit dar, das Dreifachintegral zu berechnen; dies erfordert zusätzlich eine Transformation vom Kantensystem des Quaders in das System des Aufpunkts. Die Diskussion der analytischen, halbanalytischen und numerischen Verfahren zur Berechnung der Gravitationseffekte dieser Massenelemente auf das Potential, die ersten und insbesondere die zweiten Ableitungen zur Nutzung in der terrestrischen und satellitengestützten Gravitationsfeldbestimmung wird in Kapitel 3.5, Kapitel 3.6 und in Wild (2006) beschrieben.

3.2.1 Tesseroid

Das Tesseroid ist ein Massenkörper (vgl. Anderson 1976; Grüniger 1990; Kuhn 2000; Seitz und Heck 2001; Heck und Seitz 2007), welcher durch zwei Meridianebenen ($\lambda_1 = \text{konst.}$, $\lambda_2 = \text{konst.}$) und zwei Kegelmantelflächen, deren erzeugenden Geraden durch den Kugelmittelpunkt 0 gehen und entlang der Parallelkreise $\varphi_1 = \text{konst.}$, $\varphi_2 = \text{konst.}$ verlaufen, begrenzt ist (vgl. Abbildung 3.2). Die Deckflächen sind Flächen konstanter Höhe. Sphärisch betrachtet sind es konzentrische Kugeln mit $r_1 = \text{konst.}$, $r_2 = \text{konst.}$; im Fall eines Ellipsoids sind es Flächen konstanter ellipsoidischer Höhe $h_1 = \text{konst.}$ und $h_2 = \text{konst.}$. Im Folgenden wird vom sphärischen Tesseroid ausgegangen.

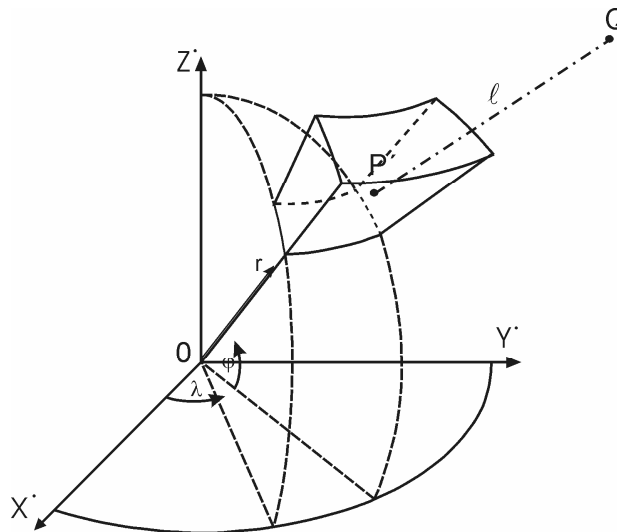


Abbildung 3.2 Tesseroid im globalen Koordinatensystem

3.2.1.1 Dreifachintegraldarstellung und numerische Integration von 3D Integralen

Die Potentialwirkung eines Tesseroids ergibt sich nach (3.16) mittels des Newtonschen Integrals, wobei Ω_i dem Volumen eines Tesseroids ($r_1 \leq \xi(\lambda', \varphi') \leq r_2$; $\varphi_1 \leq \varphi' \leq \varphi_2$; $\lambda_1 \leq \lambda' \leq \lambda_2$) entspricht

$$V(Q) = G \cdot \sum_i \rho_i \cdot \int_{\xi=r_1}^{\xi=r_2} \int_{\varphi'=\varphi_1}^{\varphi'=\varphi_2} \int_{\lambda'=\lambda_1}^{\lambda'=\lambda_2} \frac{d\Omega_i}{\ell}, \quad d\Omega_i = \xi^2 \cdot \cos \varphi' \cdot d\xi d\varphi' d\lambda'. \quad (3.17)$$

Die Koordinaten des Gravitationsvektors \mathbf{g} und die Komponenten des Marussi-Tensors \mathbf{M} bezüglich des Dreibeins im lokalen Horizontsystem (North/East/Up) erhält man (siehe Tscherning 1976) über die partiellen Ableitungen des Potentials (vgl. Formeln (3.2) - (3.8)). Diese Dreifachintegrale können mittels rein numerischer Methoden, z.B. der Gauß-Legendre-Kubatur (3D) (siehe Anhang A.2), berechnet werden. Die Integralkerne jedes Volumenintegrals sind für das Potential und seine ersten und zweiten Ableitungen im Anhang A.3 aufgelistet.

3.2.1.2 Taylorreihenentwicklung

Ein weiteres Verfahren zur Lösung des elliptischen Integrals stellt die Taylorreihenentwicklung des Integranden I (3.1) bzw. (3.16) mit anschließender gliedweiser Integration dar

$$I = I(\xi, \varphi', \lambda') = \frac{\xi^2 \cdot \cos \varphi'}{\sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cdot \cos \psi}} = \frac{\xi^2 \cdot \cos \varphi'}{\ell}. \quad (3.18)$$

Die Taylorreihenentwicklung bis zum Grad 2 im Entwicklungspunkt $P_0(r_0, \varphi_0, \lambda_0)$ lautet:

$$I(\xi, \varphi', \lambda') = I(r_0, \varphi_0, \lambda_0) + \left\{ \frac{\partial I}{\partial \xi} \Big|_0 \cdot \Delta \xi + \frac{\partial I}{\partial \varphi'} \Big|_0 \cdot \Delta \varphi' + \frac{\partial I}{\partial \lambda'} \Big|_0 \cdot \Delta \lambda' \right\} \\ + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \Big|_0 \cdot \Delta \xi^2 + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \varphi'} \Big|_0 \cdot \Delta \xi \Delta \varphi' + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial \xi \partial \lambda'} \Big|_0 \cdot \Delta \xi \Delta \lambda' \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \Big|_0 \cdot \Delta \varphi'^2 + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi' \partial \lambda'} \Big|_0 \cdot \Delta \varphi' \Delta \lambda' + \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda'^2} \Big|_0 \cdot \Delta \lambda'^2 \right\} + O(\Delta^3) \quad (3.19)$$

$$\Delta \xi' = \xi' - \xi_0, \Delta \varphi' = \varphi' - \varphi_0, \Delta \lambda' = \lambda' - \lambda_0.$$

In Gleichung (3.19) bedeutet das Landausymbol $O(\Delta^3)$, dass die Terme ab der dritten Ordnung in $\Delta \xi, \Delta \varphi', \Delta \lambda'$ vernachlässigt werden. Wenn der Entwicklungspunkt P_0 im Mittelpunkt des Tesseroids liegt, d.h.

$$r_0 = (r_1 + r_2)/2, \varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2, \lambda_0 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2, \quad (3.20)$$

sind die Terme ungerader Ordnung bzw. gemischte Terme nach der Integration gleich Null. Das Potential kann folglich mittels

$$V(Q) = G\rho \cdot \left[I(r_0, \varphi_0, \lambda_0) + \frac{1}{24} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \Big|_0 \cdot \Delta r^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \Big|_0 \cdot \Delta \varphi^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda'^2} \Big|_0 \cdot \Delta \lambda^2 \right\} + O(\Delta^4) \right] \cdot \Delta r \Delta \varphi \Delta \lambda \quad (3.21)$$

beschrieben werden, wobei

$$\Delta r = r_2 - r_1, \Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (3.22)$$

Für die einzelnen partiellen Ableitungen gilt:

$$I(r_0, \varphi_0, \lambda_0) = \frac{r_0^2 \cdot \cos \varphi_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cdot \cos \psi_0}} = \frac{r_0^2 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0} \quad (3.23)$$

$$\cos \psi_0 = \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos(\lambda - \lambda_0)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \right|_0 &= \frac{r^2 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 2\ell_0^2 - 3r_0^2 \cdot \sin^2 \psi_0 \right\} \\ \left. \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \right|_0 &= \frac{r_0^2}{\ell_0^5} \cdot \left\{ -\cos \varphi_0 \cdot (r^2 + r_0^2) \cdot (r^2 + r_0^2 - rr_0 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0) \right. \\ &\quad \left. + r^2 r_0^2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot (\sin^2 \varphi \cdot (3 - \sin^2 \varphi_0) - \cos^2 \varphi \cdot (2 - \sin^2 \varphi_0) \cdot \cos^2 \Delta \lambda_0) \right. \\ &\quad \left. + rr_0 \cdot \cos \varphi \cdot (3 - \sin^2 \varphi_0) \cdot (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0) \cdot \cos \Delta \lambda_0 \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_0 = -\frac{rr_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0}{\ell_0^5} \cdot \left\{ \ell_0^2 \cdot \cos \Delta \lambda_0 - 3rr_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \right\}$$

$$\Delta \lambda_0 = \lambda - \lambda_0$$

Für die Komponenten des Schwerevektors und des Marussi-Tensors sind analog die Integranden in Taylorreihen zu entwickeln und die partiellen Ableitungen nach ξ , φ' , λ' zu bilden (vgl. Anhang A.3).

3.2.1.3 2D-Integrale durch analytische Integration über r

Bei dieser Methode wird das Volumenintegral in ein eindimensionales Integral zur vertikalen, radialen Integration und ein zweidimensionales Flächenintegral zerlegt, d.h.

$$V(Q) = G\rho \cdot \iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R}^{\xi=r'(\lambda', \varphi')} \frac{\xi^2}{\ell} \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma, \quad d\sigma = \sin \psi \cdot d\psi \, d\alpha = \cos \varphi' \cdot d\varphi' \, d\lambda'. \quad (3.25)$$

R stellt den Kugelradius dar. Das Potential ergibt sich nach Martinec (1998), Novák (2000), Novák et al. (2001), Vaniček et al. (2001), Heck (2003) und Vaniček et al. (2004) zu

$$V(Q) = \frac{G\rho}{2} \cdot \iint_{\sigma} \left[\xi \ell + 3r \cdot \cos \psi \cdot \ell + r^2 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \ln(\ell + \xi - r \cdot \cos \psi) \right]_R^{r'} \cdot d\sigma = G\rho \cdot \iint_{\sigma} K_V \cdot d\sigma, \quad (3.26)$$

wobei

$$K_V = \frac{1}{2} \cdot \left\{ r' \bar{\ell}' - R \tilde{\ell} + 3r \cdot \cos \psi \cdot (\bar{\ell}' - \tilde{\ell}) + r^2 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi} \right| \right\}, \quad (3.27)$$

$$\bar{\ell}' = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos \psi}, \quad \tilde{\ell} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos \psi}.$$

Die Berechnung der radialen Ableitung des Potentials kann mittels der folgenden Identität (vgl. Heck 2003) vereinfacht werden:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\xi^2}{\ell} \right) = \frac{2}{r} \cdot \left(\frac{\xi^2}{\ell} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi^3}{r \cdot \ell} \right). \quad (3.28)$$

Man erhält für die dritte Komponente des Schwerevektors:

$$\frac{\partial V(Q)}{\partial r} = \frac{2}{r} \cdot V(Q) - \frac{G\rho}{r} \cdot \iint_{\sigma} \left[\frac{\xi^3}{\ell} \right]_{\xi} \cdot d\sigma = G\rho \cdot \iint_{\sigma} K_{V_r} \cdot d\sigma, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K}_{V_r} = \frac{\partial \mathbf{K}_V}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \left\{ r' \bar{\ell}' - R \tilde{\ell} + 3r \cdot \cos \psi \cdot (\bar{\ell}' - \tilde{\ell}) + r^2 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi} \right| - \frac{r'^3}{\bar{\ell}'} + \frac{R^3}{\tilde{\ell}} \right\}.$$

Die partiellen Ableitungen nach φ und λ zur Berechnung des Schwerevektors lauten

$$\frac{\partial V(Q)}{\partial \varphi} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} \mathbf{K}_{V_\varphi} \cdot d\sigma,$$

$$\mathbf{K}_{V_\varphi} = \frac{\partial \mathbf{K}_V}{\partial \varphi} = \frac{\cos \psi|_{\varphi}}{2} \cdot \left\{ -\frac{r'^2}{\bar{\ell}'} + \frac{rR^2}{\tilde{\ell}} + 3r \cdot \left((\bar{\ell}' - \tilde{\ell}) - \frac{r r'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{rR}{\tilde{\ell}} \cdot \cos \psi \right) + 6r^2 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi} \right| + r^3 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \left(\frac{R + \tilde{\ell}}{\tilde{\ell} \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi)} - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) \right\} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial V(Q)}{\partial \lambda} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} \mathbf{K}_{V_\lambda} \cdot d\sigma,$$

$$\mathbf{K}_{V_\lambda} = \frac{\partial \mathbf{K}_V}{\partial \lambda} = \frac{\cos \psi|_{\lambda}}{2} \cdot \left\{ -\frac{r'^2}{\bar{\ell}'} + \frac{rR^2}{\tilde{\ell}} + 3r \cdot \left((\bar{\ell}' - \tilde{\ell}) - \frac{r r'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{rR}{\tilde{\ell}} \cdot \cos \psi \right) + 6r^2 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi} \right| + r^3 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \left(\frac{R + \tilde{\ell}}{\tilde{\ell} \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi)} - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) \right\} \quad (3.31)$$

wobei

$$\begin{aligned} \cos \psi|_{\varphi} &= \cos \varphi \cdot \sin \varphi' - \sin \varphi \cdot \cos \varphi' \cdot \cos(\lambda - \lambda'), \\ \cos \psi|_{\lambda} &= -\cos \varphi \cdot \cos \varphi' \cdot \sin(\lambda - \lambda'). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Die zweiten partiellen Ableitungen zur Berechnung des Marussi-Tensors sind im Anhang A.1 zu finden. Zur Berechnung der zweiten radialen Ableitung kann analog zum Fall der ersten radialen Ableitung die nachfolgende Identität verwendet werden

$$\frac{\partial}{\partial r^2} \left(\frac{\xi^2}{\ell} \right) = -\frac{2}{r^2} \cdot \left(\frac{\xi^2}{\ell} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{\xi^2}{\ell} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{3\xi^3}{2r^2 \cdot \ell} + \frac{\xi^3 \cdot (r^2 - \xi^2)}{2r^2 \cdot \ell^3} \right), \quad (3.33)$$

die zu folgender Formel führt

$$\frac{\partial V(Q)}{\partial r^2} = -\frac{2}{r^2} \cdot V(Q) + \frac{\partial V(Q)}{\partial r} + \frac{G\rho}{r^2} \cdot \iint_{\sigma} \left[\frac{3\xi^3}{2r^2 \cdot \ell} + \frac{\xi^3 \cdot (r^2 - \xi^2)}{2r^2 \cdot \ell^3} \right]_{\xi} \cdot d\sigma. \quad (3.34)$$

Die vollständige Gleichung der zweiten radialen Ableitung ist in Heck und Wild (2005) aufgelistet.

Mit der Aufteilung des Integrationsintervalls $[R, r']$ durch den Aufpunkt $P \in S$ in $[R, r_p]$, $[r_p, r']$ (vgl. Abbildung 3.3) ergibt sich ein konstanter Term, der dem Einfluss einer sphärischen Schale mit konstanter Dichte ρ und Dicke $(r_p - R)$ entspricht und ein integraler Term, der verschwindet, wenn keine Topographie vorhanden ist.

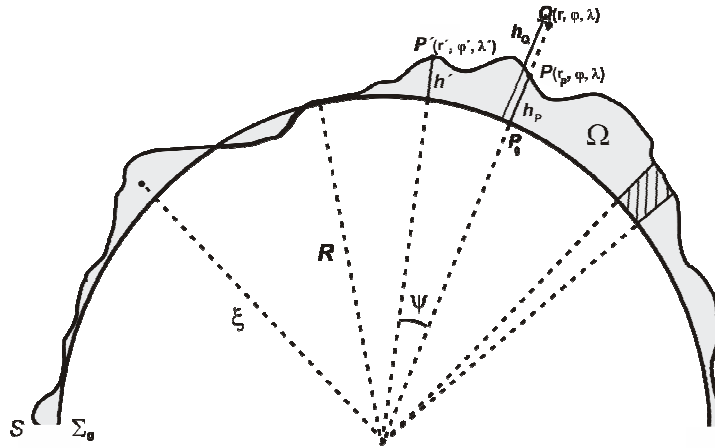


Abbildung 3.3 Geometrie der Topographie in sphärischer Approximation

Für das Potential ergibt sich die zu (3.34) äquivalente Form

$$\begin{aligned}
 V(Q) &= \frac{4\pi G\rho}{3r} \cdot (r_p^3 - R^3) + \frac{G\rho}{2} \cdot \iint_{\sigma} \left[\frac{r'\bar{\ell}' - r_p\bar{\ell} + 3r \cdot \cos\psi \cdot (\bar{\ell}' - \bar{\ell})}{r^2 \cdot (3\cos^2\psi - 1) \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos\psi}{\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos\psi} \right|} \right] \cdot d\sigma, \\
 &= \frac{4\pi G\rho}{3r} \cdot (r_p^3 - R^3) + G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{K}_V \cdot d\sigma,
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

wobei

$$\bar{K}_V = \frac{1}{2} \cdot \left\{ r'\bar{\ell}' - r_p\bar{\ell} + 3r \cdot \cos\psi \cdot (\bar{\ell}' - \bar{\ell}) + r^2 \cdot (3\cos^2\psi - 1) \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos\psi}{\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos\psi} \right| \right\}, \tag{3.36}$$

$$\bar{\ell}' = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos\psi}, \quad \bar{\ell} = \sqrt{r^2 + r_p^2 - 2rr_p \cdot \cos\psi}.$$

Die einzelnen partiellen Ableitungen zur Berechnung des Schwerevektors lauten im Fall der Aufteilung des Integrationsintervalls

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V(Q)}{\partial r} &= -\frac{4\pi G\rho}{3r^2} \cdot (r_p^3 - R^3) + G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{K}_{V_r} \cdot d\sigma, \\
 \bar{K}_{V_r} &= \frac{\partial \bar{K}_V}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \left\{ -\frac{r'^3}{\bar{\ell}'} + \frac{r_p^3}{\bar{\ell}} + r'\bar{\ell}' - r_p\bar{\ell} + 3r \cdot \cos\psi \cdot (\bar{\ell}' - \bar{\ell}) \right. \\
 &\quad \left. + r^2 \cdot (3\cos^2\psi - 1) \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos\psi}{\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos\psi} \right| \right\}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial V(Q)}{\partial \varphi} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{K}_{v_{\varphi}} \cdot d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{v_{\varphi}} = \frac{\partial \bar{K}_v}{\partial \varphi} = \frac{\cos \psi \Big|_{\varphi}}{2} \cdot \left\{ -\frac{r r'^2}{\bar{\ell}'} + \frac{r r_p^2}{\bar{\ell}} + 3r \cdot \left((\bar{\ell}' - \bar{\ell}) - \frac{r r'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{r r_p}{\bar{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \right. \\ \left. + 6r^2 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos \psi} \right| \right. \\ \left. + r^3 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \left(\frac{r_p + \bar{\ell}}{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos \psi)} - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial V(Q)}{\partial \lambda} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{K}_{v_{\lambda}} \cdot d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{v_{\lambda}} = \frac{\partial \bar{K}_v}{\partial \lambda} = \frac{\cos \psi \Big|_{\lambda}}{2} \cdot \left\{ -\frac{r r'^2}{\bar{\ell}'} + \frac{r r_p^2}{\bar{\ell}} + 3r \cdot \left((\bar{\ell}' - \bar{\ell}) - \frac{r r'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{r r_p}{\bar{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \right. \\ \left. + 6r^2 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos \psi} \right| \right. \\ \left. + r^3 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \left(\frac{r_p + \bar{\ell}}{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos \psi)} - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

In Heck und Wild (2005) ist die zweite radiale Ableitung explizit dargestellt. Die partiellen Ableitungen zur Aufstellung des Marussi-Tensors sind im Anhang A.1 zu finden. Die Auswertung des Flächenintegrals erfolgt numerisch mittels Gauß-Legendre-Kubatur (2D) (siehe Anhang A.2).

3.2.1.4 Approximation des Tesseroids durch einen Quader

Wird anstelle des Tesseroids ein Quader im ellipsoidischen bzw. sphärischen Horizontsystem verwendet, so erhält man die Potentialwirkung, Schwerewirkung und den Marussi-Tensor zunächst im lokalen System des Quaders (vgl. Kapitel 3.2.2). Diese Effekte sind folglich noch in das System des Aufpunkts zu transformieren (siehe Kapitel 3.1). Die bestmögliche Anpassung eines Tesseroids durch einen Quader erfolgt über die Bedingung: Beide Körper sollen gleiche Volumina aufweisen, d.h.

$$V_{\text{Tesseroid}} = V_{\text{Quader}} \quad (3.40)$$

und nach Grüninger (1990)

$$\frac{1}{3} \cdot (r_2^3 - r_1^3) \cdot (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z. \quad (3.41)$$

Die Taylorreihenentwicklung der $\sin \varphi_i$ für $i = 1, 2$ bis zu Gliedern 4. Ordnung lautet:

$$\sin(\varphi_0 \pm \Delta\varphi/2) = \sin \varphi_0 + (\pm \Delta\varphi/2) \cdot \cos \varphi_0 - \frac{1}{2!} (\pm \Delta\varphi/2)^2 \cdot \sin \varphi_0 - \frac{1}{3!} (\pm \Delta\varphi/2)^3 \cdot \cos \varphi_0 + O(\Delta^4), \quad (3.42)$$

wobei der Taylorpunkt der Tesseroidmittelpunkt $P_0(r_0, \varphi_0, \lambda_0)$ ist. $O(\Delta^4)$ bedeutet, dass Terme ab der vierten Ordnung in $\Delta\varphi$ vernachlässigt werden. Für Gleichung (3.41) folgt mit Gleichung (3.42)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \cdot (r_2^3 - r_1^3) \cdot \left(\Delta\varphi \cdot \cos \varphi_0 - \frac{1}{24} \Delta\varphi^3 \cdot \cos \varphi_0 \right) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(3r_0^2 \cdot \Delta r + \frac{1}{4} \Delta r^3 \right) \cdot \left(\Delta\varphi \cdot \cos \varphi_0 - \frac{1}{24} \Delta\varphi^3 \cdot \cos \varphi_0 \right) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \\
&= \Delta r \cdot r_0^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \frac{\Delta r^2}{r_0^2} \right) \cdot \cos \varphi_0 \cdot \Delta\varphi \cdot \left(1 - \frac{1}{24} \Delta\varphi^2 \right) \cdot \Delta\lambda \\
&= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Hierbei gilt

$$r_0 = (r_1 + r_2)/2, \varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2, \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1. \tag{3.44}$$

Eine Approximation für die Umrechnung der Tesseroid- in die Quaderdimensionen ist

$$\Delta x = r_0 \cdot \Delta\varphi \cdot \left(1 - \frac{1}{24} \Delta\varphi^2 \right), \Delta y = r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \Delta\lambda, \Delta z = \Delta r \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \frac{\Delta r^2}{r_0^2} \right) \quad \text{(I. Approximation)} \tag{3.45}$$

bzw.

$$\Delta x = r_0 \cdot \Delta\varphi, \Delta y = r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{24} \Delta\varphi^2 \right) \cdot \Delta\lambda, \Delta z = \Delta r \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \frac{\Delta r^2}{r_0^2} \right) \quad \text{(II. Approximation)}. \tag{3.46}$$

Wenn nur Potenzen 1. Ordnung von $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$, Δr zur Umrechnung verwendet werden, insbesondere wenn die Abmessungen des Tesseroids sehr klein sind ($\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$) und der Abstand des Tesseroids zum Mittelpunkt des globalen Koordinatensystems im Vergleich zur Ausdehnung des Tesseroids sehr groß ist ($\Delta r \ll r_1$) (siehe Grüniger 1990), gilt die gröbere Approximation

$$\Delta x = r_0 \cdot \Delta\varphi, \Delta y = r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \Delta\lambda, \Delta z = \Delta r \quad \text{(III. Approximation)}. \tag{3.47}$$

Der Vergleich dieser Approximationen erfolgt in Kapitel 3.5.1.

3.2.2 Quader

3.2.2.1 Analytische Berechnung

In der unmittelbaren Umgebung des Aufpunkts, in der digitale Geländemodelle (DGM) üblicherweise als kartesisches Gitter (z.B. Gauß-Krüger oder UTM Koordinaten) vorliegen, wird das Gelände in Quader eingeteilt. Für jeden Quader wird ein lokales Koordinatensystem definiert, das entsprechend parallel zu den Kanten des Quaders verläuft. Die Richtung der z-Achse verläuft in radialer Richtung bzw. entgegengesetzt zur Lotrichtung, die x-Achse und die y-Achse liegen in der lokalen Tangentialebene und sind nach Norden bzw. Osten gerichtet (vgl. Abbildung 3.4).

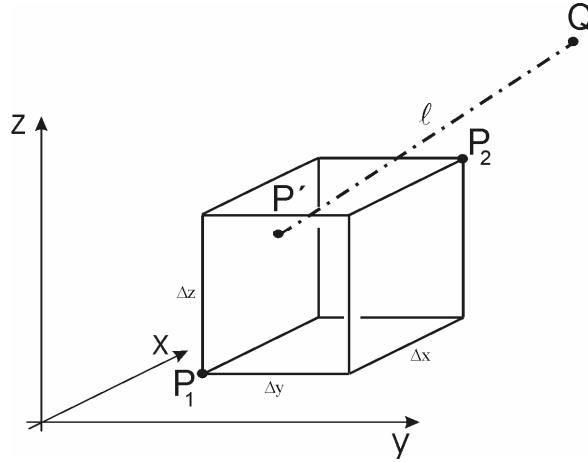


Abbildung 3.4 Quader im lokalen Koordinatensystem

Das Potential eines Quaders in einem beliebigen Aufpunkt Q ergibt sich allgemein mittels des Newtonschen Integrals nach (3.1), wobei

$$dV = dx' dy' dz', \quad \ell = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}, \quad \rho(x', y', z'). \quad (3.48)$$

Bei homogener Massenverteilung ergibt sich für das Potential eines Quaders nach Mader (1951)

$$V(Q) = G\rho \cdot \left[\begin{array}{l} -\bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \log(\bar{x} + \ell) - \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \log(\bar{z} + \ell) - \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \log(\bar{y} + \ell) \\ + \frac{\bar{x}^2}{2} \cdot \arctan \frac{\bar{y} \cdot \bar{z}}{\bar{x} \cdot \ell} + \frac{\bar{y}^2}{2} \cdot \arctan \frac{\bar{x} \cdot \bar{z}}{\bar{y} \cdot \ell} + \frac{\bar{z}^2}{2} \cdot \arctan \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{z} \cdot \ell} \end{array} \right]_{x-x_1, y-y_1, z-z_1}^{x-x_2, y-y_2, z-z_2}. \quad (3.49)$$

Die Komponenten des Schwerevektors im Aufpunkt Q sind durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{aligned} g_x(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial x} = -G \cdot \iiint_V \left[\frac{-\rho \cdot \bar{x}}{\ell^3} \right] \cdot dx' dy' dz' \\ &= G\rho \cdot \left[\bar{y} \cdot \log(\bar{z} + \ell) + \bar{z} \cdot \log(\bar{y} + \ell) - \bar{x} \cdot \arctan \frac{\bar{y} \cdot \bar{z}}{\bar{x} \cdot \ell} \right]_{x-x_1, y-y_1, z-z_1}^{x-x_2, y-y_2, z-z_2}, \\ g_y(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial y} = -G \cdot \iiint_V \left[\frac{-\rho \cdot \bar{y}}{\ell^3} \right] \cdot dx' dy' dz' \\ &= G\rho \cdot \left[\bar{z} \cdot \log(\bar{x} + \ell) + \bar{x} \cdot \log(\bar{z} + \ell) - \bar{y} \cdot \arctan \frac{\bar{x} \cdot \bar{z}}{\bar{y} \cdot \ell} \right]_{x-x_1, y-y_1, z-z_1}^{x-x_2, y-y_2, z-z_2}, \\ g_z(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial z} = -G \cdot \iiint_V \left[\frac{-\rho \cdot \bar{z}}{\ell^3} \right] \cdot dx' dy' dz' \\ &= G\rho \cdot \left[\bar{y} \cdot \log(\bar{x} + \ell) + \bar{x} \cdot \log(\bar{y} + \ell) - \bar{z} \cdot \arctan \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{z} \cdot \ell} \right]_{x-x_1, y-y_1, z-z_1}^{x-x_2, y-y_2, z-z_2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die einzelnen Komponenten des Marussi-Tensors lauten

$$\begin{aligned}
M_{xx}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x^2} = G \cdot \iiint_V \rho \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{x}^2}{\ell^5} \right] \cdot dx' dy' dz' = G\rho \cdot \arctan \frac{\bar{y} \cdot \bar{z}}{\bar{x} \cdot \ell} \Bigg|_{x-x_1, y-y_1, z-z_1}^{x-x_2, y-y_2, z-z_2}, \\
M_{xy}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x \partial y} = G \cdot \iiint_V \rho \cdot \left[\frac{3\bar{x} \cdot \bar{y}}{\ell^5} \right] \cdot dx' dy' dz' = -G\rho \cdot \log(\bar{z} + \ell) \Bigg|_{x-x_1, y-y_1, z-z_1}^{x-x_2, y-y_2, z-z_2} \\
&= M_{yx}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y \partial x}, \\
M_{xz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x \partial z} = G \cdot \iiint_V \rho \cdot \left[\frac{3\bar{x} \cdot \bar{z}}{\ell^5} \right] \cdot dx' dy' dz' = -G\rho \cdot \log(\bar{y} + \ell) \Bigg|_{x-x_1, y-y_1, z-z_1}^{x-x_2, y-y_2, z-z_2} \\
&= M_{zx}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z \partial x}, \\
M_{yy}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y^2} = G \cdot \iiint_V \rho \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{y}^2}{\ell^5} \right] \cdot dx' dy' dz' = G\rho \cdot \arctan \frac{\bar{x} \cdot \bar{z}}{\bar{y} \cdot \ell} \Bigg|_{x-x_1, y-y_1, z-z_1}^{x-x_2, y-y_2, z-z_2}, \\
M_{yz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y \partial z} = G \cdot \iiint_V \rho \cdot \left[\frac{3\bar{y} \cdot \bar{z}}{\ell^5} \right] \cdot dx' dy' dz' = -G\rho \cdot \log(\bar{x} + \ell) \Bigg|_{x-x_1, y-y_1, z-z_1}^{x-x_2, y-y_2, z-z_2} \\
&= M_{zy}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z \partial y}, \\
M_{zz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z^2} = G \cdot \iiint_V \rho \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{z}^2}{\ell^5} \right] \cdot dx' dy' dz' = G\rho \cdot \arctan \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{z} \cdot \ell} \Bigg|_{x-x_1, y-y_1, z-z_1}^{x-x_2, y-y_2, z-z_2}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Die Formeln (3.51) weisen, je nachdem wo der Aufpunkt Q auf der Erdoberfläche liegt, Singularitäten auf; zum Beispiel wenn der Aufpunkt auf der Deckfläche des Prismas liegt, d.h. $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$ und $z = z_2$. In diesem Fall ist die arctan-Funktion nicht definiert; in Nagy et al. (2000), (2002) wird gezeigt, dass diese Terme nach einer Grenzwertberechnung zu Null gesetzt werden können. In Nagy et al. (2000), (2002) findet man wie in Tsoulis (1999a) eine Zusammenstellung aller Singularitäten, wobei es sich bei Nagy et al. um einen allgemeineren Ansatz handelt. Hier werden z.B. auch der Fall, wenn der Aufpunkt auf der inneren Fläche des Prismas liegt, oder die dritten Ableitungen des Potentials behandelt.

3.2.2.2 Taylorreihenentwicklung

In größerer Entfernung vom Aufpunkt können die Formeln (3.49) - (3.51) durch eine Taylorreihenentwicklung des Integranden vereinfacht werden (vgl. Heck und Seitz 2007). Für den Integranden I

$$I = I(x', y', z') = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}} \tag{3.52}$$

lautet die Taylorreihenentwicklung im Entwicklungspunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ bis zum Entwicklungsgrad 2 im Kantensystem des Quaders

$$\begin{aligned}
I(x', y', z') &= I(x_0, y_0, z_0) + \left\{ \frac{\partial I}{\partial x'} \Bigg|_0 \cdot \Delta x + \frac{\partial I}{\partial y'} \Bigg|_0 \cdot \Delta y + \frac{\partial I}{\partial z'} \Bigg|_0 \cdot \Delta z \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Bigg|_0 \cdot \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial x' \partial y'} \Bigg|_0 \cdot \Delta x \Delta y + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial z} \Bigg|_0 \cdot \Delta x \Delta z \\ &+ \frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \Bigg|_0 \cdot \Delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial y' \partial z'} \Bigg|_0 \cdot \Delta y \Delta z + \frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \Bigg|_0 \cdot \Delta z^2 \end{aligned} \right\} + O(\Delta^3).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$O(\Delta^3)$ bedeutet, dass Terme ab der dritten Ordnung in Δx , Δy , Δz vernachlässigt werden. Mit dem Entwicklungspunkt im geometrischen Mittelpunkt gilt für dessen Koordinaten:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{3.54}$$

Die Lage des Taylorpunkts im Quadermittelpunkt liefert für das Potential

$$V(Q) = G\rho \cdot \left[I(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{24} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Big|_0 \cdot \Delta x^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \Big|_0 \cdot \Delta y^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \Big|_0 \cdot \Delta z^2 \right\} + O(\Delta^4) \right] \cdot \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (3.55)$$

wobei $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$. Für die einzelnen partiellen Ableitungen gilt:

$$I|_0 = I(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\ell_0} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Big|_0 = \frac{1}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3(x - x_0)^2}{\ell_0^2} - 1 \right\}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \Big|_0 = \frac{1}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3(y - y_0)^2}{\ell_0^2} - 1 \right\} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \Big|_0 = \frac{1}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3(z - z_0)^2}{\ell_0^2} - 1 \right\}$$

Für die Komponenten des Schwerevektors und des Marussi-Tensors sind analog die Integranden in Taylorreihen zu entwickeln und die partiellen Ableitungen nach x , y und z zu bilden (vgl. Anhang A.4).

Im Fall eines sphärischen Gitters ist eine Transformation des Schwerevektors und des Marussi-Tensors vom lokalen System des Quaders in das System des Aufpunkts notwendig (vgl. Formeln (3.12) - (3.15)). Dies gilt auch für die Punktmasse (vgl. Kapitel 3.2.3), die Massenschicht (vgl. Kapitel 3.2.4) und die Massenlinie (vgl. Kapitel 3.2.5).

3.2.3 Punktmasse

In sehr großer Entfernung vom Berechnungspunkt kann der Effekt eines Tesseroids durch eine Punktmasse, die sich im geometrischen Mittelpunkt $P' = P_0$ befindet, beschrieben werden. Es wird angenommen, dass die Masse in P_0 gleich der Masse des Tesseroids ist. Es kann leicht gezeigt werden, dass der Effekt einer Punktmasse – ggf. unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung – gleich dem Term nullter Ordnung der Taylorreihenentwicklung des Tesseroids (siehe Kapitel 3.2.1.2) und des Quaders (siehe Kapitel 3.2.2.2) ist. Im Fall des Potentials eines Tesseroids führt Gleichung (3.21) zu

$$V = G \cdot \rho \cdot \left[\frac{r_0^2 \cdot \cos \varphi_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos \psi_0}} \right] \cdot \Delta r \Delta \varphi \Delta \lambda. \quad (3.58)$$

Der Effekt einer Punktmasse kann auch berechnet werden, indem das Potential des Quaders (vgl. Kapitel 3.2.2) auf einen Punkt im geometrischen Mittelpunkt mit der Masse $M = \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ kondensiert wird (vgl. Abbildung 3.5)

$$V(Q) = \frac{G \cdot M}{\ell} = G\rho \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}{\ell}. \quad (3.59)$$

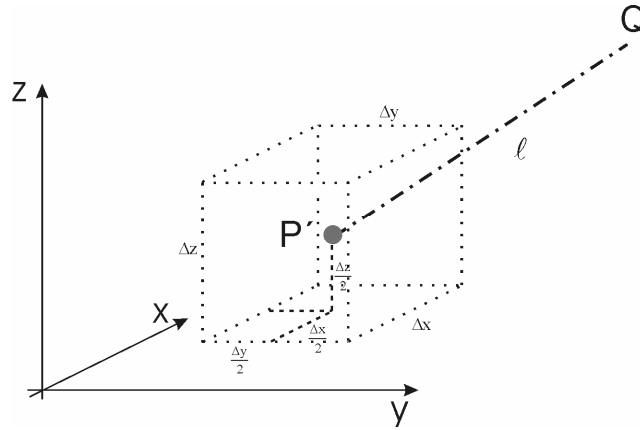


Abbildung 3.5 Punktmasse als Approximation des Quaders

Formel (3.59) entspricht dem Term nullter Ordnung der Taylorreihenentwicklung des Quaders in Formel (3.55) bzw. (3.56). Die gravitative Anziehung eines Massenpunkts erhält man durch

$$\begin{aligned}
 g_x(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial x} = -G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left[\frac{-\bar{x}}{\ell^3} \right] = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\bar{x}}{\ell^3}, \\
 g_y(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial y} = -G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left[\frac{-\bar{y}}{\ell^3} \right] = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\bar{y}}{\ell^3}, \\
 g_z(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial z} = -G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left[\frac{-\bar{z}}{\ell^3} \right] = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\bar{z}}{\ell^3}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

bzw. der Marussi-Tensor sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned}
 M_{xx}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x^2} = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{x}^2}{\ell^5} \right], \\
 M_{xy}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x \partial y} = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left[\frac{3\bar{x} \cdot \bar{y}}{\ell^5} \right] = M_{yx}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y \partial x}, \\
 M_{xz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x \partial z} = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left[\frac{3\bar{x} \cdot \bar{z}}{\ell^5} \right] = M_{zx}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z \partial x}, \\
 M_{yy}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y^2} = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{y}^2}{\ell^5} \right], \\
 M_{yz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y \partial z} = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left[\frac{3\bar{y} \cdot \bar{z}}{\ell^5} \right] = M_{zy}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z \partial y}, \\
 M_{zz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z^2} = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{z}^2}{\ell^5} \right].
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

3.2.4 Massenschicht

Die Wirkung eines Quaders kann durch eine Massenschicht in der mittleren Höhe z_0 ersetzt werden, wenn das Verhältnis der Seitenlängen $\Delta x, \Delta y$ groß gegenüber der Höhe des Quaders ist (vgl. Abbildung 3.6).

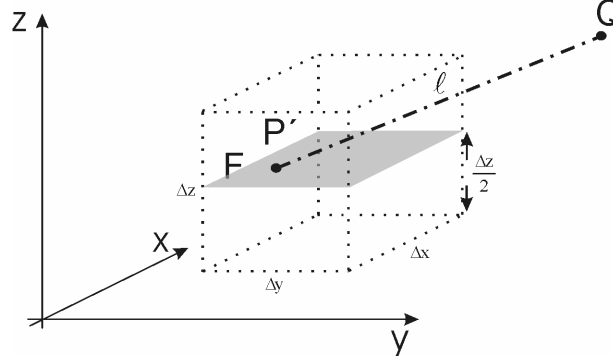


Abbildung 3.6 Massenschicht als Approximation eines Quaders

Die Masse des Quaders wird durch eine massenbelegte, horizontale Schicht mit der Flächendichte $\rho_F = \rho \cdot \Delta z$ approximiert. Das Potential ergibt sich folglich zu

$$V(Q) = G \cdot \iint_F \frac{\rho_F}{\ell} \cdot dF = G \cdot \iint_F \frac{\rho}{\ell} \cdot \Delta z \cdot dx' dy' \quad (3.62)$$

bzw.

$$V(Q) = G\rho \cdot \Delta z \cdot \left[\bar{x} \cdot \log(\bar{y} + \ell) + \bar{y} \cdot \log(\bar{x} + \ell) - \bar{z} \cdot \arctan \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{z} \cdot \ell} \right] \Bigg|_{x_1, y_1}^{x_2, y_2}, \quad (3.63)$$

$$\bar{x} = x - x', \bar{y} = y - y', \bar{z} = z - z', z' = (z_1 + z_2)/2, \ell = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}.$$

Die Schwerewirkung einer homogenen Massenschicht erhält man schließlich über

$$\begin{aligned} g_x(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial x} = -G \cdot \iint_F \left[-\frac{\rho \cdot \bar{x}}{\ell^3} \right] \cdot \Delta z \cdot dx' dy' = -G\rho \cdot \Delta z \cdot \log(\bar{y} + \ell) \Bigg|_{x_1, y_1}^{x_2, y_2}, \\ g_y(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial y} = -G \cdot \iint_F \left[-\frac{\rho \cdot \bar{y}}{\ell^3} \right] \cdot \Delta z \cdot dx' dy' = -G\rho \cdot \Delta z \cdot \log(\bar{x} + \ell) \Bigg|_{x_1, y_1}^{x_2, y_2}, \\ g_z(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial z} = -G \cdot \iint_F \left[-\frac{\rho \cdot \bar{z}}{\ell^3} \right] \cdot \Delta z \cdot dx' dy' = G\rho \cdot \Delta z \cdot \arctan \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{z} \cdot \ell} \Bigg|_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

bzw. für den Marussi-Tensor gilt

$$\begin{aligned}
M_{xx}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x^2} = G \cdot \iint_F \rho \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{x}^2}{\ell^5} \right] \cdot \Delta z \cdot dx' dy' = -G\rho \cdot \Delta z \cdot \left[\frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{(\bar{x}^2 + \bar{z}^2) \cdot \ell} \right]_{x_1, y_1}^{x_2, y_2}, \\
M_{xy}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x \partial y} = G \cdot \iint_F \rho \cdot \left[\frac{3\bar{x} \cdot \bar{y}}{\ell^3} \right] \cdot \Delta z \cdot dx' dy' = G\rho \cdot \Delta z \cdot \frac{1}{\ell} \Big|_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} = M_{yx}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y \partial x}, \\
M_{xz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x \partial z} = G \cdot \iint_F \rho \cdot \left[\frac{3\bar{x} \cdot \bar{z}}{\ell^3} \right] \cdot \Delta z \cdot dx' dy' = -G\rho \cdot \Delta z \cdot \bar{z} \cdot \left[\frac{\bar{y}}{(\bar{x}^2 + \bar{z}^2) \cdot \ell} \right]_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} \\
&= M_{zx}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z \partial x}, \\
M_{yy}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y^2} = G \cdot \iint_F \rho \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{y}^2}{\ell^5} \right] \cdot \Delta z \cdot dx' dy' = -G\rho \cdot \Delta z \cdot \left[\frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \cdot \ell} \right]_{x_1, y_1}^{x_2, y_2}, \\
M_{yz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y \partial z} = G \cdot \iint_F \rho \cdot \left[\frac{3\bar{y} \cdot \bar{z}}{\ell^3} \right] \cdot \Delta z \cdot dx' dy' = -G\rho \cdot \Delta z \cdot \bar{z} \cdot \left[\frac{\bar{x}}{(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \cdot \ell} \right]_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} \\
&= M_{zy}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z \partial y}, \\
M_{zz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z^2} = G \cdot \iint_F \rho \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{z}^2}{\ell^5} \right] \cdot \Delta z \cdot dx' dy' = G\rho \cdot \Delta z \cdot \left[\frac{\bar{y} \cdot \bar{x} \cdot (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 2\bar{z}^2)}{\ell \cdot (\bar{x}^2 + \bar{z}^2) \cdot (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)} \right]_{x_1, y_1}^{x_2, y_2}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Im Fall der Massenschicht existiert eine Singularität, wenn die z-Komponente des Berechnungspunkts der z'-Komponente des Integrationspunkts entspricht, d.h. $\bar{z} = 0$.

3.2.5 Massenlinie

Wenn die Höhe Δz des Quaders gegenüber den Seitenlängen sehr groß ist, eignet sich eine Masselinie zur Approximation. Hier wird die Masse auf eine Linie in der Mitte des Quaders (x_0, y_0) kondensiert; die Liniendichte beträgt $\rho_L = \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ (siehe Abbildung 3.7).

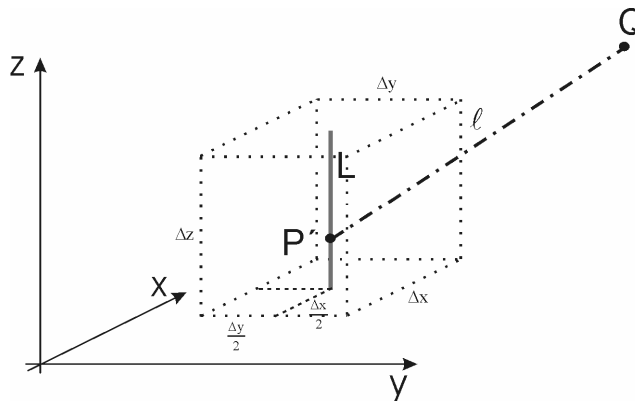


Abbildung 3.7 Massenlinie als Approximation eines Quaders

Die Potentialwirkung einer Masselinie wird auch hier im Allgemeinen mittels des Newtonschen Integrals berechnet

$$V(Q) = G \cdot \int_L \frac{\rho_L}{\ell} \cdot dL = G \cdot \int_L \frac{\rho}{\ell} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dL. \tag{3.66}$$

In kartesischen Koordinaten gilt

$$V(Q) = G \cdot \int_z^{\rho} \frac{\rho}{\ell} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dz = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \log(\bar{z} + \ell) \Big|_{z_1}^{z_2}. \quad (3.67)$$

Die Komponenten des Schwerevektors erhält man mittels

$$\begin{aligned} g_x(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial x} = -G \cdot \int_z \left[\frac{-\rho \cdot \bar{x}}{\ell^3} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dz' = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left. \frac{\bar{x} \cdot \bar{z}}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \cdot \ell} \right|_{z_1}^{z_2}, \\ g_y(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial y} = -G \cdot \int_z \left[\frac{-\rho \cdot \bar{y}}{\ell^3} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dz' = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left. \frac{\bar{y} \cdot \bar{z}}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \cdot \ell} \right|_{z_1}^{z_2}, \\ g_z(Q) &= -\frac{\partial V(Q)}{\partial z} = -G \cdot \int_z \left[\frac{-\rho \cdot \bar{z}}{\ell^3} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dz' = -G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left. \frac{1}{\ell} \right|_{z_1}^{z_2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

und die zweiten Ableitungen des Potentials lauten

$$\begin{aligned} M_{xx}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x^2} = G \cdot \int_z \rho \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{x}^2}{\ell^5} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dz' \\ &= G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left. \left[\frac{\bar{z} \cdot (2\bar{x}^4 + \bar{x}^2\bar{y}^2 + \bar{z}^2\bar{x}^2 - \bar{y}^4 - \bar{y}^2\bar{z}^2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2 \cdot \ell^3} \right] \right|_{z_1}^{z_2}, \\ M_{xy}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x \partial y} = G \cdot \int_z \rho \cdot \left[\frac{3\bar{x} \cdot \bar{y}}{\ell^5} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dz' \\ &= G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left. \left[\frac{\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot (3\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 + 2\bar{z}^2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2 \cdot \ell^3} \right] \right|_{z_1}^{z_2} = M_{yx}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y \partial x}, \\ M_{xz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x \partial z} = G \cdot \int_z \rho \cdot \left[\frac{3\bar{x} \cdot \bar{z}}{\ell^5} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dz' = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left. \left[\frac{-\bar{x}}{\ell^3} \right] \right|_{z_1}^{z_2} = M_{zx}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z \partial x}, \\ M_{yy}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y^2} = G \cdot \int_z \rho \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{y}^2}{\ell^5} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dz' \\ &= G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left. \left[\frac{-\bar{z} \cdot (\bar{x}^4 - \bar{x}^2\bar{y}^2 + \bar{z}^2\bar{x}^2 - 2\bar{y}^4 - \bar{y}^2\bar{z}^2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2 \cdot \ell^3} \right] \right|_{z_1}^{z_2}, \\ M_{yz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y \partial z} = G \cdot \int_z \rho \cdot \left[\frac{3\bar{y} \cdot \bar{z}}{\ell^5} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dz' = G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left. \left[\frac{-\bar{y}}{\ell^3} \right] \right|_{z_1}^{z_2} = M_{zy}(Q) = \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z \partial y}, \\ M_{zz}(Q) &= \frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z^2} = G \cdot \int_z \rho \cdot \left[-\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{z}^2}{\ell^5} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot dz' = -G\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left. \left[\frac{\bar{z}}{\ell^3} \right] \right|_{z_1}^{z_2}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Singularitäten im Fall der Massenlinie existieren für $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

3.3 Modellierung des topographischen Effekts

Um den Gravitationseffekt der topographischen Massen zwischen dem Geoid (Σ_g) und der Erdoberfläche S beschreiben zu können, wird das Geoid durch eine Kugel mit dem Radius R sphärisch approximiert. Der Radius des Aufpunkts Q wird mit r bezeichnet, der Integrationspunkt P' auf der Erdoberfläche hat den geozentrischen Radius $r' = R + h'$. r_p ist der geozentrische Radius des Punkts P, der unterhalb des Aufpunkts Q und auf der Erdoberfläche S liegt. ψ ist die sphärische Distanz zwischen den Radiusvektoren von P' und Q (vgl. Abbildung 3.3).

Das Potential der topographischen Massen kann mittels des Newton-Integrals in sphärischen Koordinaten beschrieben werden (siehe Formel (3.1))

$$V(Q) = G \cdot \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{\ell} \cdot d\Omega \quad \text{mit } \Omega = \Omega(\lambda', \varphi', \xi), \quad (3.70)$$

$$\ell = \sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cdot \cos \psi}, \quad \cos \psi = \sin \varphi \cdot \sin \varphi' + \cos \varphi \cdot \cos \varphi' \cdot \cos(\lambda - \lambda'), \quad (3.71)$$

wobei (r, φ, λ) und $(\xi, \varphi', \lambda')$ die sphärischen Koordinaten des Berechnungspunkts und des variablen Integrationspunkts bezüglich des terrestrischen Referenzsystems darstellen. G ist die Gravitationskonstante, ρ die lokale Dichte und $d\Omega = \xi^2 \cdot d\xi d\sigma$ das Volumenelement ($d\sigma$: Oberflächenelement auf der Einheitskugel).

Zur Berechnung des Potentials und seiner ersten und zweiten Ableitungen werden die topographischen Massen in einzelne Volumenelemente Ω_i aufgeteilt und die Gesamtwirkung der Massen durch eine Summation über die einzelnen Volumenelemente (vgl. Gleichung (3.16)) bestimmt. Die einzelnen Volumenelemente können mit den in Kapitel 3.2 beschriebenen Massenelementen und Berechnungsmethoden modelliert bzw. approximiert werden. Diese Aufteilung der Massen in einzelne Volumenelemente und die anschließende Summation über die Volumenelemente kann ebenso bei der RTM-Methode angewandt werden.

3.4 Modellierung des isostatischen Effekts

Die Modellierung der isostatischen Massen dient der Kompensation der sichtbaren Massenüberschüsse an der Erdoberfläche (vgl. Grüniger 1990; Moritz 1990; Kuhn 2000; Lambeck 1988). Es lassen sich verschiedene Modelle unterscheiden, die in den folgenden Kapiteln beschrieben sind.

3.4.1 Modell von Airy-Heiskanen

Im Modell von G.B. Airy und W.A. Heiskanen findet die Kompensation in lokalen, senkrechten Säulen statt. Die Gewichtskraft der topographischen Massen wird durch die Auftriebskraft von tiefer liegenden Ausgleichsmassen kompensiert. Diese Auftriebskraft entsteht durch das Eintauchen der leichteren Kruste in den dichteren Mantel. Die normale Krustenmächtigkeit für Elemente mit der Höhe $h' = 0$ wird mit T bezeichnet; diese „Standardsäule“ hat die Dichte $\rho_0 = 2670 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Die kontinentale Kruste wird durch eine entsprechende „Wurzel“ ($t' > 0$) kompensiert, unter den Ozeanen bilden sich durch das Aufsteigen des Mantels „Antiwurzeln“ ($t' < 0$) (vgl. Abbildung 3.8). Der Dichteunterschied zwischen Kruste und Mantel beträgt $\Delta\rho = \rho_m - \rho_0 = 600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, die Krustendicke ist $T + h' + t'$.

Geophysikalisch gesehen entspricht die Grenzschicht zwischen (Anti-)Wurzel und Mantel der Mohorovičić-Diskontinuität („Moho-Diskontinuität“). Üblicherweise wird eine normale Krustenmächtigkeit von $T = 30 \text{ km}$ angenommen (vgl. Heiskanen und Moritz 1967; Kuhn 2000; Pail 2000; Tsoulis 2001; Claessens 2003; Kuhn 2003; Tsoulis 2004; u.a.).

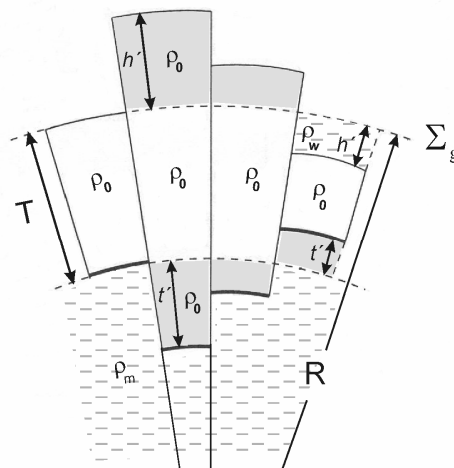


Abbildung 3.8 Isostatisches Modell von Airy-Heiskanen in sphärischer Approximation

Die Herleitung des mathematischen Modells für das Airy-Heiskanen-Modell ergibt sich aus der hydrostatischen Gleichgewichtsbedingung, d.h. dass der Druck der Gewichtskraft der topographischen Überschuss- oder Defizitmassen dem Druck der Auftriebskraft der isostatischen Massen entspricht. Unter Annahme einer konstanten Dichte ρ_0 für die Kruste und einer konstanten Schwere g innerhalb der Kruste geht die Druckgleichheit in die Massengleichheit über (vgl. Kuhn 2000). Der Druck p ist definiert über den Quotienten aus einer Kraft F und einer Fläche A , auf die diese Kraft senkrecht wirkt

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\text{"Kraft"}}{\text{"Fläche"}} = \frac{M \cdot g}{A}. \quad (3.72)$$

Mit M wird die Masse bezeichnet. In sphärischer Approximation führt die Massengleichheit im kontinentalen Bereich auf die folgende Gleichung

$$\iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R-T-t'(\lambda',\varphi')}^{\xi=R-T} \Delta\rho \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R}^{\xi=R+h'(\lambda',\varphi')} \rho_0 \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma. \quad (3.73)$$

Auflösen nach der Wurzeltiefe t' liefert

$$t' = R - T - \sqrt[3]{(R - T)^3 - \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot [(R + h')^3 - R^3]}. \quad (3.74)$$

Im ozeanischen Bereich führt die Massengleichheit zu

$$\iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R-T}^{\xi=R-T-t'(\lambda',\varphi')} \Delta\rho \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R+h'(\lambda',\varphi')}^{\xi=R} \Delta\rho_w \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma \quad \text{mit } \Delta\rho_w = \rho_0 - \rho_w. \quad (3.75)$$

Für die Antiwurzeln folgt

$$t' = R - T - \sqrt[3]{(R - T)^3 - \frac{\Delta\rho_w}{\Delta\rho} \cdot [(R + h')^3 - R^3]}. \quad (3.76)$$

In Kuhn (2000) findet man die Formeln der (Anti-)Wurzeln unter Annahme einer linearen Dichte- und Schwerefunktion. Das Potential im Airy-Heiskanen-Modell ergibt sich folglich zu

$$V_{A-H} = G \cdot \Delta\rho \cdot \iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R-T-t'(\lambda',\varphi')}^{\xi=R-T} \frac{\xi^2}{\ell} \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma, \quad (3.77)$$

wobei t' entsprechend (3.74) für $h' > 0$ bzw. nach (3.76) für $h' < 0$ gewählt wird. Das Potential und seine Ableitungen können entsprechend der Modellierung der Topographie mittels der verschiedenen Massenelemente und Berechnungsmethoden ermittelt werden.

3.4.2 Modell von Pratt-Hayford

Im Modell von J.H. Pratt und J.F. Hayford erfolgt der isostatische Ausgleich analog zum Modell von Airy-Heiskanen in lokalen, senkrechten Säulen. Das isostatische Gleichgewicht wird durch Variation der Dichte jeder Säule erzeugt, indem angenommen wird, dass sich die Gesamtmasse jeder Säule derselben Grundfläche nicht ändert. Kontinentale Säulen in gebirgigem Gelände weisen eine kleinere Dichte als kontinentale Säulen im Flachland oder ozeanische Säulen auf. Die Kompensationsmassen reichen vom Meeresniveau bis zu einer Tiefe D (Kompensationstiefe), unterhalb der das hydrostatische Gleichgewicht erreicht wird. Aus dieser Gleichgewichtsbedingung ergibt sich, dass der Druck jeder Säule konstant sein muss; dies gilt auch für die Standardsäule ($h' = 0$), der i. Allg. eine Tiefe $D = 100$ km und eine konstante Dichte $\rho_0 = 2670 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ zugeordnet wird (vgl. Heiskanen und Moritz 1967; Tsoulis 2001; u.a.). Unter Annahme einer konstanten Schwere geht die Druckgleichheit in die Massengleichheit über.

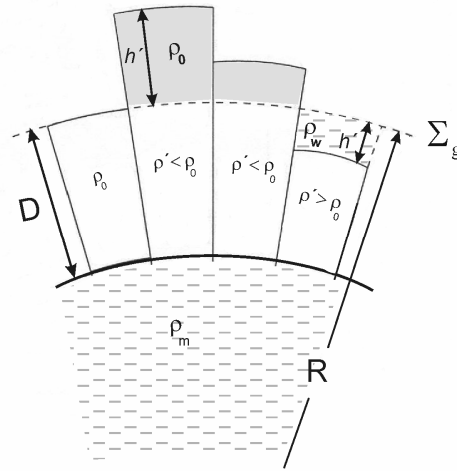


Abbildung 3.9 Isostatisches Modell von Pratt-Hayford in sphärischer Approximation

Es lassen sich für den kontinentalen Bereich ($h' > 0$) und den ozeanischen Bereich ($h' < 0$) zwei Ansätze der Massengleichheit herleiten. Der erste Ansatz entspricht dem ursprünglichen von J.H. Pratt und J.F. Hayford, in dem die Säulen der Höhe $D \pm h'$ eine variable Dichte ρ' aufweisen. Der zweite Ansatz stellt eine Modifikation dieses ersten Ansatzes dar, da angenommen wird, dass die kontinentalen Massen die Dichte ρ_0 und die ozeanischen Massen die Dichte ρ_w haben (vgl. Abbildung 3.9). Dies entspricht der Idee der Bouguerreduktion, für die eine konstante Krustendichte gilt (vgl. Heiskanen und Moritz 1967, S. 138). In sphärischer Approximation führt die Massengleichheit im kontinentalen Bereich im Fall des ersten Ansatzes auf folgende Gleichung

$$\iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R-D}^{\xi=R} \rho_0 \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R-D}^{\xi=R+h'(\lambda',\varphi')} \rho' \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma. \quad (3.78)$$

Für die variable Dichte ρ' folgt

$$\rho' = \rho_0 \cdot \frac{R^3 - (R-D)^3}{(R+h')^3 - (R-D)^3} = \frac{\rho_0}{1 + \frac{h'}{D} \cdot \frac{\left(1 + \frac{h'}{R}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h'}{R}\right)^2}{\left(1 - \frac{D}{R}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{D}{R}\right)^2}}. \quad (3.79)$$

Für den ozeanischen Bereich ($h' < 0$) gilt mittels der Bedingung der Massengleichheit

$$\iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R-D}^{\xi=R} \rho_0 \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R+h'(\lambda',\varphi')}^{\xi=R} \rho_w \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma + \iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R-D}^{\xi=R+h'(\lambda',\varphi')} \rho' \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma. \quad (3.80)$$

Die variable Dichte ρ' lässt sich mit folgender Formel bestimmen

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\rho_0 \cdot (R^3 - (R-D)^3) - \rho_w \cdot (R^3 - (R+h')^3)}{(R+h')^3 - (R-D)^3} \\ &= \frac{\rho_0}{1 + \frac{h'}{D} \cdot \frac{\left(1 + \frac{h'}{R}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h'}{R}\right)^2}{\left(1 - \frac{D}{R}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{D}{R}\right)^2}} + \frac{\rho_w}{1 + \frac{D}{h'} \cdot \frac{\left(1 - \frac{D}{R}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{D}{R}\right)^2}{\left(1 + \frac{h'}{R}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h'}{R}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Im Fall des zweiten Ansatzes („modifiziertes Pratt-Hayford-Modell“) lautet die Formel für die Massengleichheit im kontinentalen Bereich

$$\iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R-D}^{\xi=R} \rho_0 \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R}^{\xi=R+h'(\lambda',\varphi)} \rho_0 \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma + \iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R-D}^{\xi=R} \rho' \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma \quad (3.82)$$

bzw. für die variable Dichte ρ' ergibt sich

$$\rho' = \rho_0 \cdot \frac{2R^3 - (R-D)^3 - (R+h')^3}{R^3 - (R-D)^3} = \rho_0 \cdot \left[1 - \frac{h'}{D} \cdot \frac{\left(1 + \frac{h'}{R}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h'}{R}\right)^2}{\left(1 - \frac{D}{R}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{D}{R}\right)^2} \right] \quad (3.83)$$

Für den ozeanischen Bereich gelten die gleichen Formeln wie beim ersten Ansatz ((3.80), (3.81)). Das Potential im Pratt-Hayford-Modell lässt sich demnach mit

$$V_{P-H} = G \cdot \iint_{\sigma} \left[\int_{\xi=R-D}^{\xi=R} \Delta\rho' \cdot \frac{\xi^2}{\ell} \cdot d\xi \right] \cdot d\sigma, \quad (3.84)$$

wobei $\Delta\rho' = \rho_0 - \rho'$, bestimmen. Das Potential und seine Ableitungen können entsprechend der Modellierung der Topographie mittels der verschiedenen Massenelemente und Berechnungsmethoden ermittelt werden.

3.4.3 Kombination des Airy-Heiskanen-/Pratt-Hayford-Modells

Bei der Kombination beider Modelle findet das Airy-Heiskanen-Modell im kontinentalen Bereich, das Pratt-Hayford-Modell dagegen im ozeanischen Bereich Anwendung. Dies ist in Abbildung 3.10 veranschaulicht (vgl. Wild und Heck 2005).

In planarer Approximation gilt nach Kuhn (2000) für die (Anti-)Wurzeln

$$\begin{aligned} t' &= \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot h' & h' > 0 \\ t' &= \frac{\Delta\rho_w}{\Delta\rho} \cdot h' & h' < 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

bzw. mit den Dichtewerten $\rho_0 = 2670 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_w = 1030 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ und $\rho_m = 3270 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} t' &\approx 4.45 \cdot h' & h' > 0 \\ t' &\approx 2.73 \cdot h' & h' < 0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Mit $T + t' + h' \leq 0$ folgt, dass h' im Ozeanbereich kleiner ca. 8 km sein muss, da sonst die Antiwurzeln den Ozeanboden überragen würden. Das Airy-Heiskanen-Modell scheitert demnach im Bereich der Tiefseeegräben.

Durch die Kombination der isostatischen Modelle von Pratt-Hayford und Airy-Heiskanen kann der unrealistische Sonderfall des Airy-Heiskanen-Modells, dass die Anti-Wurzeln über den Meeresboden hinaus ragen, vermieden werden (siehe Claessens 2003).

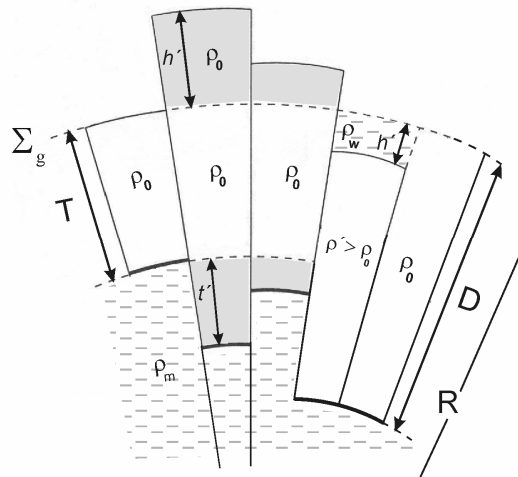


Abbildung 3.10 Kombination des isostatischen Modells von Airy-Heiskanen und Pratt-Hayford in sphärischer Approximation

3.4.4 Kondensationsmodelle von Helmert

Eine Alternative zu den klassischen isostatischen Modellen wie sie in den Kapiteln 3.4.1, 3.4.2 und 3.4.3 beschrieben werden, sind die Kondensationsmodelle von F.R. Helmert (siehe Helmert 1884). Hier werden die Massen auf eine sphärische Fläche Σ_c mit dem Radius R_c parallel zum Geoid Σ_g in einer Tiefe $d = 21$ km kondensiert (erste Kondensationsmethode). Die zweite Kondensationsmethode dagegen sieht vor, dass die topographischen Massen direkt auf das Geoid kondensiert werden (vgl. Martinec et al. 1993; Heck 2002). Die Kondensation verläuft in beiden Fällen lokal in Form einer Kondensation der topographischen Säule auf die Kondensationsfläche (vgl. Abbildung 3.11).

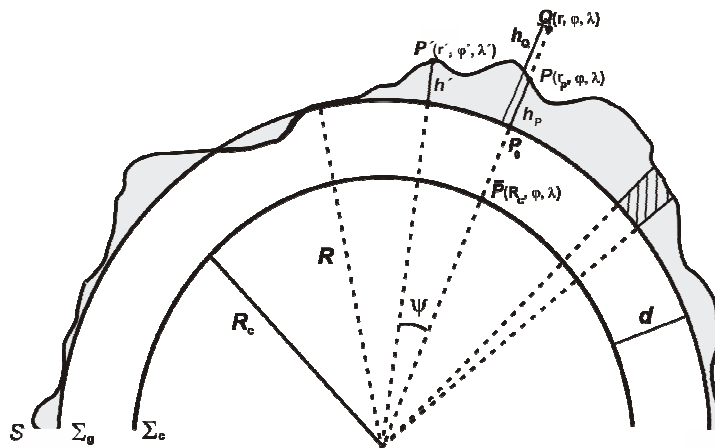


Abbildung 3.11 Kondensationsmodelle von Helmert

Das zweite Helmerzsche Kondensationsmodell wurde in den vergangenen Jahren oft in der praktischen Geoidberechnung eingesetzt (Vaniček et al. 1999; Nahavandchi und Sjöberg 2001). Eine Verallgemeinerung der ersten Helmerzschen Kondensationsmethode fand durch Heck (2003) statt. Hierdurch kann der Berechnungspunkt Q auch außerhalb der Erdoberfläche liegen und die (sphärischen) Kondensationsflächen können in einer willkürlichen Tiefe d unterhalb des Geoids gewählt werden (siehe Abbildung 3.11). Das Potential

der kondensierten Massen auf der sphärischen Fläche Σ_c (Radius R_c) in der Tiefe d unterhalb des Geoids ergibt sich mittels

$$V_c = G \cdot \iint_{\sigma} \frac{\kappa'}{\ell_c} \cdot R_c^2 \cdot d\sigma, \quad \ell_c = \sqrt{r^2 + R_c^2 - 2rR_c \cdot \cos \psi}, \quad (3.87)$$

wobei κ' die Flächendichte darstellt. Diese resultiert aus dem Prinzip der lokalen Massenerhaltung (vgl. Martinec 1998; Heck 2003)

$$\kappa' = \rho_0 \cdot \frac{r'^3 - R^3}{3R_c^2}. \quad (3.88)$$

Eine alternative Darstellung analog zur Modellierung der topographischen Massen mittels der Methode der analytischen, vertikalen Integration und 2D-Kubatur (siehe Kapitel 3.2.1.3) wird durch Addition und Subtraktion der konstanten Dichte $\bar{\kappa} = \kappa(\bar{P})$ des Punkts $\bar{P} \in \Sigma_c$, der auf dem Radiusvektor von Q liegt, erhalten (siehe Abbildung 3.11):

$$V_c = \frac{4\pi G \cdot \bar{\kappa} \cdot R_c^2}{r} + G \cdot \iint_{\sigma} \frac{\kappa' - \bar{\kappa}}{\ell_c} \cdot R_c^2 \cdot d\sigma, \quad (3.89)$$

wobei für die Dichte $\bar{\kappa}$ gilt:

$$\bar{\kappa} = \rho_0 \cdot \frac{r_p^3 - R^3}{3R_c^2}. \quad (3.90)$$

Der konstante Term außerhalb des Integrals kann als Effekt einer sphärischen Schicht mit der Flächendichte $\bar{\kappa}$ interpretiert werden. Nach dem Prinzip der Massenerhaltung entspricht dieser Term dem konstanten Term des Topographiepotentials (vgl. Formel (3.35)). Beispielhaft für eine Ableitung des Potentials ist die zweite radiale Ableitung in Heck und Wild (2005) zu finden. Das Flächenintegral lässt sich mittels 2D-Kubatur berechnen (siehe Anhang A.2).

3.4.5 Modell von Vening Meinesz

Das Modell von Vening Meinesz ist im Gegensatz zu den isostatischen Modellen nach Airy-Heiskanen und Pratt-Hayford und dem Kondensationsmodell von Helmert kein lokales, sondern ein regionales isostatisches Modell (Vening Meinesz 1939). Die Erdkruste wird als schwimmende, elastische Platte aufgefasst, welche sich durch die Be- und Entlastung der topographischen und ozeanischen Massen verbiegt. In Anlehnung an das Airy-Heiskanen-Modell (Heiskanen und Vening Meinesz 1958) können die durch die Belastung der topographischen Massen entstandenen regionalen Durchbiegungen der Kruste in den Mantel als Wurzeln aufgefasst werden. Im Fall der ozeanischen Massen und dem damit verbundenen Massenverlust der Wassermassen gegenüber der Krustenmasse können die durch die Entlastung entstandenen Durchbiegungen der Kruste als Antiwurzeln bezeichnet werden.

Allgemein kann diese regionale Modellierung mittels der Elastizitätstheorie beschrieben werden. Die in der Praxis vorliegenden digitalen Geländemodelle ermöglichen die Beschreibung der regionalen Durchbiegung durch Überlagerung der durch Einzellasten entstandenen Plattenauslenkungen. Es können analytische und numerische Näherungsverfahren unterschieden werden, da es unmöglich ist, die komplexen Zusammenhänge in der Kruste exakt zu beschreiben. Ein numerisches Verfahren stellt die Finite-Elemente-Methode dar; die Kirchhoffsche Plattentheorie ermöglicht eine analytische Beschreibung der Zusammenhänge (vgl. Grüniger 1990; Abd-Elmotaal 1991, 1994, 2000; u.a.).

Da der Rechenaufwand sehr groß ist, wird dieses Modell im Weiteren nicht verwendet.

3.4.6 Erdkrustenmodelle

Die in den Kapiteln 3.4.1 - 3.4.4 beschriebenen idealisierten isostatischen Modelle repräsentieren die Erdkruste und stimmen an manchen Stellen der Erde gut mit der Realität überein, während an anderen Stellen

extreme Abweichungen auftreten. Geophysikalische Studien zeigen, dass Dichteveränderungen im oberen Mantel eine große Rolle in der Kompensation globaler Krustenstrukturen spielen (Kaban et al. 1999). Dies resultiert aus der Tatsache, dass die mittlere Position der Mohorovičić-Diskontinuität („Moho-Diskontinuität“) in verschiedenen Gebieten unterschiedlich ist; für Westeuropa, Osteuropa und die ostsibirische Platte tritt beispielsweise eine Variation von 25 km auf. Feiner aufgelöste Dichteinformationen in Schichten, wie sie in dem globalen CRUST 2.0-Modell enthalten sind, stellen deshalb eine Verbesserung der Beschreibung der geophysikalischen Realität dar.

Das CRUST 2.0-Modell (siehe Tsoulis 2004) ist ein globales Krustenmodell mit einer Auflösung von $2^\circ \times 2^\circ$, das vom USGS (U.S. Geological Survey) und dem Institut für Geophysik und Planetare Physik der Universität von Kalifornien, San Diego erstellt und vertrieben wird. Es ist ein Nachfolgemodell des CRUST 5.1-Modells (vgl. Mooney et al. 1998), das eine Auflösung von $5^\circ \times 5^\circ$ hat. Beide Modelle basieren auf seismischen Messungen von Kompressions- und Scherwellen und einer detaillierten Zusammenstellung von Eis- und Sedimentdicken anhand von Karten. Bathymetrie und Topographie sind die des Modells ETOPO5 des National Geophysical Data Centre (siehe National Geophysical Data Centre 1988). Das CRUST 2.0-Modell besteht aus 7 Schichten, die jeweils eine Auflösung von $2^\circ \times 2^\circ$ haben: (1) Eis, (2) Wasser, (3) weiche und (4) harte Sedimente, (5) obere, (6) mittlere und (7) untere Kruste. Für diese 7 Schichten und den Mantel liegen Dichteinformationen ρ_i , $i = 1 \dots 8$ (vgl. Abbildung 3.12) und Geschwindigkeiten der Kompressions- und Scherwellen ($V_p(i)$, $V_s(i)$) vor. Insbesondere werden auch 8 Schichten mit Schichttiefen t_i , $i = 0 \dots 7$ bereitgestellt; die erste Schicht spiegelt die Oberkante von Wasser und Topographie wider, die übrigen Schichten (Eis, Wasser, Sedimente, Kruste) zeigen die Unterkante jeder Schicht. Demnach spiegelt die letzte Schichtgrenze die Moho-Diskontinuität wider.

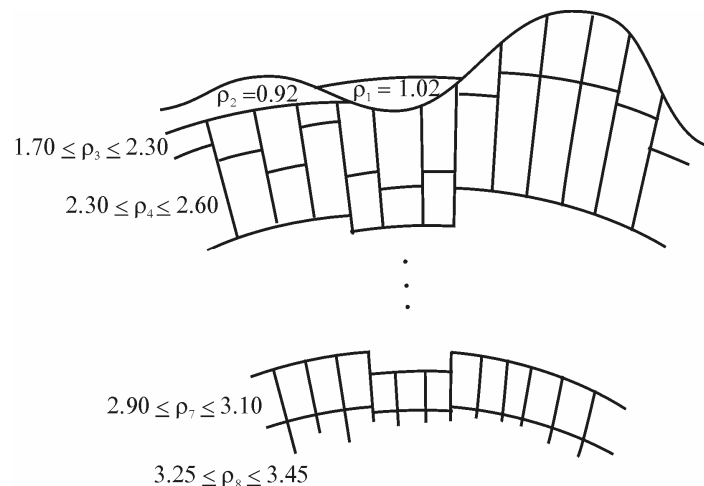


Abbildung 3.12 Minimale und maximale Dichteinformationen des CRUST 2.0-Modells pro Schicht

Eine erste Variante der Modellierung der Moho kann mittels der Schichttiefe der 7. Schicht analog zur Theorie von Airy-Heiskanen und dem dort angewendeten 2-Schicht-Modell mit einer mittleren Krustendichte von $2670 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ und einer mittleren Dichte des Mantels von $3270 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ festgelegt werden. Die Tiefe der Normalsäule wird mit $T = 25 \text{ km}$ gewählt (vgl. Kapitel 3.4.1). Eine zweite Möglichkeit stellt die Variation der Dichte in Anlehnung an Kuhn und Featherstone (2003) dar; dort beträgt die mittlere Krustendichte $2861 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ und die mittlere Dichte des Mantels $3381 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Die Ausnutzung der gesamten Dichteinformation in Form einer Berechnung der Krustendichte pro $2^\circ \times 2^\circ$ Element mittels gewichteter Mittelbildung und der Berücksichtigung der Manteldichte ρ_8 stellt eine dritte Variante der Moho-Modellierung dar. In Tsoulis (2004) ist eine weitere, vierte Möglichkeit aufgelistet, die eine Verfeinerung der dritten Variante darstellt; der isostatische Effekt wird pro Schicht separat berechnet, indem eine mittlere Tiefe der Normalsäule T_i festgelegt wird. Der Dichtekontrast jedes $2^\circ \times 2^\circ$ -Elements ergibt sich aus $\Delta\rho_i = \rho_{i+1} - \rho_i$, mit $i = 1 \dots 7$.

3.4.7 Einsatz der verschiedenen Massenkörper und Berechnungsvarianten

Zur Berechnung des isostatischen Potentials und seiner ersten und zweiten Ableitungen werden die Massen analog zu den topographischen Massen (vgl. Kapitel 3.3) in einzelne Volumenelemente Ω_i aufgeteilt und die Gesamtwirkung der Massen durch eine Summation über die einzelnen Volumenelemente bestimmt. Im Fall des Airy-Heiskanen-Modells, des Pratt-Hayford-Modells, deren Kombination und der Erdkrustenmodelle können die einzelnen Volumenelemente mit den in Kapitel 3.2 beschriebenen Massenelementen und Berechnungsmethoden modelliert werden. Im Fall des Kondensationsmodells nach Helmert werden die 2D-Flächenintegrale numerisch mittels Gauß-Legendre-Kubatur (2D) berechnet.

3.5 Numerische Untersuchungen zur Genauigkeit der Rechenformeln

3.5.1 Vergleich der Berechnungsmethoden bezüglich der analytischen Lösung und der Rechenzeit

Die präsentierten Massenelemente und Berechnungsmethoden für das Potential, die Schwere und den Marussi-Tensor werden exemplarisch anhand der zweiten Ableitungen einer sphärischen Kappe um den Berechnungspunkt überprüft. Speziell werden die Elemente der Laplace-Gleichung M_{xx} , M_{yy} und M_{zz} berechnet, indem eine konstante Topographie ($h = 1000$ m) angenommen wird. Die sphärische Kappe wird in Tesseroiden der Grundfläche $5' \times 5'$ zerlegt und der Berechnungspunkt Q liegt auf der Polachse in einer Höhe von 260 km. Diese Höhe entspricht in etwa der Flughöhe der für Frühjahr 2008 geplanten GOCE-Mission. Für diese spezielle Lage des Aufpunkts (siehe Abbildung 3.13) existiert eine analytische Lösung für eine sphärische Kappe; ein Vergleich der Modellierung von Breitenbändern ($\Delta\psi = 5'$) durch verschiedene Massenelemente und Methoden mit der analytischen Lösung eines Breitenbandes (siehe Kühtreiber et al. 1989; Heck und Seitz 2007) ist deshalb möglich. Für das Potential einer sphärischen Kappe gilt:

$$V(Q) = 2\pi G\rho \cdot \left\{ \frac{1}{3r} \cdot \ell_c'^3 + \frac{\ell_c'}{2} \cdot \cos \psi_c \cdot (r' - r \cdot \cos \psi_c) + \frac{1}{3r} \cdot r'^3 - \frac{1}{2} r'^2 + \frac{r^2}{2} \cdot \cos \psi_c \cdot \sin^2 \psi_c \cdot \ln(\ell_c' + r' - r \cdot \cos \psi_c) \right\} \Bigg|_{r'=R}^{r'=R+h} \quad (3.91)$$

$$\ell_c' = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos \psi_c}.$$

Die Effekte jedes Breitenbandes können als Differenz zweier aufeinander folgender sphärischer Kappen mit speziellen Radien $\psi_{c,i}$, $\psi_{c,i+1}$, wobei $\Delta\psi = \psi_{c,i+1} - \psi_{c,i} = 5'$, berechnet werden. Die Komponenten des Marussi-Tensors erhält man durch Ableiten des Potentials nach r , φ , λ . In diesem speziellen Fall hat der Marussi-Tensor Diagonalform, d.h. $M_{xx} = M_{yy} = -\frac{1}{2} M_{zz}$. In Abbildung 3.14 ist der Effekt von Breitenbändern der Breite $\Delta\psi = 5'$ bis $\psi = 180^\circ$ auf die Gradiometerobservable M_{zz} dargestellt; folgende Parameter werden zur Berechnung verwendet: $G = 6.572 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $\rho = 2670 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $R = a = 6378137 \text{ m}$, $h = 1000 \text{ m}$. Das Maximum des Effektes eines Breitenbandes, der im Wesentlichen vom Abstand ψ_c und der im Breitenband enthaltenen Gesamtmasse abhängt, liegt bei einer sphärischen Distanz von ca. 1° . Der Gesamteffekt einer sphärischen Kappe ist in Abbildung 3.15 dargestellt. Dieser besitzt für die M_{zz} -Komponente ein (flaches) Minimum von 0.62277 E.U. bei $\psi_c = 70^\circ$. Für größere Kugelradien nimmt der Wert der M_{zz} -Komponente wieder zu.

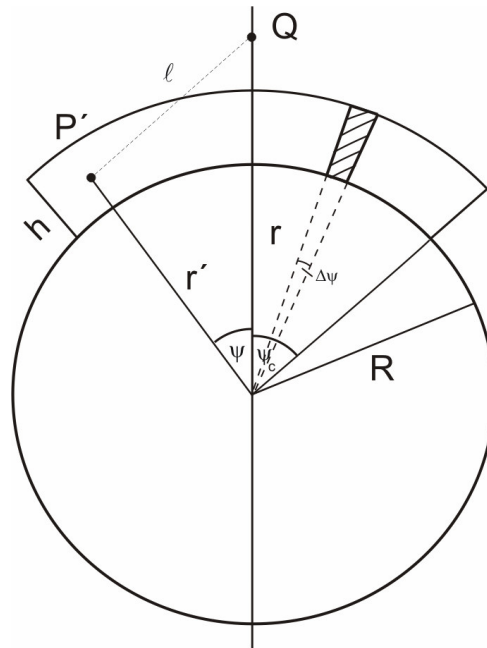


Abbildung 3.13 Sphärische Kappe

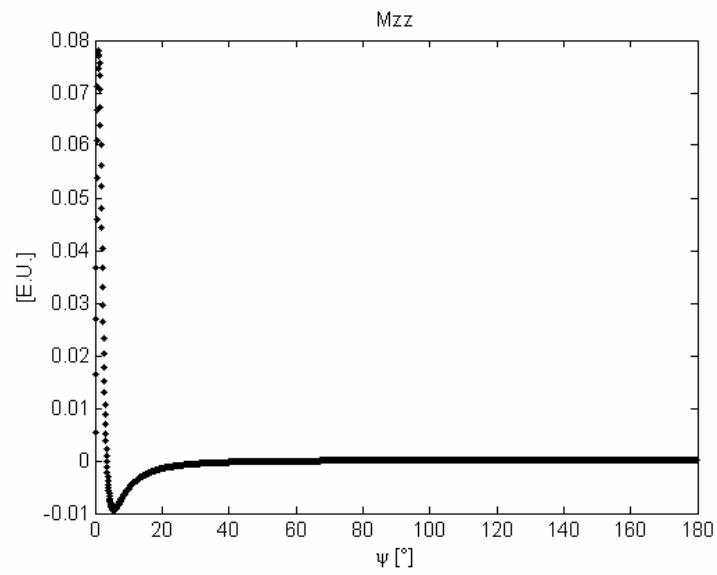


Abbildung 3.14 Effekt eines einzelnen Breitenbands (Breite $\Delta\psi = 5^\circ$) in einer sphärischen Kappe auf M_{zz} ; Dichte $\rho = 2670 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; Höhe 1000 m

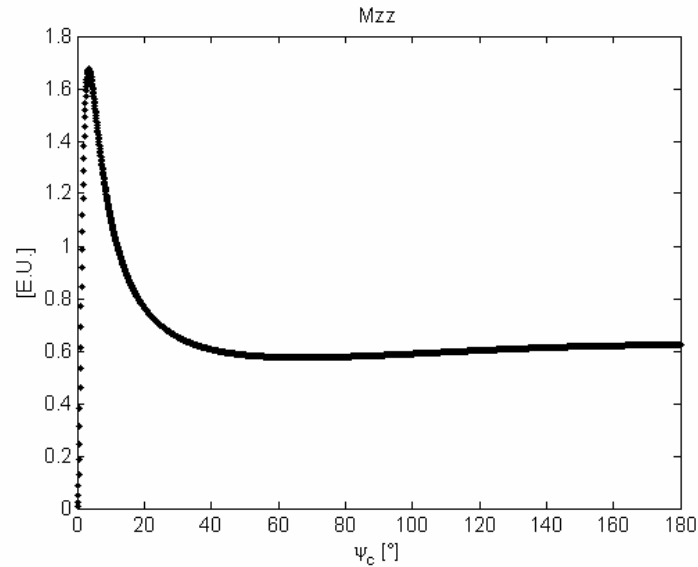


Abbildung 3.15 Gesamteffekt einer sphärischen Kappe auf M_{zz} ; Dichte $\rho = 2670 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; Höhe 1000 m

In Tabelle 3.1 ist der maximale Unterschied zwischen der exakten Lösung eines einzelnen Breitenbands – berechnet aus der Differenz zweier sphärischer Kappen – und der Modellierung durch verschiedene Massenelemente (Tesseroid, Punktmasse, Quader, Massenlinie und Massenschicht) und Berechnungsmethoden dargestellt. Jedes Breitenband hat die Ausdehnung $\Delta\psi = 5^\circ$ und die Höhe beträgt 1000 m . Tabelle 3.2 zeigt den Gesamtfehler von M_{zz} bis zu einer sphärischen Distanz $\psi_c = 10^\circ$. In Abbildung 3.16 ist der maximale Fehler pro Breitenband, in Abbildung 3.17 der Gesamtfehler von M_{zz} bis zu einer sphärischen Distanz $\psi_c = 10^\circ$ dargestellt. In Tabelle 3.1, Tabelle 3.2, Abbildung 3.16 und Abbildung 3.17 sieht man, dass die Berechnung mittels Tesseroiden, modelliert durch eine Taylorreihenentwicklung, die beste Approximation an die sphärische Kappe darstellt. In Abbildung 3.16 und Abbildung 3.17 wird deutlich, dass Punktmasse und Massenlinie sich ähnlich verhalten, entsprechend Massenschicht und Quader – unabhängig von der Berechnungsmethode des Quaders. Dies kann mit Hilfe der horizontalen und vertikalen Ausdehnung der Massenelemente im Hinblick auf ihre Distanz zum Berechnungspunkt Q erklärt werden. Die verschiedenen Approximationen der Anpassung eines Tesseroids an einen Quader liefern keine signifikanten Unterschiede in den Gradiometerdaten in Satellitenhöhe; im Folgenden wird deshalb die III. Approximation (vgl. Kapitel 3.2.1.4) zur Quaderberechnung verwendet. Der Gesamtfehler der Punktmassen- und Massenlinien-Approximationen der sphärischen Kappe liegt bei $-4.6 \cdot 10^{-4} \text{ E.U.}$, um den Faktor 1.5 besser als Massenschicht und Quader. Der Gesamtfehler eines Tesseroids, modelliert mittels Taylorreihenentwicklung, ist drei Größenordnungen kleiner – verglichen mit den anderen Massenelementen. Durch die Anpassung eines Tesseroids an einen Quader ist der Gesamtfehler der analytischen Berechnung und der Taylorreihenentwicklung (MacMillan-Approximation) praktisch identisch. Bei vorliegender kartesischer Gitternetzeinteilung liefert die analytische Berechnung genauere Ergebnisse als die Taylorreihenentwicklung des Quaders.

In Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2 wird demnach deutlich, dass alle Massenelemente, bei denen eine Umrechnung vom Tesseroid in den Quader stattfindet, größere Abweichungen zur analytischen Lösung aufweisen. Es wäre deshalb denkbar, dass der Fehler für die Punktmasse etc. in erster Linie mit der Konvergenz der Koordinatenlinien im innersten Bereich zusammenhängt, da dort Dreiecke durch Rechtecke als Grundfläche ersetzt werden.

Tabelle 3.1 Approximationsfehler der Modellierung durch verschiedene Massenelemente bezüglich der analytischen Lösung eines einzelnen Breitenbands $\Delta\psi = 5'$ und einer Tesseroidhöhe 1000 m

Massenelement	M_{zz} Max(Betrag) [E.U.]
Punktmasse	5.0651e-005
Massenlinie	5.0996e-005
Massenschicht	4.5278e-005
Quader (I. Approximation)	4.5541e-005
Quader (II. Approximation)	4.5541e-005
Quader (III. Approximation)	4.5542e-005
Quader-Taylor (MacMillan) (III. Approximation)	4.5483e-005
Tesseroid-Taylor	2.2833e-008

Tabelle 3.2 Gesamtfehler der Modellierung durch verschiedene Massenelemente bezüglich der analytischen Lösung für eine sphärische Kappe $\psi_c = 10^\circ$ und Höhe 1000 m (Absoluter Wert von M_{zz} : 0.6228 E.U.)

Massenelement	M_{zz} [E.U.]
Punktmasse	-4.5697e-004
Massenlinie	-4.5691e-004
Massenschicht	-9.2261e-004
Quader (I. Approximation)	-9.2253e-004
Quader (II. Approximation)	-9.2253e-004
Quader (III. Approximation)	-9.2255e-004
Quader-Taylor (MacMillan) (III. Approximation)	-8.9718e-004
Tesseroid-Taylor	1.3150e-007

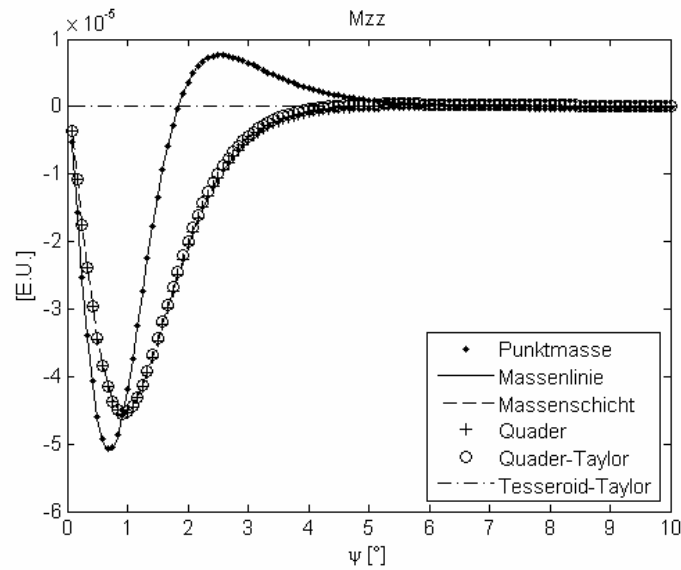


Abbildung 3.16 Approximationsfehler von M_{zz} [E.U.] bezüglich verschiedener Massenelemente für ein einzelnes Breitenband $\Delta\psi = 5'$ und eine Tesseroidhöhe 1000 m

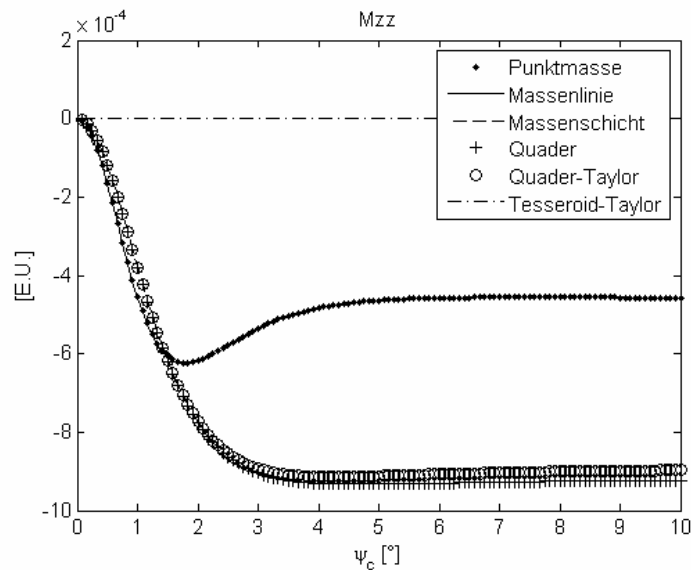


Abbildung 3.17 Gesamtfehler von M_{zz} [E.U.] für eine sphärische Kappe (Radius ψ_c , Höhe 1000 m) bezüglich verschiedener Massenelemente

In Tabelle 3.3 bis Tabelle 3.5 sowie in Abbildung 3.18 bis Abbildung 3.20 wird deutlich, dass das Tesseroid, modelliert mittels analytischer Integration nach r sowie Gauß-Legendre-Kubatur (2D) oder mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) – abhängig von den Werten n , m , p der Quadraturformeln – sehr gut die exakte Lösung der sphärischen Kappe approximiert. Im Fall der M_{zz} -Komponente des Marussi-Tensors für $n = m = p = 0$ ($1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ Knoten pro Tesseroid) und der Modellierung des Tesseroids mittels Taylorreihenentwicklung des Integranden beträgt die Rechenzeit ca. 1/10 der Rechenzeit der analytischen Berechnung des Quaders (vgl. Abbildung 3.22 bis Abbildung 3.24). Die Punktmasse als Term nullter Ordnung der Taylorreihenentwicklung des Tesseroids benötigt weniger Rechenzeit als die Punktmasse, die über die Approximation des Quaders abgeleitet wird, da keine separate Transformation vom Kantensystem des Quaders in das Aufpunktsystem benötigt wird. Die Modellierung des Quaders durch Taylorreihenentwicklung des Integranden benötigt nur ca. 1/8 der Rechenzeit der exakten analytischen Berechnung des Quaders.

In Abbildung 3.22 bis Abbildung 3.24 ist die Rechenzeit jedes Massenelementes auf die Rechenzeit für den Quader – analytische Berechnung – normiert. Der Vergleich der Rechenzeiten der einzelnen Massenelemente basiert auf der Berechnung des Gesamteinflusses einer sphärischen Kappe mit $\psi_c = 180^\circ$ bzw. Kugelschale für den Aufpunkt in der Polachse. Für die Auswertung wird die Breitenabhängigkeit der Tesseroiden in den einzelnen Breitenbänder berücksichtigt.

Tabelle 3.3 stellt den maximalen Unterschied zwischen der exakten Lösung eines einzelnen Breitenbands – berechnet aus der Differenz zweier sphärischer Kappen – und der Modellierung durch Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r sowie Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n, m \leq 5$ dar. Abbildung 3.18 zeigt den Approximationsfehler des Marussi-Elements M_{zz} pro Breitenband $\Delta\psi = 5'$ bis zu einer sphärischen Distanz $\psi_c = 10^\circ$. In dieser Berechnung wird das erste Breitenband von $0' - 5'$ ausgeschlossen, da der Integralkern ein singuläres Verhalten um den Berechnungspunkt zeigt. Man sieht, dass die Modellierung mit $n = m = 0$ die größte Abweichung von der exakten Lösung der sphärischen Kappe aufweist; von $2 \leq n = m \leq 5$ sind die Abweichungen nahezu identisch und sehr klein (10^{-12} E.U.). Abbildung 3.19 verdeutlicht, dass der Gesamtfehler von M_{zz} bis zu einer sphärischen Distanz $\psi_c = 10^\circ$ für $n = m = 0$ die gleiche Größenordnung hat wie der Gesamtfehler, den die aus dem Quader abgeleiteten Massenelemente erzeugen. Für $n = m = 1$ ($2 \cdot 2 = 4$ Knoten) bis zu größeren Werten n, m ist der Gesamtfehler um den Faktor 0.5 ($n = m = 1$) bzw. $2 \cdot 10^{-2}$ ($2 \leq n = m \leq 5$) kleiner als bei der Taylorreihenentwicklung. Der Gesamtfehler, der in Tabelle 3.4 für eine sphärische Distanz $\psi_c = 10^\circ$ aufgelistet ist, zeigt dies ebenfalls. Aufgrund der steigenden Anzahl von Funktionsauswertungen und der zunehmenden Rechenzeit für größere Werte n, m (vgl. Abbildung 3.23) liefert $n = m = 1$ ein akzeptables Ergebnis.

Tabelle 3.3 Approximationsfehler der Modellierung durch Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r + Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n = m \leq 5$ für Breitenbänder $\Delta\psi = 5'$

$n = m$	M_{zz} Max(Betrag) [E.U.]
0	5.1013e-005
1	1.0462e-008
2	5.5769e-012
3	5.5769e-012
4	5.5768e-012
5	5.5767e-012

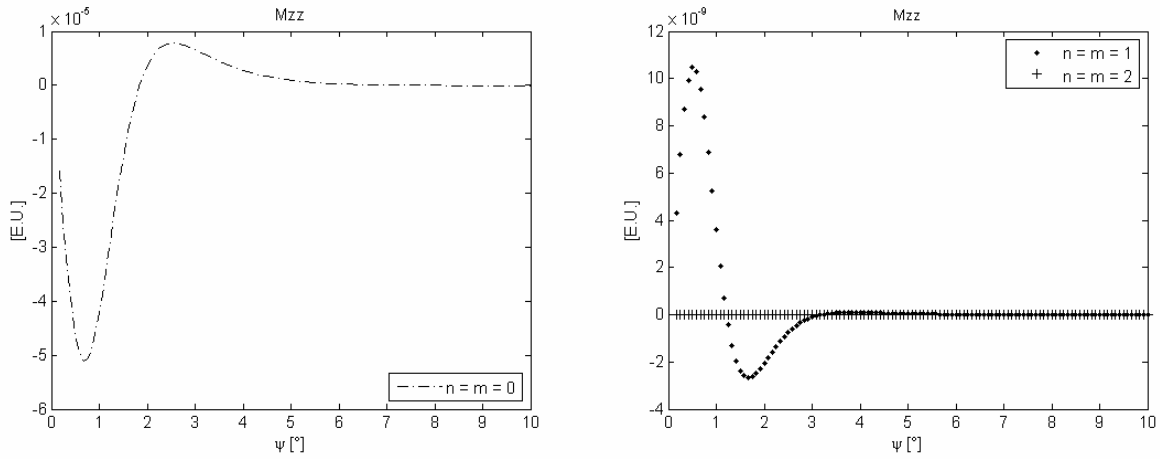


Abbildung 3.18 Approximationsfehler von M_{zz} [E.U.] bezüglich der Modellierung von Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r und Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n = m \leq 2$ für ein Breitenband $\Delta\psi = 5'$ und eine Tesseroidhöhe 1000 m

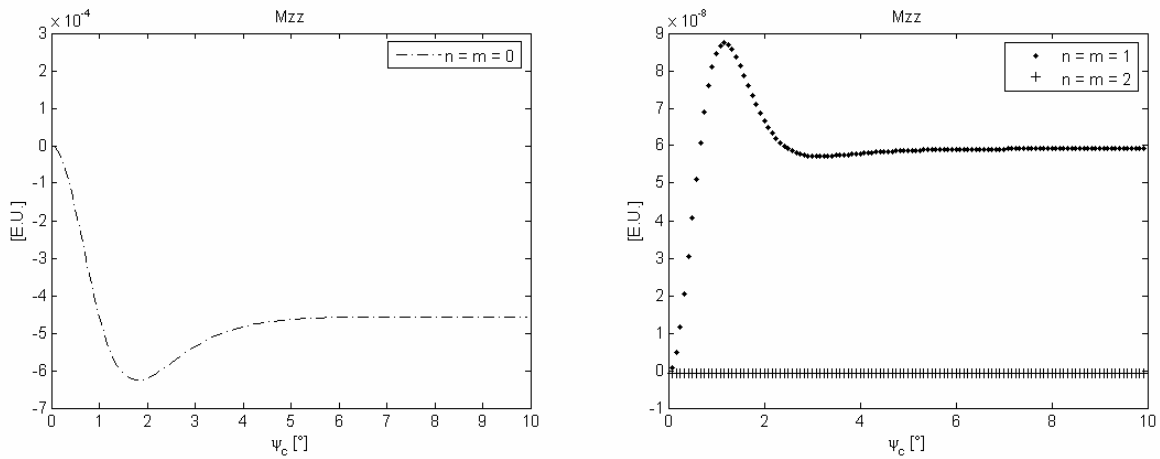


Abbildung 3.19 Gesamtfehler von M_{zz} [E.U.] für eine sphärische Kappe (Radius ψ_c , Höhe 1000 m) bezüglich der Modellierung von Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r und Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n = m \leq 2$

Tabelle 3.4 Gesamtfehler der Modellierung durch Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r sowie Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n = m \leq 5$ für eine sphärische Kappe $\psi_c = 10^\circ$

$n = m$	M_{zz} [E.U.]
0	-4.5973e-004
1	5.5917e-008
2	-8.4623e-010
3	-8.4543e-010
4	-8.4364e-010
5	-8.4364e-010

Der maximale Unterschied zwischen der exakten Lösung eines einzelnen Breitenbands – berechnet aus der Differenz zweier sphärischer Kappen – und der Modellierung durch Tesseroiden mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 2$ ist in Tabelle 3.5 dargestellt. In Abbildung 3.20 wird der Approximationsfehler von M_{zz} pro Breitenband $\Delta\psi = 5'$ veranschaulicht. Der Gesamtfehler – in Abbildung 3.21 und Tabelle 3.6 veranschaulicht – entspricht dem Gesamtfehler der Modellierung mittels Tesseroiden, berechnet mit analytischer Integration nach r sowie Gauß-Legendre-Kubatur (2D) (vgl. Tabelle 3.4, Abbildung 3.19). Analog zum 2D-Fall liefert $n = m = p = 2$ das genaueste Ergebnis (10^{-12} E.U.). Eine gute Approximation stellt $n = m = p = 1$ ($2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Knoten) im Hinblick auf die steigende Anzahl der Funktionsauswertungen und die Rechenzeit mit wachsendem n , m und p dar (siehe Abbildung 3.24). Die Rechenzeit ist im 3D-Fall aufgrund des einfacheren Integrationskerns etwas geringer als im 2D-Fall.

Tabelle 3.5 Approximationsfehler der Modellierung durch Tesseroiden mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 2$ für Breitenbänder $\Delta\psi = 5'$

$n = m = p$	M_{zz} Max(Betrag) [E.U.]
0	5.0651e-005
1	1.0463e-008
2	5.5768e-012

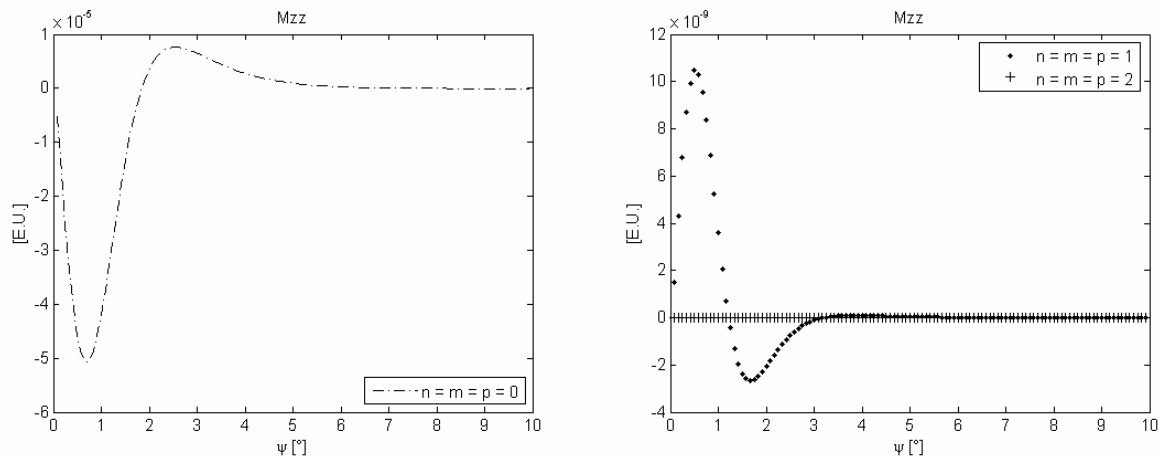


Abbildung 3.20 Approximationsfehler von M_{zz} [E.U.] bezüglich der Modellierung von Tesseroiden mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 2$ für ein einzelnes Breitenband $\Delta\psi = 5'$ und eine Tesseroidhöhe 1000 m

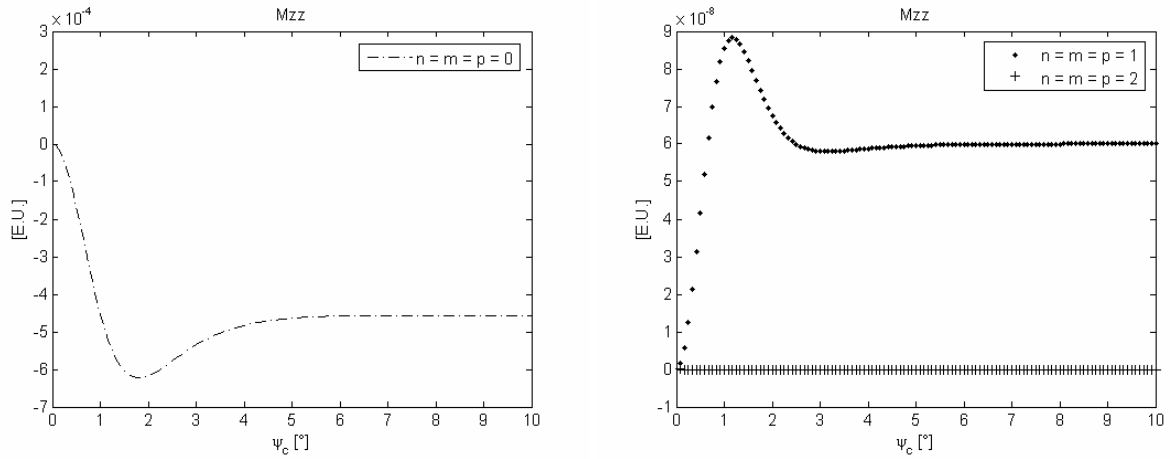


Abbildung 3.21 Gesamtfehler von M_{zz} [E.U.] für eine sphärische Kappe (Radius ψ_c , Höhe 1000 m) bezüglich der Modellierung von Tesseroiden Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 2$

Tabelle 3.6 Gesamtfehler der Modellierung durch Tesseroiden mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 3$ für eine sphärische Kappe $\psi_c = 10^\circ$

n = m = p	M_{zz} [E.U.]
0	-4.5973e-004
1	6.0015e-008
2	5.060e-0012

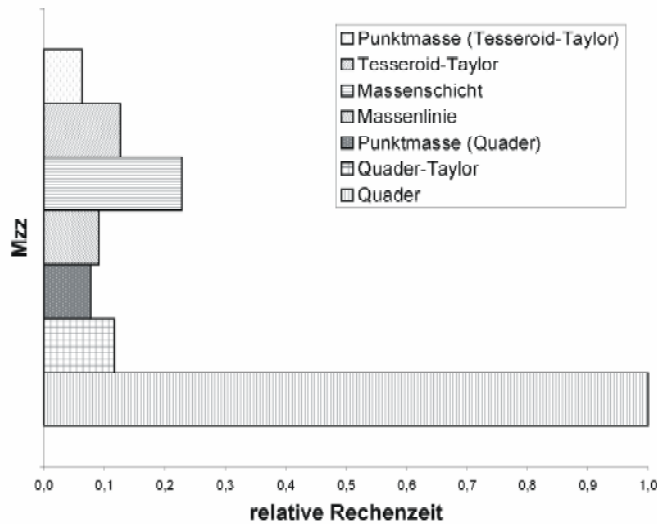


Abbildung 3.22 Vergleich verschiedener Massenelemente bezüglich der Rechenzeit

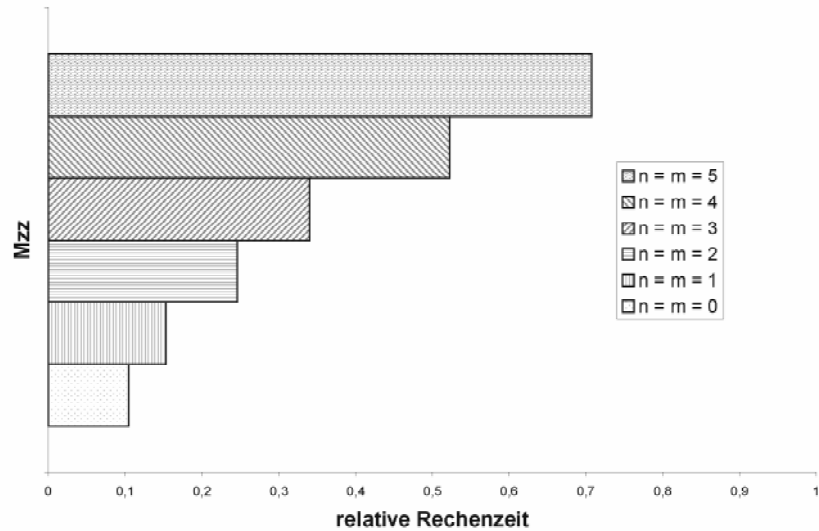


Abbildung 3.23 Vergleich der Modellierung durch Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r sowie Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n = m \leq 5$ bezüglich der Rechenzeit

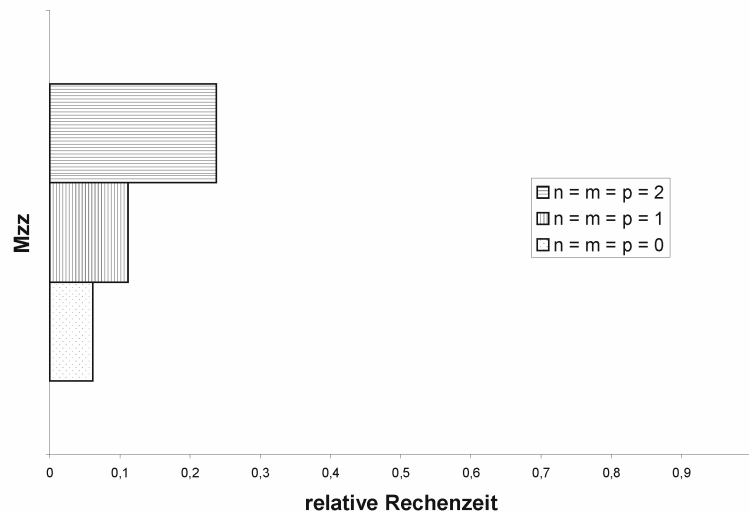


Abbildung 3.24 Vergleich der Modellierung durch Tesseroiden mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 2$ bezüglich der Rechenzeit

3.5.2 Vergleich der Massenelemente bezüglich der Entfernung zum Aufpunkt

Es wird anhand der M_{zz} -Komponente überprüft (analog zur Schwere bei Grüniger 1990), wie groß der Approximationsfehler der Massenelemente Quader, Punktmasse, Massenschicht und Massenlinie relativ zum Tesseroid in Abhängigkeit von der Entfernung zum Aufpunkt ist. Der Einfluss des Tesseroids wird rein numerisch mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) modelliert. Der Aufpunkt wird am Äquator mit $\varphi = 0^\circ$, $\lambda = 0^\circ$ und $h = 260$ km Höhe gewählt. Der Erdradius beträgt 6378137 m. Die Abmessungen der Grundfläche eines Tesseroids sind $\Delta\varphi = 1^\circ$, $\Delta\lambda = 1^\circ$ und die Höhe beträgt $h = 100$ m bzw. $h = 1000$ m. Der Vergleich der Massenelemente wird im Breitenband der Breite $-0.5^\circ \leq \varphi \leq 0.5^\circ$ und Länge $0.5^\circ \leq \lambda \leq 359.5^\circ$ durchgeführt, d.h. die Länge des $1^\circ \times 1^\circ$ -Elements variiert zwischen 0.5° und 359.5° . Der Nahbereich ($-0.5^\circ \leq \lambda \leq 0.5^\circ$) wird nicht berücksichtigt, da in unmittelbarer Umgebung des Aufpunkts aus Gründen der numerischen

Stabilität Quader zur Berechnung verwendet werden (vgl. Kapitel 3.5.1). Das Tesseroid wird durch verschiedene Massenkörper der Grundfläche $1^\circ \times 1^\circ$, $5' \times 5'$, $1' \times 1'$ und $1'' \times 1''$ approximiert. Die Dichte wird als konstant mit $\rho = 2670 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ angenommen; die Gravitationskonstante beträgt $6.572 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$.

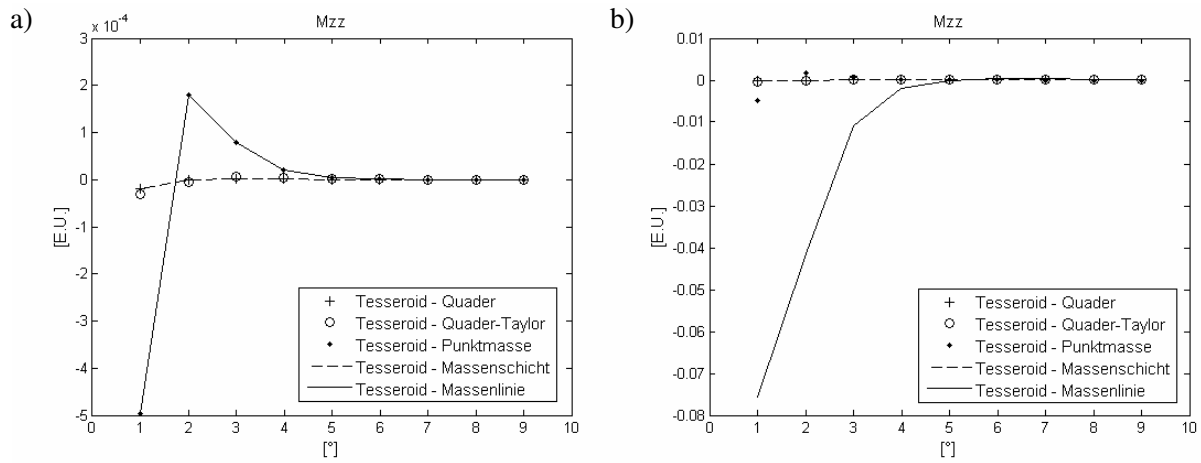


Abbildung 3.25 Fehler in M_{zz} infolge der Approximation eines Tesseroids durch verschiedene Massenkörper der Grundfläche $1^\circ \times 1^\circ$ und der Höhe 100 m (a) und 1000 m (b) in Abhängigkeit von der Längendifferenz zwischen Aufpunkt und Tesseroidmittelpunkt

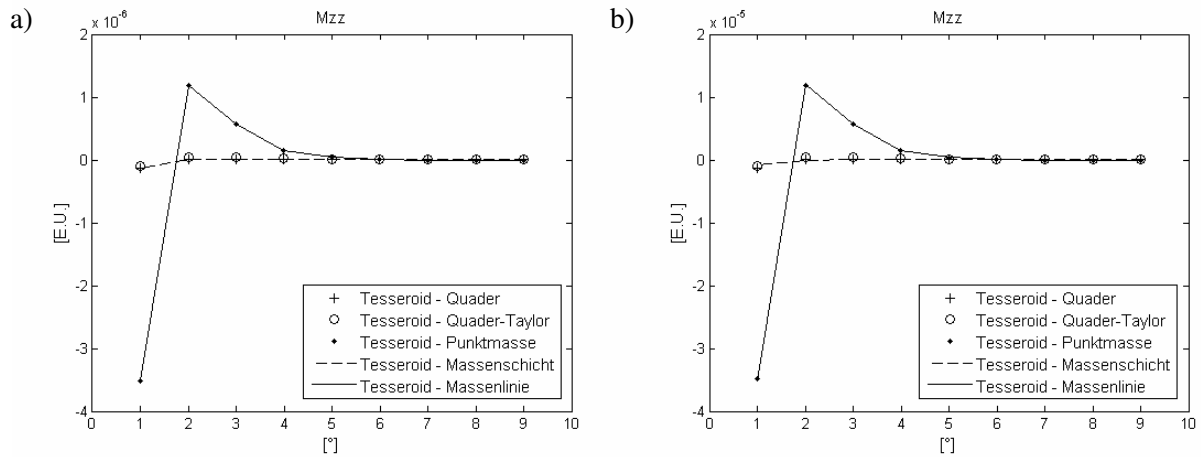


Abbildung 3.26 Fehler von M_{zz} infolge der Approximation eines Tesseroids durch verschiedene Massenkörper der Grundfläche $5' \times 5'$ und der Höhe 100 m (a) und 1000 m (b) in Abhängigkeit von der Längendifferenz zwischen Aufpunkt und Tesseroidmittelpunkt

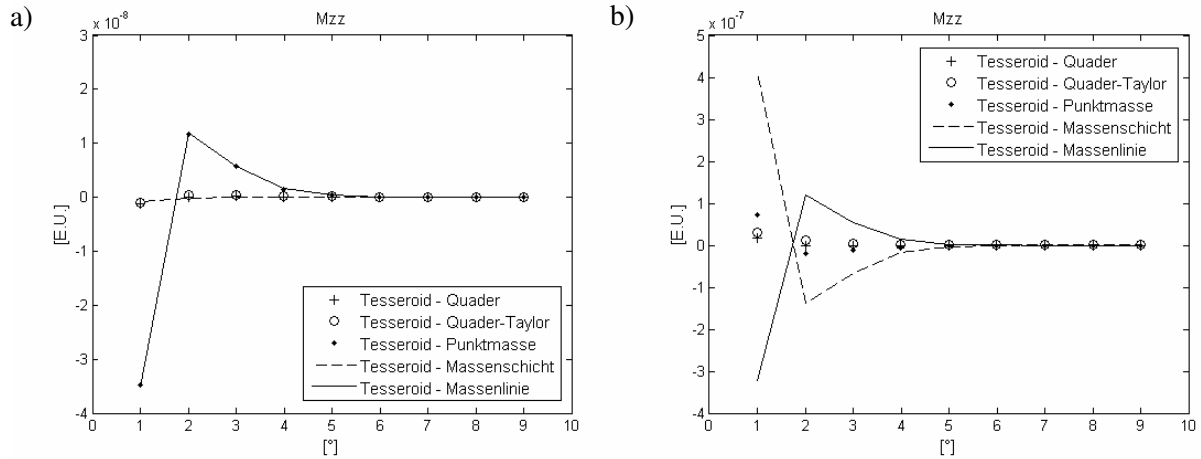


Abbildung 3.27 Fehlereinfluss von M_{zz} eines Tesseroids infolge der Approximation durch verschiedene Massenkörper der Grundfläche $30'' \times 30''$ und der Höhe 100 m (a) und 1000 m (b) in Abhängigkeit von der Längendifferenz zwischen Aufpunkt und Tesseroidmittelpunkt

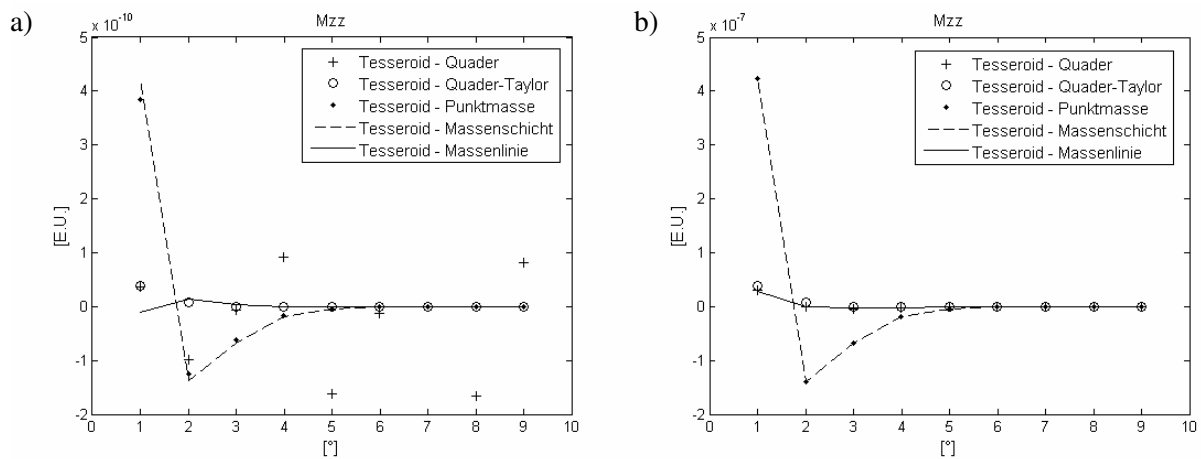


Abbildung 3.28 Fehlereinfluss von M_{zz} eines Tesseroids infolge der Approximation durch verschiedene Massenkörper der Grundfläche $1'' \times 1''$ und der Höhe 100 m (a) und 1000 m (b) in Abhängigkeit von der Längendifferenz zwischen Aufpunkt und Tesseroidmittelpunkt

Tabelle 3.7 Fehler (Std [E.U.]) von M_{zz} infolge der Approximation eines Tesseroids der Grundfläche $1^\circ \times 1^\circ$ durch verschiedene Massenkörper für $-0.5^\circ \leq \varphi \leq 0.5^\circ$, $0.5^\circ \leq \lambda \leq 359.5^\circ$ und $h = 100$ m

	Auflösung 1°	Auflösung $5'$	Auflösung $30''$	Auflösung $1''$
Tesseroid – Quader	1.3716e-006	9.4595e-009	7.6823e-010	1.1923e-009
Tesseroid – Quader-Taylor	2.3987e-006	9.6712e-009	9.4535e-011	2.8913e-012
Tesseroid – Punktmasse	3.9901e-005	2.8047e-007	2.7713e-009	3.05261e-011
Tesseroid – Massenschicht	1.3716e-006	9.4297e-009	6.3342e-011	1.5743e-010
Tesseroid – Massenlinie	3.9901e-005	2.8050e-007	2.8028e-009	1.2330e-012

Tabelle 3.8 Approximationsfehler (Std [E.U.]) von M_{zz} eines Tesseroids der Grundfläche $1^\circ \times 1^\circ$ durch verschiedene Massenkörper für $-0.5^\circ \leq \varphi \leq 0.5^\circ$, $0.5^\circ \leq \lambda \leq 359.5^\circ$ und $h = 1000 \text{ m}$

	Auflösung 1°	Auflösung $5'$	Auflösung $30''$	Auflösung $1''$
Tesseroid – Quader	1.3746e-005	9.2795e-008	1.6708e-009	2.5999e-009
Tesseroid – Quader-Taylor	2.4252e-005	9.4901e-008	2.3454e-009	2.9840e-009
Tesseroid – Punktmasse	0.0004003	2.7825e-006	5.6191e-009	3.3741e-008
Tesseroid – Massenschicht	1.3717e-005	6.3628e-008	3.2868e-008	3.3801e-008
Tesseroid – Massenlinie	0.0057776	2.8142e-006	2.6072e-008	2.1793e-009

In der Abbildung 3.25 bis Abbildung 3.28 ist der Fehlereinfluss von M_{zz} eines Tesseroids der Grundfläche $1^\circ \times 1^\circ$ – berechnet mittels Taylorreihenentwicklung des Integranden – nach einer Unterteilung in verschiedene Massenkörper einer Auflösung von 1° bis $1''$ und einer Höhe von 100 m und 1000 m in Abhängigkeit von der Entfernung zum Aufpunkt dargestellt. In Tabelle 3.7 und Tabelle 3.8 ist ergänzend der Approximationsfehler in Form der Standardabweichung eines Tesseroids durch verschiedene Massenkörper für eine Auflösung von 1° bis $1''$ und eine Höhe des Tesseroids von 100 m (Tabelle 3.7) und 1000 m (Tabelle 3.8) aufgelistet.

Die Güte der Approximation nimmt pro Steigerung der Auflösung zu, d.h. für die Höhe eines Tesseroids von 100 m liegt der durchschnittliche Approximationsfehler bei einer Auflösung von 1° bei ca. 10^{-4} E.U., bei $1''$ dagegen bei ca. 10^{-9} E.U..

Bei einer Auflösung von 1° ist zu erkennen, dass das Verhalten von Punktmasse und Massenlinie ähnlich ist, entsprechend das Verhalten von Quader – unabhängig von der Berechnungsmethode – und Massenschicht, wobei dies bei einer Höhe des Tesseroids von 100 m deutlicher der Fall ist. Quader und Massenschicht passen sich besser dem Tesseroid an als Punktmasse und Massenlinie. Der Approximationsfehler ist bei den Massenelementen Quader, Punktmasse und Massenschicht bei einer Höhe von 1000 m eine Zehnerpotenz größer als bei $h = 100 \text{ m}$, d.h. der Fehler ist proportional zur Höhe. Die Massenlinie weist eine größere Abweichung zum Tesseroid bei $h = 1000 \text{ m}$ auf.

Bei allen Massenelementen (Quader, Punktmasse, Massenschicht und Massenlinie) ist der Approximationsfehler bei einer Auflösung von $5'$ und einer Höhe des Tesseroids von 1000 m eine Zehnerpotenz größer als bei $h = 100 \text{ m}$; bei der Massenschicht ist die Abweichung etwas geringer als eine Zehnerpotenz. Auch das Verhalten von Quader – unabhängig von der Berechnungsmethode – und Massenschicht und das Verhalten von Punktmasse und Massenlinie ist ähnlich und analog zur Auflösung von 1° . Quader und Massenschicht weichen geringer vom Tesseroid ab als Punktmasse und Massenlinie.

Bei einer Auflösung von $30''$ und einer Höhe des Tesseroids von 100 m passen sich Quader und Massenschicht dem Tesseroid besser als Punktmasse und Massenlinie an. Bei einer Höhe des Tesseroids von 1000 m ist der Approximationsfehler bei der analytischen Berechnung des Quaders und der Massenlinie eine Zehnerpotenz größer, bei der Punktmasse $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie bei einer Höhe des Tesseroids von 100 m. Bei der Berechnung des Quaders mittels Taylorreihenentwicklung des Integranden und der Massenschicht ist der Approximationsfehler eine Zehnerpotenz größer.

Der Approximationsfehler bei Verwendung von Quader und Massenlinie bzw. Massenschicht hat einen ähnlichen Verlauf bei einer Auflösung von $1''$; die Streuung ist bei der Modellierung des Quaders mittels Taylorreihenentwicklung des Integranden für $h = 100 \text{ m}$ größer. Bei einer Tesseroidhöhe von 1000 m sind die Abweichungen von Quader und Massenlinie zum Tesseroid geringer.

Der Approximationsfehler liegt ab einer Auflösung der Massenelemente von $5'$ und der Höhe 100 m und 1000 m fern der Messgenauigkeit von $\pm 1 \text{ mE.U.}$ des Gradiometers der für 2008 geplanten GOCE-Mission. Dieses Verhalten resultiert aus der Lage des Aufpunkts in Satellitenhöhe (260 km). Aufgrund der benötigten Rechenzeit (siehe Abbildung 3.22) wird die Taylorreihenentwicklung des Tesseroids zur Massen-

modellierung im Nahbereich verwendet. Im Fernbereich des Aufpunkts ist die Approximation durch eine Punktmasse zu bevorzugen.

3.5.3 Auswirkung der Elliptizität auf den topographisch-isostatischen Effekt

Um die Auswirkung der Elliptizität der Höhenbezugsfläche auf den topographisch-isostatischen Effekt festzustellen, wird der Einfluss der topographisch-isostatischen Massen am Beispiel des isostatischen Modells nach Airy-Heiskanen mit der Methode der Gauß-Legendre-Kubatur (3D) mit 2·2·2 Stützstellen ($n = m = p = 1$) mit variablem Erdradius für einen Punkt in Satellitenhöhe (260 km) berechnet. Das digitale Geländemodell wird auf die Höhenbezugsfläche (Sphäre bzw. Ellipsoid) aufgesetzt; im Fall der isostatischen Massen wird entsprechend verfahren. Es kann zwischen den folgenden vier Varianten unterschieden werden:

1. $R = R_m = 6371000 \text{ m}$, $r = R + 260000 \text{ m}$ (Standardfall)
2. $R = a = 6378137 \text{ m}$, $r = R + 260000 \text{ m}$
3. $R = r_E = r(\gamma) = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \gamma}}$, $\gamma = \text{geozentrische Breite}$, $r = r_E + 260000 \text{ m}$ (vgl. Heck 1995)
4. $R = r_E$, $r = a + 260000 \text{ m}$.

In der Tabelle 3.9 bis Tabelle 3.14 sind die statistischen Werte der einzelnen Marussi-Elemente der Differenz des topographisch-isostatischen Effekts der Varianten 1, 3 und 4 bezüglich der 2. Variante und der Variante 3 bezüglich der 4. Variante aufgelistet. Es wird in den ersten 3 Fällen die Variante 2 als Referenz gewählt, da diese rein sphärische Modellierung mit dem Radius der großen Halbachse des Erdellipsoides GRS80 gewissermaßen einen Kompromiss zur ellipsoidischen Berechnung darstellt. Der Vergleich der Varianten 2 und 4 spiegelt den Einfluss der Modellierung der Topographie wider. Die „Verbiegung“ der Konfiguration vom ellipsoidischen Fall auf den sphärischen Fall wird in der Differenz der Varianten 3 und 2 deutlich. In Abbildung 3.29 ist der Marussi-Tensor der 2. Ableitungen dieser Differenz für die gesamte Erde graphisch dargestellt. Um den Einfluss der Modellierung der Satellitenbahn zu erhalten, wird die Differenz zwischen der Variante 3 und 4 ergänzend statistisch untersucht und aufgelistet. Zusätzlich zu den statistischen Werten der einzelnen Marussi-Elemente werden die statistischen Kenngrößen der Eigenwerte des Marussi-Tensors berechnet (vgl. Invarianten eines Tensors: Bronstein 1997; Marchenko 2003). Diese sind im Anhang A.5 zu finden.

Tabelle 3.9 Statistik der M_{xx} -Komponente für verschiedene Erdradien

	Min [mE.U.]	Max [mE.U.]	Quadrat. Mittel [mE.U.]	Durchschnittlicher Betrag [mE.U.]	Std [mE.U.]
Variante 1-2	-0.3551	0.7588	0.0776	0.0491	0.0776
Variante 3-2	-0.8243	1.1747	0.1831	0.0959	0.1829
Variante 4-2	-44.1338	36.5248	5.0109	2.5299	5.0109
Variante 3-4	-44.0922	36.3037	5.0727	2.5654	5.0727

Tabelle 3.10 Statistik der M_{xy} -Komponente für verschiedene Erdradien

	Min [mE.U.]	Max [mE.U.]	Quadrat. Mittel [mE.U.]	Durchschnittlicher Betrag [mE.U.]	Std [mE.U.]
Variante 1-2	-0.2009	0.2672	0.0373	0.0243	0.0373
Variante 3-2	-0.5291	0.5515	0.0863	0.0450	0.0863
Variante 4-2	-20.8891	28.5438	2.6771	1.3569	2.6771
Variante 3-4	-20.8079	28.5044	2.7018	1.3682	2.7018

Tabelle 3.11 Statistik der M_{xz} -Komponente für verschiedene Erdradien

	Min [mE.U.]	Max [mE.U.]	Quadrat. Mittel [mE.U.]	Durchschnittlicher Betrag [mE.U.]	Std [mE.U.]
Variante 1-2	-0.6723	0.6842	0.0892	0.0524	0.0881
Variante 3-2	1.5181	0.9463	0.2102	0.1019	0.2055
Variante 4-2	-48.0270	45.6642	5.7717	2.8605	5.7604
Variante 3-4	-48.2365	46.2147	5.8434	2.8816	5.8293

Tabelle 3.12 Statistik der M_{yy} -Komponente für verschiedene Erdradien

	Min [mE.U.]	Max [mE.U.]	Quadrat. Mittel [mE.U.]	Durchschnittlicher Betrag [mE.U.]	Std [mE.U.]
Variante 1-2	-0.3383	0.5306	0.0773	0.0493	0.0769
Variante 3-2	-0.9515	1.4475	0.1865	0.0937	0.1854
Variante 4-2	-69.7015	57.0255	5.2272	2.5093	5.2252
Variante 3-4	-69.5733	56.8631	5.2992	2.5455	5.2965

Tabelle 3.13 Statistik der M_{yz} -Komponente für verschiedene Erdradien

	Min [mE.U.]	Max [mE.U.]	Quadrat. Mittel [mE.U.]	Durchschnittlicher Betrag [mE.U.]	Std [mE.U.]
Variante 1-2	-0.4849	0.6479	0.0849	0.0507	0.0849
Variante 3-2	-1.3379	1.3309	0.2009	0.0943	0.2009
Variante 4-2	-57.5833	67.3334	5.8323	2.7477	5.8323
Variante 3-4	-57.3757	66.8002	5.8960	2.7666	5.8961

Tabelle 3.14 Statistik der M_{zz} -Komponente für verschiedene Erdradien

	Min [mE.U.]	Max [mE.U.]	Quadrat. Mittel [mE.U.]	Durchschnittlicher Betrag [mE.U.]	Std [mE.U.]
Variante 1-2	-0.9965	0.5049	0.1319	0.0868	0.1317
Variante 3-2	-2.0063	1.4640	0.3185	0.1669	0.3173
Variante 4-2	-64.2816	92.0183	8.4238	4.3432	8.4221
Variante 3-4	-63.8234	91.7553	8.5424	4.4114	8.5401

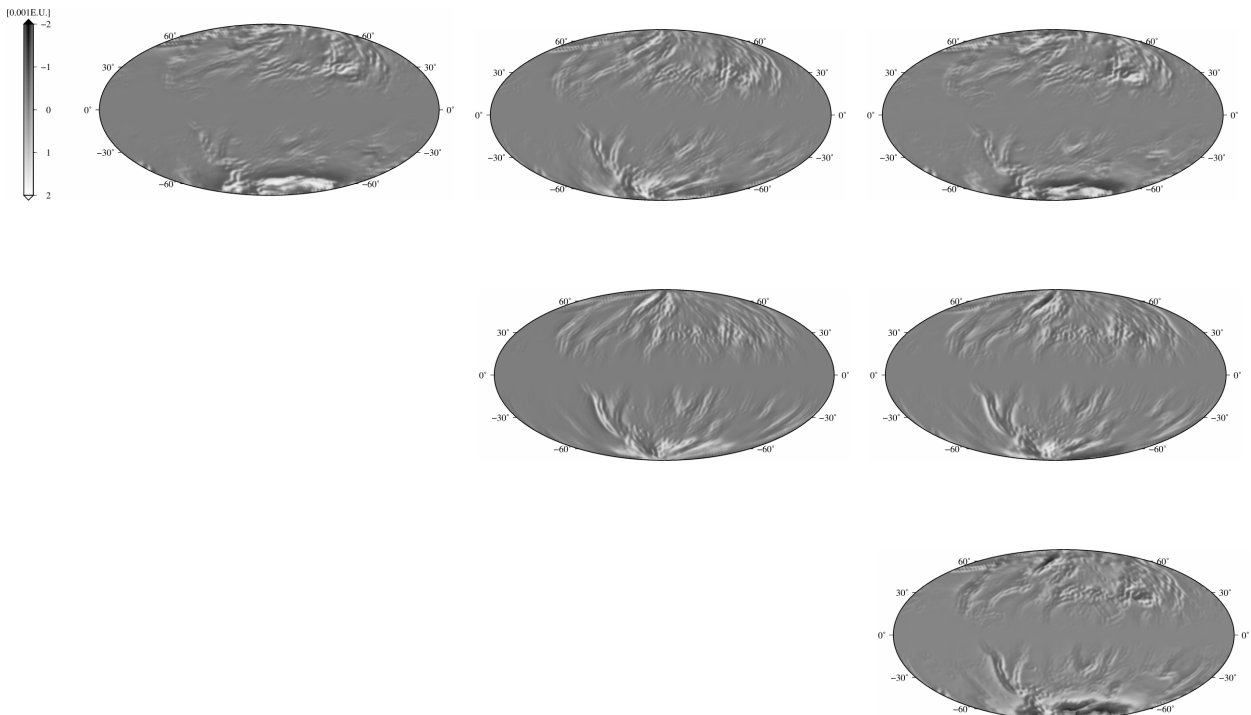


Abbildung 3.29 Marussi-Tensor der 2. Ableitungen der Differenz der Varianten 3 und 2 (Hammer-Projektion; Hauptmeridian: Greenwich)

Anhand der statistischen Werte z.B. der Standardabweichung (Std) der einzelnen Komponenten des Marussi-Tensors erkennt man, dass die Elliptizität in Form der Wahl des Erdradius in Satellitenhöhe Auswirkungen auf das topographisch-isostatische Signal hat.

Die statistischen Werte der Differenz der sphärischen Modellierungen (Variante 1-2) spiegeln den Einfluss der Wahl des sphärischen Erdradius wider. Dieser liegt bei allen Komponenten des Marussi-Tensors hinsichtlich der Standardabweichung (Std) bei ca. 0.03 - 0.13 mE.U., d.h. unterhalb der Messgenauigkeit des GOCE-Gradiometers, welche bei $3 \text{ mE/Hz}^{1/2}$ in den Hauptdiagonalelementen liegt (vgl. Kapitel 2.1).

Die statistischen Werte der Differenz zwischen sphärischer und ellipsoidischer Modellierung (Variante 3-2) liegen hinsichtlich der Standardabweichung bei ca. 0.08 - 0.32 mE.U. bei allen Elementen des Marussi-Tensors (vgl. auch Abbildung 3.29). Die größten Abweichungen liegen erwartungsgemäß im Bereich der Pole. Diese Unterschiede sind ca. 3 mal so groß wie die Unterschiede resultierend aus der Wahl des sphärischen Erdradius und liegen nahezu im Bereich der Messgenauigkeit des Gradiometers.

Die Variante 4, ein Mix aus ellipsoidischer Modellierung der Topographie und sphärischer Berechnung der Satellitenbahn, ermöglicht durch den Vergleich mit der rein sphärischen Modellierung (Variante 2) die Feststellung des Einflusses der Modellierung der Topographie. Dieser liegt bei ca. 2.67 - 8.42 mE.U.. Der Vergleich der Varianten 3 und 4 zeigt den Einfluss der geänderten Position des Berechnungspunkts (Satelliten), der bei ca. 2.70 - 8.54 mE.U. liegt. D.h. die Änderung der Position des Satelliten hat einen etwas größeren Einfluss als die Modellierung der Topographie.

Es ist demnach anhand der statistischen Werte der einzelnen Komponenten des Marussi-Tensors zu erkennen, dass die Elliptizität in Form der Wahl des Erdradius in Satellitenhöhe Auswirkungen auf das topographisch-isostatische Signal hat. Die Unterschiede zwischen sphärischer und ellipsoidischer Modellierung sind ca. 3 mal so groß wie die Differenzen zwischen sphärischen Modellierungen und liegen nahezu im Bereich der Messgenauigkeit des GOCE-Gradiometers. Diese Aussagen werden durch die statistischen Werte der Eigenwerte des Marussi-Tensors bestätigt (vgl. Anhang A.5). Die sphärische Approximation der Massen stellt demnach die grösste Approximation an die Wirklichkeit dar. Der Approximationsfehler muss aber bei den sphärischen Berechnungen bedacht werden. Diese Aussagen bezüglich der Wahl einer sphärischen oder ellipsoidischen Erdfigur werden in Ardalan und Safari (2004), Bölling und Grafarend (2005), Novák und Grafarend (2005) und Heck und Seitz (2003) für den Fall des Potentials und der Schwere bestätigt.

3.6 Numerische Ergebnisse für verschiedene isostatische Modelle

Die isostatischen Modelle werden im Folgenden anhand der Größe des topographisch-isostatischen Effektes miteinander verglichen. Ziel ist es, ein isostatisches Modell zu finden, mit welchem das Satellitensignal möglichst stark geglättet werden kann, um die Fortsetzung der Satellitendaten nach unten auf das Geoid zu vereinfachen. Basis des Vergleichs ist das sphärische Modell.

Grundlage der Modellierung ist die Einteilung der topographischen und isostatischen Massen in Tesseroiden, deren Wirkung rein numerisch mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) berechnet wird, da diese Methode mit $n = m = p = 1$ (2·2·2 Stützstellen) eine effektive Lösung im Hinblick auf die Anzahl von Funktionsauswertungen und die Rechenzeit darstellt (siehe Kapitel 3.5.1). Im Fall der Helmertschen Kondensationsmodelle basiert die Modellierung auf der Gauß-Legendre-Kubatur (2D) mit $n = m = 1$. Die Parameter der Berechnung lauten: $R = a = 6378137 \text{ m}$ und $G = 6.572 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$. Der Satellit befindet sich in einer Höhe von 260 km. Das digitale Geländemodell JGP95E „rock-equivalent“ (vgl. Kuhn und Seitz 2005) hat eine Auflösung von $5' \times 5'$ und wurde auf $1^\circ \times 1^\circ$ mittels arithmetischer Mittelbildung ausgedünnt. Das Erdkrustenmodell CRUST2.0 und das zugehörige digitale Geländemodell ETOPO5, die beide eine Auflösung von $2^\circ \times 2^\circ$ haben, wurden auf $1^\circ \times 1^\circ$ interpoliert, indem jedem $1^\circ \times 1^\circ$ -Element der Wert des zugehörigen $2^\circ \times 2^\circ$ -Elements zugewiesen wurde. Die Tiefen der Normalsäulen der einzelnen isostatischen Modelle betragen:

- Airy-Heiskanen: $T = 25 \text{ km}$
- Pratt-Hayford (modifiziert): $D = 100 \text{ km}$
- Airy-Heiskanen (Kontinent)/Pratt-Hayford (Ozean): $T = 25 \text{ km}, D = 100 \text{ km}$
- Helmert I: $d = 21 \text{ km}$
- Helmert II: $d = 0 \text{ km}$
- Erdkrustenmodell via CRUST2.0: $T = 25 \text{ km}$.

Die Dichte der Kruste bzw. des Mantels beträgt in den ersten fünf Modellen $2670 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ bzw. $3270 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Im Fall der Erdkrustenmodellierung finden die Dichteparameter entsprechend den ersten drei Varianten aus Kapitel 3.4.6 Anwendung. Die vierte Variante wird im Folgenden nicht berechnet, da der Rechenaufwand durch die Auswertung pro Schicht und $2^\circ \times 2^\circ$ Element stark ansteigt. Außerdem ist bei der geringen horizontalen Auflösung von 2° keine Steigerung der Genauigkeit zu erwarten.

Im Fall der Erdkrustenmodellierung hat sich im Vergleich der Wurzeltiefen von Airy-Heiskanen ($T = 25 \text{ km}$) und der Wurzeltiefen aus dem CRUST2.0-Modell (Schichttiefe 7) durch Variation der Tiefe der Normalsäule herausgestellt, dass $T = 25 \text{ km}$ trotz großer Abweichungen (ca. 40 km ; siehe auch Tsoulis 2004) die beste Approximation an das Airy-Heiskanen-Modell darstellt (siehe Tabelle 3.15).

Tabelle 3.15 Unterschiede der Wurzeltiefen zwischen Airy-Heiskanen ($T = 25 \text{ km}$) und Erdkrustenmodell CRUST2.0 – Schicht 7

	Max. (Betrag) [km]	Min. (Betrag) [km]	RMS [km]
$T = 22.97 \text{ km}$	44.141	0	8.677
$T = 25.00 \text{ km}$	42.111	0	8.469
$T = 30.00 \text{ km}$	37.111	0	9.905

In der Abbildung 3.30 ist der Marussi-Tensor der zweiten Ableitungen des topographischen Potentials mit einer Größenordnung von $\pm 8 \text{ E.U.}$ dargestellt. Die zweiten Ableitungen des isostatischen Potentials von Airy-Heiskanen liegen in der gleichen Größenordnung und sind beispielhaft für die zweite radiale Ableitung in Abbildung 3.31 zu sehen. Die Maxima liegen u.a. in den Anden, Grönland und der Antarktis (siehe Wild und Heck 2004). Der gesamte topographisch-isostatische Effekt auf die zweite radiale Ableitung für das Modell von Airy-Heiskanen ist in Abbildung 3.31 dargestellt. Dieser ist eine Zehnerpotenz geringer und beträgt $\pm 0.8 \text{ E.U.}$ Abbildung 3.32 stellt die zweite radiale Ableitung des isostatischen Potentials für die Erdkrustenmodellierung nach Kuhn und Featherstone (2003) (zweite Variante der Erdkrustenmodellierung, siehe Kapitel 3.4.6) dar. Die Größenordnung beträgt $\pm 8 \text{ E.U.}$, wobei der Effekt wegen der geringeren Auflösung insgesamt glatter ist als der des Airy-Heiskanen-Modells. Der gesamte topographisch-isostatische Effekt liegt bei $\pm 4 \text{ E.U.}$ und ist in Abbildung 3.32 dargestellt. Die Größenordnung des topographisch-isostatischen Effektes der zweiten radialen Ableitung beträgt nach Heck und Wild (2005) für das erste Kondensationsmodell von Helmert $\pm 0.6 \text{ E.U.}$ und $\pm 0.06 \text{ E.U.}$ für das zweite Kondensationsmodell von Helmert. Das Pratt-Hayford-Modell und die Kombination Airy-Heiskanen/Pratt-Hayford weisen einen topographisch-isostatischen Effekt von $\pm 0.8 \text{ E.U.}$ nach Wild und Heck (2005) auf.

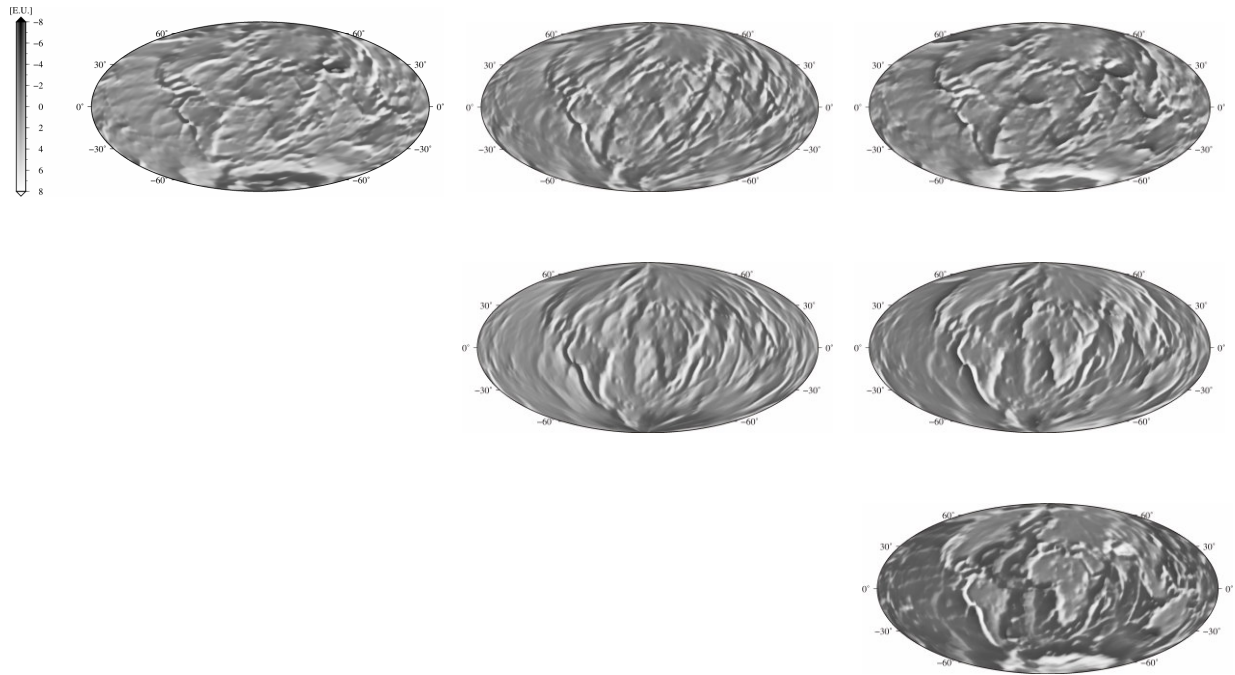


Abbildung 3.30 Marussi-Tensor der 2. Ableitungen des topographischen Potentials

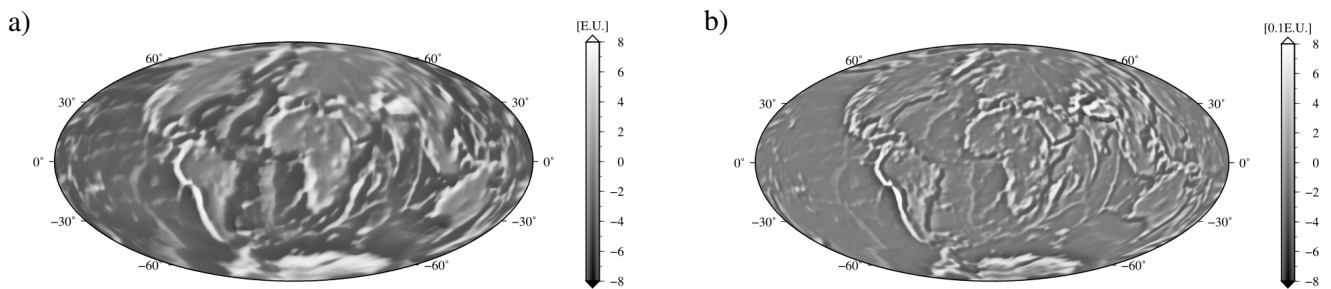


Abbildung 3.31 Isostatische Reduktion nach Airy-Heiskanen $[\partial^2 V_{A-H}(Q)/\partial r^2]$ (a), topographisch-isostatische Reduktion $[\partial^2 V_t(Q)/\partial r^2 - \partial^2 V_{A-H}(Q)/\partial r^2]$ (b)

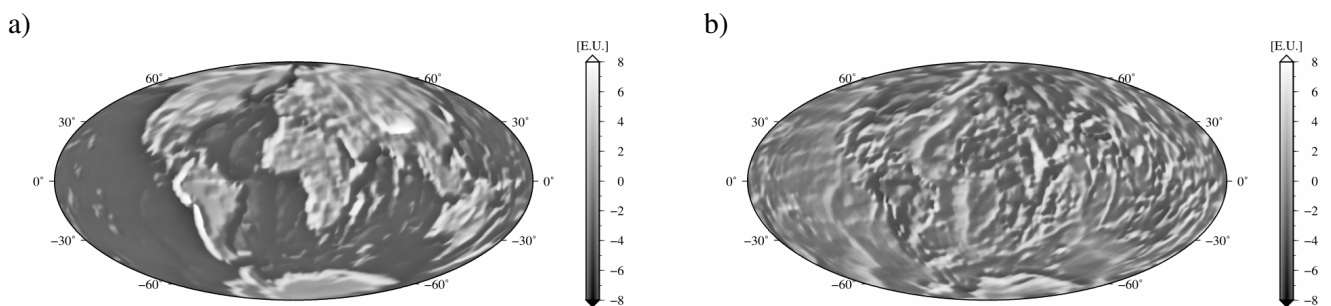


Abbildung 3.32 Isostatische Reduktion bzgl. des Crust-v2-Modells $[\partial^2 V_{Crust-v2}(Q)/\partial r^2]$ (a), topographisch-isostatische Reduktion $[\partial^2 V_t(Q)/\partial r^2 - \partial^2 V_{Crust-v2}(Q)/\partial r^2]$ (b)

Um den Einfluss des topographisch-isostatischen Effekts auf das Satellitensignal V_{ij} global über die ganze Erde ($\varphi = -90^\circ \dots 90^\circ$, $\lambda = 0^\circ \dots 360^\circ$) feststellen zu können, wird das EIGEN-GRACE02S-Modell (siehe Reigber et al. 2005a) bis Grad und Ordnung 150 zur Simulation der Satellitendaten verwendet (vgl. statistische Werte in Tabelle 3.16). Die zweite radiale Ableitung des Störpotentials T aus EIGEN-GRACE02S ist in Abbildung 3.33 zu sehen. Die Statistik des Marussi-Tensors des Störsignals ist in Tabelle 3.17 aufgelistet. Das Ergebnis der Reduktion des Satellitensignals um den topographisch-isostatischen Effekt wird mit dem Normalpotential des GRS80 (Grad 10) verglichen, um die Größenordnung der Diagonalkomponenten des Marussi-Tensors zu reduzieren. Aus Tabelle 3.18 bis Tabelle 3.23 ist zu erkennen, dass das Restsignal R (Tensor der 2. Ableitungen des topographisch-isostatisch reduzierten Störpotentials) für die klassischen isostatischen Modelle und das Helmertsche Kondensationsmodell bezüglich der Standardabweichungen jeweils in einer ähnlichen Größenordnung liegt (Std: ca. 0.13 E.U.), die Ergebnisse für die Erdkrustenmodelle jedoch um den Faktor 6 - 8 in den drei Varianten abweichen. Die größere Abweichung der Erdkrustenmodelle liegt primär an der größeren Auflösung des CRUST2.0. Des Weiteren ist zu erkennen, dass die Spanne der Minima/Maxima beim Helmert II-Modell am größten ist – abgesehen von den Erdkrustenmodellen – und beim Airy-Heiskanen-/Pratt-Hayford-/kombinierten A-H/P-H-Modell und dem Helmert I-Modell ähnlich ist. In der Abbildung 3.34 und Abbildung 3.35 sind die Restsignale der zweiten radialen Ableitung für das Airy-Heiskanen-Modell und die dritte Variante des Erdkrustenmodells dargestellt. Ein Extremum des Restsignals – verglichen mit dem Störsignal – ist in den statistischen Größen (Std) aller Tensorkomponenten im Fall des Helmert I-Modells zu sehen, d.h. dieses Modell glättet am stärksten das Satellitensignal. Das Minimum ist nicht stark ausgeprägt; Ursache hierfür könnte die große Überdeckung (ca. 70%) der Erde durch Ozeane sein, die isostatisch weitgehend ausgeglichen sind. Die obigen Aussagen werden durch die statistischen Größen (Std) der Eigenwerte des Restsignals (siehe Anhang A.6) bestätigt (vgl. Cai 2004).

Tabelle 3.16 Statistik des Marussi-Tensors der simulierten Gradienten (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
V_{xx}	-1369.4587	-1354.1931	1361.6859	1361.6766	5.0545
V_{xy}	-0.63145	0.52548	0.0704	0.0519	0.0704
V_{xz}	-8.6135	9.0424	5.7758	5.2008	5.7759
V_{yy}	-1365.423	-1354.2194	1359.6428	1359.6379	3.6067
V_{yz}	-1.1292	1.0882	0.1598	0.1181	0.1598
V_{zz}	2708.6896	2734.5960	2721.3284	2721.3146	8.6599

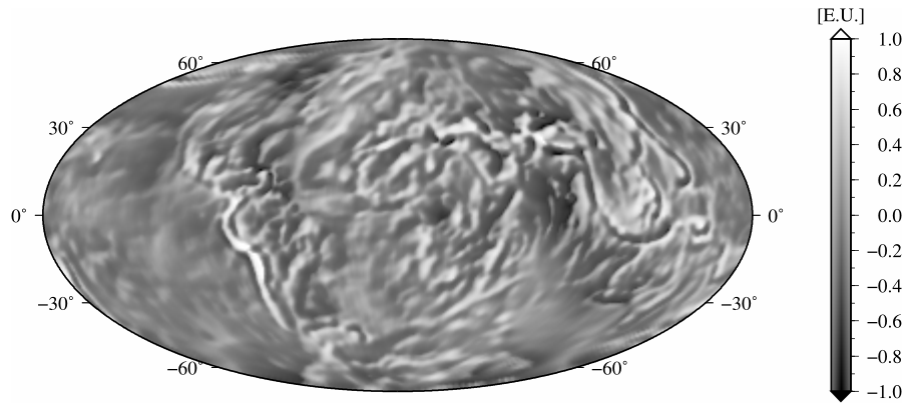


Abbildung 3.33 Zweite radiale Ableitung T_{zz} des Störpotentials (global) aus EIGEN-GRACE02S, $n \leq 150$

Tabelle 3.17 Statistik des Marussi-Tensors des Störpotentials (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
T_{xx}	-1.0563	1.1167	0.1321	0.0969	0.1321
T_{xy}	-0.6315	0.5255	0.0704	0.0519	0.0704
T_{xz}	-1.6132	1.2173	0.1526	0.1127	0.1519
T_{yy}	-1.0345	0.7125	0.1364	0.1011	0.1364
T_{yz}	-1.1292	1.0882	0.1598	0.1181	0.1598
T_{zz}	-1.3839	1.5489	0.2309	0.1726	0.2309

Tabelle 3.18 Statistik der R_{xx} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.6487	0.8367	0.1204	0.0913	0.1203
P-H (100 km)	-0.6649	0.7886	0.1346	0.1006	0.1346
A-H/P-H	-0.6603	0.7895	0.1294	0.0972	0.1294
Helmert I (21 km)	-0.7864	0.8328	0.1183	0.0892	0.1183
Helmert II (0 km)	-1.0213	1.0862	0.1324	0.0975	0.1324
Crust – V1	-2.9056	2.6039	0.7567	0.5879	0.7283
Crust – V2	-3.4296	2.8842	0.8559	0.6649	0.8367
Crust – V3	-3.4112	3.6148	1.0124	0.8537	1.0056

Tabelle 3.19 Statistik der R_{xy} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.3812	0.3820	0.0612	0.0458	0.0612
P-H (100 km)	-0.4042	0.3969	0.0661	0.0491	0.0661
A-H/P-H	-0.3830	0.3966	0.0639	0.0474	0.0639
Helmert I (21 km)	-0.3879	0.3739	0.0607	0.0449	0.0607
Helmert II (0 km)	-0.6092	0.5070	0.0705	0.0521	0.0705
Crust – V1	-1.8859	1.7537	0.3433	0.2535	0.3433
Crust – V2	-2.2931	2.1161	0.3966	0.2929	0.3966
Crust – V3	-2.5788	1.7635	0.4545	0.3373	0.4545

Tabelle 3.20 Statistik der R_{xz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.9753	0.6611	0.1396	0.1069	0.1376
P-H (100 km)	-0.8277	0.7659	0.1563	0.1176	0.1532
A-H/P-H	-0.9285	0.7634	0.1499	0.1145	0.1473
Helmert I (21 km)	-1.1654	0.7653	0.1369	0.1044	0.1352
Helmert II (0 km)	-1.5617	1.1512	0.1529	0.1135	0.1522
Crust – V1	-3.9680	3.6069	0.8392	0.6190	0.8249
Crust – V2	-4.5627	4.0618	0.9638	0.7190	0.9533
Crust – V3	-4.8244	4.3698	1.1518	0.8597	1.1427

Tabelle 3.21 Statistik der R_{yy} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global)

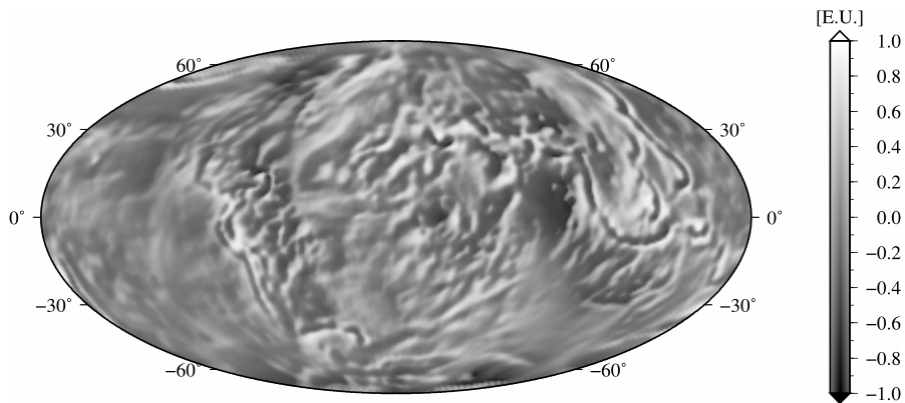
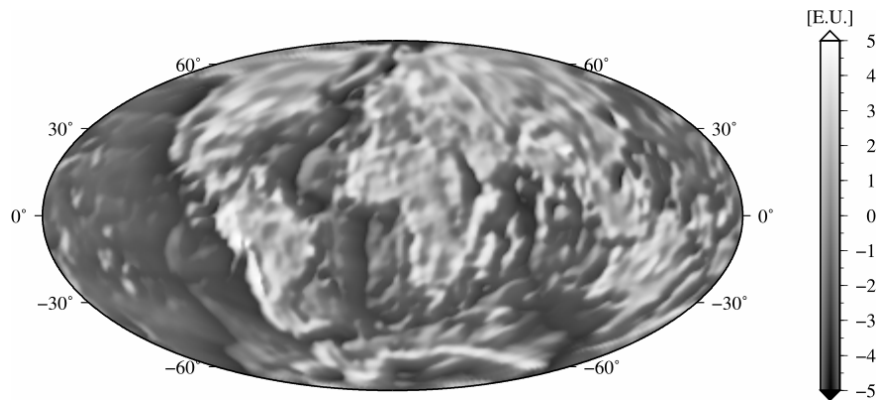
	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.6023	0.6301	0.1323	0.0986	0.1321
P-H (100 km)	-0.7589	0.6663	0.1504	0.1103	0.1501
A-H/P-H	-0.7287	0.6497	0.1423	0.1058	0.1421
Helmert I (21 km)	-0.5711	0.6302	0.1283	0.0960	0.1281
Helmert II (0 km)	-0.9943	0.6939	0.1369	0.1015	0.1368
Crust – V1	-3.6202	2.9811	0.7571	0.5805	0.7522
Crust – V2	-4.8709	3.3556	0.8775	0.6722	0.8746
Crust – V3	-5.0056	3.4789	1.0472	0.8745	1.0311

Tabelle 3.22 Statistik der R_{yz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.6972	0.8838	0.1449	0.1077	0.1449
P-H (100 km)	-0.7874	0.7606	0.1579	0.1167	0.1579
A-H/P-H	-0.7552	0.8626	0.1519	0.1129	0.1519
Helmert I (21 km)	-0.6775	0.9310	0.1429	0.1061	0.1429
Helmert II (0 km)	-1.1183	1.0832	0.1601	0.1185	0.1601
Crust – V1	-5.3362	3.8836	0.8198	0.6052	0.8199
Crust – V2	-6.4675	4.5071	0.9651	0.7081	0.9651
Crust – V3	-7.7558	4.8985	1.1421	0.8291	1.1421

Tabelle 3.23 Statistik der R_{zz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-1.2518	0.9771	0.2193	0.1654	0.2191
P-H (100 km)	-1.2297	1.2170	0.2462	0.1839	0.2459
A-H/P-H	-1.0723	1.2096	0.2348	0.1768	0.2347
Helmert I (21 km)	-1.1912	0.9635	0.2139	0.1616	0.2137
Helmert II (0 km)	-1.3534	1.4950	0.2317	0.1734	0.2316
Crust – V1	-4.0409	6.0932	1.3302	1.0472	1.2979
Crust – V2	-4.4717	7.4202	1.5174	1.1961	1.4964
Crust – V3	-4.9049	6.8922	1.8023	1.5931	1.7771

Abbildung 3.34 R_{zz} -Komponente für das Airy-Heiskanen-Modell (global)Abbildung 3.35 R_{zz} -Komponente für das Erdkrustenmodell – Variante 3 (global)

Zusätzlich zum globalen Vergleich hinsichtlich der Glättungseigenschaften der einzelnen isostatischen Modelle wird der Vergleich regional im Gebiet der Rocky Mountains ($\varphi = 48^\circ \dots 53^\circ$, $\lambda = 240^\circ \dots 249^\circ$) durchgeführt. Hier hat das Topographiemodell eine Auflösung von $5' \times 5'$, das Satellitensignal V_{ij} wird mittels des EGM96 (siehe Lemoine et al. 1998) bis Grad und Ordnung 360 modelliert. Die statistischen Werte der simulierten Gradienten sind in Tabelle 3.24 aufgelistet. Das Normalpotential des GRS80 wird bis Grad und Ordnung 10 entwickelt. Das Störpotential T der zweiten radialen Ableitung ist in Abbildung 3.36 zu sehen. In Tabelle 3.25 sind die statistischen Werte der Marussi-Elemente des Störpotentials zusammengestellt. Die Statistiken des Marussi-Tensors des Restsignals \underline{R} (2. Ableitungen des topographisch-isostatischen Störpotentials) sind in Tabelle 3.26 bis Tabelle 3.31 aufgelistet. Eine Modellierung des isostatischen Effekts der Erdkrustenmodelle findet wegen der geringen Auflösung von $2^\circ \times 2^\circ$ nicht statt. In der Abbildung 3.37 ist die zweite radiale Ableitung des Restsignals für das isostatische Modell von Airy-Heiskanen dargestellt.

Tabelle 3.24 Statistik des Marussi-Tensors der simulierten Gradienten (Rocky-Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
V_{xx}	-1360.9489	-1359.6663	1360.3343	1360.3343	0.3429
V_{xy}	-0.1965	-0.0869	0.1593	0.1569	0.0278
V_{xz}	7.8642	8.3066	8.0593	8.0587	0.0989
V_{yy}	-1359.2385	-1358.1585	1358.7156	1358.7155	0.2734
V_{yz}	-0.13512	0.1979	0.0894	0.0751	0.0882
V_{zz}	2717.8248	2720.1864	2719.0499	2719.0498	0.6149

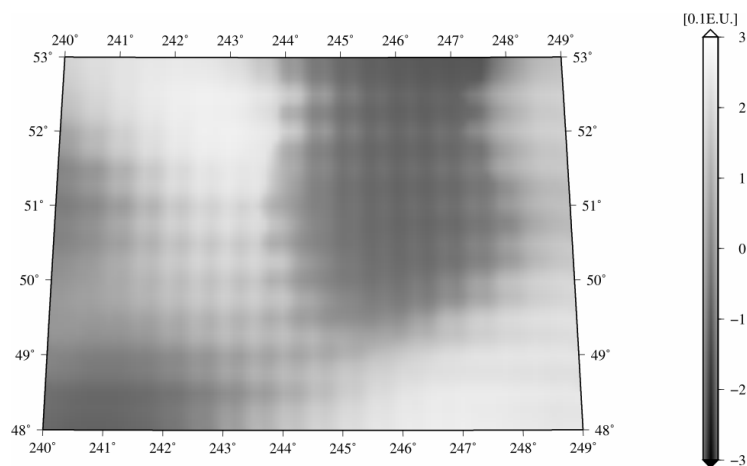


Abbildung 3.36 Zweite radiale Ableitung T_{zz} des Störpotentials (Rocky Mountains) (Hammer-Projektion; Hauptmeridian: Meridian 244.5°)

Tabelle 3.25 Statistik des Marussi-Tensors des Störpotentials (Rocky Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
T_{xx}	-0.1099	0.0254	0.0566	0.0486	0.0309
T_{xy}	-0.1965	-0.0869	0.1593	0.1569	0.0278
T_{xz}	-0.0815	0.2021	0.1149	0.0952	0.0906
T_{yy}	-0.1491	0.0762	0.0774	0.0671	0.0535
T_{yz}	-0.1351	0.1979	0.0894	0.0751	0.0881
T_{zz}	-0.1015	0.2379	0.1280	0.1125	0.0756

Tabelle 3.26 Statistik der R_{xx} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.0514	0.1078	0.0646	0.0581	0.0328
P-H (100 km)	-0.0313	0.2011	0.1268	0.1149	0.0544
A-H/P-H	-0.0514	0.1078	0.0646	0.0581	0.0328
Helmert I (21 km)	-0.0623	0.0701	0.0404	0.0362	0.0255
Helmert II (0 km)	-0.1039	0.0253	0.0534	0.0457	0.0295

Tabelle 3.27 Statistik der R_{yy} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.2127	-0.0138	0.1559	0.1519	0.0354
P-H (100 km)	-0.2483	0.0252	0.1588	0.1499	0.0529
A-H/P-H	-0.2127	-0.0138	0.1559	0.1519	0.0354
Helmert I (21 km)	-0.1966	-0.0304	0.1559	0.1533	0.0284
Helmert II (0 km)	-0.1951	-0.0849	0.1589	0.1566	0.0269

Tabelle 3.28 Statistik der R_{xz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.1256	0.3080	0.1321	0.1072	0.1081
P-H (100 km)	-0.2324	0.3977	0.1768	0.1455	0.1588
A-H/P-H	-0.1256	0.3080	0.1321	0.1072	0.1081
Helmert I (21 km)	-0.0795	0.2758	0.1179	0.0943	0.0917
Helmert II (0 km)	-0.0789	0.2024	0.1136	0.0936	0.0886

Tabelle 3.29 Statistik der R_{yy} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)

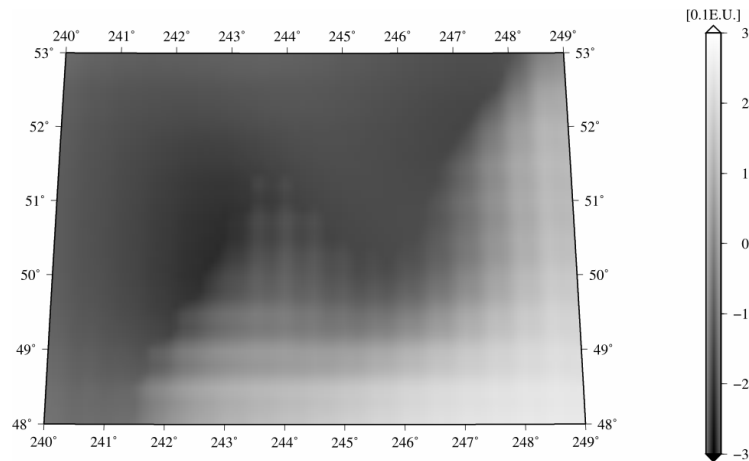
	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.1481	0.1046	0.0549	0.0479	0.0436
P-H (100 km)	-0.1469	0.1939	0.1061	0.0944	0.0632
A-H/P-H	-0.1481	0.1046	0.0549	0.0479	0.0436
Helmert I (21 km)	-0.1456	0.0799	0.0397	.01214	0.0378
Helmert II (0 km)	-0.1482	0.0752	0.0743	0.0643	0.0516

Tabelle 3.30 Statistik der R_{yz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.1373	0.2107	0.0926	0.0781	0.0926
P-H (100 km)	-0.2278	0.3224	0.1464	0.1225	0.1463
A-H/P-H	-0.1373	0.2107	0.0926	0.0781	0.0926
Helmert I (21 km)	-0.1280	0.1568	0.0748	0.0641	0.0746
Helmert II (0 km)	-0.1339	0.1942	0.0863	0.0721	0.0851

Tabelle 3.31 Statistik der R_{zz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.1982	0.1842	0.1099	0.0980	0.0643
P-H (100 km)	-0.3816	0.1693	0.2251	0.2031	0.1041
A-H/P-H	-0.1982	0.1842	0.1099	0.0980	0.0643
Helmert I (21 km)	-0.1200	0.1873	0.0674	0.0585	0.0516
Helmert II (0 km)	-0.1005	0.2242	0.1217	0.1071	0.0722

Abbildung 3.37 R_{zz} -Komponente für das Airy-Heiskanen-Modell (Rocky Mountains)

Es ist zu erkennen, dass die statistischen Werte des Airy-Heiskanen-Modells mit dem Airy-Heiskanen/Pratt-Hayford-Modell in den Rocky Mountains übereinstimmen, was im Kontinentinnern überall näherungsweise gelten sollte.

In der regionalen Modellierung ist mittels der obigen statistischen Größen der zweiten Ableitungen des Restsignals zu erkennen, dass das Helmert I-Modell die kleinsten statistischen Werte liefert. Der Vergleich der statistischen Größen der zweiten Ableitungen des Restsignals gegenüber dem Störsignal verdeutlicht, dass das Helmert I-Modell und das Airy-Heiskanen-Modell die größten, das Helmert II-Modell die kleinsten Differenzen zwischen Rest- und Störsignal aufweisen. Das bedeutet, dass das Helmert I-Modell bzw. das Airy-Heiskanen-Modell das Satellitensignal stärker glätten als die anderen isostatischen Modelle. Dies wird auch durch die Eigenwerte des Marussi-Tensors (siehe Anhang A.6) bestätigt (vgl. Cai 2004). Eine Glättung durch die topographische Reduktion im Fall des isostatischen Modells nach Airy-Heiskanen wird durch den Vergleich von Abbildung 3.37 und Abbildung 3.36 deutlich.

Erst mittels Realdaten kann aber wirklich festgestellt werden, welches Modell im Sinne einer Glättung für die Fortsetzung der Daten nach unten sinnvoll erscheint und damit als Rechenmodell der Abbildung der Wirklichkeit am nächsten kommt (vgl. Wild und Heck 2006).

4 Methoden der Massenmodellierung im Spektralbereich

In Kapitel 3 wurde das Gravitationsfeld der topographischen und isostatischen Massen im Ortsbereich beschrieben. Eine alternative Darstellung des Gravitationsfelds stellt die Beschreibung der Funktion V und ihrer ersten und zweiten Ableitungen im Spektralbereich dar. Dies geschieht in Form einer sphärisch harmonischen Analyse, d.h. der Bestimmung der Fourierkoeffizienten aus diskreten Funktionswerten auf einem Gitter – hier aus einem digitalen Geländemodell – bzw. der sphärisch harmonischen Synthese, der Berechnung der Funktion mittels Fourierkoeffizienten. Durch diese Transformation in den Spektralbereich wird ein besserer Einblick in das spektrale Verhalten global definierter Funktionen ermöglicht (vgl. u.a. Rapp 1982; Sünkel 1985; Wenzel 1985; Rummel et al. 1988; Tsoulis 2001).

Die mathematischen und geometrischen Grundlagen werden in Kapitel 4.1 behandelt. Auf die Modellierung der topographischen Massen bzw. der isostatischen Massen wird in Kapitel 4.2 bzw. Kapitel 4.3 eingegangen. Den Abschluss dieses Kapitels bilden numerische Untersuchungen für das topographische Modell und die verschiedenen isostatischen Modelle, eine Untersuchung des Einflusses der Reihenentwicklung der Wurzeltiefe im Fall des Airy-Heiskanen-Modells bzw. ein Vergleich des nach Kugelfunktionen entwickelten Tensors des Ortsbereichs mit dem Tensor des Spektralbereichs.

4.1 Mathematische Grundlagen

Für das Gravitationspotential eines Punkts Q gilt (siehe Gleichung (3.1))

$$V(Q) = G \cdot \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{\ell} \cdot d\Omega \quad \text{mit } \Omega = \Omega(\lambda', \varphi', \xi). \quad (4.1)$$

Die Reihenentwicklung des reziproken Abstandes $1/\ell$ liefert

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r'} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'} \right)^n \cdot P_n(\cos \psi) \quad r < r' \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n \cdot P_n(\cos \psi) \quad r' < r, \quad (4.3)$$

wobei $P_n(\cos \psi)$ die Legendreschen Polynome vom Grad n darstellen und ψ die sphärische Distanz zwischen dem Berechnungspunkt Q und dem Integrationspunkt P' ist. Für die Legendreschen Polynome gilt das Additionstheorem

$$P_n(\cos \psi) = \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\varphi, \lambda) \cdot Y_{nm}(\varphi', \lambda'), \quad Y_{nm}(\varphi, \lambda) = \begin{cases} \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \cdot \cos m\lambda & m \geq 0 \\ \bar{P}_{n|m|}(\sin \varphi) \cdot \sin |m|\lambda & m < 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Y_{nm} sind die vollständig normierten Kugelflächenfunktionen, \bar{P}_{nm} die zugeordneten vollständig normierten Legendreschen Polynome.

In der Satellitengradiometrie liegen die Berechnungspunkte außerhalb der Brillouin-Kugel, welche alle Massen im Radius $r = a$ einschließt, d.h. die Reihenentwicklung in Gleichung (4.3) für $r > r'$ konvergiert im Außenraum der Erde. Engels et al. (1995) beschreiben den terrestrischen Fall, in dem Massen oberhalb und unterhalb des Aufpunktniveaus separat betrachtet werden müssen, d.h. in diesem Fall muss auch Gleichung (4.2) betrachtet werden.

Einsetzen von Gleichung (4.3) und (4.4) in (4.1) ergibt

$$\begin{aligned}
V(Q) &= G \cdot \iiint_{\Omega} \rho(Q) \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n \cdot P_n(\cos \psi) \right\} \cdot d\Omega \\
&= G \cdot \iiint_{\Omega} \rho(Q) \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\varphi, \lambda) \cdot Y_{nm}(\varphi', \lambda') \right\} \cdot d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Mit den Kugelfunktionskoeffizienten

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} &= \frac{1}{(2n+1) \cdot M} \cdot \iiint_{\Omega} \rho(Q) \cdot \left(\frac{r'}{R} \right)^n \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi') \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \cdot d\Omega \\
&= \frac{1}{(2n+1) \cdot M} \cdot \iint_{\sigma} \left(\int_{\xi} \rho(Q) \cdot \left(\frac{\xi}{R} \right)^n \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi') \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \cdot d\sigma
\end{aligned} \tag{4.6}$$

folgt für das Gravitationspotential in einem Punkt Q

$$V(Q) = \frac{GM}{R} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \cdot \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cdot \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi). \tag{4.7}$$

Eine Skalierung mittels $(a/R)^n$ durch Einführung der großen Halbachse des Erdellipsoids a führt für das Gravitationspotential zur Formel

$$V(Q) = \frac{GM}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cdot \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \tag{4.8}$$

bzw. zu den Kugelfunktionskoeffizienten

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{(2n+1) \cdot M} \cdot \iint_{\sigma} \left(\int_{\xi} \rho(Q) \cdot \left(\frac{\xi}{a} \right)^n \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi') \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \cdot d\sigma. \tag{4.9}$$

Für die Masse gilt $M = \frac{4}{3} \pi \bar{\rho} \cdot R^3$ mit der mittleren Dichte $\bar{\rho} = 5.5 \text{ gcm}^{-3}$. Das Volumenelement berechnet sich mittels $d\Omega = \xi^2 \cdot d\xi d\sigma$ aus dem Flächenelement $d\sigma = \cos \varphi' \cdot d\varphi' d\lambda'$ (vgl. Gleichung (4.6)).

Die Kugelfunktionskoeffizienten lassen sich anhand von Gradvarianzen (oder auch Spektrum, spektrale Dichte genannt) beurteilen und darstellen. Die Gradvarianz des Grades n ist für das Potential wie folgt definiert:

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2). \tag{4.10}$$

4.2 Modellierung des topographischen Effekts

Für das Potential der topographischen Massen nach Gleichung (3.70) mit der Dichte ρ_0 lassen sich für die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials (Gleichung (4.8)) die Kugelfunktionskoeffizienten nach Gleichung (4.9) beschreiben

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}^t \\ \bar{S}_{nm}^t \end{array} \right\} = \frac{\rho_0}{(2n+1) \cdot M} \cdot \iint_{\sigma} \left(\int_{\xi=R}^{\xi=R+h'(\lambda', \varphi')} \left(\frac{\xi}{a} \right)^n \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi') \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \cdot d\sigma. \tag{4.11}$$

Die Integration über die radiale Variable ξ führt zu

$$\begin{aligned}
\int_{\xi=R}^{\xi=R+h'(\lambda',\varphi')} \xi^{n+2} \cdot d\xi &= \frac{1}{n+3} \cdot \left((R+h')^{n+3} - R^{n+3} \right) = \frac{R^{n+3}}{n+3} \cdot \left(\left(1 + \frac{h'}{R} \right)^{n+3} - 1 \right) \\
&= \frac{R^{n+3}}{n+3} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n+3} \binom{n+3}{k} \cdot \left(\frac{h'}{R} \right)^k - 1 \right),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

wobei die binomische Reihe in $\left| \frac{h'}{R} \right| \leq 1.5 \cdot 10^{-3}$ rasch konvergiert. Mittels der Koeffizienten

$$\begin{aligned}
H_{nm}^k &= \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{\sigma} \left(\frac{h'}{R} \right)^k \cdot Y_{nm}(\varphi', \lambda') \cdot d\sigma, \\
H_{nm} &= \frac{1}{n+3} \cdot \sum_{k=1}^{n+3} \binom{n+3}{k} \cdot H_{nm}^k \\
&= H_{nm}^1 + \frac{n+2}{2} \cdot H_{nm}^2 + \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{6} \cdot H_{nm}^3 + \frac{1}{n+3} \cdot \sum_{k=4}^{n+3} \binom{n+3}{k} \cdot H_{nm}^k
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ergibt sich für die Kugelfunktionskoeffizienten des Topographiepotentials

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^t \\ \overline{S}_{n|m}^t \end{array} \right\} = \frac{3}{(2n+1)} \cdot \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \cdot \left(\frac{R}{a} \right)^n \cdot H_{nm} \quad \text{für } \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Ähnliche Ausdrücke sind u.a. in Rummel et al. (1988) und Tsoulis (1999b) zu finden. Die Gleichungen bzw. die partiellen Ableitungen zur Berechnung des Schwerevektors und des Marussi-Tensors sind in Kapitel 3.1 aufgelistet.

Die Gradvarianzen lauten für das topographische Potential bezüglich $r = R$

$$\sigma_n^2(V_t) = \left(4\pi G \rho_0 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \right)^2 \cdot \sum_{m=-n}^n (H_{nm})^2. \tag{4.15}$$

Für die zweite radiale Ableitung folgt beispielhaft in Satellitenhöhe

$$\sigma_n^2 \left(\frac{\partial^2 V_t}{\partial r^2} \right) = (4\pi G \rho_0)^2 \cdot \left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2n+1} \cdot \left(\frac{R}{r} \right)^{n+3} \right)^2 \cdot \sum_{m=-n}^n (H_{nm})^2. \tag{4.16}$$

Für die anderen Tensorkomponenten sind äquivalente Darstellungen der Gradvarianzen nicht möglich.

4.3 Modellierung des isostatischen Effekts

Die Modellierung der isostatischen Massen im Spektralbereich erfolgt nicht für alle in Kapitel 3.4 beschriebenen isostatischen Modelle, sondern exemplarisch für das Airy-Heiskanen-Modell, das Kondensationsmodell von Helmert und das Erdkrustenmodell. Die Modellierung des Pratt-Hayford-Modells im Spektralbereich ist u.a. in Tsoulis (1999b), Tsoulis (2001) und Mladek (2006) zu finden.

4.3.1 Modell von Airy-Heiskanen

Ausgehend von der Darstellung des isostatischen Potentials nach Airy-Heiskanen im Ortsbereich (vgl. Kapitel 3.4.1) folgt für die Kugelfunktionskoeffizienten der Kugelfunktionsdarstellung des Gravitationspotentials nach Gleichung (4.8) und Gleichung (4.9)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^{A-H} \\ \overline{S}_{nm}^{A-H} \end{array} \right\} = \frac{\Delta\rho}{(2n+1) \cdot M} \cdot \iint_{\sigma} \left(\int_{\xi=R-T}^{\xi=R-T} \left(\frac{\xi}{a} \right)^n \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right) \cdot \overline{P}_{nm}(\sin \varphi') \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \cdot d\sigma. \tag{4.17}$$

Die radiale Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_{\xi=R-T-t'}^{\xi=R-T} \xi^{n+2} \cdot d\xi &= \frac{1}{n+3} \cdot \left((R-T)^{n+3} - (R-T-t')^{n+3} \right) = \frac{(R-T)^{n+3}}{n+3} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{t'}{R-T} \right)^{n+3} \right) \\
&= \frac{(R-T)^{n+3}}{n+3} \cdot \left(1 - \sum_{k=0}^{n+3} (-1)^k \cdot \binom{n+3}{k} \cdot \left(\frac{t'}{R-T} \right)^k \right).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Mittels der Koeffizienten

$$\begin{aligned}
T_{nm}^k &= \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{\sigma} \left(\frac{t'}{R-T} \right)^k \cdot Y_{nm}(\varphi', \lambda') \cdot d\sigma, \\
T_{nm} &= -\frac{1}{n+3} \cdot \sum_{k=1}^{n+3} (-1)^k \cdot \binom{n+3}{k} \cdot T_{nm}^k \\
&= T_{nm}^1 - \frac{n+2}{2} \cdot T_{nm}^2 + \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{6} \cdot T_{nm}^3 - \frac{1}{n+3} \cdot \sum_{k=4}^{n+3} (-1)^k \cdot \binom{n+3}{k} \cdot T_{nm}^k
\end{aligned} \tag{4.19}$$

erhält man letztlich für die Kugelfunktionskoeffizienten des isostatischen Potentials nach Airy-Heiskanen

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^{A-H} \\ \overline{S}_{n|m}^{A-H} \end{array} \right\} = \frac{3}{(2n+1)} \cdot \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \cdot \left(\frac{R-T}{R} \right)^{n+3} \cdot \left(\frac{R}{a} \right)^n \cdot T_{nm} \quad \text{für } \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Die Tiefe der Wurzeln bzw. Antiwurzeln t' kann in geschlossener Form wie in Kapitel 3.4.1 beschrieben oder aber auch wie folgt in eine Reihe nach (h'/R) entwickelt werden:

$$t' = \left(\frac{R}{R-T} \right)^2 \cdot \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot R \cdot \left\{ C_1 \cdot \left(\frac{h'}{R} \right) + C_2 \cdot \left(\frac{h'}{R} \right)^2 + C_3 \cdot \left(\frac{h'}{R} \right)^3 + O\left(\left(\frac{h'}{R} \right)^4 \right) \right\}, \tag{4.21}$$

wobei

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1, \\
C_2 &= 1 + \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot \left(\frac{R}{R-T} \right)^3, \\
C_3 &= \frac{1}{3} + 2 \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot \left(\frac{R}{R-T} \right)^3 + \frac{5}{3} \left(\frac{\rho_0}{\Delta\rho} \right)^2 \cdot \left(\frac{R}{R-T} \right)^6.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Der Term erster Ordnung in (h'/R) entspricht der Approximation von Rummel et al. (1988), Tsoulis (1999b), Tsoulis (2001) und Mladek (2006). Die weiteren Terme höherer Ordnung in (h'/R) werden in der Literatur durchgängig vernachlässigt.

Die Gradvarianzen lauten für das isostatische Potential nach Airy-Heiskanen bezüglich $r = R$

$$\sigma_n^2(V_{A-H}) = \left(4\pi G \Delta\rho \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{R-T}{R} \right)^{n+3} \right)^2 \cdot \sum_{m=-n}^n (T_{nm})^2. \tag{4.23}$$

Der zweiten radialen Ableitung in Satellitenhöhe sind die Gradvarianzen

$$\sigma_n^2 \left(\frac{\partial^2 V_{A-H}}{\partial r^2} \right) = (4\pi G \rho_0)^2 \cdot \left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2n+1} \cdot \left(\frac{R}{r} \right)^{n+3} \right)^2 \cdot \sum_{m=-n}^n \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \cdot \left(\frac{R-T}{R} \right)^{n+3} \cdot T_{nm} \right)^2 \tag{4.24}$$

zugeordnet.

4.3.2 Kondensationsmodelle von Helmert

Für das erste und zweite Helmerzsche Kondensationsmodell folgt nach Gleichung (3.85) mittels der Reihenentwicklung des reziproken Abstandes ℓ_c für $r > R_c$

$$\frac{1}{\ell_c} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_c}{r} \right)^n \cdot P_n(\cos \psi) \quad (4.25)$$

die Darstellung des Gravitationspotentials

$$\begin{aligned} V(Q) &= G\rho_0 \cdot \iint_{\sigma} \left(\frac{r'^3 - R^3}{3} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_c}{r} \right)^n \cdot P_n(\cos \psi) \right\} \cdot d\sigma \\ &= G\rho_0 \cdot \iint_{\sigma} \left(\frac{r'^3 - R^3}{3} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_c}{r} \right)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\varphi, \lambda) \cdot Y_{nm}(\varphi', \lambda') \right\} \cdot d\sigma. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Mit den Kugelfunktionskoeffizienten

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^c \\ \overline{S}_{nm}^c \end{array} \right\} = \frac{\rho_0}{(2n+1) \cdot M} \cdot \iint_{\sigma} \left(\frac{r'^3 - R^3}{3} \right) \cdot \left(\frac{R_c}{R} \right)^n \overline{P}_{nm}(\sin \varphi') \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} \cdot d\sigma \quad (4.27)$$

ergibt sich Gleichung (4.7). Die Darstellung der Flächendichte nach (3.88) als binomische Reihe liefert

$$\frac{1}{3} \cdot (r'^3 - R^3) = \frac{R^3}{3} \cdot \left(\left(1 + \frac{h'}{R} \right)^3 - 1 \right) = \frac{R^3}{3} \cdot \left(\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{h'}{R} \right)^k - 1 \right). \quad (4.28)$$

Mit den Koeffizienten C_{nm}

$$C_{nm} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^3 \binom{3}{k} \cdot H_{nm}^k \quad (4.29)$$

lauten die Kugelfunktionskoeffizienten

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^c \\ \overline{S}_{n|m}^c \end{array} \right\} = \frac{3}{(2n+1)} \cdot \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \cdot R^3 \cdot \left(\frac{R_c}{R} \right)^n \cdot C_{nm} \quad \text{für } \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

In allgemeiner Schreibweise nach Gleichung (4.8) gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^c \\ \overline{S}_{nm}^c \end{array} \right\} = \frac{3}{(2n+1)} \cdot \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \cdot R^3 \cdot \left(\frac{R_c}{a} \right)^n \cdot C_{nm}. \quad (4.31)$$

Die Gradvarianzen lauten für das Helmerzsche Kondensationsmodell bezüglich $r = R$

$$\sigma_n^2(V_c) = \left(4\pi G\rho_0 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{R_c}{R} \right)^n \right)^2 \cdot \sum_{m=-n}^n (C_{nm})^2. \quad (4.32)$$

Für die zweite radiale Ableitung folgt beispielhaft in Satellitenhöhe

$$\sigma_n^2 \left(\frac{\partial^2 V_c}{\partial r^2} \right) = (4\pi G\rho_0)^2 \cdot \left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2n+1} \cdot \left(\frac{R}{r} \right)^{n+3} \right)^2 \cdot \sum_{m=-n}^n \left(\left(\frac{R_c}{R} \right)^n \cdot C_{nm} \right)^2. \quad (4.33)$$

4.3.3 Erdkrustenmodelle

Bei der Modellierung der Erdkruste lassen sich die Kugelfunktionskoeffizienten analog zu denen des isostatischen Modells nach Airy-Heiskanen (siehe Gleichungen (4.17) und (4.20)) bestimmen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^{\text{Crust}} \\ \overline{S}_{nm}^{\text{Crust}} \end{array} \right\} = \frac{\Delta\rho}{(2n+1) \cdot M} \cdot \iint_{\sigma} \left(\int_{\xi=R-T-t'(\lambda',\varphi')}^{\xi=R-T} \left(\frac{\xi}{a} \right)^n \cdot \xi^2 \cdot d\xi \right) \cdot \overline{P}_{nm}(\sin\varphi') \cdot \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} \cdot d\sigma \quad (4.34)$$

bzw.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{nm}^{\text{Crust}} \\ \overline{S}_{n|m}^{\text{Crust}} \end{array} \right\} = \frac{3}{(2n+1)} \cdot \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \cdot \left(\frac{R-T}{R} \right)^{n+3} \cdot \left(\frac{R}{a} \right)^n \cdot T_{nm} \quad \text{für } \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Die Koeffizienten T_{nm} erhält man bei vorgegebener Tiefe $t'(\varphi', \lambda')$ mittels Gleichung (4.19). Es kann zwischen verschiedenen Varianten der Modellierung (vgl. Kapitel 3.4.6) in Form der Berechnung des Dichtekontrastes und der Normalsäule unterschieden werden.

4.4 Numerische Untersuchungen

4.4.1 Vergleich der Modellierungen des Ortsbereichs und des Spektralbereichs bezüglich der analytischen Lösung für eine Kugelschale

Die Modellierungen des Ortsbereichs und des Spektralbereichs werden hinsichtlich ihrer Genauigkeit verglichen, indem eine konstante Topographie mit $h = -1000$ m, $h = 1000$ m, $h = 5000$ m, $h = 10000$ m und $h = 20000$ m angenommen wird. Die Auflösung der Topographie beträgt in Form von Blockmittelwerten $30' \times 30'$ und der Aufpunkt liegt auf der Polachse in einer Höhe von 260 km. Für die Kugelschale existiert eine analytische Lösung (vgl. Kapitel 3.5.1). Berechnet wird der Vergleich für die zweite radiale Ableitung des Potentials. Folgende Parameter werden zur Untersuchung verwendet: $R = 6378137$ m, $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$ m³kg s⁻², $\rho_0 = 2670$ kg m⁻³, $\Delta\rho = 600$ kg m⁻³. Die harmonische Analyse und Synthese wird nach Heck und Seitz (1991, 1993) mit dem Programm von K. Seitz durchgeführt. Ein Vergleich dieses Programms mit anderen Analyse- und Synthese-Programmen wird in Wittwer et al. (2007) beschrieben. Aufgrund der vorliegenden Höhen in Blockmittelwerten $30' \times 30'$ wird die harmonische Analyse und Synthese bis Grad $n = 359$ durchgeführt. Die Kugelfunktionskoeffizienten mit $n = 360$ der Kugelfunktionsentwicklung nach Gleichung (4.7) sind nicht bestimmbar. Es werden nach Gleichung (4.13) die Glieder $k = 1$ bis $k = 3$ berücksichtigt.

Tabelle 4.1 Vergleich der Modellierung des Ortsbereichs und des Spektralbereichs bezüglich der analytischen Lösung einer Kugelschale für verschiedene Höhen h anhand der Mzz-Komponente [E.U.]

	$h = -1000$ m	$h = 1000$ m	$h = 5000$ m	$h = 10000$ m	$h = 20000$ m
Kubatur, $n = m = p = 0$	-6.1576e-005	6.1739e-005	3.1047e-004	6.2595e-004	1.2757e-003
Kubatur, $n = m = p = 1$	-6.6021e-009	6.6579e-009	3.3868e-008	6.9199e-008	1.4457e-007
Kubatur, $n = m = p = 2$	1.0001e-012	-2.2999e-012	-1.2200e-011	-3.1300e-011	-1.2600e-010
HA/HS ($n = 359$)	-5.9997e-013	-3.9990e-013	-8.0025e-013	-4.0058e-013	-6.2173e-013

In Tabelle 4.1 sind die Abweichungen der Modellierung mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $n = m = p = 0$ bis $n = m = p = 2$ und der Auswertung mittels harmonischer Synthese und Analyse gegenüber der analytischen Lösung einer Kugelschale für die verschiedenen Topographiehöhen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Abweichungen der Spektralbereichmodellierung von der exakten Lösung geringer sind als die Abweichungen der Ortsbereichmodellierung. Des Weiteren ist sichtbar, dass die numerische Auswertung mit $n = m = p = 0$ (1·1·1 Stützstellen) die größte Approximation darstellt und die numerische Auswertung mit $n = m = p = 1$ (2·2·2 Stützstellen) um den Faktor 10^3 bzw. mit $n = m = p = 2$ (3·3·3

Stützstellen) um den Faktor 10^6 genauer ist als die Auswertung mit einer Stützstelle (siehe Kapitel 3.5.1). Im Hinblick auf die Rechenzeit (siehe Abbildung 3.23 und Abbildung 3.24) wird die numerische Auswertung mit $n = m = p = 1$ zum Vergleich mit der Spektralbereichmodellierung herangezogen. Für den speziellen Fall der konstanten Topographie liegen demnach die Abweichungen zwischen der Ortsbereichmodellierung ($n = m = p = 1$) und der Spektralbereichmodellierung je nach Höhe der Topographie zwischen 10^{-3} und 10^{-5} E.U., wobei beide Modellierungen geringe Differenzen gegenüber der analytischen Lösung der sphärischen Kappe aufweisen (10^{-7} - 10^{-13} E.U.). Die Differenzen der Ortsbereich- und Spektralbereichmodellierung liegen weit unterhalb der Messgenauigkeit des GOCE-Gradiometers (siehe Kapitel 2.1). Eine Steigerung der Genauigkeit – hinsichtlich der numerischen Auswertung mit $n = m = p = 1$ – könnte durch die Modellierung der Innenzone z.B. 0° .. 2° mit höherer Stützstellenzahl oder mit höherer Auflösung erreicht werden, so dass die Rechenzeit praktisch unverändert ist. Eine höhere Stützstellenanzahl könnte bedeuten, dass $n = m = p = 2$ ($3 \cdot 3 \cdot 3$ Stützstellen) oder $n = m = 1$ und $p = 2$ ($2 \cdot 2 \cdot 3$ Stützstellen) mit einer höheren vertikalen Stützstellenanzahl gewählt wird.

4.4.2 Numerische Ergebnisse für das topographische Modell und die verschiedenen isostatischen Modelle

Die Modellierung im Spektralbereich und ihr anschließender Vergleich mit der Modellierung im Ortsbereich wird anhand des topographischen Modells, des isostatischen Modells nach Airy-Heiskanen, der Helmertschen Kondensationsmodelle I und II und der Erdkrustenmodelle (Varianten 1, 2; vgl. Kapitel 3.4.6) durchgeführt. Im Ortsbereich werden die Massen rein numerisch mittels 3D-Gauß-Legendre-Kubatur berechnet, wobei $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Knoten für die Berechnung eines Tesseroids verwendet werden. In Kapitel 3.5.1 und Kapitel 4.4.1 sowie in Wild (2006) wurde gezeigt, dass diese Berechnungsmethode ausreichend genau und wenig zeitintensiv ist. Im Fall der Helmertschen Kondensationsmodelle wird das Flächenintegral mittels der 2D-Gauß-Legendre-Kubatur berechnet, wobei pro Element $2 \cdot 2 = 4$ Knoten ausgewertet werden.

Für die numerische Untersuchung werden die folgenden Parameter festgelegt: $R = 6378137$ m, $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$ $\text{m}^3 \text{kg} \text{s}^{-2}$, $h_Q = r - R = 260$ km (Satellitenhöhe), $\rho_0 = 2670$ kgm^{-3} , $\Delta\rho = 600$ kgm^{-3} , $T = 25$ km (Airy-Heiskanen), $d = 21$ km (Helmert I) oder $d = 0$ (Helmert II). Zur Berechnung wird das digitale „rock-equivalent“ Geländemodell JGP95E (vgl. Kuhn und Seitz 2005) mit einer Auflösung von $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ verwendet. Die ursprüngliche Auflösung des JGP95E von $5' \times 5'$ wurde mittels arithmetischer Mittelbildung auf $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ verringert. Das Erdkrustenmodell CRUST2.0, das eine Auflösung von $2^\circ \times 2^\circ$ hat, wurde auf $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ interpoliert, indem jedem $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ -Element der Wert des zugehörigen $2^\circ \times 2^\circ$ -Elements zugewiesen wurde. Die Wurzeltiefen des Airy-Heiskanen-Modells werden exakt nach Kapitel 3.4.1 berechnet. Die harmonische Analyse und Synthese wird nach Heck und Seitz (1991, 1993) mit dem Programm von K. Seitz durchgeführt. Aufgrund der vorliegenden Höhen in Blockmittelwerten $30' \times 30'$ wird die harmonische Analyse und Synthese auf den maximalen Grad $n = 359$ beschränkt.

Abbildung 4.1 bis Abbildung 4.3 zeigen die Spektren der verschiedenen Anteile H_{nm}^k , T_{nm}^k und C_{nm}^k für $k = 1, 2$ und 3 der zweiten radialen Ableitung des topographischen Potentials, des isostatischen Potentials nach Airy-Heiskanen, des Helmertschen Kondensationspotentials I und II und des Erdkrustenmodells der Varianten 1 und 2 in der Satellitenhöhe $h_Q = 260$ km. Die harmonische Analyse wird für $k = 1, 2$ und 3 bis Grad $n = 359$ durchgeführt. Die Koeffizienten H_{nm} , T_{nm} und C_{nm} sind jeweils mit den Faktoren aus Gleichung (4.16) im Fall des topographischen Potentials, aus Gleichung (4.24) im Fall des isostatischen Potentials nach Airy-Heiskanen und der Erdkrustenmodelle und mit dem Faktor aus Gleichung (4.33) für die Helmertschen Kondensationsmodelle I und II multipliziert. Die Dimension der Gradvarianzen ist (E.U.)².

Für das topographische Potential (Abbildung 4.1a)) liegt der maximale Wert der Gradvarianzen von H_{nm}^1 bei ca. 10^{-18} (E.U.)², die Größenordnung der Gradvarianzen von H_{nm}^2 und H_{nm}^3 ist um ca. 10^{-6} bzw. 10^{-10} kleiner. Das Maximum der Koeffizienten T_{nm}^k liegt bei ca. 10^{-19} (E.U.)² für T_{nm}^1 bzw. ca. 10^{-23} (E.U.)² und 10^{-26} (E.U.)² für T_{nm}^2 und T_{nm}^3 im Fall des Airy-Heiskanen-Modells (Abbildung 4.1b)). Der maximale Wert der Koeffizienten T_{nm}^k der Erdkrustenmodelle liegt bei ca. 10^{-18} (E.U.)² für T_{nm}^1 , bzw. für T_{nm}^2 und T_{nm}^3 ist die Größenordnung um ca. 10^{-5} und 10^{-7} geringer. In Abbildung 4.3 wird deutlich, dass die Erdkrustenmodelle in einer Auflösung von $2^\circ \times 2^\circ$ als Blockflächenmittelwerte vorliegen, was einem Grad der Kugelfunktionsent-

wicklung von $n = 90$ entspricht. Bei Grad $n = 179$ tritt ein Aliasing-Effekt auf. Die Maxima der Gradvarianzen der Helmertschen Kondensationsmodelle liegen bei ca. 10^{-19} (E.U.)² für C_{nm}^1 bzw. ca. 10^{-26} (E.U.)² und 10^{-34} (E.U.)² für C_{nm}^2 und C_{nm}^3 (Abbildung 4.2).

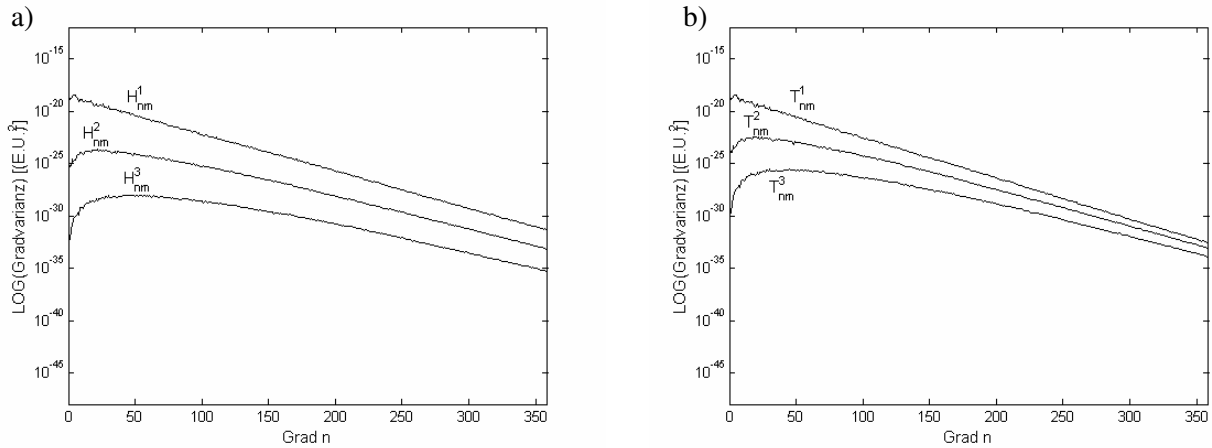


Abbildung 4.1 Gradvarianzen der verschiedenen Anteile H_{nm}^k (a) und T_{nm}^k (b) der zweiten radialen Ableitung des topographischen Potentials und des isostatischen Potentials nach Airy-Heiskanen

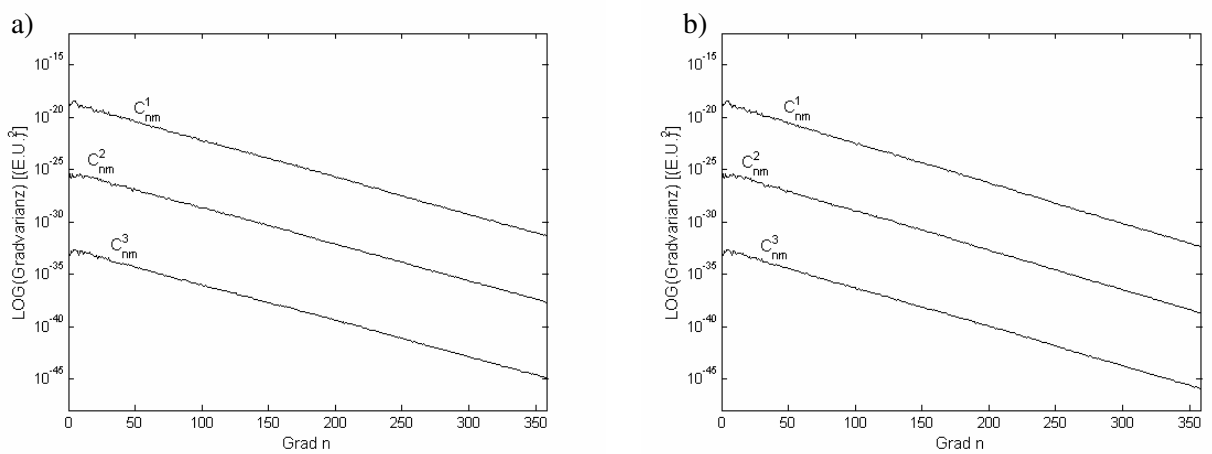


Abbildung 4.2 Gradvarianzen der verschiedenen Anteile C_{nm}^k der zweiten radialen Ableitung des Helmertschen Kondensationspotentials I (a) und II (b)

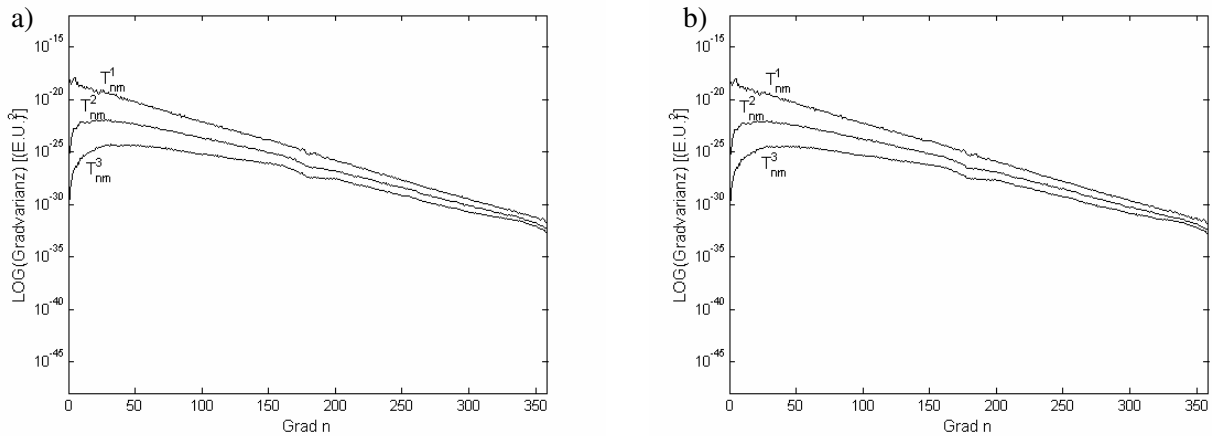


Abbildung 4.3 Gradvarianzen der verschiedenen Anteile T_{nm}^k der zweiten radialen Ableitung des Erdkrustenmodells Variante 1 (a) und 2 (b)

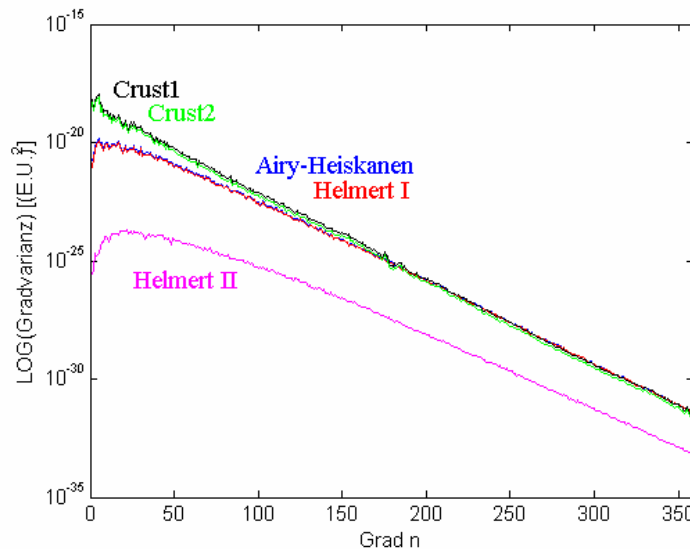


Abbildung 4.4 Gradvarianzen der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials in Satellitenhöhe

In Abbildung 4.4 ist das Spektrum des topographisch-isostatischen Effekts der verschiedenen isostatischen Modelle für die zweite radiale Ableitung bis zum Grad $n = 359$ dargestellt. Das Spektrum stammt aus den Differenzen der sphärisch-harmonischen Koeffizienten für topographische und isostatische Effekte. Es ist zu erkennen, dass das Airy-Heiskanen-Modell und das Helmert I-Modell praktisch identische Ergebnisse liefern, entsprechend die Erdkrustenmodelle der Varianten 1 und 2, wobei diese bis zum Grad $n = 60$ um den Faktor 10^{-2} bis 10^{-1} von dem Airy-Heiskanen-Modell bzw. Helmert I-Modell abweichen. Hiermit wird wie in Tsoulis (2001) deutlich, dass sich die isostatischen Effekte bis ca. Grad $n = 150$ äußern. Die Gradvarianzen des topographisch-isostatischen Effekts des Helmert II-Modells sind ca. um den Faktor 10^{-4} kleiner als die des Airy-Heiskanen-Modells. Im Spektralbereich wird wie auch im Ortsbereich (vgl. Kapitel 3.5.1) deutlich, dass zu erwarten ist, dass das Restfeld (nach Entfernen der Effekte der topographischen und isostatischen Massen von den beobachteten Schweregradienten) des Helmert II-Modells nicht so glatt ist wie im Fall des ersten Kondensationsmodells nach Helmert oder des Airy-Heiskanen-Modells. In Janák et al. (2007) wird gezeigt, dass die topographisch-isostatische Reduktion nach dem ersten Kondensationsmodell von Helmert eine vielversprechende Methode zur Glättung der Satellitendaten im Sinne der Fortsetzung der Daten nach unten auf das Geoid ist.

In der Tabelle 4.2 bis Tabelle 4.6 sind die Statistiken der verschiedenen Anteile $H_{nm}^k - T_{nm}^k$ bzw. $H_{nm}^k - C_{nm}^k$ der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials für die verschiedenen isostatischen Modelle im Ortsbereich bis Grad $n = 359$ für $k = 1, 2$ und 3 aufgelistet. Wie schon bei der Modellierung im Ortsbereich gezeigt wurde (vgl. Kapitel 3.5.1), hat der topographisch-isostatische Effekt im Fall des Airy-Heiskanen-Modells und des Helmert I-Modells eine Größenordnung von ± 0.6 E.U., im Fall des Helmert II-Modells ist dieser eine Größenordnung geringer und liegt bei ± 0.05 E.U.. Der topographisch-isostatische Effekt der Erdkrustenmodelle ist eine Zehnerpotenz größer als der des Airy-Heiskanen-Modells (siehe Heck und Wild 2005). Für den topographisch-isostatischen Effekt des Airy-Heiskanen-Modells sind die einzelnen Anteile bzw. der Gesamtanteil in der Abbildung 4.5 bis Abbildung 4.8 zu sehen. Im Fall des topographisch-isostatischen Effekts des zweiten Helmertschen Kondensationsmodells sind die Terme 2. Ordnung ($k = 2$) dominant und die Terme 1. Ordnung praktisch identisch null. In der Theorie – wie in Heck (2003) bzw. Tscherning und Heck (2005) gezeigt – verschwinden die Terme 1. Ordnung ($k = 1$) vollständig. Die Abweichungen von Null in Tabelle 4.4 für $k = 1$ sind auf Rechenungenauigkeiten zurückzuführen.

Tabelle 4.2 Statistik der verschiedenen Anteile der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (isostatisches Modell nach Airy-Heiskanen) in Satellitenhöhe

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
$H_{nm}^1 - T_{nm}^1$	-5.6059e-001	7.6664e-001	1.1669e-001
$H_{nm}^2 - T_{nm}^2$	-2.2190e-001	1.2747e-001	2.7010e-002
$H_{nm}^3 - T_{nm}^3$	-1.6148e-002	1.2469e-002	1.1099e-003
Gesamt	-5.4881e-001	6.0859e-001	1.2269e-001

Tabelle 4.3 Statistik der verschiedenen Anteile der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (Helmertsches Kondensationsmodell I) in Satellitenhöhe

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
$H_{nm}^1 - C_{nm}^1$	-4.7315e-001	6.6429e-001	9.8636e-002
$H_{nm}^2 - C_{nm}^2$	-4.6135e-002	7.0083e-002	8.3509e-003
$H_{nm}^3 - C_{nm}^3$	-8.4561e-004	1.0551e-003	7.2727e-005
Gesamt	-4.7625e-001	7.1945e-001	9.7959e-002

Tabelle 4.4 Statistik der verschiedenen Anteile der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (Helmertsches Kondensationsmodell II) in Satellitenhöhe

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
$H_{nm}^1 - C_{nm}^1$	-3.0606e-014	3.0192e-014	9.1182e-015
$H_{nm}^2 - C_{nm}^2$	-4.5857e-002	6.9650e-002	8.2992e-003
$H_{nm}^3 - C_{nm}^3$	-8.4555e-004	1.0550e-003	7.2718e-005
Gesamt	-4.6551e-002	7.0593e-002	8.2986e-003

Tabelle 4.5 Statistik der verschiedenen Anteile der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (Erdkrustenmodell Variante 1) in Satellitenhöhe

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
$H_{nm}^1 - T_{nm}^1$	-7.7725	4.7401	1.5478
$H_{nm}^2 - T_{nm}^2$	-9.8492e-001	4.7453e-001	5.5659e-002
$H_{nm}^3 - T_{nm}^3$	-1.1102e-002	7.8873e-002	4.1859e-003
Gesamt	-8.6543	4.7600	1.5581

Tabelle 4.6 Statistik der verschiedenen Anteile der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (Erdkrustenmodell Variante 2) in Satellitenhöhe

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
$H_{nm}^1 - T_{nm}^1$	-6.3812	4.2793	1.3659
$H_{nm}^2 - T_{nm}^2$	-8.4870e-001	4.0734e-001	4.7959e-002
$H_{nm}^3 - T_{nm}^3$	-9.5959e-002	6.8206e-002	3.6189e-003
Gesamt	-7.0832	4.2962	1.3741

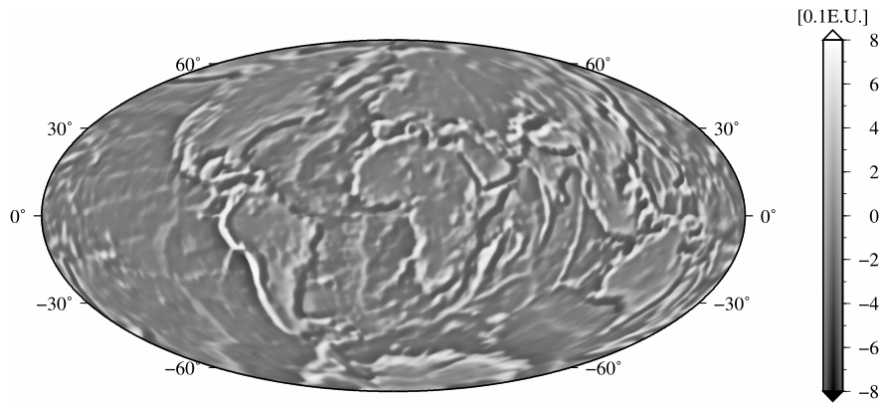


Abbildung 4.5 Anteil $H_{nm}^1 - T_{nm}^1$ der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (isostatisches Modell nach Airy-Heiskanen) (Hammer-Projektion; Hauptmeridian: Greenwich)

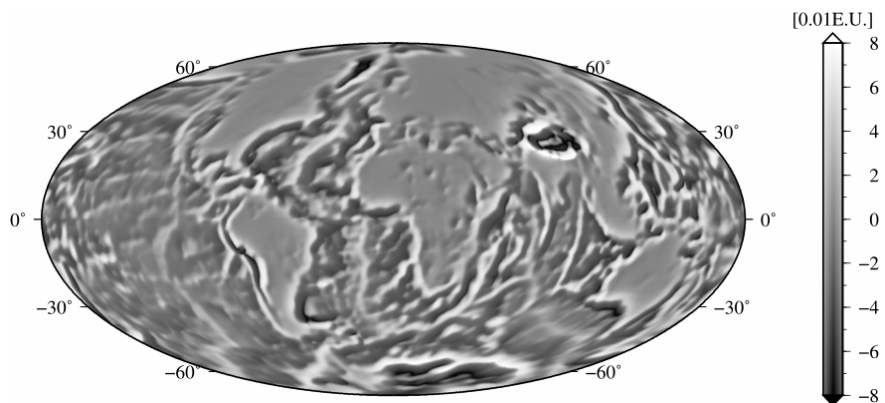


Abbildung 4.6 Anteil $H_{nm}^2 - T_{nm}^2$ der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (isostatisches Modell nach Airy-Heiskanen)

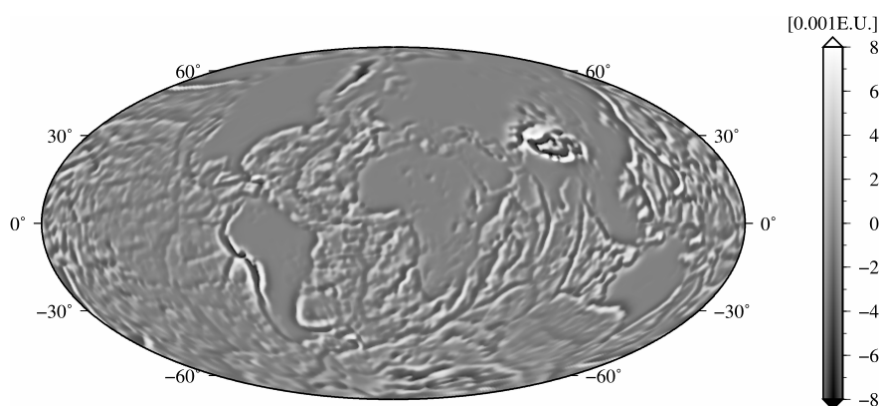


Abbildung 4.7 Anteil $H_{nm}^3 - T_{nm}^3$ der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (isostatisches Modell nach Airy-Heiskanen)

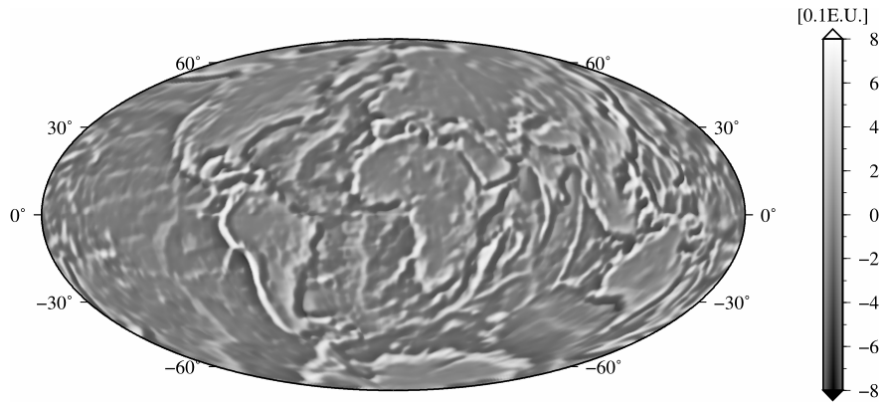


Abbildung 4.8 Gesamtanteil der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (isostatisches Modell nach Airy-Heiskanen)

In der Tabelle 4.7 bis Tabelle 4.12 sind die Statistiken des Marussi-Tensors für die Differenz der Modellierung der topographischen und isostatischen Massen im Orts- und Spektralbereich dargestellt. Für diese Untersuchung wurde der Marussi-Tensor auf einem Gitter von $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ Auflösung auf einer Kugel mit dem Radius $r_Q = R + h_Q$ und $h_Q = 260$ km ausgewertet; einerseits durch Aufsummierung der einzelnen Tesseroidenbeiträge im Ortsbereich und andererseits durch harmonische Synthese der Koeffizienten H_{nm} , T_{nm} und C_{nm} . Der RMS-Wert liegt für das topographische Modell und die Helmertschen Kondensationsmodelle zwischen $0.86 \cdot 10^{-3}$ und $3.20 \cdot 10^{-3}$ E.U., im Fall des Airy-Heiskanen-Modells und den beiden Varianten des Erdkrustenmodells zwischen $2.19 \cdot 10^{-2}$ und $1.16 \cdot 10^{-1}$ E.U.. Für das Airy-Heiskanen-Modell sind die Differenzen in Abbildung 4.9 bis Abbildung 4.14 grafisch veranschaulicht. In einer gesonderten Untersuchung hat sich gezeigt, dass die Berücksichtigung von Gliedern vierter Ordnung (vgl. Gleichung (4.13) mit $k = 4$) im Spektralbereich zu keiner signifikanten Änderung führt.

Tabelle 4.7 Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des topographischen Potentials im Orts- und Spektralbereich

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
M_{xx}	-1.9246e-002	2.2128e-002	2.2811e-003
M_{xy}	-1.1711e-002	1.3959e-002	1.0369e-003
M_{xz}	-2.0133e-002	2.8396e-002	2.4479e-003
M_{yy}	-1.8594e-002	2.2887e-002	1.6599e-003
M_{yz}	-2.2591e-002	2.3849e-002	1.9611e-003
M_{zz}	-3.1399e-002	2.3923e-002	3.1854e-003

Tabelle 4.8 Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des isostatischen Potentials nach Airy-Heiskanen im Orts- und Spektralbereich

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
M_{xx}	-3.1119e-001	4.6681e-001	4.4550e-002
M_{xy}	-1.7621e-001	2.7579e-001	2.1957e-002
M_{xz}	-5.7803e-001	5.5529e-001	5.0881e-002
M_{yy}	-2.0748e-001	3.6319e-001	4.0574e-002
M_{yz}	-3.4974e-001	4.0871e-001	4.7034e-002
M_{zz}	-6.0492e-001	3.5428e-001	7.1561e-002

Tabelle 4.9 Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationspotentials I im Orts- und Spektralbereich

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
M_{xx}	-1.4675e-002	1.8171e-002	1.8176e-003
M_{xy}	-9.6209e-002	1.1083e-002	0.8611e-003
M_{xz}	-1.6155e-002	2.3302e-002	2.0408e-003
M_{yy}	-1.5035e-002	1.7995e-002	1.3851e-003
M_{yz}	-1.8219e-002	1.9810e-002	1.6346e-003
M_{zz}	-2.4690e-002	1.9899e-002	2.6581e-003

Tabelle 4.10 Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationspotentials II im Orts- und Spektralbereich

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
M_{xx}	-1.9690e-002	2.1642e-002	2.1929e-003
M_{xy}	-1.1787e-002	1.3645e-002	1.0429e-003
M_{xz}	-1.9947e-002	2.8146e-002	2.4612e-003
M_{yy}	-1.8766e-002	2.2361e-002	1.6710e-003
M_{yz}	-2.3116e-002	2.3661e-002	1.9741e-003
M_{zz}	-3.0659e-002	2.4176e-002	3.2037e-003

Tabelle 4.11 Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des Erdkrustenmodells Variante 1 im Orts- und Spektralbereich

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
M_{xx}	-7.7774e-001	1.2779	6.8271e-002
M_{xy}	-6.2373e-001	7.6539	3.6065e-002
M_{xz}	-1.1249	1.6093	7.8539e-002
M_{yy}	-7.3475e-001	1.7218	7.3067e-002
M_{yz}	-1.3217	1.7216	8.3535e-002
M_{zz}	-2.0547	1.0229	1.1643e-001

Tabelle 4.12 Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des Erdkrustenmodells Variante 2 im Orts- und Spektralbereich

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
M_{xx}	-6.7275e-001	1.1054	5.9054e-002
M_{xy}	-5.3952e-001	6.6206e-001	3.1196e-002
M_{xz}	-9.7306e-001	1.3921	6.7936e-002
M_{yy}	-6.3556e-001	1.4894	6.3203e-002
M_{yz}	-1.1433	1.4892	7.1384e-002
M_{zz}	-1.7773	8.8486e-001	1.0071e-001

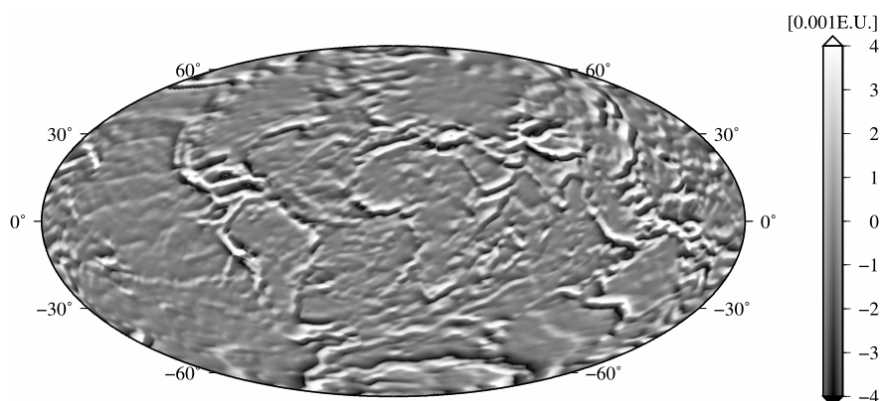


Abbildung 4.9 M_{xx} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich

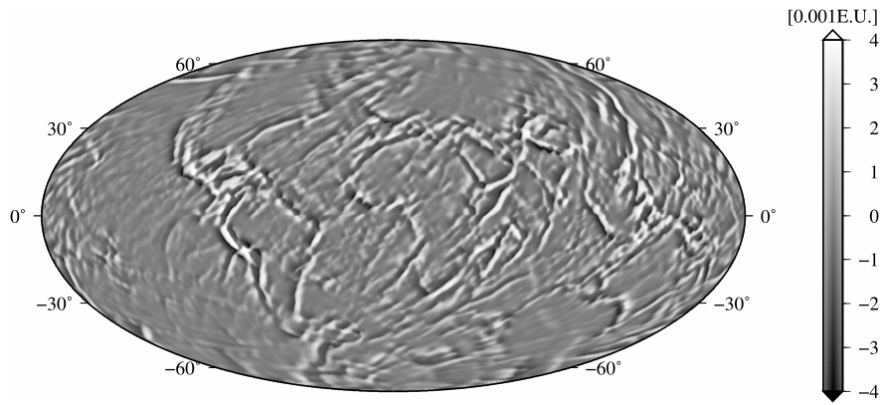


Abbildung 4.10 M_{xy} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich

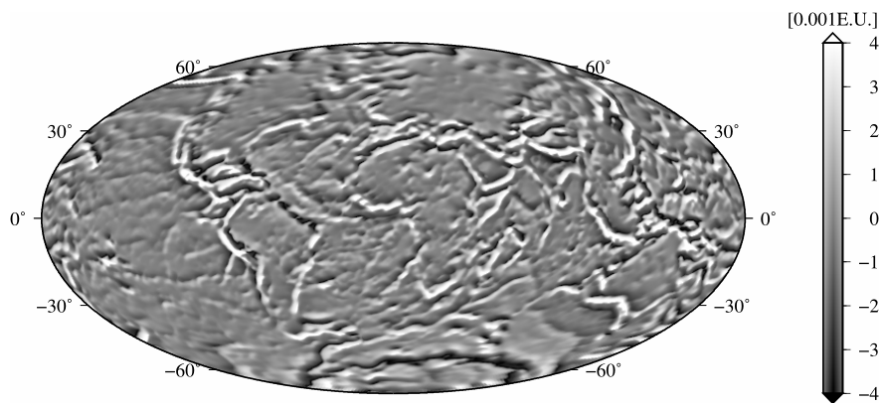


Abbildung 4.11 M_{xz} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich

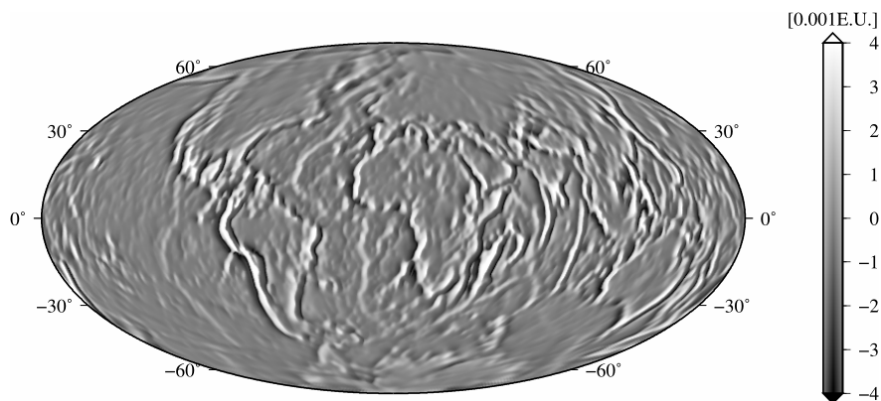


Abbildung 4.12 M_{yy} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich

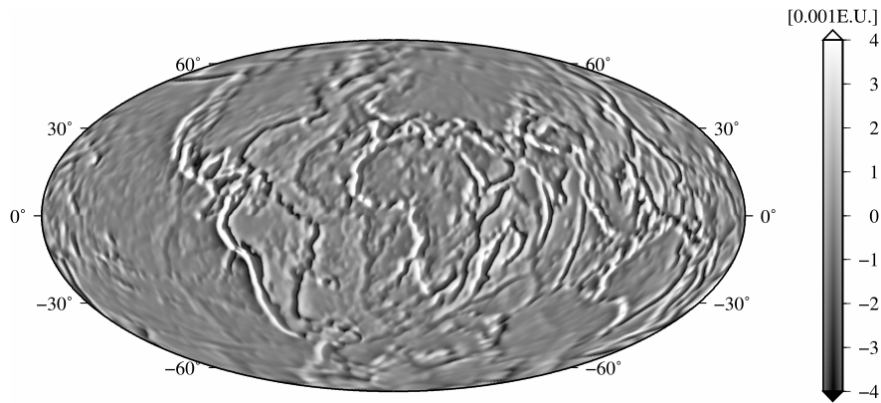


Abbildung 4.13 M_{yz} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich

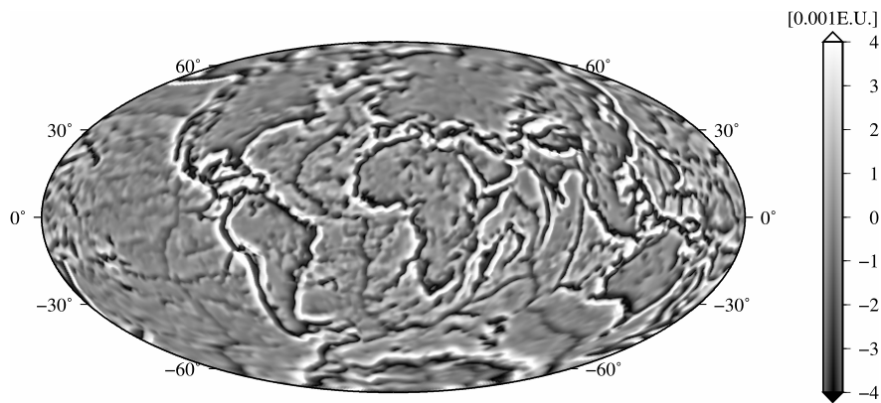


Abbildung 4.14 M_{zz} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich

Die Abweichungen zwischen der Modellierung des Orts- und Spektralbereichs sind beim isostatischen Modell nach Airy-Heiskanen und bei den Erdkrustenmodellen im RMS-Wert ca. eine Zehnerpotenz größer als beim topographischen Modell und dem Kondensationsmodell nach Helmert. Begründen lässt sich dies mit der Ungenauigkeit der Ortsbereichsmodellierung. Die Extremwerte der Wurzeltiefen des Airy-Heiskanen-Modells sind um den Faktor 4,5, d.h. ca. 15 km, größer als die der topographischen Höhen (vgl. Tabelle 4.13). Nach Tabelle 3.15 sind die Abweichungen der Extremwerte zwischen Wurzeltiefen und topographischen Höhen bei den Erdkrustenmodellen noch größer. Der Unterschied der Massenkörpergröße äußert sich bei der numerischen Modellierung mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) mit $n = m = p = 1$ in einer Zehnerpotenz gegenüber der analytischen Lösung einer sphärischen Kappe bzw. die Abweichung zur Modellierung des Spektralbereichs wird um eine Zehnerpotenz größer (vgl. Tabelle 4.1).

Tabelle 4.13 Statistik zu den Höhen der Topographie und den Wurzeltiefen des Airy-Heiskanen-Modells

	Min [m]	Max [m]	RMS [m]
Höhen	-5517	5769	2268
Wurzeltiefen	-20105	26004	10161

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Abweichungen zwischen der Modellierung im Orts- und Spektralbereich sowohl bei den topographischen Massen als auch bei den Helmertschen Kondensationsmassen bei ca. 10^{-3} E.U. liegen. Bei dem isostatischen Modell nach Airy-Heiskanen und den Erdkrustenmodellen liegen die Abweichungen bei ca. 10^{-2} E.U.. Eine Steigerung der Genauigkeit beim Airy-Heiskanen-Modell und dem Erdkrustenmodell ist durch eine Erhöhung der Stützstellenanzahl bei der numerischen Integration erreichbar (vgl. Kapitel 4.4.1, Tabelle 4.1). Eine Erhöhung der Anzahl der Stützstellen könnte bedeuten, dass $n = m = p = 2$ (3·3·3 Stützstellen) oder $n = m = 1$ und $p = 2$ (2·2·3 Stützstellen) mit einer höheren Stützstellenanzahl für die vertikale Dimension gewählt wird. Wie die Größenordnung der Abweichungen für die Äquipotentialflächen in Satellitenhöhe einzuordnen ist, wird in Kapitel 4.4.4 beschrieben.

In Tabelle 4.14 sind die Rechenzeiten der Orts- und Spektralbereichmodellierung für eine Auswertung des Marussi-Tensors mit einer Auflösung von $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ dargestellt. Aufgrund der vorliegenden Daten in Blockmittelwerten wird die harmonische Analyse und Synthese bis Grad $n = 359$ durchgeführt. Die Modellierung im Spektralbereich ist ca. um den Faktor 50 schneller als die Ortsbereichmodellierung, die in diesem Vergleich mit 8 Stützstellen pro Massenelement berechnet wurde. Im Hinblick auf eine höhere Auflösung der Topographie und die damit verbundene Rechenzeit wird die Modellierung im Spektralbereich in Form einer sphärisch harmonischen Analyse bevorzugt, da diese weniger rechenintensiv ist (vgl. auch Jekeli und Zhu 2006). Dies gilt nur für globale Anwendungen, wobei bei der Ortsbereichmodellierung noch Einsparungen der Rechenzeit durch die Verwendung von Punktmassen in größerer Entfernung zum Aufpunkt möglich sind. Für regionale Anwendungen mit entsprechend höherer Auflösung ist die Modellierung durch einzelne Massenelemente zu bevorzugen.

Tabelle 4.14 Rechenzeitvergleich Orts- und Spektralbereich

	Zeit [sek.]
Ortsbereich (Gauß-Legendre-Kubatur: $n = m = p = 1$)	428238
Spektralbereich ($n = 359$: Analyse, Synthese)	8412

4.4.3 Untersuchung des Einflusses der Reihenentwicklung von t' im Fall des Airy-Heiskanen-Modells

In Kapitel 4.3.1 wird gezeigt, dass die (Anti-)Wurzeltiefe einerseits exakt nach den Gleichungen (3.74) und (3.76) berechnet und andererseits in eine Reihe entwickelt werden kann. Für die Koeffizienten T_{nm}^k nach Gleichung (4.19) gilt nach Einsetzen der Reihenentwicklung aus Gleichung (4.21)

$$T_{nm}^k = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{\sigma} \left(\frac{\left(\frac{R}{R-T} \right)^2 \cdot \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot R \cdot \left\{ C_1 \cdot \left(\frac{h'}{R} \right) + C_2 \cdot \left(\frac{h'}{R} \right)^2 + C_3 \cdot \left(\frac{h'}{R} \right)^3 \right\}}{R-T} \right)^k \cdot Y_{nm}(\varphi', \lambda') \cdot d\sigma, \quad (4.36)$$

wobei nur Terme (h'/R) bis zum Entwicklungsgrad 3 zur Berechnung verwendet werden. Es wird im Folgenden anhand der zweiten radialen Ableitung untersucht, welchen Einfluss die einzelnen Glieder der Reihenentwicklung haben. Die Parameter zur Berechnung entsprechen jenen aus Kapitel 4.4.2. Die harmonische Analyse und Synthese wird aufgrund der vorliegenden Blockmittelwerte ($0.5^\circ \times 0.5^\circ$) bis Grad $n = 359$ durchgeführt. Die Koeffizienten bis zum 1. Glied werden mit $T_{nm(1)}^k$ bezeichnet, entsprechend die Koeffizienten einschließlich Gliedern 2. bzw. 3. Ordnung in (h'/R) mit $T_{nm(2)}^k$ bzw. $T_{nm(3)}^k$:

$$\begin{aligned}
T_{nm(1)}^k &= \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{\sigma} \left(\left(\frac{R}{R-T} \right)^3 \cdot \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot \left(\frac{h'}{R} \right)^k \right) \cdot Y_{nm}(\varphi', \lambda') \, d\sigma, \\
T_{nm(2)}^k &= \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{\sigma} \left(\left(\frac{R}{R-T} \right)^3 \cdot \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot \left\{ \left(\frac{h'}{R} \right) + \left(1 + \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot \left(\frac{R}{R-T} \right)^3 \right) \cdot \left(\frac{h'}{R} \right)^2 \right\} \right)^k \cdot Y_{nm}(\varphi', \lambda') \, d\sigma, \\
T_{nm(3)}^k &= \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{\sigma} \left(\left(\frac{R}{R-T} \right)^3 \cdot \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot \left\{ \left(\frac{h'}{R} \right) + \left(1 + \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot \left(\frac{R}{R-T} \right)^3 \right) \cdot \left(\frac{h'}{R} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{3} + 2 \frac{\rho_0}{\Delta\rho} \cdot \left(\frac{R}{R-T} \right)^3 + \frac{5}{3} \left(\frac{\rho_0}{\Delta\rho} \right)^2 \cdot \left(\frac{R}{R-T} \right)^6 \right) \cdot \left(\frac{h'}{R} \right)^3 \right\} \right)^k \cdot Y_{nm}(\varphi', \lambda') \, d\sigma.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

In der Literatur werden die Koeffizienten T_{nm}^k im Allgemeinen nur bis zum Glied erster Ordnung berechnet (vgl. auch Tsoulis 2001; Mladek 2006). In der Tabelle 4.15 bis Tabelle 4.17 sind die Statistiken der Differenzen der Spektren $T_{nm(i)}^k - T_{nm(\text{exakt})}^k$ für $i = 1, 2, 3$ mit den entsprechenden Vorfaktoren aus Gleichung (4.20) dargestellt. $T_{nm(\text{exakt})}^k$ bezeichnet die Koeffizienten, bei denen die Wurzeltiefe t' in geschlossener Form berechnet wird.

Tabelle 4.15 Statistik der Differenzen der Gradvarianzen $T_{nm(i)}^1 - T_{nm(\text{exakt})}^1$

	Min [(E.U.) ²]	Max [(E.U.) ²]	RMS [(E.U.) ²]
i = 1	-4.8495e-021	1.1464e-023	2.6784e-022
i = 2	-4.8569e-021	1.1019e-023	2.6825e-022
i = 3	-4.8569e-021	1.1019e-023	2.6825e-022

Tabelle 4.16 Statistik der Differenzen der Gradvarianzen $T_{nm(i)}^2 - T_{nm(\text{exakt})}^2$

	Min [(E.U.) ²]	Max [(E.U.) ²]	RMS [(E.U.) ²]
i = 1	-2.8104e-025	9.5260e-026	4.1849e-026
I = 2/3	-2.8246e-025	9.3314e-026	4.2071e-026

Tabelle 4.17 Statistik der Differenzen der Gradvarianzen $T_{nm(i)}^3 - T_{nm(\text{exakt})}^3$

	Min [(E.U.) ²]	Max [(E.U.) ²]	RMS [(E.U.) ²]
i = 1/2/3	-1.9779e-033	-1.4739e-026	4.7053e-027

In der Tabelle 4.18 ist der Einfluss des Grades der Reihenentwicklung – im Vergleich zur exakten Lösung – im Ortsbereich aufgelistet:

Tabelle 4.18 Statistik zum Einfluss des Entwicklungsgrades der Reihenentwicklung von t' der zweiten radialen Ableitung des isostatischen Potentials nach Airy-Heiskanen in Satellitenhöhe

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	RMS [E.U.]
$i = 1$	-6.3881e-003	1.1287e-001	6.0783e-003
$i = 2$	-4.7768e-003	1.0448e-001	2.4907e-003
$i = 3$	-4.9233e-003	1.0453e-001	2.4929e-003

Für $k = 1$ (vgl. Tabelle 4.15) wird deutlich, dass der Entwicklungsgrad i von t' eine Rolle spielt. Vom Entwicklungsgrad $i = 1$ (ca. $2.67 \cdot 10^{-22}$ (E.U.)²) auf $i = 2$ steigt die Genauigkeit im RMS-Wert um 10^{-2} (E.U.)², vom Grad $i = 2$ auf $i = 3$ in der Größenordnung 10^{-6} (E.U.)².

Für $k = 2$ (vgl. Tabelle 4.16) sind die Ergebnisse für die Entwicklungsgrade $i = 2$ und $i = 3$ identisch, da nur bis $(h'/R)^3$ entwickelt wird (siehe Gleichung (4.37)); die Abweichungen zu $i = 1$ (ca. $4.18 \cdot 10^{-26}$ (E.U.)²) liegen in der Größenordnung 10^{-2} (E.U.)².

Tabelle 4.17 verdeutlicht bei einer Entwicklung bis $(h'/R)^3$, dass die Grade $i = 1$ bis 3 für $k = 3$ identisch sind. Der RMS-Wert der Gradvarianzen $T_{nm(i)}^3 - T_{nm(\text{exakt})}^3$ beträgt ca. $4.71 \cdot 10^{-27}$ (E.U.)².

Die Unterschiede im Ortsbereich für $i = 1$ bis 3 mit $k = 1$ bis 3 liegen in der Genauigkeit des GOCE-Gradiometers (siehe Kapitel 2.1). Ab dem Entwicklungsgrad $i = 2$ der Reihenentwicklung von t' sind die Unterschiede im Ortsbereich (vgl. Tabelle 4.18) praktisch unverändert. Es ist daher nicht möglich, nur Glieder erster Ordnung der Reihenentwicklung von t' wie in Tsoulis (2001) und Mladek (2006) zu verwenden. Empfohlen wird, für $k = 1$ bis 3 auch den Entwicklungsgrad $i = 2$ zu berücksichtigen.

4.4.4 Vergleich des in Kugelfunktionen entwickelten Tensors des Ortsbereichs mit dem Tensor des Spektralbereichs

Der Vergleich der nach Kugelfunktionen entwickelten Tensorcomponenten V_{ij} in Satellitenhöhe aus dem Ortsbereich (Spektrum 1) mit dem Spektrum aus dem Spektralbereich (Spektrum 2) (vgl. Abbildung 4.1 bis Abbildung 4.4) wird beispielhaft für die topographischen Massen durchgeführt. Hierdurch kann der Approximationsfehler der beiden Verfahren überprüft werden. Im Ortsbereich wäre dies die Approximation durch Tesseroiden, numerisch berechnet mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) mit $n = m = p = 1$; im Spektralbereich wäre dies der Fehler, der durch Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung $(h'/R)^k$ mit $k > 3$ entsteht (vgl. Gleichung (4.13)). Im Spektrum 3 wird das aus dem Spektralbereich (Spektrum 2) synthetisierte Spektrum harmonisch analysiert. Hierdurch kann im Vergleich zu Spektrum 2 die Genauigkeit des Verfahrens zur harmonischen Analyse und Synthese nach Heck und Seitz (1991, 1993) überprüft werden. Die Differenzen der Spektren 1 und 3 spiegeln die Unterschiede der Orts- und Frequenzbereichsmodellierung wider.

Die Ausgangsdaten des Vergleichs sind jene aus Kapitel 4.4.2. Die harmonische Analyse und Synthese wird nach Heck und Seitz (1991, 1993) mit dem Programm von K. Seitz durchgeführt. Die vorliegenden Blockmittelwerte $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ ermöglichen eine Entwicklung bis Grad $n = 359$.

Abbildung 4.15a) veranschaulicht die verschiedenen Spektren für die zweite radiale Ableitung; außerdem sind die Beträge der Differenz zwischen Spektrum 1 und 2 bzw. 2 und 3 in Abbildung 4.15b) dargestellt. Durch die Differenzen der Spektren können die Ungenauigkeiten der beiden Modellierungen im Ortsbereich und Spektralbereich ermittelt bzw. die Software zur harmonischen Analyse und Synthese überprüft werden.

In Tabelle 4.19 sind die zugehörigen statistischen Größen aufgelistet. Der RMS-Wert des Betrags der Differenz zwischen Spektrum 1 und 2 liegt bei $3.80 \cdot 10^{-26}$ (E.U.)²; der RMS-Wert des Betrags der Differenz zwischen Spektrum 2 und 3 ist ca. um den Faktor 2.62 größer. Das bedeutet, dass die Genauigkeit der Software zur harmonischen Analyse und Synthese in der Größenordnung der Unterschiede beider Modellierungen, der Orts- und Frequenzbereichmodellierung, liegt.

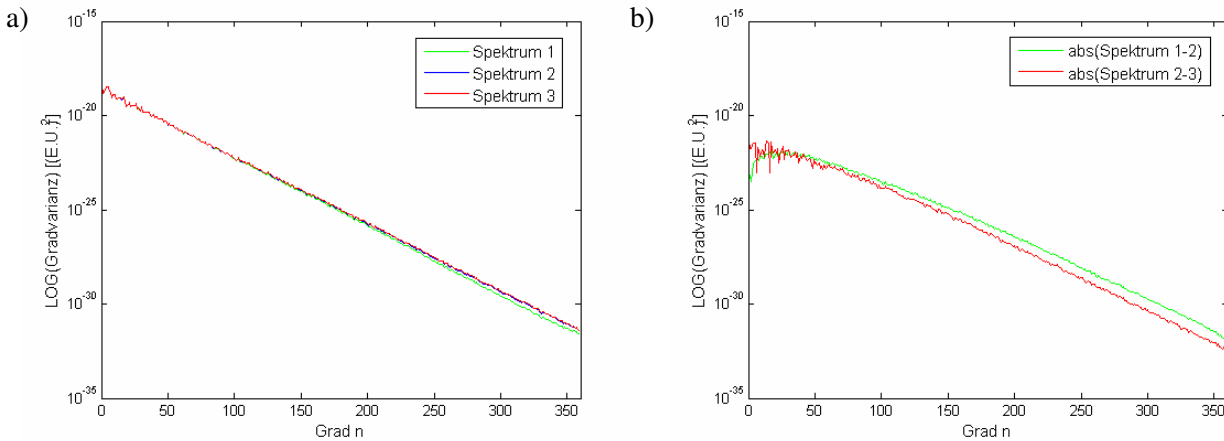


Abbildung 4.15 Vergleich verschiedener Spektren (a) und Differenzen der Spektren (b) der Tensorkomponente V_{zz} der topographischen Massen

Tabelle 4.19 Statistik der verschiedenen Spektren der Tensorkomponente V_{zz} des topographischen Potentials

	Min [(1/s ²) ²]	Max [(1/s ²) ²]	RMS [(1/s ²) ²]
Spektrum 1	2.5271e-032	7.4864e-019	2.0267e-021
Spektrum 2	3.8038e-032	7.4865e-019	2.0270e-021
Spektrum 3	4.2187e-032	7.4949e-019	2.0295e-021
abs(Spektrum 1-2)	1.2767e-032	1.6221e-022	3.8016e-023
abs(Spektrum 2-3)	3.6586e-033	8.5531e-022	9.9706e-023

In Abbildung 4.16 und Tabelle 4.20 sind die Abweichungen der Modellierung des topographischen Potentials im Ortsbereich und Spektralbereich (Differenz Spektrum 1 und 3) für die Komponenten V_{ij} des Marussi-Tensors dargestellt. Die Unterschiede zwischen den Spektren 1 und 3 liegen in den Komponenten des Marussi-Tensors bei ca. 10^{-22} bis 10^{-24} (E.U.)². Anhand der zweiten radialen Ableitung ist zu erkennen, dass die Differenz der Spektren 1 und 3 (ca. $1.07 \cdot 10^{-22}$ (E.U.)²) eine Kombination der Ungenauigkeiten der Modellierungen des Ortsbereichs und Spektralbereichs und der Software zur harmonischen Analyse und Synthese ist. Im Ortsbereich entspricht dies nach Tabelle 4.7 ca. $3.18 \cdot 10^{-3}$ E.U..

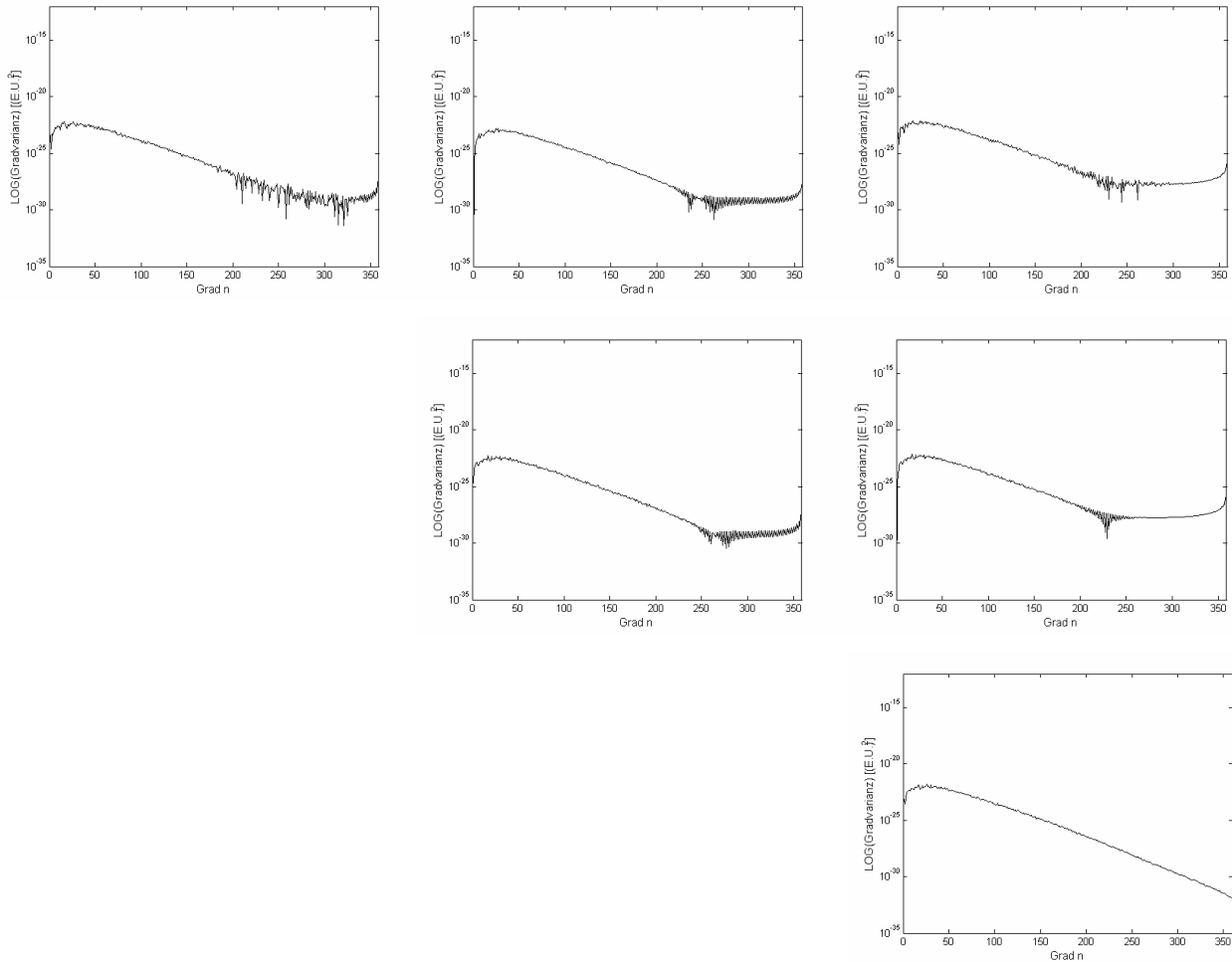


Abbildung 4.16 Differenz der Spektren 1 und 3 für die Komponenten V_{ij} des Marussi-Tensors der topographischen Massen

Tabelle 4.20 Statistik der Differenzen der Spektren 1 und 3 für den Marussi-Tensor des topographischen Potentials

	Min [(E.U.) ²]	Max [(E.U.) ²]	RMS [(E.U.) ²]
M_{xx}	4.0439e-032	6.5817e-023	1.3928e-023
M_{xy}	3.1368e-052	1.6472e-023	3.2729e-024
M_{xz}	4.9829e-030	7.5439e-023	1.8259e-023
M_{yy}	3.2564e-031	5.3732e-023	1.2482e-023
M_{yz}	3.2275e-049	7.0703e-023	1.6284e-023
M_{zz}	1.6915e-032	8.6180e-022	1.0671e-022

Um sich die Differenzen der Modellierung im Orts- und Spektralbereich der zweiten radialen Ableitung des topographischen Potentials besser vorstellen zu können, werden diese in Kugelfunktionen entwickelt, die Koeffizienten in Potentialwerte umgerechnet und das Potential bzw. die Geoidhöhen durch Division durch die mittlere Normalschwere berechnet. Kontrolliert werden die Berechnungen durch das Bilden der Differenzen der harmonischen Koeffizienten (Spektrum 1 und 3), durch die Umrechnung der Koeffizienten

in Potentialwerte und anschließende Synthese zur Berechnung des Potentials bzw. der Geoidhöhen. Unterschiede beider Rechenwege liegen in Geoidhöhen bei 10^{-5} m. In Abbildung 4.17 sind die Geoidhöhenfehler grafisch dargestellt; in Tabelle 4.21 sind die statistischen Werte aufgelistet.

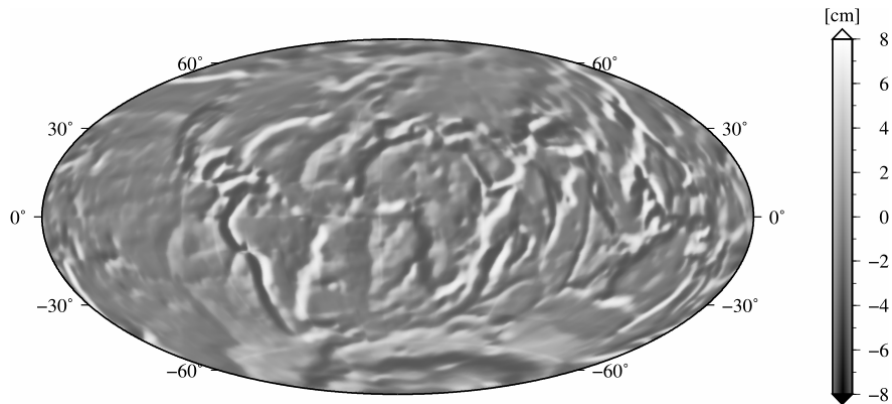


Abbildung 4.17 Differenz zwischen der Modellierung im Orts- und Spektralbereich, umgerechnet in Geoidhöhen in Satellitenhöhe

Tabelle 4.21 Statistik der Geoidhöhen in Satellitenhöhe

	Min [m]	Max [m]	RMS [m]
Geoidhöhen	-0.0854	0.0791	0.0230

Es ist zu erkennen, dass die Unterschiede der Modellierung im Ortsbereich und Spektralbereich für die zweite radiale Ableitung des topographischen Potentials einem Fehler in den Geoidhöhen im Bereich ± 0.08 m entsprechen. Die Extremwerte liegen an den Kontinentalrändern. Der RMS-Wert liegt bei ca. 0.02 m.

Um die Abweichungen zwischen den Verfahren im Orts- und Spektralbereich noch zu verringern und eine Genauigkeitssteigerung zu erreichen, könnte im Ortsbereich bei der numerischen Berechnung mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) die Anzahl der Stützstellen auf $3 \cdot 3 \cdot 3$ ($n = m = p = 2$) erhöht werden (vgl. Kapitel 4.4.1). Denkbar wäre auch eine Differenzierung der Anzahl der Stützstellen zwischen horizontalen ($n = m = 1$) und vertikalen ($p = 2$) Komponenten, was zu $2 \cdot 2 \cdot 3$ Stützstellen führt. Bei der Spektralbereichmodellierung könnte die Gitterweite bei der Darstellung der Topographie von $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ auf $20' \times 20'$ bzw. $10' \times 10'$ erhöht werden, da dadurch nach Mladek (2006) eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor 3 zu erwarten ist.

5 Schlussfolgerungen und Ausblick

In der Arbeit wurde gezeigt, dass topographische und isostatische Massen signifikante Auswirkungen auf die Satellitengradiometrie haben. Die zweiten Ableitungen des topographischen und isostatischen Potentials haben in der Satellitenhöhe von 260 km (entspricht ungefähr der GOCE-Bahnhöhe) jeweils einen Wert von ± 8 E.U.. Der kombinierte Effekt ist im Fall des Airy-Heiskanen-Modells und des Pratt-Hayford-Modells, der Kombination dieser beiden Modelle und dem ersten Kondensationsmodell von Helmert eine Zehnerpotenz geringer ($\pm 0.6 - 0.8$ E.U.). Der topographisch-isostatische Effekt des Erdkrustenmodells beträgt ± 4 E.U.. Dagegen ist der kombinierte Effekt des zweiten Kondensationsmodells von Helmert eine Größenordnung geringer als der des ersten Kondensationsmodells (± 0.06 E.U.). Das Helmert II-Modell weist demnach den geringsten topographisch-isostatischen Effekt auf.

Um die Glättung des Satellitensignals durch topographisch-isostatische Reduktionen zu ermitteln und das isostatische Modell zu finden, welches am stärksten das Satellitensignal glättet, wurde das Satellitensignal global durch das EIGEN-GRACE02S-Modell und regional beispielhaft im Gebiet der Rocky Mountains durch das EGM96 simuliert. Sowohl im globalen als auch im regionalen Fall konnte anhand von Statistiken des Restsignals (topographisch-isostatisches Störsignal) der einzelnen Komponenten des Marussi-Tensors und der Eigenwerte gezeigt werden, dass das Helmert I-Modell die kleinsten statistischen Werte liefert. Der Vergleich der statistischen Größen der zweiten Ableitungen des Restsignals gegenüber dem Störsignal verdeutlicht, dass das Helmert I-Modell und das Airy-Heiskanen-Modell die größten, das Helmert II-Modell die kleinsten Differenzen zwischen Rest- und Störsignal aufweisen. Es ist deshalb zu erwarten, dass das erste Kondensationsmodell von Helmert bzw. das Airy-Heiskanen-Modell das Satellitensignal stärker glättet als die anderen isostatischen Modelle. Dies wurde auch durch die Spektren für die einzelnen isostatischen Modelle bestätigt.

Des Weiteren wurde gezeigt, dass sich verschiedene Massenelemente und Berechnungsmethoden zur Beschreibung der Gravitationseffekte topographisch-isostatischer Massen in der Satellitengradiometrie eignen. Die numerischen Ergebnisse veranschaulichen, dass Tesseroide, unabhängig von der Berechnungsmethode, die beste Approximation darstellen. Die analytische Integration nach dem Radius r und Gauß-Legendre-Kubatur (2D) sowie die Gauß-Legendre-Kubatur (3D) liefern für $n = m = p = 1$ ($2 \cdot 2 = 4$ bzw. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Knoten pro Element) praktisch identische Ergebnisse. Die Modellierung durch eine Taylorreihenentwicklung ist um den Faktor 2 schlechter. Der Gesamtfehler gegenüber der exakten Lösung einer sphärischen Kappe ist drei Größenordnungen kleiner, verglichen mit den anderen Massenelementen Quader, Punktmasse, Massenschicht und Massenlinie. Die Rechenzeiten für die drei Berechnungsmethoden des Tesseroids sind ungefähr gleich. Die 2D-Kubatur-Methode (mit 4 Knoten pro Element) schneidet etwas schlechter und die 3D-Kubatur-Methode (mit 8 Knoten pro Element) etwas besser ab als die Taylorreihenentwicklung des Tesseroids. Demnach wird vorgeschlagen, den Nahbereich eines Aufpunkts mittels Tesseroiden zu modellieren. In der direkten Nachbarschaft des Aufpunkts können die topographischen und isostatischen Massen durch Quader (analytische Lösung) modelliert werden. Im Fernbereich können die anderen Massenelemente wie Punktmasse, Massenschicht und Massenlinie unabhängig von der Geländestruktur und Rechenzeit angewendet werden. Die Genauigkeit der Berechnung mit diesen Massenelementen entspricht der Modellierung der vertikalen, analytischen Integration und Gauß-Legendre-Kubatur (2D) sowie der Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $n = m = p = 0$ ($1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ Knoten pro Element). Die Rechenzeit ist bei der Punktmasse die kürzeste; sie beträgt weniger als 1/10 der Rechenzeit der analytischen Berechnung des Quaders, die die meiste Rechenzeit benötigt.

Die Grundlage aller Beschreibungen und numerischen Untersuchungen dieser Arbeit stellt das sphärische Modell dar. Die numerischen Berechnungen mittels statistischer Werte des Marussi-Tensors zeigen, dass die Elliptizität mit der Wahl des Erdradius in Satellitenhöhe Auswirkungen auf das topographisch-isostatische Signal hat. Die Unterschiede zwischen sphärischer und ellipsoidischer Modellierung sind ca. dreimal so groß wie die Differenzen zwischen zwei sphärischen Modellierungen mit unterschiedlichen Radien und liegen nahezu im Bereich der Messgenauigkeit des GOCE-Gradiometers. Diese Aussagen wurden statistisch durch die Eigenwerte des Marussi-Tensors bestätigt. Die sphärische Approximation der Massen stellt demnach die größte Approximation an die Wirklichkeit dar.

Die Untersuchung des Einflusses der Reihenentwicklung der Wurzeltiefe im Fall des Airy-Heiskanen-Modells zeigte, dass die Entwicklungsgrade $i = 1$ bis $i = 3$ in (h'/R) , verglichen mit der exakten Lösung, Unterschiede in der Genauigkeit des GOCE-Gradiometers (mE.U.) aufweisen. Ab dem Entwicklungsgrad $i = 2$ der Reihenentwicklung von t' sind die Unterschiede im Ortsbereich praktisch unverändert. Es wird daher empfohlen, nicht nur (wie bei anderen Autoren üblich) Glieder erster Ordnung der Reihenentwicklung von t' zu verwenden, sondern auch den Entwicklungsgrad $i = 2$ für die Berechnung der Wurzel-/ Antiwurzeltiefe des Airy-Heiskanen-Modells zu berücksichtigen, wenn t' nicht exakt berechnet wird.

Der globale Vergleich der Berechnungen des Ortsbereichs und des Spektralbereichs anhand des topographischen Potentials verdeutlichte, dass die Berechnung mittels sphärisch harmonischer Analyse und Synthese für eine Auflösung von $30' \times 30'$ ca. um den Faktor 50 schneller ist als die Approximation der topographischen und isostatischen Massen durch die einzelnen Massenelemente. Die Differenzen der Gradvarianzen des in Kugelfunktionen entwickelten Tensors des Ortsbereichs und des Tensors des Spektralbereichs betragen in allen Marussi-Elementen ca. $10^{-22} - 10^{-24}$ (E.U.)². Dies entspricht einem RMS-Wert im Ortsbereich von ca. 10^{-3} E.U.. Für die zweite radiale Ableitung wurden die Differenzen der Gradvarianzen in Potentialwerte umgerechnet, synthetisiert und Geoidhöhen ermittelt. Diese Geoidhöhen weisen Extremwerte von ± 0.08 m auf; der RMS-Wert liegt bei ca. 0.02 m. Durch eine Erhöhung der Anzahl der Stützstellen auf $2 \cdot 2 \cdot 3$ oder $3 \cdot 3 \cdot 3$ Stützstellen bei der numerischen Berechnung mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) im Ortsbereich kann eine Genauigkeitssteigerung um ca. 2 - 3 Größenordnungen erreicht werden. Die Modellierung im Spektralbereich in Form einer sphärisch-harmonischen Analyse wird in globalen Anwendungen der Ortsbereichsmodellierung vorgezogen, da diese bei höherer Auflösung der Topographie weniger rechenintensiv ist. Die Modellierung durch einzelne Massenelemente findet in regionalen Berechnungen Anwendung.

Ein wesentliches Ergebnis dieser Arbeit ist die Erkenntnis, dass topographische und isostatische Effekte in der Satellitengradiometrie signifikant sind und die Reduktion dieser Effekte bei geeigneter Wahl des isostatischen Modells zu einer Glättung des Satellitensignals führt. Mittels Realdaten der im Frühjahr 2008 startenden GOCE-Mission kann verifiziert werden, ob die Aussagen hinsichtlich des ersten Kondensationsmodells von Helmert im Sinne einer Glättung für die Fortsetzung der Daten auf das Geoid bestätigt werden.

Bei der Modellierung der Massen wurde, bis auf die Modellierung des Erdkrustenmodells, die Dichte als konstant angenommen. Durch verbesserte Dichtemodelle im Globalen sowie Regionalen kann untersucht werden, welchen Einfluss diese Annahme hat bzw. ob die obigen Aussagen hinsichtlich eines geeigneten isostatischen Modells zur Glättung des Satellitensignals bestätigt werden.

Alle globalen Untersuchungen in dieser Arbeit wurden maximal bis zu einer Auflösung von $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ durchgeführt. Eine höhere Auflösung führt insbesondere bei der Modellierung im Ortsbereich zu sehr hohen Rechenzeiten. Möglichkeiten zur Reduktion der Laufzeiten ergeben sich einerseits durch eine Umstellung der verwendeten Software auf parallele Prozessierung, andererseits durch Kombination unterschiedlicher Darstellungen der Massenelemente (Tesseroid, Quader, Massenpunkt) in verschiedenen Auflösungsstufen in Abhängigkeit von der Entfernung zum Aufpunkt.

A Anhang

A.1 Elemente des Marussi-Tensors – direkte analytische Integration

Im Folgenden sind die zweiten partiellen Ableitungen zur Berechnung des Marussi-Tensors im Fall der geschlossenen Integration über das Intervall $[R, r']$ aufgelistet. Überprüft wurden die Ableitungen mittels der Software MAPLE.

$$\frac{\partial V^2(Q)}{\partial r^2} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} K_{V_{rr}} \cdot d\sigma,$$

$$K_{V_{rr}} = \frac{\partial^2 K_V}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \left\{ -\frac{r'^3}{2\bar{\ell}'} + \frac{R^3}{2\tilde{\ell}} + r'\bar{\ell}' - R\tilde{\ell} + \frac{r'^3 \cdot (r^2 - r'^2)}{2\bar{\ell}'^3} - \frac{R^3 \cdot (r^2 - R^2)}{2\tilde{\ell}^3} \right. \\ \left. + 3r \cdot \cos \psi \cdot (\bar{\ell}' - \tilde{\ell}) + r^2 \cdot (3\cos^2 \psi - 1) \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi} \right| \right\} \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial V^2(Q)}{\partial r \partial \varphi} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} K_{V_{r\varphi}} \cdot d\sigma,$$

$$K_{V_{r\varphi}} = \frac{\partial^2 K_V}{\partial r \partial \varphi} = \frac{\cos \psi|_{\varphi}}{r} \cdot \left\{ -\frac{rr'^4}{\bar{\ell}'^3} + \frac{rR^4}{\tilde{\ell}^3} - \frac{rr'^2}{\bar{\ell}'} + \frac{rR^2}{\tilde{\ell}} + 6r^2 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi} \right| \right. \\ \left. + r^3 \cdot (3\cos^2 \psi - 1) \cdot \left(\frac{R + \tilde{\ell}}{\tilde{\ell} \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi)} - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) \right. \\ \left. + 3r \cdot \left((\bar{\ell}' - \tilde{\ell}) - \frac{rr'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{rR}{\tilde{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \right\} \quad (A.2)$$

$$\frac{\partial V^2(Q)}{\partial r \partial \lambda} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} K_{V_{r\lambda}} \cdot d\sigma,$$

$$K_{V_{r\lambda}} = \frac{\partial^2 K_V}{\partial r \partial \lambda} = \frac{\cos \psi|_{\lambda}}{r} \cdot \left\{ -\frac{rr'^4}{\bar{\ell}'^3} + \frac{rR^4}{\tilde{\ell}^3} - \frac{rr'^2}{\bar{\ell}'} + \frac{rR^2}{\tilde{\ell}} + 3r \cdot \left((\bar{\ell}' - \tilde{\ell}) - \frac{rr'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{rR}{\tilde{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \right. \\ \left. + 6r^2 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi} \right| \right. \\ \left. + r^3 \cdot (3\cos^2 \psi - 1) \cdot \left(\frac{R + \tilde{\ell}}{\tilde{\ell} \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi)} - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) \right\} \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial V^2(Q)}{\partial \varphi^2} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} K_{V_{\varphi\varphi}} \cdot d\sigma,$$

$$\begin{aligned} K_{V_{\varphi\varphi}} = \frac{\partial^2 K_V}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} \cdot & \left\{ -\frac{r r'^2}{\bar{\ell}'^3} \cdot \left(r r' \cdot (\cos \psi|_{\varphi})^2 - \bar{\ell}'^2 \cdot \cos \psi \right) + \frac{r R^2}{\tilde{\ell}'^3} \cdot \left(r R \cdot (\cos \psi|_{\varphi})^2 - \tilde{\ell}'^2 \cdot \cos \psi \right) \right. \\ & + 3r^2 \cdot (\cos \psi|_{\varphi})^2 \cdot \left(2 \left(\frac{R}{\tilde{\ell}} - \frac{r'}{\bar{\ell}'} \right) + r \cdot \cos \psi \cdot \left(\frac{R^2}{\tilde{\ell}'^3} - \frac{r'^2}{\bar{\ell}'^3} \right) \right) \\ & - 3r \cdot \cos \psi \cdot \left((\bar{\ell}' - \tilde{\ell}) - \frac{r r'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{r R}{\tilde{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \\ & + 6r^2 \cdot \left((\cos \psi|_{\varphi})^2 - \cos^2 \psi \right) \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi} \right| \\ & + r^3 \cdot \cos \psi \cdot \left(12(\cos \psi|_{\varphi})^2 - (3 \cos^2 \psi - 1) \right) \cdot \left(\frac{R + \tilde{\ell}}{\tilde{\ell} \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi)} \right. \\ & \left. - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) - r^4 \cdot (\cos \psi|_{\varphi})^2 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \\ & \left(\frac{R \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi) - (R + \tilde{\ell}) \cdot \left(\frac{R}{\tilde{\ell}} \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi) + R + \tilde{\ell} \right)}{\tilde{\ell}^2 \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi)^2} \right. \\ & \left. - \frac{r' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi) - (r' + \bar{\ell}') \cdot \left(\frac{r'}{\bar{\ell}'} \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi) + r' + \bar{\ell}' \right)}{\bar{\ell}'^2 \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)^2} \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^2(Q)}{\partial \varphi \partial \lambda} &= G\rho \cdot \iint_{\sigma} \mathbf{K}_{V_{\varphi\lambda}} \cdot d\sigma, \\
\mathbf{K}_{V_{\varphi\lambda}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{K}_V}{\partial \varphi \partial \lambda} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ -\frac{r r'^2}{\bar{\ell}'^3} \cdot (\bar{\ell}'^2 \cdot \cos \psi|_{\varphi\lambda} + r r' \cdot \cos \psi|_{\varphi} \cos \psi|_{\lambda}) \right. \\
&\quad + \frac{r R^2}{\tilde{\ell}^3} \cdot (\tilde{\ell}^2 \cdot \cos \psi|_{\varphi\lambda} + r R \cdot \cos \psi|_{\varphi} \cos \psi|_{\lambda}) \\
&\quad + 3r \cdot \cos \psi|_{\varphi\lambda} \cdot \left((\bar{\ell}' - \tilde{\ell}) - \frac{r r'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{r R}{\tilde{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \\
&\quad + 6r^2 \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi} \right| \cdot (\cos \psi \cos \psi|_{\varphi\lambda} + \cos \psi|_{\varphi} \cos \psi|_{\lambda}) \\
&\quad + 3r \cdot \cos \psi|_{\varphi} \cos \psi|_{\lambda} \cdot \left(-\frac{2r r'}{\bar{\ell}'} - \frac{r^2 r'^2 \cos \psi \cos \psi|_{\lambda}}{\bar{\ell}'^3} + \frac{r^2 R^2 \cos \psi \cos \psi|_{\lambda}}{\tilde{\ell}^3} + \frac{2r R}{\tilde{\ell}} \right) \\
&\quad + r^3 \left((3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \cos \psi|_{\varphi\lambda} + 12 \cos \psi \cos \psi|_{\varphi} \cos \psi|_{\lambda} \right) \cdot \left(\frac{R + \tilde{\ell}}{\tilde{\ell} \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) - r^4 (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \cos \psi|_{\varphi} \cdot \cos \psi|_{\lambda} \cdot \\
&\quad \left(\frac{R \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi) - (R + \tilde{\ell}) \cdot \left(\frac{R}{\tilde{\ell}} \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi) + R + \tilde{\ell} \right)}{\tilde{\ell}^2 \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{r' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi) - (r' + \bar{\ell}') \cdot \left(\frac{r'}{\bar{\ell}'} \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi) + r' + \bar{\ell}' \right)}{\bar{\ell}'^2 \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)^2} \right) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\cos \psi|_{\varphi\lambda} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi' \cdot \sin(\lambda - \lambda') \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial V^2(Q)}{\partial \lambda^2} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{K}_{v_{\lambda\lambda}} \cdot d\sigma,$$

$$\bar{K}_{v_{\lambda\lambda}} = \frac{\partial^2 \bar{K}_V}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ -\frac{r r'^2}{\tilde{\ell}'^3} \cdot \left(r r' \cdot (\cos \psi|_{\lambda})^2 + \bar{\ell}'^2 \cdot \cos \psi|_{\lambda\lambda} \right) \right.$$

$$+ \frac{r R^2}{\tilde{\ell}'^3} \cdot \left(r R \cdot (\cos \psi|_{\lambda})^2 + \tilde{\ell}^2 \cdot \cos \psi|_{\lambda\lambda} \right)$$

$$+ 3r^2 \cdot (\cos \psi|_{\lambda})^2 \cdot \left(2 \left(\frac{R}{\tilde{\ell}} - \frac{r'}{\tilde{\ell}'} \right) + r \cdot \cos \psi \cdot \left(\frac{R^2}{\tilde{\ell}^3} - \frac{r'^2}{\tilde{\ell}'^3} \right) \right)$$

$$+ 3r \cdot \cos \psi|_{\lambda\lambda} \cdot \left((\tilde{\ell}' - \tilde{\ell}) - \frac{r r'}{\tilde{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{r R}{\tilde{\ell}} \cdot \cos \psi \right)$$

$$+ 6r^2 \cdot \left((\cos \psi|_{\lambda})^2 + \cos \psi|_{\lambda\lambda} \cdot \cos \psi \right) \cdot \ln \left| \frac{\tilde{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi} \right|$$

$$+ r^3 \cdot \left(12 \cos \psi \cdot (\cos \psi|_{\lambda})^2 + \cos \psi|_{\lambda\lambda} \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \right) \cdot \left(\frac{R + \tilde{\ell}}{\tilde{\ell} \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi)} \right.$$

$$\left. - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\tilde{\ell}' \cdot (\tilde{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) - r^4 \cdot (\cos \psi|_{\lambda})^2 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot$$

$$\left(\frac{R \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi) - (R + \tilde{\ell}) \cdot \left(\frac{R}{\tilde{\ell}} \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi) + R + \tilde{\ell} \right)}{\tilde{\ell}^2 \cdot (\tilde{\ell} + R - r \cdot \cos \psi)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{r' \cdot (\tilde{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi) - (r' + \bar{\ell}') \cdot \left(\frac{r'}{\tilde{\ell}'} \cdot (\tilde{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi) + r' + \bar{\ell}' \right)}{\tilde{\ell}'^2 \cdot (\tilde{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)^2} \right) \left. \right\} \quad (\text{A.7})$$

$$\cos \psi|_{\lambda\lambda} = -\cos \varphi \cdot \cos \varphi' \cdot \cos(\lambda - \lambda') \quad (\text{A.8})$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen zur Berechnung des Marussi-Tensors im Fall der Aufteilung des Integrationsintervalls $[R, r']$ in $[R, r_p]$, $[r_p, r']$ gilt – nach Prüfung mit der Software MAPLE:

$$\frac{\partial V^2(Q)}{\partial r^2} = \frac{8\pi G\rho}{3r^3} \cdot (r_p^3 - R^3) + G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{K}_{v_{rr}} \cdot d\sigma,$$

$$\bar{K}_{v_{rr}} = \frac{\partial^2 \bar{K}_V}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \left\{ -\frac{r'^3}{2\tilde{\ell}'} + \frac{r_p^3}{2\tilde{\ell}} + r' \tilde{\ell}' - r_p \bar{\ell} + \frac{r'^3 \cdot (r^2 - r'^2)}{2\tilde{\ell}'^3} - \frac{r_p^3 \cdot (r^2 - r_p^2)}{2\tilde{\ell}^3} \right.$$

$$\left. + 3r \cdot \cos \psi \cdot (\tilde{\ell}' - \bar{\ell}) + r^2 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \ln \left| \frac{\tilde{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\tilde{\ell} + r_p - r \cdot \cos \psi} \right| \right\} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial V^2(Q)}{\partial r \partial \phi} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{K}_{V_{r\phi}} \cdot d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{V_{r\phi}} = \frac{\partial^2 \bar{K}_V}{\partial r \partial \phi} = \frac{\cos \psi|_{\phi}}{r} \cdot \left\{ -\frac{rr'^4}{\bar{\ell}'^3} + \frac{rr_P^4}{\bar{\ell}^3} - \frac{rr'^2}{\bar{\ell}'} + \frac{rr_P^2}{\bar{\ell}} + 3r \cdot \left((\bar{\ell}' - \bar{\ell}) - \frac{rr'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{rr_P}{\bar{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \right. \\ \left. + 6r^2 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\bar{\ell} + r_P - r \cdot \cos \psi} \right| \right. \\ \left. + r^3 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \left(\frac{r_P + \bar{\ell}}{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} + r_P - r \cdot \cos \psi)} - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (A.10)$$

$$\frac{\partial V^2(Q)}{\partial r \partial \lambda} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{K}_{V_{r\lambda}} \cdot d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{V_{r\lambda}} = \frac{\partial^2 \bar{K}_V}{\partial r \partial \lambda} = \frac{\cos \psi|_{\lambda}}{r} \cdot \left\{ -\frac{rr'^4}{\bar{\ell}'^3} + \frac{rr_P^4}{\bar{\ell}^3} - \frac{rr'^2}{\bar{\ell}'} + \frac{rr_P^2}{\bar{\ell}} + 3r \cdot \left((\bar{\ell}' - \bar{\ell}) - \frac{rr'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{rr_P}{\bar{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \right. \\ \left. + 6r^2 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\bar{\ell} + r_P - r \cdot \cos \psi} \right| \right. \\ \left. + r^3 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \left(\frac{r_P + \bar{\ell}}{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} + r_P - r \cdot \cos \psi)} - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (A.11)$$

$$\frac{\partial V^2(Q)}{\partial \phi^2} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{K}_{V_{\phi\phi}} \cdot d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{V_{\phi\phi}} = \frac{\partial^2 \bar{K}_V}{\partial \phi^2} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ -\frac{rr'^2}{\bar{\ell}'^3} \cdot \left(rr' \cdot (\cos \psi|_{\phi})^2 - \bar{\ell}'^2 \cdot \cos \psi \right) + \frac{rr_P^2}{\bar{\ell}^3} \cdot \left(rr_P \cdot (\cos \psi|_{\phi})^2 - \bar{\ell}^2 \cdot \cos \psi \right) \right. \\ \left. + 3r^2 \cdot (\cos \psi|_{\phi})^2 \cdot \left(2 \left(\frac{r_P}{\bar{\ell}} - \frac{r'}{\bar{\ell}'} \right) + r \cdot \cos \psi \cdot \left(\frac{r_P^2}{\bar{\ell}^3} - \frac{r'^2}{\bar{\ell}'^3} \right) \right) \right. \\ \left. - 3r \cdot \cos \psi \cdot \left((\bar{\ell}' - \bar{\ell}) - \frac{rr'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{rr_P}{\bar{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \right. \\ \left. + 6r^2 \cdot \left((\cos \psi|_{\phi})^2 - \cos^2 \psi \right) \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\bar{\ell} + r_P - r \cdot \cos \psi} \right| \right. \\ \left. + r^3 \cdot \cos \psi \cdot \left(12 (\cos \psi|_{\phi})^2 - (3 \cos^2 \psi - 1) \right) \cdot \left(\frac{r_P + \bar{\ell}}{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} + r_P - r \cdot \cos \psi)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) - r^4 \cdot (\cos \psi|_{\phi})^2 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \right. \\ \left. \left(\frac{r_P \cdot (\bar{\ell} + r_P - r \cdot \cos \psi) - (r_P + \bar{\ell}) \cdot \left(\frac{r_P}{\bar{\ell}} \cdot (\bar{\ell} + r_P - r \cdot \cos \psi) + r_P + \bar{\ell} \right)}{\bar{\ell}^2 \cdot (\bar{\ell} + r_P - r \cdot \cos \psi)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi) - (r' + \bar{\ell}') \cdot \left(\frac{r'}{\bar{\ell}'} \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi) + r' + \bar{\ell}' \right)}{\bar{\ell}'^2 \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (A.12)$$

$$\frac{\partial V^2(Q)}{\partial \varphi \partial \lambda} = G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{\mathbf{K}}_{V_{\varphi\lambda}} \cdot d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{V_{\varphi\lambda}} = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{K}}_V}{\partial \varphi \partial \lambda} = & \frac{1}{2} \cdot \left\{ -\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'^2}{\bar{\ell}'^3} \cdot \left(\bar{\ell}'^2 \cdot \cos \psi|_{\varphi\lambda} + \mathbf{r}\mathbf{r}' \cdot \cos \psi|_{\varphi} \cos \psi|_{\lambda} \right) \right. \\ & + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_P^2}{\bar{\ell}^3} \cdot \left(\bar{\ell}^2 \cdot \cos \psi|_{\varphi\lambda} + \mathbf{r}\mathbf{r}_P \cdot \cos \psi|_{\varphi} \cos \psi|_{\lambda} \right) \\ & + 3\mathbf{r} \cdot \cos \psi|_{\varphi\lambda} \cdot \left((\bar{\ell}' - \bar{\ell}) - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_P}{\bar{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \\ & + 3\mathbf{r} \cdot \cos \psi|_{\varphi} \cdot \cos \psi|_{\lambda} \cdot \left(-\frac{2\mathbf{r}\mathbf{r}'}{\bar{\ell}'} + \frac{2\mathbf{r}\mathbf{r}_P}{\bar{\ell}} - \frac{\mathbf{r}^2 \mathbf{r}'^2 \cdot \cos \psi \cdot \cos \psi|_{\lambda}}{\bar{\ell}'^3} \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{r}^2 \mathbf{r}_P^2 \cdot \cos \psi \cdot \cos \psi|_{\lambda}}{\bar{\ell}^3} \right) \\ & + 6\mathbf{r}^2 \cdot \ell \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + \mathbf{r}' - \mathbf{r} \cdot \cos \psi}{\bar{\ell} + \mathbf{r}_P - \mathbf{r} \cdot \cos \psi} \right| \cdot \left(\cos \psi \cdot \cos \psi|_{\varphi\lambda} + \cos \psi|_{\varphi} \cdot \cos \psi|_{\lambda} \right) \\ & + \mathbf{r}^3 \cdot \left((3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \cos \psi|_{\varphi\lambda} + 12 \cos \psi \cdot \cos \psi|_{\varphi} \cdot \cos \psi|_{\lambda} \right) \\ & \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_P + \bar{\ell}}{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} + \mathbf{r}_P - \mathbf{r} \cdot \cos \psi)} - \frac{\mathbf{r}' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + \mathbf{r}' - \mathbf{r} \cdot \cos \psi)} \right) \\ & - \mathbf{r}^4 (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \cos \psi|_{\varphi} \cdot \cos \psi|_{\lambda} \cdot \\ & \left(\frac{\mathbf{r}_P \cdot (\bar{\ell} + \mathbf{r}_P - \mathbf{r} \cdot \cos \psi) - (\mathbf{r}_P + \bar{\ell}) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_P}{\bar{\ell}} \cdot (\bar{\ell} + \mathbf{r}_P - \mathbf{r} \cdot \cos \psi) + \mathbf{r}_P + \bar{\ell} \right)}{\bar{\ell}^2 \cdot (\bar{\ell} + \mathbf{r}_P - \mathbf{r} \cdot \cos \psi)^2} \right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{r}' \cdot (\bar{\ell}' + \mathbf{r}' - \mathbf{r} \cdot \cos \psi) - (\mathbf{r}' + \bar{\ell}') \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{\bar{\ell}'} \cdot (\bar{\ell}' + \mathbf{r}' - \mathbf{r} \cdot \cos \psi) + \mathbf{r}' + \bar{\ell}' \right)}{\bar{\ell}'^2 \cdot (\bar{\ell}' + \mathbf{r}' - \mathbf{r} \cdot \cos \psi)^2} \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^2(Q)}{\partial \lambda^2} &= G\rho \cdot \iint_{\sigma} \bar{\mathbf{K}}_{v_{\lambda\lambda}} \cdot d\sigma, \\
\bar{\mathbf{K}}_{v_{\lambda\lambda}} &= \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{K}}_v}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ -\frac{r r'^2}{\bar{\ell}'^3} \cdot \left(r r' \cdot (\cos \psi|_{\lambda})^2 + \bar{\ell}'^2 \cdot \cos \psi|_{\lambda\lambda} \right) + \frac{r r_p^2}{\bar{\ell}^3} \cdot \left(r r_p \cdot (\cos \psi|_{\lambda})^2 + \bar{\ell}^2 \cdot \cos \psi|_{\lambda\lambda} \right) \right. \\
&\quad + 3r^2 \cdot (\cos \psi|_{\lambda})^2 \cdot \left(2 \left(\frac{r_p}{\bar{\ell}} - \frac{r'}{\bar{\ell}'} \right) + r \cos \psi \cdot \left(\frac{r_p^2}{\bar{\ell}^3} - \frac{r'^2}{\bar{\ell}'^3} \right) \right) \\
&\quad + 3r \cdot \cos \psi|_{\lambda\lambda} \cdot \left((\bar{\ell}' - \bar{\ell}) - \frac{r r'}{\bar{\ell}'} \cdot \cos \psi + \frac{r r_p}{\bar{\ell}} \cdot \cos \psi \right) \\
&\quad + 6r^2 \cdot \left((\cos \psi|_{\lambda})^2 + \cos \psi|_{\lambda\lambda} \cdot \cos \psi \right) \cdot \ln \left| \frac{\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi}{\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos \psi} \right| \\
&\quad + r^3 \cdot \left(12 \cos \psi \cdot (\cos \psi|_{\lambda})^2 + \cos \psi|_{\lambda\lambda} \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \right) \cdot \left(\frac{r_p + \bar{\ell}}{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos \psi)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{r' + \bar{\ell}'}{\bar{\ell}' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)} \right) - r^4 (\cos \psi|_{\lambda})^2 \cdot (3 \cos^2 \psi - 1) \cdot \\
&\quad \left(\frac{r_p \cdot (\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos \psi) - (r_p + \bar{\ell}) \cdot \left(\frac{r_p}{\bar{\ell}} \cdot (\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos \psi) + r_p + \bar{\ell} \right)}{\bar{\ell}^2 \cdot (\bar{\ell} + r_p - r \cdot \cos \psi)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{r' \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi) - (r' + \bar{\ell}') \cdot \left(\frac{r'}{\bar{\ell}'} \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi) + r' + \bar{\ell}' \right)}{\bar{\ell}'^2 \cdot (\bar{\ell}' + r' - r \cdot \cos \psi)^2} \right) \left. \right\} \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

A.2 Numerische Integration

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung gilt für die Lösung eines bestimmten Integrals

$$I(f; a, b) = \int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a), \quad (\text{A.15})$$

wobei $F(a)$ und $F(b)$ die Auswertungen der Stammfunktion der Funktion f an den Stellen a und b sind. Oftmals ist man auf eine näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals angewiesen. Dies ist der Fall, wenn die Stammfunktion nicht geschlossen darstellbar oder ihre Auswertung mit großem numerischen Aufwand verbunden ist. Ebenso kann die Funktion f nur an diskreten Stellen im Intervall $[a, b]$ bekannt sein. Zur genäherten Berechnung eines bestimmten Integrals werden im Folgenden zwei Methoden nach Schwarz (1993) beschrieben, denen die Approximation des Integranden $f(x)$ durch Interpolationspolynome zugrunde liegt. Man kann sich die interpolierenden Stützstellen äquidistant vorgeben (*Newton-Cotes Quadraturformeln*) oder diese so geeignet wählen, dass ein maximaler Genauigkeitsgrad erreicht wird, was die *Gaußschen Quadraturformeln* liefert.

Newton-Cotes Quadraturformeln

Das Integral (A.15) für $a = -1$, $b = 1$ lässt sich durch folgende Summe approximieren

$$\tilde{I}(f; -1, 1) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot f(x_i), \quad (\text{A.16})$$

wobei die Punkte x_i als „Knoten“ und die Koeffizienten w_i als „Gewichte“ bezeichnet werden. Die Festlegung des Integrationsintervalls auf $[-1, 1]$ stellt keine Einschränkung dar. Denn jedes Integral über das

endliche Intervall $[a, b]$ lässt sich mittels der folgenden linearen Transformation auf ein Integral über das normierte Intervall abbilden:

$$\tilde{I}(f; a, b) = \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{i=0}^n w_i \cdot f\left(\frac{b-a}{2} \cdot x_i + \frac{a+b}{2}\right). \quad (\text{A.17})$$

Für die reelle, im Intervall $[-1, 1]$ stetige Funktion f seien $(n+1)$ paarweise voneinander verschiedene Knoten x_0, \dots, x_n mit $-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$ gegeben. Durch diese $(n+1)$ Knoten und $(n+1)$ Stützwerte $f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ existiert ein Interpolationspolynom p_n vom Grad kleiner oder gleich n . Für jedes Polynom $p_n(k) \in P_n \left\{ p_n(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{c}_i \cdot x^i; \tilde{c}_i \in \mathbb{R} \right\}$ existieren Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$, so dass sich p_n darstellen lässt in der Form

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \cdot L_i(x) \quad \text{mit} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_k - x_i}, \quad L_i(x_k) = \delta_{ik}. \quad (\text{A.18})$$

Definition 1:

Die Quadraturformel (A.16) besitzt den Exaktheitsgrad n , falls alle Polynome bis zum Grad n exakt integriert werden, und n die größtmögliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist.

Dabei heißt eine Quadraturformel exakt, wenn für den Integrationsfehler E gilt:

$$E(p_n; -1, 1) := I(p_n; -1, 1) - \tilde{I}(p_n; -1, 1) = 0 \quad \forall p_n \in P_n. \quad (\text{A.19})$$

Diese Betrachtungen führen zu folgendem Satz:

Satz 1 (vgl. Schwarz 1993):

Zu beliebig vorgegebenen $(n+1)$ paarweise verschiedenen Knoten x_i , $i = 0, \dots, n$ mit $-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$ existiert eine eindeutig bestimmte interpolatorische Quadraturformel (A.16) mit den Gewichten

$$w_i = \int_{-1}^1 L_i(x) dx \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, n \quad (\text{A.20})$$

mit Exaktheitsgrad höchstens gleich n .

Gaußsche Quadraturformeln

Bei den bisher betrachteten Quadraturformeln ist man von vorgegebenen Knoten x_k , $k = 0, \dots, n$ ausgegangen und hat die zugehörigen Gewichte w_k bestimmt. Der Exaktheitsgrad ist folglich n . Im Folgenden werden die Knoten x_k und die Gewichte w_k so gewählt, dass die resultierende Quadraturformel maximalen Exaktheitsgrad besitzt.

Satz 2 (vgl. Schwarz 1993):

Der Genauigkeitsgrad einer Quadraturformel mit $(n+1)$ Knoten x_k und $(n+1)$ Gewichten w_k ist höchstens $2n+1$.

Satz 3 (vgl. Schwarz 1993):

Es existiert genau eine Quadraturformel (A.16) mit $(n+1)$ Knoten x_i , welche den Exaktheitsgrad $2n+1$ besitzt. Die Knoten x_i sind die Nullstellen des $(n+1)$ -ten Legendreschen Polynoms $P_{n+1}(x)$, wobei für die Legendreschen Polynome nach Bronstein (1997) gilt:

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \cdot \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m, \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (\text{A.21})$$

Die Gewichte ergeben sich zu

$$w_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left(\frac{x - x_k}{x_k - x_i} \right)^2 \cdot dx > 0. \quad (\text{A.22})$$

Die Beweise der *Sätze 1 bis 3* sind in Schwarz (1993) beschrieben. Die Stützstellen und die zugehörigen Gewichte sind für niedrige Polynomgrade bis 5 u.a. in Engeln-Müllges, Reutter (1987) oder Faires, Burden (2003) und bis Polynomgrad 16 in Stroud (1974) tabelliert. Tabelle A.1 zeigt die Stützstellen x_i und Gewichte w_i der Gauß-Legendre-Quadraturformeln bis Exaktheitsgrad 11.

Tabelle A.1 Werte der Stützstellen und Gewichte der Gaußschen Quadraturformeln

n	$x_i, i = 0 \dots n$	$w_i, i = 0 \dots n$
0	0.0000000000 0000000000	2.0000000000 0000000000
1	0.5773502691 8962576451 -0.5773502691 8962576451	1.0000000000 0000000000 1.0000000000 0000000000
2	0.7745966692 4148337704 0.0000000000 0000000000 -0.7745966692 4148337704	0.5555555555 5555555556 0.8888888888 8888888889 0.5555555555 5555555556
3	0.8611363115 9405257523 0.3399810435 8485626480 -0.3399810435 8485626480 -0.8611363115 9405257523	0.3478548451 3745385737 0.6521451548 6254614263 0.6521451548 6254614263 0.3478548451 3745385737
4	0.9061798459 3866399280 0.5384693101 0568309104 0.0000000000 0000000000 -0.5384693101 0568309104 -0.9061798459 3866399280	0.2369268850 5618908751 0.4786286704 9936646804 0.5688888888 8888888889 0.4786286704 9936646804 0.2369268850 5618908751
5	0.9324695142 0315202781 0.6612093864 6626451366 0.2386191860 8319690863 -0.2386191860 8319690863 -0.6612093864 6626451366 -0.9324695142 0315202781	0.1713244923 7917034504 0.3607615730 4813860757 0.4679139345 7269104739 0.4679139345 7269104739 0.3607615730 4813860757 0.1713244923 7917034504

Gauß-Legendre-Kubatur zweidimensionaler Integrale (2D)

Im Zweidimensionalen ist das Einheitsquadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ der am weitesten verbreitete Einheitsbereich, auf den zweidimensionale Integrationsbereiche durch affine Transformation zurückgeführt werden können. Ein häufig angewendetes Verfahren für die numerische Integration über ein solches Standardquadrat ist die Betrachtung des Integrals als zweidimensional iteriertes Integral und die Anwendung einer Quadraturformel für jede Integrationsvariable (siehe Burden und Faires 1993; Klees 1992; Stroud 1974). Die bei dieser Art der Berechnung entstehenden Formeln bezeichnet man als „(kartesische) Produkt-Formeln“. Ausgehend von dem Doppelintegral über das Flächenelement F

$$\iint_F f(x, y) \cdot dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \cdot dy \right) \cdot dx, \text{ wobei } F = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (\text{A.23})$$

lässt sich die Lösung durch eine Transformation je Koordinatenrichtung gemäß (A.17) aus dem Einheitsquadrat erhalten, für welches folgende Approximation gilt:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \cdot dx dy = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_i \cdot w_j \cdot f(x_i, y_j). \quad (\text{A.24})$$

In der Abbildung A.1 ist die Lage der Stützstellen für $n = 0$ bis 2 (vgl. *Definition 1*) dargestellt:

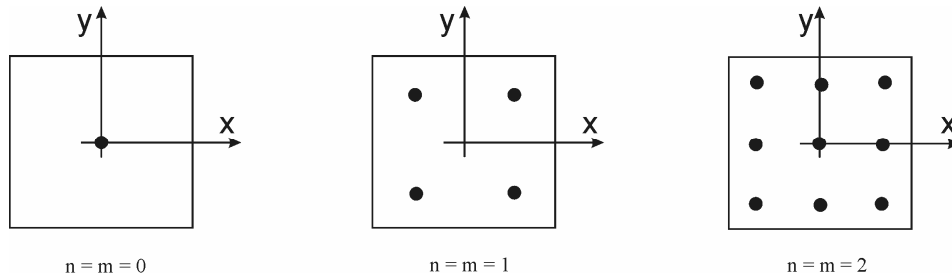


Abbildung A.1 Auswertung eines Doppelintegrals nach Gauß-Legendre

Wie aus der Grafik zu entnehmen ist, erhält man $(n+1) \cdot (m+1)$ Stützstellen je Exaktheitsgrad $(2n+1)$, $(2m+1)$ in der entsprechenden Koordinatenrichtung. Für höhere Grade n , m steigt die Anzahl der Funktionsauswertungen, was Auswirkungen auf die Rechenzeit hat, insbesondere wenn die Integralkerne so kompliziert sind wie in Kapitel 3.2.1.3 beschrieben. Das Flächenintegral $\iint_{\sigma} f(\varphi', \lambda') \cdot d\sigma$ wird wie folgt dargestellt

$$\int_{\varphi'_1}^{\varphi'_2} \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} f(\varphi', \lambda') \cdot \cos \varphi' \cdot d\varphi' \cdot d\lambda' = \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \left(\int_{\varphi'_1}^{\varphi'_2} f(\varphi', \lambda') \cdot \cos \varphi' \cdot d\varphi' \right) \cdot d\lambda' . \tag{A.25}$$

Gauß-Legendre-Kubatur dreidimensionaler Integrale (3D)

Analog zur Lösung des Flächenintegrals lässt sich das Volumenintegral

$$\iiint_V f(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z) \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx , \text{ mit} \tag{A.26}$$

$$V = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$

durch eine Transformation pro Koordinatenrichtung gemäß (A.17) approximieren. Es gilt die folgende Summationsformel:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^p w_i \cdot w_j \cdot w_k \cdot f(x_i, y_j, z_k) . \tag{A.27}$$

Ein Algorithmus ist in Burden und Faires (1993) oder Ardalan und Safari (2004) zu finden. Die Lage der Stützstellen im Dreidimensionalen ist Abbildung A.2 zu entnehmen; die Anzahl steigt hier pro Exaktheitsgrad mit $n \cdot m \cdot p$.

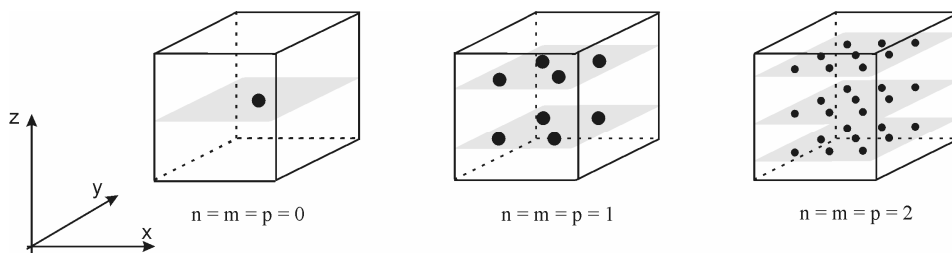


Abbildung A.2 Auswertung eines Dreifachintegrals nach Gauß-Legendre

Obwohl die Anzahl der Knoten – und die Anzahl der Funktionsauswertungen – für die numerische Berechnung von Dreifachintegralen i. Allg. größer ist, wird in der hier vorliegenden Anwendung der Aufwand signifikant kleiner als im 2D Fall, da die Integralkerne einfacher sind. Dies gilt für das Potential eines Tesseroids und seine Ableitungen. Das dreidimensionale Massenintegral und dessen Ableitungen (siehe Kapitel 3.2.1.1) haben folgende Form:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(\xi, \varphi', \lambda') \cdot d\Omega &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\varphi'_1}^{\varphi'_2} \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} f(\xi, \varphi', \lambda') \cdot \xi^2 \cdot \cos \varphi' \cdot d\lambda' \cdot d\varphi' \cdot d\xi \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \left(\int_{\varphi'_1}^{\varphi'_2} f(\xi, \varphi', \lambda') \cdot \cos \varphi' \cdot d\varphi' \right) \cdot d\lambda' \right) \cdot \xi^2 \cdot d\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

A.3 Taylorreihenentwicklung Tesseroid – partielle Ableitungen

Für die Berechnung des Potentials eines Tesseroids und seiner ersten und zweiten Ableitungen mittels der Taylorreihenentwicklung (siehe Kapitel 3.2.1.2) werden die partiellen Ableitungen $I|_0$, $\partial^2 I / \partial \xi^2|_0$, $\partial^2 I / \partial \varphi'^2|_0$, $\partial^2 I / \partial \lambda'^2|_0$ für die jeweiligen Integralkerne benötigt. Die Ableitungen wurden mittels der Software MAPLE überprüft.

Für die partiellen Ableitungen von $V(Q)$ gilt ($\Delta\lambda_0 = \lambda - \lambda_0$):

$$I|_0 = \frac{r_0^2 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0} \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \Big|_0 = \frac{r^2 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 2\ell_0^2 - 3r_0^2 \cdot \sin^2 \psi_0 \right\} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \Big|_0 &= \frac{r_0^2}{\ell_0^5} \cdot \left\{ -\cos \varphi_0 \cdot (r^2 + r_0^2) \cdot (r^2 + r_0^2 - rr_0 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0) \right. \\ &\quad \left. + r^2 r_0^2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot (\sin^2 \varphi \cdot (3 - \sin^2 \varphi_0) - \cos^2 \varphi \cdot (2 - \sin^2 \varphi_0) \cdot \cos^2 \Delta\lambda_0) \right. \\ &\quad \left. + rr_0 \cdot \cos \varphi \cdot (3 - \sin^2 \varphi_0) \cdot (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0) \cdot \cos \Delta\lambda_0 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \lambda'^2} \Big|_0 = -\frac{rr_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0}{\ell_0^5} \cdot \left\{ \ell_0^2 \cdot \cos \Delta\lambda_0 - 3rr_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta\lambda_0 \right\} \quad (\text{A.32})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial V(Q)}{\partial r}$ gilt:

$$I|_0 = -\frac{r_0^2 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^3} \cdot \left\{ r - r_0 \cdot \cos \psi_0 \right\} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \Big|_0 &= -\frac{r \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^3} \cdot \left\{ 2 - \frac{3r_0}{\ell_0^2} \cdot (5r_0 - (2r + 3r_0 \cdot \cos \psi_0) \cdot \cos \psi_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{15r_0^3}{\ell_0^4} \cdot \sin^2 \psi_0 \cdot (r_0 - r \cdot \cos \psi_0) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \right|_0 &= -\frac{r_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \{1 - 2 \sin^2 \varphi_0\} \\
&\quad - \frac{r_0^2}{\ell_0^5} \cdot \left\{ r_0 \cdot \sin \varphi \cdot (-r r_0 \cdot K_{\varphi'} + \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot (2r^2 + 4r_0^2 - 3r r_0 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0)) \right. \\
&\quad \quad + r_0^2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \Delta \lambda_0 \cdot (1 - 2 \sin^2 \varphi_0) \cdot (r_0 + r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0) \\
&\quad \quad - r \cdot \cos \varphi_0 \cdot (r^2 + r_0^2) \\
&\quad \quad \left. + r r_0^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0 \cdot (3 \sin \varphi \cdot \cos \varphi_0 - 4 \cos \varphi \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0) \right\} \\
&\quad - \frac{5r r_0^3}{\ell_0^7} \cdot K_{\varphi'} \cdot \left\{ -r \cdot \sin \varphi_0 \cdot (r^2 + r_0^2) \right. \\
&\quad \quad + r_0^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0 \cdot (r_0 + r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0) \\
&\quad \quad \left. + r_0 \cdot \sin \varphi \cdot (2r^2 - r_0^2 - r r_0 \cdot \cos \psi_0 + \sin^2 \varphi_0 \cdot (r^2 + 2r_0^2 - r r_0 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0)) \right\}
\end{aligned} \tag{A.35}$$

$$K_{\varphi'} = (\cos \psi|_{\varphi'})_0 = \sin \varphi \cdot \cos \varphi_0 - \cos \varphi \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_0 &= -\frac{r_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0}{\ell_0^3} \cdot \\
&\quad \left\{ -\frac{3r}{\ell_0^2} \cdot (2r_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 + \cos \Delta \lambda_0 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0)) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{15r^2 r_0}{\ell_0^4} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \cdot (r - r_0 \cos \psi_0) + \cos \Delta \lambda_0 \right\}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial V(Q)}{\partial \varphi}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{r r_0^3 \cos \varphi_0 \cdot K_{\varphi}}{\ell_0^3}, K_{\varphi} = (\cos \psi|_{\varphi})_0 = \cos \varphi \cdot \sin \varphi_0 - \sin \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0 \tag{A.37}$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \right|_0 = \frac{3r r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot K_{\varphi}}{\ell_0^3} \cdot \left\{ 2 - \frac{r_0}{\ell_0^2} \cdot (7r_0 - 6r \cdot \cos \psi_0) + \frac{5r_0^2}{4\ell_0^4} \cdot (2r_0 - 2r \cdot \cos \psi_0)^2 \right\} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \right|_0 &= -\frac{r r_0^3}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3r r_0}{\ell_0^2} \cdot (\cos \varphi_0 \cdot (\cos \psi_0 \cdot K_{\varphi} - 2K_{\varphi'} \cdot K_{\varphi\varphi'}) + 2 \sin \varphi_0 \cdot K_{\varphi} \cdot K_{\varphi'}) \right. \\
&\quad \left. + 2 \cdot (\cos \varphi_0 \cdot K_{\varphi} + \sin \varphi_0 \cdot K_{\varphi\varphi'}) - \frac{15r^2 r_0^2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot K_{\varphi} \cdot K_{\varphi'}^2}{\ell_0^4} \right\}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

$$K_{\varphi\varphi'} = (\cos \psi|_{\varphi\varphi'})_0 = \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 + \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_0 &= \frac{r r_0^3 \cdot \cos^2 \varphi_0}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \sin \varphi \cdot \cos \Delta \lambda_0 \right. \\
&\quad - \frac{3r r_0 \cdot \cos \varphi}{\ell_0^2} \cdot (2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 + \cos \Delta \lambda_0 \cdot K_{\varphi}) \\
&\quad \left. + \frac{15r^2 r_0^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \cdot K_{\varphi}}{\ell_0^4} \right\}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial V(Q)}{\partial \lambda}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{r r_0^3 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \Big|_0 = \frac{3 r r_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \left\{ 2 - \frac{r_0}{\ell_0^2} \cdot (7 r_0 - 6 r \cdot \cos \psi_0) + \frac{5 r_0^2}{4 \ell_0^4} \cdot (2 r_0 - 2 r \cdot \cos \psi_0)^2 \right\} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \Big|_0 &= -\frac{r r_0^3}{\ell_0^3} \cdot \left\{ 2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos 2 \varphi_0 \cdot \sin \Delta \lambda_0 - \frac{15 r^2 r_0^2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin \Delta \lambda_0 \cdot K_{\varphi'}^2}{\ell_0^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 r r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^2} \cdot (4 \sin \varphi_0 \cdot K_{\varphi'} + \cos \varphi_0 \cdot \cos \psi) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \Big|_0 &= -\frac{r r_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \left\{ 1 + \frac{9 r r_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0}{\ell_0^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{15 r^2 r_0^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0}{\ell_0^4} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial r^2}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{r_0^2 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 2 r^2 - r_0^2 - 4 r r_0 \cdot \cos \psi_0 + 3 r_0^2 \cdot \cos^2 \psi_0 \right\} \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \Big|_0 &= \frac{\cos \varphi_0}{\ell_0^9} \cdot \left\{ 4 r^6 - 2 r_0^6 + 45 r^2 r_0^4 - 54 r^4 r_0^2 + r r_0^3 \cdot (84 r^2 - 36 r_0^2) \cdot \cos \psi_0 \right. \\ &\quad \left. + 3 r_0^2 \cdot (2 r_0^4 + 6 r^4 - 30 r^2 r_0^2) \cdot \cos^2 \psi_0 + r r_0^3 \cdot (36 r_0^2 - 20 r^2) \cdot \cos^3 \psi_0 \right. \\ &\quad \left. + 9 r^2 r_0^4 \cdot \cos^4 \psi_0 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \Big|_0 &= \frac{r_0^2}{\ell_0^5} \cdot \left\{ \cos \varphi_0 \cdot \left(- (2 r^2 - r_0^2) + 8 r r_0 \cdot \cos \psi_0 - 9 r_0^2 \cdot \cos^2 \psi_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 K_{\varphi'} \cdot \left(4 r r_0 \cdot \sin \varphi_0 - (6 r_0^2 \cdot \sin \varphi_0) \cdot \cos \psi_0 + 3 r_0^2 \cdot K_{\varphi'} \cdot \cos \varphi_0 \right) \right\} \\ &\quad + \frac{5 r r_0^3}{\ell_0^7} \cdot \left\{ \cos \varphi_0 \cdot \left(- (2 r^2 - r_0^2) \cdot \cos \psi_0 + 4 r r_0 \cdot \cos^2 \psi_0 - 3 r_0^2 \cdot \cos^3 \psi_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + K_{\varphi'} \cdot \left(\sin \varphi_0 \cdot \left(- (2 r^2 - r_0^2) + 4 r r_0 \cdot \cos \psi_0 - 3 r_0^2 \cdot \cos^2 \psi_0 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 r_0 \cdot K_{\varphi'} \cos \varphi_0 (2 r - 3 r_0 \cos \psi_0) \right) \right\} \\ &\quad + \frac{5 r_0^2 \cdot K_{\varphi'}}{\ell_0^7} \cdot \left\{ r r_0 \cdot \sin \varphi_0 \cdot \left(- (2 r^2 - r_0^2) + 4 r r_0 \cdot \cos \psi_0 - 3 r_0^2 \cdot \cos^2 \psi_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 r r_0 \cdot K_{\varphi'} \cdot \cos \varphi_0 \cdot \left(- 2 r r_0 + 3 r_0^2 \cdot \cos \psi_0 \right) \right\} \\ &\quad + \frac{35 r^2 r_0^4 \cdot \cos \varphi_0 \cdot K_{\varphi'}^2}{\ell_0^9} \cdot \left\{ 2 r^2 - r_0^2 - 4 r r_0 \cdot \cos \psi_0 + 3 r_0^2 \cdot \cos^2 \psi_0 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_0 &= -\frac{3r_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0}{\ell_0^7} \cdot \\
&\quad \left\{ \left((2r^3 - 3rr_0^2) \cdot \cos \Delta\lambda_0 - (2r_0^3 - 2r^2 r_0) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta\lambda_0 \right) \right. \\
&\quad \left. + r_0 \cdot \left((2r_0^2 - 2r^2) \cdot \cos \Delta\lambda_0 - 2rr_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta\lambda_0 \right) \cdot \cos \psi_0 \right. \\
&\quad \left. + rr_0^2 \cdot \cos \Delta\lambda_0 \cdot \cos^2 \psi_0 \right\} \\
&+ \frac{21rr_0^4 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos^3 \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta\lambda_0}{\ell_0^9} \cdot \left\{ 2r^3 - 3rr_0^2 + (2r_0^3 - 2r^2 r_0) \cdot \cos \psi_0 \right. \\
&\quad \left. + rr_0^2 \cdot \cos^2 \psi_0 \right\}
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial r \partial \varphi}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{r_0^3 \cdot K_\varphi \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^3} \cdot \left\{ 1 - \frac{3r}{\ell_0^2} \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \right\} \tag{A.49}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \right|_0 &= \frac{3r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot K_\varphi}{\ell_0^3} \cdot \left(2 + \frac{1}{\ell_0^2} \cdot \left\{ 6r \cdot (r - 3r_0 \cdot \cos \psi_0) - 7r_0^2 \right\} \right) \\
&+ \frac{5r_0}{\ell_0^4} \cdot \left\{ rr_0 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) + 2r \cdot (3r - 4r_0) \cdot (r_0 - r \cdot \cos \psi_0) + \frac{r_0}{4} \cdot (2r_0 - 2r \cdot \cos \psi_0)^2 \right\} \\
&- \frac{45rr_0^2 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \cdot (2r_0 - 2r \cdot \cos \psi_0)^2}{4 \cdot \ell_0^9}
\end{aligned} \tag{A.50}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi^2} \right|_0 &= -\frac{r_0^3}{\ell_0^3} \cdot \left(2 \cdot \left\{ \cos \varphi_0 \cdot K_\varphi + \sin \varphi_0 \cdot K_{\varphi'} \right\} \right. \\
&- \frac{3r}{\ell_0^2} \cdot \left\{ 2 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \cdot (\cos \varphi_0 \cdot K_\varphi + \sin \varphi_0 \cdot K_{\varphi'}) \right. \\
&\quad \left. - 4r_0 \cdot K_{\varphi'} \cdot (\sin \varphi_0 \cdot K_\varphi + \cos \varphi_0 \cdot K_{\varphi'}) - 2r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \psi_0 \cdot K_\varphi \right\} \\
&- \frac{5r^2 r_0}{\ell_0^4} \cdot \left\{ (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \cdot (2K_{\varphi'} \cdot (\sin \varphi_0 \cdot K_\varphi - \cos \varphi_0 \cdot K_{\varphi'}) + \cos \varphi_0 \cdot \cos \psi_0 \cdot K_\varphi) \right\} \\
&+ \frac{45r^3 r_0^2 \cos \varphi_0 \cdot K_\varphi \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0)}{\ell_0^6}
\end{aligned} \tag{A.51}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_0 &= \frac{r_0^3 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^3} \cdot \left(r_0^3 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \Delta\lambda_0 \right. \\
&+ \frac{6r \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^2} \cdot \left\{ \cos \Delta\lambda_0 \cdot (\sin \varphi \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) - r_0 \cdot \cos \varphi \cdot K_\varphi) \right. \\
&\quad \left. - r_0 \cdot \sin 2\varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta\lambda_0 \right\} \\
&+ \frac{15r^2 r_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^4} \cdot \left\{ 2 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \cdot (\sin \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta\lambda_0 + \cos \Delta\lambda_0 \cdot K_\varphi) \right. \\
&\quad \left. + 3r_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta\lambda_0 \cdot K_\varphi \right\} \\
&- \frac{45r^3 r_0^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta\lambda_0 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \cdot K_\varphi}{\ell_0^9}
\end{aligned} \tag{A.52}$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial r \partial \lambda}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{r_0^3 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \left\{ 1 - \frac{3r}{\ell_0^2} \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \right\} \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \Big|_0 &= \frac{r_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \left(r_0^2 \cdot \cos \varphi_0 \right. \\ &+ \frac{3 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^2} \cdot \left\{ -3 \cdot (2r_0 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) + 2r \cdot (r - 2r_0 \cdot \cos \psi_0) + r_0^2) \right\} \\ &+ \frac{15r_0 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^4} \cdot \left\{ 2r \cdot (r_0 - r \cdot \cos \psi_0) \cdot (3 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) - r_0 \cdot \cos \psi_0) \right. \\ &\quad \left. + r_0 \cdot (r \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) + (2r - 2r_0 \cdot \cos \psi_0)^2) \right\} \\ &\left. - \frac{105r_0^2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0)}{4\ell_0^6} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi^2} \Big|_0 &= \frac{r_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \left(-2 \cos 2\varphi_0 \right. \\ &+ \frac{6r}{\ell_0^2} \cdot \left\{ (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) - r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot (4 \sin \varphi_0 \cdot K_{\varphi'} + \cos \varphi_0 \cdot \cos \psi) \right\} \\ &+ \frac{15r^2 r_0 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^4} \cdot \left\{ (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \cdot (4 \sin \varphi_0 \cdot K_{\varphi'} + \cos \varphi_0 \cdot \cos \psi) + 3r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot K_{\varphi'}^2 \right\} \\ &\left. - \frac{105r^3 r_0^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \cdot K_{\varphi'}^2}{\ell_0^6} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \Big|_0 &= \frac{r_0^3 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \left(-1 + \frac{6r}{\ell_0^2} \cdot \left\{ (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 3r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \Delta \lambda_0 \right\} \right. \\ &+ \frac{45r^2 r_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^4} \cdot \left\{ (r - r_0 \cdot \cos \psi_0) \cdot \cos \Delta \lambda_0 + r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \right\} \\ &\left. - \frac{105r^2 r_0^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \cdot (r - r_0 \cdot \cos \psi_0)}{\ell_0^6} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial \varphi^2}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{rr_0^3 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3rr_0 \cdot K_{\varphi'}^2}{\ell_0^2} - \cos \psi_0 \right\} \quad (\text{A.57})$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \right|_0 &= \frac{3r_0 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^3} \cdot \left(-2 \cos \psi_0 + \frac{r_0^2}{\ell_0^2} \cdot \left\{ r_0 \cdot \cos \psi_0 \cdot (1 + 6 \cdot (r_0 - r \cdot \cos \psi)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2r \cdot K_\varphi^2 \cdot (6 - 20r_0) \cdot (r_0 - r \cdot \cos \psi_0) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{5r_0^2}{\ell_0^4} \cdot \left\{ r_0 \cdot K_\varphi^2 - \frac{1}{4} \cos \psi_0 \cdot (2r_0 - 2r \cdot \cos \psi_0)^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{35r_0^3 \cdot (2r_0 - 2r \cdot \cos \psi_0)^2 \cdot K_\varphi^2}{\ell_0^6} \right)
\end{aligned} \tag{A.58}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi^2} \right|_0 &= \frac{r_0^3}{\ell_0^3} \cdot \left(2 \cdot \left\{ \cos \varphi_0 \cdot \cos \psi_0 + \sin \varphi_0 \cdot K_{\varphi'} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3r_0}{\ell_0^2} \left\{ 2 \sin \varphi_0 \cdot (\cos \psi_0 \cdot K_{\varphi'} - 2K_\varphi \cdot K_{\varphi\varphi'}) - \cos \varphi_0 \cdot (2K_{\varphi\varphi'^2} - 3K_\varphi^2) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{15r^2 r_0^2}{\ell_0^4} \cdot \left\{ 2K_\varphi \cdot K_{\varphi'} \cdot (2 \cos \varphi_0 \cdot K_{\varphi\varphi'} - \sin \varphi_0 \cdot K_\varphi) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \cos \varphi_0 \cdot \cos \psi_0 \cdot (K_\varphi^2 + K_{\varphi'}^2) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{105r^3 r_0^3 \cdot \cos \varphi_0 \cdot K_\varphi^2 \cdot K_{\varphi'}^2}{\ell_0^6} \right)
\end{aligned} \tag{A.59}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_0 &= \frac{r_0^3 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^3} \cdot \left(\cos \varphi \cdot \cos \Delta \lambda \right. \\
&\quad \left. + \frac{3r_0 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^2} \cdot \left\{ -2 \cos 2\varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda + \cos \Delta \lambda \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \psi + 2 \sin \varphi \cdot K_\varphi) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{15r^2 r_0^2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^4} \cdot \left\{ \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \psi - 4 \sin \varphi \cdot K_\varphi) + K_\varphi \cdot \cos \Delta \lambda \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{105r^3 r_0^3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda \cdot K_\varphi^2}{\ell_0^6} \right)
\end{aligned} \tag{A.60}$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial \varphi \partial \lambda}$ gilt:

$$\left. I \right|_0 = \frac{r_0^3 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3r_0 \cdot \cos \varphi \cdot K_\varphi}{\ell_0^2} - \sin \varphi \right\} \tag{A.61}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \right|_0 &= \frac{3r_0 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \left(-2 \sin \varphi + \frac{r_0}{\ell_0^2} \cdot \left\{ 12r \cdot \cos \varphi \cdot K_\varphi + \sin \varphi \cdot (9r_0 - 6r \cdot \cos \psi_0) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{5r_0^2}{\ell_0^4} \cdot \left\{ r \cdot \cos \varphi \cdot K_\varphi \cdot (9r_0 - 8r \cdot \cos \psi_0) + \sin \varphi \cdot (2r_0 - 2r \cdot \cos \psi_0)^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{45r_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot (2r_0 - 2r \cdot \cos \psi_0)^2 \cdot K_\varphi}{\ell_0^6} \right)
\end{aligned} \tag{A.62}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \right|_0 &= \frac{r r_0^3 \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \left(2 \cos 2\varphi_0 \cdot \sin \varphi \right. \\
&+ \frac{3 r r_0 \cdot \cos \varphi}{\ell_0^2} \cdot \left\{ -2 K_\varphi \cdot (\cos 2\varphi_0 + \cos^2 \varphi_0) - 2 \sin 2\varphi_0 \cdot K_{\varphi'} \right\} \\
&+ \frac{15 r^2 r_0^2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi}{\ell_0^4} \cdot \left\{ -K_\varphi \cdot (4 \sin \varphi \cdot K_{\varphi'} + \cos \varphi_0 \cdot \cos \psi \cdot \cos \Delta \lambda_0) \right. \\
&\quad \left. + \cos \varphi_0 \cdot (2 K_{\varphi\varphi'} - \sin \varphi \cdot \cos^2 \Delta \lambda_0) \cdot K_{\varphi'} \right\} \\
&+ \frac{105 r^3 r_0^3 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot K_\varphi \cdot K_{\varphi'}^2}{\ell_0^6} \left. \right) \tag{A.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \right|_0 &= \frac{r r_0^3 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^3} \cdot \left(\sin \varphi + \frac{3 r r_0 \cdot \cos \varphi}{\ell_0^2} \cdot \left\{ 6 \sin \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0 - K_\varphi \right\} \right. \\
&- \frac{45 r^2 r_0^2 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos^2 \varphi}{\ell_0^4} \cdot \left\{ \sin \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 + K_\varphi \cdot \cos \Delta \lambda_0 \right\} \\
&+ \frac{105 r^3 r_0^3 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \cdot K_\varphi}{\ell_0^6} \left. \right) \tag{A.64}
\end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial \lambda^2}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{r r_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi_0}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3 r r_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0}{\ell_0^2} - \cos \Delta \lambda_0 \right\} \tag{A.65}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \right|_0 &= \frac{3 r r_0 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \cos \varphi}{\ell_0^3} \cdot \left(-2 \cos \Delta \lambda_0 \right. \\
&+ \frac{r_0}{\ell_0^2} \cdot \left\{ 12 r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 + \cos \Delta \lambda_0 \cdot (7 r_0 - 6 r \cdot \cos \psi_0) \right\} \\
&- \frac{5 r_0^2}{\ell_0^4} \cdot \left\{ r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \cdot (9 r_0 - 8 r \cdot \cos \psi_0) + \cos \Delta \lambda_0 \cdot (2 r_0 - 2 r \cdot \cos \psi_0) \right\} \\
&+ \frac{45 r r_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \cdot (2 r_0 - 2 r \cdot \cos \psi_0)^2}{\ell_0^6} \left. \right) \tag{A.66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi'^2} \right|_0 &= \frac{r r_0^3 \cdot \cos \varphi}{\ell_0^3} \cdot \left(2 \cos 2\varphi_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0 \right. \\
&+ \frac{3 r r_0 \cdot \cos \varphi_0}{\ell_0^2} \cdot \left\{ 3 \cos \varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \cdot (2 \sin^2 \varphi_0 - \cos \varphi_0) \right\} \\
&- \frac{15 r^2 r_0^2 \cdot \cos^2 \varphi_0}{\ell_0^4} \cdot \left\{ \cos \varphi \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \cdot (6 \sin \varphi_0 \cdot K_{\varphi'} + \cos \varphi_0 \cdot \cos \psi) + \cos \Delta \lambda_0 \cdot K_{\varphi'}^2 \right\} \\
&+ \frac{105 r^3 r_0^3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^3 \varphi_0 \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \cdot K_{\varphi'}^2}{\ell_0^6} \left. \right) \tag{A.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} \Big|_0 &= \frac{r r_0^3 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \cos \varphi}{\ell_0^3} \cdot \left(\cos \Delta \lambda_0 \right. \\ &+ \frac{3 r r_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Delta \lambda_0}{\ell_0^2} \cdot \left\{ 3 \cos^2 \Delta \lambda_0 - 4 \sin^2 \Delta \lambda_0 \right\} \\ &\left. - \frac{90 r^2 r_0^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \Delta \lambda_0 \cdot \cos \Delta \lambda_0}{\ell_0^4} + \frac{105 r^3 r_0^3 \cdot \cos^3 \varphi_0 \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin^4 \Delta \lambda_0}{\ell_0^6} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

A.4 Taylorreihenentwicklung Quader – partielle Ableitungen

Für die Berechnung des Potentials eines Quaders und seiner ersten und zweiten Ableitungen mittels der Taylorreihenentwicklung (siehe Kapitel 3.2.2.2) werden die partiellen Ableitungen $I|_0$, $\partial^2 I / \partial x'^2|_0$, $\partial^2 I / \partial y'^2|_0$, $\partial^2 I / \partial z'^2|_0$ für die jeweiligen Integralkerne benötigt. Die Ableitungen wurden mittels der Software MAPLE überprüft.

Für die partiellen Ableitungen von $V(Q)$ gilt:

$$I|_0 = \frac{1}{\ell_0} \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Big|_0 = \frac{1}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3(x-x_0)^2}{\ell_0^2} - 1 \right\} \quad (\text{A.70})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \Big|_0 = \frac{1}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3(y-y_0)^2}{\ell_0^2} - 1 \right\} \quad (\text{A.71})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \Big|_0 = \frac{1}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3(z-z_0)^2}{\ell_0^2} - 1 \right\} \quad (\text{A.72})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial V(Q)}{\partial x}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{x-x_0}{\ell_0^3} \quad (\text{A.73})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Big|_0 = \frac{3(x-x_0)}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 3 - \frac{5(x-x_0)^2}{\ell_0^2} \right\} \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \Big|_0 = \frac{3(x-x_0)}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5(y-y_0)^2}{\ell_0^2} \right\} \quad (\text{A.75})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \Big|_0 = \frac{3(x-x_0)}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5(z-z_0)^2}{\ell_0^2} \right\} \quad (\text{A.76})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial V(Q)}{\partial y}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{y - y_0}{\ell_0^3} \quad (\text{A.77})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Big|_0 = \frac{3(y - y_0)}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5(x - x_0)^2}{\ell_0^2} \right\} \quad (\text{A.78})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \Big|_0 = \frac{3(y - y_0)}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 3 - \frac{5(y - y_0)^2}{\ell_0^2} \right\} \quad (\text{A.79})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \Big|_0 = \frac{3(y - y_0)}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5(z - z_0)^2}{\ell_0^2} \right\} \quad (\text{A.80})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial V(Q)}{\partial z}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{z - z_0}{\ell_0^3} \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Big|_0 = \frac{3(z - z_0)}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5(x - x_0)^2}{\ell_0^2} \right\} \quad (\text{A.82})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \Big|_0 = \frac{3(z - z_0)}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5(y - y_0)^2}{\ell_0^2} \right\} \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \Big|_0 = \frac{3(z - z_0)}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 3 - \frac{5(z - z_0)^2}{\ell_0^2} \right\} \quad (\text{A.84})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x^2}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{1}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3(x - x_0)^2}{\ell_0^2} - 1 \right\} \quad (\text{A.85})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Big|_0 = \frac{3}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 3 + \frac{5(x - x_0)^2}{\ell_0^2} \cdot \left(\frac{7(x - x_0)^2}{\ell_0^2} - 6 \right) \right\} \quad (\text{A.86})$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \right|_0 = \frac{3}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5}{\ell_0^2} \cdot ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \frac{35}{\ell_0^4} \cdot (x - x_0)^2 \cdot (y - y_0)^2 \right\} \quad (\text{A.87})$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \right|_0 = \frac{3}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5}{\ell_0^2} \cdot ((x - x_0)^2 + (z - z_0)^2) + \frac{35}{\ell_0^4} \cdot (x - x_0)^2 \cdot (z - z_0)^2 \right\} \quad (\text{A.88})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x \partial y}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{3(x - x_0) \cdot (y - y_0)}{\ell_0^5} \quad (\text{A.89})$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \right|_0 = \frac{5}{\ell_0^7} \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) \cdot \left\{ \frac{17(x - x_0)^2}{\ell_0^2} - 9 \right\} \quad (\text{A.90})$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \right|_0 = \frac{5}{\ell_0^7} \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) \cdot \left\{ \frac{17(y - y_0)^2}{\ell_0^2} - 9 \right\} \quad (\text{A.91})$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \right|_0 = \frac{5}{\ell_0^7} \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) \cdot \left\{ \frac{17(z - z_0)^2}{\ell_0^2} - 3 \right\} \quad (\text{A.92})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial x \partial z}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{3(x - x_0) \cdot (z - z_0)}{\ell_0^5} \quad (\text{A.93})$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \right|_0 = \frac{5}{\ell_0^7} \cdot (x - x_0) \cdot (z - z_0) \cdot \left\{ \frac{17(x - x_0)^2}{\ell_0^2} - 9 \right\} \quad (\text{A.94})$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \right|_0 = \frac{5}{\ell_0^7} \cdot (x - x_0) \cdot (z - z_0) \cdot \left\{ \frac{17(y - y_0)^2}{\ell_0^2} - 3 \right\} \quad (\text{A.95})$$

$$\left. \frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \right|_0 = \frac{5}{\ell_0^7} \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) \cdot \left\{ \frac{17(z - z_0)^2}{\ell_0^2} - 3 \right\} \quad (\text{A.96})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y^2}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{1}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3(y - y_0)^2}{\ell_0^2} - 1 \right\} \quad (\text{A.97})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Big|_0 = \frac{3}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5}{\ell_0^2} \cdot ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) + \frac{35}{\ell_0^4} \cdot (x-x_0)^2 \cdot (y-y_0)^2 \right\} \quad (\text{A.98})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \Big|_0 = \frac{3}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 3 + \frac{5(y-y_0)^2}{\ell_0^2} \cdot \left(\frac{7(y-y_0)^2}{\ell_0^2} - 6 \right) \right\} \quad (\text{A.99})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \Big|_0 = \frac{3}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5}{\ell_0^2} \cdot ((y-y_0)^2 + (z-z_0)^2) + \frac{35}{\ell_0^4} \cdot (y-y_0)^2 \cdot (z-z_0)^2 \right\} \quad (\text{A.100})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial y \partial z}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{3(y-y_0) \cdot (z-z_0)}{\ell_0^5} \quad (\text{A.101})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Big|_0 = \frac{5}{\ell_0^7} \cdot (y-y_0) \cdot (z-z_0) \cdot \left\{ \frac{17(x-x_0)^2}{\ell_0^2} - 3 \right\} \quad (\text{A.102})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \Big|_0 = \frac{5}{\ell_0^7} \cdot (y-y_0) \cdot (z-z_0) \cdot \left\{ \frac{17(y-y_0)^2}{\ell_0^2} - 9 \right\} \quad (\text{A.103})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \Big|_0 = \frac{5}{\ell_0^7} \cdot (y-y_0) \cdot (z-z_0) \cdot \left\{ \frac{17(z-z_0)^2}{\ell_0^2} - 9 \right\} \quad (\text{A.104})$$

Für die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial^2 V(Q)}{\partial z^2}$ gilt:

$$I|_0 = \frac{1}{\ell_0^3} \cdot \left\{ \frac{3(z-z_0)^2}{\ell_0^2} - 1 \right\} \quad (\text{A.105})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x'^2} \Big|_0 = \frac{3}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5}{\ell_0^2} \cdot ((x-x_0)^2 + (z-z_0)^2) + \frac{35}{\ell_0^4} \cdot (x-x_0)^2 \cdot (z-z_0)^2 \right\} \quad (\text{A.106})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y'^2} \Big|_0 = \frac{3}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 1 - \frac{5}{\ell_0^2} \cdot ((y-y_0)^2 + (z-z_0)^2) + \frac{35}{\ell_0^4} \cdot (y-y_0)^2 \cdot (z-z_0)^2 \right\} \quad (\text{A.107})$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z'^2} \Big|_0 = \frac{3}{\ell_0^5} \cdot \left\{ 3 + \frac{5(z-z_0)^2}{\ell_0^2} \cdot \left(\frac{7(z-z_0)^2}{\ell_0^2} - 6 \right) \right\} \quad (\text{A.108})$$

A.5 Statistiken der Eigenwerte zur Untersuchung der Elliptizität

Tabelle A.2 Statistik des Eigenwerts 1 des topographisch-isostatischen Potentials (A-H) (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene Erdradien

	Min [10^{-4} E.U.]	Max [10^{-4} E.U.]	Quadrat. Mittel [10^{-4} E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [10^{-4} E.U.]	Std [10^{-4} E.U.]
Variante 1-2	-10.3586	-0.0079	1.8537	1.3060	1.3155
Variante 3-2	20.3691	-1.8006e-006	4.4466	2.5149	3.6671
Variante 4-2	-724.8677	-0.0001	112.5669	65.5447	91.5168
Variante 3-4	723.7746	-0.0001	113.7498	66.1885	92.5107

Tabelle A.3 Statistik des Eigenwerts 2 des topographisch-isostatischen Potentials (A-H) (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene Erdradien

	Min [10^{-4} E.U.]	Max [10^{-4} E.U.]	Quadrat. Mittel [10^{-4} E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [10^{-4} E.U.]	Std [10^{-4} E.U.]
Variante 1-2	-1.8709	3.2222	0.5186	0.3081	0.5101
Variante 3-2	-5.2097	8.8627	1.3180	0.6240	1.2958
Variante 4-2	-259.7698	242.6430	29.1285	14.0259	29.0677
Variante 3-4	-259.5719	243.2155	29.6458	14.2376	29.5785

Tabelle A.4 Statistik des Eigenwerts 3 des topographisch-isostatischen Potentials (A-H) (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene Erdradien

	Min [10^{-4} E.U.]	Max [10^{-4} E.U.]	Quadrat. Mittel [10^{-4} E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [10^{-4} E.U.]	Std [10^{-4} E.U.]
Variante 1-2	0.0131	8.2473	0.5186	1.2124	1.0381
Variante 3-2	3.0008e-006	15.6819	1.3180	2.2739	2.9485
Variante 4-2	0.0001	921.6022	29.1285	67.4285	95.7708
Variante 3-4	0.0001	919.4193	29.6458	68.1879	97.2261

A.6 Statistiken der Eigenwerte zur Untersuchung verschiedener isostatischer Modelle

Für die globale Untersuchung über die ganze Erde ($\varphi = -90^\circ \dots 90^\circ$, $\lambda = 0^\circ \dots 360^\circ$) gilt:

Tabelle A.5 Statistik des Eigenwerts 1 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-1.2550	-0.0069	0.2892	0.2492	0.1467
P-H (100 km)	-1.2642	-0.0128	0.3245	0.2766	0.1696
A-H/P-H	-1.1634	-0.0130	0.3089	0.2666	0.1562
Helmert I (21 km)	-1.3199	-0.0116	0.2819	0.2431	0.1427
Helmert II (0 km)	-1.7194	-0.0179	0.3084	0.2652	0.1574
Crust – V1	-5.0009	-0.0733	1.6110	1.4125	0.7748
Crust – V2	-6.3333	-0.0788	1.8371	1.6337	0.8402
Crust – V3	-7.6279	-0.1408	2.3266	2.1522	0.8838

Tabelle A.6 Statistik des Eigenwerts 2 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.4375	0.4796	0.0848	0.0638	0.0847
P-H (100 km)	-0.5909	0.5861	0.0937	0.0691	0.0932
A-H/P-H	-0.5899	0.5212	0.0898	0.0672	0.0895
Helmert I (21 km)	-0.4601	0.4206	0.0824	0.0621	0.0823
Helmert II (0 km)	-0.4953	0.5319	0.0867	0.0650	0.0867
Crust – V1	-2.3534	1.9431	0.5316	0.3976	0.5175
Crust – V2	-2.7071	2.0392	0.5969	0.4463	0.5824
Crust – V3	-2.4417	2.6659	0.6636	0.5537	0.6584

Tabelle A.7 Statistik des Eigenwerts 3 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	0.0085	1.0720	0.0848	0.2452	0.1329
P-H (100 km)	0.0109	1.2415	0.0937	0.2678	0.1519
A-H/P-H	0.0109	1.2343	0.0898	0.2589	0.1444
Helmert I (21 km)	0.0091	1.2155	0.0824	0.2407	0.1334
Helmert II (0 km)	0.0170	1.6892	0.0867	0.2656	0.1573
Crust – V1	0.0912	7.0461	0.5316	1.5340	0.8197
Crust – V2	0.0621	8.6677	0.5969	1.7648	0.9971
Crust – V3	0.1547	8.7461	0.6636	2.0691	0.9542

Tabelle A.8 Statistik der Eigenwerte des Störpotentials (global)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
Eigenwert 1	-1.7698	-0.0179	0.3075	0.2637	0.1581
Eigenwert 2	0.4911	0.5227	0.0864	0.0648	0.0864
Eigenwert 3	0.0183	1.7539	0.0864	0.2644	0.1582

Für die regionale Untersuchung im Gebiet der Rocky Mountains ($\varphi = 48^\circ \dots 53^\circ$, $\lambda = 240^\circ \dots 249^\circ$) gilt:

Tabelle A.9 Statistik des Eigenwerts 1 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.2787	-0.1202	0.2002	0.1972	0.0345
P-H (100 km)	-0.4105	-0.1619	0.3358	0.3300	0.0620
A-H/P-H	-0.2787	-0.1202	0.2002	0.1972	0.0345
Helmert I (21 km)	-0.2365	-0.1134	0.1776	0.1755	0.0269
Helmert II (0 km)	-0.3381	-0.1982	0.2650	0.2622	0.0384

Tabelle A.10 Statistik des Eigenwerts 2 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	-0.1438	0.0046	0.0765	0.0725	0.0247
P-H (100 km)	-0.1289	0.0527	0.0464	0.0365	0.0445
A-H/P-H	-0.1438	0.0046	0.0765	0.0725	0.0247
Helmert I (21 km)	-0.1536	0.0096	0.0729	0.0634	0.0361
Helmert II (0 km)	-0.0757	0.1499	0.0866	0.0807	0.0415

Tabelle A.11 Statistik des Eigenwerts 3 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
A-H (25 km)	0.1938	0.4031	0.0765	0.2697	0.0357
P-H (100 km)	0.2386	0.4665	0.0464	0.3429	0.0352
A-H/P-H	0.1938	0.4031	0.0765	0.2697	0.0357
Helmert I (21 km)	0.1761	0.3790	0.0729	0.2389	0.0383
Helmert II (0 km)	0.1149	0.3124	0.0866	0.1862	0.0445

Tabelle A.12 Statistik der Eigenwerte des Störpotentials (Rocky Mountains)

	Min [E.U.]	Max [E.U.]	Quadrat. Mittel [E.U.]	Durchschnittlicher Betrag [E.U.]	Std [E.U.]
Eigenwert 1	-0.3456	-0.1998	0.2702	0.2673	0.0396
Eigenwert 2	-0.0718	0.1509	0.0869	0.0814	0.0394
Eigenwert 3	0.1149	0.3105	0.0869	0.1898	0.0459

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1	Die Wechselbeziehung zwischen Schwere, Schwerevariationen, Massentransport und Massenverteilung (vgl. Ilk et al. 2005)	9
Abbildung 2.2	Messprinzip des SST im high-low Modus (a), des SST im low-low Modus kombiniert mit dem high-low Modus (b) und der Satellitengradiometrie kombiniert mit dem high-low Modus (c) (vgl. Rummel et al. 2002)	11
Abbildung 2.3	Grad-RMS-Kurve des SST im high-low Modus, des SST im low-low Modus und der Satellitengradiometrie (vgl. Pail 2006)	12
Abbildung 2.4	Residual Terrain Modelling (vgl. Seitz et al. 2004)	14
Abbildung 2.5	Gravitationsfeld in Satellitenhöhe: rau (a), geglättet (b)	15
Abbildung 3.1	Transformation vom lokalen System des Quaders in das System des Aufpunkts Q	18
Abbildung 3.2	Tesseroid im globalen Koordinatensystem	19
Abbildung 3.3	Geometrie der Topographie in sphärischer Approximation	23
Abbildung 3.4	Quader im lokalen Koordinatensystem	26
Abbildung 3.5	Punktmasse als Approximation des Quaders	29
Abbildung 3.6	Massenschicht als Approximation eines Quaders	30
Abbildung 3.7	Massenlinie als Approximation eines Quaders	31
Abbildung 3.8	Isostatisches Modell von Airy-Heiskanen in sphärischer Approximation	33
Abbildung 3.9	Isostatisches Modell von Pratt-Hayford in sphärischer Approximation	35
Abbildung 3.10	Kombination des isostatischen Modells von Airy-Heiskanen und Pratt-Hayford in sphärischer Approximation	37
Abbildung 3.11	Kondensationsmodelle von Helmert	37
Abbildung 3.12	Minimale und maximale Dichteinformationen des CRUST 2.0-Modells pro Schicht	39
Abbildung 3.13	Sphärische Kappe	41
Abbildung 3.14	Effekt eines einzelnen Breitenbands (Breite $\Delta\psi = 5'$) in einer sphärischen Kappe auf M_{zz} ; Dichte $\rho = 2670 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; Höhe 1000 m	41
Abbildung 3.15	Gesamteffekt einer sphärischen Kappe auf M_{zz} ; Dichte $\rho = 2670 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; Höhe 1000 m	42
Abbildung 3.16	Approximationsfehler von M_{zz} [E.U.] bezüglich verschiedener Massenelemente für ein einzelnes Breitenband $\Delta\psi = 5'$ und eine Tesseroidhöhe 1000 m	44
Abbildung 3.17	Gesamtfehler von M_{zz} [E.U.] für eine sphärische Kappe (Radius ψ_c , Höhe 1000 m) bezüglich verschiedener Massenelemente	44
Abbildung 3.18	Approximationsfehler von M_{zz} [E.U.] bezüglich der Modellierung von Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r und Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n = m \leq 2$ für ein Breitenband $\Delta\psi = 5'$ und eine Tesseroidhöhe 1000 m	46
Abbildung 3.19	Gesamtfehler von M_{zz} [E.U.] für eine sphärische Kappe (Radius ψ_c , Höhe 1000 m) bezüglich der Modellierung von Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r und Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n = m \leq 2$	46
Abbildung 3.20	Approximationsfehler von M_{zz} [E.U.] bezüglich der Modellierung von Tesseroiden mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 2$ für ein einzelnes Breitenband $\Delta\psi = 5'$ und eine Tesseroidhöhe 1000 m	47
Abbildung 3.21	Gesamtfehler von M_{zz} [E.U.] für eine sphärische Kappe (Radius ψ_c , Höhe 1000 m) bezüglich der Modellierung von Tesseroiden Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 2$	48
Abbildung 3.22	Vergleich verschiedener Massenelemente bezüglich der Rechenzeit	48

Abbildung 3.23 Vergleich der Modellierung durch Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r sowie Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n = m \leq 5$ bezüglich der Rechenzeit	49
Abbildung 3.24 Vergleich der Modellierung durch Tesseroiden mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 2$ bezüglich der Rechenzeit	49
Abbildung 3.25 Fehler in M_{zz} infolge der Approximation eines Tesseroids durch verschiedene Massenkörper der Grundfläche $1^\circ \times 1^\circ$ und der Höhe 100 m (a) und 1000 m (b) in Abhängigkeit von der Längendifferenz zwischen Aufpunkt und Tesseroidmittelpunkt	50
Abbildung 3.26 Fehler von M_{zz} infolge der Approximation eines Tesseroids durch verschiedene Massenkörper der Grundfläche $5' \times 5'$ und der Höhe 100 m (a) und 1000 m (b) in Abhängigkeit von der Längendifferenz zwischen Aufpunkt und Tesseroidmittelpunkt	50
Abbildung 3.27 Fehlereinfluss von M_{zz} eines Tesseroids infolge der Approximation durch verschiedene Massenkörper der Grundfläche $30'' \times 30''$ und der Höhe 100 m (a) und 1000 m (b) in Abhängigkeit von der Längendifferenz zwischen Aufpunkt und Tesseroidmittelpunkt	51
Abbildung 3.28 Fehlereinfluss von M_{zz} eines Tesseroids infolge der Approximation durch verschiedene Massenkörper der Grundfläche $1'' \times 1''$ und der Höhe 100 m (a) und 1000 m (b) in Abhängigkeit von der Längendifferenz zwischen Aufpunkt und Tesseroidmittelpunkt	51
Abbildung 3.29 Marussi-Tensor der 2. Ableitungen der Differenz der Varianten 3 und 2 (Hammer-Projektion; Hauptmeridian: Greenwich)	55
Abbildung 3.30 Marussi-Tensor der 2. Ableitungen des topographischen Potentials	58
Abbildung 3.31 Isostatische Reduktion nach Airy-Heiskanen [$\partial^2 V_{A-H}(Q)/\partial r^2$] (a), topographisch-isostatische Reduktion [$\partial^2 V_i(Q)/\partial r^2 - \partial^2 V_{A-H}(Q)/\partial r^2$] (b)	58
Abbildung 3.32 Isostatische Reduktion bzgl. des Crust-v2-Modells [$\partial^2 V_{Crust-v2}(Q)/\partial r^2$] (a), topographisch-isostatische Reduktion [$\partial^2 V_i(Q)/\partial r^2 - \partial^2 V_{Crust-v2}(Q)/\partial r^2$] (b)	58
Abbildung 3.33 Zweite radiale Ableitung T_{zz} des Störpotentials (global) aus EIGEN-GRACE02S, $n \leq 150$	60
Abbildung 3.34 R_{zz} -Komponente für das Airy-Heiskanen-Modell (global)	63
Abbildung 3.35 R_{zz} -Komponente für das Erdkrustenmodell – Variante 3 (global)	63
Abbildung 3.36 Zweite radiale Ableitung T_{zz} des Störpotentials (Rocky Mountains) (Hammer-Projektion; Hauptmeridian: Meridian 244.5°)	64
Abbildung 3.37 R_{zz} -Komponente für das Airy-Heiskanen-Modell (Rocky Mountains)	67
Abbildung 4.1 Gradvarianzen der verschiedenen Anteile H_{nm}^k (a) und T_{nm}^k (b) der zweiten radialen Ableitung des topographischen Potentials und des isostatischen Potentials nach Airy-Heiskanen	75
Abbildung 4.2 Gradvarianzen der verschiedenen Anteile C_{nm}^k der zweiten radialen Ableitung des Helmertschen Kondensationspotentials I (a) und II (b)	75
Abbildung 4.3 Gradvarianzen der verschiedenen Anteile T_{nm}^k der zweiten radialen Ableitung des Erdkrustenmodells Variante 1 (a) und 2 (b)	76
Abbildung 4.4 Gradvarianzen der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials in Satellitenhöhe	76
Abbildung 4.5 Anteil $H_{nm}^1 - T_{nm}^1$ der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (isostatisches Modell nach Airy-Heiskanen) (Hammer-Projektion; Hauptmeridian: Greenwich)	79
Abbildung 4.6 Anteil $H_{nm}^2 - T_{nm}^2$ der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (isostatisches Modell nach Airy-Heiskanen)	79
Abbildung 4.7 Anteil $H_{nm}^3 - T_{nm}^3$ der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (isostatisches Modell nach Airy-Heiskanen)	79
Abbildung 4.8 Gesamtanteil der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (isostatisches Modell nach Airy-Heiskanen)	80

Abbildung 4.9 M_{xx} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich.....	82
Abbildung 4.10 M_{xy} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich.....	83
Abbildung 4.11 M_{xz} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich.....	83
Abbildung 4.12 M_{yy} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich.....	83
Abbildung 4.13 M_{yz} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich.....	84
Abbildung 4.14 M_{zz} -Komponente der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationsmodells I im Ortsbereich und Spektralbereich.....	84
Abbildung 4.15 Vergleich verschiedener Spektren (a) und Differenzen der Spektren (b) der Tensorkomponente V_{zz} der topographischen Massen.....	88
Abbildung 4.16 Differenz der Spektren 1 und 3 für die Komponenten V_{ij} des Marussi-Tensors der topographischen Massen.....	89
Abbildung 4.17 Differenz zwischen der Modellierung im Orts- und Spektralbereich, umgerechnet in Geoidhöhen in Satellitenhöhe.....	90
Abbildung A.1 Auswertung eines Doppelintegrals nach Gauß-Legendre.....	102
Abbildung A.2 Auswertung eines Dreifachintegrals nach Gauß-Legendre.....	102

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1	Entwicklungsgrad und räumliche Auflösung der Schwerefeldmissionen CHAMP, GRACE, GOCE	12
Tabelle 3.1	Approximationsfehler der Modellierung durch verschiedene Massenelemente bezüglich der analytischen Lösung eines einzelnen Breitenbands $\Delta\psi = 5'$ und einer Tesseroidhöhe 1000 m.....	43
Tabelle 3.2	Gesamtfehler der Modellierung durch verschiedene Massenelemente bezüglich der analytischen Lösung für eine sphärische Kappe $\psi_c = 10^\circ$ und Höhe 1000 m (Absoluter Wert von M_{zz} : 0.6228 E.U.)...	43
Tabelle 3.3	Approximationsfehler der Modellierung durch Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r + Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n = m \leq 5$ für Breitenbänder $\Delta\psi = 5'$	45
Tabelle 3.4	Gesamtfehler der Modellierung durch Tesseroiden mittels analytischer Integration nach r sowie Gauß-Legendre-Kubatur (2D) für $0 \leq n = m \leq 5$ für eine sphärische Kappe $\psi_c = 10^\circ$	46
Tabelle 3.5	Approximationsfehler der Modellierung durch Tesseroiden mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 2$ für Breitenbänder $\Delta\psi = 5'$	47
Tabelle 3.6	Gesamtfehler der Modellierung durch Tesseroiden mittels Gauß-Legendre-Kubatur (3D) für $0 \leq n = m = p \leq 3$ für eine sphärische Kappe $\psi_c = 10^\circ$	48
Tabelle 3.7	Fehler (Std [E.U.]) von M_{zz} infolge der Approximation eines Tesseroids der Grundfläche $1^\circ \times 1^\circ$ durch verschiedene Massenkörper für $-0.5^\circ \leq \varphi \leq 0.5^\circ$, $0.5^\circ \leq \lambda \leq 359.5^\circ$ und $h = 100$ m.....	51
Tabelle 3.8	Approximationsfehler (Std [E.U.]) von M_{zz} eines Tesseroids der Grundfläche $1^\circ \times 1^\circ$ durch verschiedene Massenkörper für $-0.5^\circ \leq \varphi \leq 0.5^\circ$, $0.5^\circ \leq \lambda \leq 359.5^\circ$ und $h = 1000$ m.....	52
Tabelle 3.9	Statistik der M_{xx} -Komponente für verschiedene Erdradien	53
Tabelle 3.10	Statistik der M_{xy} -Komponente für verschiedene Erdradien	54
Tabelle 3.11	Statistik der M_{xz} -Komponente für verschiedene Erdradien	54
Tabelle 3.12	Statistik der M_{yy} -Komponente für verschiedene Erdradien	54
Tabelle 3.13	Statistik der M_{yz} -Komponente für verschiedene Erdradien	55
Tabelle 3.14	Statistik der M_{zz} -Komponente für verschiedene Erdradien.....	55
Tabelle 3.15	Unterschiede der Wurzeltiefen zwischen Airy-Heiskanen ($T = 25$ km) und Erdkrustenmodell CRUST2.0 – Schicht 7	57
Tabelle 3.16	Statistik des Marussi-Tensors der simulierten Gradienten (global)	59
Tabelle 3.17	Statistik des Marussi-Tensors des Störpotentials (global)	60
Tabelle 3.18	Statistik der R_{xx} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global).....	60
Tabelle 3.19	Statistik der R_{xy} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global).....	61
Tabelle 3.20	Statistik der R_{xz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global).....	61
Tabelle 3.21	Statistik der R_{yy} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global).....	62
Tabelle 3.22	Statistik der R_{yz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global).....	62
Tabelle 3.23	Statistik der R_{zz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (global)	63
Tabelle 3.24	Statistik des Marussi-Tensors der simulierten Gradienten (Rocky-Mountains)	64
Tabelle 3.25	Statistik des Marussi-Tensors des Störpotentials (Rocky Mountains)	65
Tabelle 3.26	Statistik der R_{xx} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)	65
Tabelle 3.27	Statistik der R_{xy} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)	65
Tabelle 3.28	Statistik der R_{xz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)	66
Tabelle 3.29	Statistik der R_{yy} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)	66
Tabelle 3.30	Statistik der R_{yz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)	66

Tabelle 3.31	Statistik der R_{zz} -Komponente für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains).....	67
Tabelle 4.1	Vergleich der Modellierung des Ortsbereich und des Spektralbereichs bezüglich der analytischen Lösung einer Kugelschale für verschiedene Höhen h anhand der M_{zz} -Komponente [E.U.]	73
Tabelle 4.2	Statistik der verschiedenen Anteile der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (isostatisches Modell nach Airy-Heiskanen) in Satellitenhöhe	77
Tabelle 4.3	Statistik der verschiedenen Anteile der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (Helmertsches Kondensationsmodell I) in Satellitenhöhe.....	77
Tabelle 4.4	Statistik der verschiedenen Anteile der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (Helmertsches Kondensationsmodell II) in Satellitenhöhe	78
Tabelle 4.5	Statistik der verschiedenen Anteile der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (Erdkrustenmodell Variante 1) in Satellitenhöhe	78
Tabelle 4.6	Statistik der verschiedenen Anteile der zweiten radialen Ableitung des topographisch-isostatischen Potentials (Erdkrustenmodell Variante 2) in Satellitenhöhe	78
Tabelle 4.7	Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des topographischen Potentials im Orts- und Spektralbereich	80
Tabelle 4.8	Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des isostatischen Potentials nach Airy-Heiskanen im Orts- und Spektralbereich	81
Tabelle 4.9	Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationspotentials I im Orts- und Spektralbereich	81
Tabelle 4.10	Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des Helmertschen Kondensationspotentials II im Orts- und Spektralbereich.....	81
Tabelle 4.11	Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des Erdkrustenmodells Variante 1 im Orts- und Spektralbereich.....	82
Tabelle 4.12	Statistik des Marussi-Tensors der Differenz der Modellierung des Erdkrustenmodells Variante 2 im Orts- und Spektralbereich.....	82
Tabelle 4.13	Statistik zu den Höhen der Topographie und den Wurzeltiefen des Airy-Heiskanen-Modells.....	84
Tabelle 4.14	Rechenzeitvergleich Orts- und Spektralbereich.....	85
Tabelle 4.15	Statistik der Differenzen der Gradvarianzen $T_{nm(i)}^1 - T_{nm(exakt)}^1$	86
Tabelle 4.16	Statistik der Differenzen der Gradvarianzen $T_{nm(i)}^2 - T_{nm(exakt)}^2$	86
Tabelle 4.17	Statistik der Differenzen der Gradvarianzen $T_{nm(i)}^3 - T_{nm(exakt)}^3$	86
Tabelle 4.18	Statistik zum Einfluss des Entwicklungsgrades der Reihenentwicklung von t' der zweiten radialen Ableitung des isostatischen Potentials nach Airy-Heiskanen in Satellitenhöhe	87
Tabelle 4.19	Statistik der verschiedenen Spektren der Tensorkomponente V_{zz} des topographischen Potentials	88
Tabelle 4.20	Statistik der Differenzen der Spektren 1 und 3 für den Marussi-Tensor des topographischen Potentials...	89
Tabelle 4.21	Statistik der Geoidhöhen in Satellitenhöhe	90
Tabelle A.1	Werte der Stützstellen und Gewichte der Gaußschen Quadraturformeln.....	101
Tabelle A.2	Statistik des Eigenwerts 1 des topographisch-isostatischen Potentials (A-H) (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene Erdradien.....	114
Tabelle A.3	Statistik des Eigenwerts 2 des topographisch-isostatischen Potentials (A-H) (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene Erdradien.....	114
Tabelle A.4	Statistik des Eigenwerts 3 des topographisch-isostatischen Potentials (A-H) (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene Erdradien.....	114
Tabelle A.5	Statistik des Eigenwerts 1 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (global)	115

Tabelle A.6	Statistik des Eigenwerts 2 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (global)	115
Tabelle A.7	Statistik des Eigenwerts 3 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (global)	116
Tabelle A.8	Statistik der Eigenwerte des Störpotentials (global)	116
Tabelle A.9	Statistik des Eigenwerts 1 des Restsignals) (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)	116
Tabelle A.10	Statistik des Eigenwerts 2 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)	117
Tabelle A.11	Statistik des Eigenwerts 3 des Restsignals (Gauß-Legendre-Kubatur (3D), $n = m = p = 1$) für verschiedene isostatische Modelle (Rocky Mountains)	117
Tabelle A.12	Statistik der Eigenwerte des Störpotentials (Rocky Mountains)	117

Literaturverzeichnis

- Abd-Elmotaal H (1991) Gravity anomalies based on the Vening Meinesz isostatic model and their statistical behaviour. *Mitteilungen der Geodätischen Institute der Technischen Universität Graz*, Folge 72
- Abd-Elmotaal H (1994) Theoretical background of the Vening Meinesz isostatic model. In H. Sünkel und I. Marson (eds.): *Gravity and Geoid. Joint symposium of the international gravity commission and the international geoid commission*, No.13, pp 268-277, Springer-Verlag
- Abd-Elmotaal, H (2000) Vening Meinesz inverse isostatic problem with local and global Bouguer anomalies. *J Geod* 74: 390-398 DOI: 10.1007/s001900000083
- Anderson EG (1976) The effect of topography on solutions of Stokes' problem. *Rep Unisurv S-14*, School of Surveying, University of New South Wales, Kensington, Australia
- Aradalan AA, Grafarend EW (2001) Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula): case studies. *J Geod* 75: 544-552 DOI: 10.1007/s001900100212
- Ardalan AA, Safari A (2004) Ellipsoidal terrain correction based on multi-cylindrical equal-area map projection of the reference ellipsoid. *J Geod* 78: 114-123 DOI: 10.1007/s00190-004-0381-6
- Bouman J (2000) Quality assessment of satellite-based global gravity field models. *NCG Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy* 48
- Bouman J, Koop R (2003) Geodetic methods for calibration of GRACE and GOCE. *Space Science Reviews* 108: 293-303
- Bölling K, Grafarend EW (2005) Ellipsoidal spectral properties of the Earth's gravitational potential and its first and second derivatives. *J Geod* 79: 300-330 DOI: 10.1007/s00190-005-0465-y
- Bronstein IN (1997) *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main
- Burden RL, Faires JD (1993) *Numerical Analysis*. Fifth Edition. PWS Publishing Company, Boston
- Cai J (2004) *Statistical Inferemce of the Eigenspace Components of a Symmetric Random Deformation Tensor*. Reihe C, Heft Nr. 577, Deutsche Geodätische Kommission, München
- Claessens S (2003) *A synthetic Earth model. Analysis, implementation, validation and appli-cation*, Delft University of Technology, Delft University press
- Denker H, Lelgemann D, Torge W, Weber G, Wenzel G (1986) Strategies and requirements for a new European geoid determination. *Proceed. Int. Symp. on the Definition of the Geoid Vol. 1*: 207-222, Ist.Geogr.Mil., Firenze
- Denker H, Tziavos IN (1999) Investigation of the Molodensky series terms for terrain reduced gravity field data. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata* 40(3-4): 195-203
- Denker H (2006) Das Europäische Schwere- und Geoidprojekt (EGGP) der Internationalen Assoziation für Geodäsie. *Z.f.Verm.wesen* 131: 335-344
- Drinkwater MR., Floberghagen R, Haagmans R, Muzi D, and Popescu A, 2003. GOCE: ESA's first Earth Explorer Core mission. In Beutler, G.B., Drinkwater M., Rummel R., and von Steiger R. (Eds.), *Earth Gravity Field from Space - from Sensors to Earth Sciences*. In the Space Sciences Series of ISSI, Vol. 18, 419-432, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, ISBN: 1-4020-1408-2 (.pdf, 520 KB)
- Drinkwater MR, Haagmans R, Muzi D, Popescu A, Floberghagen R, Kern M, Fehringer M (2007) The GOCE gravity mission: ESA's first core Earth explorer. *Proc. 'The 3rd International GOCE User Workshop'*, ESA-ESRIN, Frascati, Italy, 6-8 November 2006 (ESA SP-627, January 2007), CD-ROM
- Engeln-Müllges G, Reutter F (1987) *Numerische Mathematik für Ingenieure*. BI Wissenschaftsverlag, Zürich
- Engels J (2006) *Zur Modellierung von Auflastdeformationen und induzierter Polwanderung*. Technical Reports Department of Geodesy, Rep No 2006.1
- Engels J, Grafarend EW, Sorcik P (1995) The gravitational field of topographic-isostatic masses and the hypothesis of mass condensation – Part I and II. *Schriftenreihe der Institute des Fachbereichs Vermessungswesen*. Tech rep 1995.1, Department of Geodesy, Stuttgart
- ESA (1996) *Gravity Field and Steady State-Ocean Circulation Mission*. Report for Assessment of the Nine Candidate Earth Explorer Missions, SP-1196(1): 77 pp
- ESA (1999) *Gravity Field and Steady State-Ocean Circulation Mission*. Report for Mission Selection, SP-1233(1): 217 pp
- Faires D, Burden R (2003) *Numerical Methods*. Third Edition. Thomson Brooks/Cole, United States
- Featherstone WE, Holmes SA, Kirby JF, Kuhn M (2004) Comparison of Remove-Compute-Restore and University of New Brunswick Techniques to Geoid Determination over Australia, and Inclusion of Wiener-Type Filters in Reference Field Contribution. *Journal of Surveying Engineering Vol.*

- 130, No. 1: 40-47 DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9453 (2004) 130: 1 (40)
- Forsberg R (1984) A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. Rep 355, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus OH
- Forsberg R, Tscherning CC (1997) Topographic effects in gravity modelling for BVP. In: Sansò F, Rummel R (eds) Geodetic boundary value problems in view of the one centimetre geoid. Lecture Notes in Earth Sciences, Vol. 65. Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 241-272
- Grafarend EW, Ardalan AA, Sideris MG (1999) The spheroidal fixed-free two-boundary-value problem for geoid determination (the spheroidal Bruns' transform). *J Geod* 73: 513-533 DOI: 10.1007/s0019000050263
- Grafarend EW (2000) The time-varying gravitational potential field of a massive deformable body. *Studia geoph. et geod.* 44, 364-373
- Grüninger W (1990) Zur topographisch-isostatischen Reduktion der Schwere. Dissertation, Universität Karlsruhe
- Heck B (1984) Zur Bestimmung vertikaler rezenter Erdkrustenbewegungen und zeitlicher Änderungen des Schwerefeldes aus wiederholten Schwere-messungen und Nivelliments. Reihe C, Heft Nr. 302, Deutsche Geodätische Kommission, München
- Heck B (1995) Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. Wichmann Verlag, Heidelberg
- Heck B (2002) On the use and abuse of Helmert's second method of condensation. In: Ádám J, Schwarz KP (eds) *Vistas for Geodesy in the new millennium*. Springer IAG Symposia, Vol. 125
- Heck B (2003) On Helmert's methods of condensation. *J Geod* 77: 155-170 DOI: 10.1007/s00190-003-0318-5
- Heck B, Wild F (2005) Topographic reductions in satellite gravity gradiometry based on a generalized condensation model. In: Sansò F (ed) *A Window on the Future of Geodesy*. Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 294-299
- Heck B, Seitz K (1991) Harmonic analysis – spherical harmonic analysis of gridded data. Technical report, Geodetic Institute, University of Karlsruhe, 9 pp
- Heck B, Seitz K (1993) Effects of Non-linearity in the Geodetic Boundary Value Problems. Reihe A, Heft Nr 109, Sect. 1.3, Deutsche Geodätische Kommission, München
- Heck B, Seitz K (2003) Solutions of the linearized geodetic boundary value problem for an ellipsoidal boundary to order e^3 . *J Geod* 77: 182-192 DOI: 10.1007/s00190-002-0309-y
- Heck B, Seitz K (2007) A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *J Geod* 81: 121-136 DOI: 10.1007/s00190-006-0094-0
- Heiskanen WA, Moritz H (1967) *Physical Geodesy*. Freeman and Company, San Francisco
- Heiskanen WA, Vening Meinesz FA (1958) *The Earth and Its Gravity Field*. McGraw-Hill Book Company, New York
- Helmert FR (1884) *Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*. II. Teil: Die physikalischen Theorien, B.G. Teubner, Leipzig (Neuaufgabe 1962)
- Ilk KH (2005) Satellite gravity and altimetry missions for the detection of mass distributions and mass transports in the Earth system: an emerging research field, Proc. 3rd Minia Int. Conf. for Advanced Trends in Engineering
- Ilk KH, Flury J, Rummel R, Schwintzer P, Bosch W, Haas C, Schröter J, Stammer D, Zahel W, Müller H, Dietrich R, Huybrechts P, Schmeling H, Wolf D, Götze HJ, Riegger J, Bardossy A, Güntner A, Gruber T (2005) Mass Transport and Mass distribution in the Earth System – Contribution of the New Generation of Satellite Gravity and Altimetry Missions to Geosciences. Proposal for a German Priority Research Program. GOCE-Projektbüro Deutschland, Technische Universität München. GeoForschungsZentrum Potsdam
- Janák J, Mikula K, Šprlák M (2007) Downward continuation of satellite gradiometric data. Proc. 'The 3rd International GOCE User Workshop', ESA-ESRIN, Frascati, Italy, 6-8 November 2006 (ESA SP-627, January 2007), CD-ROM
- Jekeli C, Zhu L (2006) Comparison of methods to model the gravitational gradients from topographic data bases. *Geophys J Int* 166: 999 - 1014 DOI: 10.1111/j.1365-246X.2006.03063.x
- Kaban M, Schwintzer P, Tikhotsky A (1999) A global isostatic gravity model of the Earth. *Geophys. J. Int.* 136: 519-536
- Klees R (1992) Lösung des fixen geodätischen Randwertproblems mit Hilfe der Randelement-methode. Reihe C, Heft Nr. 382, Deutsche Geodätische Kommission, München
- Koop R, Visser P, Tscherning C (2001) Aspects of GOCE calibration. In: *International GOCE User Workshop*, Vol. WPP-1888: 51-56
- Krappmann S (1996) Zero-potential densities in geodesy and geophysics. *Mitteilungen der Geodätischen Institute der Universität Graz*, Folge 84, Graz
- Kuhn M (2000) Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen. Reihe C, Heft Nr. 520, Deutsche Geodätische Kommission, München
- Kuhn M (2003) Geoid determination with density hypotheses from isostatic models and geological information. *J Geod* 77: 50-65 DOI: 10.1007/s00190-002-0297-y

- Kuhn M, Featherstone WE (2003) On a construction of a synthetic Earth gravity model (SEGM). In: Tziavos I.N. (ed): Gravity and Geoid 2002, Proc. 3rd Meeting International Gravity and Geoid Commission, 189-194
- Kuhn M, Seitz K (2005) Comparison of Newton's Integral in the Space and Frequency Domains. In: Sansò F (ed) A Window on the Future of Geodesy. Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 386-391
- Kühtreiber N, Kraiger G, Meurers B (1989) Pilotstudien für eine Bouguer-Karte von Österreich. In: Lichtenegger H, Steinhauser P, Sünkel H (Hrsg.) Tagungsbericht über das 5. internationale Alpengravimetrie-Kolloquium. Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, Heft 2, S. 51-71, Wien
- Kusche J (2002) Inverse Probleme bei der Gravitationsfeldbestimmung mittels SST- und SGG-Satellitenmissionen. Reihe C, Heft Nr. 548, Deutsche Geodätische Kommission, München
- Lambeck K (1988) Geophysical Geodesy: the slow deformations of the Earth. Clarendon press, Oxford
- Lehmann R (1994) Zur Bestimmung des Erdschwerefeldes unter Verwendung des Maximum-Entropie-Prinzipes. Reihe C, Heft Nr. 425 Deutsche Geodätische Kommission, München
- Lemoine FG, Kenyon SC, Factor JF, Trimmer RG, Pavlis NK, Chinn DS, Cox CM, Klosko SM, Luthcke SB, Torrence MH, Wang YM, Williamson RG, Pavlis EC, Rapp RH, Olson TR (1998) The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96. Report TP-1998-206861, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, 575 pp
- MacMillan WD (1930) Theoretical mechanics, Vol. 2: The theory of the potential. McGraw-Hill, New York (reprinted by Dover Publications, New York 1958)
- Mader K (1951) Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Österr Z Vermess Sonderheft 11, Österreichische Kommission für Int. Erdmessung
- Makhloof A, Ilk KH (2005) Far-zone topography effects on gravity and geoid heights according to Helmert's methods of condensation and based on Airy-Heiskanen model, Proc. 3rd Minia Int. Conf. for Advanced Trends in Engineering
- Marchenko AN (2003) A note on the eigenvalue – eigenvector problem. In: Festschrift dedicated to Helmut Moritz on the occasion of his 70th birthday. Ed.: N. Kühtreiber, Institute for Geodesy, Graz University of Technology, pp 143-154
- Martinec Z, Matyska C, Grafarend EW, Vaniček P (1993) On Helmert's second condensation method, Manuscripta Geodetica 18: 417-421
- Martinec Z (1998) Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid. Lecture notes in Earth Sciences 73. Springer Berlin Heidelberg New York
- Mayer-Gürr T (2006) Gravitationsfeld-bestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE. Dissertation. Elektronische Publikation auf dem Hochschulserver der ULB Bonn http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online
- Mladek F (2006) Hydrostatische Geodäsie. Schriftenreihe IAPG/FESG No. 24, Institut für Astronomische Physikalische Geodäsie, München. 3-934205-23-2
- Mooney WD, Laske G, Masters TG (1998) CRUST 5.1: a global crustal model at 5° x 5°. J. Geophys. Res. 103: 727-747
- Moritz H (1966) Methods for Downward Continuation of Gravity. Reihe A, Heft Nr. 50, Deutsche Geodätische Kommission, München
- Moritz H (1984) The Geodetic Reference System 1980. Bull.Géod., 58(3) ("The Geodesist's Handbook 1984"), 388-398
- Moritz H (1990) The figure of the earth: theoretical geodesy and the earth's interior. Wichmann Verlag, Karlsruhe
- Müller J (2001) Die Satellitengradiometriemission GOCE – Theorie, technische Realisierung und wissenschaftliche Nutzung. Reihe C, Heft Nr. 541, Deutsche Geodätische Kommission, München
- Nagy D (1966) The gravitational attraction of a right rectangular prism. Geophysics 31: 362-371
- Nagy D, Papp G, Benedek J (2000) The gravitational potential and its derivatives for the prism. J Geod 74: 552-560 DOI: 10.1007/s001900000116
- Nagy D, Papp G, Benedek J (2002) Corrections to "The gravitational potential and its derivatives for the prism". J Geod 76: 475 DOI: 10.1007/s00190-002-0264-7
- Nahavandchi H, Sjöberg LE (2001) Precise geoid determination over Sweden using the Stokes-Helmert method and improved topographic corrections. J Geoid 75: 74-88 DOI: 10.1007/s001900000154
- National Geophysical Data Centre (1998) ETOPO-5, bathymetry/topography data. Data Announcement 88-MGG-02, National Oceanic and Atmosphere Administration, US Department of Commerce, Washington, DC
- Novák P (2000) Evaluation of gravity data for the Stokes-Helmert solution to the geodetic boundary value problem. PhD Dissertation, Techn. Rep. of the Dept. of Geodesy and Geomatics Engineering, 207, University of New Brunswick, Fredericton
- Novák P, Vaniček P, Martinec Z, Véronneau M (2001) Effects of the spherical terrain on gravity and the geoid. J Geod 75: 491-504 DOI: 10.1007/s001900100201
- Novák P, Grafarend EW (2005) Ellipsoidal representation of the topographical potential and its vertical

- gradient. *J Geod* 78: 691-706 DOI: 10.1007/s00190-005-0435-4
- Pail R (2000) Synthetic Global Gravity Model for Planetary Bodies and Applications in Satellite Gravity Gradiometry. *Mitteilungen der Geodätischen Institute der Universität Graz*, Folge 85, Graz
- Pail R (2006) Satellitenschwerefeldmissionen CHAMP, GRACE und GOCE. Vortrag im Rahmen des Kolloquiums des Geodätischen Instituts der Universität Karlsruhe, 09.02.2006
- Pick M, Picha J, Vyskočil V (1973) *Theory of the Earth's Gravity Field*. Elsevier, Amsterdam
- Rapp RH (1982) Degree variances of the Earth's potential, topography and its compensation, *Bull Géod* 56: 89-94
- Rebhan H, Aguirre M, Johannessen JA (2000) The Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer Mission – GOCE. *Earth Observation Quarterly* 66: 6-11
- Reigber C, Jochmann H, Wunsch S, Petrovic S, Schwintzer P, Barthelmes F, Neumayer KH, König R, Förste C, Balmino G, Biancale R, Lemoine JM, Loyer S, Perosanz F (2005a) Earth Gravity Field and Seasonal Variability from CHAMP. In: Reigber C, Luehr H, Schwintzer P, Wickert J (Hrsg.), *Earth observation with CHAMP – Results from three years in orbit*. Springer, 25-30
- Reigber C, Schmidt R, Flechtner F, König R, Meyer U, Neumayer H, Schwintzer P, Zhu SY (2005b) An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: Eigen-GRACE02S. *Journal of Geodynamics* 39(1): 1-10
- Reigber C, Luehr H, Grundwaldt L, Förste C, König R, Massmann H, Falck C (2006) CHAMP Mission 5 Years in Orbit. In: Flury J, Rummel R, Reigber C, Boedecker G, Rothacher M, Schreiber U (Hrsg.), *Observation of the Earth System from Space*. Springer, 27-42
- Rummel R, Rapp RH, Sünkel H, Tscherning CC (1988) Comparisons of global topographic/isostatic models to the Earth's observed gravity field. Department of Geodetic Science and Surveying, Rep. No 388, The Ohio State University, Columbus, Ohio
- Rummel R, Balmino G, Johannessen J, Visser P, Woodworth P (2002) Dedicated gravity field missions – principles and aims. *Journal of Geodynamics* 33: 3-20
- Rummel R (2003) How to climb the gravity wall. *Space Science Reviews* 108: 1-14
- Rummel R, Flury J, Gruber T (2007) GOCE research in Germany: from sensor analysis to Earth system analysis. Proc. 'The 3rd International GOCE User Workshop', ESA-ESRIN, Frascati, Italy, 6-8 November 2006 (ESA SP-627, January 2007), CD-ROM
- Sansò F, Rummel R (1997) Geodetic boundary-value problems in view of the one centimetre geoid. *Lecture notes in Earth Sciences* 25, Springer, Berlin-New York
- Schwarz HR (1993) *Numerische Mathematik*. Teubner Verlag, Wiesbaden
- Schwarz KP, Sideris MG, Forsberg R (1990) The use of FFT techniques in physical geodesy. *Geophys J Int* 100: 485-514
- Schwintzer P, Reigber C, Bode A, Kang Z, Zhu SY, Massmann FH, Raimondo JC, Biancale R, Balmino G, Lemoine JM, Moynot B, Marty JC, Barlier F, Boudon Y (1997) Long-wavelength global gravity field models: GRIM4-S4, GRIM-C4. *J Geod* 71: 189-208 DOI: 10.1007/s001900050087
- Seitz K, Heck B (2001) Tesseroids for the calculation of topographic reductions. Abstracts "Vistas for Geodesy in the New Millennium". IAG 2001 Scientific Assembly 2-7 September 2001, Budapest, Hungary, 10
- Seitz K, Heck B, Meichle H, Wild F, Lindner K (2004) Studie zur regionalen Quasi-Geoidberechnung am Beispiel von Baden-Württemberg, Poster *Intergeo* 2004, Stuttgart
- Seitz K, Heck B (2006) Zum Einfluß der Elliptizität und Höhenbezugsfläche auf die topographische Reduktion, Vortrag im Rahmen der Geodätischen Woche, München
- Seitz K, Wild F, Heck B (2004) Effiziente Berechnung des Potentials eines Tesseroids sowie seiner ersten und zweiten Ableitungen, Poster *Geodätische Woche* 2004, Stuttgart
- Sjöberg LE (2005) A discussion on the approximations made in the practical implementation of the remove-compute-restore technique in the regional geoid modelling. *J Geod* 78: 645-653
- Stroud AH (1974) *Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations*. Springer, Berlin Heidelberg New York
- Stummer C (2006) Analyse von Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerefeldbestimmung. *Schriftenreihe IAPG/FESG* No. 25, Institut für Astronomische Physikalische Geodäsie, München. 3-934205-24-0
- Sünkel H (1985) An isostatic Earth model. Department of Geodetic Science and Surveying, Rep. No 367, The Ohio State University, Columbus, Ohio
- Torge W (2003) *Geodäsie*. Walter de Gruyter, Berlin-New York
- Tscherning CC (1976) Computation of the Second-Order Derivatives of the Normal Potential Based on the Representation by a Legendre Series. *manuscripta geodaetica* 1(1): 71-92
- Tscherning CC, Heck B (2005) Comments and reply regarding Heck (2003) "On Helmert's methods of condensation". *J Geod* 78: 457-461 DOI: 10.1007/s00190-004-0412-3

- Tsoulis D (1999a) Analytical and numerical methods in gravity field modelling of ideal and real masses. Reihe C, Heft Nr 510, Deutsche Geodätische Kommission, München
- Tsoulis D (1999b) Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients, Schriftenreihe des Instituts für Astronomische und Physikalische Geodäsie und der Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie der TU München, Nr. 3
- Tsoulis D (2001) A comparison between the Airy/Heiskanen and the Pratt/Hayford isostatic models for the computation of potential harmonic coefficients. *J Geod* 74: 637-643 DOI: 10.1007/s001900000124
- Tsoulis D (2004) Spherical harmonic analysis of the CRUST 2.0 global crustal model. *J Geod* 78: 7-11 DOI: 10.1007/s00190-003-0360-3
- Vaniček P, Huang J, Pagiatakis S, Véronneau M, Martinec Z, Featherstone W (1999) Determination of boundary values for the Stokes-Helmert problem, *J Geod* 73: 180-192 DOI: 10.1007/s001900050235
- Vaniček P, Novák P, Martinec Z (2001) Geoid, topography, and the Bouguer plate or shell. *J Geod* 75: 210-215 DOI: 10.1007/s001900100165
- Vaniček P, Tenzer R, Sjöberg LE, Martinec Z, Featherstone WE (2004) New views of the spherical Bouguer gravity anomaly. *Geophys J Int* 159: 460-472
- Vening Meinesz FA (1939) Tables fondamentales pour la réduction isostatique régionale. *Bull Géod* 63: 711-776.
- Wenzel HG (1985) Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 137
- Wild F, Heck B (2004) Effects of topographic and isostatic masses in satellite gravity gradiometry. Proc. Second International GOCE User Workshop *GOCE, The Geoid and Oceanography*, ESA-ESRIN, (ESA SP – 569, June 2004), CD-ROM
- Wild F, Heck B (2005) A comparison of different isostatic models applied to satellite gravity gradiometry. In: Jekeli C, Bastos L, Fernandes J (eds.) *Gravity, Geoid and Space Missions*, Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 230-235
- Wild F (2006) A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry, Submitted to *J Geod* for publication
- Wild F, Heck B (2006) Topographic and isostatic reductions for use in satellite gravity gradiometry, Submitted to Proc. VI Hotine Marussi Symposium, Wuhan/China, 29 May - 2 June 2006
- Wild-Pfeiffer F, Heck B (2006) Comparison of the modelling of topographic and isostatic masses in the space and the frequency domain for use in satellite gravity gradiometry, Submitted to Proc. 1st International Symposium of the International Gravity Field Service: Gravity Field of the Earth, Istanbul/Turkey, 28 August - 1 September 2006
- Wittwer T, Klees R, Seitz K, Heck B (2007) Ultra-high degree spherical harmonic analysis and synthesis using extended-range arithmetic. Online Public. *J Geod* (in print)

Lebenslauf

30. November 1977	geboren in Stuttgart-Bad Cannstatt
1984 - 1988	Grundschule in Markgröningen
1988 - 1997	Gymnasium in Markgröningen
1997 - 2002	Studium der Geodäsie und Geoinformatik an der Universität Stuttgart
2003 -	wissenschaftliche Angestellte am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe (TH)

Dank

Herzlich danken möchte ich Herrn Prof. B. Heck für die Übernahme des Hauptreferats und die wissenschaftliche Begleitung in den letzten Jahren. Er hat mir die Möglichkeit gegeben, auf allen wichtigen, das Thema betreffenden, nationalen und internationalen Tagungen teilzunehmen. Bedanken möchte ich mich auch bei meinem früheren, sehr verehrten Hochschullehrer Herrn Prof. E.W. Grafarend für die Übernahme des Korreferats und die zahlreichen Möglichkeiten des fachlichen Austauschs.

Frau Dipl.-Math. H. Stoll danke ich sehr herzlich für die gute Einführung in das Thema „Numerische Integration“.

All meinen KollegInnen am Geodätischen Institut gilt Dank für die vielen Diskussionen. Spezieller Dank gebührt Herrn Dr. K. Seitz für die Bereitstellung der Harmonischen Analyse-/Synthese-Software.

Mein besonderer Dank gilt meiner gesamten Familie für die unendliche moralische Unterstützung und Geduld während der letzten Zeit.