

Olga Wälder

Spezielle Verfahren
zur Analyse von raumbezogenen Daten

München 2008

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**



DGK Deutsche Geodätische Kommission
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C

Dissertationen

Heft Nr. 625

Spezielle Verfahren
zur Analyse von raumbezogenen Daten

Von der Fakultät für Forst-, Geo- und Hydrowissenschaften
der Technischen Universität Dresden
zur Verleihung der Lehrfähigkeit für das Lehrgebiet
“Mathematische Modellierung von raumbezogenen Prozessen”
genehmigte Habilitationsschrift

vorgelegt von

Dr.rer.nat. Olga Wälder

aus Dresden

München 2008

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:



Deutsche Geodätische Kommission

Alfons-Goppel-Straße 11 • D – 80 539 München

Telefon +49 – 89 – 23 031 1113 • Telefax +49 – 89 – 23 031 - 1283/ - 1100

e-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://www.dgk.badw.de>

Gutachter: Prof. M. Buchroithner (TU Dresden)

Prof. G. Weiß (TU Dresden)

Prof. E. Grafarend (Univ. Stuttgart)

Prof. M. Gelautz (TU Wien)

Tag der Einreichung: 27.08.2007

Tag der Verteidigung: 18.07.2008

© 2008 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus zu vervielfältigen

Zusammenfassung

Die Entwicklung und Anwendung von Verfahren zur Analyse räumlich-zeitlicher Prozesse stehen im Mittelpunkt dieser Arbeit. Mit speziellen mathematischen und statistischen Methoden konnte eine bequeme und aussagekräftige Analyse von solchem Datenmaterial ermöglicht werden. Als Beispiele werden in dieser Arbeit Fallstudien zur Gletscherkinematik im Zusammenhang mit geologischen, paläontologischen Fragestellungen und auch zu so genannten Aufmerksamkeitslandschaften, welche in der Psychologie von Bedeutung sind, präsentiert.

Die Oberfläche des Gletschers wird durch eine analytische Funktion approximiert. Mit dem Vorliegen der analytischen Beschreibung einer Struktur können weitere Elemente aus dem Wertebereich dieser Struktur an beliebigen Stellen des Definitionsbereiches geschätzt bzw. interpoliert werden. In dieser Arbeit wird nun insbesondere der Interpolation von differential-geometrischen Größen in anisotropen, d.h richtungsabhängigen, Medien nachgegangen. Solche differential-geometrische Größen wie z.B. Surface Dilatation, Surface Maximum Shear Strain u.a. stellen so genannte „Größen 2. Ordnung“ der räumlich-zeitlichen Struktur einer Oberfläche dar, wie dies in unserem Fall durch das Vorliegen mehrerer zeitlicher Messepochen gegeben ist.

Auch eine parametrische Darstellung der Blockgletscheroberfläche auf der Grundlage von Bezier-Splines wird vorgestellt. Die Deformationsanalyse von Reliefoberflächen mithilfe von Bezier-Splines erfolgt aus einem alternativen und in einem gewissen Sinn unkonventionellen Blickwinkel: Der Blockgletscher wird als komplettes Objekt aufgefasst, dessen Veränderungen mithilfe von koordinatenfreien, im CAD-Design üblichen Kategorien wie „vorderes Zungenprofil“, „linke Kante des Gletschers“, usw. beschrieben werden können.

Eine Analyse der Blockgletscheroberfläche auf der Grundlage von speziell zu diesem Zweck eingeführten Wavelet-Splines wird vorgestellt, wobei insbesondere anisotrope Strukturen Berücksichtigung finden konnten. Mithilfe spezieller Splineflächendarstellungen ist es gelungen, einen räumlich-zeitlichen statistischen Ausreißertest bzw. Test auf Abnormitäten in Geodaten zu entwickeln, welcher in der vorliegenden Arbeit diskutiert wird.

Die Schwierigkeiten bei der Datenerfassung und die damit verbundene Ungenauigkeit der Messwerte legen auf geradezu natürliche Art und Weise die Berücksichtigung von Verfahren und Methoden der Fuzzy-Theorie nahe. Es sei daran erinnert, dass es bei vielen geowissenschaftlichen Anwendungen nicht nur darum geht, einen Wert für eine bestimmte Charakteristik herleiten zu können, sondern auch darum, die mit diesem Wert verbundene Güte nachfolgender Ergebnisinterpretationen quantifizieren zu können. Die Fuzzy-Theorie im obigen Sinne liefert ein bequemes Instrument für diesen Zweck. Eine entsprechende Genauigkeitsanalyse differential-geometrischer Größen wird in der Arbeit präsentiert.

In Yuanzhong und Litao (2005) wird ein ARMA-Modell zur Beschreibung, Analyse und Vorhersage von Dammdeformation präsentiert. In dieser Arbeit schlagen wir nun weitere, verbesserte ARMA-Modelle vor. Beispielsweise ist es uns gelungen, die Genauigkeit der Vorhersage mithilfe dieser Modelle um annähernd 50% zu verbessern.

Bei dem vorgestellten Forschungsgebiet ist grundsätzlich eine *interdisziplinäre* Zusammenarbeit erforderlich. In dieser Arbeit diskutierte Verfahren werden oftmals im Zusammenhang mit Fragestellungen aus der Blockgletscherforschung angewendet. Umfangreiches Datenmaterial konnte hierbei im Rahmen einer Forschungsk Kooperation mit dem Institut für Geologie und Paläontologie der Universität Innsbruck zur Verfügung gestellt und analysiert werden.

Symbolverzeichnis

E^3	dreidimensionaler Euklidischer Raum
x, y, z	Koordinaten des dreidimensionalen Euklidischen Raums
X, Y, Z	Gitterkoordinaten
Φ	affine Abbildung
A	Skalierungsmatrix
v	Translationsvektor
$b_{ij}^{rr}(u, v), B_{00}^k(u, v)$	Bezierflächen
$I(u, v), II(u, v)$	erste, zweite Fundamentalform
GR	Gradient
$S^p(x, y)$	Wavelet-Spline der Ordnung (Tiefe, Grad) p
RE	Reliefenergie
DIL	Surface Dilatation
$DIL\tilde{}$	unscharfe Surface Dilatation
Γ	Surface Maximum Shear Strain
$\tilde{\Gamma}^2$	unscharfes Quadrat des Surface Maximal Shear Strains
MR	Mittleres Relief, mittlere Oberfläche
$VarR$	Reliefvarianz
$\tilde{a} = [a^-, a^0, a^+]$	Fuzzy-Zahl
$\varphi(x), \varphi(y)$	Lagrange-Funktionen
$p(x, y)$	zweidimensionales Lagrange-Polynom
$\tilde{p}(x, y)$	unscharfes Lagrange-Polynom
Δ_x, Δ_y	erste partielle Ableitungen
$\tilde{\Delta}_x, \tilde{\Delta}_y$	unscharfe erste partielle Ableitungen
$\tilde{\Delta}_{x(p)}^{ij}, \tilde{\Delta}_{y(p)}^{ij}$	unscharfe partielle p -te Ableitungen (in Form von Differenzen)
\tilde{Q}	unscharfe Gradientenlänge
$R(x, y, T)$	zufälliges Relief zum Zeitpunkt T
$D(x, y, T)$	Trend des zufälligen Reliefs zum Zeitpunkt T
$\Phi = \{x_i\}$	Punktprozess, unmarkiert
$\Psi = \{x_i, m(x_i)\}$	Punktprozess, markiert
$\Lambda(B)$	Intensitätsmaß
$\alpha_f^{(2)}(B_1 \times B_2)$	faktorielles Momentenmaß 2. Ordnung für markierte Punktprozesse
$\rho_f^{(2)}(x_1, x_2)$	f -Produktichte
$e_h(t)$	Epanecnikov-Kern
$k_f(r)$	Markenkorrelationsfunktion
$\hat{k}_f(r)$	empirische Markenkorrelationsfunktion

H_0, H_1	statistische Hypothesen
T	Testgröße
α	Signifikanzniveau

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	9
<hr/>	
2. Approximation mittels einer analytischen Funktion	13
<hr/>	
2.1 Problemstellung und einige Lösungswege: ein kurzer Überblick	
2.2 Beschreibung des Datenmaterials	
2.3 Approximation mithilfe von Bezier-Splines	
2.4 Sequentielle Approximation mithilfe von Wavelet-Splines	
2.5 Spezielle, nicht-negative kubische Splines (SNNK-Splines) zur Approximation von ein- bzw. mehrdimensionalen Dichtefunktionen	
3. Interpolation von differential-geometrischen Größen	35
<hr/>	
4. Unschärfefortpflanzung für differential-geometrische Größen	43
<hr/>	
4.1 Einige Definitionen aus der Fuzzy-Theorie	
4.2 Mathematische Modellierung von unscharfen Oberflächen	
5. Ein statistisches Verfahren zur Indikation von Datenabnormitäten	51
<hr/>	
6. Anwendungen von Interpolationsverfahren für differential-geometrische Größen	55
<hr/>	
6.1 Fallstudie „Kaiserberg“: zum sequentiellen Aufbau von Wavelet-Splines	
6.2 Fallstudie „Reichenkar“: gemischte Wavelet-Splines und Anisotropie	
6.3 Fallstudie „Reichenkar“: Bezier-Splines	
6.4 Fallstudie „Reichenkar“: Statistische Untersuchungen zur Datenabnormität mithilfe von Wavelet-Splines	
6.5 Fallstudie „Reichenkar“: Unschärfefortpflanzung von Messungen auf abgeleitete differential-geometrische Größen	
6.6. Fallstudie „Aufmerksamkeitslandschaften“: Bildanalyse mithilfe von Wavelet-Splines	
7. Eine Gegenüberstellung von Reliefapproximationen anhand zweier Verfahren	83
<hr/>	
7.1 Kurze Darstellung zweier Lösungswege eines Approximationsproblems	
7.2 Theoretische Grundlagen beider Lösungswege	
7.3 Eine Fallstudie: Höhenmessungen am Blockgletscher Reichenkar	
8. Einige ARMA-Modelle zur Vorhersage von Dammdeformationen	93
<hr/>	
8.1 Mathematische Modellierung	
8.2 Eine Fallstudie: Analyse und Vorhersage der Dammdeformation am Gangue-Damm in einer Goldmine in der chinesischen Provinz	

9. Empirische statistische Tests in sozial-psychologischen Untersuchungen 101

- 9.1 Einleitung zur Problematik
- 9.2 Eine kurze Einführung in die Terminologie der räumlichen Statistik und der Punktprozesstheorie
- 9.3 Begriff „Aufmerksamkeitslandschaft“ und eine kurze Beschreibung des Experimentes
- 9.4 Empirische statistische Testverfahren bezüglich der Identität zweier Betrachtungsprozesse

Diskussion der Ergebnisse 111

Literatur 117

1. Einleitung

Praktisch alle Prozesse bzw. Gesetzmäßigkeiten, die in den Naturwissenschaften untersucht werden, können räumlich-zeitlichen Phänomenen zugeordnet werden. Die Erfassung des Datenmaterials spielt dabei eine wichtige Rolle im Hinblick auf die weitere Analyse dieser Daten. Die Fragen, *wo*, *wann* und *wie* die Daten erfasst und bearbeitet werden, können nun als die drei entscheidenden „W“ („3W“-Problem) bezeichnet werden.

Die Entwicklung und Anwendung von Verfahren zur Analyse räumlich-zeitlicher Prozesse soll im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen. Ziel ist es dabei, mit speziellen mathematischen und statistischen Methoden eine bequeme und aussagekräftige Analyse von solchem Datenmaterial zu ermöglichen, das nicht auf konventionelle Weise bearbeitet werden kann. Als Beispiel hierfür können Daten zur Gletscherkinematik (Geologie, Paläontologie) und auch so genannte Aufmerksamkeitslandschaften (Psychologie) genannt werden.

Die meisten Approximationsverfahren befassen sich mit dem Problem der optimalen Beschreibung einer Struktur, die an endlich vielen Stellen des räumlich-zeitlichen Mediums mittels Elementen ihres Wertebereiches (Skalar, Vektor, Matrix usw.) gegeben ist, mit Hilfe eines funktionalen Zusammenhanges.

Die Interpolation stellt dabei eine Nebenaufgabe dar: Wenn die oben erwähnte Beschreibung der Struktur vorliegt, so können damit weitere Elemente aus dem Wertebereich der Struktur an beliebigen Stellen des Definitionsbereiches geschätzt werden. Zur Lösung dieser Nebenaufgabe braucht man nicht unbedingt eine exakte funktionale Darstellung einer Funktion. Oftmals sind Informationen über Nachbarschaftsverhältnisse zwischen Mess- und Vorhersagestellen ausreichend.

Folgende weitere Fragenstellungen der Approximationstheorie können folgendermaßen formuliert werden (nach Dierckx, 1993):

Sollten unregelmäßig verteilte Daten zunächst immer auf ein Gitter interpoliert werden, bevor man diese dann global approximiert?

Gibt es im Raum „optimale“ Positionen für so genannte Knoten, mit welchen dann die höchste Approximationsgüte erreicht würde?

Wenn einige Daten im Gitter fehlen, dürfen dann trotzdem die herkömmlichen Approximationsalgorithmen mit den geschätzten Werten verwendet werden?

Was ist bei riesigen Datenmengen zu tun?

Unter gewissen einschränkenden Annahmen versucht man auf diese Fragen plausible Antworten zu geben. Global betrachtet stellen solche Fragen eine Schnittstelle zwischen der Angewandten Mathematik und der Philosophie dar.

In dieser Arbeit wird insbesondere der Interpolation von differential-geometrischen Größen in anisotropen Medien nachgegangen. Solche differential-geometrische Größen wie z.B. Surface Dilatation, Surface Maximum Shear Strain u.a. stellen so genannte „Größen 2. Ordnung“ einer räumlich-zeitlichen Struktur wie z.B. zeitliche Epochen einer Oberfläche dar. Die Grundidee besteht in der Verwendung *zweistufiger* Interpolationsverfahren: Zunächst soll diese - nicht unbedingt stetige - anisotrope Struktur analytisch erfasst werden, darauf aufbauend wird die Interpolation der Größen 2. Ordnung durchgeführt. Praktische Anwendungen der entwickelten Verfahren werden präsentiert.

Grundsätzlich sollte und muss das gewählte Untersuchungsgebiet sogar weitgehend *interdisziplinär* erforscht werden. Unter anderem bezieht sich die obige Aufgabestellung auf die Berücksichtigung von Verfahren der räumlich-zeitlichen Deformationsanalyse. Eine ausführliche und anspruchsvolle Diskussion der entsprechenden Thematik kann Grafarend (2006) sowie Grafarend, Krumm (2006) entnommen werden.

Ausgehend von einem Datensatz, der zu einem festen Zeitpunkt erhoben wurde, lassen sich (approximierende oder interpolierende) Splinedarstellungen herleiten, und diese sind einer differential-geometrischen Untersuchung zugänglich. Dabei können die aus geodätischen Anwendungen bekannten differential-geometrischen Veränderlichkeitsparameter wie zum Beispiel *Surface Dilatation* und *Surface Maximum Shear Strain* mittels funktionaler Tensorenbeziehungen approximiert werden. Bei den Untersuchungen können zudem anisotrope Eigenschaften des Mediums berücksichtigt werden.

Mit Hilfe spezieller Splineflächendarstellungen konnte ein räumlich-zeitlicher statistischer Ausreißertest (Test auf Abnormitäten in Geodaten) entwickelt werden. Die Plausibilität dieses Tests kann anhand einer Gegenüberstellung von vorhergesagten und tatsächlichen Messungen eines Anwendungsbeispiels nachgewiesen werden.

Eine zusätzliche Aufgabestellung bezieht sich auf die Fehlerfortpflanzung der „Unschärfe“ von ursprünglichen Messungen auf abgeleitete differential-geometrische Größen. Hierzu werden Verfahren der Fuzzy-Theorie herangezogen. Damit können auch heterogene Bereiche, d.h. Bereiche mit Messungen verschiedener Unschärfe, modelliert und analysiert werden.

Es hat sich gezeigt, dass das zunächst überwiegend für geowissenschaftliche Anwendungen entwickelte Wavelet-Spline-Verfahren zur räumlich-zeitlichen Reliefsanalyse, auch bei einigen wichtigen Problemstellungen in der Psychologie nützliche Lösungsansätze bereitstellen kann.

Die meisten Anwendungen der in dieser Arbeit entwickelten Verfahren kommen aus der Blockgletscherforschung. Im Rahmen von Forschungsprojekten am Institut für Geologie und Paläontologie der Universität Innsbruck werden seit 1997 an einigen ausgewählten Blockgletschern der westlichen Stubai Alpen (Inneres Reichenkar, Sulzkar), westlichen Ötztaler Alpen (Kaiserbergtal, Ölgrube) und der Schobergruppe sowohl die äußere Morphologie als auch der interne Aufbau aktiver Blockgletscher im Detail erfasst, wobei auch das geologische und hydrogeologische Umfeld (Gesteinsaufbau, Zerlegungsgrad der Gesteine, Verwitterungsgrad, Schuttanfall, Vergletscherung im Einzugsgebiet, Niederschläge etc.) in die Untersuchungen miteinbezogen wird, siehe Krainer, Mostler (2000a,b), (2001), (2002), (2004), Krainer u.a. (2003). Erstmals wurden die Bewegungsraten am hochaktiven Blockgletscher im Inneren Reichenkar mit der GPS-Methode gemessen, siehe Chesi u.a. (1999), (2003). Die Erfassung der Fließbewegung, insbesondere der zeitlichen und räumlichen Verteilung der Fließbewegung, ist sehr wesentlich für das Verständnis des Bewegungsmechanismus und der Dynamik eines Blockgletschers. Allerdings lässt sich aus der Fließbewegung allein noch kein Fließmodell ableiten. Die Anwendung des GPS-Meßsystems führte im Hochgebirge im Vergleich zu den herkömmlichen geodätischen und photogrammetrischen Methoden zu verbesserter Messgenauigkeit. Darüber hinaus bilden die Messergebnisse eine wichtige Grundlage zur Interpretation des Fließverhaltens und der Dynamik aktiver Blockgletscher. Es ist geplant, die Messungen über einen längeren Zeitraum fortzuführen. Umso wichtiger ist es, ein geeignetes mathematisches Modell zur Beschreibung sowie Interpretation dieser Prozesse weiter zu entwickeln bzw. zu modifizieren. In der vorliegenden Arbeit werden einige Ergebnisse vorgestellt und kurz diskutiert.

Blockgletscher sind lappen- bis zungenförmige Körper aus gefrorenem Lockermaterial (Hangschutt, Moräne) und Eislinen bzw. Eiskörpern, die sich langsam hangabwärts bewegen. Die Bewegung erfolgt ähnlich wie bei Gletschern durch Kriechprozesse als Folge der internen Deformation. Die Entstehung von Blockgletschern ist nach wie vor sehr umstritten. Während in Barsch (1996), Benedict u.a. (1986) und Haerberli (1985), (1989) Blockgletscher ausschließlich als Erscheinungen des alpinen Permafrostes auffassen („ice-cemented rock glaciers“) und andere Entstehungsmöglichkeiten strikt ablehnen, betonen andere Autoren wie Ackert (1998), Clark u.a. (1994), Humlum (1996), Johnson (1978), (1980), Outcalt, Benedict (1965), Whalley, Azizi (1994), Whalley, Martin (1992), Whalley u.a. (1994), Whalley, Palmer (1998), White (1971), White (1976) auch die Möglichkeit der Entstehung aus zurückschmelzenden Kargletschern („ice-cored rock glaciers“). Im Rahmen einer von der American Geophysical Union initiierten Chapman Conference im August 1996 sind alle Teilnehmer einstimmig zur Auffassung gekommen, dass es auch Blockgletscher glazialen Ursprungs (ice-cored rock glacier) gibt, siehe Clark u.a. (1998). Damit sollte der jahrzehntelange Streit über die Entstehung von Blockgletschern nun endgültig beendet sein. Auf alle Fälle zählen Blockgletscher zu den wichtigsten und häufigsten morphologischen Erscheinungen des Hochgebirges.

Blockgletscher sind in den Ostalpen, vor allem in den Zentralalpen oberhalb ca. 2.500 m Seehöhe weit verbreitet. In einem jüngst veröffentlichten Blockgletscherinventar hat Lieb (1996) für den östlichen Teil der österreichischen Alpen 1451 Blockgletscher (1169 fossile und 282 intakte) aufgelistet. Auch aus den Stubai und Ötztaler Alpen sowie aus der Silvretta Gruppe sind zahlreiche, teils sehr große und hochaktive Blockgletscher bekannt, siehe Gerhold (1967), (1969).

Während aus den Westalpen, insbesondere aus den Schweizer Alpen bereits zahlreiche Detailstudien von Blockgletschern vorliegen, sind in den Ostalpen bislang nur wenige Blockgletscher untersucht worden, siehe Lieb (1996), moderne Untersuchungen fehlen weitgehend.

In den letzten 150 Jahren (seit 1850) haben durch die Erwärmung die Alpengletscher ca. ein Drittel ihrer Fläche und die Hälfte ihrer Masse verloren, da die Schneegrenze um ca. 100 m angestiegen ist. Die Veränderungen der Alpengletscher werden auch seit gut hundert Jahren aufgezeichnet, so dass man darüber sehr gut Bescheid weiß.

Kaum bekannt sind dagegen die Veränderungen der aktiven Blockgletscher in diesem Zeitraum. Veränderungen an aktiven Blockgletschern sind deshalb nahezu unbekannt, weil das Eis der aktiven Blockgletscher unter einer mehr oder weniger dicken, nicht gefrorenen Schuttlage verborgen und daher direkten Untersuchungen nicht zugänglich ist. In aktiven Blockgletschern sind derzeit große Schuttmassen im Hochgebirge stabilisiert, indem sie gefroren sind. Die gegenwärtige Erwärmung könnte allerdings in den periglazialen Bereichen des Hochgebirges durch das fortschreitende Abschmelzen des Eises in aktiven Blockgletschern in nächster Zukunft zu einer beträchtlichen Zunahme von Massenbewegungen (Murgängen, Hangrutschungen, Felsstürzen etc.) führen und dadurch Straßen, Seilbahnen, Schipisten etc. gefährden. Beispiele aus den Schweizer Alpen verdeutlichen diese Problematik. Bewegungsmessungen werden an aktiven Blockgletschern bereits seit über 70 Jahren durchgeführt, langjährige Messreihen existieren jedoch im Vergleich zu normalen Gletschern nur von ganz wenigen Blockgletschern. Die Messmethodik reicht von einfachsten, recht ungenauen Vermessungen der Stirn oder von Steinreihen am Blockgletscher bis hin zu geodätischen Präzisionsmessungen mit Theodoliten und photogrammetrischen Auswertungen von Luftbildern, siehe Barsch (1996), Haerberli (1985). Eine Zusammenfassung der bislang gemessenen Bewegungsraten von aktiven Blockgletschern ist in den Arbeiten von Barsch (1996), Haerberli (1985) und Vitek, Giardino (1987) enthalten. Die ersten Messdaten über Fließbewegungen stammen vom Val Sassa Blockgletscher in den Schweizer Alpen mit einer durchschnittlichen Bewegungsrate von 168 cm /Jahr, vgl. Chaix (1919), (1923). Laut Wahrhaftig, Cox (1959) wurden in einer mehrjährigen Messreihe (1949 – 1957) am Clear Creek Blockgletscher in den Alaska Range durchschnittliche Fließbewegungen von 57 cm/Jahr im unteren Teil und 64 cm/Jahr im oberen Teil festgestellt. Seither wurden auch an vielen anderen aktive Blockgletschern Bewegungsmessungen durchgeführt, wobei meistens nur ein oder zwei Profile quer zur Bewegungsrichtung eingemessen wurden. Jede Profilerihe besteht meist aus 5-6 markierten Gesteinsblöcken. Die Messungen erfolgten meist nur über wenige Jahre.

In Österreich hat Pillewizer bereits 1938 mit der systematischen Vermessung von aktiven Blockgletschern der Ötztaler Alpen (Äußeres und Inneres Hochebenkar bei Obergurgl, Rotschliffkar im Taschachtal, Ölgruben-Blockgletscher im Kaunertal) begonnen. Der Blockgletscher im Äußeren Hochebenkar bei Obergurgl wird seither als einziger Blockgletscher laufend nachgemessen, weist somit in Österreich den weitaus längsten Beobachtungszeitraum von immerhin 70 Jahren auf, siehe Haerberli, Patzelt (1982), Vietoris (1958) und (1972). Seit 1994 werden auch am Dösener Blockgletscher (Ankogelgruppe) umfangreiche Bewegungsmessungen durchgeführt. Nach Kaufmann (1996) ist die Stirn des Blockgletschers im Äußeren Hochebenkar in den letzten 50 Jahren um 148 m vorgestoßen, was einer mittleren jährlichen Fließgeschwindigkeit von 3 m/Jahr entspricht. Nach luftbildphotogrammetrischen Auswertungen betrug die mittlere jährliche Fließgeschwindigkeit des Dösener Blockgletschers (Ankogelgruppe) im Zeitraum 1954 - 1975 21 cm und hat sich im Zeitraum 1975 – 1993 auf 12 cm verlangsamt. Von 1954 bis 1993 hat sich die Blockgletscherstirn um 6.6 m vorbewegt, vgl. Kaufmann (1996). Die meisten aktiven Blockgletscher zeigen jährliche Bewegungsraten von einigen cm bis 1 m, vgl. Haerberli, W. (1985), meist liegen sie deutlich unter 1 m, vgl. Benedict u.a. (1986), Calkin u.a. (1987), Potter (1972), Potter u.a.

(1998), Sloan u.a. (1998), Wahrhaftig, Cox (1959). Nach Barsch (1996) liegen die Werte zwischen 1-2 cm (Minimum) und 100 – 200 cm (Maximum). Höhere Fließbewegungen sind sehr selten und meist auf spezielle topographische Verhältnisse (extrem steiles Gefälle im Stirnbereich) zurückzuführen. Die bislang höchsten Fließbewegungen wurden am Blockgletscher im Äußeren Hochebenkar mit 5m/Jahr gemessen, vgl. Vietoris, L. (1972).

Weitere Anwendungen der in dieser Arbeit diskutierten Verfahren beziehen sich auf eine unkonventionelle statistische Analyse sozial-psychologischer Daten und auf spezielle ARMA-Vorhersagemodelle von Dammdeformationen. Eine nähere Beschreibung der mathematischen Modelle und des entsprechenden Datenmaterials kann den entsprechenden Kapiteln entnommen werden. Die abschließende Diskussion der Ergebnisse wird in einem zusätzlichen Diskussionskapitel zusammengefasst. Weitere Details können den beigefügten Kopien ausgewählter Veröffentlichungen entnommen werden.

Es ist sicherlich unbestritten, dass mittlerweile eine unüberschaubare Anzahl verschiedener Approximationsverfahren existiert. Viele dieser Verfahren verdanken ihre Entwicklung konkreten praktischen Aufgabestellungen. Eine allgemein gültige Lösung für alle Approximationsprobleme kann und wird es wahrscheinlich nicht geben. Vielmehr sollte man stets die praktische Relevanz einer solchen Lösung im Auge behalten. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Herleitung solcher praxisrelevanter Verfahren leisten.

Danksagung

Ein besonderer Dank geht an Prof. M. Buchroithner, Institut für Kartographie der TU Dresden für die langjährige intensive Kooperation und Betreuung. Die Autorin möchte sich bei Prof. K. Krainer, Institut für Geologie und Paläontologie der Universität Innsbruck, für die angenehme Zusammenarbeit und für die zur Verfügung gestellten Daten herzlich bedanken. Ebenso bedankt sich die Autorin bei Prof. B.M. Velichovsky, Institut für Arbeits- und Organisationspsychologie der TU Dresden, für die bestehende Kooperation und die freundliche Bereitstellung von Datenmaterial. Außerdem sei Prof. Grafarend, Geodätisches Institut der Universität Stuttgart, für seine hilfreichen Hinweise und Anregungen gedankt, die das ursprüngliche Interesse der Autorin an der Deformationsanalyse verstärkt haben.

Zudem sei dem Staatsministerium für Wissenschaft und Kunst des Freistaates Sachsen gedankt, das durch die Gewährung einer Habilitationsförderung ebenfalls zu dieser Schrift beigetragen hat.

2. Approximation mittels einer analytischen Funktion

2.1 Problemstellung und einige Lösungswege: ein kurzer Überblick

Nach Dierckx (1993) lautet die Definition einer Approximationsfunktion wie folgt:

Definition 2.1-1. z_r , $r = 1, \dots, m$, seien Werte einer Funktion $z = z(x, y)$ an den Stellen (Stützpunkten) (x_r, y_r) , $r = 1, \dots, m$, aus ihrem Definitionsbereich. Die Funktion $z(x, y, \theta)$ heißt eine Approximationsfunktion (oder eine Approximierende) mit festen Stützpunkten, wenn der n -dimensionale Vektor θ so gewählt ist, dass $z(x_r, y_r, \theta) = z_r$ ist.

Wir bezeichnen die Forderung $z(x_r, y_r, \theta) = z_r$ als *Stützpunkttreue*. Bei dieser Definition handelt es sich um eine so genannte Approximation (und auch um eine Interpolation) mit festen Stützpunkten. Zum Beispiel gehören hierzu Approximationen mittels Lagrange-Funktionen für gitterförmig verteilte Stützpunkte. Diese Approximation hat einen entscheidenden Nachteil: Es kommt nicht selten zu unerwünschten Schwingungen zwischen den Stützpunkten. Um diese zu vermeiden, wurden Spline-Verfahren entwickelt, bei denen durch spezielle Techniken ein möglichst „sparsamer“ Verlauf einer Funktion angestrebt wird.

Unter einem *Spline* versteht man eine stückweise stetige Funktion oder, genauer ausgedrückt, eine Familie von stetigen Funktionen, die für lokale Bereiche der gegebenen Stützpunkte angepasst werden. Man sieht also vom globalen Approximationsansatz mittels einer einzigen Funktion ab. Der Preis für den Qualitätsgewinn gegenüber Lagrange-Funktionen ist allerdings hoch: Spline-Berechnungen sind normalerweise sehr rechenaufwendig und die Anzahl der lokalen Output-Parameter ist hoch.

Es gibt aber auch Approximationsansätze, die nicht unbedingt die Forderung $z(x_r, y_r, \theta) = z_r$ (feste Stützpunkte) erfüllen müssen. Beispielsweise weist eine Approximation mittels Bezier-Splines nur die End-Punkt-Treue auf, siehe Farin (1993). D.h. die Endpunkte eines Kontrollpolygons behalten ihre genauen z -Werte. Die nach diesem Verfahren erzeugten analytischen Oberflächen „schweben“ zwischen den weiteren Punkten, ohne diese notwendigerweise zu berühren.

Bei diversen Regressionsansätzen wird oftmals eine minimale quadratische Abweichung zwischen den geschätzten und gemessenen Werten und nicht die Stützpunkttreue gefordert. Es gibt auch Approximationsverfahren, bei deren Konstruktion eine natürliche Nähe eines Punktes (x, y) im Raum zu den Stützstellen benutzt wird. Die Methode der inversen Distanzen gehört zum Beispiel zu solchen Verfahren.

Schließlich spielt auch die Verteilung der Stützpunkte im Raum eine entscheidende Rolle bei der Auswahl eines relevanten Approximationsverfahrens. Wenn nun eine gitterförmige Struktur der Stützpunkte vorliegt, gibt es „elegante“ Ansätze, um eine geeignete analytische Funktion für solche Daten zu ermitteln. Einen besonders unbequemen Fall stellen allerdings zufällig im Raum verstreute, unstrukturierte Daten dar.

Mittlerweile gibt es eine unüberschaubare Anzahl verschiedener Approximationsverfahren. Sie verdanken ihre Entwicklung einer ebenso großen Anzahl praktischer Aufgabestellungen. Man sollte natürlich auch keine allgemein gültige Lösung für ein Approximationsproblem erwarten. Vielmehr sollte man versuchen, die praktische Relevanz einer Lösung zu gewährleisten. Wir beschränken uns daher im Weiteren nur auf die Diskussion, Entwicklung und Verallgemeinerung solcher Approximationsansätze, die bei der Analyse des konkret vorliegenden Datenmaterials in Frage kamen.

2.2 Beschreibung des Datenmaterials

Aktive Blockgletscher



Abbildung 2-1: Ein aktiver Blockgletscher in den österreichischen Alpen (Quelle: Prof. Krainer, Institut für Geologie und Paläontologie, Universität Innsbruck).

Aktive Blockgletscher sind lappen- bis zungenförmige Körper aus gefrorenem Lockermaterial (Verwitterungsschutt, Moränenmaterial) und Eislinsen bzw. Eiskörper, die sich langsam hangabwärts bewegen, vgl. Krainer, Mostler (2000, 2001, 2004). Ein

Beispiel eines solchen Gletschers kann Abb. 2-1 entnommen werden. Die Bewegung ist vor allem auf Kriechprozesse zurückzuführen, die durch das Schmelzen des Eises entstehen. Außerdem wird auch basales Gleiten als Grund dieser Kinematik vermutet. Blockgletscher zählen zu den auffälligsten und häufigsten morphologischen Erscheinungsformen des Hochgebirges. Während in den Westalpen (beispielsweise in der Schweiz) bereits zahlreiche Detailstudien über aktive Blockgletscher vorliegen, sind in den Ostalpen bislang nur wenige Blockgletscher näher untersucht worden. Moderne Untersuchungen fehlen weitgehend.

In den letzten 150 Jahren haben als Folge der globalen Erwärmung die Alpengletscher ungefähr ein Drittel ihrer Fläche und die Hälfte ihrer Masse verloren, da die Schneegrenze um 100 m angestiegen ist. Während Veränderungen der Alpengletscher seit über hundert Jahre aufgezeichnet werden und daher gut bekannt sind, sind Veränderungen an aktiven Blockgletschern in diesem Zeitraum nahezu unbekannt, vor allem deshalb, weil das Eis der aktiven Blockgletscher unter einer mehr oder weniger dicken, ungefrorenen Schuttlage verborgen und daher direkten Beobachtungen und Untersuchungen nur schwer zugänglich ist.

In zahlreichen aktiven Blockgletschern der Alpen sind derzeit noch große Schuttmaßen stabilisiert, indem sie gefroren sind. Eine fortschreitende Erwärmung könnte allerdings in den periglazialen Bereichen des Hochgebirges durch das fortschreitende Abschmelzen des Eises in den aktiven Blockgletschern in Zukunft zu einer beträchtlichen Zunahme von Massenbewegungen (Murgängen, Hangrutschungen, Felsstürzen) führen und dadurch Strassen, Seilbahnen, Skipisten und andere Einrichtungen im hochalpinen Raum gefährden.

Einige Blockgletscher werden aus steilen Karwänden mit Verwitterungsschutt versorgt. Solche Schutfahnen ziehen vom Wandfuß zum Blockgletscher hinunter, biegen bei Erreichen des Blockgletschers um und bilden schließlich am Blockgletscher markante longitudinale Rücken und Vertiefungen, siehe Abb. 2-1.

Die Bewegungsraten des Blockgletschers Reichenkar liegen derzeit im Stirnbereich bei maximal 2,5 m/Jahr, im mittleren Steilabschnitt bewegen sich einzelne Blöcke bis zu knapp 7 m/Jahr! Wegen dieser bemerkenswerten Kinematik eignet sich das Datenmaterial hervorragend zur räumlich-zeitlichen Deformationsanalyse.

Nun soll das bereits in der Einleitung erwähnte „3W“-Problem an diesem Beispiel etwas näher erläutert werden. Im August 2004 nahm ich an der Vermessung eines Blockgletschers teil, um mir ein klares Bild über die Datenerfassung zu machen. Das Datenmaterial kommt also tatsächlich von einem aktiven Blockgletscher. Man stelle sich dabei einen riesigen Haufen von Felsblöcken vor, einige davon weisen an der Oberfläche einen Durchmesser von bis zu 2 m auf. Von diesen Steinen wurden etwa 100 farblich markiert, welche als Messstellen vorgesehen waren. Die sich ständig in Bewegung befindende Masse überrollt allerdings viele solcher Messstellen, dreht sie um, überschüttet sie mit neuen Felsblöcken oder macht sie auf eine andere Art und Weise unauffindbar. Obwohl man auf dem Gletscher zwar von Jahr zu Jahr näherungsweise identische Routen läuft, können Fehler aber dennoch nicht ausgeschlossen werden: Man verfehlt beispielsweise einige Messpunkte. Aufgrund von Witterungseinflüssen im Hochgebirge können manchmal Stellen unpassierbar sein oder nicht erreicht werden. Bei wiederholten Messungen können also Messfehler aufgrund der Zeitverschiebung entstehen. Und selbstverständlich sind die markierten Messstellen nicht gitterförmig auf dem Blockgletscher verteilt: Eine geeignete Interpolation der gewonnenen Daten vor weiteren Untersuchungen ist daher erforderlich.

Aufmerksamkeitslandschaften

Mit dem Begriff „Landschaft“ befasst man sich normalerweise in den Geowissenschaften. Der Begriff „Aufmerksamkeitslandschaft“ ist außerhalb der Psychologie weitgehend unbekannt. Eine ausführliche Definition dieses Phänomens wird den entsprechenden Spezialisten überlassen. Aus mathematischer Sicht stellt eine Aufmerksamkeitslandschaft schlicht eine stetige Oberfläche dar, die den Häufigkeiten von Augenblickfixierungen entspricht. Diese Oberfläche besitzt einen vorgegebenen Definitionsbereich, der sich auf eine Bildebene beschränkt. Die Methoden zur Analyse solcher Oberflächen unterscheiden sich daher nicht signifikant von denen aus den Geowissenschaften.

2.3 Approximation mithilfe von Bezier-Splines

Der Arbeit eines Designers liegt keine mathematische Beschreibung des Objektes zugrunde. Ein Punkt im Raum wird nicht als ein Koordinatentripel verstanden. Der Designer denkt vielmehr in praktischen Begriffen wie Ecke, Mittelpunkt oder glatte Kurve.

Die analytische Beschreibung eines Objektes beruht gewöhnlich auf einem Koordinatensystem. Wenn man aber nur an dem Objekt selbst und nicht an seinem Koordinatenbezug interessiert ist, existieren Methoden, die eine *koordinatenfreie* oder *koordinatenunabhängige* Verwaltung solcher Objekte unterstützen. Die meisten Abbildungen, die in einer Computergraphik oder CAD-Umgebung zum Positionieren und Skalieren von Objekten benutzt werden, sind so genannte *affine Abbildungen*. Dieser Begriff geht auf Euler zurück. Als Grundoperation für Punkte gilt die baryzentrische Kombination.

Eine Abbildung Φ , die E^3 auf sich selbst abbildet, wird als *affine Abbildung* bezeichnet, wenn sie die baryzentrische Kombinationen invariant lässt, d.h.

$$\forall x = \sum_{j=0}^n \alpha_j b_j, \quad \text{mit } x, b_j \in E^3 \quad \text{für } \Phi \Rightarrow \quad (2-1)$$

$$\Phi x = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Phi b_j, \quad \Phi x, \Phi b_j \in E^3.$$

Die Formel (2-1) bedeutet mit anderen Worten: Bei einer affinen Abbildung wird der Mittelpunkt einer Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet. Die bekannte Form einer affinen Abbildung Φ entspricht

$$\Phi x = Ax + v, \quad (2-2)$$

wobei A eine 3×3 Matrix und v ein Vektor in E^3 ist.

Der Berechnung von Bezier-Splines liegt der so genannte Algorithmus von Casteljeau zugrunde. Die Arbeiten von Casteljeau stammen aus dem Jahr 1959. Bis 1975 blieb der Algorithmus unbekannt, weil er nur auf Französisch formuliert wurde und lediglich in Form interner Forschungsberichte bei Citroen vorlag, siehe Farin (1993).

Den Grundstein des Algorithmus von Casteljeau zur Berechnung einer Bezier-Fläche bildet eine wiederholte bilineare Interpolation, bei der im ersten Schritt eine parametrische Oberfläche $x(u,v)$ wie folgt entsteht:

$b_{00}, b_{01}, b_{10}, b_{11}$ seien vier verschiedene Punkte im E^3 . Die Menge aller Punkte $x \in E^3$ der Form

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{ij} B_i^1(u) B_j^1(v), \quad \text{mit} \quad B_k^1(y) = (1-y)^{1-k} y^k, \quad (2-3)$$

$$k = 0, 1; \quad y = u, v$$

wird als hyperbolisches Paraboloid durch die vier Punkte $b_{ij}, i, j = 0, 1$, bezeichnet. In Matrixform gilt dann für (2-3):

$$x(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}. \quad (2-3')$$

Die Fläche $x(u,v)$ wird auch manchmal *bilineare Interpolierende* genannt. Sie kann als Abbildung eines Einheitsquadrates in die Oberfläche $x(u,v)$ angesehen werden.

Man erhält Bezier-Flächen aus wiederholten bilinearen Interpolationen wie folgt: Für gegebene $\{b_{ij}\}_{i,j=0}^n$ und $(u, v) \in R^2$ setzt man

$$b_{ij}^{rr}(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{ij}^{r-1r-1} & b_{ij+1}^{r-1r-1} \\ b_{i+1j}^{r-1r-1} & b_{i+1j+1}^{r-1r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

für

$$r = 1, \dots, n; \quad i, j = 0, \dots, n-r \quad (2-4)$$

und

$$b_{ij}^{00} = b_{ij}.$$

Dann liegt der Punkt b_{00}^{mm} mit Parametern (u, v) auf der Bezier-Fläche $b^{mm}(u, v)$.

Das Netz der $\{b_{ij}\}_{i,j=0}^n$ heißt *Bezier- oder Kontrollnetz*. Seine Punkte werden *Bezier- bzw. Kontrollpunkte* genannt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit und nur zur Vereinfachung der Darstellung wird in (2-4) von der gleichen Anzahl der Kontrollpunkte in u - und v -Richtung ausgegangen. Dies ist aber keine notwendige Bedingung: Man erhält im Allgemeinen eine Bezier-Fläche in Form eines zweidimensionalen Polynoms mit unterschiedlichen Graden von u und v . Für ausführliche Abhandlungen diesbezüglich sei an dieser Stelle auf Farin (1993) verwiesen.

Nun soll die Bedeutung der Parameter u und v aus (2-3) und (2-4) näher erläutert werden. Wie man aus (2-3) ersehen kann, entspricht der z -Wert der Bezier-Fläche für $u=0$ und $v=0$ dem z -Wert des Eckpunktes b_{00} . Bei $u=1$ und $v=1$ gibt die

Bezier-Fläche den Eckpunkt b_{11} wieder, usw. Der Fall $u=0$ und $v \in [0,1]$ beschreibt die Lage der Punkte der Bezier-Fläche entlang des Profils $[b_{00}, b_{01}]$. Bei $u=0.5$ und $v=0.5$ kann man in einem gewissen Sinn von der geometrischen „Mitte“ der hergeleiteten Bezier-Fläche sprechen.

Bei der Oberflächendeformationsanalyse interessiert man sich für einige differential-geometrische Größen, deren Definitionen unten eingeführt werden. Um die weiteren Bezeichnungen möglichst einfach zu halten, wird Formel (2-4) wie folgt umgeschrieben:

$$B_{00}^k(u, v) = [1-u \quad u] \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

für

$$k = 1, \dots, n; \tag{2-4'}$$

und

$$B_{00}^0 = b_{00}, B_{01}^0 = b_{01}, B_{10}^0 = b_{10}, B_{11}^0 = b_{11}.$$

Die in (2-4') benutzten Bezeichnungen werden rekursiv auf jede Zelle des Kontrollnetzes übertragen. D.h. jede Zelle besitzt eine linke untere Ecke B_{00}^0 , eine rechte untere Ecke B_{10}^0 , eine obere linke Ecke B_{01}^0 und eine obere rechte Ecke B_{11}^0 . Wird die erste Iteration (bilineare Interpolation über alle Zellen) durchgeführt, so werden die Punkte des neuen, um eine Spalte und eine Zeile verkleinerten Gitters, nochmals umbenannt: Jede neue Zelle besitzt nun eine linke untere Ecke B_{00}^1 , eine rechte untere Ecke B_{10}^1 , eine obere linke Ecke B_{01}^1 und eine obere rechte Ecke B_{11}^1 usw.. Die Darstellung (2-4') ist für eine algorithmische Implementierung sinnvoller als (2-4). Die hergeleitete parametrische Bezier-Fläche $B_{00}^n(u, v)$ stellt für bestimmte Parameter u und v einen *dreidimensionalen* Ortsvektor dar.

Mit den Bezeichnungen aus (2-4') können folgende Relationen für partielle Ableitungen von Bezier-Fläche hergeleitet werden, vgl. auch Wälder (2005e):

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} B_{00}^k(u, v) &= [1-u \quad u] \frac{d}{du} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \\ &+ [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-5}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} B_{00}^k(u, v) &= 2 \cdot [-1 \quad 1] \frac{d}{du} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \\ &+ [1-u \quad u] \frac{d^2}{du^2} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} B_{00}^k(u, v) &= [1-u \quad u] \frac{d}{dv} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \\ &+ [1-u \quad u] \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dv^2} B_{00}^k(u, v) &= 2 \cdot [1-u \quad u] \frac{d}{dv} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + [1-u \quad u] \frac{d^2}{dv^2} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \\ \frac{d^2}{dvdu} B_{00}^k(u, v) &= [1-u \quad u] \frac{d^2}{dvdu} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \\ &\quad + [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + [-1 \quad 1] \frac{d}{dv} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \\ &\quad + [1-u \quad u] \frac{d}{du} \begin{bmatrix} B_{00}^{k-1}(u, v) & B_{01}^{k-1}(u, v) \\ B_{10}^{k-1}(u, v) & B_{11}^{k-1}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

für

$$k = 1, \dots, n;$$

und

$$B_{00}^0 = b_{00}, B_{01}^0 = b_{01}, B_{10}^0 = b_{10}, B_{11}^0 = b_{11}.$$

Aus der Differentialgeometrie sind folgende Größen bekannt, die mithilfe der in (2-5) berechneten partiellen Ableitungen ermittelt werden können, vgl. Voosoghi (2000):

Die erste Fundamentalform entspricht in unserem Fall (bei der Bezier-Fläche $B_{00}^n(u, v)$ werden im Folgenden die Parameter u und v weggelassen):

$$I(u, v) = \langle dB_{00}^n, dB_{00}^n \rangle = \alpha_{uu} du du + \alpha_{uv} du dv + \alpha_{vu} dv du + \alpha_{vv} dv dv,$$

mit

$$\alpha_{uu} = \left\langle \frac{d}{du} B_{00}^n, \frac{d}{du} B_{00}^n \right\rangle, \alpha_{vv} = \left\langle \frac{d}{dv} B_{00}^n, \frac{d}{dv} B_{00}^n \right\rangle, \quad (2-6)$$

$$\alpha_{uv} = \alpha_{vu} = \left\langle \frac{d}{du} B_{00}^n, \frac{d}{dv} B_{00}^n \right\rangle$$

Die zweite Fundamentalform kann dann wie in (2-7) berechnet werden:

$$II(u, v) = -\langle dN, dB_{00}^n \rangle = \beta_{uu} du du + \beta_{uv} du dv + \beta_{vu} dv du + \beta_{vv} dv dv,$$

mit

$$\beta_{uu} = -\left\langle \frac{d}{du} N, \frac{d}{du} B_{00}^n \right\rangle, \beta_{vv} = -\left\langle \frac{d}{dv} N, \frac{d}{dv} B_{00}^n \right\rangle, \quad (2-7)$$

$$\beta_{uv} = -\left\langle \frac{d}{du} N, \frac{d}{dv} B_{00}^n \right\rangle, \beta_{vu} = -\left\langle \frac{d}{dv} N, \frac{d}{du} B_{00}^n \right\rangle$$

Mit N wird in (2-7) der Normalvektor $N(u,v)$ der Bezier-Fläche bezeichnet. Seine Herleitung erfolgt mithilfe des folgenden normierten Vektorprodukts aus (2-8):

$$N = \frac{v_1 \times v_2}{|v_1 \times v_2|}, \quad v_1 = \frac{d}{du} B_{00}^n, \quad v_2 = \frac{d}{dv} B_{00}^n \quad (2-8)$$

Man bezeichnet in der Differentialgeometrie den folgenden Ausdruck als mittlere Krümmung MK einer Fläche:

$$MK(u, v) = \frac{1}{2} \{ \alpha^{uu} \beta_{uu} + \alpha^{uv} \beta_{uv} + \alpha^{vu} \beta_{vu} + \alpha^{vv} \beta_{vv} \} \quad (2-9)$$

wobei

$$\begin{bmatrix} \alpha^{uu} & \alpha^{uv} \\ \alpha^{vu} & \alpha^{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{uu} & \alpha_{uv} \\ \alpha_{vu} & \alpha_{vv} \end{bmatrix}^{-1}$$

Als *Gradient* GR der parametrischen Bezier-Fläche wird hier die Summe von Vektoren betrachtet, die den partiellen Ableitungen - nach u bzw. nach v - dieser Fläche $B_{00}^n(u, v)$ entsprechen, d.h.:

$$GR(u, v) = \frac{d}{du} B_{00}^n(u, v) + \frac{d}{dv} B_{00}^n(u, v) \quad (2-10)$$

Der Kosinus $CosW$ des Winkels zwischen den Vektoren, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der Bezier-Fläche $B_{00}^n(u, v)$ entsprechen, kann Formel (2-11) entnommen werden.

$$CosW(u, v) = \frac{\left\langle \frac{d}{du} B_{00}^n(u, v), \frac{d}{dv} B_{00}^n(u, v) \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{d}{du} B_{00}^n(u, v), \frac{d}{du} B_{00}^n(u, v) \right\rangle} \sqrt{\left\langle \frac{d}{dv} B_{00}^n(u, v), \frac{d}{dv} B_{00}^n(u, v) \right\rangle}} \quad (2-11)$$

In Abschnitt 6 wird ein Anwendungsbeispiel für die hier eingeführten differential-geometrischen Größen präsentiert.

2.4 Sequentielle Approximation mithilfe von Wavelet-Splines

Zunächst sollen einige Bezeichnungen und Begriffe näher erläutert werden. Die Abbildungen 2-2 und 2-3 veranschaulichen die folgende Definition.

Definition 2.4-1. Eine Familie von stetigen Funktionen $\{f_i(t)\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, t \in R$, wird als *2-kongruent* bezeichnet, wenn diese Funktionen die folgenden Bedingungen B.1 bis B.3 erfüllen:

$$(B.1) \quad f_i(t) = f_i\left(t + \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2}\right), \quad i = 0, 1, \dots$$

$$(B.2) \quad \max_{t \in R} (f_i(t)) = 1, \quad i = 0, 1, \dots$$

$$(B.3) \quad f_{i+1}(t^{\max_i}) = 0 \quad \text{für} \quad \forall t^{\max_i} : f_i(t^{\max_i}) = \max_{t \in R} (f_i(t)), \quad i = 0, 1, \dots$$

$$(B.4) \quad f_{i+1}(t) = f_i(2t), \quad i = 0, 1, \dots$$

Wird zusätzlich noch die Bedingung B.4 erfüllt, wird diese Familie *als 2-kongruent- einheitlich* bezeichnet.

Kommentar. Außer den Bedingungen B.2 und B.3 erinnert Definition 2.4-1 an die klassische Definition von Wavelets. Allerdings wird hier keine Orthogonalität der Funktionen $\{f_i(t)\}, i = 0,1,2,\dots, t \in \mathbb{R}$, verlangt. Bestimmte Familien von $\{f_i(t)\}, i = 1,2,\dots, t \in \mathbb{R}$ sind im $[0,1]$ orthogonal.

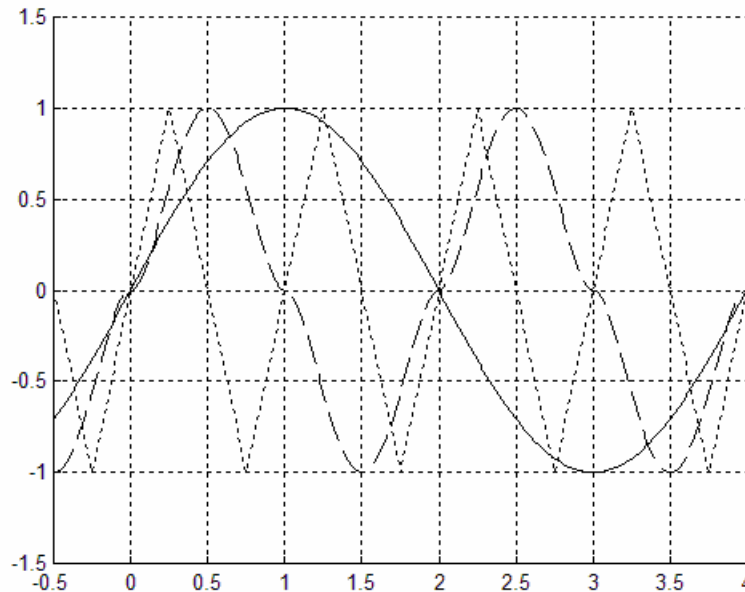


Abbildung 2-2. Ein Beispiel für drei, die Bedingungen B.1 bis B.3 aus Definition 2.4-1 erfüllende Funktionen.

In Abbildung 2-2 werden folgende Funktionen verwendet:

durchgezogene Linie: $f_0(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$,

gestrichelte Linie: $f_1(t) = \begin{cases} 16(t^* - 1)^2(t^* - 0)^2, & t^* \in [0,1] \\ -16(t^* - 1)^2(t^* - 2)^2, & t^* \in [1,2] \end{cases}$ mit $t^* = \text{mod}_2(t)$,

punktierte Linie: $f_2(t) = \begin{cases} 4t^*, & t^* \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ 4\left(\frac{1}{2} - t^*\right), & t^* \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \\ 4(t^* - 1), & t^* \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$ mit $t^* = \text{mod}_1(t)$.

Beispiel 2.4-1. Eine sinusoidale kongruent-einheitliche Familie von Funktionen kann wie folgt dargestellt werden:

$$f_i(t) = \sin\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-i} \pi t\right), \quad i = 0,1,2 \dots \quad (2-12)$$

Diese Funktionen sind einzeln stetig und unendlich oft differenzierbar.

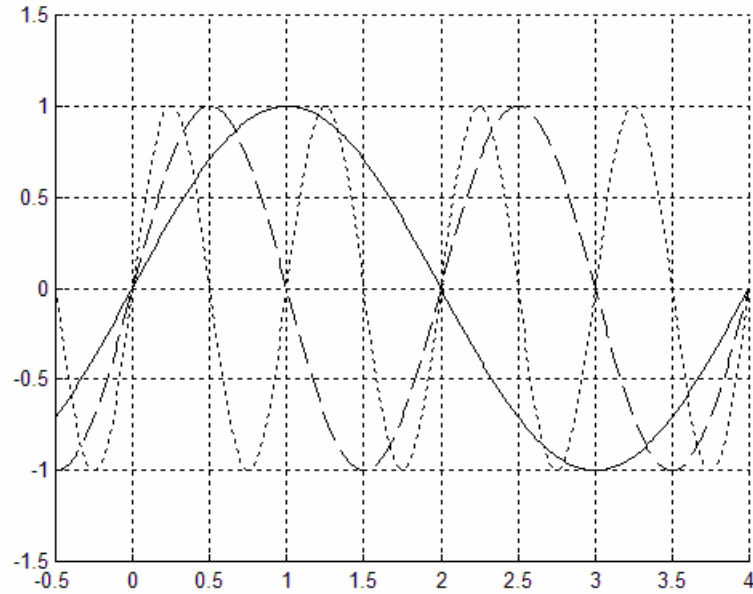


Abbildung 2-3. Ein Beispiel für drei, die Bedingungen B.1 bis B.4 erfüllende Funktionen.

In Abbildung 2-3 werden folgende Funktionen verwendet:

$$f_i(t) = \sin\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-i} \pi t\right), \quad i = 0, 1, 2.$$

Beispiel 2.4-2. Eine zickzack-förmige kongruent-einheitliche Familie von Funktionen lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$f_k(t) = \begin{cases} 2^k t^*, & t^* \in \left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \\ 2^k \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - t^*\right), & t^* \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k, \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \\ 2^k \left(t^* - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\right), & t^* \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^k, \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\right] \end{cases}$$

$$\text{mit } t^* = \text{mod}_{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}(t),$$

(2-13)

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Diese Funktionen sind einzeln stetig und an ihren lokalen Extremstellen nicht differenzierbar.

Beispiel 2.4-3. Eine 4-polynomiale kongruent-einheitliche Familie von Funktionen kann folgendermaßen definiert werden:

$$f_k(t) = \begin{cases} (2^k)^4 \left(t^* - \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right)^2 (t^* - 0)^2, & t^* \in \left[0, \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right] \\ - (2^k)^4 \left(t^* - \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right)^2 \left(t^* - \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} \right)^2, & t^* \in \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}, \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} \right] \end{cases}$$

mit $t^* = \text{mod}_{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}(t)$, (2-14)

$k = 0, 1, 2, \dots$

Diese Funktionen sind einzeln stetig und überall einmal differenzierbar.

Hinweis: Außer den Beispielen 2.4-1 bis 2.4-3 sind selbstverständlich weitere (auch asymmetrische) Formen von kongruent-einheitlichen Familien möglich.

Definition 2.4-2. Eine Funktion $S^p = S^p(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mit der folgenden Darstellung

$$S^p(x, y) = A + a_0 f_0(x) + b_0 f_0(y) + c_0 f_0(x) f_0(y) + \\ a_1 f_1(x) + b_1 f_1(y) + c_1 f_1(x) f_1(y) + \dots \\ a_{p-1} f_{p-1}(x) + b_{p-1} f_{p-1}(y) + c_{p-1} f_{p-1}(x) f_{p-1}(y),$$
(2-15)

mit $A, a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}, \text{const}$, $k = 0, \dots, p-1$
wird als *Wavelet-Spline vom Grad p* bezeichnet.

Wavelet-Splines vom Grad 1 und 2 können Abb. 2.4 und 2.5 entnommen werden.

Kommentar. Wird die Formel (2-15) verallgemeinert zu

$$S^{p, erw}(x, y) = A + \sum_{k+l=1 \dots m_0} c_0^{kl} f_0^k(x) f_0^l(y) + \dots \\ \sum_{k+l=1 \dots m_{p-1}} c_{p-1}^{kl} f_{p-1}^k(x) f_{p-1}^l(y),$$
(2-16)

mit $A, c_j^{k,l} \in \mathbb{R}, \text{const}$, $j = 0, \dots, p-1$

so spricht man von einem *erweiterten* Wavelet-Spline. Solche Splines können dann sehr hilfreich werden, wenn erweiterte Informationen (z.B. partielle Ableitungen, Krümmungen zusätzlich zu den Höhenwerten) an einigen Stützstellen berücksichtigt werden bzw. verfügbar sind. Dann kann ausschließlich der betroffene Bereich näher untersucht werden, ohne dass massive globale Umrechnungen für das ganze Gebiet erforderlich sind.

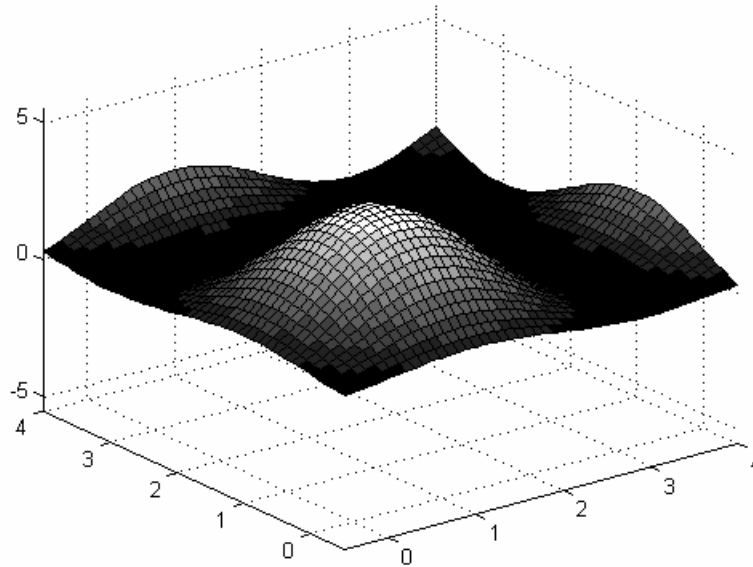


Abbildung 2-4. Beispiel eines Wavelet-Spline vom Grad 1.
Alle hierzu benutzte Konstanten aus (2-15) sind gleich 1.

$$f_0(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ und } f_0(y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right).$$

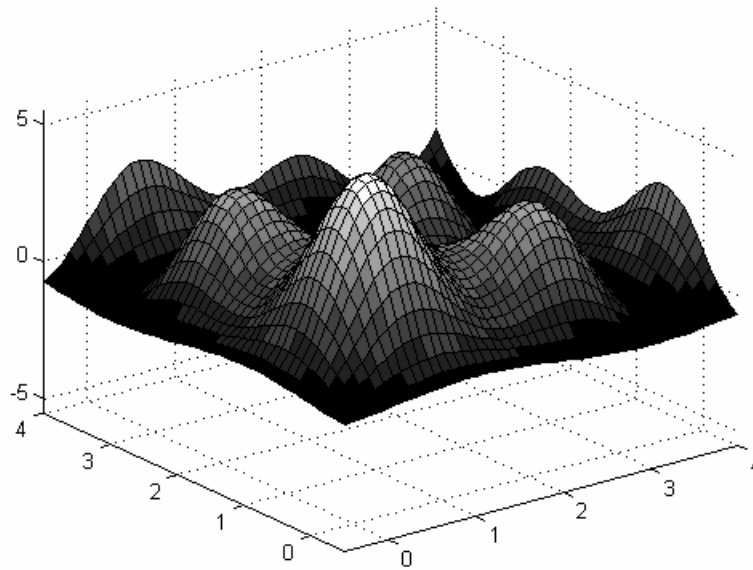


Abbildung 2-5. Beispiel eines Wavelet-Spline vom Grad 2.
Alle hierzu benutzte Konstanten aus (2-15) sind gleich 1.

$$f_i(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-i} \pi x\right) \text{ und } f_i(y) = \sin\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-i} \pi y\right), \quad i = 0,1.$$

LEMMA 2.4-1. (Sequentielles Verfahren zur Konstruktion von lokal-adaptiven Wavelet-Splines zur Ausdünnung sowie zur Oberflächenapproximation von Gitterwerten)

$Z(x_i, y_j)$, $i, j = 1, \dots, N$, $N = 2^{p-1} + 1$, $p = 1, 2, \dots$ sei ein Gitter von Z -Werten. Für jedes $k = 1, 2, \dots, p$, existiert dann eine Familie $S_k^P(x, y) = \{S_l^P(x, y)\}_{l=1, \dots, 4^{k-1}}$ von Wavelet-Splines vom Grad k , für welche gilt:

$$(L.1) \quad S_k^P(x_i, y_j) = Z(x_i, y_j), \quad \text{für } \forall i, j = 1, (2^{p-k} + 1), (2 \cdot 2^{p-k} + 1), (3 \cdot 2^{p-k} + 1), \dots, N,$$

woraus direkt folgt:

$$(L.2) \quad S_{p-1}^P(x_i, y_j) = Z(x_i, y_j), \quad \text{für } \forall i, j = 1, \dots, N,$$

$$(L.3) \quad \begin{aligned} S_{k+1}^P(x, y) &= S_k^P(x, y) + R_{k+1}(x, y), \quad \text{mit} \\ R_{k+1}(x_i, y_j) &= 0 \quad \text{für} \\ \forall i &\in \left\{ 1, (2^{p-(k+1)} + 1), (2 \cdot 2^{p-(k+1)} + 1), \dots, N \right\} \quad \text{und} \\ \forall j &\in \left\{ 1, (2^{p-(k+1)} + 1), (2 \cdot 2^{p-(k+1)} + 1), \dots, N \right\} \setminus \left\{ 1, (2^{p-k} + 1), (2 \cdot 2^{p-k} + 1), \dots, N \right\} \\ &\text{sowie} \\ \forall j &\in \left\{ 1, (2^{p-(k+1)} + 1), (2 \cdot 2^{p-(k+1)} + 1), \dots, N \right\} \quad \text{und} \\ \forall i &\in \left\{ 1, (2^{p-(k+1)} + 1), (2 \cdot 2^{p-(k+1)} + 1), \dots, N \right\} \setminus \left\{ 1, (2^{p-k} + 1), (2 \cdot 2^{p-k} + 1), \dots, N \right\} \\ &k = 1, 2, \dots, p - 1. \end{aligned}$$

Die Wavelet-Splines einer solchen Familie können sich lokal unterscheiden. Ihre Konstruktion - basierend auf der Auswahl von geeigneten 2-kongruenten Funktionen oder der Anpassung von Koeffizienten - stellt eine analytische Approximation des ursprünglichen Gitters für jeden Schritt k dar.

Ein konstruktiver Beweis dieses Lemma kann Wälder, Buchroithner (2004) entnommen werden. Weitere Verallgemeinerungen des Verfahrens für gemischte Wavelet-Splines und anisotrope Medien werden in Wälder (2005b) vorgestellt.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass diese Darstellung weder eine Spline-Approximation noch eine Wavelet-Transformation des Georeliefs im „klassischen Sinne“ ist, vgl. Chiu (1992). Wegen des sequentiellen Charakters ist die Berechnung von Wavelet-Splines sehr einfach: Die „schwierigste“ numerische Aufgabe besteht im Invertieren einer 4×4 - Matrix, siehe hierzu Wälder, Buchroithner (2004). Wir erläutern hier kurz das Verfahren am Beispiel der sinusoidalen Wavelets aus Beispiel 2.4-1.

Ein gitterförmiges DTM (digital terrain model) kann mittels

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & & & \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_1 & \dots & y_1 \\ y_2 & y_2 & \dots & y_2 \\ \dots & & & \\ y_m & y_m & \dots & y_m \end{bmatrix}$$

und

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} z(x_1, y_1) & z(x_2, y_1) & \dots & z(x_n, y_1) \\ z(x_1, y_2) & z(x_2, y_2) & \dots & z(x_n, y_2) \\ \dots & & & \\ z(x_1, y_m) & z(x_2, y_m) & \dots & z(x_n, y_m) \end{bmatrix}.$$

(2-17)

definiert werden, wobei X, Y, Z $m \times n$ -Matrizen sind.

Aus diesem Datensatz wird ein quadratisches Gitter ausgewählt bzw. ein neues erzeugt, wobei für die neue Anzahl N auf der Basis von n Zeilen und m Spalten aus (2-17) gilt:

$$N = \max(2^k + 1) \text{ mit } k = \log_2 \{ \min(n, m) \}. \quad (2-18)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit, lediglich zur Vereinfachung der Darstellung soll im Weiteren

$$x_i \in [0,1] \text{ für } i = 1 \dots N \text{ und } y_j \in [0,1] \text{ für } j = 1 \dots N \quad (2-19)$$

vorausgesetzt werden. In jedem Fall können die (x, y) -Koordinaten skaliert bzw. rücktransponiert werden:

$$x_{neu} = \frac{x_{alt} - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}, \quad y_{neu} = \frac{y_{alt} - \min(y)}{\max(y) - \min(y)},$$

$$x_{alt} = \{ \max(x) - \min(x) \} x_{neu} + \min(x), \quad (2-20)$$

$$y_{alt} = \{ \max(y) - \min(y) \} y_{neu} + \min(y).$$

Nun wird vorausgesetzt, dass die unbekannte Funktion $z = z(x, y)$ mittels

$$S^p(x, y) = A + a_0 \sin(\pi x / 2) + b_0 \sin(\pi y / 2) + c_0 \sin(\pi x / 2) \sin(\pi y / 2) +$$

$$a_1(x, y) \sin(\pi x) + b_1(x, y) \sin(\pi y) + c_1(x, y) \sin(\pi x) \sin(\pi y) + \dots$$

$$a_{p-1}(x, y) \sin(2^{p-1} \pi x) + b_{p-1}(x, y) \sin(2^{p-1} \pi y) +$$

$$c_{p-1}(x, y) \sin(2^{p-1} \pi x) \sin(2^{p-1} \pi y), \quad p = 1, 2, \dots \quad (2-21)$$

approximiert werden kann. Die Koeffizienten a, b, c sind Konstanten, die allerdings von einer Teilfläche zur anderen variieren. Im weiteren Verlauf soll nun deren Berechnung sowie dem Qualitätsmaß der p -ten Approximation nachgegangen werden.

Zunächst soll Formel (2-21) mittels Abb. 2-6 näher erläutert werden. Für $p = 0$ werden nur die 4 Eckpunkte der 1-Zelle zur Berechnung herangezogen. Daraus erfolgt die Bestimmung von A, a_0, b_0, c_0 , zumal die anderen Glieder aus der Zerlegung (2-21) für $(x, y) \in \{0,1\}$ zu Null werden:

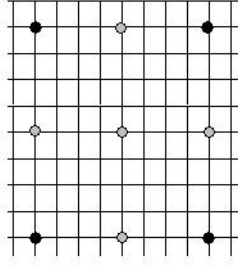


Abbildung 2-6. Aufbau eines Gitters.
Die 4 schwarzen Punkte werden im ersten Schritt ausgewählt.
Die 5 zusätzlichen Punkte kommen im zweiten Schritt dazu, usw.

$$\begin{bmatrix} A \\ a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(0,0) \\ z(1,0) \\ z(0,1) \\ z(1,1) \end{bmatrix}. \quad (2-22)$$

Die Genauigkeit der 1-Approximation kann durch

$$G_1 = \left| z(0.5,0.5) - S^1(0.5,0.5) \right| \quad (2-23)$$

ermittelt werden.

Im nächsten Schritt wird die 1-Zelle geviertelt. Es entstehen dabei vier 2-Zellen. Für jede hiervon sollen 3 neue Koeffizienten a_2, b_2, c_2 bestimmt werden. Beispielsweise gilt für die obere linke 2-Zelle (ihre linke untere Ecke liegt bei $(0, 0.5)$):

$$\begin{bmatrix} a_1(0,0.5) \\ b_1(0,0.5) \\ c_1(0,0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} z(0,0.5) - S^1(0,0.5) \\ z(0.5,0.5) - S^1(0.5,0.5) \\ z(0.5,1) - S^1(0.5,1) \end{bmatrix}. \quad (2-24)$$

Für die anderen drei 2-Zellen verläuft die Berechnung analog. Es soll darauf hingewiesen werden, dass a_j, b_j, c_j für $j > 2$ in (2-21) mit Null multipliziert werden. Wie in (2-23) kann die Qualität der 2-Approximation der oberen linken 2-Zelle beschrieben werden durch:

$$G_2(0,0.5) = \left| z(0.25,0.75) - S^2(0.25,0.75) \right|. \quad (2-25)$$

Das Verfahren kann weiter fortgesetzt werden, bis beispielsweise eine a-priori festgelegte Genauigkeit erreicht wird oder alle Punkte des Gitters bereits bearbeitet wurden.

Folglich gilt für den l -ten Schritt (obere linke l -Zelle):

$$\begin{bmatrix} a_l(0, 1 - \frac{1}{2^{l-1}}) \\ b_l(0, 1 - \frac{1}{2^{l-1}}) \\ c_l(0, 1 - \frac{1}{2^{l-1}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(0, 1 - \frac{1}{2^{l-1}}) - S^{l-1}(0, 1 - \frac{1}{2^{l-1}}) \\ z(\frac{1}{2^{l-1}}, 1 - \frac{1}{2^{l-1}}) - S^{l-1}(\frac{1}{2^{l-1}}, 1 - \frac{1}{2^{l-1}}) \\ z(\frac{1}{2^{l-1}}, 1) - S^{l-1}(\frac{1}{2^{l-1}}, 1) \end{bmatrix}$$

und

(2-26)

$$G_l(0, 1 - \frac{1}{2^{l-1}}) = \left| z(\frac{1}{2^l}, 1 - \frac{1}{2^l}) - S^l(\frac{1}{2^l}, 1 - \frac{1}{2^l}) \right|.$$

Für die anderen Zellen verläuft die Berechnung analog.

Die somit ermittelte Approximation (2-21) stellt eine stützpunktreue, stetige und differenzierbare *Spline-Approximation* mit *sinusoidalen Basis-Funktionen* vom Grad p für alle (x, y) dar, die innerhalb der gebildeten Zellen liegen. Dies gilt für Wavelet-Splines mit beliebigen stetigen und differenzierbaren Basis-Funktionen. An den Kanten der Zellen besitzt ein solcher Wavelet-Spline allerdings keine Regularität in diesem Sinne. Für Anwendungen von Wavelet-Splines zur Interpolation von differential-geometrischen Größen innerhalb der gebildeten Zellen spielte ihr sprunghaftes Verhalten an den Zellenkanten keine Rolle. Der Vorteil des hier vorgestellten Verfahrens liegt in seiner lokalen Anpassung, der Schnelligkeit und der Genauigkeitskontrolle bei der Berechnung sowie auch in der Vielfalt möglicher Basis-Funktionen.

In Abschnitt 6 werden zahlreiche Anwendungen von Wavelet-Splines aufgezeigt.

2.5 Spezielle, nicht-negative kubische Splines (SNNK-Splines) zur Approximation ein- bzw. mehrdimensionaler Dichtefunktionen

Klassische kubische Splines werden beispielsweise in Dierckx (1993) beschrieben. Dennoch eignen diese sich nicht (unmodifiziert) zur Approximation von nicht-negativen Kurven oder Oberflächen, weil sie - im Gegensatz zu Lagrange-Polynomen - zwar bekanntlich eine schwingungsarme, aber nicht unbedingt eine nicht-negative Approximation darstellen.

Wenn man sich bei den Regularitätsanforderungen an approximierende Splines auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit beschränkt, so kann eine Klasse von speziellen kubischen Splines konstruiert werden, die zur Approximation von nicht-negativen Funktionen wie z.B. Dichten gut geeignet ist.

LEMMA 2.4-2. Eindimensionale SNNK-Splines

Es seien $n+1$ Messwerte $[z_0, \dots, z_n]$ an den Stützstellen $[x_0, \dots, x_n]$ gegeben. Der folgende Spline $S(x)$ ist stetig, differenzierbar, nicht-negativ und erfüllt die Interpolationsforderung: $S(x_i) = z_i, i = 0, \dots, n$:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ \dots & \\ S_n(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad \text{mit}$$

$$S_i(x) = z_i + 3 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^2} (x - x_i)^2 - 2 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^3} (x - x_i)^3,$$

$$\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \tag{2-27}$$

$$\Delta z_{i+1} = z_{i+1} - z_i,$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, n$$

Beweis:

Die Stetigkeit der Funktionen in (2-27) ist zwischen den Stützpunkten offensichtlich; an den Stützstellen erhält man:

$$S(x_i) = z_i,$$

$$S(x_{i+1}) = z_i + 3 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^2} (x_{i+1} - x_i)^2 - 2 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^3} (x_{i+1} - x_i)^3$$

$$= z_i + 3 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^2} (\Delta x_{i+1})^2 - 2 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^3} (\Delta x_{i+1})^3$$

$$= z_i + 3\Delta z_{i+1} - 2\Delta z_{i+1} = z_i + \Delta z_{i+1} = z_{i+1},$$

$$i = 0, \dots, n$$

Die Differenzierbarkeit zwischen den Stützpunkten ist ebenso offensichtlich; an den Stützpunkten folgt sie aus:

$$\frac{d}{dx} S_i(x) = 6 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^2} (x - x_i) - 6 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^3} (x - x_i)^2,$$

$$\frac{d}{dx} S_i(x_i) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} S_i(x_{i+1}) = 6 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^2} (x_{i+1} - x_i) - 6 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^3} (x_{i+1} - x_i)^2$$

$$= 6 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^2} (\Delta x_{i+1}) - 6 \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^3} (\Delta x_{i+1})^2 = 0$$

Die Nicht-Negativität des SNNK-Splines ergibt sich aus den folgenden Überlegungen: Eine kubische Funktion als Teil dieses Splines hat maximal zwei Extremstellen. Diese beiden Stellen befinden sich nach unserer Konstruktion genau an den Stützpunkten. Daraus folgt, dass wenn alle Messwerte $[z_0, \dots, z_n]$ an den Stützstellen $[x_0, \dots, x_n]$, $i = 0, \dots, n$, positiv bzw. nicht negativ sind, die durch den Spline interpolierten z-Werte zwischen den Stützstellen nie kleiner (oder größer) als diese Messwerte werden können.

QED

Ein Beispiel für einen SNNK-Spline kann Abb. 2-7 entnommen werden.

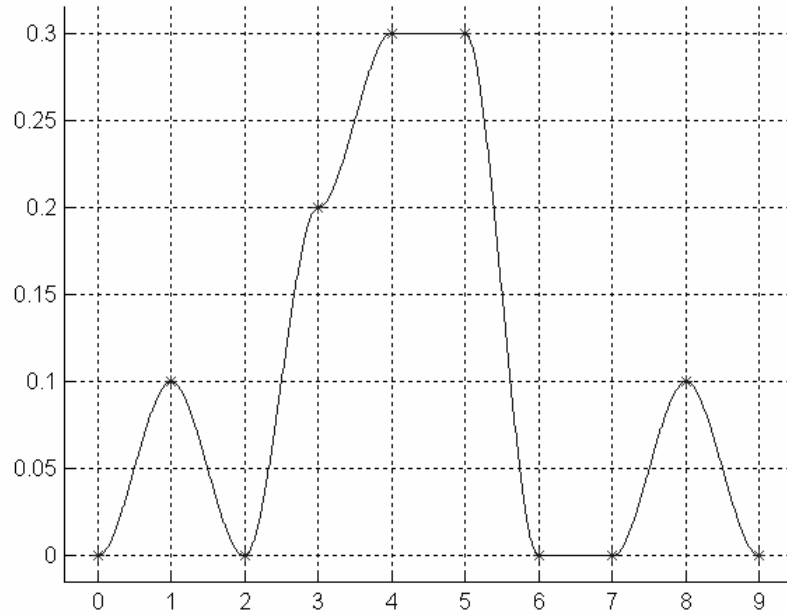


Abbildung 2-7. SNNK-Spline: Mit Stern sind die Messwerte gekennzeichnet.

Folgerung. Wenn $z_0 = z_n = 0$, $\Delta x_{i+1} = d$, $i = 0, \dots, n$ und $\bar{z}d = 1$, $\bar{z} = \sum_{i=0}^n z_i$ (empirische Dichte, Histogramm), so

ist $\int_{x_0}^{x_n} S(x) dx = 1$. Daher eignen sich die SNNK-Splines aus (2-27) besonders gut zur Approximation einer unbekanntem eindimensionalen Dichte.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{x_0}^{x_n} S(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_i(x) dx \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ z_i (x_{i+1} - x_i) + \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^2} (x_{i+1} - x_i)^3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta z_{i+1}}{(\Delta x_{i+1})^3} (x_{i+1} - x_i)^4 \right\} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ z_i \Delta x_{i+1} + \Delta z_{i+1} \Delta x_{i+1} - \frac{1}{2} \Delta z_{i+1} \Delta x_{i+1} \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_{i+1} \left\{ \frac{1}{2} z_i + \frac{1}{2} z_{i+1} \right\}
 \end{aligned}$$

Dies entspricht einer so genannten Trapezformel. Setzt man

$$z_0 = z_n = 0, \Delta x_{i+1} = d, i = 0, \dots, n \text{ und } \bar{z}d = 1, \bar{z} = \sum_{i=0}^n z_i, \text{ so erh\u00e4lt man:}$$

$$I = d \sum_{i=0}^n z_i = d\bar{z} = 1$$

QED

LEMMA 2.4-3. Zweidimensionale SNNK-Splines

Es seien $(n+1)(m+1)$ Messwerte $\begin{bmatrix} z_{00}, \dots, z_{n0} \\ \dots \\ z_{0m}, \dots, z_{nm} \end{bmatrix}$ an einem Stützstellengitter (Knoten) $[x_0, \dots, x_n] \times [y_0, \dots, y_m]$ gegeben.

Der folgende Spline $S(x, y)$ ist stetig, differenzierbar, nicht-negativ und erfüllt die Interpolationsforderung:
 $S(x_i, y_j) = z_{ij}, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$:

$S(x, y) = \{S^{ij}(x, y), (x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ mit
 $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$

$$S^{ij}(x, y) = S_{i,j}(x) + 3 \frac{\Delta S_{i,j+1}(x)}{(\Delta y_{j+1})^2} (y - y_j)^2 - 2 \frac{\Delta S_{i,j+1}(x)}{(\Delta y_{j+1})^3} (y - y_j)^3,$$

$$\Delta S_{i,j+1}(x) = S_{i,j+1}(x) - S_{i,j}(x),$$

$$\Delta y_{j+1} = y_{j+1} - y_j,$$

$$y \in [y_j, y_{j+1}], j = 0, \dots, m$$

$$S_{i,j}(x) = z_{ij} + 3 \frac{\Delta z_{i+1,j}}{(\Delta x_{i+1})^2} (x - x_i)^2 - 2 \frac{\Delta z_{i+1,j}}{(\Delta x_{i+1})^3} (x - x_i)^3,$$

$$\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i,$$

$$\Delta z_{i+1,j} = z_{i+1,j} - z_{ij},$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, n$$

Anschließend ergibt sich:

$$S_{i,j}(y) = z_{ij} + 3 \frac{\Delta z_{i,j+1}}{(\Delta y_{j+1})^2} (y - y_j)^2 - 2 \frac{\Delta z_{i,j+1}}{(\Delta y_{j+1})^3} (y - y_j)^3,$$

$$\Delta y_{j+1} = y_{j+1} - y_j,$$

$$\Delta z_{i,j+1} = z_{i,j+1} - z_{ij},$$

$$y \in [y_j, y_{j+1}], i = 0, \dots, m$$

(2-28)

Beweis:

Wie man leicht erkennen kann, wird der zweidimensionale SNNK-Spline $S(x, y)$ mithilfe einer speziell aufgebauten Interpolation zwischen den entsprechenden eindimensionalen SNNK-Splines gebildet. Tatsächlich gelten folgende Relationen:

$$S^{ij}(x, y_j) = S_{i,j}(x), \quad S^{ij}(x, y_{j+1}) = S_{i,j+1}(x)$$

$$S^{ij}(x_i, y) = S_{i,j}(y), \quad S^{ij}(x_{i+1}, y) = S_{i+1,j}(y)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, n$$

$$y \in [y_j, y_{j+1}], j = 0, \dots, m$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit zwischen den Knoten sind wiederum offensichtlich. An den Knoten gilt nun:

$$\begin{aligned} S^{ij}(x_i, y_j) &= S_{i,j}(x_i) = z_{ij} \\ S^{ij}(x_{i+1}, y_j) &= S_{i,j}(x_{i+1}) = z_{i+1,j} \\ S^{ij}(x_i, y_{j+1}) &= S_{i,j}(x_i) + 3 \frac{\Delta S_{i,j+1}(x_i)}{(\Delta y_{j+1})^2} (\Delta y_{j+1})^2 - 2 \frac{\Delta S_{i,j+1}(x_i)}{(\Delta y_{j+1})^3} (\Delta y_{j+1})^3 \\ &= S_{i,j}(x_i) + \Delta S_{i,j+1}(x_i) = S_{i,j+1}(x_i) = z_{i,j+1} \end{aligned}$$

Analog lässt sich feststellen, dass

$$\begin{aligned} S^{ij}(x_{i+1}, y_{j+1}) &= S_{i,j}(x_{i+1}) + \Delta S_{i,j+1}(x_{i+1}) = S_{i,j+1}(x_{i+1}) = z_{i+1,j+1}, \\ i &= 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m \end{aligned}$$

gilt. Die partiellen Ableitungen entsprechen

$$\frac{d}{dx} S^{ij}(x, y) = \frac{d}{dx} S_{i,j}(x) + 3 \frac{d}{dx} \frac{\Delta S_{i,j+1}(x)}{(\Delta y_{j+1})^2} (y - y_j)^2 - 2 \frac{d}{dx} \frac{\Delta S_{i,j+1}(x)}{(\Delta y_{j+1})^3} (y - y_j)^3$$

und

$$\frac{d}{dy} S^{ij}(x, y) = 6 \frac{\Delta S_{i,j+1}(x)}{(\Delta y_{j+1})^2} (y - y_j) - 6 \frac{\Delta S_{i,j+1}(x)}{(\Delta y_{j+1})^3} (y - y_j)^2,$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n$$

$$y \in [y_j, y_{j+1}], \quad j = 0, \dots, m$$

Mit Verwendung von Lemma 2.4-2 erhält man für die Funktionen aus (2-28) sowohl an den Knoten als auch den Übergängen zwischen den verschiedenen Spline-Basisfunktionen folgende Beziehungen:

$$\frac{d}{dx} S^{ij}(x_i, y) = \frac{d}{dx} S_{i,j}(x_i) + 3 \frac{d}{dx} \frac{\Delta S_{i,j+1}(x_i)}{(\Delta y_{j+1})^2} (y - y_j)^2 - 2 \frac{d}{dx} \frac{\Delta S_{i,j+1}(x_i)}{(\Delta y_{j+1})^3} (y - y_j)^3 = 0,$$

$$\frac{d}{dx} S^{ij}(x_{i+1}, y) = \frac{d}{dx} S_{i,j}(x_{i+1}) + 3 \frac{d}{dx} \frac{\Delta S_{i,j+1}(x_{i+1})}{(\Delta y_{j+1})^2} (y - y_j)^2 - 2 \frac{d}{dx} \frac{\Delta S_{i,j+1}(x_{i+1})}{(\Delta y_{j+1})^3} (y - y_j)^3 = 0$$

$$\frac{d}{dy} S^{ij}(x, y_j) = 0,$$

$$\frac{d}{dy} S^{ij}(x, y_{j+1}) = 6 \frac{\Delta S_{i,j+1}(x)}{(\Delta y_{j+1})^2} (\Delta y_{j+1}) - 6 \frac{\Delta S_{i,j+1}(x)}{(\Delta y_{j+1})^3} (\Delta y_{j+1})^2 = 0,$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n$$

$$y \in [y_j, y_{j+1}], \quad j = 0, \dots, m$$

Die Nicht-Negativität zweidimensionaler SNNK-Splines lässt sich analog zu Lemma 2.4-2 erklären.

QED

Folgerung. Wenn $z_{i0} = z_{im} = z_{0j} = z_{nj} = 0$, $\Delta y_{j+1} \Delta x_{i+1} = d$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$ und $\bar{z}d = 1$, $\bar{z} = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n z_{ij}$

(empirische Dichte, räumliches Histogramm), so ist $\int_{y_0}^{y_m} \int_{x_0}^{x_n} S(x, y) dx dy = 1$. Daher eignen sich die in Lemma 2.4-3 eingeführten SNNK-Splines besonders gut zur Approximation einer unbekanntenen zweidimensionalen Dichte.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{y_0}^{y_m} \int_{x_0}^{x_n} S(x, y) dx dy = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S^{ij}(x, y) dx dy \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ S_{ij}(x)(y_{i+1} - y_j) + \frac{\Delta S_{i,j+1}(x)}{(\Delta y_{j+1})^2} (y_{j+1} - y_j)^3 - \frac{1}{2} \frac{\Delta S_{i,j+1}(x)}{(\Delta y_{j+1})^3} (y_{j+1} - y_j)^4 \right\} dx \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ S_{ij}(x) \Delta y_{j+1} + \Delta S_{i,j+1}(x) \Delta y_{j+1} - \frac{1}{2} \Delta S_{i,j+1}(x) \Delta y_{j+1} \right\} dx \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \Delta y_{j+1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \frac{1}{2} S_{ij}(x) + \frac{1}{2} S_{i,j+1}(x) \right\} dx = \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \Delta y_{j+1} \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} \Delta x_{i+1} \left\{ \frac{1}{2} z_{ij} + \frac{1}{2} z_{i+1,j} \right\} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1} \left\{ \frac{1}{2} z_{i,j+1} + \frac{1}{2} z_{i+1,j+1} \right\} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta y_{j+1} \Delta x_{i+1} \{ z_{ij} + z_{i+1,j} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1} \}
 \end{aligned}$$

Setzt man $z_{i0} = z_{im} = z_{0j} = z_{nj} = 0$, $\Delta y_{j+1} \Delta x_{i+1} = d$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$ und $\bar{z}d = 1$, $\bar{z} = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n z_{ij}$, so

erhält man

$$I = \frac{d}{4} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \{ z_{ij} + z_{i+1,j} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1} \} = d\bar{z} = 1$$

QED

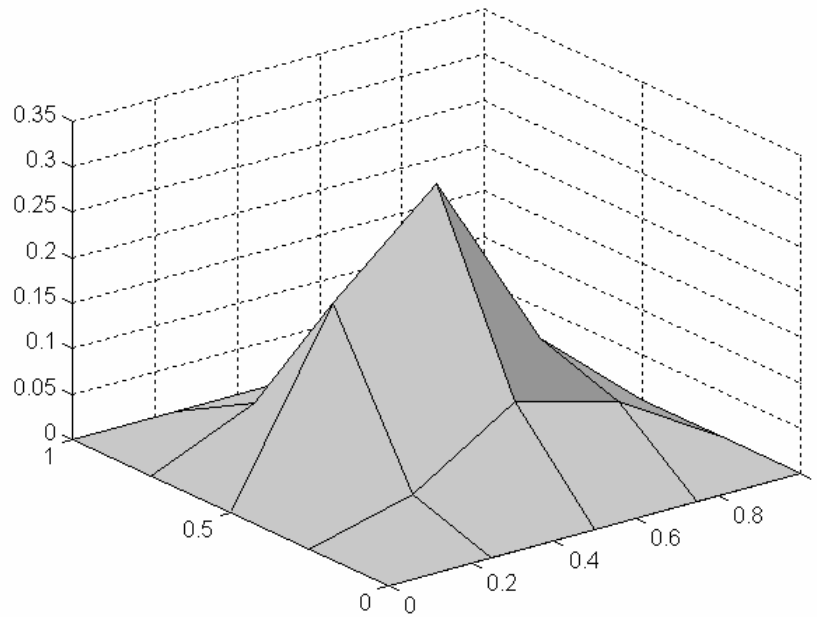


Abbildung 2-8a. Messwerte auf einem 5x5-Gitter.

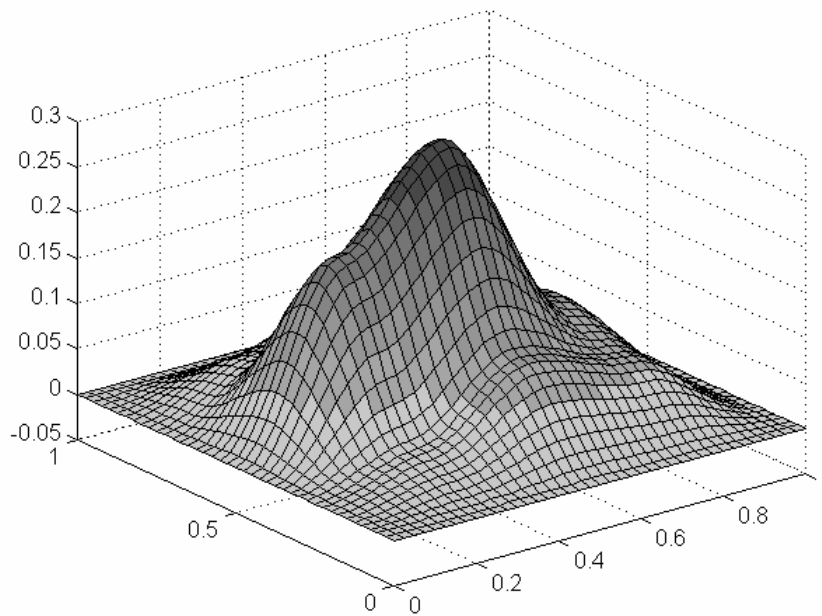


Abbildung 2-8b. SNNK-Spline für die Messwerte aus Abb. 2-8a.

Kommentar. Eine weitere Verallgemeinerung von Lemma 2.4-3 auf mehrdimensionale Fälle ist wegen des rekursiven Aufbaus von SNNK-Splines nahe liegend.

Die Abbildungen 2-8a und b präsentieren einen Datensatz und einen zweidimensionalen SNNK-Spline.

3. Interpolation von differential-geometrischen Größen

Bezug nehmend auf später folgende Anwendungen, möchten wir uns hier wiederum auf dreidimensionales Datenmaterial beschränken. Wie in der Einleitung bereits angekündigt, besteht die Grundidee der Interpolation von differential-geometrischen Größen in einem zweistufigen Verfahren: Im ersten Schritt soll die funktionale Darstellung einer Oberfläche S mit Verfahren aus Abschnitt 2 gewonnen werden, im zweiten Schritt werden darauf aufbauend die gesuchten differential-geometrischen Größen abgeleitet.

Als differential-geometrische Größen sollen hier die Charakteristiken bezeichnet werden, die als Funktionale einer Oberfläche betrachtet werden können. Als Beispiele solcher Charakteristiken können die so genannte *Reliefenergie* und die *Surface Dilatation* genannt werden. Ihre diskretisierten Äquivalente, die bei einer numerischen Implementierung des Verfahrens benutzt wurden, werden unten definiert.

Der Begriff "Reliefenergie" $RE(i, j)$ ist in der Kartografie geläufig, der Begriff „Surface Dilatation“ $DIL(i, j)$ wurde aus mehreren differential-geometrischen Charakteristiken zusammengestellt, siehe hierzu Grafarend (2006), Grafarend, Krumm (2006), Voosoghi (2000), Wälder, Buchroithner (2006) und Abschnitt 2.3. Beide stellen im diskreten Fall Matrizen $N \times N$ dar, die in (3-1) und (3-2) definiert werden.

$$RE(i, j) = \begin{cases} \frac{(\max(S_4(i, j)) - \min(S_4(i, j)))}{|x_{i+1} - x_i| \times |y_{j+1} - y_j|}, & \text{für } i, j = 1, N - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3-1)$$

$$\text{mit } S_4(i, j) = [S(x_i, y_j), S(x_{i+1}, y_j), S(x_{i+1}, y_{j+1}), S(x_i, y_{j+1})]$$

$$DIL(i, j) = \lambda_1 + \lambda_2$$

mit

$$\lambda_1 = 0.5 \cdot \left(PAR_1 + \sqrt{PAR_1^2 - 4 \cdot PAR_2} \right), \quad (3-2)$$

$$\lambda_2 = 0.5 \cdot \left(PAR_1 - \sqrt{PAR_1^2 - 4 \cdot PAR_2} \right) \quad \text{und}$$

$$PAR_1 = tr(E \cdot A^{-1}),$$

$$PAR_2 = \det(E \cdot A^{-1}), \quad \text{wobei}$$

$$A = A(i, j) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial S_1(x_i, y_j)}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial S_1(x_i, y_j)}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_1(x_i, y_j)}{\partial y} \\ \frac{\partial S_1(x_i, y_j)}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_1(x_i, y_j)}{\partial y} & 1 + \left(\frac{\partial S_1(x_i, y_j)}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix}$$

$$C = C(i, j) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial S_2(x_i, y_j)}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial S_2(x_i, y_j)}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_2(x_i, y_j)}{\partial y} \\ \frac{\partial S_2(x_i, y_j)}{\partial x} \cdot \frac{\partial S_2(x_i, y_j)}{\partial y} & 1 + \left(\frac{\partial S_2(x_i, y_j)}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix}$$

$$E = 0.5 \cdot (C - A)$$

Die Reliefenergie gilt als relatives Veränderlichkeitsmaß des Reliefs, die Surface Dilatation dient der Beschreibung von Zerrungs-Pressungs-Deformationen auf der Oberfläche. Weitere Vertiefungen in die Deformationsanalyse können Grafarend (2006), Grafarend, Krumm (2006) entnommen werden. Insbesondere sind dort weitere Formen von Deformationstensoren zu finden.

Basierend auf der Darstellung (2-15) können weitere nützliche statistische Charakteristiken eines Reliefs hergeleitet werden. Beispielsweise kann die so genannte „mittlere Fläche“ MR definiert werden. Es ist eine abstrakte Charakteristik, die auf mittleren Amplituden basiert. Diese mittleren Amplituden werden als arithmetisches Mittel der entsprechenden lokalen Amplituden der zu untersuchenden Oberfläche ermittelt. Somit erhält man die mittlere Fläche MR_k , $k = 1, 2, \dots$, für jeden Schritt der Approximation mittels

$$\begin{aligned} MR_1(x, y) &= S^1(x, y) = A + a_0 f_0(x) + b_0 f_0(y) + c_0 f_0(x) f_0(y), \\ MR_2(x, y) &= MR_1(x, y) + \text{mean}(a_1) f_1(x) + \text{mean}(b_1) f_1(y) + \text{mean}(c_1) f_1(x) f_1(y), \dots \\ MR_{k+1}(x, y) &= MR_k(x, y) + \text{mean}(a_k) f_k(x) + \text{mean}(b_k) f_k(y) + \\ &\quad \text{mean}(c_k) f_k(x) f_k(y), \end{aligned} \quad (3-3)$$

$k = 2, 3, \dots$,

Als *Reliefvarianz* $VarR_k$, $k = 1, 2, \dots$ kann das folgende Maß verwendet werden:

$$\begin{aligned} VarR_k(x, y) &= |S^k(x, y) - MR_k(x, y)|, \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3-4)$$

Bemerkung. Weil es sich bei Wavelet-Splines um eine endliche Summe von stetigen Funktionen handelt, ist eine spezielle Abhandlung zu den partiellen Ableitungen, die in (3-2) benötigt werden, überflüssig. Partielle Ableitungen von parametrischen Bezier-Oberflächen wurden bereits in 2.3 untersucht.

Anwendungen zur Interpolation dieser und der in Abschnitt 2.3 bereits eingeführten differential-geometrischen Größen in den Geowissenschaften und in der Psychologie werden in Abschnitt 6 ausführlich diskutiert.

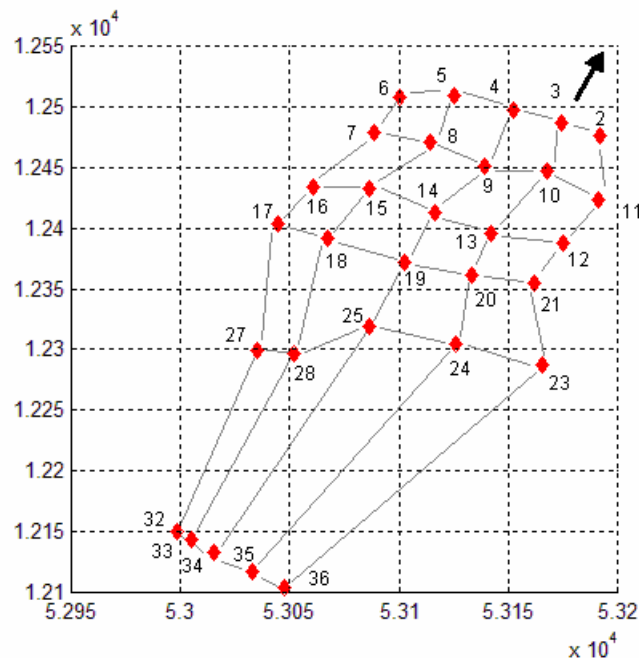


Abbildung 3-1. Ein imaginäres Netz auf dem Blockgletscher Reichenkar für das Jahr 1997. Die Zahl neben dem jeweiligen Block steht für die laufende Nummer der jeweiligen Messstelle (rote Rauten). Der schwarze Pfeil kennzeichnet die Bewegungsrichtung des Blockgletschers.

Einen Spezialfall der Interpolation von differential-geometrischen Größen stellen Untersuchungen der Änderungen von *Streckenlängen* dar. Wir diskutieren hier ein Netz-Modell-Verfahren, das speziell für die Anwendung am Blockgletscher Reichenkar entwickelt wurde und daher auch an diesem konkreten Beispiel hier erklärt werden soll. Eine Beschreibung des entsprechenden Datenmaterials kann Abschnitt 2.2 entnommen werden.

Für Untersuchungen der Änderungen von Streckenlängen wird ein imaginäres Netz an Hand einiger ausgewählter Messstellen wie in Abb. 3-1 zusammengestellt.

Dieses Netz verändert sich von Jahr zu Jahr lokal unterschiedlich. Die lokalen Unterschiede gehen auf die relative Kinematik der Blöcke auf dem Gletscher zurück. Manche Blöcke neigen zum Abrutschen, andere beschleunigen ihre Bewegung oder werden im Gegenteil durch irgendwelche Hindernisse (Reliefunebenheiten, Eiskerndeformationen) abgebremst.

Zu den bereits erwähnten Besonderheiten der Datenerfassung auf dem Blockgletscher Reichenkar gehören insbesondere die unterschiedliche Anzahl der Messungen zwischen den Epochen und der Ausfall einiger Messstellen. Zum Beispiel liegt die Höhenmessung für den Punkt Nummer 7 im Jahr 2001 nicht vor (daher ergibt sich in Abb. 3-5a, 3-5b eine Lücke: Ein Netz wie in Abb. 3-1 konnte nicht zusammengestellt werden). Für die Auswahl der Messstellen, die zu einem Netz wie in Abb. 3-1 zusammengefasst werden, sprach vor allem ihre relative „informative Stabilität“ über die Epochen 1997 bis 2004 und ihre günstige räumliche Verteilung (konvexe Maschen).

Am imaginären Netz werden die Abstände zwischen den Blöcken für jede Epoche ermittelt. Diese Abstände verändern sich von Jahr zu Jahr lokal unterschiedlich. Die Änderung dieser Abstände, d.h. der Länge jeder Strecke bzw. Netzkante in Abb. 3-1, kann durch den Quotienten aus nachfolgenden und vorherigen Streckenlängen ermittelt werden. Die Abbildungen 3-2a und 3-2b zeigen einen solchen Vergleich für die Jahre 1998 und 1997.

Für weitere Untersuchungen wird nun jeweils ein Jahr als Referenzeпоche ausgewählt. Relative jährliche Veränderungen von Streckenlängen können dann bezüglich solcher Referenzeпоchen näher betrachtet werden. In den Abbildungen 3-3a, 3-3b, 3-4a und 3-4b werden einige Beispiele hierzu präsentiert.

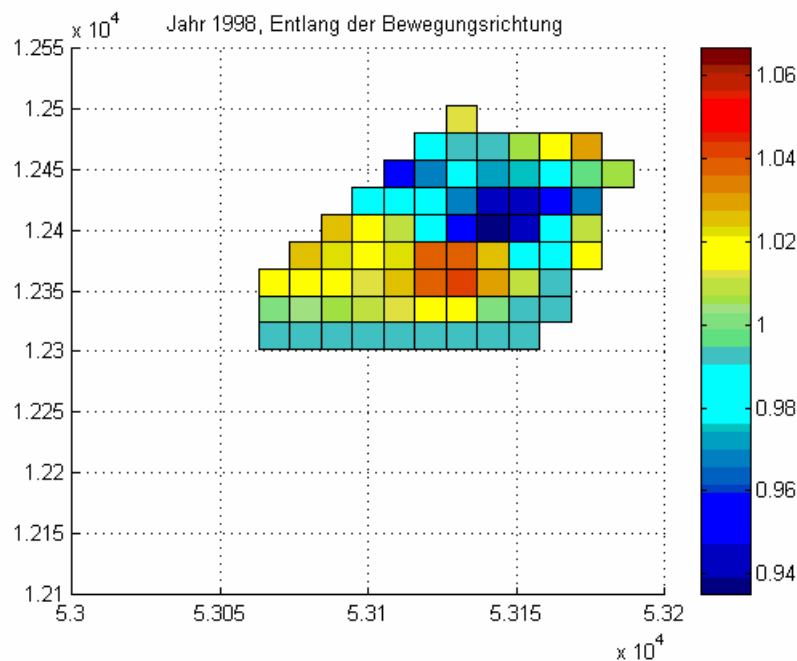


Abbildung 3-2a. Relative Änderung der Abstände entlang der Bewegungsrichtung für Jahre 1997-1998.

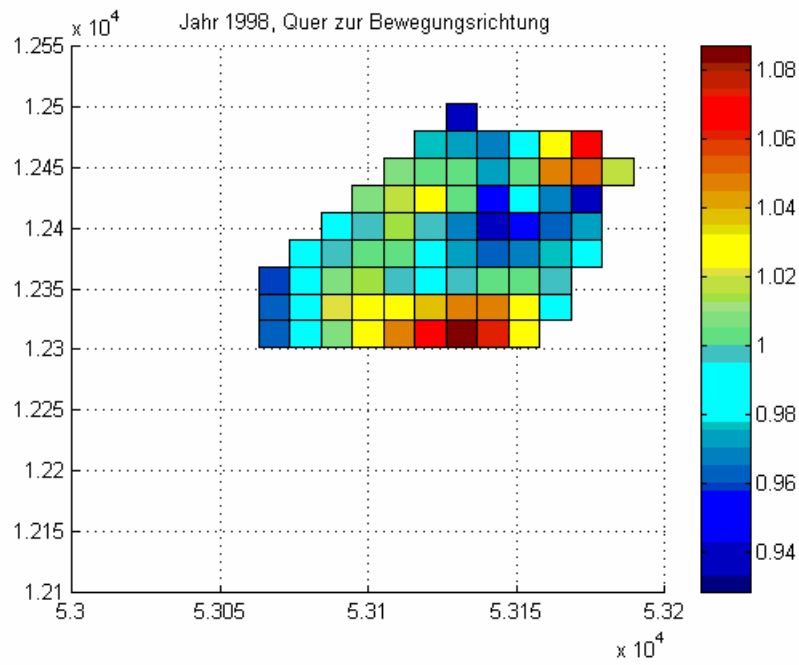


Abbildung 3-3b. Relative Änderung der Abstände quer zur Bewegungsrichtung für die Jahre 1997-1998.

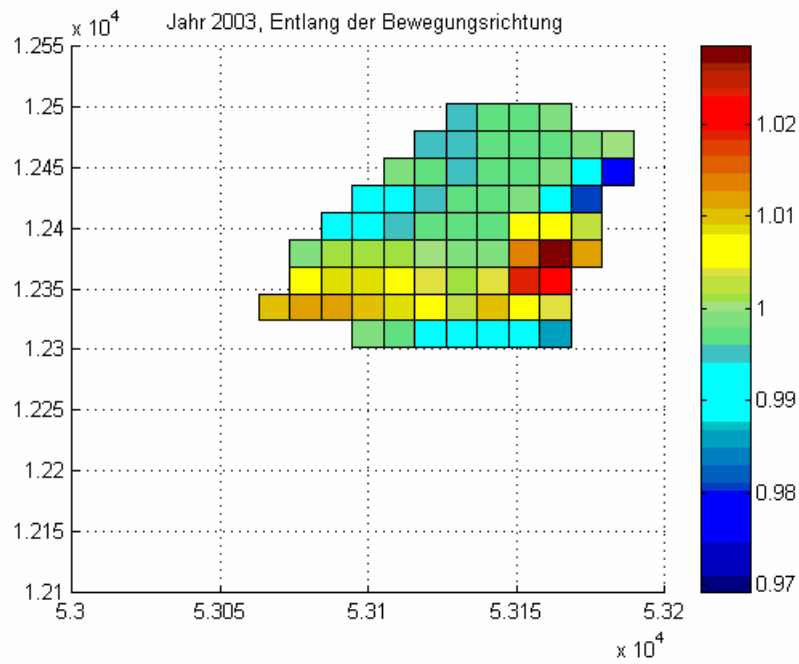


Abbildung 3-3a. Relative Änderung der Abstände entlang der Bewegungsrichtung für die Jahre 2002-2003.

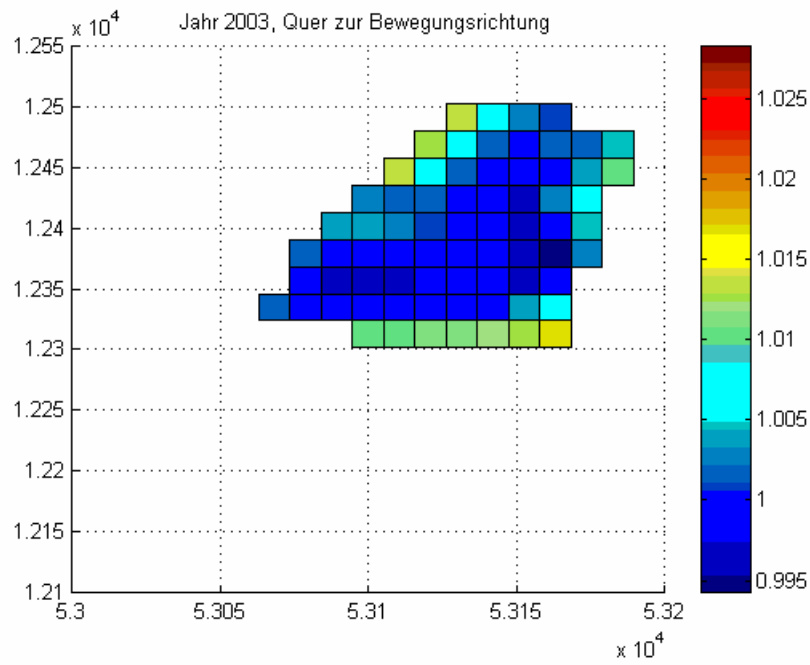


Abb. 3-2b: Relative Änderung der Abstände quer zur Bewegungsrichtung für die Jahre 2002-2003.

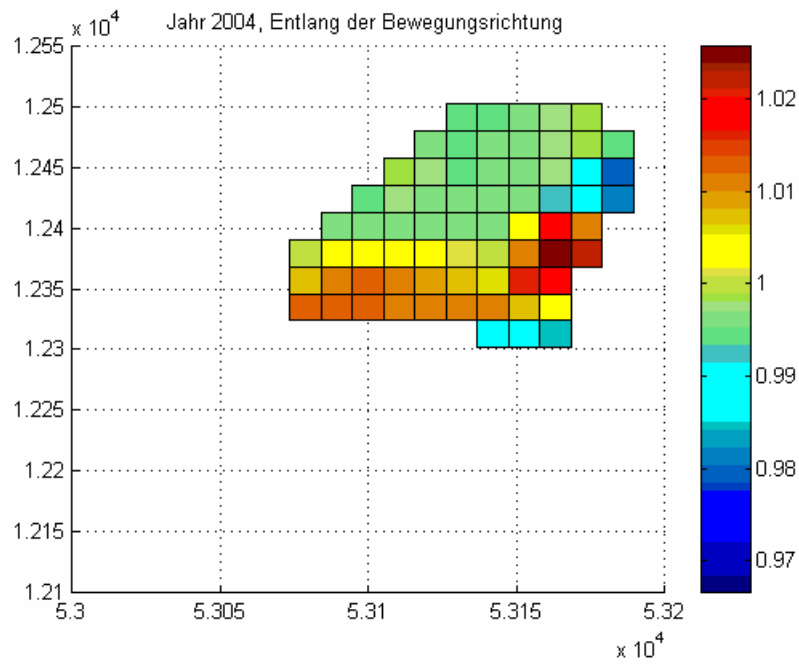


Abbildung 3-4a. Relative Änderung der Abstände entlang der Bewegungsrichtung für die Jahre 2003-2004.

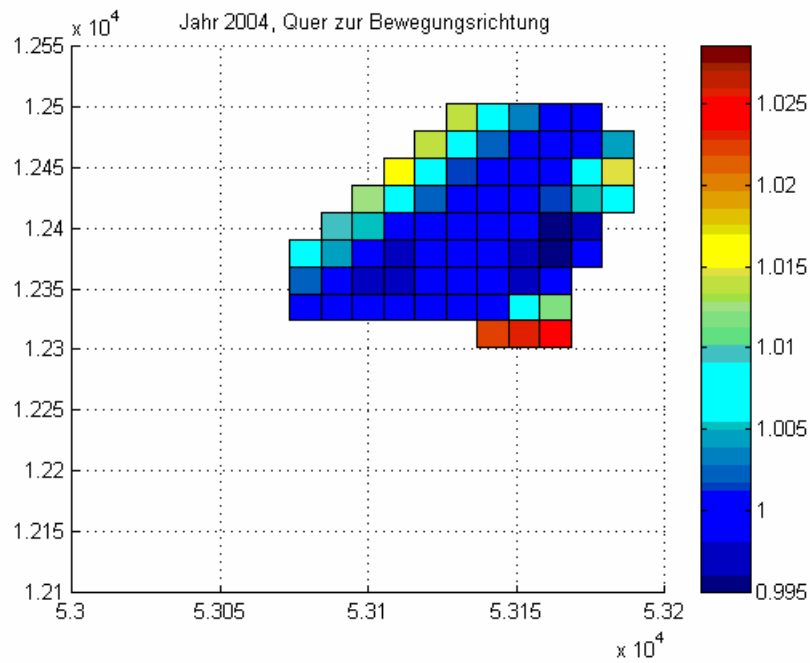


Abbildung 3-4b. Relative Änderung der Abstände quer zur Bewegungsrichtung für die Jahre 2003-2004.

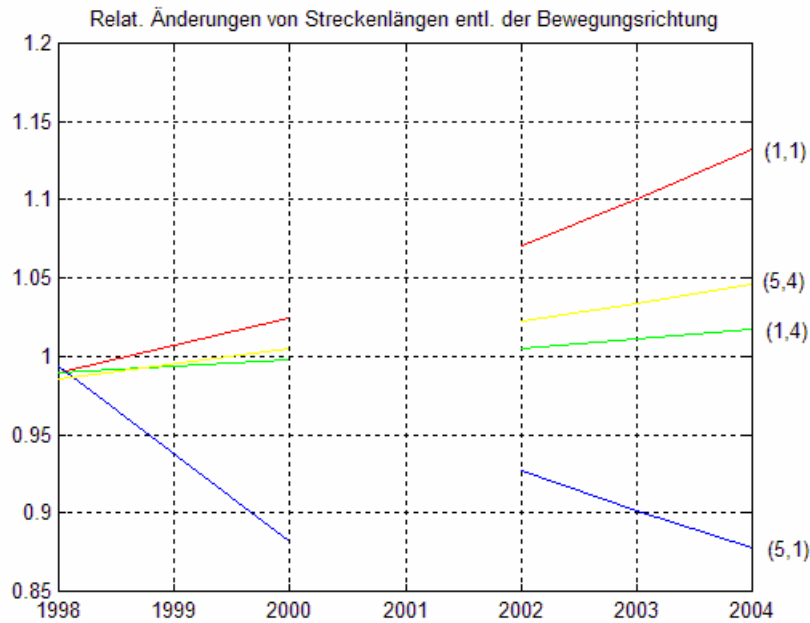


Abbildung 3-5a. Räumlich-zeitliche Änderungen von Streckenlängen für einige ausgewählte Strecken entlang der Bewegungsrichtung: Linie (1,1) – Kante 2-11, (5,4) – Kante 28-33, (1,4) – Kante 5-8 und (5,1) – Kante 23-36 (vgl. Abb. 3-1 für die entsprechenden Punktnummern)

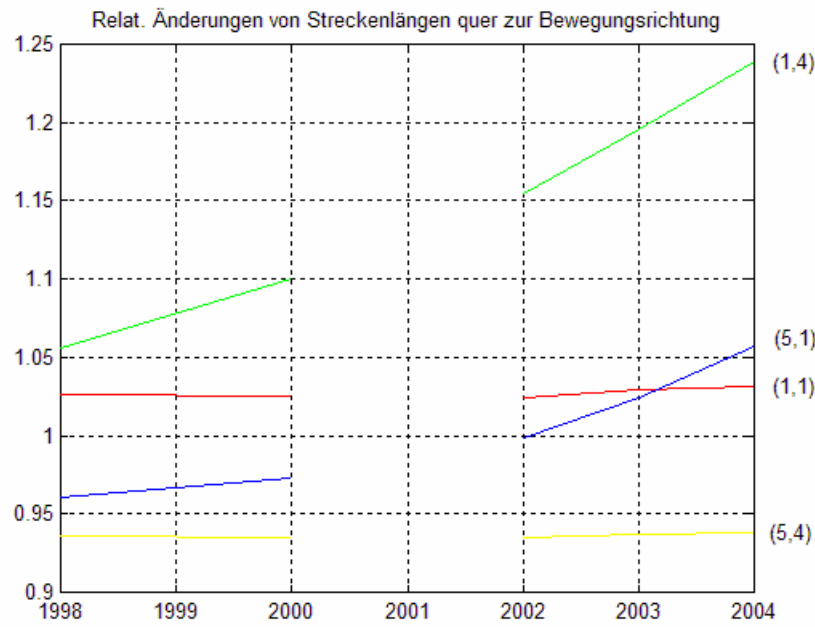


Abbildung 3-5b. Räumlich-zeitliche Änderungen von Streckenlängen für einige ausgewählte Strecken quer zur Bewegungsrichtung.
 Linie (1,1) – Kante 2-3, (5,4) – Kante 27-28, (1,4) – Kante 5-6 und (5,1) – Kante 23-24 (vgl. Abb. 3-1 für die entsprechenden Punktnummern)

Wenn man nur das Jahr 1997 als Referenzepeche für alle weiteren Jahre wählt, so kann eine räumlich-zeitliche Deformationsanalyse für die Netzkanten durchgeführt werden, die nicht nur einen jährlichen, sondern auch einen globalen Überblick über den kompletten Beobachtungsraum vom Jahr 1997 bis zum Jahr 2004 erlaubt. Den Abbildungen 3-5a und 3-5b können die zeitlichen Änderungen von Streckenlängen für einige ausgewählte Netzkanten entnommen werden. Zur Visualisierung wurde stets die lineare Interpolation verwendet.

Das vorgestellte Netz-Verfahren erlaubt eine sehr einfache, aber doch aussagekräftige Analyse von Änderungen der Streckenlängen zwischen eingemessenen Blöcken. Wie man insbesondere in den Abbildungen 3-3a bis 3-4b erkennen kann, existiert ein deutlicher Unterschied in den lokalen Bewegungsgeschwindigkeiten auf dem Blockgletscher.

Während der axiale mittlere Bereich des Gletschers eine relativ konstante Bewegung aufweist, neigt der mittlere Zungenbereich zu einer leichten Beschleunigung. Dadurch entfernt er sich vom etwas höher gelegenen, steilen Teil des Blockgletschers. Außerdem besteht stets ein höheres Abrutschpotential für die Randblöcke des Gletschers als für diejenigen in seiner Mitte.

Im Bereich unter Punkt 36 befindet sich möglicherweise ein Hindernis, das hier die Bewegung des Blockgletschers entlang des Hanges verhindert. Dadurch nimmt an dieser Stelle die seitliche Abruschtendenz zu, siehe Linie (5,1) in Abb. 3-5b.

Die deutliche Änderung des Steigungskoeffizienten in Abb. 3-5a (Linie (1,1)) und 5b (Linie (1,4)) kann für eine zunehmende Tendenz des „Abbiegens“ des Blockgletschers sprechen (dem Koordinatensystem aus Abb. 3-1 entspricht eine nordwestliche Abbiegungsrichtung).

4. Unschärfefortpflanzung für differential-geometrische Größen

Die meisten Messungen stellen aus mathematischer Sicht unscharfe Größen dar, weil bei ihrer Erfassung keine absolute Präzision gewährleistet werden kann. Manchmal gelingt es, statistische Tests zu entwickeln, die empfindlich auf das Auftreten von groben Abnormitäten in räumlich-zeitlichen Datenreihen reagieren, siehe Wälder (2005a). Die „Unschärfe“ von Daten kann aber auch mit Hilfe von in der Fuzzy-Theorie entwickelten Werkzeugen modelliert werden, siehe Wälder (2006), (2007a). Zu diesen Werkzeugen gehört das so genannte Intervallkalkül. Eine Messung als mathematisches Objekt wird in Form eines Intervalls dargestellt, dessen Unter- und Obergrenze den zu erwartenden Rahmen für die reale Messung angeben. Durch die variable Breite des Intervalls wird dabei der von Null abweichende Messfehler einer realen Messung wiedergegeben. Ein solches Modell ist im Grunde genommen der einfachste Ansatz für eine Fuzzy-Zahl.

Nun reicht es normalerweise nicht aus, gewonnene Messwerte in ein GIS zu übertragen. In vielen Fällen werden diese Daten weiter auf ein Gitter interpoliert; sie können zu einer analytischen Oberfläche zusammengefasst werden, man interessiert sich für die Ableitungen erster oder höherer Ordnungen dieser analytischen Oberfläche, usw. Einige Untersuchungen des Verhaltens unscharfer Oberflächen wurden bereits in Kaleva (1994), Lodwick, Santos (2003) durchgeführt. Die allgemeine Fragestellung lautet dann: Wie pflanzt sich die ursprüngliche „Unschärfe“ von Messungen auf einige von ihnen abgeleitete differential-geometrische Größen fort?

In dieser Arbeit wird nun ein Ansatz zur Modellierung der Unschärfe-Fortpflanzung vorgestellt und anhand einer Fallstudie näher erläutert.

4.1 Einige Definitionen aus der Fuzzy-Theorie

Eine unscharfe Zahl kann als ungenau gegebene oder ungenau bestimmte Zahlen definiert werden. Unscharfe Zahlen werden durch konvexe unscharfe Mengen beschrieben und ihre Zugehörigkeitsfunktion weist keine Nebenmaxima auf, siehe Bandemer, Gottwald (1993). Für unscharfe Intervalle ist der Kern ein Intervall. Die unscharfen Zahlen und Intervalle verallgemeinern daher die Ansätze der Intervallarithmetik, die aus der traditionellen Fehlerrechnung hervorgegangen ist. Nun rechnet man gleich mit durch die Fehlerschranken gegebenen Intervallen statt mit fehlerbehafteten reellen Zahlen. Kernpunkt dieses Übergangs ist die Idee, dass die Intervallpunkte „scharf“ gegeben sein müssen. Für die gewöhnliche Intervallarithmetik kann z.B. auf Alefeld, Herzberger (1974) verwiesen werden.

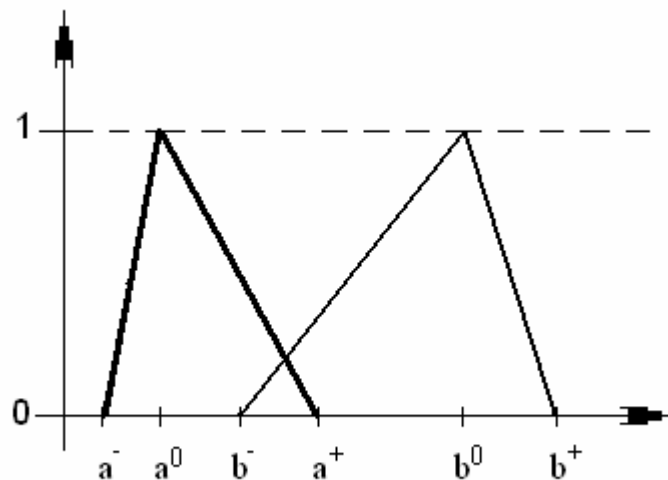


Abbildung 4-1. Schematische Darstellung zweier unscharfer Intervalle $A = [a^-, a^0, a^+]$ und $B = [b^-, b^0, b^+]$ sowie ihrer Zugehörigkeitsfunktionen.

Um mit unscharfen Zahlen und Intervallen rechnen zu können, müssen zunächst einige Grundrechenarten hierfür erklärt werden, die in den weiteren Abschnitten verwendet werden. Durch die Operationen mit unscharfen Zahlen, die wir benutzen werden, entstehen neue unscharfe Zahlen, unscharfe Intervalle mit eigenen scharfen Grenzen. Wie in Lodwick, Santos (2003) werden wir uns nicht für die genaue Form der entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen interessieren, sondern vielmehr für die Bestimmung der Unter- bzw. Obergrenze der abgeleiteten Intervalle und ihrer „Zentren“: Wir bezeichnen so die Stellen, an welchen die entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen ihre Maxima aufweisen.

Mit $A = [a^-, a^0, a^+]$ und $B = [b^-, b^0, b^+]$ bezeichnen wir zwei unscharfe Intervalle. Die untere sowie die obere Grenze und das „Zentrum“ eines unscharfen Intervalls sollen als seine *Parameter* bezeichnet werden. Sie und ihre Zugehörigkeitsfunktionen sind in Abb. 4-1 schematisch dargestellt.

Wir benötigen die folgenden Operationen mit unscharfen Intervallen A, B : die Summe $A + B$, die Differenz $A - B$, das Produkt $A \cdot B$ und die Subtraktion A / B . Als Ergebnis dieser Operationen entsteht eine neue unscharfe Zahl, ein Intervall $C = [c^-, c^0, c^+]$, für welches gilt:

$$\begin{aligned}
 C = A + B: \quad & c^- = a^- + b^-, c^0 = a^0 + b^0, c^+ = a^+ + b^+; \\
 C = A - B: \quad & c^- = a^- - b^+, c^0 = a^0 - b^0, c^+ = a^+ - b^-; \\
 C = A \cdot B: \quad & c^- = \min\{a^-b^-, a^+b^-, a^-b^+, a^+b^+\}, \\
 & c^0 = a^0b^0, \\
 & c^+ = \max\{a^-b^-, a^+b^-, a^-b^+, a^+b^+\} \\
 C = A / B: \quad & c^- = \min\{a^-/b^-, a^+/b^-, a^-/b^+, a^+/b^+\}, \\
 & c^0 = a^0/b^0, \\
 & c^+ = \max\{a^-/b^-, a^+/b^-, a^-/b^+, a^+/b^+\} \text{ nur für } b^- > 0 \text{ oder } b^+ < 0
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

Zusätzlich können das Quadrat $C = A^2$ und die Wurzel $C = \sqrt{A}$ eines unscharfen Intervalls definiert werden. Hierfür gilt:

$$\begin{aligned}
 C = A^2 = A \cdot A: \\
 \begin{cases} c^- = \min\{a^-a^-, a^+a^+\}, c^0 = (a^0)^2, c^+ = \max\{a^-a^-, a^+a^+\}, & a^- \geq 0 \text{ oder } a^+ \leq 0 \\ c^- = 0, c^0 = (a^0)^2, c^+ = \max\{a^-a^-, a^+a^+\}, & a^- < 0 \text{ und } a^+ > 0 \end{cases} \\
 C = \sqrt{A}: \\
 c^- = \sqrt{a^-}, c^0 = \sqrt{a^0}, c^+ = \sqrt{a^+}, \text{ nur für } a^- \geq 0
 \end{aligned} \tag{4-2}$$

4.2 Mathematische Modellierung von unscharfen Oberflächen

Wir gehen im Weiteren davon aus, dass unscharfe Höhenmessungen $\tilde{z}_i = [z_i^-, z_i^0, z_i^+]$ $i = 1, \dots, n$ an scharfen Koordinaten (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$ vorliegen. Wenn diese Daten auf ein scharfes Gitter $\{X_j, Y_k\}$, $j = 1 \dots N, k = 1 \dots M$, interpoliert werden, so sind die interpolierten Höhen $\tilde{Z}_{jk} = [Z_{jk}^-, Z_{jk}^0, Z_{jk}^+]$ an den Knoten des Gitters wiederum unscharf. Es hängt vom Interpolationsverfahren ab, welche Parameter diese neuen unscharfen Intervalle erhalten.

Bei jeder distanzabhängigen (scharfen!) Gewichtung der ursprünglichen Messwerte erhalten wir stets:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{jk} &= \alpha_1^{jk} \tilde{z}_1 + \alpha_2^{jk} \tilde{z}_2 + \dots + \alpha_n^{jk} \tilde{z}_n, \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i^{jk} &= 1, \quad \alpha_i^{jk} = \text{Fkt}(d_i^{jk}), \quad d_i^{jk} = (x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_k)^2, \\ i &= 1 \dots n, \quad j = 1 \dots N, \quad k = 1 \dots M\end{aligned}\tag{4-3}$$

Werden hier inverse Quadrate von Distanzen zur Berechnung der Gewichte herangezogen, so entspricht (4-3):

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{jk} &= \alpha_1^{jk} \tilde{z}_1 + \alpha_2^{jk} \tilde{z}_2 + \dots + \alpha_n^{jk} \tilde{z}_n, \\ \alpha_i^{jk} &= \frac{w_i^{jk}}{\sum_{i=1}^n (w_i^{jk})}, \quad w_i^{jk} = \frac{1}{d_i^{jk} + \varepsilon}, \\ \varepsilon > 0, \quad i &= 1 \dots n, \quad j = 1 \dots N, \quad k = 1 \dots M\end{aligned}\tag{4-4}$$

Durch eine „künstliche“ Konstante ε kann in (4-4) verhindert werden, dass ein Gewicht unbestimmt ist, wenn die Vorhersagestelle mit einer Messstelle zusammenfällt. Weil alle in (4-4) verwendeten Gewichte positiv sind, können die Parameter von unscharfen interpolierten Höhenmessungen wie folgt berechnet werden, vgl. (4-1):

$$\begin{aligned}Z_{jk}^- &= \alpha_1^{jk} z_1^- + \alpha_2^{jk} z_2^- + \dots + \alpha_n^{jk} z_n^- = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{jk} z_i^-, \\ Z_{jk}^0 &= \alpha_1^{jk} z_1^0 + \alpha_2^{jk} z_2^0 + \dots + \alpha_n^{jk} z_n^0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{jk} z_i^0, \\ Z_{jk}^+ &= \alpha_1^{jk} z_1^+ + \alpha_2^{jk} z_2^+ + \dots + \alpha_n^{jk} z_n^+ = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{jk} z_i^+ \\ i &= 1 \dots n, \quad j = 1 \dots N, \quad k = 1 \dots M\end{aligned}\tag{4-5}$$

Kommentar. Um die weiteren Auslegungen nicht unnötig zu verkomplizieren, werden im weiteren Text auch für Gitterkoordinaten $\{X_j, Y_k\}$, $j = 1 \dots N, k = 1 \dots M$, Kleinbuchstaben verwendet.

Bemerkung: Falls die Koordinaten der Punkte auch unscharf sind, verwendet man in (4-4) die in (4-1) eingeführten Operationen mit unscharfen Zahlen.

Im nächsten Schritt sollen die unscharfen interpolierten Messungen (4-5) zu einer analytischen Oberfläche zusammengefasst werden. Selbstverständlich ist eine solche Oberfläche selbst wiederum unscharf. Zu einer derartigen Approximation kann ein zweidimensionales Lagrange-Polynom verwendet werden. Zu seiner Konstruktion werden folgende (scharfe!) Lagrange-Funktionen benötigt:

$$\varphi_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \dots N \\ i \neq j}} \frac{(x - X_i)}{(X_j - X_i)}, \quad \varphi_k(y) = \prod_{\substack{i=1 \dots M \\ i \neq k}} \frac{(y - Y_i)}{(Y_k - Y_i)}\tag{4-6}$$

Diese Funktionen besitzen eine wohlbekannte Eigenschaft an den Knoten des Gitters $\{X_j, Y_k\}$, $j = 1 \dots N, k = 1 \dots M$, nämlich

$$\begin{aligned}\varphi_j(x_p) &= \delta_{jp} = \begin{cases} 1, & p = j \\ 0, & p \neq j \end{cases} \\ \varphi_k(y_p) &= \delta_{kp} = \begin{cases} 1, & p = k \\ 0, & p \neq k \end{cases}\end{aligned}\tag{4-7}$$

Mit Hilfe dieser Funktionen wird das approximierende Polynom bzw. die gesuchte unscharfe analytische Oberfläche folgendermaßen konstruiert:

$$\begin{aligned}\tilde{p}(x, y) &= \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M}} \tilde{Z}_{jk} \varphi_j(x) \varphi_k(y) = \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M}} \tilde{Z}_{jk} L_{jk}(x, y), \\ L_{jk}(x, y) &= \varphi_j(x) \varphi_k(y)\end{aligned}\tag{4-8}$$

Um die Parameter dieser unscharfen Oberfläche (4-8) angeben zu können, greifen wir auf die gleichen Überlegungen wie in Lodwick, Santos (2003) bezüglich des Wechsels des Vorzeichens bei $L_{jk}(x, y)$, $j = 1\dots N, k = 1\dots M$, zurück und erhalten:

$$\begin{aligned}p^-(x, y) &= \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ L_{jk}(x, y) \geq 0}} Z_{jk}^- L_{jk}(x, y) + \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ L_{jk}(x, y) < 0}} Z_{jk}^+ L_{jk}(x, y), \\ p^0(x, y) &= \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M}} Z_{jk}^0 L_{jk}(x, y), \\ p^+(x, y) &= \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ L_{jk}(x, y) \geq 0}} Z_{jk}^+ L_{jk}(x, y) + \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ L_{jk}(x, y) < 0}} Z_{jk}^- L_{jk}(x, y)\end{aligned}\tag{4-9}$$

Diese drei Oberflächen in (4-9) geben somit den „unteren“, „mittleren“ und „oberen“ Verlauf der unscharfen Oberfläche (4-8) an. Zunächst sollen nun einige Eigenschaften der in (4-9) eingeführten Oberflächen diskutiert werden.

LEMMA 4-1. Alle in (4-9) eingeführten zweidimensionalen Funktionen sind stetig und auch differenzierbar.

Beweis:

Die „mittlere“ Funktion $p^0(x, y)$ ist deswegen stetig und unendlich oft differenzierbar nach x und y , weil die Funktionen $L_{jk}(x, y)$ diese Eigenschaft aufweisen. Bei den „unteren“ und „oberen“ Funktionen aus (4-9) soll zunächst ein möglicher Sprung wegen Vorzeichenwechseln von $L_{jk}(x, y)$ an den Knoten ausgeschlossen werden. Zwischen den Knoten folgen Stetigkeit und Differenzierbarkeit dieser Funktionen aus der entsprechenden Regularität der Lagrange-Funktionen.

Wir prüfen nun die Stetigkeit der „unteren“ Funktion $p^-(x, y)$ aus (4-9) an den Knoten. Hierzu soll festgestellt werden, dass an den Knoten die folgenden Relationen gelten:

$$\begin{aligned}\forall x: \quad p^-(x-, y) &= p^-(x+, y) \quad \text{sowie} \\ \forall y: \quad p^-(x, y-) &= p^-(x, y+)\end{aligned}\tag{4-10}$$

Wir betrachten das Vorzeichen der Lagrange-Funktionen für $x \in (x_i, x_{i+1})$ näher:

$$\text{sign}(\varphi_j(x)) = \begin{cases} (-1)^{j-i-1}, & i+1 < j-1 \\ 1, & j-1 \leq i \leq j \\ (-1)^{j-i}, & i \geq j+1 \end{cases} \quad (4-11)$$

Die Aussage (4-11) kann man leicht nachvollziehen, wenn man sich eine ausführliche Darstellung der Lagrange-Funktion $\varphi_j(x)$, $j = 1 \dots N$, vor Augen hält. Diese ist nämlich gleich

$$\varphi_j(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_N)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_N)} \quad (4-12)$$

Man kann aus (4-12) leicht ersehen, dass sich im Nenner stets $j-1$ positive und $(N-1)-(j-1)$ negative Klammern befinden. Im Zähler ist diese Zahl variabel, vgl. (4-11). Gerade für den Fall eines Überschreitens des Knotens j ist kein Vorzeichenwechsel vorhanden, weil sich gerade in diesem Bereich genau $j-1$ positive und $(N-1)-(j-1)$ negative Klammern befinden. Im Nenner gilt entsprechendes.

Die Überlegungen bezüglich $\varphi_k(y)$, $k = 1 \dots M$ sind analog. Somit kann nun (4-10) bewiesen werden.

Für die erste Ableitung von $\varphi_i(x)$, $i = 1 \dots N$, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \varphi_j(x) &= \varphi_j(x) \cdot \left[\frac{1}{(x-x_1)} + \dots + \frac{1}{(x-x_{j-1})} + \frac{1}{(x-x_{j+1})} + \dots + \frac{1}{(x-x_N)} \right] \\ &= \frac{1}{(x_j-x_1)} \prod_{i=1, i \neq 1}^N \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)} + \dots + \frac{1}{(x_j-x_{j-1})} \prod_{i=1, i \neq j-1}^N \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)} \\ &\quad + \frac{1}{(x_j-x_{j+1})} \prod_{i=1, i \neq j+1}^N \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)} + \frac{1}{(x_j-x_N)} \prod_{i=1, i \neq N}^N \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)} \end{aligned} \quad (4-13)$$

Aus (4-13) folgert unmittelbar, dass die erste Ableitung eine stetige Funktion ist, die an den Knoten folgende Werte annimmt:

$$\frac{d}{dx} \varphi_j(x_p) = \begin{cases} \sum_{\substack{i=1, \dots, N \\ i \neq j}} \frac{1}{(x_j-x_i)}, & p = j \\ \frac{1}{(x_j-x_p)} \prod_{i=1, i \neq p}^N \frac{(x_p-x_i)}{(x_j-x_i)}, & p \neq j \end{cases} \quad (4-13')$$

Die Überlegungen bezüglich $\frac{d}{dy} \varphi_k(y)$, $k = 1 \dots M$ sind analog. Für die „obere“ Funktion $p^+(x, y)$ aus (4-9) verlaufen die analytischen Untersuchungen mit dem gleichen Ergebnis. Die „unteren“ und „oberen“ Funktionen in (4-9) sind somit stetig und unendlich oft differenzierbar.

QED

Die - unscharfen - ersten Ableitungen der unscharfen Oberfläche (4-8) können folgendermaßen konstruiert werden:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_x &= \frac{d}{dx} \tilde{p}(x, y) = \frac{d}{dx} \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M}} \tilde{Z}_{jk} \varphi_j(x) \varphi_k(y) = \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M}} \tilde{Z}_{jk} \varphi_k(y) \frac{d}{dx} \varphi_j(x), \\ \tilde{\Delta}_y &= \frac{d}{dy} \tilde{p}(x, y) = \frac{d}{dy} \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M}} \tilde{Z}_{jk} \varphi_j(x) \varphi_k(y) = \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M}} \tilde{Z}_{jk} \varphi_j(x) \frac{d}{dy} \varphi_k(y)\end{aligned}\quad (4-14)$$

Um Parameter dieser unscharfen Oberfläche (4-14) angeben zu können, verwenden wir die gleichen Überlegungen zum Vorzeichenwechsel wie für (4-8) und erhalten

$$\begin{aligned}\Delta_x^- &= \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ \varphi_k(y) \frac{d}{dx} \varphi_j(x) \geq 0}} Z_{jk}^- \varphi_k(y) \frac{d}{dx} \varphi_j(x) + \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ \varphi_k(y) \frac{d}{dx} \varphi_j(x) < 0}} Z_{jk}^+ \varphi_k(y) \frac{d}{dx} \varphi_j(x), \\ \Delta_x^0 &= \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M}} Z_{jk}^0 \varphi_k(y) \frac{d}{dx} \varphi_j(x), \\ \Delta_x^+ &= \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ \varphi_k(y) \frac{d}{dx} \varphi_j(x) \geq 0}} Z_{jk}^+ \varphi_k(y) \frac{d}{dx} \varphi_j(x) + \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ \varphi_k(y) \frac{d}{dx} \varphi_j(x) < 0}} Z_{jk}^- \varphi_k(y) \frac{d}{dx} \varphi_j(x)\end{aligned}\quad (4-15)$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}\Delta_y^- &= \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ \varphi_j(x) \frac{d}{dy} \varphi_k(y) \geq 0}} Z_{jk}^- \varphi_j(x) \frac{d}{dy} \varphi_k(y) + \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ \varphi_j(x) \frac{d}{dy} \varphi_k(y) < 0}} Z_{jk}^+ \varphi_j(x) \frac{d}{dy} \varphi_k(y), \\ \Delta_y^0 &= \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M}} Z_{jk}^0 \varphi_j(x) \frac{d}{dy} \varphi_k(y), \\ \Delta_y^+ &= \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ \varphi_j(x) \frac{d}{dy} \varphi_k(y) \geq 0}} Z_{jk}^+ \varphi_j(x) \frac{d}{dy} \varphi_k(y) + \sum_{\substack{j=1\dots N \\ k=1\dots M \\ \varphi_j(x) \frac{d}{dy} \varphi_k(y) < 0}} Z_{jk}^- \varphi_j(x) \frac{d}{dy} \varphi_k(y)\end{aligned}\quad (4-15')$$

Kommentar. Lemma 1 steht in Widerspruch zu Proposition 1 aus Lodwick, Santos (2003). Der Grund besteht darin, dass die dort im Beweis durchgeführte Berechnung des Vorzeichens der Lagrange-Funktionen auf einer unvollständigen Fallunterscheidung beruht.

Auf eine ähnliche Art und Weise kann die Unschärfe von weiteren differential-geometrischen Größen modelliert werden. Beispielsweise setzt sich die Länge des Gradienten \tilde{Q} der unscharfen Oberfläche (4-8) aus

$$\tilde{Q} = \sqrt{\tilde{\Delta}_x^2 + \tilde{\Delta}_y^2}\quad (4-16)$$

zusammen. Zur Berechnung der Parameter dieser unscharfen Größe können Operationen aus (4-1) und (4-2) verwendet werden.

Viele GIS-Tools bilden Differenzen anstatt klassische Ableitungen zu verwenden. Nach diesem Prinzip funktionieren auch die meisten Filter. Die Fortpflanzung der „Unschärfe“ kann in einem solchen Fall folgendermaßen behandelt werden:

1. Mittelwertbildung

Hier wird meist die folgende Summe berechnet, wobei nicht nur von positiven Gewichten auszugehen ist:

$$\tilde{m} = \sum_{j,k=1}^L \beta_{jk} \tilde{Z}_{jk}, \quad \sum_{j,k=1}^L \beta_{jk} = 1 \quad (4-17)$$

Für die Breite des Fensters wird normalerweise $L = 3, 5, \dots$ benutzt. Die Parameter des unscharfen Mittelwertes aus (4-17) sind:

$$\begin{aligned} m^- &= \sum_{\substack{j,k=1 \\ \beta_{jk} \geq 0}}^L \beta_{jk} z_i^- + \sum_{\substack{j,k=1 \\ \beta_{jk} < 0}}^L \beta_{jk} z_i^+, \\ m^0 &= \sum_{j,k=1}^L \beta_{jk} z_i^0, \\ m^+ &= \sum_{\substack{j,k=1 \\ \beta_{jk} \geq 0}}^L \beta_{jk} z_i^+ + \sum_{\substack{j,k=1 \\ \beta_{jk} < 0}}^L \beta_{jk} z_i^- \end{aligned} \quad (4-17')$$

2. Partielle Ableitungen (in Form von Differenzen)

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_x^{jk} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [\tilde{Z}_{(j+1)k} - \tilde{Z}_{(j-1)k}] & \tilde{\Delta}_y^{jk} &= \frac{1}{y_{k+1} - y_{k-1}} [\tilde{Z}_{j(k+1)} - \tilde{Z}_{j(k-1)}] \\ j &= 2 \dots N - 1, \quad k = 2 \dots M - 1 \end{aligned} \quad (4-18)$$

Die Parameter dieser unscharfen Größen sind:

$$\begin{aligned} \Delta_x^{jk-} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [Z_{(j-1)k}^- - Z_{(j-1)k}^+] & \Delta_x^{jk0} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [Z_{(j-1)k}^0 - Z_{(j-1)k}^0] \\ \Delta_x^{jk+} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [Z_{(j-1)k}^+ - Z_{(j-1)k}^-] \\ j &= 2 \dots N - 1, \quad k = 2 \dots M - 1 \end{aligned} \quad (4-18')$$

Die Parameter der partiellen Ableitungen nach y können analog bestimmt werden. Die höheren Ableitungen können rekursiv auf der Basis eines primären Gitters berechnet werden, wie z. B. für die p . Ordnung nach x bzw. nach y :

$$\tilde{\Delta}_{x^{(p)}}^{jk} = \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} [\tilde{\Delta}_{x^{(p-1)}}^{(j+1)k} - \tilde{\Delta}_{x^{(p-1)}}^{(j-1)k}] \quad \tilde{\Delta}_{y^{(p)}}^{jk} = \frac{1}{y_{k+1} - y_{k-1}} [\tilde{\Delta}_{y^{(p-1)}}^{(j+1)k} - \tilde{\Delta}_{y^{(p-1)}}^{(j-1)k}] \quad (4-19)$$

wobei die entsprechende Verkleinerung des sekundären Gitters berücksichtigt wird. Für ihre Parameter gilt dann:

$$\begin{aligned}\Delta_{x(p)}^{jk-} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} \left[\Delta_{x(p-1)}^{(j+1)k-} - \Delta_{x(p-1)}^{(j-1)k+} \right] & \Delta_{x(p)}^{jk0} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} \left[\Delta_{x(p-1)}^{(j+1)0} - \Delta_{x(p-1)}^{(j-1)0} \right] \\ \Delta_{x(p)}^{jk+} &= \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} \left[\Delta_{x(p-1)}^{(j+1)k+} - \Delta_{x(p-1)}^{(j-1)k-} \right]\end{aligned}\quad (4-19')$$

Ableitungen nach y erhält man analog:

Zum Vergleich zweier zeitlich getrennter Epochen (in (4-20) mit [1] und [2] bezeichnet) können Verfahren der Deformationsanalyse von Oberflächen herangezogen werden, siehe Grafarend (2006), Grafarend, Krumm (2006), Voosoghi (2000) und Abschnitt 3. Nun soll hier die Unschärfe der folgenden Charakteristiken diskutiert werden: *Surface Dilatation* und Quadrat des so genannten *Surface Maximum Shear Strains*. Dieses „Quadrat“ darf dann auch negativ werden, wenn *Surface Maximum Shear Strain* eine komplexe Zahl ist. Die Definitionen können (4-20) entnommen werden und entsprechen in unserem Fall:

$$\begin{aligned}DI\tilde{L} &= \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 \quad \text{und} \quad \tilde{\Gamma}^2 = (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)^2 \quad \text{mit} \\ \tilde{\lambda}_1 &= 0.5 \cdot \left(PA\tilde{R}_1 + \sqrt{PA\tilde{R}_1^2 - 4 \cdot PA\tilde{R}_2} \right), \quad \tilde{\lambda}_2 = 0.5 \cdot \left(PA\tilde{R}_1 - \sqrt{PA\tilde{R}_1^2 - 4 \cdot PA\tilde{R}_2} \right) \quad \text{und} \\ PA\tilde{R}_1 &= tr(\tilde{E} \cdot \tilde{A}^{-1}), \quad PA\tilde{R}_2 = \det(\tilde{E} \cdot \tilde{A}^{-1}), \quad \text{wobei} \\ \tilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[1])^2 & \tilde{\Delta}_x^{jk}[1] \cdot \tilde{\Delta}_y^{jk}[1] \\ \tilde{\Delta}_x^{jk}[1] \cdot \tilde{\Delta}_y^{jk}[1] & 1 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[1])^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[2])^2 & \tilde{\Delta}_x^{jk}[2] \cdot \tilde{\Delta}_y^{jk}[2] \\ \tilde{\Delta}_x^{jk}[2] \cdot \tilde{\Delta}_y^{jk}[2] & 1 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[2])^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{E} = 0.5(\tilde{C} - \tilde{A})\end{aligned}\quad (4-20)$$

Aus (4-20) lässt sich ableiten, dass

$$DI\tilde{L} = PA\tilde{R}_1, \quad \tilde{\Gamma}^2 = PA\tilde{R}_1^2 - 4 \cdot PA\tilde{R}_2 \quad (4-20')$$

Nach einigen Vereinfachungen in (4-20) erhält man:

$$\begin{aligned}DI\tilde{L} = PA\tilde{R}_1 &= 0.5 \cdot tr(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1} - E) = 0.5 \cdot tr(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1}) - 1 \\ &= \frac{1}{2 \left(1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[1])^2 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[1])^2 \right)} \left[\left(1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[2])^2 \right) \cdot \left(1 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[1])^2 \right) - 2\tilde{\Delta}_x^{jk}[2]\tilde{\Delta}_y^{jk}[2]\tilde{\Delta}_x^{jk}[1]\tilde{\Delta}_y^{jk}[1] \right] - 1\end{aligned}\quad (4-21)$$

und

$$\begin{aligned}PA\tilde{R}_2 &= 0.5^2 \cdot \det(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1} - E) = 0.25 \cdot \left(\det(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1}) - tr(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1}) + 1 \right) \\ &= 0.25 \cdot \left(\frac{\det(\tilde{C})}{\det(\tilde{A})} - tr(\tilde{C} \cdot \tilde{A}^{-1}) + 1 \right) = 0.25 \cdot \frac{\det(\tilde{C})}{\det(\tilde{A})} - 0.5 \cdot PA\tilde{R}_1 - 0.25 \\ &= \frac{1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[2])^2 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[2])^2}{4 \left(1 + (\tilde{\Delta}_x^{jk}[1])^2 + (\tilde{\Delta}_y^{jk}[1])^2 \right)} - 0.5 \cdot PA\tilde{R}_1 - 0.25\end{aligned}\quad (4-22)$$

In den Relationen (4-21)-(4-22) werden somit nur die in (4-1) eingeführten Operationen mit scharfen Zahlen verwendet. Die in (4-21) und (4-22) präsentierten Herleitungen verwenden eine analytische Darstellung der Elemente einer inversen 2x2-Matrix.

In Abschnitt 6 wird die Fortpflanzung der Unschärfe von Höhenmessungen auf die von ihnen abgeleiteten differential-geometrischen Größen an einem Beispiel präsentiert.

5. Ein statistisches Verfahren zur Indikation von Datenabnormitäten

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit einem Teilproblem der Analyse von räumlich-zeitlichen Prozessen, nämlich mit statistischen Untersuchungen zur Genauigkeit von Messungen und mit der Vorhersage von räumlich-zeitlichen Veränderungen der Reliefoberfläche. Das mathematische Werkzeug für diese Analyse stellt eine spezielle analytische Oberflächendarstellung dar, die sich auf eine unkonventionelle Reliefdarstellung im Amplituden-Frequenz-Bereich stützt, siehe Wälder (2005a,b), Wälder u.a. (2004) und Abschnitt 2.

Die mathematische Basis der in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen bilden spezielle Interpolationsmethoden für solches Datenmaterial, das nicht mehr auf konventionelle Weise bearbeitet werden kann, siehe Wälder (2005a,b). Als Beispiel für diese Vorgehensweise sollen die Untersuchungen am Blockgletscher Reichenkar genannt werden, siehe Abschnitt 6.

Die Diskussion des Verschmutzungsgrades von Daten gehört zum Kompetenzbereich der Ausreißerstatistik. Als eine der ersten Arbeiten, die sich mit Ausreißern bei Zeitreihen beschäftigt, ist die von Fox (1972) zu erwähnen. Im Allgemeinen versucht man, den Einfluss von Ausreißern zu unterdrücken, weil diese jede Datenanalyse drastisch beeinflussen können. Wir wollen in der vorliegenden Arbeit bewusst vom Begriff „Ausreißer“ Abstand nehmen und stattdessen lediglich von „Datenabnormitäten“ sprechen. Der Grund hierfür besteht darin, dass wegen des spezifischen, Praxis bezogenen Datenmaterials eine strenge theoretische Herleitung sowohl der statistischen Schätzer als auch der Verteilung von Testgrößen fast unmöglich ist: Sieben zeitliche Epochen geben keinen Anlass zu asymptotischen Abhandlungen, weiterhin erfordert der räumlich-zeitliche Bezug die Einführung von mehrdimensionalen Testgrößen.

Bei der oben beschriebenen Problematik erweisen sich daher schließlich einige empirische Verfahren der räumlichen Statistik als sehr nützlich, siehe Wälder (1999). Nun soll der konkrete Modellaufbau insbesondere im Hinblick auf die praktische Anwendung in Abschnitt 6 diskutiert werden.

Trendmodellierung mit Wavelet-Splines

Zunächst sollte das räumliche Datenmaterial - die Relieffhöhen in [m] - über verschiedene zeitliche Epochen sozusagen auf „einen gemeinsamen Nenner“ gebracht werden. D.h. zeitlich verschiedene, spärliche Messungen von sich in ständiger Bewegung befindenden Felsblöcken werden auf ein zeitunabhängiges Punktgitter interpoliert. Im konkreten Anwendungsfall entsteht das grobe Gitter aus 5 x 5 Punkten auf konventionelle Art und Weise durch Mittelwertbildung über lokale Bereiche um die vorgesehenen Stützpunkte. Im nächsten Schritt wird eine sequentielle Reliefinterpolation der Tiefe 3 (Anzahl p der verwendeten Rekursionen) mit zickzack-förmigen Basis-Funktionen nach (2-15) durchgeführt, um die Visualisierung feinerer Gitterstrukturen zu unterstützen, siehe Wälder (2005a,b). Somit können die analytischen Gleichungen des untersuchten Georeliefs für jede zeitliche Epoche ermittelt werden, siehe (5-1).

$$\begin{aligned}
 S^p(x, y) = & A + a_0 f_0(x) + b_0 f_0(y) + c_0 f_0(x) f_0(y) + \\
 & a_1 f_1(x) + b_1 f_1(y) + c_1 f_1(x) f_1(y) + \dots \\
 & a_{p-1} f_{p-1}(x) + b_{p-1} f_{p-1}(y) + c_{p-1} f_{p-1}(x) f_{p-1}(y),
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

mit $A, a_k, b_k, c_k \in R, const, \quad k = 0, \dots, p-1,$

wobei

$$f_k(t) = \begin{cases} 2^k t^*, & t^* \in \left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \\ 2^k \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - t^* \right), & t^* \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k, \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] \\ 2^k \left(t^* - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \right), & t^* \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^k, \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \right] \end{cases} \quad \text{mit } t^* = \text{mod} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} (t),$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

und

$$x = \{\max(x) - \min(x)\} \cdot t + \min(x),$$

$$y = \{\max(y) - \min(y)\} \cdot t + \min(y).$$

Die Koeffizienten A, a_k, b_k, c_k , $k = 0, 1, \dots, p-1$, stellen Amplituden dar, die für jeden lokalen Bereich und für jede zeitliche Epoche sequentiell angepasst werden, siehe Wälder (2005a, b). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit und nur zum Zweck der Vereinfachung der Berechnungen ist es sinnvoll, die realen Gitterkoordinaten zunächst auf den $[0, 1] \times [0, 1]$ -Bereich zu transformieren, um diese Amplituden zu ermitteln. Die Rücktransformation ist offensichtlich und wurde bereits in Abschnitt 2 beschrieben.

Nachdem eine zeitlich-einheitliche, auf dem räumlichen Frequenzbereich festgelegte Darstellung des Datenmaterials erreicht wurde, kann eine Gegenüberstellung von Amplitudenzeitreihen in jedem der lokalen Bereiche des Georeliefs erfolgen. Für unser Beispiel kann festgestellt werden, dass bei den Zeitreihen 1997-2003 näherungsweise von einer linearen Regression ausgegangen werden kann. Zusätzliche Untersuchungen mit einem quadratischen bzw. exponentiellen Ansatz führen zu keinen signifikanten Verbesserungen. Somit wird kann in einer *ersten Annahme* von einem linearen Trend bei diesen Amplitudenzeitreihen ausgegangen werden. Für den Trend des Georeliefs D zum Zeitpunkt T ergibt sich unmittelbar:

$$D^p(x, y, T) = \hat{A} + \hat{a}_0 f_0(x) + \hat{b}_0 f_0(y) + \hat{c}_0 f_0(x) f_0(y) +$$

$$\hat{a}_1 f_1(x) + \hat{b}_1 f_1(y) + \hat{c}_1 f_1(x) f_1(y) + \dots$$

$$\hat{a}_{p-1} f_{p-1}(x) + \hat{b}_{p-1} f_{p-1}(y) + \hat{c}_{p-1} f_{p-1}(x) f_{p-1}(y), \quad (5-2)$$

$$Ampl = Par1_{Ampl} \cdot T + Par2_{Ampl},$$

$$\text{mit } Ampl = \hat{A}, \hat{a}_k, \hat{b}_k, \hat{c}_k, \quad k = 0, \dots, p-1,$$

wobei $Par1, Par2$ die Parameter der entsprechenden linearen Regressionen für A, a_k, b_k, c_k , $k = 0, 1, \dots, p-1$ darstellen. Nach der Trendmodellierung erfolgt die stochastische Modellierung zufälliger Geooberflächen.

Ein empirischer Konfidenzbereich für die mittlere Geooberfläche: Modellierung zufälliger Störungen

Die *zweite Annahme* bei unserer Modellierung besteht in der Erfassung zufälliger Schwankungen des Georeliefs R mittels:

$$\begin{aligned}
R^p(x, y, T) = & \left(\hat{A} + Z_A \right) + \\
& \left(\hat{a}_0 + Z_{a_0} \right) f_0(x) + \left(\hat{b}_0 + Z_{b_0} \right) f_0(y) + \left(\hat{c}_0 + Z_{c_0} \right) f_0(x) f_0(y) + \\
& \left(\hat{a}_1 + Z_{a_1} \right) f_1(x) + \left(\hat{b}_1 + Z_{b_1} \right) f_1(y) + \left(\hat{c}_1 + Z_{c_1} \right) f_1(x) f_1(y) + \dots \\
& \left(\hat{a}_{p-1} + Z_{a_{p-1}} \right) f_{p-1}(x) + \left(\hat{b}_{p-1} + Z_{b_{p-1}} \right) f_{p-1}(y) + \left(\hat{c}_{p-1} + Z_{c_{p-1}} \right) f_{p-1}(x) f_{p-1}(y),
\end{aligned} \tag{5-3}$$

$$k = 0, \dots, p-1,$$

wobei die zufälligen Störgrößen $Z_A, Z_{a_k}, Z_{b_k}, Z_{c_k}, k = 0, \dots, p-1$ als trend- und voneinander unabhängig sowie normalverteilt mit Mittelwert Null vorausgesetzt werden. Der Begriff „mittlere Geooberfläche“ mit $D=E(R)$ (vgl. (5-2), auf den oberen Index wird hier verzichtet) in der Abschnittsüberschrift soll hier als Analogon zum Begriff „Mittelwert“ bei der klassischen Konfidenzintervallschätzung eingeführt werden.

Als Schätzer der Standardabweichung jeder Störgröße wird der Mittelwert der absoluten Abweichungen der für jede zeitliche Epoche nach (5-1) berechneten Amplituden von ihren durch die entsprechende lineare Regression (vgl. (5-2)) für diese Zeitpunkte errechneten Werten verwendet.

Anschließend werden 1000 Simulationen des in (5-3) dargestellten zufälligen Georeliefs (Höhen) erzeugt und in jedem der lokalen Bereiche der minimale und maximale Wert berechnet. Diese Werte werden zu zwei Oberflächen zusammengefasst, einer minimalen und einer maximalen Grenzoberfläche. Der Bereich zwischen diesen Oberflächen wird dann als *empirischer Konfidenzbereich* für die mittlere Geooberfläche definiert. Dieser Konfidenzbereich kann einerseits zur Vorhersage der zu erwartenden Gletscherdynamik und andererseits zum Test auf Abnormitäten in den Messungen unter den oben eingeführten Annahmen verwendet werden. Die grundlegende Idee hierzu besteht in einer räumlich-zeitlichen Verallgemeinerung des in Wälder (1999) vorgestellten empirischen Verfahrens.

Nun kann *der empirische statistische Test auf Abnormitäten in den Geodaten* folgendermaßen formuliert werden:

Liegen die Messungen in einem konkreten Jahr zu über M% in dem unter den oben beschriebenen Modellannahmen berechneten Konfidenzbereich, so kann mit einer Sicherheit von M% davon ausgegangen werden, dass diese Geodaten keine Abnormitäten aufweisen.

Wenn das Gegenteil eintritt, kann von einer Abnormität in den Geodaten gesprochen werden, die sich sowohl auf Verschmutzung als auch auf die Ungültigkeit der obigen Annahmen zurückführen lassen könnte. Zum Beispiel könnte eine Steigungsänderung (change point) beim linearen Regressionsansatz eingetreten sein. In diesem Fall müsste der lineare Ansatz in (5-2) ergänzt werden.

In Abschnitt 6 wird eine Anwendung dieses Verfahrens präsentiert.

6. Anwendung von Interpolationsverfahren für differential-geometrische Größen

6.1 Fallstudie „Kaiserberg“: zum sequentiellen Aufbau von Wavelet-Splines

Basierend auf den um GPS-Messungen erweiterten Datensatz zum DHM „Kaiserberg“, d.h. einem digitalen Höhenmodell mit mehr als 100 000 Messpunkten, sollen nun Ergebnisse zu folgenden Untersuchungen präsentiert werden:

- Schrittweise Ausdünnung des Datensatzes auf ein 65×65 – Gitter
- Sequentielle Approximation des Georeliefs mittels gemischter Wavelet-Splines

Kommentar. „Gemischte“ Wavelet-Splines stellen, wie bereits in 2.4 diskutiert wurde, eine Verallgemeinerung des ursprünglichen Ansatzes dar. In jedem Schritt wird anhand einer Gegenüberstellung von entsprechenden Genauigkeiten derjenige Typ von Basis-Funktionen aus den Beispielen 2.4-1 bis 2.4-3 ausgewählt, mit dem dabei die höchste Genauigkeit nach (2-26) erzielt wird. Das Verfahren erlaubt eine lokale Anpassung dieses Typs in jedem Schritt und für jede einzelne Zelle. Zur Vereinfachung der Darstellung wird in den folgenden Abbildungen jeweils eine Art pro Schritt (jedoch nicht pro Zelle) ausgewählt.

Unser primäres Ziel bestand darin, die Struktur des ursprünglichen DHMs für weitere Anwendungen nicht nur mit möglichst geringem Speicheraufwand und mit einer optimalen Genauigkeit zu erhalten, sondern auch eine differential-geometrische Analyse auf der Basis der abgeleiteten funktionalen Form des Reliefs durchführen zu können.

Die Qualität des vorgestellten sequentiellen Verfahrens kann schrittweise kontrolliert werden. Als Ergebnis der ursprünglichen Ausdünnung wird eine spezielle Wellen-Struktur für das reale Georelief erzeugt. Basierend auf dieser kann nun eine Frequenzanalyse durchgeführt werden. Zudem kann der Aufbau von Makro- bis hin zu Mikrostrukturen des Georeliefs analysiert und verfolgt werden. Die Anwendung von gemischten Wavelet-Splines erhöht dabei die Genauigkeit der Approximation eines Reliefs. Weitere Details können Wälder (2005b) entnommen werden.

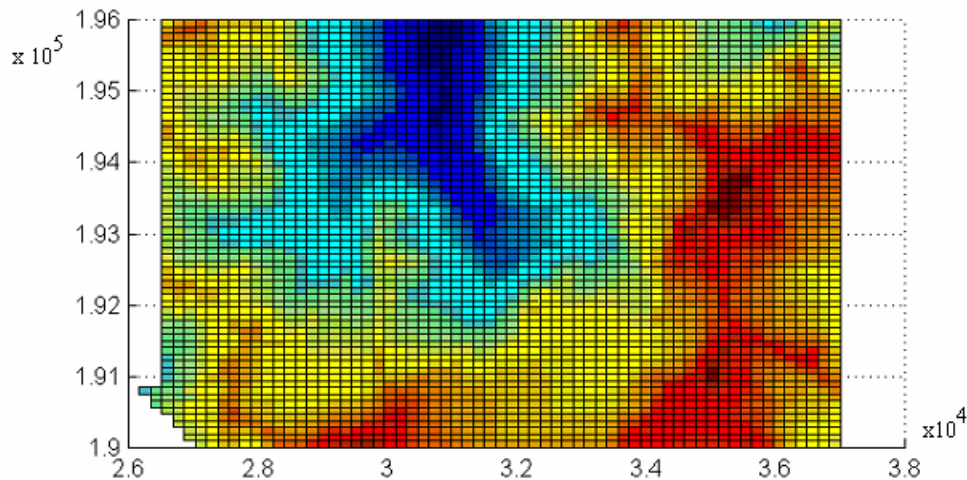


Abbildung 6-1. Originaldaten Kaiserberg mit mehr als 100 000 Punkten.

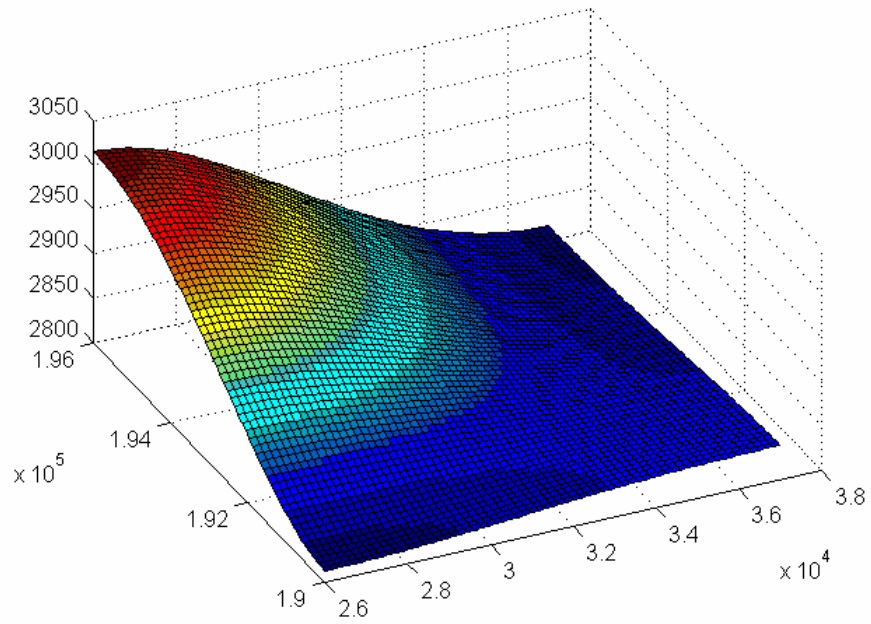


Abbildung 6-2a. Schritt 1: 2×2 - Gitter, polynomialer Spline vom Grad 1.

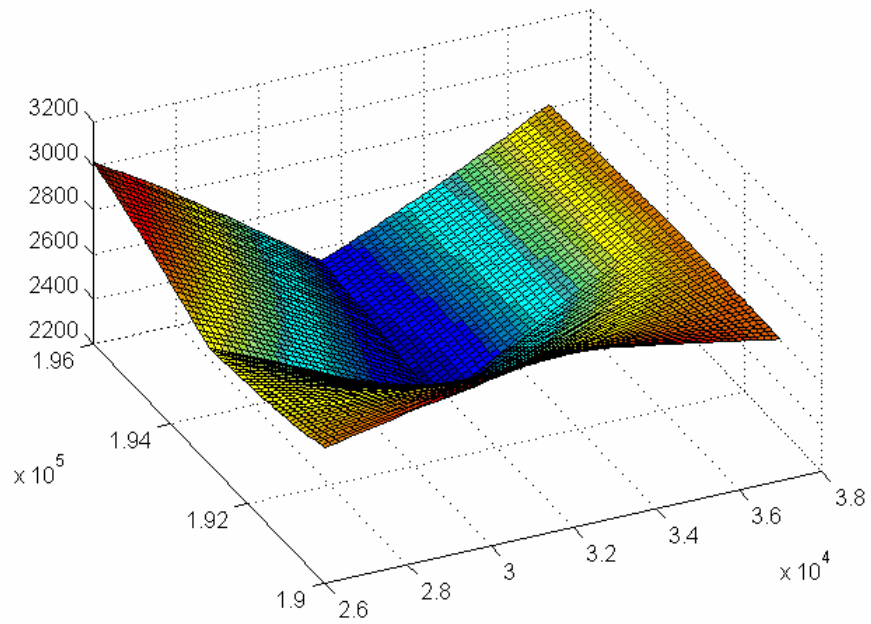


Abbildung 6-2b. Schritt 2: 3×3 - Gitter, gemischter Wavelet-Spline vom Grad 2 (Poly/Zickzack).

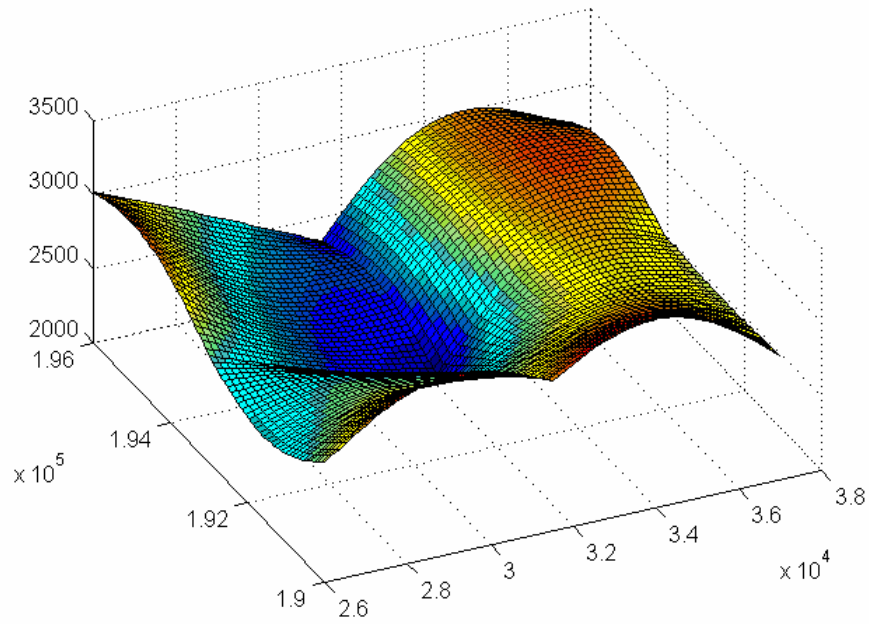


Abbildung 6-2c. Schritt 3: 5×5 – Gitter, gemischter Wavelet-Spline vom Grad 3 (Poly/Zickzack/Sin).

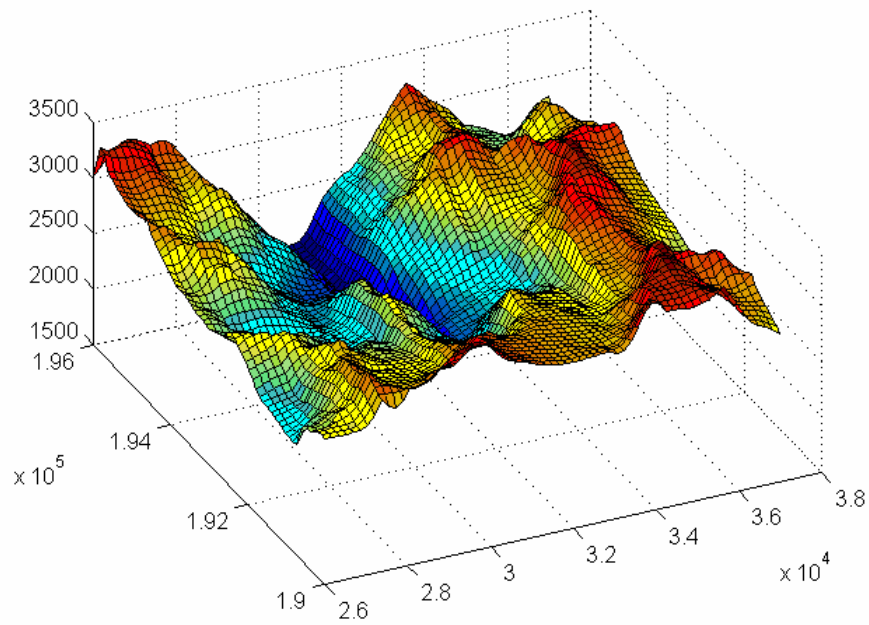


Abbildung 6-2d. Schritt 6, 33×33 – Gitter, gemischter Wavelet-Spline vom Grad 6 (Poly/Zickzack/Sin/Zickzack/Sin/Sin).

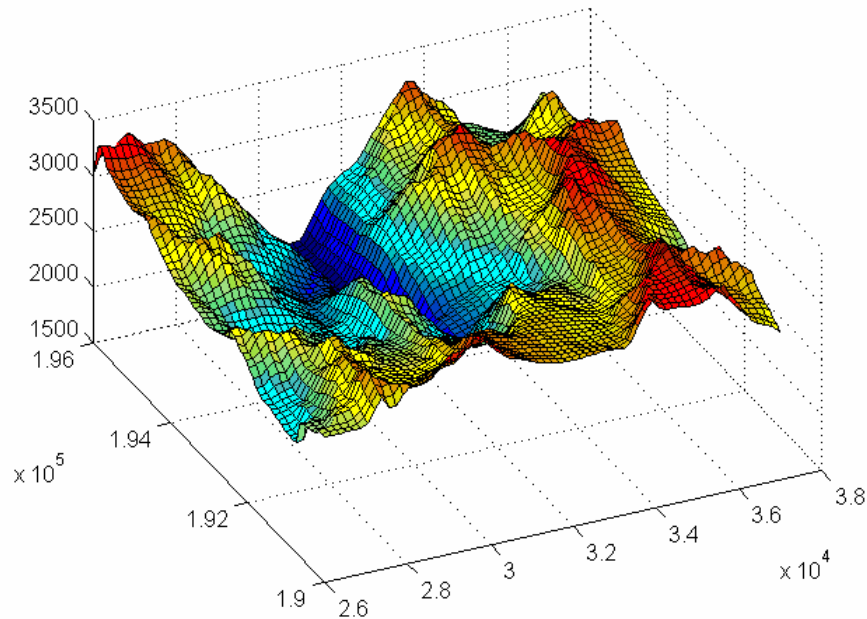


Abbildung 6-2e. Schritt 7, 65×65 – Gitter, gemischter Wavelet-Spline vom Grad 7 (Poly/Zickzack/Sin/Zickzack/Sin/Sin/Zickzack).

6.2 Fallstudie „Reichenkar“: gemischte Wavelet-Splines und Anisotropie

Die Beschreibung des Datenmaterials kann Abschnitt 2.2 entnommen werden. Die räumliche Verteilung der Messpunkte über alle Jahre wird in Abb. 6-3 dargestellt. Auf Grund der geringen Abstände kann diese Darstellung nur für einzelne, entsprechend vergrößerte Teilgebiete empfohlen werden. Die Oberflächen des Blockgletschers wurden mithilfe von gemischten Wavelet-Splines für anisotrope Medien approximiert, siehe hierzu Wälder (2005b).

Nach der ursprünglichen Interpolation auf ein - nicht unbedingt regelmäßiges - Gitter wird eine spezielle Wellen-Struktur für das reale Georelief erzeugt. Eine Interpolation von differential-geometrischen Größen kann auf der Basis der abgeleiteten funktionalen Form des Reliefs mit Hilfe dieses Verfahrens durchgeführt werden. Aus einer ersten, groben Datenanalyse ergibt sich unmittelbar, dass sich die Höhenmessungen aus den Jahren 1997 und 1998 nur im ersten Messpunkt (Nummer 1 in der Excel-Tabelle) unterscheiden. D.h., es können keine Z-Verschiebungen nachgewiesen werden, was auf einen Geräte- oder Übertragungsfehler hindeuten könnte.

Für Epochen ab dem Jahr 2000 liegen u.a. Visualisierungen der Längen von Verschiebungsvektoren vor. Auffällig ist hierbei die Änderung der Lage der Extremwerte dieser Vektorlänge im beobachteten Zeitraum. Eine plausible geowissenschaftliche Erklärung für diese Änderungen wäre insbesondere im Hinblick auf mögliche Zusammenhänge mit der entsprechenden Lage des Eiskerns von großem Interesse.

Eine Gegenüberstellung der Bewegung des Gletschers in den Jahren 2002 und 2003 bzw. 2003 und 2004 mithilfe gemischter Wavelet-Splines für anisotrope Medien wird in Abb. 6-4a,b präsentiert.

Bemerkung. Die Ergebnisse der Interpolation von differential-geometrischen Größen mithilfe von Wavelet-Splines werden in einer weiteren Fallstudie präsentiert, um unnötige Wiederholungen vermeiden zu können.

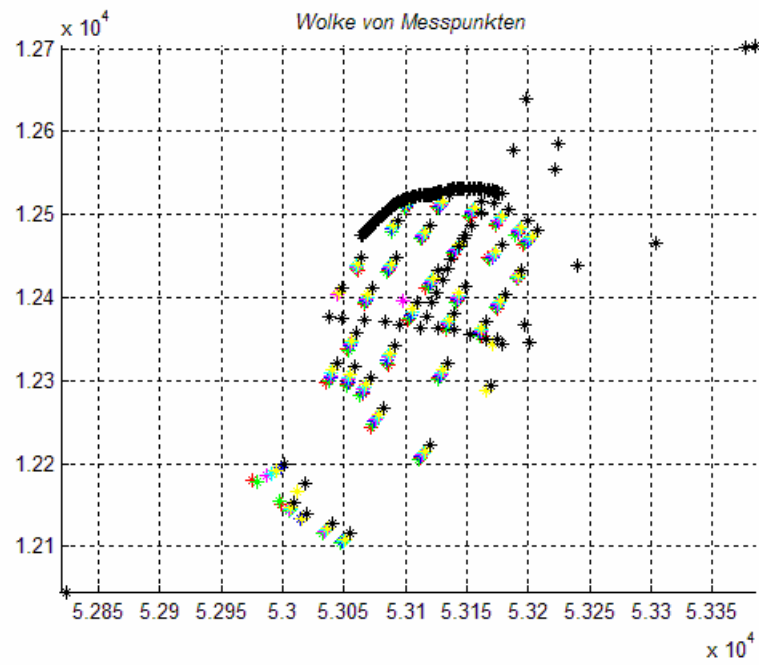


Abbildung 6-3. Lage der Messpunkte für ein Teilgebiet, XOY - Ebene, 1997(rot)-1998(grün)-2000(blau)-2001(margenta)-2002(cyan)-2003(gelb)-2004(schwarz).

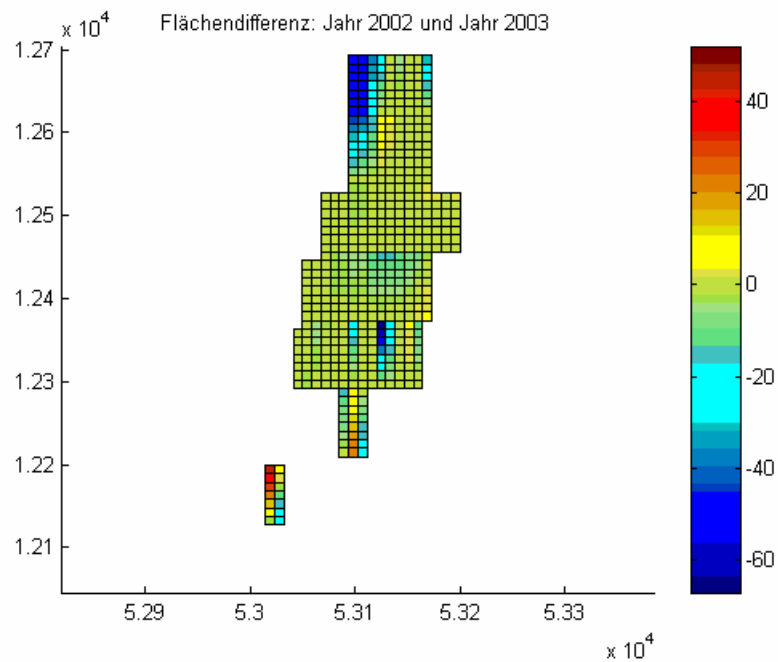


Abbildung 6-4a. Höhendifferenzen zwischen den Jahren 2002 und 2003

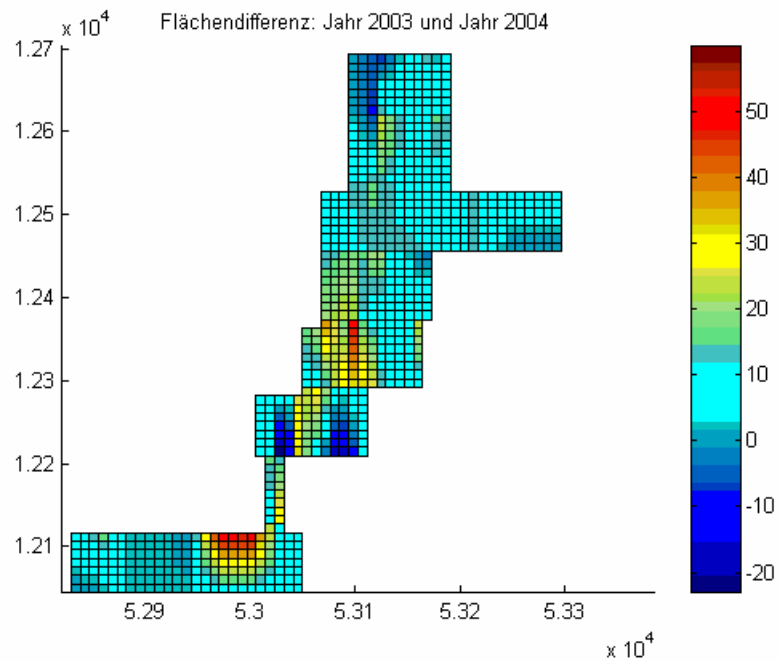


Abbildung 6-4b. Höhendifferenzen zwischen den Jahren 2003 und 2004

6.3 Fallstudie „Reichenkar“: Bezier-Splines

Anhand des Kontrollnetzes aus Abb. 3-1 wurden in siehe Wälder (2005e) Bezier-Flächen für die Höhenmessungen am Reichenkar für die Jahre 1997 bis 2000 und 2002 bis 2004 hergeleitet. Abb. 6-5 zeigt eine solche Fläche für das Jahre 1997. Hierbei wurde eine Unterteilung der Parameter u und v aus $[0,1]$ in 10 gleich große Intervalle verwendet. Daher entstanden 11×11 – Gitter, die in den weiteren Abbildungen zur Visualisierung verwendet werden sollen. Als Eckpunkte dienten dabei die Messstellen mit den Nummern $b_{00} = 2, b_{01} = 36, b_{10} = 6, b_{11} = 32$, vgl. Abb. 3-1. Die Definitionen der unten berechneten Größen können Abschnitt 2.3 entnommen werden. Der Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der Bezier-Fläche entsprechen, kann für das Jahr 2003 den Abb. 6-9a,b entnommen werden. Für die räumlich-zeitliche Deformationsanalyse von zwei Epochen wurde jeweils ein Jahr als Referenzepoche ausgewählt und mit einem nachfolgenden verglichen.

Die Deformationsanalyse von Reliefoberflächen mithilfe von Bezier-Splines erfolgt aus einem alternativen und in einem gewissen Sinn unkonventionellen Blickwinkel: Der Blockgletscher wird als ein komplettes Objekt aufgefasst, dessen Veränderungen mithilfe von koordinatenfreien, im CAD-Design üblichen Kategorien wie „vorderes Zungenprofil“, „die linke Kante des Gletschers“ usw. beschrieben werden können.

Wie man in Abb. 6-5 erkennen kann, glättet die Bezier-Fläche die wahren Höhenmessungen sehr stark. Dennoch soll betont werden, dass der Blockgletscher ein sehr „raues“ Untersuchungsobjekt ist: Man kann im Grunde genommen von keiner Oberfläche im gebräuchlichen Sinne des Wortes sprechen. Eine differential-geometrische Oberflächendeformationsanalyse wie aus Abschnitt 2 wird nun auf einer so genannten Trendoberfläche durchgeführt.

Der absolute mittlere Fehler der Approximation des Blockgletschers mittels Bezier-Splines liegt in unserem Fall bei ca. 5 m. Dieser Fehlerwert wurde dabei durch eine Gegenüberstellung aus den Messdaten linear interpolierter Werte und den aus der Bezier-Fläche abgeleiteten Werten bestimmt.

Während der axiale mittlere Bereich des Gletschers beinahe krümmungsfrei verläuft, erweist sich der linke vordere Zungenbereich als nach oben hin konvex (konkav). Der etwas höher gelegene steile Teil des Gletschers rechts ist dabei nach unten hin konvex (konvex).

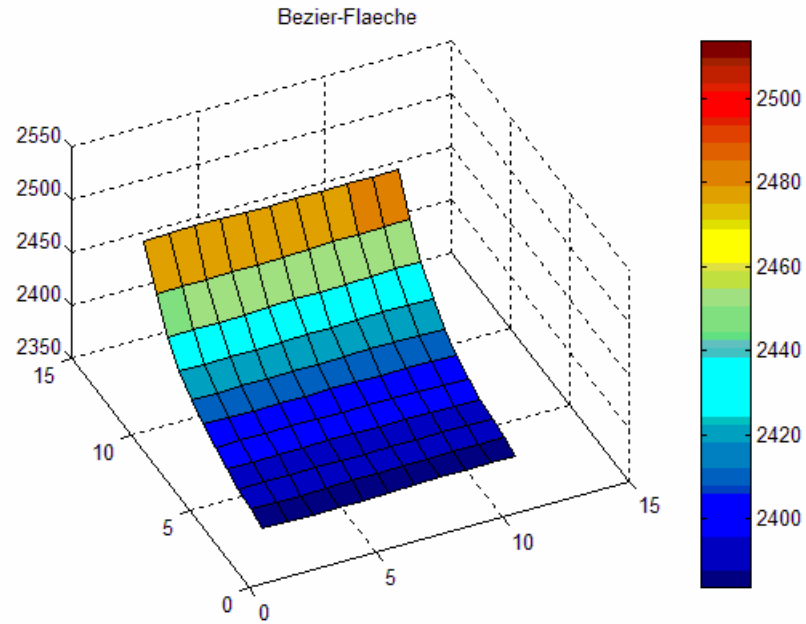
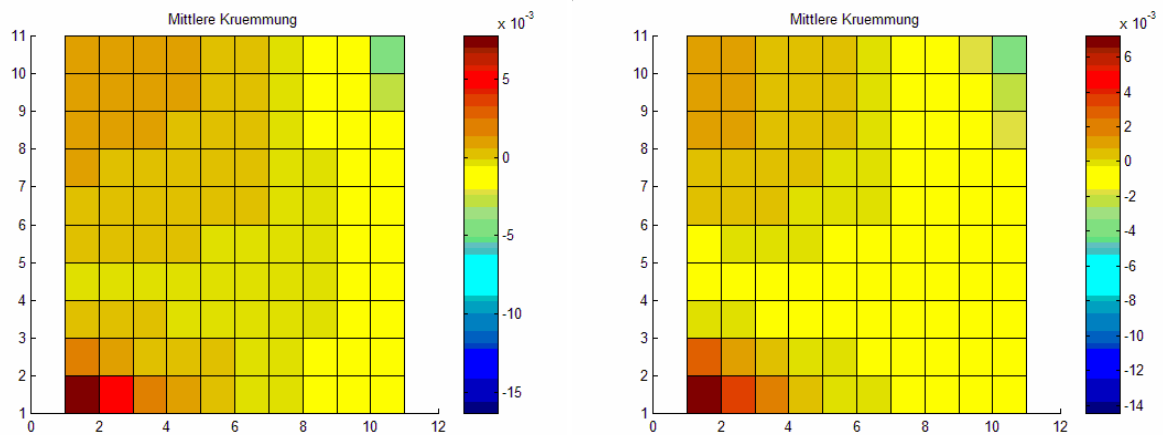


Abbildung 6-5. Bezier-Fläche für das Jahr 1997. Die linke untere Ecke mit $u = 0, v = 0$ entspricht der Messstelle mit der Nummer 2. Die rechte untere Ecke mit $u = 1, v = 0$ entspricht der Messstelle mit der Nummer 6, vgl. Abb.3-1.



Abbildungen 6-6a,b. Die mittlere Krümmung für die Jahre 1997 und 2003.

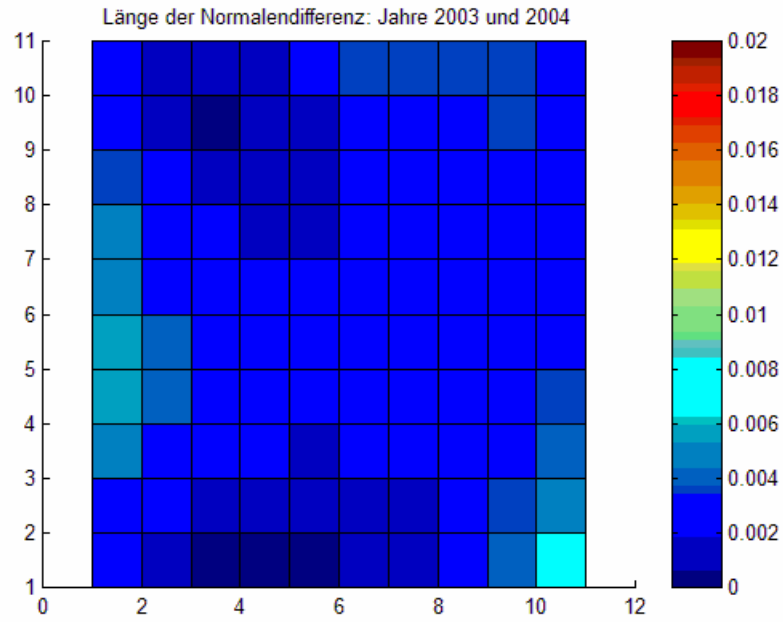


Abbildung 6-7. Die Länge der Differenz von Normalvektoren der entsprechenden Bezier-Flächen in den Jahren 2003 und 2004.

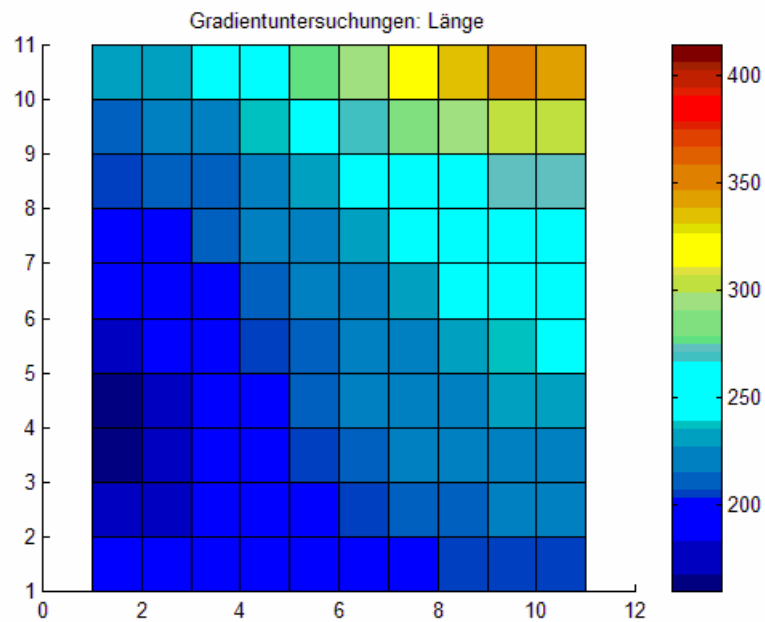


Abbildung 6-8. Die Gradientenlängen der abgeleiteten Bezier-Fläche für das Jahr 2003.

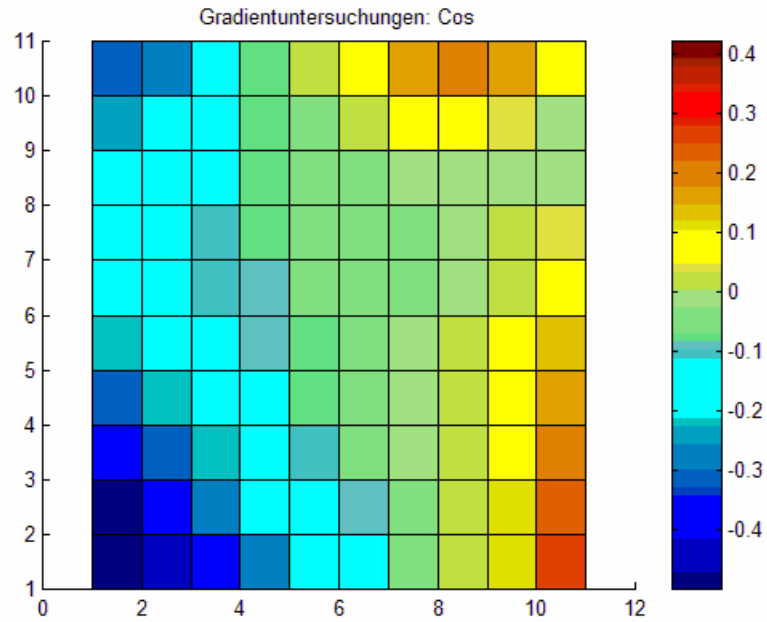


Abbildung 6-9a. Der Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der abgeleiteten Bezier-Fläche entsprechen, im Jahr 1997.

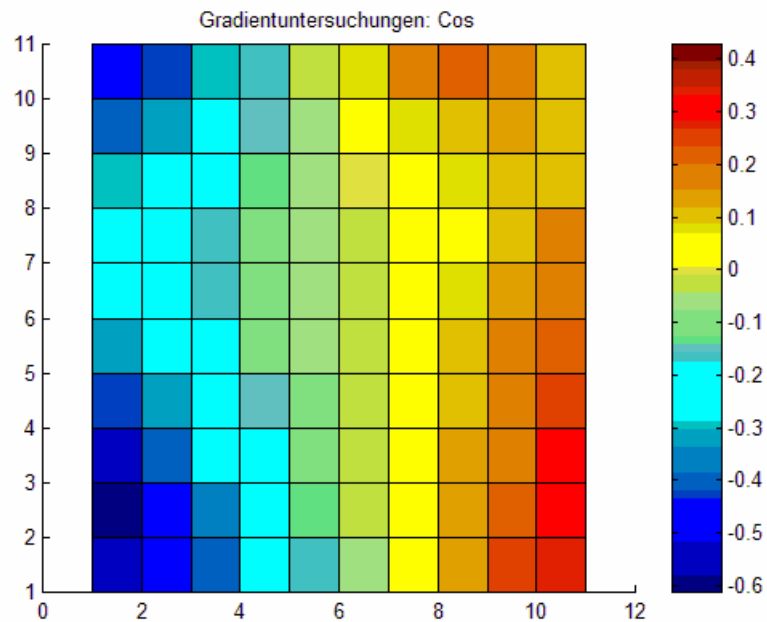


Abbildung 6-9b. Der Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der abgeleiteten Bezier-Fläche entsprechen, im Jahr 2003.

Die „Aktivität“ der Oberfläche des Gletschers ist entlang der longitudinalen Gletscherkanten am auffälligsten. Es besteht stets ein höheres Abrutschpotenzial für die Randblöcke, welches diese Aktivität erklären lässt. Die Gegenüberstellung von verschiedenen Epochen zeigt, dass sich diese Aktivität in den Jahren 1997 und 1998 auf die vordere linke Ecke konzentrierte, während sich in den Jahren 2003 und 2004 der mittlere linke sowie der rechte obere Randbereich eher veränderten. Die Gradientenuntersuchungen, siehe Abb. 6-8, zeigen den Unterschied der Neigung des Blockgletschers Reichenkar deutlich auf: Oben rechts befindet sich der steilste Abschnitt, während der Zungenbereich ziemlich flach ausfällt.

Nicht uninteressant ist die Untersuchung des Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren in Abb. 6-9a,b, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der abgeleiteten Bezier-Fläche entsprechen. Die negativen Werte bedeuten, dass die Änderungen der Oberfläche in Richtung quer und entlang der Fortbewegung des Gletschers „gegenläufig“ sind: Der Winkel zwischen den oben genannten Vektoren ist dabei stumpf. Dagegen stehen positive Werte für die „Gleichläufigkeit“ dieser Änderungen (analog zu dem Vorzeichen eines Korrelationskoeffizienten). Diese Gleichläufigkeit kann das Monotonieverhalten der Oberfläche (steigend bzw. fallend in beiden Richtungen u und v) oder die Tendenz des „Abbiegens“ des Blockgletschers widerspiegeln. Dem Koordinatensystem aus Abb. 3-1 entspricht dabei eine nordwestliche Abbiegungsrichtung.

6.4 Fallstudie „Reichenkar“: Statistische Untersuchungen zur Datenabnormität mithilfe von Wavelet-Splines

Abbildung 6-10a zeigt die Längen der tangentialen Verschiebungsvektoren der Messungen am Gletscher für die Jahre 2002 und 2003; in Abbildung 6-10b sind die Längen dieser Vektoren für die Jahre 2003 und 2004 dargestellt. Die in Abbildung 6-10a gezeigte Tendenz entspricht ungefähr der in den früheren Jahren. Man kann aus der Legende zu Abbildung 6-10b ersehen, dass sich die Fließgeschwindigkeit in den Jahren 2003 bis 2004 beinahe verdreifacht hat.

Im ersten Schritt unserer Untersuchungen wurden die Messungen in einem ausgewählten Teilgebiet nahe des Zungenbereiches des Gletscher auf ein 5×5 - Gitter interpoliert und die Ableitung von analytischen Darstellungen wie in (5-1) für jede der sieben zeitlichen Epochen (1997 und 1998 bis 2004) durchgeführt, vgl. Abschnitt 5 und Wälder (2005a). Abbildung 6-11 zeigt die analytische Oberfläche für das Jahr 2004. Somit entstanden 16 Teilbereiche mit 10 spezifischen, lokal angepassten Amplituden.

Im zweiten Schritt wurden die Parameter von 160 linearen Regressionsmodellen ermittelt. Um den Modellansatz hinsichtlich seiner Relevanz zu testen, wurde zuerst mit den Zeitepochen 1997 bis 2003 gearbeitet. Dabei wurden bei der Anpassung der linearen Regression immer Werte eines bestimmten Jahres nicht berücksichtigt und durch Anwendung des in Abschnitt 5 beschriebenen Ansatzes vorhergesagt. Diese Vorgehensweise wird in der Geostatistik als cross validation bezeichnet. Es lässt sich nun festhalten, dass mit dem in Abschnitt 5 eingeführten empirischen statistischen Test keine Abnormitäten festgestellt werden können. Dabei kann eine Sicherheit von $M = 95 \%$ gewährleistet werden.

Der weitere Verlauf der Fallstudie betraf nun das Jahr 2004. Mit Hilfe der auf den Amplitudenzeitreihen der Epochen bis einschließlich 2003 basierenden Regressionsansätze konnten Schätzungen bzw. Extrapolationen für die entsprechenden Amplituden des Jahres 2004 berechnet werden. Somit konnte die empirische Vorhersage für das Georelief in dieser zeitlichen Epoche erfolgen. Der Konfidenzbereich für die mittlere Geooberfläche des Jahres 2004 wurde wie in Abschnitt 5 ermittelt und besteht aus einer minimalen und maximalen Grenzoberfläche nach 1000 Simulationen, siehe Abbildungen 6-12a und 6-12b.

Die aus den Höhenmessungen abgeleitete analytische Darstellung für das Jahr 2004 befindet sich zwar stets über der minimalen Grenzoberfläche, die maximale Grenzoberfläche wird aber teilweise überschritten, siehe Abbildung 6-13. Die Korrelation zwischen der vorhergesagten mittleren Geooberfläche und der im Jahr 2004 gemessenen beträgt 0,9. Die Differenz beider Oberflächen kann Abbildung 6-14 entnommen werden. Die Messungen im Jahr 2004 weisen also einen gewissen Grad an Abnormität auf. Wenn man dabei von einer Datenverschmutzung ausgeht, spricht die Art dieser Differenz eher für einen systematischen Messfehler (ca. 9 m Überschätzung) bei der Datenerfassung. Sollte dies der Fall sein, könnten im Datensatz die Höhenmessungen mittels dieser Differenz „bereinigt“ und somit plausiblere Aussagen zur Höhenmessungen erreicht werden.

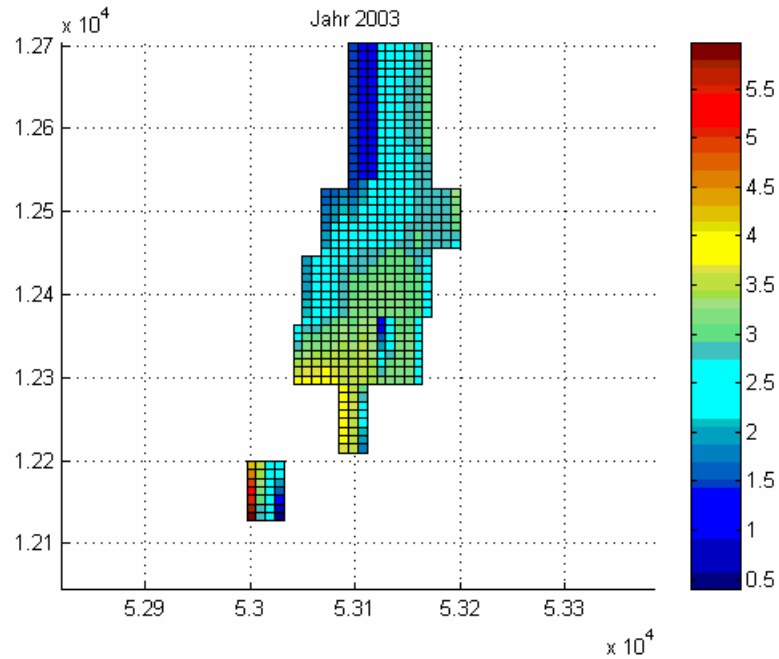


Abbildung 6-10a. Die Länge des Verschiebungsvektors des Blockgletschers Reichenkar in den Jahren 2002 und 2003.

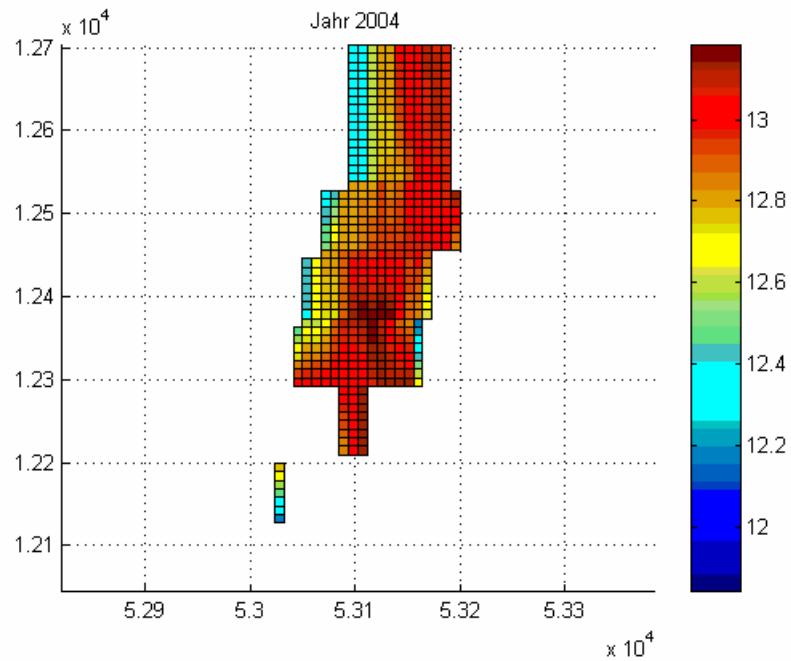


Abbildung 6-10b. Die Länge des Verschiebungsvektors des Blockgletschers Reichenkar in den Jahren 2003 und 2004.

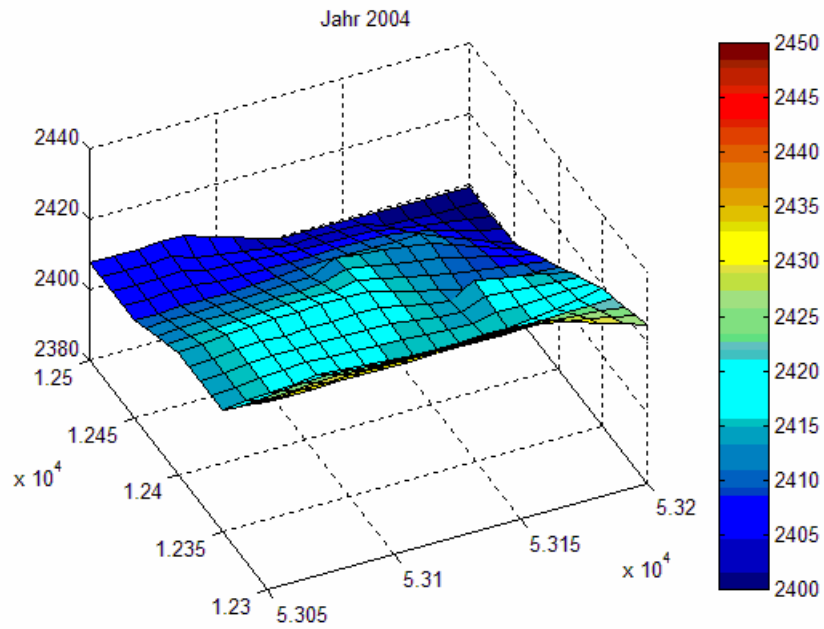


Abbildung 6-11. Die nach (5-1) interpolierte Teiloberfläche für das Jahr 2004.

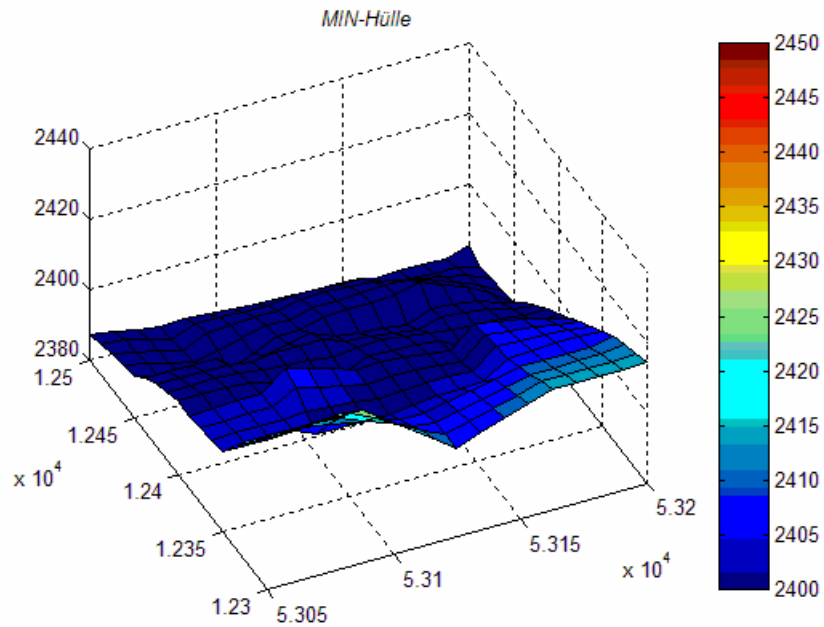


Abbildung 6-12a. Die minimale Grenzoberfläche des Konfidenzbereiches für das Jahr 2004.

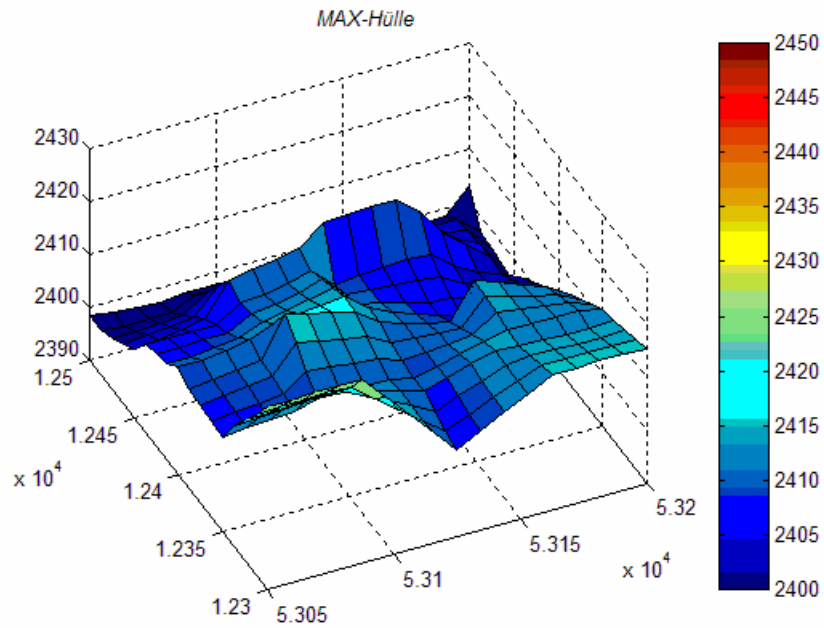


Abbildung 6-12b. Die maximale Grenzoberfläche des Konfidenzbereiches für das Jahr 2004.

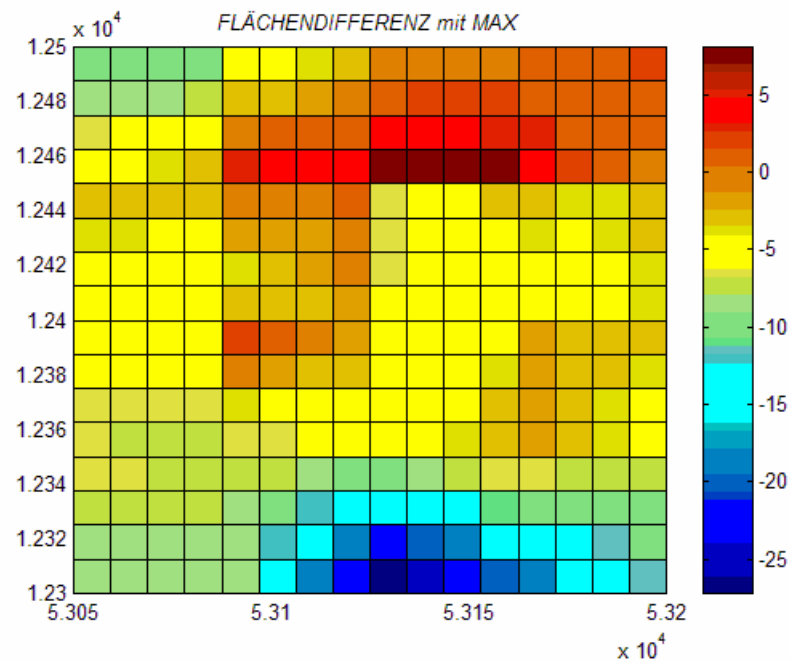


Abbildung 6-13. Differenz zwischen der Geooberfläche im Jahr 2004 und der maximalen Grenzoberfläche des empirischen Konfidenzbereiches.

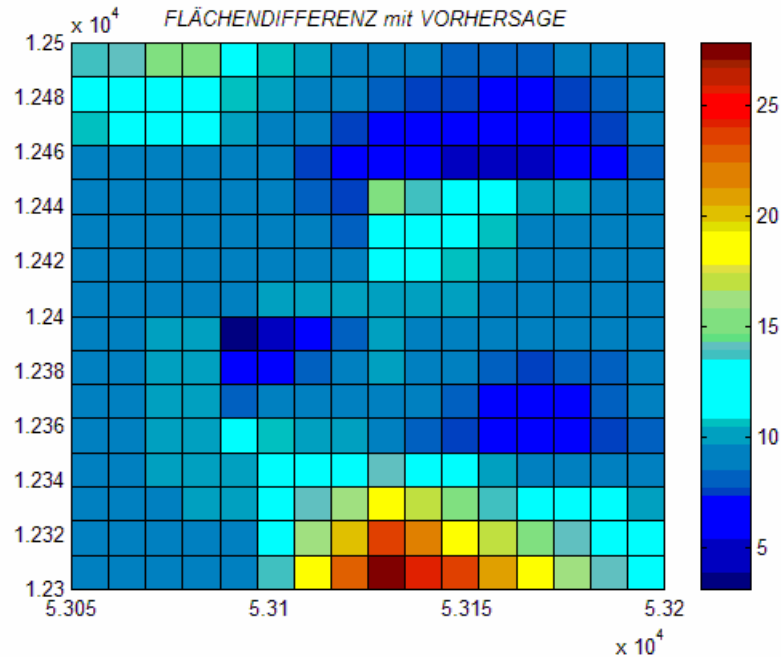


Abbildung 6-14. Differenz zwischen der vorhergesagten mittleren Geoberfläche und der im Jahr 2004 gemessenen, [m].

Das in Abschnitt 5 vorgestellte Modell wurde an einem konkreten Anwendungsbeispiel getestet. Die Annahme, dass in den Jahren 1997 bis 2003 keine Abnormitäten auftraten, konnte durch unseren Test bestätigt werden. Allerdings muss die Hypothese „ungestörter Daten“ im Jahr 2004 abgelehnt werden.

Unser Modell stellt eine anwendungsorientierte Ergänzung und in diesem Sinne auch eine Verallgemeinerung von klassischen Verfahren der räumlichen Statistik dar. Die Trenderfassung durch eine spezielle, lokal angepasste Wellendarstellung erhöht dabei die Realitätsbezogenheit unseres Verfahrens. Der in Abschnitt 5 eingeführte empirische Konfidenzbereich, der sich auf eine wiederholte Simulationen stützt, kann für weitere Anwendungen, insbesondere im Zusammenhang mit zeitlich-räumlichen, zufälligen Modellen, von Interesse sein. In diesem Fall sollten die in Abschnitt 5 eingeführten Annahmen projektbezogen angepasst bzw. verallgemeinert werden.

Eine später erfolgte Gegenüberstellung von Messungen am Reichenkar aus dem Jahr 2005 und der entsprechenden Vorhersagewerten (Extrapolation) mit dem beschriebenen Ansatz, die hier nicht weiter diskutiert werden soll, zeigt keine Steigungsänderung bei der linearen Regression der Amplituden auf. Dadurch wird obige Aussage bezüglich Datenabnormitäten im Jahr 2004 zusätzlich untermauert.

6.5 Fallstudie „Reichenkar“: Unschärfefortpflanzung von Messungen auf abgeleitete differential-geometrische Größen

Wir betrachten die Höhenmessungen aus den Jahren 2003 bis 2005. Es soll nochmals darauf verwiesen werden, dass in Abschnitt 6.4 für das Jahr 2004 eine systematische Überhöhung der z - Koordinate von ca. 9 m nachgewiesen werden konnte, siehe auch Wälder (2005a). Bei den anderen Koordinaten liegt zudem eine systematische Überhöhung von ca. 2 m vor. Dagegen weisen alle Messungen in den früheren Jahren eine ziemlich konstante Genauigkeit von ± 0.5 m (GPS) auf.

Die Höhenmessungen in den Jahren 2003 und 2005 werden als unscharfe Zahlen $\tilde{z}_i, i = 1 \dots n = 36$, mit $\tilde{z}_i = [z_i^- = z_i^0 - 0.5, z_i^0, z_i^+ = z_i^0 + 0.5]$ modelliert. Für das Jahr 2004 verwenden wir

$\tilde{z}_i = [z_i^- = z_i^0 - 9.5, z_i^0, z_i^+ = z_i^0 + 0.5]$ m. Im ersten Schritt werden jährliche Höhenmessungen mit Hilfe der Methode der inversen Distanzen auf ein Gitter über einem „zungennahen“ Teilgebiet interpoliert. Abbildung 6-15 zeigt einen Parameter der entsprechenden unscharfen Gitterwerte \tilde{Z}_{jk} , $i, j = 1 \dots N = 20$, aus (4-3') für das Jahr 2003, die nach (4-4) berechnet wurden.

Bei der Berechnung der Gewichte in (4-4) wird von $\varepsilon = 0.6$ ausgegangen. In den Abbildungen 6-16a bis 6-16c sind Jahresdifferenzen dargestellt. Die in Abbildung 6-16c dargestellte Differenz entspricht etwa dem „zu erwartenden“ Änderungscharakter des Blockgletschers (beobachtet auch in früheren Jahren).

Wir verwenden nun die Relationen (4-16)-(4-22) zur Berechnung von einigen – unscharfen - differential-geometrischen Größen für die Oberfläche des Blockgletschers Reichenkar.

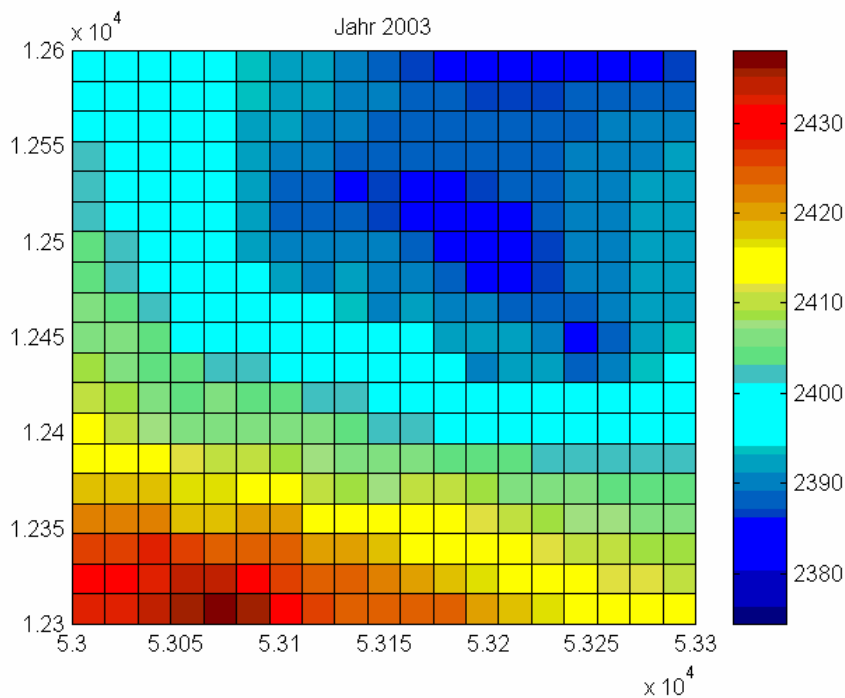


Abbildung 6-15. Parameter Z_{jk}^0 der unscharfen Gitterwerten \tilde{Z}_{jk} nach (4-3') und (4-4) für das Jahr 2003. Die „Breite“ ihrer Unschärfe ist dabei konstant und beträgt 1.0 m.

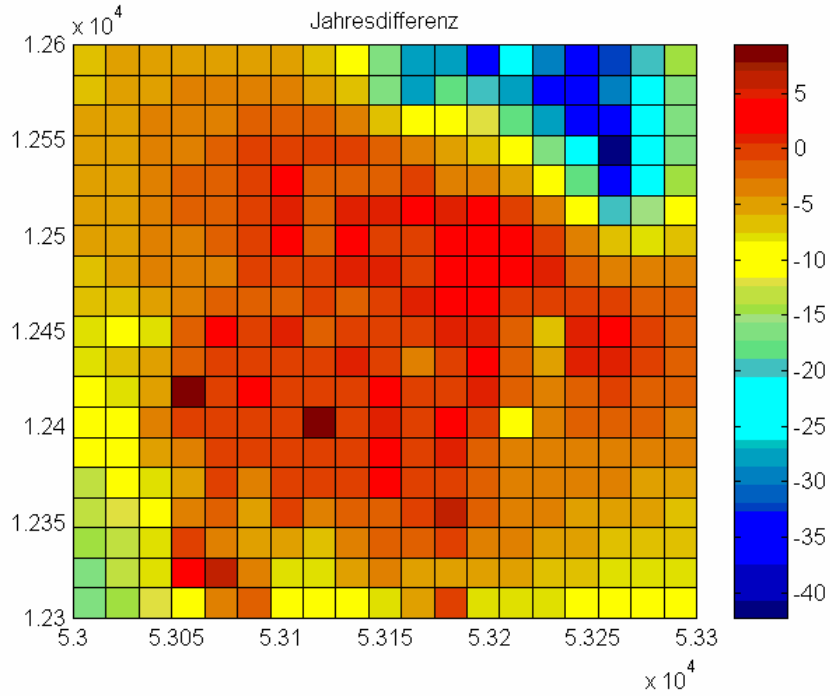


Abbildung 6-16a. Differenz zwischen den Parametern Z_{jk}^0 in den Jahren 2003 und 2004.

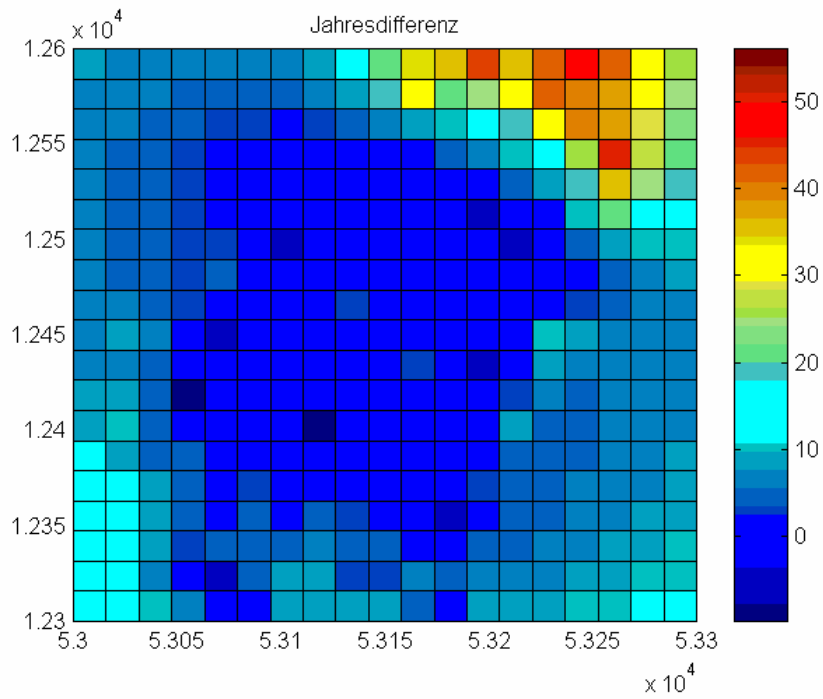


Abbildung 6-16b. Differenz zwischen den Parametern Z_{jk}^0 in den Jahren 2004 und 2005.

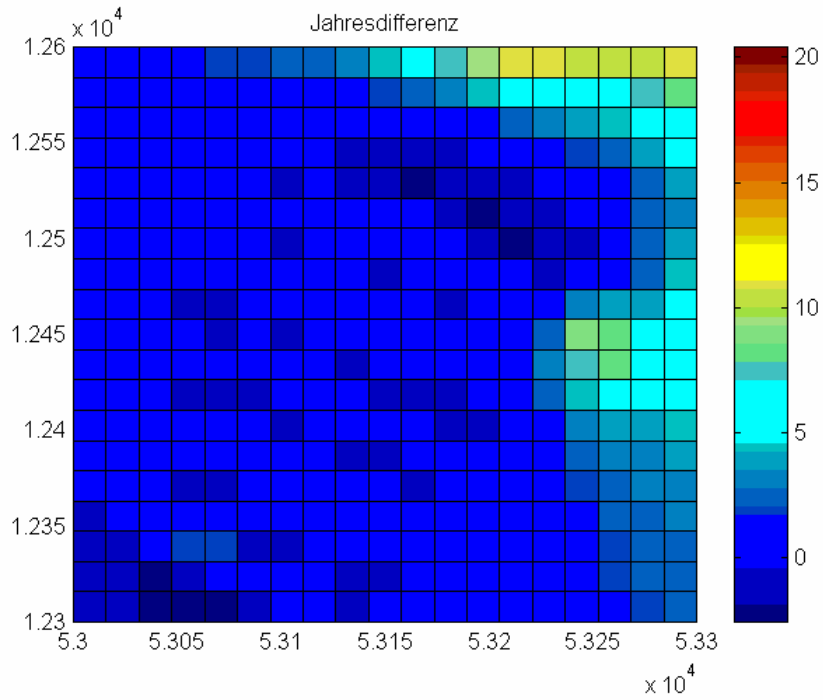


Abbildung 6-16c. Differenz zwischen den Parametern Z_{jk}^0 in den Jahren 2003 und 2005.

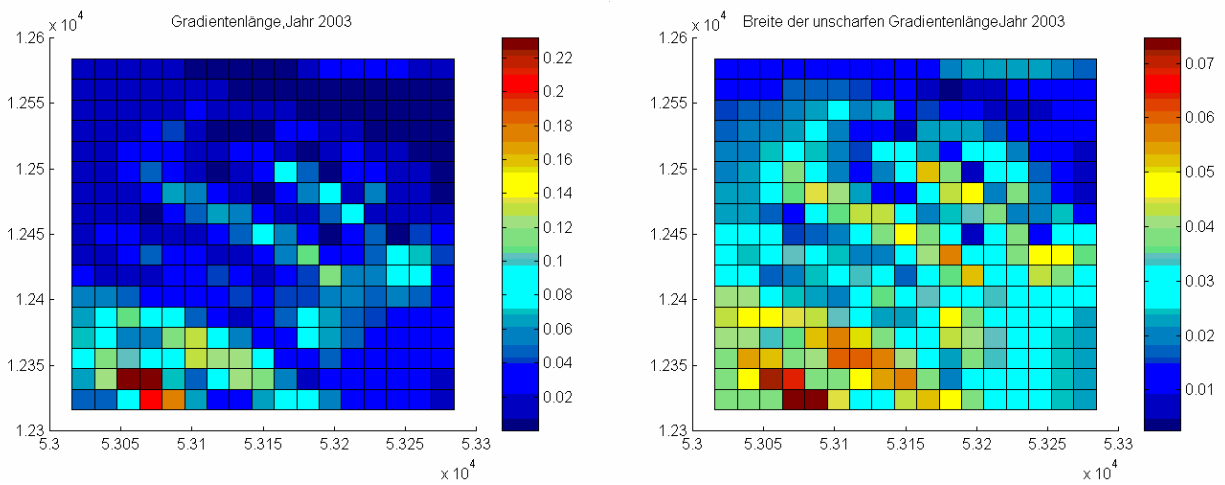


Abbildung 6-17a. Quadrat der Gradientenlänge für das Jahr 2003 nach (4-16) und „Breite“ seiner Unschärfe.

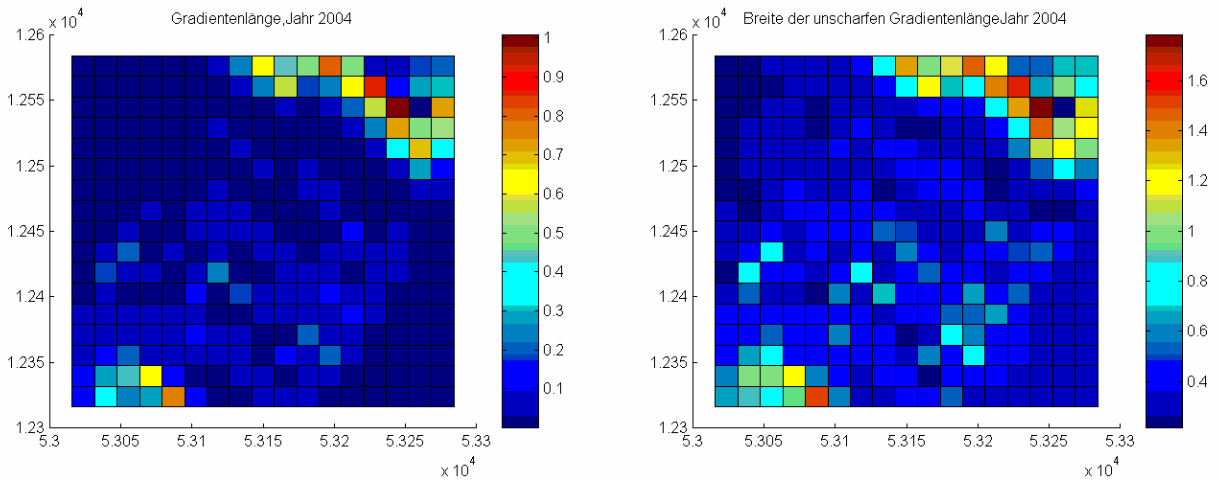


Abbildung 6-17b. Quadrat der Gradientenlänge für das Jahr 2004 nach (4-16) und „Breite“ seiner Unschärfe.

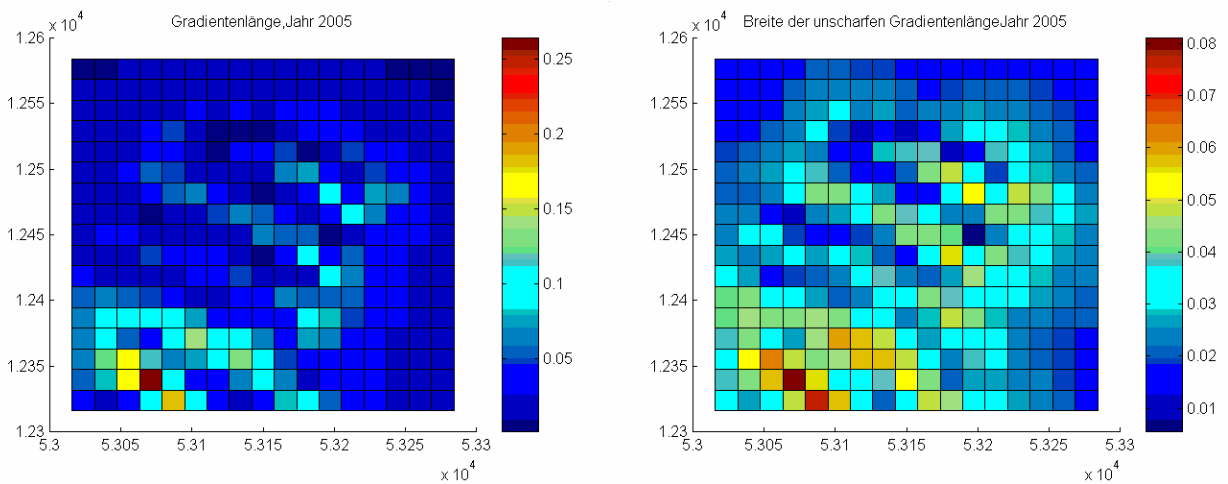


Abbildung 6-17c. Quadrat der Gradientenlänge für das Jahr 2005 nach (4-16) und „Breite“ seiner Unschärfe.

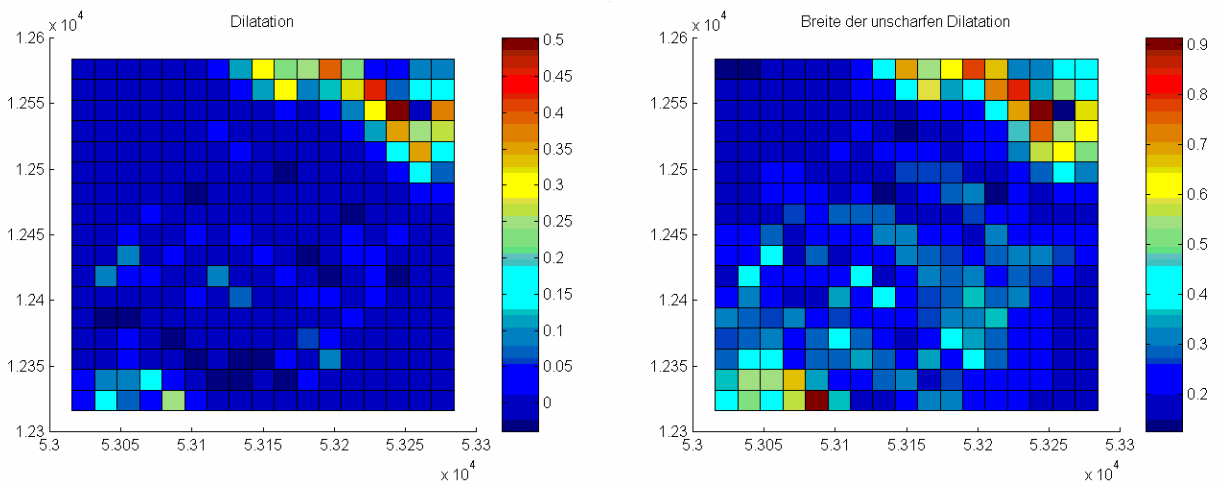


Abbildung 6-18a. Surface Dilatation für die Jahre 2003-2004 nach (4-21) und „Breite“ der Unschärfe.

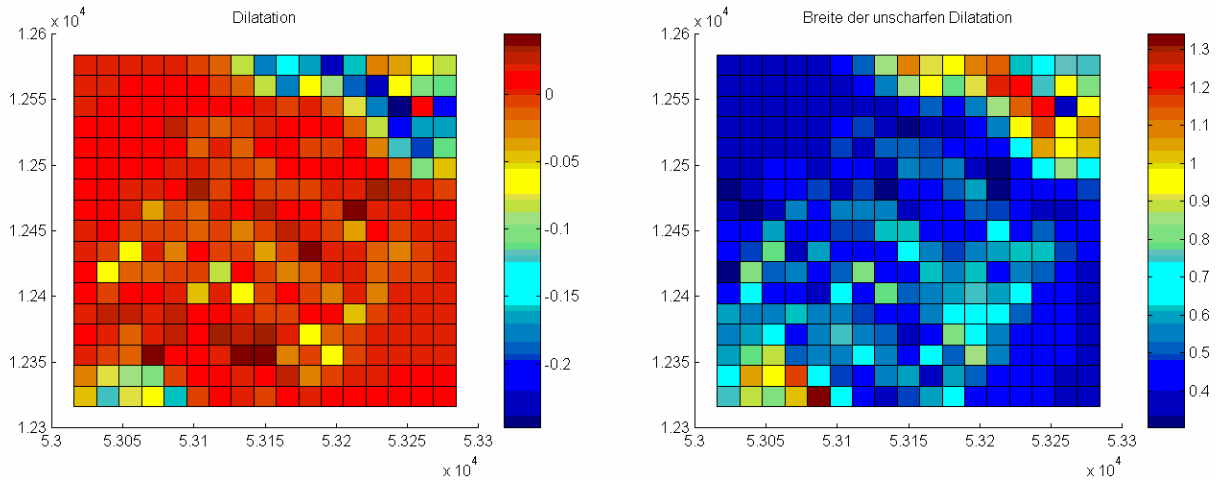


Abbildung 6-18b. Surface Dilatation für die Jahre 2004-2005 nach (4-21) und „Breite“ der Unschärfe.

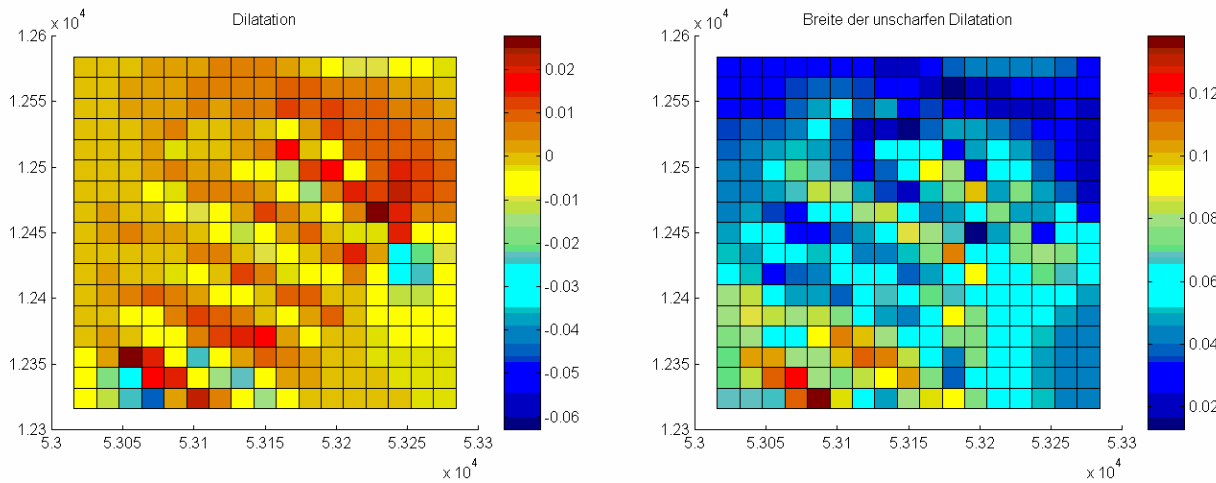


Abbildung 6-18c. Surface Dilatation für die Jahre 2003-2005 nach (4-21) und „Breite“ der Unschärfe.

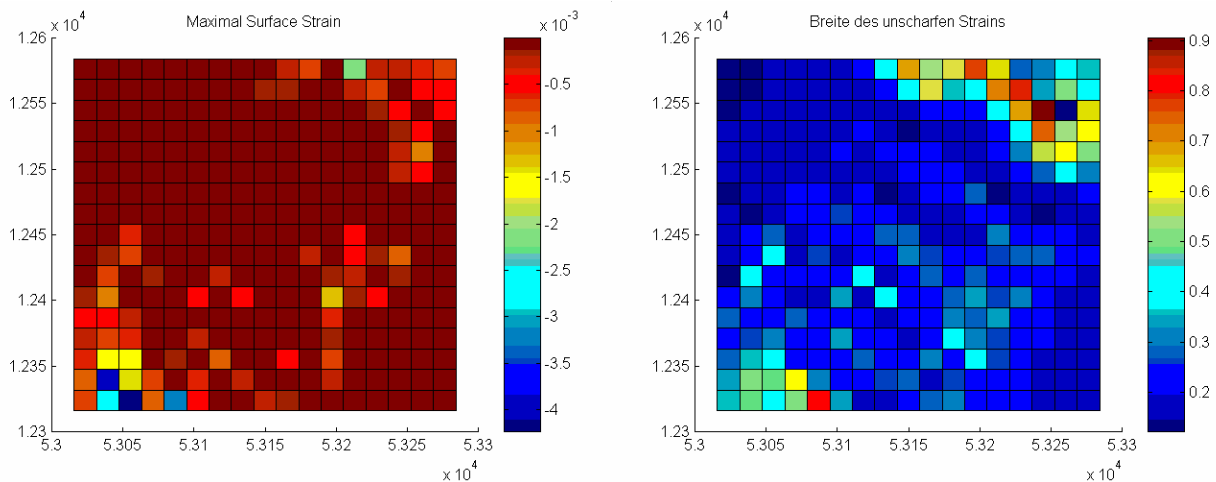


Abbildung 6-19a. Quadrat des Surface Maximum Shear Strains für die Jahre 2003-2004 nach (4-20')-(4-22) und „Breite“ seiner Unschärfe.

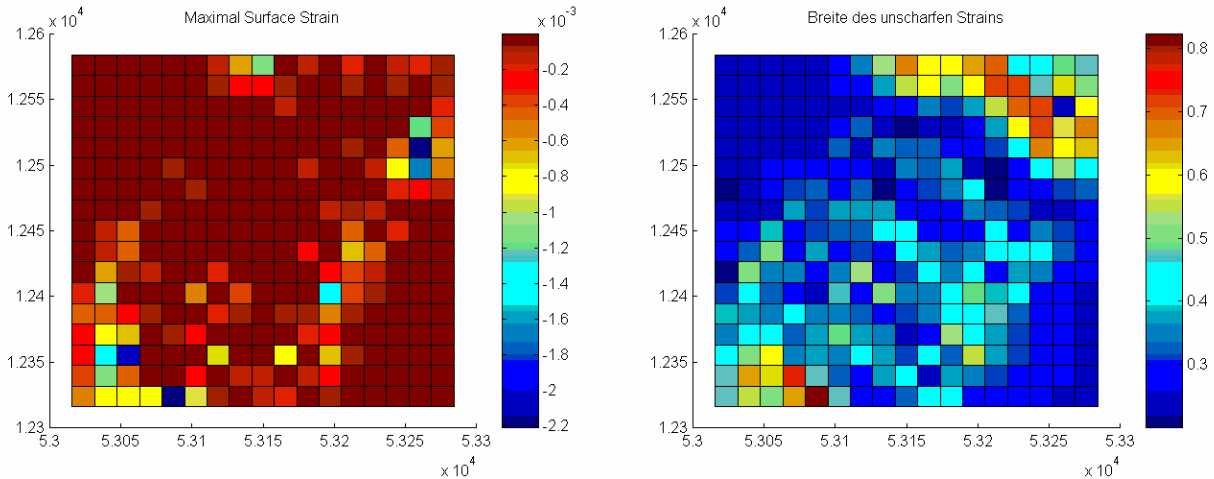


Abbildung 6-19b. Quadrat des Surface Maximum Shear Strains für die Jahre 2004-2005 nach (4-20')-(4-22) und „Breite“ seiner Unschärfe.

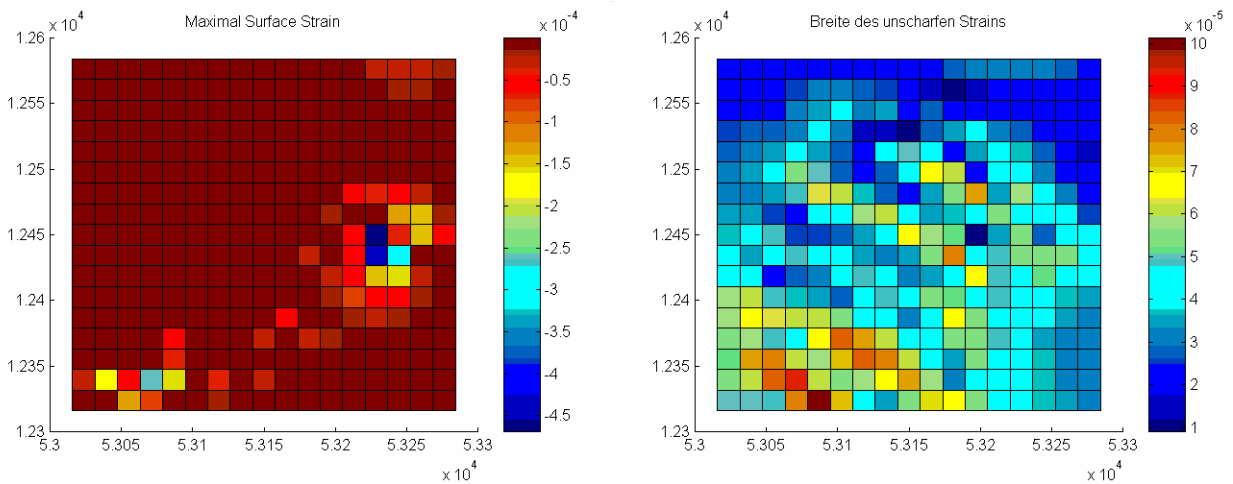


Abbildung 6-19c. Quadrat des Surface Maximum Shear Strains für die Jahre 2003-2005 nach (4-20')-(4-22) und „Breite“ seiner Unschärfe.

Als weitere Verallgemeinerung sollen nun auch die (x, y) - Koordinaten der Messungen *als unscharf* betrachtet werden. Die Koordinaten aus den Jahren 2003 und 2005 werden somit als unscharfe Zahlen $\tilde{u}_i, i = 1 \dots n = 36$, mit $\tilde{u}_i = [u_i^- = u_i^0 - 0.5, u_i^0, u_i^+ = u_i^0 + 0.5], u = x, y$ modelliert. Für das Jahr 2004 verwenden wir $\tilde{u}_i = [u_i^- = u_i^0 - 2.0, u_i^0, u_i^+ = u_i^0 + 2.0], u = x, y$ m. Die folgenden Abbildungen veranschaulichen die Veränderung bei der Unschärfefortpflanzung.

Analog zur obigen Vorgehensweise greifen wir auf die Relationen (4-16)-(4-22) zur Berechnung einiger – unscharfer – differential-geometrischer Größen für die Oberfläche des Blockgletschers zurück.

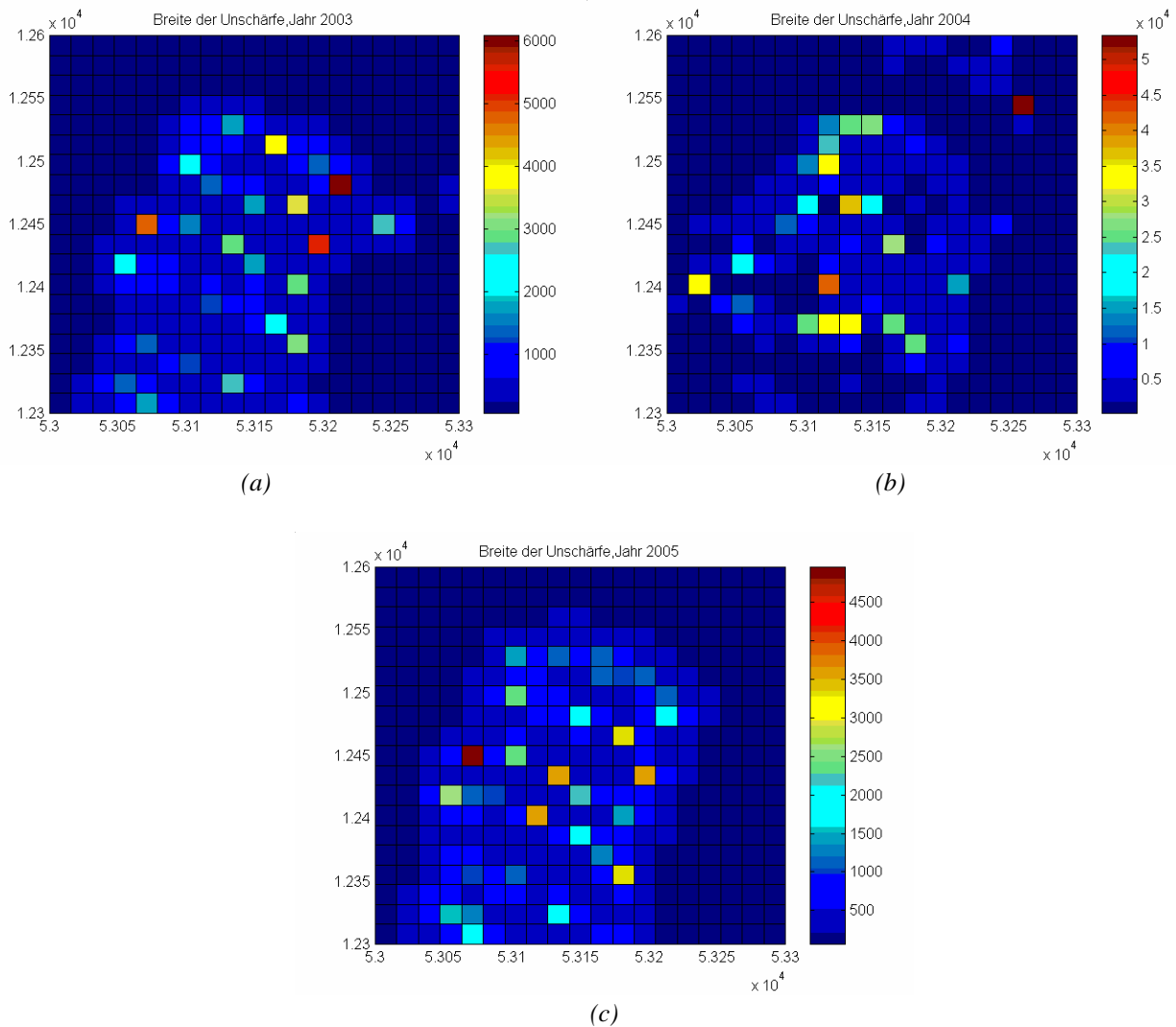


Abbildung 6-20 a-c. Breite der Unschärfe der Gitterwerte \tilde{Z}_{jk}
für die Jahre 2003 (a), 2004 (b) und 2005 (c).

Die Verwendung von Konzepten aus der Fuzzy-Theorie, wie sie oben diskutiert wurde, stellt eine alternative und sinnvolle Ergänzung sowohl zu statistischen Verfahren der Genauigkeitskontrolle als auch zum Fehlerfortpflanzungsgesetz bereit. Es sei daran erinnert, dass es bei vielen geowissenschaftlichen Anwendungen nicht nur darum geht, einen Wert für eine bestimmte Charakteristik ableiten zu können, sondern auch darum, die mit diesem Wert verbundene Güte nachfolgender Ergebnisinterpretationen quantifizieren zu können. Die Fuzzy-Theorie im obigen Sinne liefert ein bequemes Instrument für diesen Zweck.

Zur Vereinfachung wurde in diesem Abschnitt ausschließlich das Problem der „Maximal-fehlerberechnung“ behandelt. D.h. es wurde auf die Herleitung der entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen der unscharfen Größen verzichtet. Unser Hauptinteresse galt insbesondere dem Ausmaß der „Unschärfe“. Grundlegende Schritte zur Berechnung der Zugehörigkeitsfunktionen werden beispielsweise in Bandemer, Gottwald (1993) beschrieben.

Ein Vorteil von Verfahren der Fuzzy-Theorie gegenüber „klassischen“ statistischen Methoden besteht in ihrem Verzicht auf einschränkende Verteilungsannahmen bezüglich Fehlergrößen. Zudem ist die Herleitung der Zugehörigkeitsfunktionen von abgeleiteten Größen einfacher als die Bestimmung ihrer Verteilungen. Außerdem können heterogene Bereiche, d.h. Messungen verschiedener Unschärfe, mit dem in dieser Arbeit präsentierten Verfahren problemlos modelliert und analysiert werden.

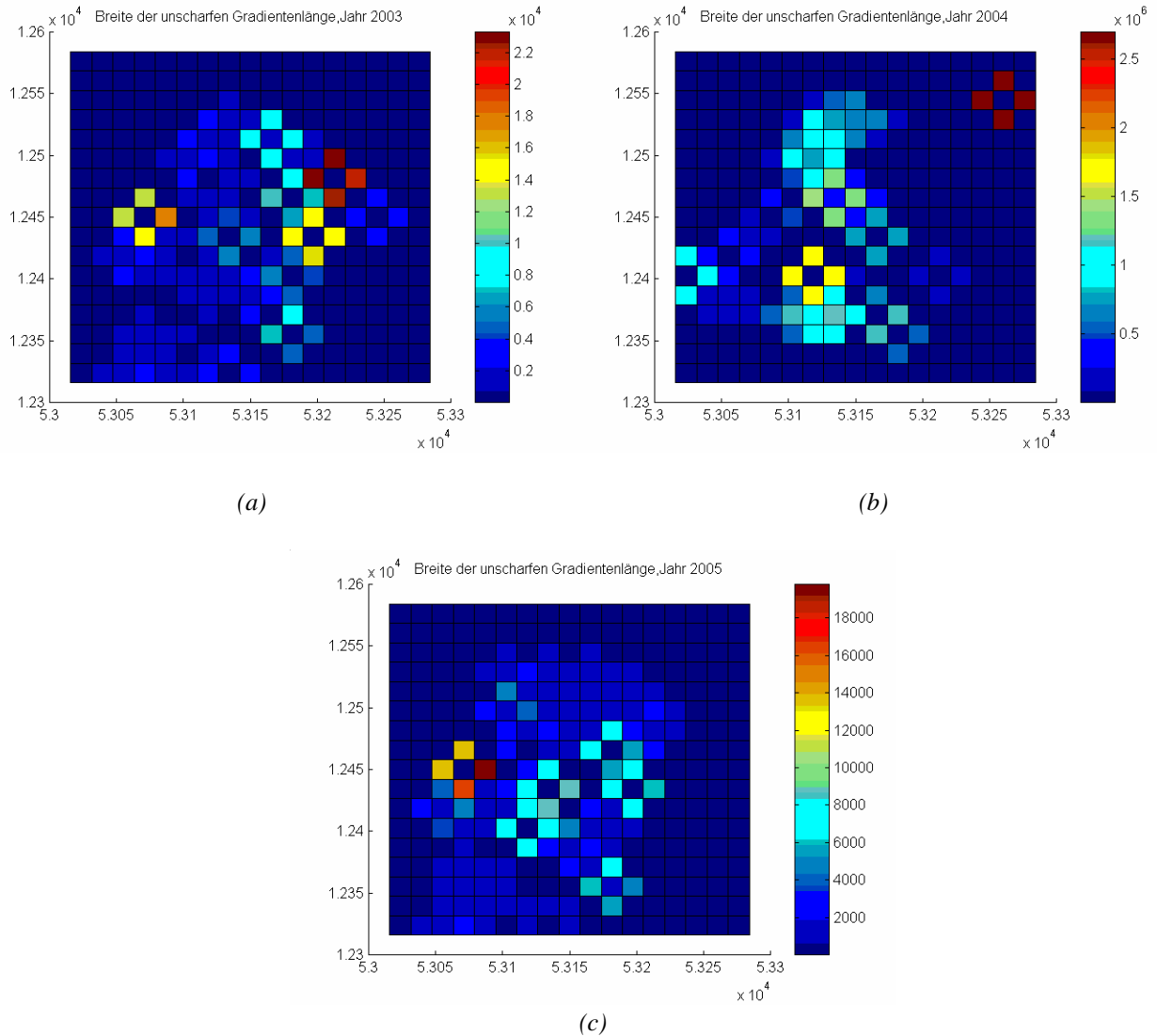


Abbildung 6-21a-c. Breite der Unschärfe des Quadrates der Gradientenlänge für die Jahre 2003(a), 2004 (b) und 2005 (c).

Anhand einer Gegenüberstellung der präsentierten Abbildungen lässt sich feststellen, dass die Unschärfe der (x,y) -Koordinaten zu einer deutlichen - auch zu erwartenden - Zunahme der Breite der Unschärfe der betrachteten differential-geometrischen Größen führt, vgl. Abbildungen 6-17a-c und 6-21a-c, 6-18a-c und 6-22a-c und so weiter. Besonders ausgeprägt ist dieser Effekt für das Jahr 2004.

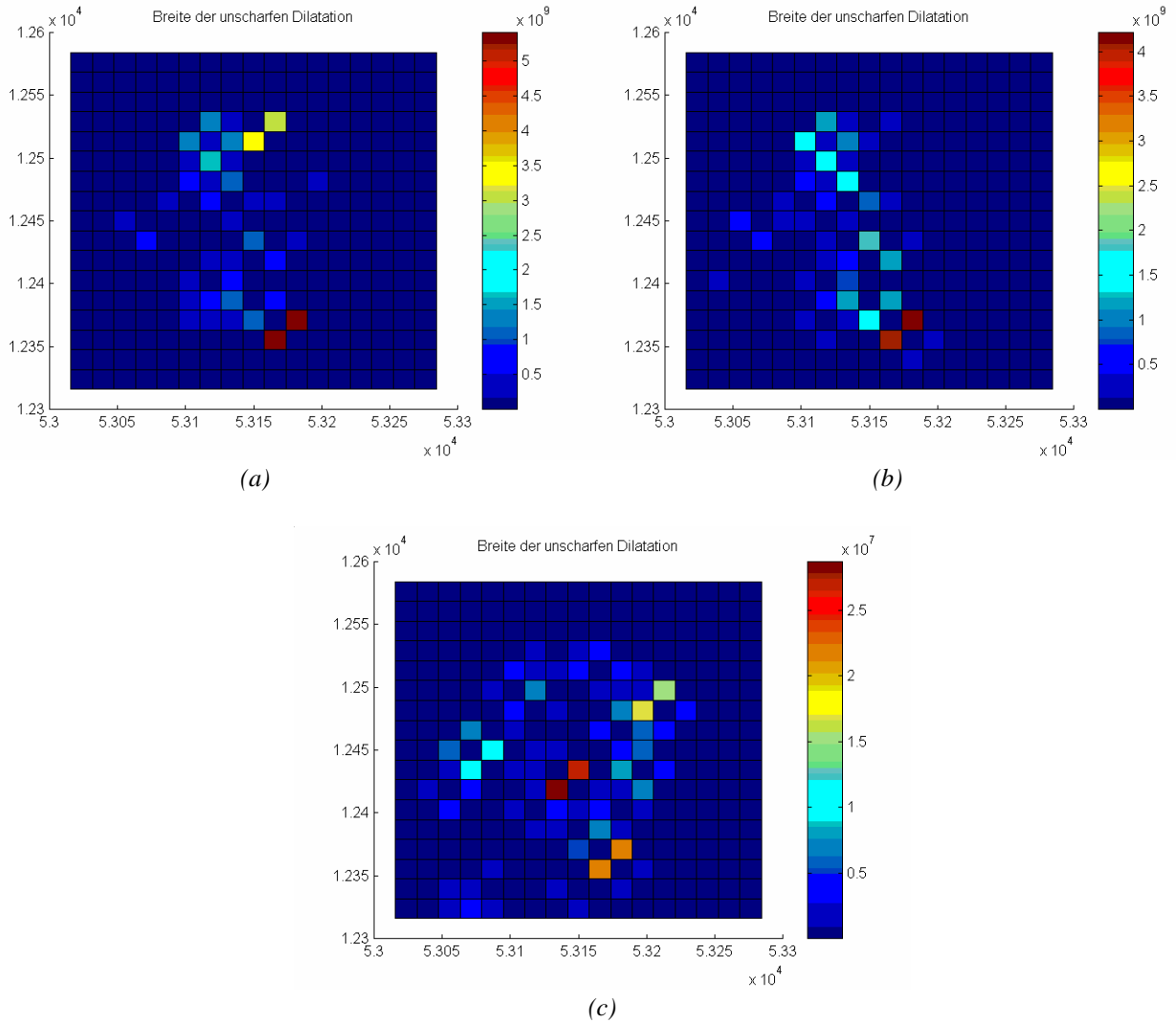


Abbildung 6-22a-c. Breite der Unschärfe der Surface Dilatation für die Jahre 2003-2004 (a), für die Jahre 2004-2005 (b) und für die Jahre 2003-2005 (c).

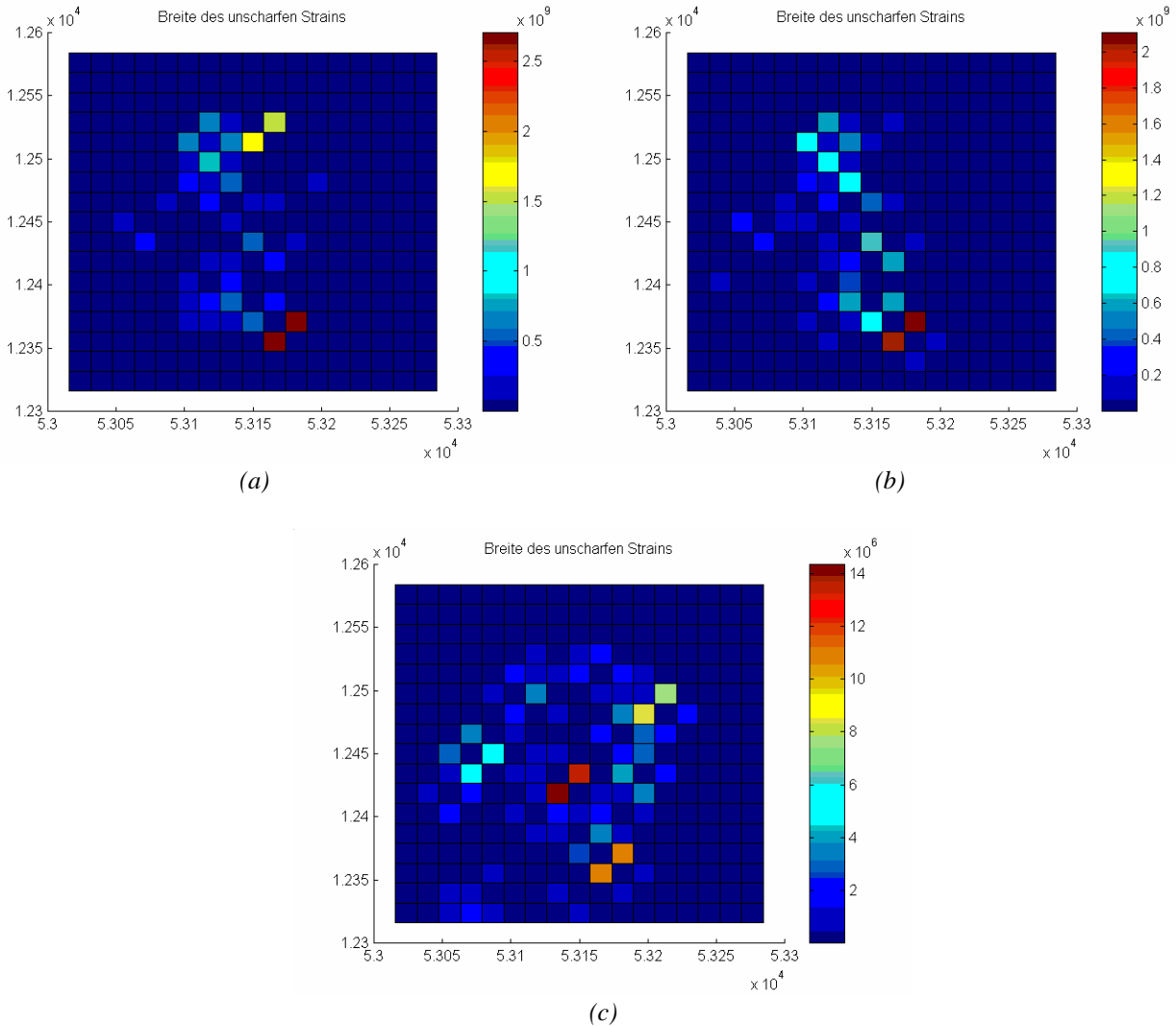


Abbildung 6-23a-c. Breite der Unschärfe des Quadrates des Surface Maximum Shear Strains für die Jahre 2003-2004, für die Jahre 2004-2005 und für die Jahre 2003-2005.

6.6 Fallstudie „Aufmerksamkeitslandschaften“: Bildanalyse mithilfe von Wavelet-Splines

Mit dem in Abschnitt 2.4 eingeführten Wavelet-Spline-Verfahren lässt sich eine Approximation von Aufmerksamkeitslandschaften der Tiefe (Schritt, Grad) 5 durchführen. Mit Hilfe einer zeitlich-einheitlichen, auf dem räumlichen Frequenzbereich festgelegten Darstellung des Datenmaterials und unter der Verwendung ausschließlich *polynomialer* Basis-Funktionen kann eine Gegenüberstellung von Amplitudenzeitreihen in jedem lokalen Bereiche von Aufmerksamkeitslandschaften verschiedener Versuchspersonen (VP) erfolgen. Die entsprechenden Bilder sind den Abb. 6-25a und 6-25b zu entnehmen.

Die mittleren Amplituden (vgl. (3-3)) werden in Abb. 6-26a und 6-26b präsentiert. Die mittleren Reliefs für beide VP können Abb. 6-27a,b entnommen werden.

In Abb. 6-28 a,b sind die höchsten Frequenzen der Aufmerksamkeitsintensität dargestellt. Diese entsprechen $S^5(x, y) - S^4(x, y)$, siehe (2-15).

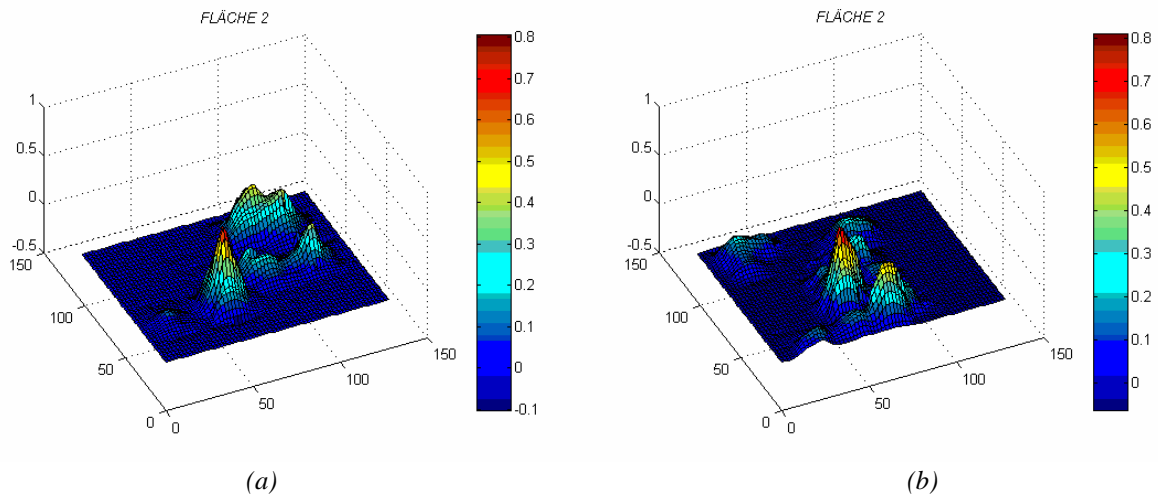


Abbildung 6-25 a, b. Wavelet-Spline der Tiefe 5 für VP 2(a) und VP 5 (b).

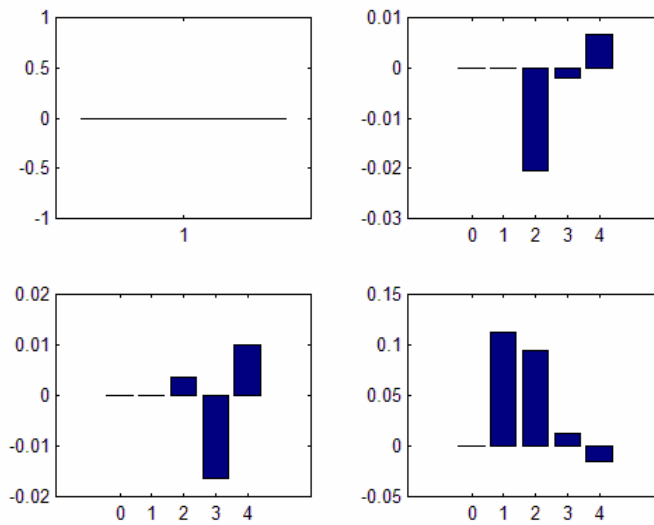


Abbildung 6-26a. Mittlere Amplituden für VP 2. Oben links ist A dargestellt. Oben rechts werden $a_0, \text{mean}(a_1), \dots, \text{mean}(a_4)$ dargestellt. Unten links sind $b_0, \text{mean}(b_1), \dots, \text{mean}(b_4)$ abgebildet. Unten rechts stehen die mittleren Amplituden $c_0, \text{mean}(c_1), \dots, \text{mean}(c_4)$.

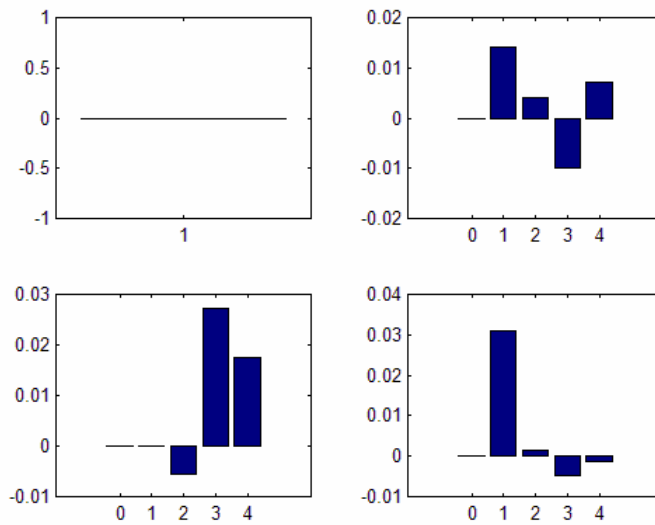


Abbildung 6-26b. Mittlere Amplituden für VP 5. Oben links ist A dargestellt. Oben rechts werden $a_0, \text{mean}(a_1), \dots, \text{mean}(a_4)$ dargestellt. Unten links sind $b_0, \text{mean}(b_1), \dots, \text{mean}(b_4)$ abgebildet. Unten rechts stehen die mittleren Amplituden $c_0, \text{mean}(c_1), \dots, \text{mean}(c_4)$.

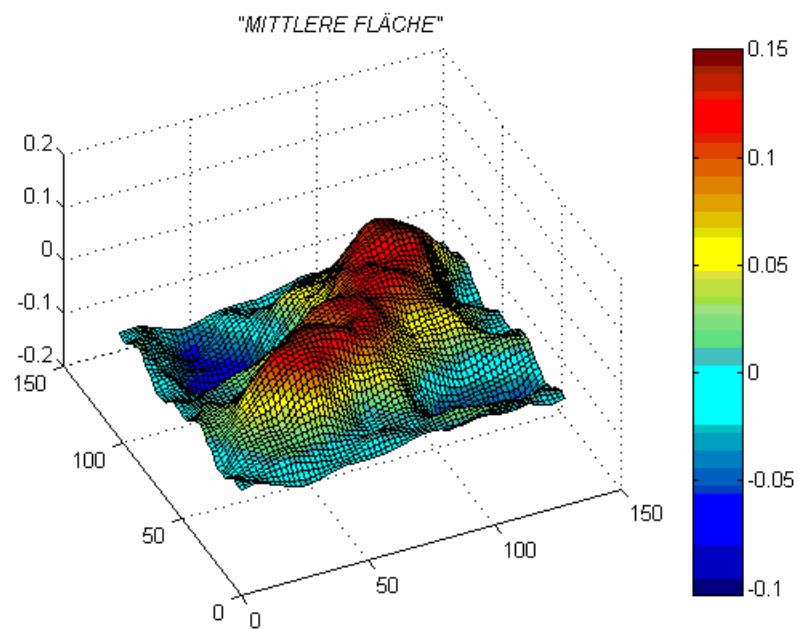


Abbildung 6-27a. Die mittlere Fläche für VP 2.

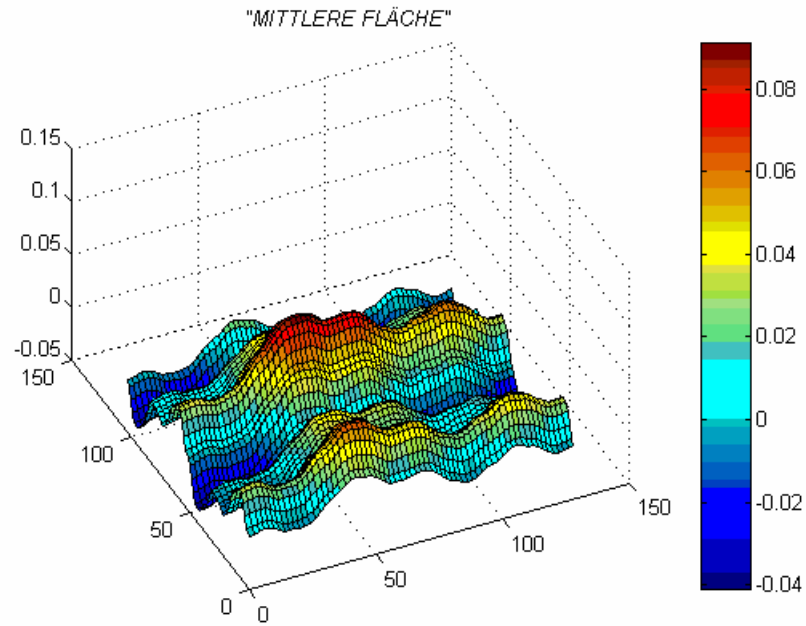


Abbildung 6-27b. Die mittlere Fläche für VP 5.

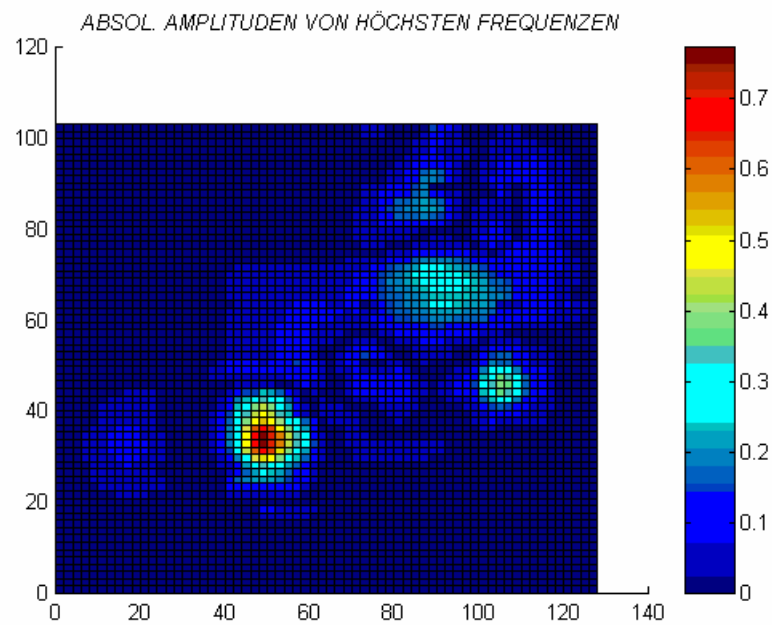


Abbildung 6-28a. Die höchsten Frequenzen der Aufmerksamkeitsintensität für VP 2.

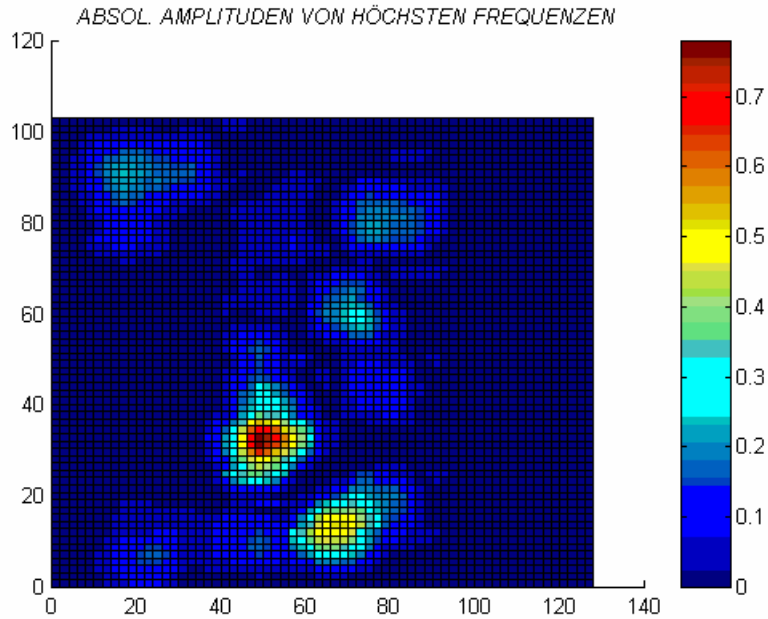


Abbildung 6-28b. Die höchsten Frequenzen der Aufmerksamkeitsintensität für VP 5.

Zunächst betrachten wir Abb. 6-25a,b:

VP 5 zeigt ein – bezogen auf den Mittelwert - „breitflächigeres“ Interesse am Bild als VP 2. Die Aufmerksamkeit von VP 2 nimmt mit wachsenden Abständen schneller als bei VP 5 ab (Markenkorrelationsfunktion, vgl. Abb. 9-1). Die mittlere Abweichung in der Aufmerksamkeitsintensität zwischen VP 2 und VP 5 ist für geringe bis mittlere Abstände am auffälligsten. Im „Randbereich des Bildes“ nehmen die Unterschiede in der Aufmerksamkeitsintensität ab. Beide Versuchspersonen weisen das gleiche Maximum an Konzentration auf, das sich auf dem angebotenen Bild auf ein Frauengesicht bezieht. Die Ausdünnung des zu untersuchenden Gitters auf 17×17 – Punkte mit einer entsprechenden Approximation mittels polynomialer Wavelet-Splines (siehe Beispiel 2.4-3) führte zu einem geringen Qualitätsverlust verglichen mit den ursprünglich über 20 000 Punkten.

Nun sollen Abb. 6-26a,b und 6-27a,b näher betrachtet werden:

Zunächst ist die ausgeprägt diagonale Blickrichtung von VP 2 auffällig; insbesondere im Vergleich mit dem „klassischen“, zeilenweise ablaufenden Abtasten des Bildmaterials durch VP 5. Ein abstraktes Modell auf der Basis der mittleren Amplituden bildet die theoretische Vorstellung ab, dass die VP das ganze Bild mit einer konstanten, den mittleren Amplituden über alle lokalen Bereiche entsprechenden Aufmerksamkeit erfasst. Hier spielt wiederum die ausgeprägt diagonale Blickrichtungsführung von VP 2 im Gegensatz zu VP 5 eine Rolle.

Nun zu Abb. 6-28a,b:

Die Bereiche maximaler Frequenzen der Aufmerksamkeitsintensität beziehen sich bei beiden Versuchspersonen auf ein Frauengesicht im vorgelegten Bildmaterial.

7. Eine Gegenüberstellung von Reliefapproximationen anhand zweier Verfahren

7.1 Kurze Darstellung zweier Lösungswege eines Approximationsproblems

Gegeben seien Höhenmessungen $Z_i, i = 1 \dots N^2$, auf einem $N \times N$ -Gitter. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit und nur zum Zweck der Vereinfachung der Form weiterer Relationen soll nun vorausgesetzt werden, dass die Rechts- und Hochwerte im Intervall $[0,1]$ liegen, siehe Abschnitt 2.4 für Details zur entsprechenden Transformation bzw. Rücktransformation. Außerdem wird

$$N = 2^{k-1} + 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7-1)$$

angenommen.

Gesucht wird eine zweidimensionale, erweitert-polynomiale Georeliefapproximation der Form (2-15) mit $3k+1$ unbekanntem Koeffizienten. Im weiteren Text wird dies mit dem Begriff *polynomiale Approximation vom Grad k* abgekürzt. Die Komponenten des Vektors \vec{a} aus (7-2) sind nun optimal zu bestimmen, siehe (7-4) und (7-5):

$$\vec{a}: \quad z = z(x, y) = P(x, y, \vec{a}) \quad (7-2)$$

Zur Lösung dieses Problem können mehrere Lösungswege führen, die von zusätzlichen Annahmen abhängen.

Wenn die Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten \vec{a} für die polynomiale Georeliefdarstellung kleiner als die Anzahl der Messungen ist, so ist es *ein klassisches Ausgleichsproblem* gegeben, das mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden kann. Hier muss die so genannte *Interpolationsforderung* (7-3) nicht erfüllt werden.

$$z(x_i, y_i) = Z_i, \quad i = 1 \dots N^2. \quad (7-3)$$

Auf weitere Details und auf die Diskussion der Vor- und Nachteile dieses in der wissenschaftlichen Literatur oft beschriebenen und vielseitig angewendeten Verfahrens soll hier verzichtet werden. Zur Vertiefung in diese Thematik sei beispielsweise auf Grafarend, Schaffrin (1993), Schwarz (1988), Niemeier (2002) und Reißmann (1976) verwiesen.

Eine etwas andere Vorgehensweise kennt man bei Wavelet-Splines. Hier kann zwar grundsätzlich von der gleichen Anzahl der Koeffizienten in der polynomialen Darstellung (7-2) ausgegangen werden, man variiert diese Koeffizienten allerdings in lokalen Bereichen bzw. Gitterzellen in unserem Fall, um die Interpolationsforderung (7-3) zu erfüllen.

Die Grundidee der in Abschnitt 2.4 eingeführten Georeliefapproximation liegt in der sequentiellen Ableitung der analytischen Gleichung in (7-4):

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= A + a_1 f_1(x) + b_1 f_1(y) + c_1 f_1(x) f_1(y) \\ P_2(x, y) &= P_1(x, y) + a_2(x, y) f_2(x) + b_2(x, y) f_2(y) + c_2(x, y) f_2(x) f_2(y) \\ &\dots \\ P_k(x, y) &= P_{k-1}(x, y) + a_k(x, y) f_k(x) + b_k(x, y) f_k(y) + c_k(x, y) f_k(x) f_k(y) \\ k &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7-4)$$

wobei mit $f_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$ spezielle Wavelet-Funktionen oder die so genannten *Basis-Funktionen eines Wavelet-Splines* bezeichnet werden. Diese Funktionen können eine sinusoidale, zickzack-förmige oder polynomiale Form aufweisen, siehe die Beispiele 2.4-1 bis 2.4-3. Die Koeffizienten a, b, c sind Amplituden, die für lokale Bereiche individuell angepasst werden. Für den Koeffizientenvektor dieser Approximation gilt in solchen Bereichen:

$$\vec{a} = (a_0 \quad a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad \dots \quad a_k \quad b_k \quad c_k)^T \quad (7-5)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Der Parameter k beschreibt somit den Schritt, die Tiefe oder den so genannten *Grad der Approximation* auf einem Gitter von Messwerten. Eine ausführliche Beschreibung verschiedener Verallgemeinerungen des Modells (7-4) sowie ihre praxisbezogenen Anwendungen können Wälder und Buchroithner (2003, 2004) sowie Wälder (2005a,b,c) entnommen werden. Hier soll dem nicht detaillierter nachgegangen werden. Im Rahmen dieser Arbeit beschränken wir uns auf zickzack-förmige Wavelet-Funktionen (7-6) insbesondere, um die weiteren Ausführungen möglichst übersichtlich darlegen zu können. Abbildung 7-1 veranschaulicht den Verlauf dreier solcher Funktionen. Einige Bezeichnungen aus Abschnitt 2.5 werden leicht abgeändert, um eine einfache Darstellung zu ermöglichen.

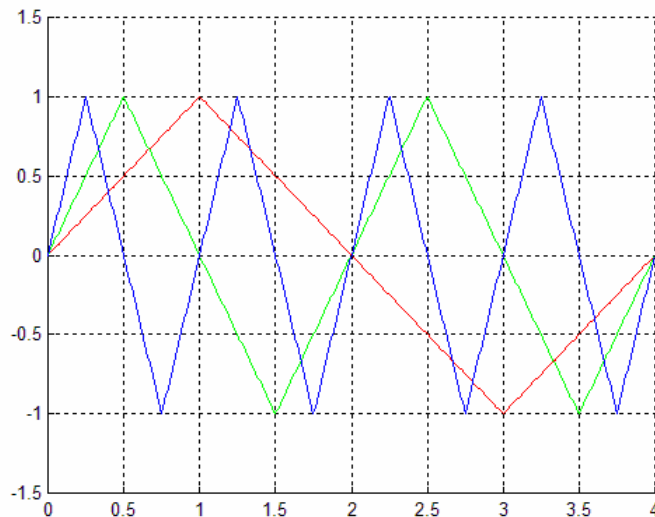


Abbildung 7-1. Zickzack-förmige Basis-Funktionen eines Wavelet-Splines
(rot für $k = 1$, grün für $k = 2$ und blau für $k = 3$).

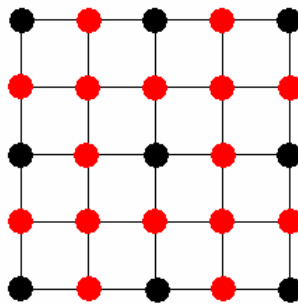


Abbildung 7-2. Prinzip der Gittererweiterung von $k = 2$
(nur schwarze Gitterpunkte) auf $k=3$
(schwarze und rote Gitterpunkte).

$$f_k(t) = \begin{cases} 2^{k-1} t^*, & t^* \in I_1 \\ 2^{k-1} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} - t^* \right), & t^* \in I_2 \\ 2^{k-1} \left(t^* - \left(\frac{1}{2} \right)^{k-3} \right), & t^* \in I_3 \end{cases} \quad \text{mit } t^* = \text{mod}_{\left(\frac{1}{2} \right)^{k-3}}(t), \quad t = x, y$$

$$I_1 = \left[0, \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right]$$

$$I_2 = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}, \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} + \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right]$$

$$I_3 = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} + \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}, \left(\frac{1}{2} \right)^{k-3} \right]$$

$$k = 1, 2, \dots$$
(7-6)

Nun soll die Approximation vom Grad k auf einem $N \times N$ -Gitter, $N = 2^{k-1} + 1$, durchgeführt werden. In den in den Abschnitten 7.2 und 7.3 durchgeführten Untersuchungen soll die folgende Frage beantwortet werden:

Wie genau ist diese Approximation für verschiedene Approximationsansätze – und wie „stabil“ bleibt sie – für ein *erweitertes* Gitter mit $N = 2^k + 1$?

Abbildung 7-2 veranschaulicht eine derartige Erweiterung eines Gitters.

7.2 Theoretische Grundlagen beider Lösungswege

Wir gehen in diesem Abschnitt von einem ursprüngliches $N \times N$ -Gitter mit $N = 2^{k-1} + 1$ und einer polynomialen Approximation vom Grad k (mit $3k + 1$ Koeffizienten) aus, siehe (7-2) und (7-4).

Die Methode der kleinsten Quadrate

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\underline{F}^k = \begin{bmatrix} \vec{f}_1^T \\ \dots \\ \vec{f}_{N^2}^T \end{bmatrix} = [\vec{f}_i^T]$$

$$\vec{f}_i^T = [1 \quad f_1(x_i) \quad f_1(y_i) \quad f_1(x_i)f_1(y_i) \quad \dots \\ f_k(x_i) \quad f_k(y_i) \quad f_k(x_i)f_k(y_i)]$$
(7-7)

$$i = 1 \dots N^2, \quad N = 2^{k-1} + 1$$

Die Lösung \vec{a} des Approximationsproblems (7-2) entspricht hier der Lösung \vec{a}_A^k des Ausgleichsproblems (7-8) und ist der Gleichung (7-9) zu entnehmen. Als *theoretisches Genauigkeitsmaß der Approximation vom Grad k* kann die Norm des Vektors $\|\vec{v}^k\|$ verwendet werden.

$$\begin{aligned}\underline{F}^k \cdot \vec{a}_A^k &= \vec{Z}^k \\ \vec{a}_A^k &= [a_0^A \ a_1^A \ b_1^A \ c_1^A \ \dots \ a_k^A \ b_k^A \ c_k^A]^T \\ \vec{Z}^k &= [Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_{N^2}]^T = [Z_i]^T, \\ i &= 1 \dots N^2.\end{aligned}\tag{7-8}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{v}^k\| &= \|\underline{F}^k \cdot \vec{a}_A^k - \vec{Z}^k\| \rightarrow \min(\vec{a}_A^k) \Rightarrow \\ \vec{a}_A^k &= \left((\underline{F}^k)^T \underline{F}^k \right)^{-1} (\underline{F}^k)^T \vec{Z}^k \\ \|\vec{v}^k\| &= \left\| \underline{F}^k \left((\underline{F}^k)^T \underline{F}^k \right)^{-1} (\underline{F}^k)^T \vec{Z}^k - \vec{Z}^k \right\|\end{aligned}\tag{7-9}$$

Hinweis 1. Wir verzichten in (7-9) auf die Darstellung der numerischen Lösung mittels einer QR-Zerlegung. Diese kann zum Beispiel in Schwarz (1988) gefunden werden.

Nun soll das ursprüngliche Gitter mit $(2^{k-1} + 1) \times (2^{k-1} + 1)$ Messwerten zu einem Gitter mit $(2^k + 1) \times (2^k + 1)$ Messwerten erweitert werden, siehe Abb. 7-2. Zur Untersuchung der Güte der auf dem ursprünglichen Gitter durchgeführten Approximation vom Grad k auf dem nun erweiterten Gitter muss die Norm des Vektors $\|\vec{v}^{k+1}\|$ aus (7-10) bestimmt werden:

$$\|\vec{v}^{k+1}\| = \|\underline{F}^{k+1} \cdot \vec{a}_A^k - \vec{Z}^{k+1}\|\tag{7-10}$$

Unter Verwendung der offensichtlichen Beziehungen (7-11) auf dem erweiterten Gitter

$$\begin{aligned}\underline{F}^{k+1} &= \begin{bmatrix} \underline{F}^k \\ \underline{F}^* \end{bmatrix} \\ \vec{Z}^{k+1} &= \begin{bmatrix} \vec{Z}^k \\ \vec{Z}^* \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{7-11}$$

gilt für das *theoretische Genauigkeitsmaß der polynomialen Approximation vom Grad k nach der Methode der kleinsten Quadrate*:

$$\|\vec{v}^{k+1}\| = \|\vec{v}^k\| + \|\underline{F}^* \cdot \vec{a}_A^k - \vec{Z}^*\|,\tag{7-10'}$$

wobei der Lösungsvektor \vec{a}_A^k der Gleichung (7-9) zu entnehmen ist. Mit Stern werden in (7-11) die Blöcke der Matrix \underline{F}^{k+1} bzw. des Vektors \vec{Z}^{k+1} bezeichnet, die sich auf die neuen, nach der Gittererweiterung hinzu gekommenen Messwerte beziehen, d.h.:

$$\begin{aligned} \underline{F}^* &= \left[\bar{f}_j^T \right] \\ \underline{Z}^* &= \left[Z_j \right] \\ j &= N^2 + 1, N^2 + 2, \dots, (2^k + 1)^2 \end{aligned} \quad (7-11')$$

Als ein relatives theoretisches Genauigkeitsmaß der polynomialen Approximation vom Grad k auf dem erweiterten Gitter nach der Methode der kleinsten Quadrate kann das mit der Anzahl $(2^k + 1)^2$ der Punkte normierte theoretische Genauigkeitsmaß (7-10') verwendet werden.

Das Wavelet-Spline-Verfahren

Wir führen nun eine einfache Operation ein, um die Darstellung der weiteren Ausführungen nicht unnötig durch verschachtelte Matrixprodukte zu erschweren.

Definition 7-7. Die folgende Operation (7-12) wird als *Stretching* bezeichnet. Das Ergebnis der Anwendung dieser Operation auf eine Matrix bzw. auf einen Vektor ist wiederum eine Matrix bzw. ein Vektor. Diese Operation führt zu einer durch einen ganzzahligen Vektor B gesteuerten Wiederholung einiger Zeilen der Matrix bzw. des Vektors A .

$$A \circ B = \left[\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} A_1 \\ \dots \\ A_1 \end{array} \right\} B_1 \\ \left. \begin{array}{c} A_2 \\ \dots \\ A_2 \end{array} \right\} B_2 \\ \dots \\ \left. \begin{array}{c} A_n \\ \dots \\ A_n \end{array} \right\} B_n \end{array} \right] \quad (7-12)$$

wobei A und B eine identische Zeilenanzahl aufweisen müssen.

Unter Verwendung der Bezeichnung (7-13), die in Bemerkung 7-1 erklärt wird, kann die *eindeutige* Lösung M^k des Approximationsproblems (7-2) mit Hilfe eines Wavelet-Splines aus der Gleichung (7-14) bestimmt werden. Der konstruktive Algorithmus zur sequentiellen Herleitung dieser eindeutigen Lösung kann in Wälder, Buchroithner (2004) und in 2.4 gefunden werden.

$$M^k = \left[\begin{array}{cccc} \bar{m}_1^{1.Zelle} & \dots & \bar{m}_j^{1.Zelle} & \bar{m}_j^{2.Zelle} \dots \\ & & \bar{m}_j^{3.Zelle} & \bar{m}_j^{4.Zelle} \dots \bar{m}_j^{(N-1)^2.Zelle} \end{array} \right] \quad (7-13)$$

$$\left(\bar{m}_i^{l.Zelle} \right)^T = \left[a_0^S \ a_1^S \ b_1^S \ c_1^S \ \dots \ a_k^S \ b_k^S \ c_k^S \right] \begin{array}{l} l.Zelle \\ (x_i, y_i) \end{array}$$

$$i = 1 \dots N^2, l = 1, 2, \dots, (N-1)^2$$

$$\begin{aligned} (\underline{F}^k \circ \bar{N}^k) \cdot M^k &= \bar{Z}^k \circ \bar{N}^k \\ \|\bar{u}^k\| &= \left\| (\underline{F}^k \circ \bar{N}^k) \cdot M^k - \bar{Z}^k \circ \bar{N}^k \right\| = 0 \end{aligned} \tag{7-14}$$

wobei der Vektor \bar{N}^k eine Spalte mit ganzzahligen Elementen darstellt, von denen jedes jeweils der Anzahl der Spalten der Matrix M^k aus (7-13) entspricht, die sich dabei auf einen festen Punkt (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N^2$ bezieht. Dieser Vektor hängt von der Reihenfolge der Nummerierung der Punkte auf einem Gitter ab. Beispiel 7-1 veranschaulicht einige Bezeichnungen aus (7-13) und (7-14) für das Gitter in Abb. 7-3 (nur schwarze Punkte). Die in (7-14) verwendete Operation wurde in Definition 7-7 eingeführt. Die Norm des Vektors der Abweichungen \bar{u}^k ist gleich Null. Die Interpolationsforderung (7-3) wird dabei erfüllt.

Beispiel 7-1. Verwendung der Bezeichnungen aus (7-13) und (7-14) für $k = 2$, siehe Abb. 7-3 (nur schwarze Punkte).

Die Nummerierung der Gitterpunkte und der Gitterzellen erfolgt hier von unten nach oben und von links nach rechts.

$$M^2 = \begin{bmatrix} \bar{m}_1^{1.Zelle} & \bar{m}_2^{1.Zelle} & \bar{m}_2^{2.Zelle} & \bar{m}_3^{2.Zelle} \\ \bar{m}_4^{1.Zelle} & \bar{m}_4^{3.Zelle} & \bar{m}_5^{1.Zelle} & \bar{m}_5^{2.Zelle} \\ \bar{m}_5^{3.Zelle} & \bar{m}_5^{4.Zelle} & \bar{m}_6^{2.Zelle} & \bar{m}_6^{4.Zelle} \\ \bar{m}_7^{3.Zelle} & \bar{m}_8^{3.Zelle} & \bar{m}_8^{4.Zelle} & \bar{m}_9^{4.Zelle} \end{bmatrix}$$

$$\left(\bar{m}_i^{l.Zelle} \right)^T = \begin{bmatrix} a_0^S & a_1^S & b_1^S & c_1^S & a_2^S & b_2^S & c_2^S \end{bmatrix} \begin{matrix} l.Zelle \\ (x_i, y_i) \end{matrix},$$

$$i = 1 \dots 3^2, l = 1, 2, 3, 4$$

und

$$\bar{N}^2 = [1, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 2, 1]^T$$

Bemerkung 7-1. Die Bezeichnung aus (7-13) soll an dieser Stelle nochmals näher erläutert werden. Wie man auch an Beispiel 1 sehen kann, werden einige Gitterpunkte in die Berechnung von Spline-Koeffizienten zwei- bzw. viermal einbezogen, weil sie gleichzeitig zu zwei bzw. vier benachbarten Gitterzellen gehören, siehe auch Abb. 7-3. Man kann leicht nachweisen, dass sich dadurch die Anzahl der Gleichungen in (7-14) bis auf 4^k erhöht, was der Anzahl der unbekannt Koeffizienten der Matrix M^k genau entspricht. In der Bezeichnung (7-13) wurde speziell die vierfache Berücksichtigung eines inneren Gitterpunktes m_j in den Gitterzellen mit den Nummern 1,2,3 und 4 hervorgehoben.

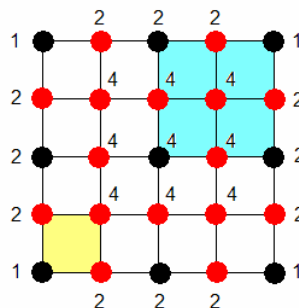


Abbildung 7-3. Illustration der vierfachen Einbeziehung von Gitterpunkten für $k = 2$ (nur schwarze Punkte, die exemplarische Gitterzelle ist hellblau) und $k = 3$ (schwarze und rote Punkte, die exemplarische Gitterzelle ist hellgelb).

Nach der Erweiterung des ursprünglichen Gitters wie in Abb. 7-2 und unter der Berücksichtigung von (7-11) und (7-14), der Definition 7-1 und der fortlaufenden Nummerierung der hinzu kommenden Punkte gilt für *das theoretische Genauigkeitsmaß der polynomialen Approximation vom Grad k mit Hilfe eines Wavelet-Splines*:

$$\begin{aligned}
 M^k &= [M^k, M^*] \\
 \bar{N}^{k+1} &= \begin{bmatrix} \bar{N}^k \\ \bar{N}^* \end{bmatrix} \\
 \|\bar{u}^{k+1}\| &= \left\| \left(\underline{F}^{k+1} \circ \bar{N}^{k+1} \right) \cdot M^{k+1} - \bar{Z}^{k+1} \circ \bar{N}^{k+1} \right\| \\
 &= \|\bar{u}^k\| + \left\| \left(\underline{F}^* \circ \bar{N}^* \right) \cdot M^* - \bar{Z}^* \circ \bar{N}^* \right\| \\
 &= \left\| \left(\underline{F}^* \circ \bar{N}^* \right) \cdot M^* - \bar{Z}^* \circ \bar{N}^* \right\|
 \end{aligned} \tag{7-15}$$

Als ein *relatives theoretisches Genauigkeitsmaß der polynomialen Approximation vom Grad k auf dem erweiterten Gitter nach dem Wavelet-Spline-Verfahren* kann das mit der Anzahl 4^{k+1} der Punkte normierte theoretische Genauigkeitsmaß (7-15) benutzt werden.

7.3 Eine Fallstudie: Höhenmessungen am Blockgletscher Reichenkar

Eine ausführliche Beschreibung des Blockgletschers Reichenkar ist bereits in Abschnitt 2.2 erfolgt. Zur Untersuchung des Bewegungsverhaltens dieses aktiven Blockgletschers wurden am Blockgletscher einige markierte Messpunkte (größere Felsblöcke mit eingemeißelten und mit roter Farbe markierten Messmarken) vermessen. Es wurde ein Bereich in der Stirnnähe ausgewählt. Mit diesen Höhenmessungen in diesem Bereich wurde ein regelmäßiges 17×17 - Gitter erzeugt, das als Grundlage der Genauigkeitsuntersuchungen diente.

Dieses Gitter weist starke Schwankungen der Messwerte im unteren Bereich auf, die durch eine Approximation auf der Basis seines 5×5 - Subgitters nicht erfasst werden konnten, siehe Abb. 7-4. Das 5×5 Subgitter wurde als ursprüngliches Gitter ausgewählt. Ausgehend von diesem 5×5 - Gitter wurden polynomiale Approximationen des Georeliefs vom Grad $k = 3$ (10 Koeffizienten) mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate (Methode 1) und mittels des Wavelet-Spline-Verfahrens (Methode 2) durchgeführt.

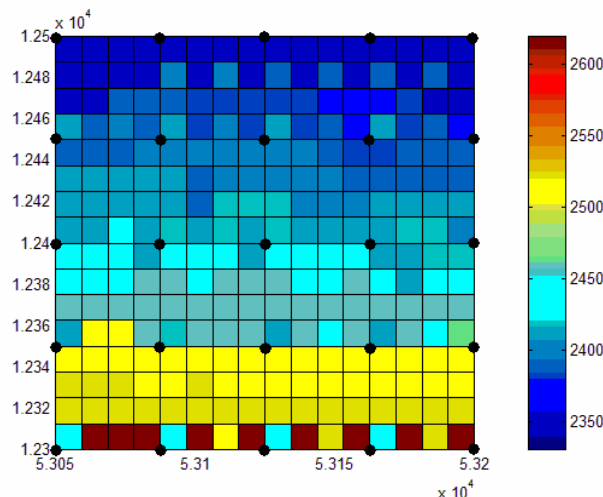


Abbildung 7-4: 17×17 - Gitter (Original) der Höhenmessungen (in [m]) auf einem Teilgebiet des Reichenkar Blockgletschers. Die Stützpunkte des ursprünglichen 5×5 - Gitters (Subgitter) wurden schwarz gekennzeichnet.

In Tabelle 7-1 wird eine Koeffizientenübersicht beider Lösungswege präsentiert. Da beim Wavelet-Spline-Verfahren 16 verschiedene Gitterzellen mit jeweils 10 Koeffizienten betrachtet werden, werden in Tabelle 7-1 die *Mittelwerte dieser Koeffizienten* über alle 16 Gitterzellen gebildet.

• Koeffizienten der Approximation vom Grad 3	• Methode 1	• Methode 2 (Mittelwerte über 16 Gitterzellen)
• a_0	• 2431,2	• 2433,3
• a_1	• -1,9	• -8,5
• b_1	• -25,2	• -25,5
• c_1	• -7,2	• -0,0
• a_2	• -0,8	• 0,5
• b_2	• -6,4	• -4,1
• c_2	• 3,7	• 4,3
• a_3	• 0,2	• 0,5
• b_3	• -2,5	• -0,7
• c_3	• 1,3	• 5,6

Tabelle 7-1. Koeffizientenüberblick für beide Methoden für die auf das Intervall [0,1] transformierten Rechts- und Hochwerte, [m].

Nun sollen für diese Fallstudie die empirischen Genauigkeiten beider Methoden verglichen werden.

Als *empirisches Genauigkeitsmaß* wird hier für beide Methoden die *Summe – und nicht der Mittelwert- der absoluten Abweichungen* zwischen den wahren und den approximierten Messwerten auf einem erweiterten Gitter verwendet. Die *empirische Genauigkeit der Approximation vom Grad 3* für das 5 x 5 – Gitter beträgt, in [m]

68,285	für Methode 1 und
0,0	für Methode 2.

Die *empirische Genauigkeit der gleichen Approximation vom Grad 3* für das erweiterte 9 x 9 – Gitter nach (10') und (14) beträgt

2391,5	für Methode 1 (Abb. 7-5a) und
2314,3	für Methode 2 (Abb. 7-5b).

Eine weitere Erweiterung auf ein 17 x 17 – Gitter führt zu folgenden Werten *der empirischen Genauigkeit der Approximation vom Grad 3*:

12580	für Methode 1 (Abb. 7-6a) und
12515	für Methode 2 (Abb. 7-6b).

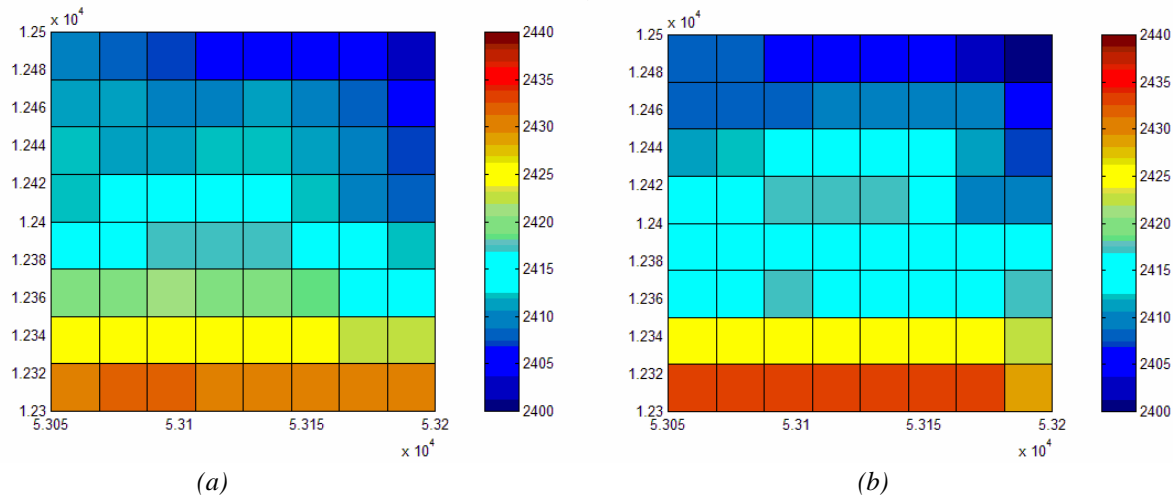


Abbildung 7-5 a, b. Darstellung des 9×9 – Gitters mit der Approximation vom Grad 3 nach Methode 1 (a) und nach Methode 2(b), [m].

Wenn man anstatt der nach Methode 1 ermittelten Koeffizienten die *mittleren Koeffizienten* des Wavelet-Splines aus Tabelle 7-1 zur Approximation benutzt, können folgende Werte der *empirischen Genauigkeiten der polynomialen Approximation vom Grad 3* ermittelt werden:

76,02 für das 5×5 - Gitter,
 2390,7 für das 9×9 – Gitter und
 12568 für das 17×17 – Gitter.

Es ist nun leicht zu verstehen, wieso die Genauigkeit für das 5×5 – Gitter bei der Approximation mit Verwendung der mittleren Koeffizienten des Wavelet-Spline niedriger ist, als diejenige bei der Methode der kleinsten Quadrate. Die nach Methode 1 ermittelten Koeffizienten -und nur diese- sind für diesen Fall gerade diejenigen Koeffizienten, die zu einer polynomialen Approximation mit einer minimalen Abweichung zwischen den wahren und den approximierten Messwerten führen. Eine theoretische Begründung für die höhere empirische Genauigkeit bei den mittleren Koeffizienten des Wavelet-Splines auf den erweiterten 9×9 – bzw. 17×17 – Gittern ist dagegen nicht trivial. Hierzu sind gründliche, auf modernen Verfahren der Approximationstheorie basierende Untersuchungen notwendig.

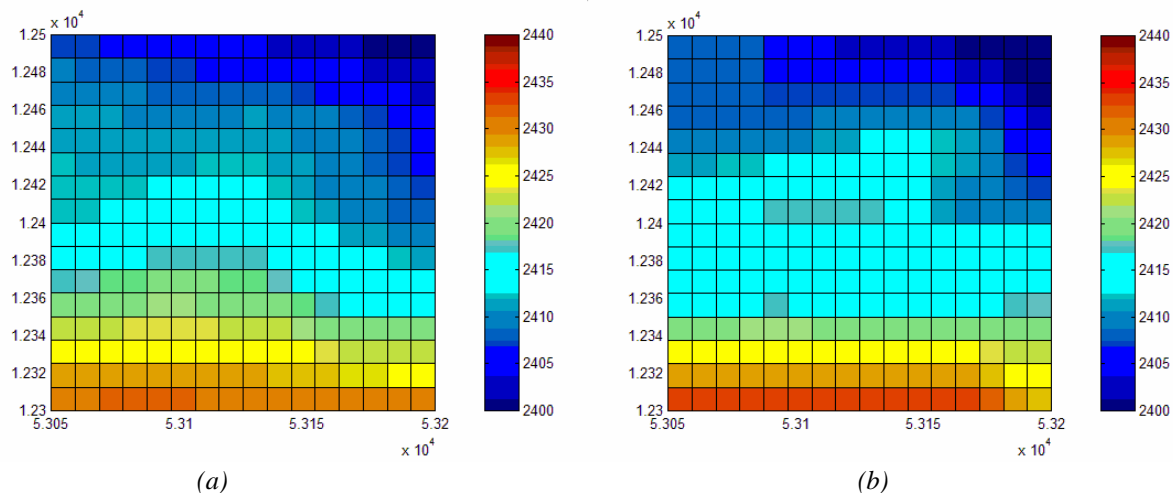


Abbildung 7-6 a, b: Darstellung des 17×17 – Gitters mit der Approximation vom Grad 3 nach Methode 1(a) und nach Methode 2 (b), [m].

Tabelle 7-2 gibt einen zusammenfassenden Überblick der *relativen empirischen Genauigkeiten* für die oben beschriebenen Fälle.

Gitter/Methode	1	2	Mittlere Koeffizienten nach Methode 2
5 x 5	2,7314	0,0	3,0409
9 x 9	29,5249	28,5718	29,5149
17 x 17	43,5288	43,3036	43,4892

Tabelle 7-2. Gegenüberstellung der relativen empirischen Genauigkeiten polynomialer Approximationen vom Grad $k=3$ in [m].

Es wurden zwei verschiedene Ansätze zur Georelief-Approximation vorgestellt und an Hand einer Fallstudie verglichen. Das Testgebiet, ein Teil des Blockgletschers Reichenkar, weist starke „Unregelmäßigkeiten“ im Relief wie lokale Schwingungen auf, siehe Abb. 7-4. Gerade diese Eigenschaft macht die Gegenüberstellung beider Methoden besonders spannend, weil mit zunehmender Regelmäßigkeit eines Georeliefs ein geringerer Unterschied zwischen beiden Methoden bei fortschreitenden Gittererweiterungen zu erwarten ist.

Es konnte nun gezeigt werden, dass die „die Anzahl der Koeffizienten reduzierende“, und dabei auf die Interpolationsforderung (7-3) verzichtende, klassische Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate bei der Erweiterung des Gitters etwas ungenauer als die Wavelet-Spline-Methode ist, die die Interpolationsforderung berücksichtigt. Es soll allerdings darauf verwiesen werden, dass bei einer Entscheidung zwischen beiden Methoden stets die konkrete, praktische Aufgabenstellung beachtet werden sollte.

8. Einige ARMA-Modelle zur Vorhersage von Dammdeformationen

8.1 Mathematische Modellierung

In Yuanzhong und Litao (2005) wird ein ARMA-Modell zur Beschreibung, Analyse und Vorhersage der Dammdeformation präsentiert. Wir schlagen nun weitere Modelle vor, die unter anderem die Genauigkeit der Vorhersage signifikant verbessern.

Yuanzhong und Litao (2005) folgend soll hier angenommen werden, dass zwei unabhängige Variablen X , Y (Druck und Temperatur) die abhängige Variable Z , die eigentliche Dammdeformation beeinflussen. Außerdem verwenden wir bei der Analyse den gleichen Datensatz wie in Yuanzhong und Litao (2005), um eine Gegenüberstellung verschiedener Ansätze zu erleichtern. Zunächst werden die folgenden vier ARMA-Modelle in Betracht gezogen:

$$Z_1(k) = C + \sum_{i=1}^p \alpha_i X(k-i) + \sum_{i=1}^p \beta_i Y(k-i) + \varepsilon \quad (8-1)$$

$$Z_2(k) = C \cdot Z_2(k-1) + \sum_{i=1}^p \alpha_i X(k-i) + \sum_{i=1}^p \beta_i Y(k-i) + \varepsilon$$

$$Z_3(k) = C + \sum_{i=0}^p \alpha_i X(k-i) + \sum_{i=0}^p \beta_i Y(k-i) + \varepsilon$$

$$Z_4(k) = C \cdot Z_4(k-1) + \sum_{i=0}^p \alpha_i X(k-i) + \sum_{i=0}^p \beta_i Y(k-i) + \varepsilon$$

Die zufällige Variable $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ist normalverteilt mit Mittelwert Null und der (unbekannten) Varianz σ^2 . Der Parameter p beschreibt die so genannte Rekursionstiefe der entsprechenden AR-Modelle, d.h. die Anzahl der vorhergehenden Monate, die bei der Modellierung berücksichtigt werden sollen.

Mit Hilfe von Verfahren der Ausgleichsrechnung können die unbekannt Koeffizienten C und $\alpha_i, \beta_i, i = 0$ (oder 1), p geschätzt werden. Hierzu wird eine ausreichende Anzahl M von Gleichungen benötigt, die auf Messungen $x(j), y(j), z(j), |j| = M$ bezogen sind. M ist die Anzahl der Monate, in welchen die entsprechenden Messungen gesammelt wurden. Für diese Anzahl M gilt $M \leq 2p + 1$ für die Modelle 1 und 2, bzw. $M \leq 2p + 3$ für die Modelle 3 und 4.

Beispielsweise erhält man für Modell 1:

$$\begin{aligned} z_1(p+1) &= C + \sum_{i=1}^p \alpha_i x(p+1-i) + \sum_{i=1}^p \beta_i y(p+1-i) + \varepsilon \\ z_1(p+2) &= C + \sum_{i=1}^p \alpha_i x(p+2-i) + \sum_{i=1}^p \beta_i y(p+2-i) + \varepsilon \\ &\dots \\ z_1(p+M) &= C + \sum_{i=1}^p \alpha_i x(p+M-i) + \sum_{i=1}^p \beta_i y(p+M-i) + \varepsilon \end{aligned} \quad (8-2)$$

In Matrixform entspricht dies:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= A \cdot \bar{u} + \bar{\varepsilon}, \\ \bar{z}^T &= [z(p+1), \dots, z(p+M)], \quad \bar{u}^T = [C, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p], \\ A(k,1) &= 1, \quad k = 1..M \\ A(k,l+1) &= x(p+k-l), \quad k = 1..M, \quad l = 1..p \\ A(k,l+p+1) &= y(p+k-l), \quad k = 1..M, \quad l = 1..p\end{aligned}\tag{8-2'}$$

Die Lösung von (8-2') erhält man dann durch:

$$\bar{u} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{z}\tag{8-3}$$

Die Modellgenauigkeit entspricht in diesem Fall:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(A\bar{u} - \bar{z})^T (A\bar{u} - \bar{z})}{M - 2p - 1}}\tag{8-4}$$

Statistisch gesehen kann die Güte der Anpassung durch die Korrelation zwischen den wahren, gegebenen Messwerten und den durch das entsprechende Modell vorhergesagten Größen quantifiziert bzw. überprüft werden. Dabei wird erwartet, dass

$$\begin{aligned}E(\varepsilon) &\sim \hat{\varepsilon} = \bar{z} - A\bar{u} \approx 0 \\ \hat{\rho} &= \rho(A\bar{u}, \bar{z}) \approx 1\end{aligned}\tag{8-5}$$

Die Modelle 2,3 und 4 können analog behandelt werden. Die Größe $\hat{\sigma}^2$ aus (8-4) kann als Schätzer für die unbekannte Modellvarianz σ^2 von $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ benutzt werden. Diese Größe wird später zur Vorhersage herangezogen.

8.2 Eine Fallstudie: Analyse und Vorhersage der Dammdeformation am Gangue-Damm in einer Goldmine in der chinesischen Provinz Shandong

Wir verwenden die Messungen (Druck, Temperatur und Deformation) aus Tabelle 1 in Yuanzhong und Litao (2005), S. 91. Die monatlichen Dammdeformationen wurden in Abb. 8-1 visualisiert.

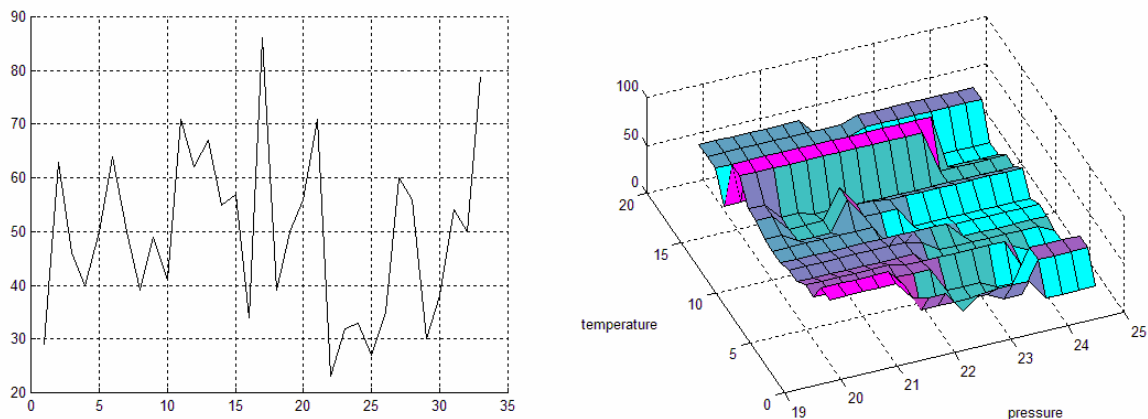


Abbildung 8-1: Die monatlichen Dammdeformationen in mm (links) und Dammdeformationen in Abhängigkeit von Druck in mPa und Temperatur in C (rechts).

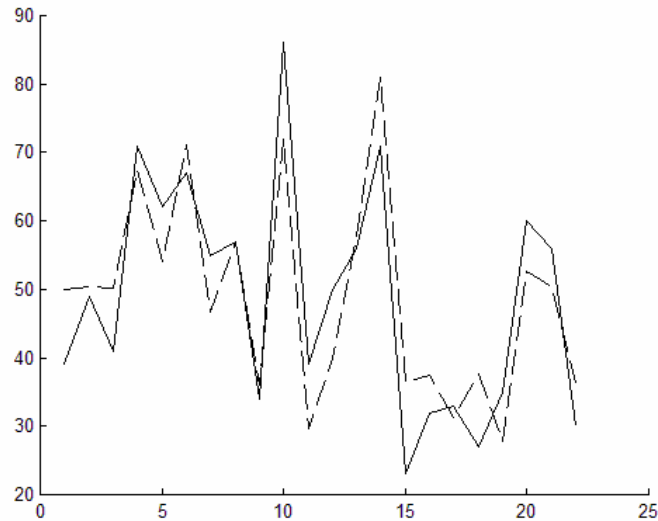


Abbildung 8-2: Die gemessenen Deformationen (fette Linie) und ihre Vorhersage (gestrichelte Linie) nach Modell 1 aus (8-1) mit $p = 7$.

Zunächst soll die Modellierung und Vorhersage von Deformationen für die letzten vier Monate ($K = 30, 31, 32$ und 33 aus Tabelle 1 in Yuanzhong und Litao (2005), S. 91) anhand der Messungen aus den vorigen Monaten 1 bis 29 durchgeführt werden. Die wahren Messwerte und ihre Vorhersagewerte nach Yuanzhong und Litao (2005) können Tabelle 8-1 entnommen werden.

Kommentar 8-1: Nach dem Modell in Yuanzhong und Litao (2005) beträgt die Summe der absoluten Abweichungen zwischen den wahren und vorhergesagten Deformationswerten $d = 45.3$ mm.

Wir verwenden die Modelle 1 bis 4 mit verschiedenen Werten für Parameter p und berechnen mit ihrer Hilfe die Koeffizienten entsprechender linearer Regressionen, siehe Tabellen 8-2 bis 8-5. Abbildung 8-2 zeigt die Gegenüberstellung zwischen den gemessenen und vorhergesagten Dammdeformationen für ein Modell.

Monat, K	30	31	31	33
Deformation, <i>wahre</i> , mm	38	54	50	79
Deformation, <i>geschätzte</i> , mm	45.3	48.0	52.6	49.6

Tabelle 8-1. Wahre Deformationsmessungen und ihre Vorhersagewerte für die letzten vier Monate (nach Yuanzhong und Litao (2005), S. 91, 92).

Die Vorhersage wird anschließend in zwei Schritten durchgeführt. Im ersten Schritt wird ein Regressionsmodell zur Trendanpassung verwendet. Im zweiten Schritt wird 100-mal eine normalverteilte Größe ε mit Mittelwert Null und Varianz $\hat{\sigma}^2$ simuliert. Ihr maximaler absoluter Wert wird dann zur Berechnung der Grenzen des Vorhersageintervalls benutzt. Selbstverständlich kann auch die $1.5 \cdot \sigma$ -Regel für diese Berechnung verwendet werden.

In Tabelle 8-6 werden schließlich die vorhergesagten monatlichen Deformationswerte und die Summe ihrer absoluten Abweichungen von den gemessenen Dammdeformationen (vgl. Tabelle 8-1) präsentiert.

$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$	$p = 7$
$C = 108.31$	$C = 48.25$	$C = 81.65$	$C = 17.81$	$C = 143.85$	$C = 132.98$
$\alpha_1 = 1.75$ $\beta_1 = -0.92$ $\alpha_2 = -3.77$ $\beta_2 = -1.18$	$\alpha_1 = 0.62$ $\beta_1 = -0.95$ $\alpha_2 = -3.61$ $\beta_2 = -1.49$ $\alpha_3 = 3.77$ $\beta_3 = 0.09$	$\alpha_1 = 0.19$ $\beta_1 = -0.90$ $\alpha_2 = -3.31$ $\beta_2 = -1.46$ $\alpha_3 = 4.01$ $\beta_3 = 0.21$ $\alpha_4 = -1.68$ $\beta_4 = 0.01$	$\alpha_1 = -0.64$ $\beta_1 = -0.97$ $\alpha_2 = -2.0$ $\beta_2 = -1.6$ $\alpha_3 = 3.9$ $\beta_3 = 0.21$ $\alpha_4 = -2.47$ $\beta_4 = -0.26$ $\alpha_5 = 3.51$ $\beta_5 = -0.19$	$\alpha_1 = -1.17$ $\beta_1 = -0.68$ $\alpha_2 = 0.5$ $\beta_2 = -1.45$ $\alpha_3 = 0.72$ $\beta_3 = 0.48$ $\alpha_4 = -2.21$ $\beta_4 = -0.5$ $\alpha_5 = 5.17$ $\beta_5 = 0.52$ $\alpha_6 = -6.86$ $\beta_6 = 0.23$	$\alpha_1 = -0.18$ $\beta_1 = -0.69$ $\alpha_2 = 2.35$ $\beta_2 = -1.4$ $\alpha_3 = 0.36$ $\beta_3 = 0.31$ $\alpha_4 = -2.43$ $\beta_4 = -0.63$ $\alpha_5 = 5.25$ $\beta_5 = 0.62$ $\alpha_6 = -8.00$ $\beta_6 = 0.34$ $\alpha_7 = -0.9$ $\beta_7 = 0.49$
$\hat{\sigma} = 12.03$	12.23	13.11	13.47	12.88	13.94
$\hat{\varepsilon} = -0.29$ $\text{mm} \times 10^{-9}$	0.14	0.25	0.02	-0.29	-0.32
$\hat{\rho} = 0.70$	0.74	0.74	0.78	0.85	0.88

Tabelle 8-2. Koeffizienten linearer Regressionen und einige statistische Charakteristiken aus (8-4), (8-5) für Modell 1 aus (8-1) berechnet anhand von Messungen aus den ersten 29 Monaten.

Kommentar 8-2: Den Tabellen 8-1 und 8-6 kann entnommen werden, dass eine langfristige Prognose bzw. Vorhersage meist sinnlos ist. Dieser Erkenntnis ist in der Approximationstheorie nicht neu. Viel sinnvoller wäre es somit, lediglich eine kurzfristige Vorhersage nur für den Monat $K = 30$ anhand der vorhergehenden Monate 1 bis 29 zu machen.

Wenn dann anschließend zusätzliche Informationen über Druck, Temperatur und Deformation für den Monat $K=30$ ermittelt werden konnten, können neue Regressionsmodelle angepasst werden, bei denen die Monate 1 bis 30 nun berücksichtigt werden. Mit ihrer Hilfe erhält man dann die Vorhersage für den Zukunftsmonat $K=31$. Das Verfahren lässt sich entsprechend fortsetzen.

Die Auswahl der Modelle 1-4 aus (8-1) hängt in hohem Maße von der wahren Natur des Dammdeformationprozesses ab und sollte daher den entsprechenden Experten überlassen werden.

$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$	$p = 7$
$C = -0.03$	$C = -0.07$	$C = -0.06$	$C = -0.1$	$C = 0.14$	$C = 0.01$
$\hat{\sigma} = 12.69$	12.32	13.34	13.42	13.40	14.37
$\hat{\varepsilon} = -3.44$ mm	-1.32	-1.35	-0.31	-1.16	-0.63
$\hat{\rho} = 0.66$	0.73	0.73	0.79	0.83	0.87

Tabelle 8-3. Koeffizienten linearer Regressionen und einige statistische Charakteristiken aus (8-4), (8-5) für Modell 2 aus (8-1) berechnet anhand von Messungen aus den ersten 29 Monaten.

$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$
$C = 139.72$	$C = 169.64$	$C = 141.43$	$C = 113.46$	$C = 120.38$	$C = 232.08$
$\hat{\sigma} = 10.59$	11.11	11.69	12.16	12.56	12.47
$\hat{\varepsilon} = -0.09$ $\text{mm} \times 10^{-9}$	0.23	0.03	0.32	0.01	0.54
$\hat{\rho} = 0.77$	0.78	0.79	0.81	0.85	0.89

Tabelle 8-4. Koeffizienten linearer Regressionen und einige statistische Charakteristiken aus (8-4), (8-5) für Modell 3 aus (8-1) berechnet anhand von Messungen aus den ersten 29 Monaten.

$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$
$C = 0.18$	$C = 0.19$	$C = 0.14$	$C = 0.23$	$C = 0.24$	$C = 0.26$
$\hat{\sigma} = 11.75$	12.55	12.39	12.40	12.79	13.93
$\hat{\varepsilon} = -4.36$, mm	-4.11	-2.16	-1.37	-1.28	-1.72
$\hat{\rho} = 0.71$	0.70	0.76	0.81	0.84	0.86

Tabelle 8-5. Koeffizienten linearer Regressionen und einige statistische Charakteristiken aus (8-4), (8-5) für Modell 4 aus (8-1) berechnet anhand von Messungen aus den ersten 29 Monaten.

Modell 1

	K = 30	K = 31	K = 32	K = 33	<i>d</i>
$p = 2$	39.73 ± 18.05	49.76 ± 18.05	61.07 ± 18.05	45.55 ± 18.05	50.48
$p = 3$	35.02 ± 18.35	54.89 ± 18.35	71.79 ± 18.35	49.24 ± 18.35	55.42
$p = 4$	33.35 ± 19.67	56.23 ± 19.67	70.61 ± 19.67	45.32 ± 19.67	61.16
$p = 5$	25.64 ± 20.21	61.08 ± 20.21	69.62 ± 20.21	45.13 ± 20.21	67.04
$p = 6$	31.52 ± 19.32	64.34 ± 19.32	52.07 ± 19.32	52.55 ± 19.32	51.21
$p = 7$	33.45 ± 29.1	65.95 ± 29.1	50.28 ± 29.1	54.82 ± 29.1	40.97

Modell 2

	K = 30	K = 31	K = 32	K = 33	<i>d</i>
$p = 2$	48.75 ± 19.04	60.13 ± 19.04	65.87 ± 19.04	45.40 ± 19.04	66.35
$p = 3$	39.29 ± 18.48	62.12 ± 18.48	79.33 ± 18.48	53.39 ± 18.48	64.35
$p = 4$	39.32 ± 20.02	61.55 ± 20.02	78.95 ± 20.02	53.08 ± 20.02	63.74
$p = 5$	35.17 ± 20.13	68.48 ± 20.13	75.39 ± 20.13	52.95 ± 20.13	68.76
$p = 6$	27.91 ± 20.1	58.57 ± 20.1	54.05 ± 20.1	45.25 ± 20.1	52.45
$p = 7$	37.67 ± 21.56	71.96 ± 21.56	52.95 ± 21.56	60.04 ± 21.56	40.20

Modell 3

	K = 30	K = 31	K = 32	K = 33	<i>d</i>
$p = 1$	35.47 ± 15.89	31.67 ± 15.89	60.87 ± 15.89	62.02 ± 15.89	52.71
$p = 2$	36.61 ± 16.67	31.49 ± 16.67	59.75 ± 16.67	56.81 ± 16.67	55.83
$p = 3$	39.64 ± 17.54	32.73 ± 17.54	58.71 ± 17.54	60.73 ± 17.54	49.89
$p = 4$	39.32 ± 18.24	34.27 ± 18.24	55.69 ± 18.24	61.45 ± 18.24	44.29
$p = 5$	47.14 ± 18.84	33.25 ± 18.84	59.94 ± 18.84	67.18 ± 18.84	51.66
$p = 6$	47.41 ± 22.05	35.12 ± 22.05	57.29 ± 22.05	54.78 ± 22.05	59.80

Modell 4

	K = 30	K = 31	K = 32	K = 33	d
p = 1	28.89 ± 17.63	31.19 ± 17.63	61.90 ± 17.63	54.58 ± 17.63	68.24
p = 2	28.86 ± 18.83	29.95 ± 18.83	63.11 ± 18.83	54.73 ± 18.83	70.57
p = 3	36.28 ± 18.59	29.64 ± 18.59	59.79 ± 18.59	58.52 ± 18.59	56.35
p = 4	30.44 ± 18.6	27.38 ± 18.6	50.35 ± 18.6	51.86 ± 18.6	61.67
p = 5	38.51 ± 19.19	25.88 ± 19.19	54.90 ± 19.19	57.13 ± 19.19	55.40
p = 6	37.68 ± 20.9	27.20 ± 20.9	55.13 ± 20.9	49.34 ± 20.9	61.90

Tabelle 8-6. Vorhergesagte monatliche Deformationswerte bzw. Intervalle und die Summe d der absoluten Abweichungen von den gemessenen Dammdeformationen für die Modelle 1 bis 4 aus (8-1).

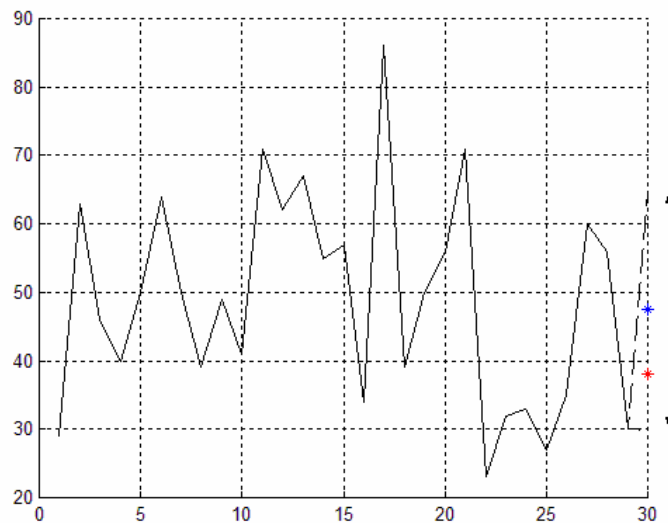


Abbildung 8-3. Graphische Präsentation einer intervall-basierten, kurzfristigen Vorhersage (gestrichelte Linien) der Dammdeformation für den Monat K=30 nach Modell 1 aus (8-1) mit $p = 7$ unter Berücksichtigung von Messungen aus den Monaten 1-29.

Zur Abbildung 8-3: In diesem Fall erhielten wir $\hat{\rho} = 0.88$, $\hat{\varepsilon} = -0.32 \times 10^{-9}$ und $\hat{\sigma} = 13.94$. Der wahre Messwert im Monat K=30 ist als roter Stern (unten) gekennzeichnet. Das Zentrum des Vorhersageintervalls entspricht dem blauen Stern (oben).

Weitere Regressionsmodelle sind möglich. Beispielsweise lässt sich Modell 3 aus (8-1) folgendermaßen verallgemeinern:

$$Z_5(k) = C + \sum_{i=0}^p \alpha_i \frac{X(k-i)}{Y(k-i) + eps} + \sum_{i=0}^p \beta_i Y(k-i) + \varepsilon \quad (8-6)$$

Der Parameter eps korrigiert mögliche Nullwerte bei den Temperaturmessungen, um numerische Schwierigkeiten zu vermeiden. Wir verwenden hier $eps = 9$, da hiermit ein optimaler Wert für die d erreicht wird, siehe Abbildung 8-4. Die folgenden Ergebnisse konnten mit dem Modell aus (8-6) erzielt werden, vgl. Tabelle 8-6:

$\hat{\rho} = 0.72$, $\hat{\varepsilon} = -0.028 \text{ mm} \times 10^{-9}$ und $d = 25.94$. Die Parameterwahl $p = 4$ führte dabei zu $\hat{\sigma} = 14.47$.

Die vorhergesagten Werte für die Dammdeformation in den Monaten $K = 30-33$ sind:
 39.70 ± 21.71 , 44.66 ± 21.71 , 50.49 ± 21.71 , 64.59 ± 21.71 .

Abbildung 8-4 zeigt die Werte von d in Abhängigkeit von eps aus (8-6). Hier kann man erkennen, dass ein Optimum etwa für $eps = 9$ erreicht wird. Abbildung 8-5 können die Ergebnisse der intervallbezogenen Vorhersage der Dammdeformation für den Monat $K = 30$ nach dem Modell (8-6) entnommen werden. Wegen zufälliger Schwankungen, die durch den Parameter ε in (8-1) und (8-6) modelliert werden können, besitzt eine punkt-basierte Vorhersage eine geringere Aussagekraft im Vergleich mit einer intervall-basierten Vorhersage.

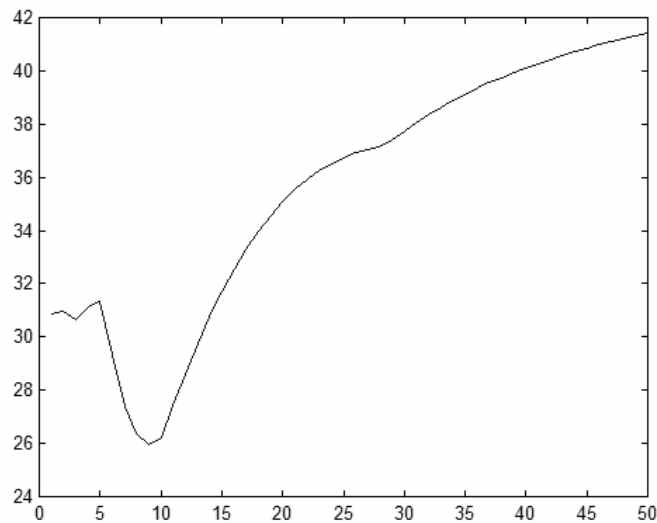


Abbildung 8-4. Abhängigkeit zwischen d und eps für das Regressionsmodell (8-6).

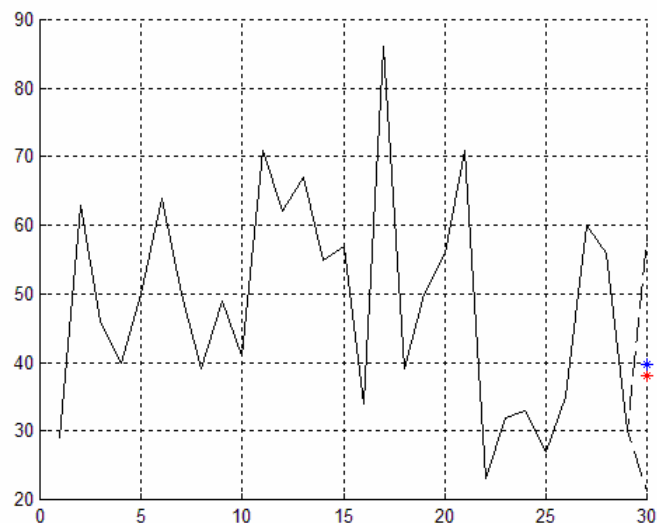


Abbildung 8-5. Graphische Präsentation einer intervall-basierten, kurzfristigen Vorhersage (gestrichelte Linien) der Dammdeformation für den Monat $K=30$ nach Modell (8-6) unter Berücksichtigung von Messungen aus den Monaten 1-29.

Zur Abbildung 8-5: In diesem Fall erhielten wir $\hat{\rho} = 0.72$, $\hat{\varepsilon} = -0.028 \text{ mm} \times 10^{-9}$ und $d = 25.94$. Die Parameterwahl $p = 4$ führte dabei zu $\hat{\sigma} = 14.47$. Der wahre Messwert im Monat $K=30$ ist als roter Stern (unten) gekennzeichnet. Das Zentrum des Vorhersageintervalls entspricht dem blauen Stern (oben).

9. Empirische statistische Tests in sozial-psychologischen Untersuchungen

9.1 Einleitung zur Problematik

Die Entwicklung und/oder Anwendung spezieller statistischer Tests gehören zu jeder sozio-psychologischen Studie, vgl. u.a. O'Brien (1984), Guthrie und Buchwald (1991), Sawilowsky und Blair (1992), Blair und Karniski (1993). Mittlerweile gibt es eine unüberschaubare Anzahl von statistischen Verfahren, die zur Analyse der Ergebnisse solcher Studien eingesetzt werden können. Dennoch erfordert die Vielfalt an realen Fragestellungen immer wieder neue Testverfahren, die vor allem frei von einschränkenden Annahmen über bestimmte Verteilungsklassen sein sollten, wie beispielsweise in Bradly (1968) und Wälder (2005a).

In Rahmen einer Kooperation zwischen den Instituten für Kartographie und für Arbeits-, Organisations- und Sozialpsychologie der Technischen Universität Dresden wurde eine sozio-psychologische Studie durchgeführt, die eine quantitative Analyse der Bildwahrnehmung von Kartenprodukten zum Ziel hatte. Im Verlauf dieser Studie hat sich ein Bedarf an speziellen statistischen Testverfahren aufgezeigt. Die Beschreibung dieser Verfahren und ihre Anwendung sollen den Schwerpunkt dieses Abschnittes darstellen.

9.2 Eine kurze Einführung in die Terminologie der räumlichen Statistik und der Punktprozessstheorie

Wir beschränken uns hier nur auf die für die weiteren Untersuchungen relevanten Begriffe und Definitionen. Eine detaillierte Darstellung der Theorie der Punktfelder kann zum Beispiel in Kallenberg (1986), Karr (1986), Stoyan und Stoyan (1994) und Wälder (1999) gefunden werden. Ein Punktprozess Φ ist – vereinfacht ausgedrückt – ein mathematisches Modell für die Abhandlungen von Punktmuster, die in einem Raum zufällig verstreut sind. Das Intensitätsmaß Λ spielt in der Theorie der Punktfelder etwa eine ähnliche Rolle wie der Erwartungswert für Zufallsgrößen:

$$\Lambda(B) = E\Phi(B) \quad (9-1)$$

wobei auf der rechten Seite in (9-1) die mittlere Anzahl der Punkte in einer Borel-Menge B steht. Wenn dieses Intensitätsmaß aus (9-1) eine Dichte $\lambda(x)$ im Sinne von (9-2) besitzt, nennt man diese *Intensitätsfunktion*:

$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(x) dx \quad (9-2)$$

Man spricht von *homogenen* Punktprozessen, wenn gilt:

$$\Lambda(B) = \lambda \cdot \nu(B) \quad (9-3)$$

wobei mit $\nu(B)$ das Lebesgue-Maß bezeichnet wird, d.h. der Flächeninhalt der Menge B im zweidimensionalen Raum.

Als grundlegend in der Punktprozessstheorie gilt das so genannte *Campbell-Theorem*, das besagt, dass für jede Funktion $f(x)$, die einem Punkt x im Raum eine nichtnegative Zahl zuordnet, die folgenden Relationen bestehen:

$$E \sum_{x \in \Phi} f(x) = E \int f(x) \Phi(dx) = \int f(x) \Lambda(dx) \quad (9-4)$$

Nun können Punktprozesse auch markiert werden. Unter einer Markierung von Punktprozessen versteht man eine eindeutige Zuordnung einer Zufallsvariable – der so genannten Marke – zu jedem Punkt des Punktprozesses, vgl. Wälder (1999). Diese Marke kann unabhängig oder abhängig vom Punktprozess verlaufen. Es können auch mehrere Markierungen nacheinander durchgeführt werden. Für markierte Punktprozesse wird der „Arbeitsraum“ um zusätzliche Dimensionen, so

genannten Markenachsen, reicher. Die Definition der *Intensität eines markierten Punktprozesses* Ψ verallgemeinert sich zu, vgl. (9-1):

$$\Lambda_M(S) = E\Psi(S) \quad (9-1')$$

wobei die Menge S eine Teilmenge von $R^2 \times M$ für markierte Punktprozesse auf einer Ebene ist. Mit M werden hier die Markenachsen bezeichnet.

Das *Cambell-Theorem für markierte Punktprozesse* Ψ und eine Funktion f , die sowohl von dem Punkt x als auch von einer Marke m abhängt, lautet:

$$E \sum_{[x,m] \in \Psi} f(x,m) = E \int f(x,m) \Psi(d(x,m)) = \int f(y) \Lambda_M(dy) \quad (9-4')$$

Besonders wichtig für die weitere statistische Analyse sind die so genannten *Größen zweiter Ordnung* aus der Theorie markierter Punktprozesse. Wir werden hier einige davon einführen, um das Verständnis der Terminologie zu erleichtern.

Man bezeichnet das folgende Maß $\alpha_f^{(2)}$ als *faktorielles Momentenmaß 2. Ordnung für markierte Punktprozesse*:

$$\alpha_f^{(2)}(B_1 \times B_2) = E \sum_{\substack{[x_1, m_1 \in \Psi] \\ [x_2, m_2 \in \Psi] \\ x_2 \neq x_1}} f(m_1, m_2) \mathbb{1}_{B_1}(x_1) \mathbb{1}_{B_2}(x_2), \quad (9-5)$$

$$\mathbb{1}_B(y) = \begin{cases} 1, & y \in B \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls dieses Maß eine Dichte $\rho_f^{(2)}(x_1, x_2)$ im Sinne der Relation (9-6) besitzt, bezeichnet man diese als *f-Produkt-dichte*.

$$\alpha_f^{(2)}(B_1 \times B_2) = \iint_{B_1 B_2} \rho_f^{(2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (9-6)$$

Nun soll an dieser Stelle eine Deutung von $\rho_f^{(2)}(x_1, x_2)$ vorgenommen werden. Wir betrachten zwei infinitesimale Kreise mit den Mittelpunkten in (zufälligen!) x_1 und x_2 und den Flächen dF_1 und dF_2 . Hierzu betrachten wir eine Zufallsgröße, die gleich Null ist, wenn nicht in jedem der Kreise genau ein Punkt des markierten Punktfeldes liegt, und die sonst gleich $f(m_1, m_2)$ ist. m_1 und m_2 bezeichnen die Marken der Punkte in diesen infinitesimalen Kreisen. Der zugehörige Erwartungswert aus (9-5) und (9-6) ist näherungsweise gleich $\rho_f^{(2)}(x_1, x_2) dF_1 dF_2$.

Wir werden weiter *isotrope* markierte Punktprozesse benutzen, für die gilt:

$$\rho_f^{(2)}(x_1, x_2) = \rho_f^{(2)}(r), \quad r = \|x_2 - x_1\| \quad (9-7)$$

Dies bedeutet, dass die *f-Produkt-dichte* nur vom Abstand zwischen den Punkten und nicht von ihren Positionen im Raum abhängt. Als Markenkorrrelationsfunktion in diesem Fall wird der folgende Term bezeichnet:

$$k_f(r) = \frac{\rho_f^{(2)}(r)}{\rho_1^{(2)}(r)} \cdot \frac{\rho_1^{(2)}(\infty)}{\rho_f^{(2)}(\infty)} = c \cdot \frac{\rho_f^{(2)}(r)}{\rho_1^{(2)}(r)},$$

$$c = \frac{\rho_1^{(2)}(\infty)}{\rho_f^{(2)}(\infty)}, \quad \rho_1^{(2)}(r) \neq 0, \quad (9-8)$$

$$\rho_1^{(2)}(r) = \rho_f^{(2)}(r) \quad \text{mit} \quad f(m_1, m_2) = 1$$

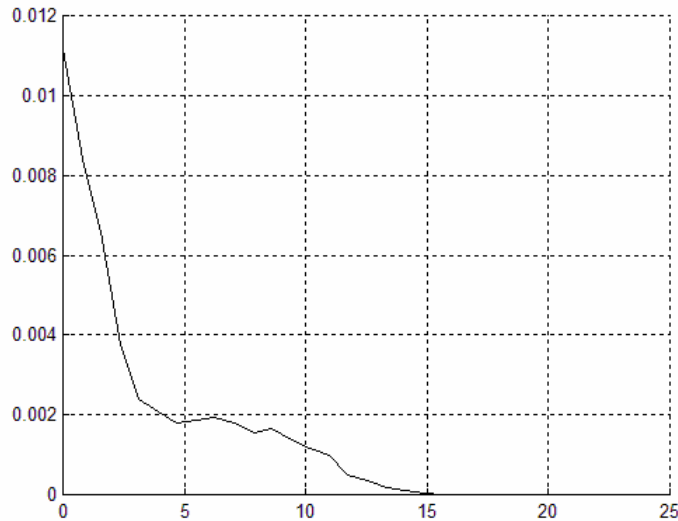


Abbildung 9-1: Beispiel einer unnormierten Markenkorrrelationsfunktion der Form (1) aus (9-12).

In Stoyan und Stoyan (1994) wurden einige empirische Schätzer der Markenkorrrelationsfunktion präsentiert. Wegen der Komplexität ihrer Darstellungen (Quotient zweier erwartungstreuer Schätzer) kann die Erwartungstreue dieser Schätzer meist nicht gewährleistet werden.

Im Weiteren werden wir den folgenden (Kern-)Schätzer der Markenkorrrelationsfunktion benutzen, siehe auch Abb. 9-1:

$$\hat{k}_f(r) = c \cdot \sum_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i < j}} f(m_i, m_j) \cdot w_{ij}(r),$$

$$w_{ij} = \frac{G_{ij}(r)}{\sum_{i,j=1,\dots,n} G_{ij}(r)}, \quad G_{ij}(r) \propto |r - \|x_j - x_i\||$$

(9-9)

Die Bezeichnung \propto steht hier für „proportional“. In Stoyan und Stoyan (1994) wurde die folgende Form der Gewichte $G_{ij}(r)$ vorgeschlagen:

$$G_{ij}(r) = \frac{e_h(r - \|x_i - x_j\|)}{\nu(W_i \cap W_j)},$$

$$e_h(t) = \begin{cases} \frac{3}{4h} \left(1 - \frac{t^2}{h^2}\right), & -h \leq t \leq h \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(9-10)

In (9-10) wurde der so genannte Epanechnikov-Kern $e_h(t)$ verwendet. Zur Wahl des Fensters W (die unteren Indizes beschreiben seine Translation bis zum entsprechenden Punkt) sowie des Parameters h soll auf Stoyan und Stoyan (1994) verwiesen werden. Meist probiert man verschiedenen Fenster und Parameter solange aus, bis man „plausible“ Ergebnisse hat.

Als alternative Kernfunktion kann auch die folgende „robuste“ Funktion aus (9-10') benutzt werden:

$$G_{ij}(r) = 1(r - h \leq \|x_j - x_i\| \leq r + h) \quad (9-10')$$

Wir gehen zunächst von einem ursprünglichen Punktprozess $\Phi = \{x_i\}$ auf einem Gitter G aus, auf dem die entsprechenden Marken $M(x_i)$ – die Häufigkeit der Blickfixierung verschiedener VPn (Versuchspersonen) im Punkt $x_i \in \Phi$ für unsere Anwendung aus Abschnitt 9.3 - modelliert werden.

$$P(x \in \Phi) = 1\{x \in G\} \quad (9-11)$$

Wegen der speziellen Art des markierten Punktprozesses - beispielsweise wegen seiner räumlichen Beschränktheit auf eine Bildebene- kann die Normierungskonstante c aus (9-8) gleich Eins gesetzt werden.

Es können verschiedene Formen für die Funktion $f(m_1, m_2)$ aus (9-5) verwendet werden, z.B.:

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2, \\ 2) \quad & f(m_1, m_2) = |m_1 - m_2|, \\ 3) \quad & f(m_1, m_2) = (m_1(\Phi_1) - m_1(\Phi_2))(m_2(\Phi_1) - m_2(\Phi_2)) \\ 4) \quad & f(m_1, m_2) = |m_1(\Phi_1) - m_1(\Phi_2)| + |m_2(\Phi_1) - m_2(\Phi_2)| \end{aligned} \quad (9-12)$$

Die erste und zweite Funktion aus (9-12) erlauben eine Aussage bezogen auf denselben Punktprozess, die dritte und vierte Funktion erlauben eine Analyse der absoluten Differenzen zwischen den Marken verschiedener Punktprozesse. Bei der weiteren statistischen Analyse wird der Schätzer der unnormierten Markenkorrelationsfunktion stets in der robusten Form verwendet, d.h.:

$$\begin{aligned} \hat{k}_f(r) &= \sum_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i < j}} f(m_i, m_j) \cdot w_{ij}(r), \\ w_{ij} &= \frac{G_{ij}(r)}{\sum_{i,j=1,\dots,n} G_{ij}(r)}, \quad G_{ij}(r) = 1(r - h \leq \|x_j - x_i\| \leq r + h) \end{aligned} \quad (9-13)$$

Die Form (3) der Funktion $f(m_1, m_2)$ aus (9-12) kann zur Konstruktion eines Ähnlichkeitsmaßes σ_f zwischen Realisierungen von markierten Prozessen wie in (9-14) sowie zur Clusteranalyse dieser Realisierungen verwendet werden.

$$\sigma_f = \int |k_f(r)| dr \quad (9-14)$$

9.3 Begriff „Aufmerksamkeitslandschaft“ und eine kurze Beschreibung des Experimentes

Der Begriff „Aufmerksamkeitslandschaft“ stammt aus der Psychologie und wird zur Beschreibung der räumlichen Verteilung der Aufmerksamkeit einer Versuchsperson bei der Betrachtung eines Objektes verwendet. Gewöhnlich tritt ein Bild (oder auch eine Karte) in der Rolle dieses Objektes auf. Diese Aufmerksamkeitslandschaften werden anhand spezieller technischer Mittel erzeugt, die sich sowohl auf Bewegungen als auch auf die Fixationsdauer der Augen von Versuchspersonen stützen. Aufmerksamkeitslandschaften werden zur quantitativen Analyse der Bildwahrnehmung herangezogen.

In unseren Untersuchungen wurde ein Ausschnitt einer topographischen Karte zwei Gruppen von jeweils 20 Personen angeboten, siehe Abb. 9-2. Anhand dieser Karte sollten sie unabhängig voneinander identische Aufgaben lösen. Während

des Lösen dieser Aufgaben wurden jedes Mal Aufmerksamkeitslandschaften erzeugt, siehe Abb. 9-3. Diese Aufgaben besaßen verschiedene Schwierigkeitsstufen und wurden so konstruiert, dass die bei einer Lösung erzeugte Aufmerksamkeitslandschaft die weiteren möglichst gering oder gar nicht beeinflussen sollte. Folgende zwei (von insgesamt neun) Aufgaben sollen hier nun näher diskutiert werden:

- 1) Eine kurze - etwa 15 Sekunden lange- Betrachtung der Karte im Sinne eines Gemäldes;
- 2) Einschätzung der stärksten Kartenbelastung (Der Begriff „Kartenbelastung“ ist dabei rein intuitiv zu interpretieren, obwohl es hierfür in der Kartographie eine bestimmte Definition gibt, die sich in erster Linie auf die Objektdichte bezieht).

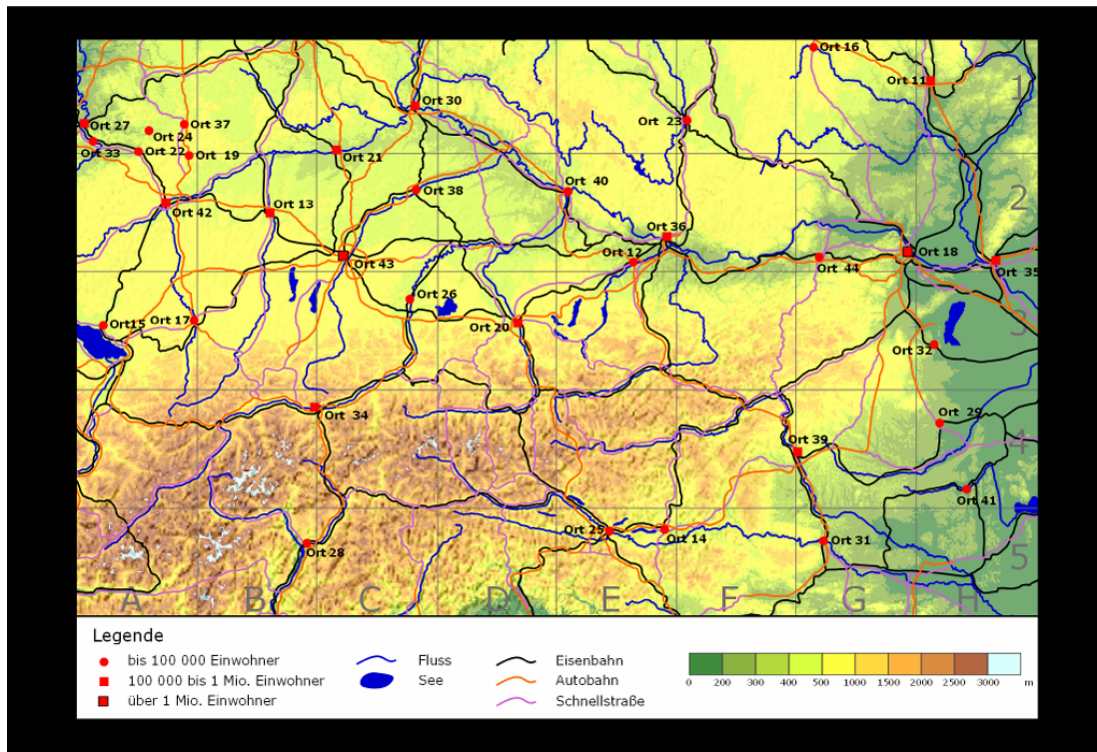


Abbildung 9-2: Ausschnitt einer topographischen Karte (1008 x 752 Pixel).

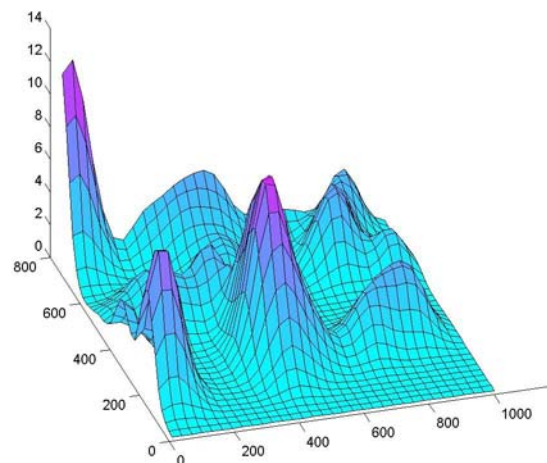


Abbildung 9-3: Beispiel einer Aufmerksamkeitslandschaft für Aufgabe 1.

Die erste Gruppe („Experten“) setzte sich aus Personen zusammen, die eine nachweisbare fachliche Kompetenz in der Kartographie besitzen (Studenten der Kartographie, Geographie, Geodäsie usw.). Zu der zweiten Gruppe („Laien“) gehörten Personen, die sich nicht täglich mit der Analyse von Karten befassen (BWL-, Jura-Studenten usw.).

Anhand der Analyse von Aufmerksamkeitslandschaften sollte beispielsweise die Hypothese über den Unterschied in den Betrachtungsprozessen der beiden Gruppen entweder bestätigt oder abgelehnt werden können.

9.4 Empirische statistische Testverfahren bezüglich der Identität zweier Betrachtungsprozesse

Es soll angenommen werden, dass eine Aufmerksamkeitslandschaft eine Realisierung eines zufälligen markierten Punktprozesses ist, der als ein mathematisches Modell des Betrachtungsprozesses Ψ dient. Für jede solche Realisierung kann ein Schätzer der Markerkorrelationsfunktion, d.h. eine empirische Markerkorrelationsfunktion, wie in (9-9) ermittelt werden. Entscheidet man sich für die Form (1) der Funktion $f(m_1, m_2)$ aus (9-12), so liefert dieser Schätzer immer nicht-negative Werte, weil Aufmerksamkeitslandschaften nicht-negativ sind.

Als ein erwartungstreuer Schätzer der wahren, aber unbekanntem Modell-Markerkorrelationsfunktion kann dann der Mittelwert aus den empirischen Markerkorrelationsfunktionen für Realisierungen benutzt werden, die zu dem gleichen Betrachtungsprozess gehören, d.h.:

$$\hat{k}^{(1)}(r) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \hat{k}_f^{(1,k)}(r), \quad (9-15)$$

$$\hat{k}^{(2)}(r) = \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} \hat{k}_f^{(2,k)}(r),$$

wobei mit $N_p, p = 1, 2$, die Anzahl von Realisierungen des Prozesses $\Psi_p, p = 1, 2$ und mit $\hat{k}_f^{(p,k)}(r), p = 1, 2$ die entsprechenden empirischen Markerkorrelationsfunktionen der k -ten Realisierung des p -ten Prozesses bezeichnet werden. Wir bezeichnen diese Funktionen aus (9-15) als *mittlere empirische Markerkorrelationsfunktionen* von Betrachtungsprozessen Ψ_1 (Experten) und Ψ_2 (Laien).

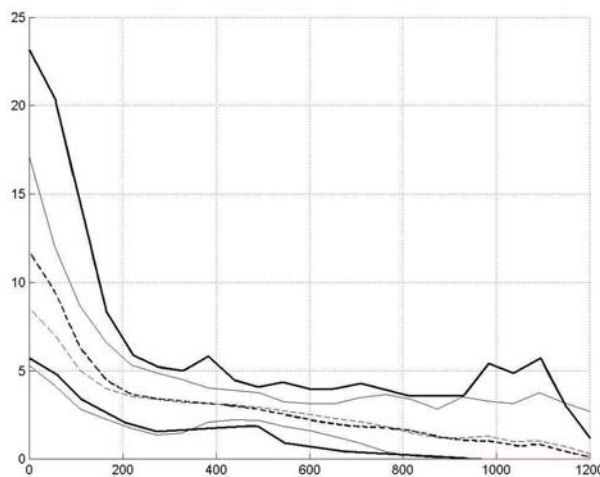


Abbildung 9-4: Empirische Funktionen $u^{(1)}(r), \hat{k}^{(1)}(r), o^{(1)}(r)$ (dünne Linien, von unten nach oben) und $u^{(2)}(r), \hat{k}^{(2)}(r), o^{(2)}(r)$ (fette Linien, von unten nach oben) für Aufgabe 1.

Als Streuungsmasse können folgende „Bänder“ (Bereiche zwischen den entsprechenden Ober- und Untergrenzen) benutzt werden, siehe Abb. 9-4:

$\forall r :$

$$b^{(1)}(r) = [o^{(1)}(r), u^{(1)}(r)] = \left[\max_{k=1, \dots, N_1} [\hat{k}_f^{(1,k)}(r)], \min_{k=1, \dots, N_1} [\hat{k}_f^{(1,k)}(r)] \right], \quad (9-16)$$

$$b^{(2)}(r) = [o^{(2)}(r), u^{(2)}(r)] = \left[\max_{k=1, \dots, N_2} [\hat{k}_f^{(2,k)}(r)], \min_{k=1, \dots, N_2} [\hat{k}_f^{(2,k)}(r)] \right],$$

Abb. 9-4 zeigt die in (9-15) und (9-16) eingeführten Funktionen für das Datenmaterial aus Abschnitt 9.3 für Aufgabe 1.

Nun soll der *empirische Test auf die Identität zweier Betrachtungsprozesse* wie folgt formuliert werden:

H_0 : Die Betrachtungsprozesse sind nicht unterscheidbar, d.h. $\Psi_1 = \Psi_2$

H_1 : Die Betrachtungsprozesse sind unterschiedlich, d.h. $\Psi_1 \neq \Psi_2$

Man berechne eine empirische Testgröße

$$T = 2 \frac{|b^{(1)} \cap b^{(2)}|}{|b^{(1)}| + |b^{(2)}|}, \quad (9-17)$$

wobei mit $|\dots|$ der Flächeninhalt der entsprechenden Menge bezeichnet wird.

Die Hypothese H_0 wird mit einem Signifikanzniveau α zugunsten der Hypothese H_1 verworfen, wenn

$$T < 1 - \alpha, \alpha \approx 0 : \quad \alpha = 0.01; 0.05.$$

Der (empirische) Fehler der 1. Art (H_0 verwerfen, obwohl die Hypothese richtig ist) beträgt in diesem Fall $\alpha \cdot 100\%$.

Beispiel 9-1 (Analyse der Ergebnisse für Aufgabe 1 aus Abschnitt 9.3): Anhand der Analyse der Ergebnisse aus Abb. 9-4 konnte die Hypothese $H_0 : \Psi_0 = \Psi_1$ für $\alpha > 0.24$ nicht verworfen werden. Die Testgröße T betrug dabei $T = 0.76$.

Sollte dennoch eine höhere Sicherheit gefordert werden (z.B. 95% oder $\alpha = 0.05$), wird diese Hypothese H_0 verworfen, und die Prozesse werden somit als unterschiedlich angesehen. Somit unterscheidet sich die Betrachtungsart einer Karte bezüglich der beiden Gruppen aus Experten und Laien.

1. Verallgemeinerung des empirischen statistischen Tests auf die Identität zweier Betrachtungsprozesse

Interpretationen von Ergebnissen hängen meistens von den Modellannahmen ab, die a priori vorausgesetzt werden. Wenn man nun die Modellannahmen weiter verfeinert, kann man die empirischen Markenkorrelationsfunktionen für Realisierungen von Prozessen zusätzlich auf einen „gemeinsamen Nenner“ bringen, in dem man diese jeweils durch das Quadrat des Integrals der entsprechenden Aufmerksamkeitslandschaft, d.h. des quadrierten Volumens der Landschaft, teilt. Damit kann die „Einheit des Betrachtens“ modelliert werden: Jede VP hat sozusagen eine „Einheit der Aufmerksamkeit“ und verbraucht diese für ein Bild und in einem gewissen Zeitraum auf unterschiedliche Art und Weise. Diese Verallgemeinerung kann zur Erhöhung bzw. Senkung der Variabilität im Band (9-16) führen.

2. Verallgemeinerung des empirischen statistischen Tests auf die Identität zweier Betrachtungsprozesse

Wenn man die Testgröße (9-17) durch (9-17') ersetzt, erhält man einen, die Hypothese H_0 „begünstigenden“ empirischen Test, mit dem sich auch die absolute Identität einer Menge von Realisierungen und jeder ihrer Untermengen nachweisen lässt.

$$T = \frac{|b^{(1)} \cap b^{(2)}|}{\min[|b^{(1)}|, |b^{(2)}|]} \quad (9-17')$$

Fortsetzung des Beispiels 9-1. In diesem Fall konnte $T = 0.96$ erreicht werden. Somit kann mit einer Sicherheit von 95% (oder $\alpha = 0.05$) die Hypothese H_0 nicht verworfen werden. Die Prozesse können nicht als unterschiedlich angesehen werden. Die Betrachtungsart der Experten stellt eher eine Untermenge der Betrachtungsart der Laien dar.

3. Verallgemeinerung des empirischen statistischen Tests auf die Identität zweier Betrachtungsprozesse

Eine empirische Markenkorrelationsfunktion ist invariant bezüglich Spiegelungen oder Drehungen von Realisierungen. Bei einigen Fragenstellungen – wie diese bei der Aufgabe 2 aus Abschnitt 9.3 - kann es aber wichtig sein, nicht nur distanzbezogene Markenkorrelationen von zwei (oder mehreren) Realisierungen miteinander zu vergleichen, sondern auch die tatsächliche, „punktgenaue“ Identität dieser Realisierungen bestätigen bzw. ablehnen zu können. Hierzu kann der folgende Test verwendet werden, vgl. hierzu auch Wälder (2005a).

Man untersucht die Markenkorrelationsfunktion der Differenz zweier Prozesse, vgl. Form (3) aus (9-12). Wenn die Unterschiede unsystematisch, also zufällig sind, dürfen die Ergebnisse dieser Differenz nicht in Clustern auftreten.

Ein absolutes, „unkorreliertes“ Chaos kann durch einen korrelationsfreien Gaußschen Prozess modelliert werden. Es werden 500 Simulationen eines solchen Prozesses erzeugt, d.h. für jede Bildmasche wird 500 Mal eine normalverteilte Größe mit dem Mittelwert Null und mit einer Varianz gegeben durch die Varianz der Differenz beider Prozesse generiert (die Varianz einer Reihe von Differenzen für jede Masche). Für jede simulierte Realisierung wird dabei eine empirische Markenkorrelationsfunktion berechnet.

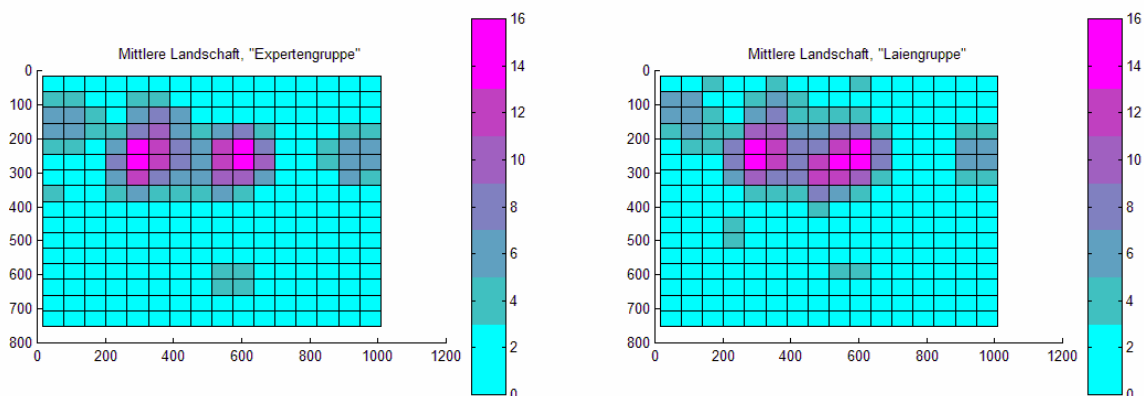


Abbildung 9-5: Mittlere Aufmerksamkeitslandschaften für die Experten- (links) und Laiengruppe (rechts) bei der Lösung von Aufgabe 2 aus Abschnitt 9.3.

Anschließend wird dann eine Min/Max-Hülle dieser Markenkorrelationsfunktionen ermittelt, vgl. Wälder (2005a). Diese kann der Abb. 9-7 entnommen werden. Der Test auf die „punktgenaue“ Identität zweier Prozesse lautet dann folgendermaßen:

Liegt nun die ursprünglich berechnete empirische Markenkorrelationsfunktion der Differenz zweier Realisierungen zu $M\%$ in der anhand von Simulationen erzeugten Min/Max-Hülle, so kann die Hypothese über die „punktgenaue“ Identität zweier Prozesse mit einem Signifikanzniveau α verworfen werden, wenn $M < (1 - \alpha)\%$.

Abbildung 9-5 zeigt mittlere Aufmerksamkeitslandschaften für die Experten- und Laiengruppe bei der Lösung von Aufgabe 2 aus Abschnitt 9.3. Abbildung 9-6 zeigt die Differenz dieser mittleren Landschaften und eine simulierte Differenz (eine Realisierung des korrelationsfreien Gaußschen Prozesses).

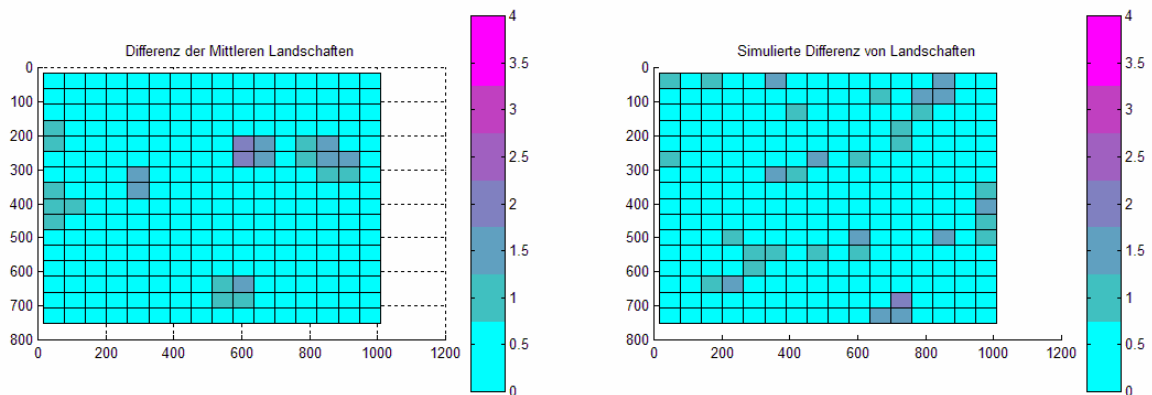


Abbildung 9-6: Differenz der mittleren Landschaften (links) und eine simulierte Differenz (rechts), vgl. Abb. 9-5.

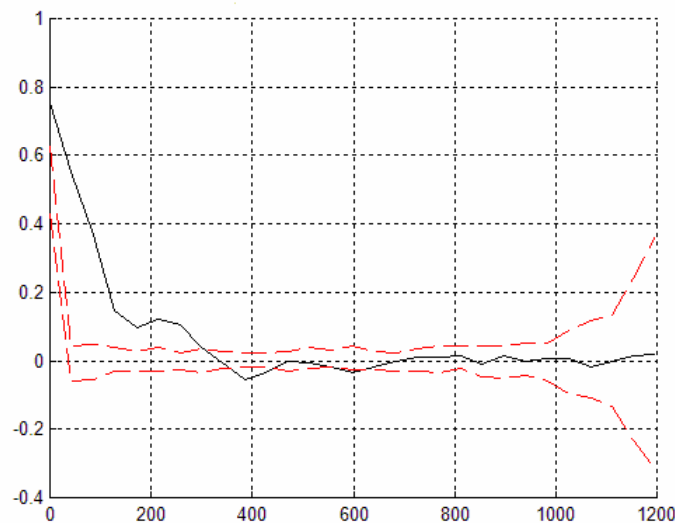


Abbildung 9-7: Ergebnis eines Tests auf die „punktgenaue“ Identität zweier Prozesse: Die simulierte Min / Max-Hülle ist gestrichelt gekennzeichnet. Die durchgezogene Linie zeigt die Markenkorrelation der Differenz zweier Prozesse.

Beispiel 9-2 (Analyse der Ergebnisse für Aufgabe 2 aus Abschnitt 9.3): Für Aufgabe 2 wurde der Test auf die „punktgenaue“ Identität zweier Prozesse (hier: Unterschiede in der Interpretation des Begriffes „Kartenbelastung“ bei Experten und Laien) benutzt, siehe hierzu die oben diskutierte 3. Verallgemeinerung.

Die Hypothese über die „punktgenaue“ Identität zweier Prozesse wird für $\alpha = 0.05$ verworfen. So muss die „punktgenaue“ Interpretation der „Kartenbelastung“ für Experten und Laien doch *als unterschiedlich* angesehen werden.

Mithilfe von Verfahren der räumlichen Statistik und der Punktprozessstheorie lassen sich einige nützliche empirische Tests konstruieren. Diese Tests wurden nun nicht ausschließlich für sozial-psychologische Untersuchungen entwickelt, sondern stellen eine sinnvolle Ergänzung für herkömmliche multidimensionale statistische Verfahren dar. Sie sind besonders für den Fall geeignet, dass gewisse Testsannahmen bei „klassischen Tests“ anhand des Datenmaterials nicht gewährleistet werden können.

Diskussion der Ergebnisse

Die Entwicklung und Anwendung von Verfahren zur Analyse räumlich-zeitlicher Prozesse stehen im Mittelpunkt dieser Arbeit. Mit speziellen mathematischen und statistischen Methoden konnte eine bequeme und aussagekräftige Analyse von solchem Datenmaterial ermöglicht werden, das sich bisher nicht auf konventionelle Weise bearbeiten ließ. Als Beispiele werden in dieser Arbeit Fallstudien zur Gletscherkinematik im Zusammenhang mit geologischen, paläontologischen Fragestellungen und auch zu so genannten Aufmerksamkeitslandschaften, welche in der Psychologie von Bedeutung sind, präsentiert.

Es soll an dieser Stelle nochmals festgehalten werden, dass bei dem gewählten Forschungsgebiet grundsätzlich eine *interdisziplinäre* Zusammenarbeit erforderlich ist. In dieser Arbeit vorgestellte Verfahren werden oftmals im Zusammenhang mit Fragestellungen aus der Blockgletscherforschung angewendet. Umfangreiches Datenmaterial konnte hierbei im Rahmen einer Forschungsk Kooperation mit dem Institut für Geologie und Paläontologie der Universität Innsbruck zur Verfügung gestellt und analysiert werden.

Zusammenfassend soll hier nun nochmals auf den Blockgletscherbegriff und die bestehenden Schwierigkeiten bei der Datenerfassung und Modellierung eingegangen werden. Aktive Blockgletscher sind lappen- bis zungenförmige Körper aus gefrorenem Lockermaterial (Verwitterungsschutt, Moränenmaterial) und Eislinsen bzw. Eiskörper, die sich langsam hangabwärts bewegen, vgl. Krainer, Mostler (2000, 2001, 2004). Das im Rahmen dieser Arbeit analysierte Datenmaterial stammt von dem aktiven Blockgletscher Reichenkar im Ötztal (Tirol). Bei der Datenerfassung wurden einige als Messstellen vorgesehene Felsblöcke mit einem Durchmesser von bis zu 2 m farbig markiert. Die sich ständig in Bewegung befindende Masse überrollt allerdings viele solcher Messstellen, dreht sie um, überschüttet sie mit neuen Felsblöcken oder macht sie auf eine andere Art und Weise unauffindbar. Obwohl auf dem Gletscher zwar von Jahr zu Jahr näherungsweise identische Routen gelaufen werden, können Fehler dennoch nicht völlig ausgeschlossen werden: Es werden beispielsweise einige Messpunkte verfehlt. Aufgrund von extremen Witterungsverhältnissen im Hochgebirge können durchaus gewissen Stellen unpassierbar oder unerreichbar sein. Bei wiederholten Messungen können somit schon aufgrund der zeitlichen Verschiebung der Messungen Fehler entstehen. Und selbstverständlich sind die markierten Messstellen nicht gitterförmig auf dem Blockgletscher verteilt. Diese Gründe machten zunächst eine geeignete Interpolation der gewonnenen Daten vor dem Beginn weiterer Untersuchungen notwendig.

In Kapitel 3 konnte ein hierzu ein so genanntes Netz-Verfahren vorgestellt werden, das eine relativ einfache, aber doch aussagekräftige Analyse der Änderungen von Streckenlängen zwischen eingemessenen Blöcken erlaubt. Es sei an dieser Stelle nochmals auf die Abbildungen 3-3a bis 3-4b verwiesen. Wie hier zu erkennen ist, gibt es deutliche Unterschiede in den lokalen Bewegungsgeschwindigkeiten auf dem Blockgletscher.

Während der axiale mittlere Bereich des Gletschers eine relativ konstante Bewegung aufweist, neigt der mittlere Zungenbereich zu einer leichten Beschleunigung. Dadurch entfernt er sich vom etwas höher gelegenen, steilen Teil des Blockgletschers. Außerdem besteht für die Randblöcke stets ein höheres Abrutschpotential des Gletschers als für diejenigen in seiner Mitte.

Im Bereich unter Punkt 36 befindet sich möglicherweise ein Hindernis, das hier die Bewegung des Blockgletschers entlang des Hanges verhindert. Dadurch nimmt an dieser Stelle die seitliche Abrutschtendenz zu, siehe Linie (5,1) in Abb. 3-5b.

Die deutliche Änderung des Steigungskoeffizienten in Abb. 3-5a (Linie (1,1)) und 5b (Linie (1,4)) kann für eine zunehmende Tendenz des „Abbiegens“ des Blockgletschers sprechen (dem Koordinatensystem aus Abb. 3-1 entspricht eine nordwestliche Abbiegungsrichtung).

Ziel unserer Forschung war es, die Oberfläche des Gletschers durch eine analytische Funktion zu approximieren. Mit dem Vorliegen der analytischen Beschreibung einer Struktur können weitere Elemente aus dem Wertebereich dieser Struktur an beliebigen Stellen des Definitionsbereiches geschätzt bzw. interpoliert werden. In dieser Arbeit wird nun insbesondere der Interpolation von differential-geometrischen Größen in anisotropen, d.h richtungsabhängigen, Medien nachgegangen. Solche differential-geometrische Größen wie z.B. Surface Dilatation, Surface Maximum Shear Strain u.a. stellen so genannte „Größen 2. Ordnung“ der räumlich-zeitlichen Struktur einer Oberfläche dar, wie dies in unserem Fall durch das Vorliegen mehrerer zeitlicher Messepochen gegeben ist. Eine ausführliche und anspruchsvolle Diskussion der

entsprechenden Thematik kann Grafarend (2006), Grafarend, Krumm (2006) entnommen werden. Wie oben bereits angedeutet, lassen sich bei den Untersuchungen zudem anisotrope Eigenschaften des Mediums berücksichtigen.

In *Abschnitt 6.3* kann nun schließlich eine parametrische Darstellung der Blockgletscheroberfläche auf der Grundlage von Bezier-Splines vorgestellt werden. Die Deformationsanalyse von Reliefoberflächen mithilfe von Bezier-Splines erfolgt aus einem alternativen und in einem gewissen Sinn unkonventionellen Blickwinkel: Der Blockgletscher wird als komplettes Objekt aufgefasst, dessen Veränderungen mithilfe von koordinatenfreien, im CAD-Design üblichen Kategorien wie „vorderes Zungenprofil“, „die linke Kante des Gletschers“ usw. beschrieben werden können.

Wie man in Abb. 6-5 erkennen kann, glättet die Bezier-Fläche die wahren Höhenmessungen sehr stark. Dennoch soll hier betont werden, dass der Blockgletscher ein sehr „raues“ Untersuchungsobjekt ist: Man kann im Grunde genommen von keiner Oberfläche im gebräuchlichen Sinne des Wortes sprechen. Eine differential-geometrische Oberflächendeformationsanalyse wie aus Abschnitt 2 wird nun auf einer so genannten Trendoberfläche durchgeführt.

Der absolute mittlere Fehler der Approximation des Blockgletschers mittels Bezier-Splines liegt in unserem Fall bei ca. 5 m. Dieser Fehlerwert wurde dabei durch eine Gegenüberstellung linear interpolierter Werte und aus der Bezier-Fläche abgeleiteter Werte bestimmt.

Während der axiale mittlere Bereich des Gletschers beinahe krümmungsfrei verläuft, erweist sich der linke vordere Zungenbereich als nach oben hin konvex (konkav). Der etwas höher gelegene steile Teil des Gletschers rechts ist dabei nach unten hin konvex (konvex).

Die „Aktivität“ der Oberfläche des Gletschers ist entlang der longitudinalen Gletscherkanten am auffälligsten. Es besteht stets ein höheres Abrutschpotenzial für die Randblöcke, welches diese Aktivität erklären lässt. Die Gegenüberstellung von verschiedenen Epochen zeigt, dass sich diese Aktivität in den Jahren 1997 und 1998 auf die vordere linke Ecke konzentrierte, während sich in den Jahren 2003 und 2004 der mittlere linke sowie der rechte obere Randbereich eher veränderten. Die Gradientenuntersuchungen, siehe Abb. 6-8, zeigen den Unterschied der Neigung des Blockgletschers Reichenkar deutlich auf: Oben rechts befindet sich der steilste Abschnitt, während der Zungenbereich ziemlich flach ausfällt.

Nicht uninteressant ist die Untersuchung des Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren in Abb. 6-9a,b, die den partiellen Ableitungen nach u bzw. nach v der abgeleiteten Bezier-Fläche entsprechen. Die negativen Werte bedeuten, dass die Änderungen der Oberfläche in Richtung quer und entlang der Fortbewegung des Gletschers „gegenläufig“ sind: Der Winkel zwischen den oben genannten Vektoren ist dabei stumpf. Dagegen stehen positive Werte für die „Gleichläufigkeit“ dieser Änderungen (analog zu dem Vorzeichen eines Korrelationskoeffizienten). Diese Gleichläufigkeit kann das Monotonieverhalten der Oberfläche (steigend bzw. fallend in beiden Richtungen u und v) oder die Tendenz des Blockgletschers zum „Abbiegen“ widerspiegeln. Dem Koordinatensystem aus Abb. 3-1 entspricht dabei eine nordwestliche Abbiegungsrichtung.

In *Abschnitt 6.2* wird eine Analyse der Blockgletscheroberfläche auf der Grundlage von Wavelet-Splines vorgestellt, wobei insbesondere anisotrope Strukturen Berücksichtigung finden konnten. Für Epochen ab dem Jahr 2000 liegen beispielsweise Visualisierungen der Längen von Verschiebungsvektoren vor. Interessant ist hierbei die Änderung der Lage der Extremwerte dieser Vektorlänge im beobachteten Zeitraum. Eine plausible geowissenschaftliche Erklärung für diese Änderungen wäre insbesondere im Hinblick auf mögliche Zusammenhänge mit der entsprechenden Lage des Eiskerns von großem Interesse und ist daher Gegenstand weiterer Untersuchungen.

Mit Hilfe spezieller Splineflächendarstellungen ist es uns weiterhin gelungen, einen räumlich-zeitlichen statistischen Ausreißertest bzw. Test auf Abnormitäten in Geodaten zu entwickeln. Die Plausibilität dieses Tests konnte anhand einer Gegenüberstellung von vorhergesagten und tatsächlichen Messungen am Blockgletscher Reichenkar nachgewiesen werden, siehe *Abschnitt 6.4*. Das in *Kapitel 5* vorgestellte theoretische Modell wurde an einem konkreten Anwendungsbeispiel getestet. Die Annahme, dass in den Jahren 1997 bis 2003 keine Abnormitäten auftraten, konnte durch unseren Test bestätigt werden. Allerdings muss die Hypothese über das Vorliegen „ungestörter Daten“ im Jahr 2004 abgelehnt werden.

Das präsentierte Modell stellt eine anwendungsorientierte Ergänzung und in diesem Sinne auch eine Verallgemeinerung von klassischen Verfahren der räumlichen Statistik dar. Die Trenderfassung durch eine spezielle, lokal angepasste

Wellendarstellung erhöht dabei die Realitätsbezogenheit des entwickelten Verfahrens. Der in *Kapitel 5* eingeführte empirische Konfidenzbereich, der sich auf eine wiederholte Simulationen stützt, kann für weitere Anwendungen, insbesondere im Zusammenhang mit zeitlich-räumlichen, zufälligen Modellen, von Interesse sein. In diesem Fall sollten die in *Kapitel 5* eingeführten Annahmen projektbezogen angepasst bzw. verallgemeinert werden.

Eine später erfolgte Gegenüberstellung von Messungen am Reichenkar aus dem Jahr 2005 und der entsprechenden Vorhersagewerten (Extrapolation) mit dem beschriebenen Ansatz zeigt keine Steigungsänderung bei der linearen Regression der Amplituden auf. Dadurch wird obige Aussage bezüglich Datenabnormitäten im Jahr 2004 zusätzlich untermauert.

Die angesprochenen Schwierigkeiten bei der Datenerfassung und die damit verbundene Ungenauigkeit der Messwerte legen auf geradezu natürliche Art und Weise die Berücksichtigung von Verfahren und Methoden der Fuzzy-Theorie nahe. Im Gegensatz zur klassischen Statistik wird bei Fuzzy-Verfahren nicht von exakten (scharfen) Messwerten, sondern von unscharfen Daten ausgegangen. Mit dieser Arbeit gelingt es insbesondere, eine Erweiterung der wohlbekannten Fehlerfortpflanzung für solche unscharfe Daten herzuleiten.

Es sei hierzu auf *Abschnitt 6.5* verwiesen. Dort wurde die Fehlerfortpflanzung der „Unschärfe“ der ursprünglichen Messungen am Blockgletscher auf abgeleitete differential-geometrische Größen diskutiert. Die Verwendung von Konzepten aus der Fuzzy-Theorie stellt eine alternative und sinnvolle Ergänzung sowohl zu statistischen Verfahren der Genauigkeitskontrolle, als auch zum Fehlerfortpflanzungsgesetz bereit. Es sei daran erinnert, dass es bei vielen geowissenschaftlichen Anwendungen nicht nur darum geht, einen Wert für eine bestimmte Charakteristik herleiten zu können, sondern auch darum, die mit diesem Wert verbundene Güte nachfolgender Ergebnisinterpretationen quantifizieren zu können. Die Fuzzy-Theorie im obigen Sinne liefert ein bequemes Instrument für diesen Zweck.

Zur Vereinfachung wurde im erwähnten Abschnitt ausschließlich das Problem der „Maximalfehlerberechnung“ behandelt. D.h. es wurde auf die Herleitung der entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen der unscharfen Größen verzichtet. Grundlegende Schritte hierfür werden in der entsprechenden Literatur diskutiert. Unser Hauptinteresse galt und gilt insbesondere dem Ausmaß der „Unschärfe“. Ein Vorteil von Verfahren der Fuzzy-Theorie gegenüber „klassischen“ statistischen Methoden besteht in ihrem Verzicht auf einschränkende Verteilungsannahmen bezüglich Fehlergrößen. Zudem ist die Herleitung der Zugehörigkeitsfunktionen von abgeleiteten Größen einfacher als die Bestimmung ihrer Verteilungen. Letztendlich können somit auch heterogene Bereiche, d.h. Bereiche mit Messungen verschiedener Qualität bzw. Unschärfe, mit dem in dieser Arbeit präsentierten Verfahren problemlos modelliert und analysiert werden.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Unschärfe der räumlichen (x,y) -Koordinaten zu einer deutlichen – durchaus auch zu erwartenden - Zunahme der Breite der Unschärfe der betrachteten differential-geometrischen Größen führt, vgl. hierfür Abbildungen 6-17a-c und 6-21a-c, 6-18a-c und 6-22a-c und so weiter. Besonders ausgeprägt ist dieser Effekt für das Jahr 2004.

In *Abschnitt 6.6* wird schließlich ein weiteres Anwendungsgebiet für spezielle Analyseverfahren von raumbezogenen Daten präsentiert: Nun sind die oben bereits erwähnten Aufmerksamkeitslandschaften Untersuchungsgegenstand. Der Begriff „Aufmerksamkeitslandschaft“ ist außerhalb der Psychologie weitgehend unbekannt. Eine ausführliche und exakte Definition dieses Phänomens soll auch den entsprechenden Spezialisten überlassen werden. Aus mathematischer Sicht stellt eine Aufmerksamkeitslandschaft schlicht eine stetige Oberfläche dar, die den Häufigkeiten von Blickfixierungen der Augen entspricht. Diese Oberfläche besitzt einen vorgegebenen Definitionsbereich, der sich auf eine Bildebene beschränkt. Die Methoden zur Analyse solcher Oberflächen unterscheiden sich daher nicht signifikant von denen aus den Geowissenschaften. Zunächst sind die großen Datenmengen möglichst formgenau auszudünnen. Hierzu kann der spezielle Algorithmus aus *Abschnitt 2.4* herangezogen werden. Das ausgedünnte Gitter wird dann im zweiten Schritt durch Wavelet-Splines approximiert, um eine weitergehende Analyse zu ermöglichen. Eine ähnliche Vorgehensweise erfolgt auch in *Abschnitt 6.1* bei der Fallstudie „Kaiserberg“. Das primäre Ziel bestand darin, die Struktur des ursprünglichen DHMs für weitere Anwendungen nicht nur mit möglichst geringem Speicheraufwand und mit einer optimalen Genauigkeit zu erhalten, sondern auch eine differential-geometrische Analyse auf der Basis der abgeleiteten funktionalen Form des Reliefs durchführen zu können. Die „Qualität“ des vorgestellten sequentiellen Verfahrens wurde dabei schrittweise kontrolliert. Die ursprüngliche Ausdünnung führt im Ergebnis zunächst zu einer speziellen Wellenstruktur für das reale Georelief. Basierend auf dieser lässt sich nun eine Frequenzanalyse durchführen. Schließlich kann der Aufbau der Oberfläche, ausgehend von Makro- bis hin zu Mikrostrukturen, analysiert und verfolgt werden. Die Anwendung von gemischten Wavelet-Splines erhöht dabei die Genauigkeit der Approximation eines Reliefs.

Hier sollen nun nochmals einige wichtige Ergebnisse der Analyse von raumbezogenen psychologischen Daten kurz zusammengefasst werden. Wir betrachten zunächst Abb. 6-25a,b:

VP 5 zeigt ein – bezogen auf den Mittelwert - „breitflächigeres“ Interesse am Bild als VP 2. Die Aufmerksamkeit von VP 2 nimmt mit wachsenden Abständen schneller als bei VP 5 ab. Die mittlere Abweichung in der Aufmerksamkeit zwischen VP 2 und VP 5 ist für geringe bis mittlere Abstände am auffälligsten. Im „Randbereich des Bildes“ nehmen die Unterschiede in der Aufmerksamkeitsintensität ab. Beide Versuchspersonen weisen das gleiche Konzentrationsmaximum auf, das sich auf dem angebotenen Bild auf ein Frauengesicht bezieht. Die Ausdünnung des zu untersuchenden Gitters auf 17×17 – Punkte mit einer entsprechenden Approximation mittels polynomialer Wavelet-Splines (siehe Beispiel 2.4-3) führt zu einem geringen Qualitätsverlust verglichen mit den ursprünglich über 20 000 Punkten.

Nun sollen Abb. 6-26a,b und 6-27a,b näher betrachtet werden:

Zunächst ist die ausgeprägt diagonale Blickrichtung von VP 2 auffällig; insbesondere im Vergleich mit dem „klassischen“, zeilenweise ablaufenden Abtasten des Bildmaterials durch VP 5. Ein abstraktes Modell auf der Basis der mittleren Amplituden bildet die theoretische Vorstellung ab, dass die VP das ganze Bild mit einer konstanten, den mittleren Amplituden über alle lokalen Bereiche entsprechenden Aufmerksamkeit erfasst. Hier spielt wiederum die ausgeprägt diagonale Blickrichtungsführung von VP 2 im Gegensatz zu VP 5 eine Rolle.

Nun zu Abb. 6-28a,b:

Die Bereiche maximaler Frequenzen der Aufmerksamkeitsintensität im vorgelegten Bildmaterial beziehen sich bei beiden Versuchspersonen auf ein Frauengesicht.

Weitere Ergebnisse zur psychologisch-statistischen Analyse von Aufmerksamkeitslandschaften sind in *Kapitel 9* zu finden. Mithilfe von Verfahren der räumlichen Statistik und der Punktprozessentheorie lassen sich einige nützliche empirische Tests konstruieren. Diese Tests wurden nun nicht ausschließlich für sozial-psychologische Untersuchungen entwickelt, sondern stellen eine sinnvolle Ergänzung für herkömmliche multidimensionale statistische Verfahren dar. Sie sind besonders für den Fall geeignet, dass gewisse Testsannahmen „klassischer Tests“ für das vorliegende Datenmaterial nicht gewährleistet werden können.

In *Kapitel 7* werden zwei verschiedene Ansätze zur Georelief-Approximation vorgestellt und anhand einer Fallstudie verglichen. Das Testgebiet, ein Teil des Blockgletschers Reichenkar, weist starke „Unregelmäßigkeiten“ im Relief wie lokale Schwingungen auf, siehe Abb. 7-4. Gerade diese Eigenschaft macht die Gegenüberstellung beider Methoden besonders spannend, weil mit zunehmender Regelmäßigkeit eines Georeliefs ein geringerer Unterschied zwischen beiden Methoden bei fortschreitenden Gittererweiterungen zu erwarten ist. Es konnte nun gezeigt werden, dass die „die Anzahl der Koeffizienten reduzierende“, und dabei auf die Interpolationsforderung (7-3) verzichtende, klassische Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate bei der Erweiterung des Gitters etwas ungenauer als die Wavelet-Spline-Methode ist, die die Interpolationsforderung berücksichtigt. Es soll allerdings darauf verwiesen werden, dass bei einer Entscheidung zwischen beiden Methoden stets die konkrete, praktische Aufgabenstellung beachtet werden sollte.

In Yuanzhong und Litao (2005) wird ein ARMA-Modell zur Beschreibung, Analyse und Vorhersage von Dammdeformation präsentiert. In *Kapitel 8* schlagen wir nun weitere, verbesserte ARMA-Modelle vor. Beispielsweise ist es uns gelungen, die Genauigkeit der Vorhersage mit Hilfe dieser Modelle um annähernd 50% zu verbessern.

Aus den Tabellen 8-1 und 8-6 kann man ersehen, dass eine langfristige Prognose bzw. Vorhersage meist sinnlos ist. Dieser Fakt ist in der Approximationstheorie nicht neu. Viel sinnvoller wäre es daher, lediglich eine kurzfristige Vorhersage für den Monat $K = 30$ anhand der vorherigen Monaten 1 bis 29 zu erstellen. Mit zusätzlichen Informationen über Druck, Temperatur und Deformation für den Monat $K=30$ können neue Regressionsmodelle angepasst werden, bei denen nun die Monate 1 bis 30 berücksichtigt werden. Mit ihrer Hilfe erhält man dann die Vorhersage für den Zukunftsmonat $K=31$. Das Verfahren lässt sich entsprechend fortsetzen. Wegen zufälliger Schwankungen, die mit dem Parameter ε in (8-1) und (8-6) modelliert werden können, besitzt eine punkt-basierte Vorhersage eine geringere Aussagekraft als eineintervall-basierte Vorhersage.

Die Auswahl der Modelle 1-4 aus (8-1) bzw. (8-6) hängt in hohem Maße von der wahren Natur des Dammdeformationsprozesses ab und ist daher Experten zu überlassen.

Mit dieser Arbeit konnte somit deutlich gezeigt werden, dass zunächst überwiegend für geowissenschaftliche Anwendungen entwickelte Verfahren zur räumlich-zeitlichen Reliefsanalyse, auch einen Beitrag zur Lösung wichtiger Probleme in der Psychologie leisten können.

Die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren finden ihre Anwendung meist in der Blockgletscherforschung. Weitere Anwendungsgebiete der hier diskutierten Verfahren beziehen sich auf eine unkonventionelle statistische Analyse sozialpsychologischer Daten und auf spezielle ARMA-Vorhersagemodelle von Dammdeformationen. Eine genaue Beschreibung der mathematischen Modelle und des entsprechenden Datenmaterials kann den entsprechenden Kapiteln entnommen werden. Weitere Details können den beigefügten Kopien ausgewählter Veröffentlichungen entnommen werden.

Es kann sicherlich nicht bestritten werden, dass mittlerweile eine unüberschaubare Anzahl verschiedener Verfahren zur Analyse von raumbezogenen Daten vorliegt. Viele dieser Verfahren verdanken ihre Entwicklung konkreten praktischen Aufgabstellungen. Eine allgemein gültige Lösung für alle Approximationsprobleme kann und wird es wahrscheinlich nicht geben. Vielmehr sollte man stets die praktische Relevanz einer solchen Lösung im Auge behalten.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur Herleitung solcher praxisrelevanter Verfahren. Dies wird durch die Breite und Interdisziplinarität der diskutierten Fallstudien verdeutlicht.

Literatur

Die mit * gekennzeichneten Schriften der Autorin wurden in referenzierten Zeitschriften publiziert

Ackert, R. P. (1998). *A rock glacier/debris-covered glacier system at Galena Creek, Absaroka Mountains, Wyoming*. Geografiska Annaler 80, S. 267-276.

Alefeld, G., Herzberger, J. (1974). Einführung in die Intervallrechnung. Bibliograph. Institut, Mannheim.

Bandemer, H., S. Gottwald (1993). Einführung in die Fuzzy-Methoden. Akademie Verlag GmbH, Berlin, 1993.

Barsch, D. (1996). *Rockglaciers. Indicators for the Present and Former Geoecology in High Mountain Environments*. Springer-Verlag, Berlin.

Benedict, J. B., Benedict, R. J., und Sanville, D. (1986). *Arapaho Rock Glacier, FrontRange, Colorado, U.S.A.: A 25-year Resurvey*. Arctic and Alpine Research 18, S. 349-352.

Blair R.C., W. Karniski (1993). An alternative method for significance testing of waveform difference potential. *Psychophysiology*. 30, S. 518-524, 1993.

Bradley J.V. (1968). *Distribution-free statistical tests*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1968.

Calkin, P. E., Haworth, L. A., und Ellis, J. M. (1987). *Rock glaciers of Central Brooks Range, Alaska, U.S.A.* In "Rock Glaciers." (J. R. Giardino, J. F. S. Jr., and J. D. Vitek, Eds.), S. 65-82, London.

Chaix, A. (1919). *Coulées de blocs (rock-glacier, rock stream) dans le Parc National Suisse de la Basse-Engadine*. C. R. Séances Soc. Phys. Hist. Nat. Genève 36, S. 12-15.

Chaix, A. (1923). *Les coulées de blocs du Parc National Suisse d'Engadine (Note préliminaire)*. Le Globe 62, S. 1-35.

Chesi, G., Krainer, K., Mostler, W. und Weinold, T. (1999): *Bewegungsmessungen am aktiven Blockgletscher Inneres Reichenkar mit der GPS-Methode*. 10. Internationale Geodätische Woche Obergurgl 1999, S. 223-227.

Chesi, G., Geissler, S., Krainer, K., Mostler, W. und Weinold, T. (2003): *5 Jahre Bewegungsmessungen am aktiven Blockgletscher Inneres Reichenkar (westliche Stubai Alpen) mit der GPS-Methode*. In: Chesi, G. & Weinold, T. (Hrsg.), 12. Internationale Geodätische Woche Obergurgl 2003, S. 201-205, H. Wichmann-Verlag, Heidelberg.

Chui, C.K. (1992). *An Introduction to Wavelets*. Academic Press.

Clark, D. H., Clark, M. M., und Gillespie, A. R. (1994). *Debris-Covered Glaciers in the Sierra Nevada, California, and Their Implications for Snowline Reconstructions*. Quaternary Research 41, S. 139-153.

Clark, D. H., Steig, E. J., Potter, N., und Gillespie, A. R. (1998). *Genetic variability of rock glaciers*. Geografiska Annaler 80 A, S. 175-182.

Dierckx, P. (1993). *Curve and Surface Fitting with Splines*. Clarendon Press, Oxford, 1993.

Draper, N.R., H. Smith (1998): *Applied Regression Analysis*, Willey-Interscience.

Farin G. 1993: *Curves und Surfaces for CAGD: A practical guide*. 3rd Edition, Academic Press.

Fox, A.J.(1972). Outliers in time series. *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, 43 (3), S. 350-363.

- Gerhold, N. (1967). *Zur Glazialgeologie der westlichen Ötztaler Alpen*. Veröffentlichungen des Museum Ferdinandeum 47, S. 5-50.
- Gerhold, N. (1969). *Zur Glazialgeologie der westlichen Ötztaler Alpen unter besonderer Berücksichtigung des Blockgletscherproblems*. Veröffentlichungen des Museum Ferdinandeum 49, S. 45-78.
- Grafarend, E.W., B. Schaffrin (1993). *Ausgleichsrechnung in linearen Modellen*, Brockhaus, Mannheim, 1993.
- Grafarend, E.W. (2006). *Linear and nonlinear Models: fixed effects, random effects and mixed models*, Walter de Gruyter, Berlin, 2006.
- Grafarend, E.W., F.W. Krumm (2006). *Map Projections*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006.
- Guthrie D., J.S. Buchwald (1991). *Significance testing of difference potentials*. *Psychophysiology*. 28: 240-244, 1991.
- Haeberli, W. (1985). *Creep of mountain permafrost: Internal structure and flow of alpine rock glaciers*. *Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie ETH Zürich* 77, S. 1-142.
- Haeberli, W. (1989). *Glacier ice-cored rock glaciers in the Yukon Territory, Canada?* *Journal of Glaciology* 35, S. 294-295.
- Haeberli, W., Patzelt, G. (1982). *Permafrostkartierung im Gebiet der Hochebenkar-Blockgletscher, Obergurgl, Ötztaler Alpen*. *Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie* 18, S. 127-150.
- Humlum, O. (1996). *Origin of Rock Glaciers: Observations from Mellemfjord, Disko Island, Central West Greenland*. *Permafrost and Periglacial Processes* 7, S. 361-380.
- Johnson, P. G. (1978). *Rock glacier types and their drainage systems, Grizzly Creek, Yukon Territory*. *Canadian Journal of Earth Sciences* 15, S. 1496-1507.
- Johnson, P. G. (1980). *Glacier-rock glacier transition in the Southwest Yukon Territory, Canada*. *Arctic and Alpine Research* 12, S. 195-204.
- Kaleva, O. (1994). *Interpolation of fuzzy data*. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 61 (1994), S. 63-70.
- Kallenberg, O. (1986). *Random measures*. Academic Press, London, 1986.
- Karr, A.F. (1986). *Point processes and their statistical inference*. Marcel Dekker, New York, 1986.
- Kaufmann, V. (1996). *Der Dösener Blockgletscher - Studienkarten und Bewegungsmessungen*. *Arb. Inst. Geogr. Univ. Graz* 33, S. 141-162.
- Krainer, K., Mostler, W. (2000a). *Reichenkar Rock Glacier, a glacial derived debris-ice system in the Western Stubai Alps, Austria*. *Permafrost and Periglacial Processes* 11, S. 267-275.
- Krainer, K., Mostler, W. (2000b). *Aktive Blockgletscher als Transportsysteme für Schuttmassen im Hochgebirge: Der Reichenkar Blockgletscher in den westlichen Stubai Alpen*. *Geoforum Umhausen*, Bd. 1, 28-43, Innsbruck.
- Krainer, K., Mostler, W. (2001). *Der aktive Blockgletscher im Hinteren Langtal Kar, Gößnitz Tal (Schobergruppe, Nationalpark Hohe Tauern)*. *Wiss. Mitt. Nationalpark Hohe Tauern*, Bd. 6, S. 139-168.
- Krainer, K., Mostler, W. (2002). *Hydrology of active rock glaciers: Examples from the Austrian Alps*. *Arctic, Antarctic, and Alpine Research* 34(2), S. 142-149, Boulder.
- Krainer, K., Mostler, W., Span, N. (2003). *A glacier-derived, ice-cored rock glacier in the western Stubai Alps (Austria): Evidence from ice exposures and ground penetrating radar investigation*. *Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie*, 38, H.1, S. 21-34, Innsbruck.

- Krainer, K., Mostler, W. (2004). *Aufbau und Entstehung des aktiven Blockgletschers im Sulzkar, westliche Stubaier Alpen (Tirol)*. *Geo.Alp* 1, S. 37-55.
- Krainer K., W. Mostler (2004). *Aufbau und Entstehung des aktiven Blockgletschers im Sulzkar, westliche Stubaier Alpen (Tirol)*. *Geo.Alp* (1), S. 37-55.
- Lieb, G. K. (1996). *Permafrost und Blockgletscher in den östlichen österreichischen Alpen*. *Arb. Inst. Geogr. Univ. Graz* 33, S. 9-125.
- Lodwick, W.A., J. Santos (2003). *Constructing consistent fuzzy surfaces from fuzzy data*. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 135 (2003), S. 259-277.
- Niemeier, W. (2002). *Ausgleichsrechnung: eine Einführung für Studierende und Praktiker des Vermessungs- und Informationswesens*. Verlag de Gruyter, Berlin, New York.
- O'Brien P.C. (1984). Procedures for comparing samples with multiple endpoints. *Biometrics*. 40, S. 1079-1087, 1984.
- Outcalt, S. I., Benedict, J. B. (1965). *Photo interpretation of two types of rock glaciers in the Colorado front range, USA*. *Journal of Glaciology* 5, S. 849-856.
- Potter, N. (1972). *Ice-Cored Rock Glacier, Galena Creek, Northern Absaroka Mountains, Wyoming*. *Geological Society of America Bulletin* 83, S. 3025-3058.
- Potter, N., Steig, E. J., Clark, D. H., Speece, M. A., Clark, G. M., Updike, A. B. (1998). *Galena Creek rock glacier revisited - new observations on an old controversy*. *Geografiska Annaler* 80, S. 251-265.
- Reißmann, G. (1976). *Ausgleichsrechnung*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.
- Sawilowsky S.S., R.C. Blair (1992). A more realistic look at the robustness and Type II error properties of the t-test to departures from population normality. *Psychological Bulletin*. 111, S. 352-360, 1992.
- Schwarz, H. R. (1988). *Numerische Mathematik*. Verlag B.G. Teubner, Stuttgart.
- Sloan, V. F., Dyke, L. D. (1998). *Decadal and millennial velocities of rock glaciers, Selwyn Mountains, Canada*. *Geografiska Annaler* 80, S. 237-249.
- Stoyan D., H. Stoyan (1994). *Fractals, Random Shapes and Point Fields*. John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
- Vietoris, L. (1958). *Der Blockgletscher des äußeren Hohebenkars*. *Gurgler Berichte* 1, S. 41-45.
- Vietoris, L. (1972). *Über die Blockgletscher des Äußeren Hohebenkars*. *Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie* 8, S. 169-188.
- Vitek, J. D., Giardino, J. R. (1987). *Rock glaciers: a review of the knowledge base*. In: *Rock Glaciers*. (J. R. Giardino, J. F. S. Jr., and J. D. Vitek, Eds.), S. 1-26. Allen & Unwin, London.
- Voosoghi, B. (2000). *Intrinsic Deformation Analysis of the Earth Surface Based on 3-Dimensional Displacement Fields Derived From Space Geodetic Measurements*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- Wahrhaftig, C., Cox, A. (1959). *Rock glaciers in the Alaska Range*. *Geological Society of America Bulletin* 70, S. 383-436.
- Whalley, W. B., Azizi, F. (1994). *Rheological Models of Active Rock Glaciers: Evaluation, Critique and a Possible Test*. *Permafrost and Periglacial Processes* 5, S. 37-51.

- Whalley, W. B., Martin, H. E. (1992). *Rock glaciers II: models and mechanisms*. Progress in Physical Geography 16, S. 127-186.
- Whalley, W. B., Palmer, C., Hamilton, S., Gordon, J. (1994). *Ice exposures in rock glaciers*. Journal of Glaciology 40, S. 427-429.
- Whalley, W. B., Palmer, C. F. (1998). *A glacial interpretation for the origin and formation of the Marinets Rock Glacier, Alpes Maritimes, France*. Geografiska Annaler 80, S. 221-236.
- White, S. E. (1971). *Rock glacier studies in the Colorado Front Range, 1961 to 1968*. Arctic and Alpine Research 3, S. 43-64.
- White, S. E. (1976). *Rock Glaciers and Block Fields, Review and New Data*. Quaternary Research 6, S. 77-9.
- Wälder, O. (1999). Markierungen und Verdünnungen von Punktprozessen. *Dissertation*. Fakultät für Mathematik und Informatik, TU Bergakademie Freiberg (unveröffentlicht).
- Wälder O., K. Krainer, W. Mostler (2004). *Praktische Anwendung von speziellen Spline-Verfahren zur Gletscherkinematik am Beispiel eines aktiven Blockgletschers (Tirol)*. VGI (Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation), Heft 3+4/2004, S. 107-117.
- * Wälder, O., M. Buchroithner (2003). Eine Anwendung von Spline-Verfahren zur DTM Ausdünnung. PFG (Photogrammetrie-Fernerkundung-Geoinformation, reviewed), Heft 2, S. 99-104.
- * Wälder O., M. Buchroithner (2004). *A method for sequential thinning of digital raster terrain models*. PFG, Heft 3, S. 215-221.
- * Wälder O. (2005a). *Ein empirisches statistisches Verfahren zur Indikation der Datenabnormitäten mittels spezieller Wavelet-Splines*. AJS (Austrian Journal of Statistics), Vol. 34, Num. 3, S. 251-261.
- * Wälder O. (2005b). *A method for sequential thinning of digital raster terrain models II: mixed locally adaptive wavelet-splines and anisotropy*. PFG, Heft 2, S. 123-127.
- * Wälder, O. (2005c). *Eine Gegenüberstellung von Reliefapproximationen mithilfe von Verfahren der Ausgleichsrechnung und der Spline-Theorie*. PFG, Heft 4, S. 305-313.
- Wälder O. (2005d). *Die Anwendung von gemischten, lokal adaptiven Splines für statistische Reliefanalyse*. (rus.) In: Diskussionsbeiträge zur Kartensemiotik und zur Theorie der Kartographie. Hrsg. A. Wolodtschenko und H. Schlichtmann, 10 S., Dresden, 2005.
- Wälder, O. (2005e). *Oberflächendeformationsanalyse mithilfe von Bezier-Splines: Fallstudie Blockgletscher Reichenkar (Tirol)*. VGI, Heft 4/2005, S. 166-172.
- * Wälder, O. (2006). *Fortpflanzung der „Unschärfe“ von Messdaten auf abgeleitete differential-geometrische Größen*. PFG, Heft 6, S. 491-499.
- * Wälder O., M. Buchroithner (2006). *Statistical relief modelling with locally adaptive sequential wavelet-splines*. Cartographica, Vol. 41, Issue 3, S. 267-274.
- * Wälder, O. (2007a). *An application of the fuzzy theory in surface interpolation and surface deformation analysis*. FSS (Fuzzy Sets and Systems), Vol. 158, S. 1535-1545.
- * Wälder, O. (2007b). *Spezielle statistische Testverfahren und ihre Anwendung in sozial-psychologischen Untersuchungen*. AJS (Austrian Journal of Statistics), Vol. 36, Num. 2, S. 1-12.

Wälder, O. (2007c). *On analysis and forecasting of surface movement and deformation: Some AR-models and their application*. AVN (Allgemeine Vermessungs-Nachrichten), Heft 3/2007, S. 96-100.

Wolf, H. (1997): *Ausgleichsrechnung*. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.

Yuanzhong L., H. Litao (2005). *Multiple Recursion Forecast of Surface Movement and Deformation*. AVN (Allgemeine Vermessungs-Nachrichten), 3/2005, S. 88-92.