

Oliver Fabert

**Effiziente Wavelet Filterung
mit hoher Zeit-Frequenz-Auflösung**

München 2004

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Oliver Fabert

Effiziente Wavelet Filterung
mit hoher Zeit-Frequenz-Auflösung

München 2004

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Adresse des Herausgebers /
address of the publisher

Deutsche Geodätische Kommission

Marstallplatz 8
D – 80 539 München
Telefon +49 - (0)89 - 23 031 113
Telefax +49 - (0)89 - 23 031 - 283/ - 100
E-mail hornik@dgfi.badw.de
<http://dgk.badw.de>

Adressen der Autoren /
Addresses of the author

Oliver Fabert
Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut
Marstallplatz 8
D – 80539 München
e-mail: fabert@dgfi.badw.de

Oliver Fabert
Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität
Arbeitsgruppe Differentialgeometrie und Topologie
Theresienstraße 39
D – 80333 München

Diese Publikation ist als pdf-Dokument veröffentlicht im Internet unter der Adresse /
This volume is published in the internet

<http://dgk.badw.de>

© 2004 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Signale	5
1.2	Das Prinzip der Filterung	6
1.3	Allgemeines zur Signalanalyse	6
1.4	Die Wavelet-Transformation	7
1.5	Die Morlet-Transformation und ihre Vorteile	9
1.6	Die diskrete Wavelet-Transformation (DWT)	10
1.7	Morlet-Wavelet-Transformation der Polbewegung	11
2	Filterung mit dem Morlet-Wavelet	13
2.1	Allgemeine Forderungen an die Synthese	13
2.2	Die Methode der kleinsten Quadrate	14
2.3	Berechnung der Pseudo-Inversen	15
2.4	Das Neumann - Verfahren	16
2.5	Motivation zur Suche nach einer neuen Analyse-Transformation	16
3	Konstruktion eines geeigneten Signalanalyse-Verfahrens	17
3.1	Interpolation	17
3.2	Der À-trous-Algorithmus für die undezimierte DWT	18
3.3	Analyseeigenschaften und Forderungen an die Parameter ω_0 und L	20
3.4	Anpassung der Filterbank an die Filterungsbedürfnisse	22
3.5	Extraktion unerwünschter Zeit-Frequenz-Anteile und Wahl des Parameters M	28
3.6	Wahl des Parameters σ	30
3.7	Konstruktion der adjungierten Transformation A^*	31
3.8	Inverses Filterbankschema für A^*	32
3.9	Fehlerkontrolle der Synthese	33
3.10	Numerische Ergebnisse	34
4	Vergleich der vorgestellten Filterungstechnik mit anderen Verfahren	36
4.1	Das Standard-Filterungsverfahren mit dem Morlet-Wavelet	36
4.2	Diskussion der Vorteile	37
5	Extraktion der Chandler-Schwingung	38

Vorwort

Das Deutsche Geodätische Forschungsinstitut (DGFI) an der Bayerischen Akademie der Wissenschaften untersucht im Rahmen seiner Tätigkeit die zeitveränderliche Orientierung der Erde im inertialen Raum. Weil die Zeitreihen der Orientierungsparameter kein konstantes Spektrum besitzen, wurden zu ihrer Darstellung Wavelet-Funktionen gewählt.

Diese Arbeit ist im Jahr 2002 entstanden, weil damals zur Wavelet-Filterung von Zeitreihen zwar Analysesoftware reichlich vorhanden war, die entsprechenden Syntheseprogramme aber fehlten. Denn die Resultate der Analyseprogramme, die auf der diskreten Wavelet-Transformation beruhten, reichten für eine Rekonstruktion des Ausgangssignals nicht aus. Deshalb musste zur Synthese auch ein passender Analysealgorithmus entwickelt werden. Der mathematische Formelapparat dazu wird in diesem Band für den eindimensionalen (komplexen) Fall beschrieben. Die Arbeiten zur mehrdimensionalen, insbesondere sphärischen Wavelet-Darstellung und Filterung sind noch nicht abgeschlossen.

Diese Schrift soll für Geodäten und Mathematiker lesbar sein. Geodäten mögen daher verzeihen, dass geodätisches Grundwissen den Mathematikern erklärt wird; die Mathematiker hingegen dürfen Passagen überlesen, in denen ihnen selbstverständliche mathematische Grundlagen rekapituliert werden.

M.G.

Kapitel 1 Einführung

1.1 Signale

Ein eindimensionales, kontinuierliches **Signal** ist eine Funktion $s(t)$ mit Argument $t \in \mathbb{R}$ und Funktionswert in der Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen. Die Variable t wird in der Regel mit der Zeit identifiziert, kann aber auch als Lage eines Punktes auf einer beliebigen Raumkurve gedeutet werden [Schmidt 2001]. Diese Funktionen bilden einen Vektorraum über dem Körper \mathbb{C} , wenn die Summe von Funktionen und das Produkt mit einem Skalar definiert werden durch

$$(f+g)(t) := f(t) + g(t) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(t) := \lambda \cdot f(t)$$

Man sagt, dass $s(t)$ zum Funktionenraum $L_p = L_p(\mathbb{R})$ gehört, falls das Signal lokal, d.h. über jedem kompakten Intervall, integrierbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^p dt < \infty.^1$$

Diese Eigenschaft erlaubt es, durch

$$\|s\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

eine Norm auf L_p zu definieren. Die Norm gibt dem Funktionenraum L_p durch den Abstand $d(f, g) = \|f - g\|_p$ eine topologische Struktur, unter der jede Folge von Funktionen $f_n \in L_p$ mit gegen Null konvergierendem Abstand $d(f_{n+1}, f_n)$ gegen ein Element aus L_p konvergiert. Man sagt, L_p ist vollständig und ist ein Banachraum.

Für den Spezialfall $p = 2$ ist in L_2 , dem Raum der **quadratisch integrierbaren Funktionen**, ein inneres Produkt definiert,²

$$\langle x, y \rangle := \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{y(t)} dt$$

Für das so definierte Produkt sieht man leicht, dass

$$\langle s, s \rangle = \|s\|_2^2$$

gilt, womit die L_2 -Norm gleich der von dem inneren Produkt implizierten Norm ist. Zusammenfassend ist L_2 ein **Hilbertraum**, d.h. ein Vektorraum mit innerem Produkt, der abgeschlossen ist bezüglich der vom inneren Produkt induzierten Norm.

¹ Mathematisch korrekt ist die Definition von L_p als Quotientenraum, wodurch Funktionen, die "fast überall" gleich sind, nicht unterschieden werden. Für die numerische Anwendung ist dies irrelevant.

² Zum Beweis ist die Hölder'sche Ungleichung $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ mit $p = q = 2$ nötig.

1.2 Das Prinzip der Filterung

Physikalische Prozesse sind oft durch periodisch wiederkehrende Ereignisse gekennzeichnet, die sich in ihren messbaren Auswirkungen zu einem Signal überlagern. Jede einzelne Teilschwingung wird durch Periodendauer und Amplitude (Intensität) charakterisiert. Misst man eine physikalische Größe gegen die Zeit (Signal), so kann man in der Realität häufig nicht erkennen, aus welchen einzelnen Schwingungen das Signal zusammengesetzt ist. Möchte man einen dieser Signalanteile gezielt untersuchen oder gewisse Störkomponenten entfernen, so braucht man ein Verfahren, um unerwünschte Zeit-Frequenz-Anteile herauszufiltern.

Es bietet sich an, das Signal zunächst in all seine Zeit-Frequenz-Komponenten zu zerlegen (**Analyse**), um alles Unerwünschte gezielt entfernen zu können (**Filterung**), und dann aus den veränderten Komponenten das gefilterte Signal zu konstruieren (**Synthese**).

1.3 Allgemeines zur Signalanalyse

Das bekannteste mathematische Verfahren, zu einer beliebigen Periodendauer ein Maß für die Intensität zu finden, ist die **Fourier-Transformation**: Sei $s(t)$ ein beliebiges Signal aus $L_1(\mathbb{R})$, so ist die Fourier-Transformation $\mathcal{F}s(\omega)$ gegeben durch

$$\mathcal{F}s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} s(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Ein Problem ist die eindeutige Umkehrung der Fourier-Transformation: Mit einigen funktionalanalytischen Hilfsmitteln lässt sie sich zu einem Automorphismus (d.h. linear, stetig und eindeutig umkehrbar) auf dem Raum der temperierten Distributionen ausweiten, der neben allen L_p -Räumen auch die bekannte δ -Distribution enthält. Dabei ist jedoch zu beachten, dass obige Definition ihre Gültigkeit verliert [Walter 1970, Rudin 1973].

Die Fourier-Transformation überführt also ein Signal aus dem Zeitbereich in den von der Kreisfrequenz ω aufgespannten Frequenzbereich. Bei allen Vorteilen der Fourier-Transformation, die auch später in diesem Artikel benützt werden, hat sie doch einen entscheidenden Nachteil: Oftmals treten Signalkomponenten nämlich nicht mit zeitlich konstanter Intensität auf, zum Beispiel wenn ihre Ursache nur eine kurze Lebensdauer besitzt. Wie man sich leicht klarmacht, kann die Fourier-Transformation keine Aussagen über den zeitlichen Verlauf einer Frequenzkomponente machen.

Um zusätzlich eine zeitliche Lokalisierung zu ermöglichen, d.h. nur einen kleinen Zeitbereich um einen gewählten Zeitpunkt b zu betrachten, kann man das Signal $s(t)$ mit einer verschobenen "Fensterfunktion" $t \mapsto g(t-b)$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, multiplizieren [Schmidt 2001] und erhält so die **Fenster-Fourier-Transformation**

$$\mathcal{WF}s(b, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} s(t) \overline{g(t-b)} e^{-i\omega t} dt$$

Dabei ist $(t \mapsto s(t) \overline{g(t-b)}) \in L_1$ zu gewährleisten.

Der Begriff der (eindimensionalen) Fensterfunktion ist nicht eindeutig definiert. Anschaulich versteht man darunter eine Funktion, die bis auf einen "kleinen Bereich" von \mathbb{R} Werte "ungefähr gleich null" hat. Somit gehört jede Funktion f mit kompakten Träger $\text{supp } f \subset\subset \mathbb{R}$ dazu, aber

auch die Gauss'sche Glockenkurve. Als mathematisch korrektes Kriterium gilt die Endlichkeit der später eingeführten Fensterbreite.

Die Fenster-Fourier-Transformierte ist nun eine Funktion auf einem zweidimensionalen Phasenraum, der durch den Translationsparameter b und die Kreisfrequenz ω aufgespannt wird. Obwohl die Fenster-Fourier-Transformation die Fähigkeit zur zeitlichen Lokalisation besitzt, gibt es noch Verbesserungsmöglichkeiten. So erscheint sinnvoller, die Fensterbreite für niedrigere Frequenzen größer zu wählen, um eine gleichbleibende Anzahl von Schwingungen pro ausgeschnittenem Signalteil zu gewährleisten; dies ist aber bei einer Fensterfunktion wegen ihrer festen Breite nicht möglich [Schmidt 2001].

1.4 Die Wavelet-Transformation

Dieses Problem löst die **Wavelet-Transformation** [Daubechies 1992, Schmidt 2001]. Ein **Wavelet** ist eine komplexwertige Funktion $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, deren Fourier-Transformierte die **Zulässigkeitsbedingung**

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1.1)$$

erfüllt. $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ bedeutet

$$\|\psi\|_2 := \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt < \infty .$$

Die Zulässigkeitsbedingung impliziert unter anderem, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\psi(0) = 0 ,$$

also das Wavelet einen verschwindenden Mittelwert besitzt. Zuletzt wird aus praktischen Gründen gefordert, dass die Funktion sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich lokalisiert, d.h., dass sowohl die Funktion als auch ihre Fourier-Transformierte die Form einer Fensterfunktion aufweisen. Hat eine Funktion f die Form einer Fensterfunktion, so bietet es sich an, den **Zentralwert** $\mu(f)$ und den **Radius** $\sigma(f)$ des Fensters zu berechnen :

$$\text{Zentralwert : } \quad \mu(f) := \int_{\mathbb{R}} x p(f, x) dx$$

$$\text{Radius : } \quad \sigma(f) := \int_{\mathbb{R}} (x - \mu(f))^2 p(f, x) dx$$

$$\text{mit der Dichte } p(f, x) := \frac{|f(x)|^2}{\|f\|_2^2} .$$

Die Lokalisationseigenschaft des Wavelets im Zeitbereich ist also gegeben durch $\sigma(\psi) < \infty$, während die Lokalisierung im Frequenzbereich durch $\sigma(\mathcal{F}\psi) < \infty$ mathematisch formuliert werden kann. Desweiteren wird im folgenden davon ausgegangen, dass $\mu(\psi) = 0$ gilt, also das Wavelet um die Null herum zentriert ist.

Um nun das Signal in verschiedenen Zeit- und Frequenzfenstern zu analysieren, verwendet man skalierte und verschobene Versionen der (Mutter-) Waveletfunktion,

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1.2)$$

wobei a der **Skalierungsparameter** und b der **Translationsparameter** heißen.

Die **kontinuierliche Wavelet-Transformation** $\mathcal{W}\mathcal{T}s(a, b)$ eines quadratisch integrierbaren Signals $s \in L_2$ ist nun definiert als inneres Produkt zwischen s und diesen skalierten und verschobenen Versionen des Wavelets,

$$\mathcal{W}\mathcal{T}s(a, b) = \langle s, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} s(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (1.3)$$

Dabei erkennt man, dass der Waveletkoeffizient $\mathcal{W}\mathcal{T}s(a, b)$ nahezu ausschließlich Informationen über das Signal im Zeitfenster

$$[\mu(\psi_{a,b}) - \sigma(\psi_{a,b}), \mu(\psi_{a,b}) + \sigma(\psi_{a,b})] = [b - a\sigma(\psi), b + a\sigma(\psi)]$$

enthält, also der Parameter b die Rolle einer Zeitkoordinate spielt.

Betrachtet man andererseits die Transformation vom Frequenzbereich aus,

$$\mathcal{W}\mathcal{T}s(a, b) = \langle \mathcal{F}s, \mathcal{F}\psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}s(\omega) \overline{\mathcal{F}\psi_{a,b}(\omega)} d\omega ,$$

so offenbart sich auch die simultane Lokalisierung im Frequenzbereich. Aus Symmetriegründen enthält nämlich der Waveletkoeffizient $\mathcal{W}\mathcal{T}s(a, b)$ nur Informationen über das Signal im Frequenzbereich

$$\left[\mu(\mathcal{F}\psi_{a,b}) - \sigma(\mathcal{F}\psi_{a,b}), \mu(\mathcal{F}\psi_{a,b}) + \sigma(\mathcal{F}\psi_{a,b}) \right] = \left[\frac{\mu(\mathcal{F}\psi)}{a} - \frac{\sigma(\mathcal{F}\psi)}{a}, \frac{\mu(\mathcal{F}\psi)}{a} + \frac{\sigma(\mathcal{F}\psi)}{a} \right].$$

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass der Waveletkoeffizient $\mathcal{W}\mathcal{T}s(a, b)$ beschreibt, wie sich das Signal s um den Zeitpunkt b und im Frequenzbereich um $\mu(\mathcal{F}\psi)/a$ verhält, womit die Rolle des Skalierungsparameters a als Frequenzvariable offensichtlich ist.

Im Gegensatz zur oben beschriebenen Fenster-Fourier-Transformation erkennt man, dass nun die Breite des Zeitfensters proportional zum Parameter a , also umgekehrt proportional zur Hauptfrequenz $\mu(\mathcal{F}\psi_{a,b})$ von $\mathcal{W}\mathcal{T}s(a, b)$ ist. Es wächst also die Breite des Zeitfensters auf geeignete Weise mit den untersuchten Perioden mit, womit eine gleichbleibende Anzahl von Schwingungen im Fenster garantiert ist. Desweiteren sieht man, dass die Größe des Zeit-Frequenz-Fensters, definiert als Produkt der Breite des Zeitfensters mit der Breite des Frequenzfensters, unabhängig von a und b ist, also eine Wavelet-Invariante darstellt,

$$\sigma(\psi_{a,b}) \cdot \sigma(\mathcal{F}\psi_{a,b}) = a\sigma(\psi) \cdot \frac{\sigma(\mathcal{F}\psi)}{a} = \sigma(\psi) \cdot \sigma(\mathcal{F}\psi)$$

Sie stellt damit das entscheidende Kriterium für das Auflösungsvermögen der Zeit-Frequenz-Analyse eines Wavelets dar [Daubechies 1992, Schmidt 2001].

Seit Beginn der achtziger Jahre hat das Interesse an der Wavelet-Theorie sprunghaft zugenommen. Ihre Anwendungsgebiete sind heute neben der Signalverarbeitung z.B. die Datenkompression und die digitale Bildverarbeitung, sie wird aber auch zur Lösung von Differentialgleichungen und großen linearen Gleichungssystemen erfolgreich eingesetzt [Schmidt 2001].

1.5 Die Morlet-Transformation und ihre Vorteile

Die Wahl von $\psi(t)$ ist, wie gesehen, weder eindeutig noch beliebig. Ein bekanntes Wavelet ist die **Morlet-Funktion**

$$\psi_M(t) = e^{i\omega_0 t} \left(e^{-t^2/2\sigma^2} - \sqrt{2} e^{-\omega_0^2 \sigma^2/4} e^{-t^2/\sigma^2} \right),$$

die man normalerweise unter Vernachlässigung des zweiten Summanden auf die Form

$$\psi_M(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2\sigma^2} \quad (1.4)$$

bringt [Daubechies 1992, Schmidt 2001]. Man erkennt, dass sie durch Multiplikation einer periodischen Funktion mit einer Fensterfunktion, der Gauss-Funktion, entsteht, womit die Zeitlokalisierungseigenschaft offensichtlich ist. Für die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}\psi_M$ ergibt sich

$$\mathcal{F}\psi_M(\omega) = \sqrt{2\pi} \sigma e^{-(\omega-\omega_0)^2 \sigma^2/2}. \quad (1.5)$$

Es liegt also wieder eine Gauss-Funktion vor, womit sich die frequenzlokalisierende Eigenschaft offenbart; man beachte lediglich, dass $\sigma \neq 0$ gilt. Nach Berechnung von Zentralwerten und Radien findet man für das Zeit-Frequenz-Fenster bei fixiertem a, b :

$$\left[b - \frac{a\sigma}{\sqrt{2}}, b + \frac{a\sigma}{\sqrt{2}} \right] \times \left[\frac{\omega_0}{a} - \frac{1}{\sqrt{2}a\sigma}, \frac{\omega_0}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}a\sigma} \right] \quad (1.6)$$

Wie erwartet, erzeugen unterschiedliche Parameter σ bei festem a, b unterschiedliche Fenster: Während die Zentralwerte von Zeit und Frequenz, d.h. die Lage des Zeit-Frequenz-Fensters, gleich bleibt, ändern sich die Maße des Fensters. Mit wachsendem σ wird das Zeitfenster proportional breiter und das Frequenzfenster (umgekehrt proportional) schmaler, d.h. die Frequenzlokalisierung verbessert sich auf Kosten der Zeitlokalisierung.

Im Grenzfall $\sigma \rightarrow \infty$ überdeckt das Zeitfenster das ganze Signal, während das Frequenzfenster nur mehr einen Wert enthält – die Morlet-Transformation ist zur Fourier-Transformation entartet.

Es bleibt noch zu erwähnen, dass das ursprüngliche Morlet-Wavelet nur dann auf die vereinfachte Form (1.4) gebracht werden kann, wenn die Parameter ω_0 und σ gewisse Bedingungen erfüllen. Betrachtet man nämlich die Fourier-Transformierte der vereinfachten Morlet-Funktion,

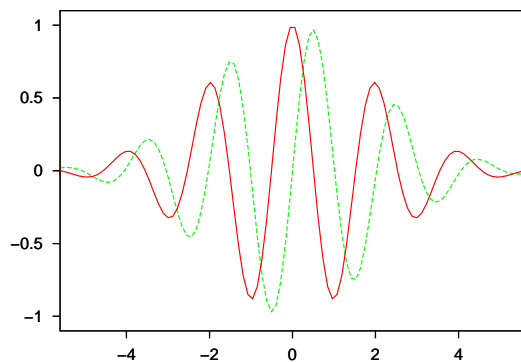


Abb. 1.1: Real- und Imaginärteil des Morlet-Wavelets im Zeitbereich

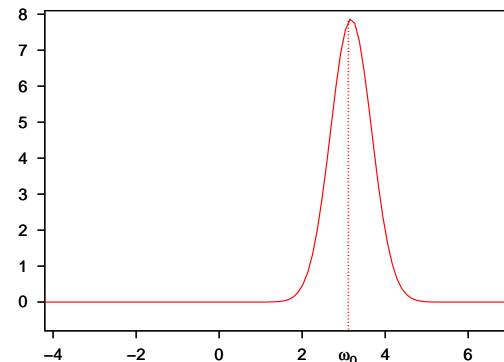


Abb. 1.2: Die Fourier-Transformierte des Morlet-Wavelets im Frequenzbereich

so erkennt man, dass

$$\mathcal{F}\psi_M(0) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\omega_0^2\sigma^2/2} \neq 0$$

also $\psi_M(t)$ kein Wavelet im Sinne der Definition ist, da die Zulässigkeitsbedingung $\mathcal{F}\psi(0) = 0$ verletzt ist. Da es jedoch für numerische Anwendungen bereits ausreicht, wenn $|\mathcal{F}\psi(0)| \ll 1$ gilt, können für eine geeignete Wahl von ω_0 und σ zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden. An der Formel für $\mathcal{F}\psi_M$ erkennt man, dass die Bedingung $|\omega_0| \gg \sigma^{-1}$ auf jeden Fall hinreichend ist. Da die Gauss'sche Glockenkurve jedoch hinreichend schnell abfällt, genügt es dafür zu sorgen, dass der Zentralwert der Glockenkurve größer als die dreifache Breite des Frequenzfensters ist, konkret

$$\omega_0 \geq 3 \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$$

Genauso wie unterschiedliche Parameter σ unterschiedliche Fenster generieren, so gilt dies natürlich erst recht für unterschiedliche Basis-Wavelet-Funktionen. Dabei lässt es sich zeigen, dass das Morlet-Wavelet (unabhängig von der Wahl von σ) die kleinstmögliche Größe eines Zeit-Frequenz-Fensters besitzt, also am besten lokalisiert. Dies geht aus der sogenannten **Unschärferelation** der Zeit-Frequenz-Analyse hervor, deren Namensgebung wegen der Verwandtschaft zur quantenphysikalischen (Heisenberg'schen) Unschärferelation nicht zufällig ist.

Desweiteren wurde gezeigt, dass man durch Variation von σ die Transformation der Bedeutung von Zeit- bzw. Frequenzlokalisierung angepasst werden kann. Nicht zuletzt ist das Morlet-Wavelet unendlich oft differenzierbar, was ebenfalls einen großen Vorteil darstellt. So präsentiert sich die Morlet-Transformation als bestes Mittel zur Signalanalyse mit optimaler Zeit-Frequenz-Auflösung!

1.6 Die diskrete Wavelet-Transformation (DWT)

In der praktischen Anwendung besteht das zu verändernde Signal nur aus endlich vielen Messdaten. Es soll vorausgesetzt werden, dass die Messungen in gleichen Zeitabständen erfolgt sind; andernfalls hilft eine Interpolation weiter. Repräsentativ für das Signal definiere man den Vektor s durch $s_n := n$ -ter Signalwert. Da es auch praktisch unmöglich ist, für jedes Paar von Skalierungs- und Verschiebungsparameter die Wavelet-Transformation zu berechnen, muss man eine Auswahl treffen, welche Werte man ausrechnen will. Es werden normalerweise zwei verschiedene Diskretisierungen verwendet [Daubechies 1992, Shensa 1992]:

In der Standardform, der **dezimierten DWT**, setzt man für die Skalierung a und die Verschiebung b

$$a = 2^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad b = 2^i n \quad (n = 1, \dots, \text{Anzahl der Signalwerte})$$

und definiert $w_{i,n} = \mathcal{WT}s(2^i, 2^i n)$. Da dieses Punktegitter meistens zu grob ist, unterteilt man die Skalierung durch $a = 2^{i+v/L}$ mit fest gewähltem $L \in \mathbb{N}$ und $v = 0, \dots, L-1$. Nun heißt i die **Oktave**, v die **Stimme** und L die Anzahl der Stimmen pro Oktave und man definiert

$$w_{i,n}^v = \mathcal{WT}s(2^{i+v/L}, 2^i n) \quad (1.7)$$

Unabhängig von diesen Verbesserungen bleibt die Diskretisierung des Verschiebungsparameters b sehr grob.

Eine wesentlich höhere Auflösung hat die **undezimierte DWT**, für die man setzen muss:

$$\left. \begin{array}{l} a = 2^{i+v/L} \quad (i = 0, 1, \dots, v = 0, \dots, L-1) \\ b = n \quad (n = 1, \dots, \text{Anzahl der Signalwerte}) \end{array} \right\} w_n^{i,v} := \mathcal{WTS}(2^{i+v/L}, n) \quad (1.8)$$

Dies zeigt auch die Umrechnungsformel zwischen beiden Transformationen: $w_{i,n}^v = w_{2^i n}^{i,v}$.

Um auch negative Skalierungen berücksichtigen zu können, stehe $w_{i,n}^{v,\pm}$ und $w_n^{i,v,\pm}$ für die entsprechende positive bzw. negative Skalierung.

1.7 Morlet-Wavelet-Transformation der Polbewegung

Nach der Einführung in die Theorie der Wavelet-Transformation, soll das Beschriebene an einem praktischen Beispiel illustriert werden.

Das International Terrestrial Reference Frame (ITRF) ist ein an die Erdkruste gebundenes Koordinatensystem, das z.B. durch Breitenkreise und Meridiane ausgedrückt werden kann. Sein Ursprung liegt im Mittel im Geozentrum, seine z -Achse durchstößt die Erdkruste am geographischen Nord- und Südpol, und seine x -Achse läuft durch den Meridian von Greenwich. Dieses Bezugssystem führt in einem raumfesten inertialen Koordinatensystem ziemlich periodische Bewegungen aus, deren Rotationsanteil für Geodäsie und Geophysik von höchstem Interesse ist. Diese Rotation wird in mehreren Stufen modelliert. Die erste Stufe beschreibt die Orientierung des erdfesten ITRF gegenüber einem raumfesten Koordinatensystem, dessen z -Achse mit einer mittleren Rotationsachse zusammenfällt. Die weiteren Stufen sind Nutation und Präzession dieser mittleren Rotationsachse.

Die Parameter der ersten Stufe sind drei Cardan'sche Winkel – gewöhnlich **Erdorientierungsparameter** genannt –, die vom Internationalen Erdrotationsdienst aus Messdaten bestimmt und als Zeitreihe mit mindestens täglicher Auflösung publiziert werden. Die ersten beiden dieser Cardan'schen Winkel beschreiben die Bewegung der geographischen Polachse des ITRF gegenüber der mittleren Rotationsachse; sie modellieren die sogenannte **Polbewegung** und werden deshalb x_{pol} und y_{pol} genannt. Der dritte Winkel ist der Rotationswinkel der Erde und beschreibt insbesondere die nicht konstante Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Er kann äquivalent durch die Differenz zwischen Sonnenzeit und Atomzeit ausgedrückt werden.

Untersucht man die IERS-Zeitreihe der Polbewegung im Frequenzbereich mittels einer Fourier-Transformation, so erkennt man, dass das Spektrum durch zwei Spitzen gekennzeichnet ist. Sie liegen im Bereich von 365 bzw. 430 Tagen und sind als Jahresschwingung bzw. Chandler-Schwingung bekannt (siehe Abb. 1.3). Da die Periode der Chandler-Schwingung und die Jahresperiode relativ nah beieinander liegen, wird eine hohe Auflösung im Frequenzbereich benötigt, um beide Anteile zu trennen. Weil die Breite des Frequenzfensters des Morlet-Wavelets umgekehrt proportional zum Parameter σ ist, führt die Trennungsanforderung unmittelbar auf eine untere Schranke σ_0 des Gestaltparameters σ . Auf der anderen Seite wird eine bestmögliche Zeitlokalisierung gewünscht, um das zeitveränderliche Verhalten von Amplitude und Hauptfrequenz so gut als möglich zu detektieren. Mithin muss σ so klein als möglich gewählt werden. Wählt man also $\sigma = \sigma_0$, so führt dies zu einer Trennung von Jahres- und Chandler-Schwingung mit der bestmöglichen Darstellung der Zeitabhängigkeit der Amplituden.

Das Signal für die Morlet-Wavelet-Transformation ist nun $s(t) = x_{\text{pol}}(t) - i y_{\text{pol}}(t)$. Das Ergebnis der Wavelet-Analyse wird als Skalogramm dargestellt. Dabei zeigt ein Wavelet-Skalogramm

die Energieverteilung $|W T s(a, b)|^2$ in Abhängigkeit von Skalierung a und Translation b . Das Morlet-Wavelet enthält zwei Parameter, ω_0 und σ . Wählt man $\omega_0 = 2\pi$, so entspricht der Betrag der Frequenzvariablen a der anschaulicheren Periode T einer Schwingung. Eine spezielle Eigenschaft des Morlet-Wavelets ist, dass Frequenzen $a > 0$ dem prograden Anteil und $a < 0$ dem retrograden Anteil der Polbewegung entsprechen. Die Polbewegung der Erde ist hauptsächlich prograd.

Abb. 1.3 zeigt das prograde ($a > 0$) Wavelet-Skalogramm der IERS-Zeitreihe der Polbewegung für unterschiedliche Parameter σ ; nebenstehend das zugehörige Morlet-Wavelet. Während man bei $\sigma = 20.0$ keinerlei Information über das Zeitverhalten der beiden Schwingungen erhält, so ist andererseits bei $\sigma = 1.0$ wegen zu geringer Frequenzauflösung keine Trennung der beiden Anteile möglich. Durch die Wahl verschiedener Parameter σ fanden wir $\sigma_0 = 3.0$.

Es sei bemerkt, dass die Morlet-Wavelet-Transformation bereits mehrfach erfolgreich auf die Zeitreihe der Polbewegung angewandt wurde [siehe Schmidt 2001.2; Schmidt und Schuh 2000; Schmitz-Hübsch und Schuh 1999].

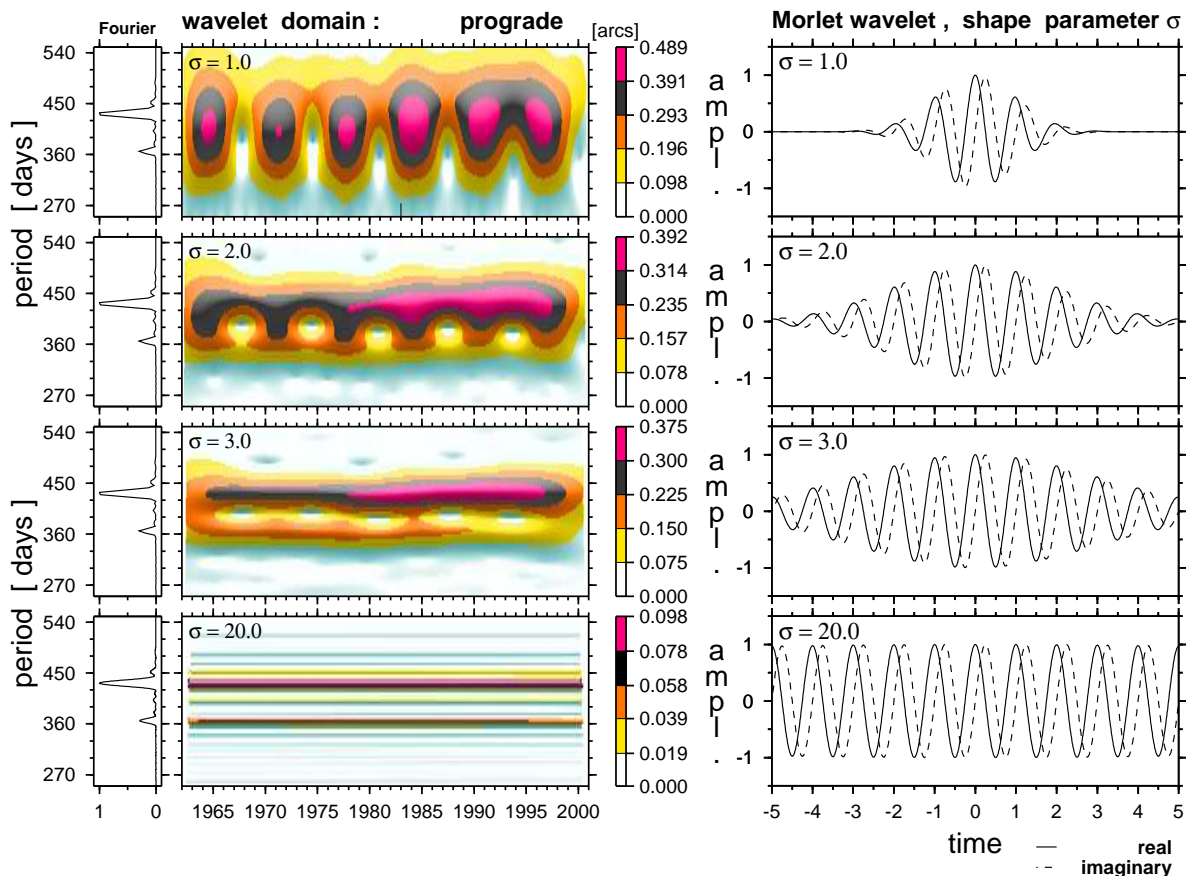


Abb. 1.3 : Wavelet-Skalogramm des prograden Anteils der IERS-Polbewegung für verschiedene Gestaltparameter und das zugehörige Morlet-Basiswavelet.

Kapitel 2 Filterung mit dem Morlet-Wavelet

Im Vergleich zur einfachen Bandpass-Filterung eines Signals, besteht die Filterung eines Signals mit Wavelets aus drei Schritten :

1. **Analyse** : Berechnung der Waveletkoeffizienten des Eingangesignals.
2. **Extraktion** : Modifikation der Koeffizienten, d.h. ausgewählte Koeffizienten werden zu Null gesetzt.
3. **Synthese** : Konstruktion des gefilterten Ausgabesignals aus dem modifizierten Koeffizientensatz.

Während eine geeignete Analyse in Form der Morlet-Wavelet-Transformation gefunden zu sein scheint, so muss noch nach einem geeigneten Syntheseverfahren gesucht werden.

2.1 Allgemeine Forderungen an die Synthese

Offensichtlich ist die Wavelet-Transformation eine (stetige) lineare Abbildung vom Raum der Signale in den Raum der Koeffizientensätze, sodass sie mit einer Matrix A (**Analyse**) identifiziert werden kann. Das neue Signal soll aus dem veränderten Koeffizientensatz durch Anwendung eines ebenfalls linearen Signalkonstruktionsverfahrens S (**Synthese**) gewonnen werden, an welches zwei unterschiedliche Forderungen gestellt werden können :

1. Analysiert man ein beliebiges Signal mit A und rekonstruiert es mit S wieder, so sollte man das Ausgangssignal erhalten, d.h.¹

$$(F1) \quad SA = \text{Id}$$

2. Konstruiert man aus dem gegebenen Koeffizientensatz mittels S ein Signal und analysiert es wieder mit A , so müssten sich die alten Koeffizienten ergeben, d.h.

$$(F2) \quad AS = \text{Id}$$

Man beachte, dass im Allgemeinen $SA \neq AS$ gilt, womit man sich für eine der beiden Forderungen an S entscheiden muss.

Es ist naheliegend, erst dann von der Konstruktion eines Signal aus einem gegebenen Koeffizientensatz zu sprechen, wenn das gewonnene Signal nach der Analyse den alten Koeffizientensatz liefert. Damit ist Forderung (F2) für unsere Problemstellung die richtige Wahl. Aus

¹ Die Komposition der Abbildungen entspricht dem Produkt SA der Matrizen. Id bezeichnet die identische Abbildung bzw. Einheitsmatrix.

einfachen Abbildungsregeln wird klar, dass A surjektiv sein muss, d.h. zu jedem Koeffizientensatz ein Signal existiert, welches nach Analyse diese Koeffizienten liefert. Dies ist jedoch nicht der Fall, was sich bereits dadurch erklären lässt, dass der Raum der Koeffizienten eine viel höhere Dimension hat als der Raum der Signale. Somit existiert keine Abbildung S , die die Forderung (F2) erfüllt.

Es geht nun darum, sie so gut als möglich anzunähern. Konkret bedeutet dies, dass für jeden Koeffizientensatz $w = (\mathcal{WT}s(a, b))_{a, b}$ der Fehler Δw , definiert durch

$$\Delta w := \|w - ASw\|,$$

minimiert werden soll. Dafür muss die Norm auf dem Raum der Koeffizientensätze noch festgelegt werden, also insbesondere existieren. Weil die kontinuierliche Wavelet-Transformation injektiv ist, kann sogar eine Norm gewählt werden, welche die Transformation **isometrisch**, d.h. normerhaltend macht. Die Betrachtung der Wavelet-Transformation im Frequenzbereich führt hierbei auf das Skalarprodukt und die gesuchte Norm im Raum der Koeffizientensätze:

$$\|s\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{WT}s(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2} =: \|w\|^2. \quad (2.1)$$

Diese Norm wird erzeugt vom Skalarprodukt

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{WT}s_1(a, b) \overline{\mathcal{WT}s_2(a, b)} \frac{da db}{a^2} =: \langle w_1, w_2 \rangle.$$

2.2 Die Methode der kleinsten Quadrate

Es sei w ein beliebiger Koeffizientensatz. Aus einer einfachen geometrischen Überlegung folgt, dass $\|w - ASw\|$ genau dann minimal ist, wenn $w - ASw$ auf ASw senkrecht steht, also

$$\langle w - ASw, ASw \rangle = 0$$

gilt. Mit der **adjungierten** Abbildung² A^* von A folgt daraus die äquivalente Forderung

$$\langle A^*(w - ASw), Sw \rangle = 0$$

Sie ist offenbar erfüllt, wenn gilt

$$A^*(w - ASw) = 0 \quad \iff \quad A^*ASw = A^*w.$$

Aus einfachen Abbildungsgesetzen folgt, dass die Injektivität von A garantiert, dass A^*A bijektiv ist, also invertiert werden kann. Somit findet man

$$Sw = (A^*A)^{-1}A^*w$$

und damit die gesuchte Synthese:

$$S := (A^*A)^{-1}A^* \quad (2.2)$$

² Für stetige lineare Operatoren $A: X \rightarrow Y$ zwischen Hilberträumen X, Y ist die adjungierte Abbildung $A^*: Y \rightarrow X$ definiert durch $\langle x, A^*y \rangle_X = \langle Ax, y \rangle_Y$. Sie ist eindeutig, stetig, linear und $\|A^*\| = \|A\|$.

2.3 Berechnung der Pseudo-Inversen

Wie oben beschrieben, ist die gesuchte Synthese durch die Pseudo-Inverse der Analyse gegeben. Im Falle der kontinuierlichen Wavelet-Transformation ist deren Berechnung relativ einfach, da in diesem Fall

$$A^*A = \text{Id} ,$$

also die Synthese direkt durch die adjungierte Abbildung zu A gegeben ist,

$$S = A^* .$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass die Norm auf dem Raum der Koeffizientensätze gerade so gewählt wurde, dass A isometrisch, also unitär ist. Dabei ist die adjungierte A^* gegeben durch [Daubechies 1992]

$$(A^*w)(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{WT} s(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} ,$$

die wegen $A^* = A^{-1}$ als inverse Wavelet-Transformation (mit dem Doppelintegral) bezeichnet wird.

In der Praxis ist man jedoch mit dem Problem konfrontiert, nur endlich viele Waveletkoeffizienten berechnen zu können, also den Zeit-Frequenz-Bereich, zu diskretisieren, wie es im letzten Kapitel als undezimierte diskrete Wavelet-Transformation beschrieben wurde. Bezeichnet man mit A nun die restringierte Wavelet-Transformation und führt eine sinnvolle Norm auf dem Raum der Koeffizientensätze durch Diskretisierung von (2.1) ein [Shensa 1993],

$$\|w\|^2 = \frac{\ln 2}{C_\psi L} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{v,\pm} \frac{1}{2^{i+v/L}} \sum_n |\mathcal{WT} s(\pm 2^{i+v/L}, n)|^2 \quad (2.3)$$

so gilt für die sich ergebende adjungierte Abbildung zu A

$$(A^*w)(t) = \frac{\ln 2}{C_\psi L} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{v,\pm} \frac{1}{2^{i+v/L}} \sum_n \mathcal{WT} s(\pm 2^{i+v/L}, n) \psi_{2^{i+v/L}, n}(t) , \quad (2.4)$$

womit A^* der Diskretisierung der Doppelintegral-Inversen entspricht. Man beachte, dass nun A nicht mehr unitär ist, sondern nurmehr

$$A^*A \approx \text{Id}$$

gilt und damit die Synthese S nur angenähert durch A^* , das diskretisierte Doppelintegral der inversen Wavelettransformation, gegeben ist.

Es wird also notwendig werden, für die Synthese die Inverse zu A^*A zu bestimmen. Die **direkte** Berechnung von $(A^*A)^{-1}$ ist viel zu aufwändig, weil die diskretisierte lineare Abbildung A einer sehr großen Matrix entspricht. Doch der Umstand, dass A^*A noch eine Approximation der Identität darstellt, ermöglicht die **iterative** Berechnung der Inversen, zum Beispiel durch das Neumann-Verfahren.

2.4 Das Neumann - Verfahren

Der Grundgedanke des Neumann-Verfahrens kann leicht am Invertieren einer beliebigen reellen oder komplexen Zahl x erläutert werden :

Da die geometrische Reihe eines beliebigen q mit $|q| < 1$ bekanntlich gegen $(1-q)^{-1}$ konvergiert, erhält man nach der Substitution $q := 1-x$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k = (1 - (1-x))^{-1} = x^{-1}$$

Das Invertieren kann also mit dem relativ einfachen Aufaddieren von Potenzen erreicht werden, wobei die Auswahl von x durch $|1-x| < 1$ zunächst noch eingeschränkt ist. Führt man jedoch einen Konvergenzparameter $\mu > 0$ ein, der so gewählt wird, dass

$$|1 - \mu x| < 1$$

gilt und ersetzt x in obiger Gleichung durch μx , so erhält man das Inverse für μx und nach Multiplikation mit μ schließlich x^{-1} .

Analoges gilt nach Neumann für lineare Operatoren Q :

$$Q^{-1} = \mu \sum_{k=0}^{\infty} (\text{Id} - \mu Q)^k$$

wobei μ nun so gewählt ist, dass die Norm von $\text{Id} - \mu Q$ kleiner 1 ist. Wählt man also $Q = A^*A$, so gilt für die Synthese

$$S = \mu \sum_{k=0}^{\infty} (\text{Id} - \mu A^*A)^k A^*$$

2.5 Motivation zur Suche nach einer neuen Analyse-Transformation

Da, wie beschrieben, $A^*A \approx \text{Id}$, also

$$\|\text{Id} - A^*A\| \ll 1$$

gilt, führt die Wahl $\mu = 1$ auf die besten Ergebnisse und es ist zu erwarten, dass die Reihe hinreichend schnell konvergiert. Mithin stellt die Neumann-Reihe einen optimalen Weg zur Berechnung der Synthese dar.

Dennoch verlangt die Anwendung des Neumann-Verfahrens eine mehrfache Anwendung von Analyse A und deren adjungierter Abbildung A^* . Wie weit die Reihe bei vorgegebener Rechenzeit ausgewertet werden kann, hängt also deutlich von der Effizienz der Analyse-Transformation sowie deren Adjungierten ab.

Dies motivierte zu der Suche nach einem Verfahren, welches einerseits, wo gefordert, eine hinreichende Zeit- und Frequenz-Auflösung mit dem Morlet-Wavelet bietet, aber andererseits dies mit hoher numerischer Effizienz verbindet. Es ist bekannt, dass diese Effizienz dann gegeben ist, wenn sich die Transformation in Form einer Filterbank formulieren lässt. Durch Modifikation des sogenannten **À-trous-Algorithmus** von Holschneider kann man ein Signalanalyseverfahren konstruieren, welches die gewünschten Eigenschaften aufweist.

Kapitel 3 Konstruktion eines geeigneten Signalanalyse-Verfahrens

Wir werden uns zunächst mit dem $\hat{\mathbf{A}}$ -trous-Algorithmus an sich beschäftigen. Seine Grundidee besteht darin, die Waveletfunktionen für die verschiedenen Oktaven nicht explizit zu berechnen, sondern geeignet zu approximieren; geeignet in dem Sinne, dass das Wavelet für die Oktave $i+1$ aus dem Wavelet der Oktave i durch Anwendung eines Interpolationsfilters berechnet werden kann. Es wird gezeigt, dass dieser Ansatz direkt auf eine Filterbankstruktur führt [Shensa 1992].

3.1 Interpolation

Der erste Teil der Konstruktion besteht darin, eine Operation zu entwickeln, um aus den Werten einer Funktion $x(t)$ für ganzzahlige Argumente t die gestauchte Funktion $x(t/2)$ für ganzzahlige t in guter Näherung zu erhalten. Weil der Wechsel von der i -ten zur $(i+1)$ -ten Oktave genau dieser Stauchung entspricht, reicht es aus, die Wavelet-Funktion allein mit den Skalierungen $0 \pm 2^{v/L}$ ($v = 0, \dots, L-1$) auszurechnen.

Die Funktion $x(t)$ werde repräsentiert durch den Vektor $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit den Komponenten $x_n := x(n)$. Zuerst wird der Vektor aufgeweitet, d.h. zwischen je zwei Komponenten eine Null eingefügt; diese lineare Abbildung entspricht einer Matrix D mit den Einträgen

$$D_{n,m} = \delta(2m-n).$$

Damit gilt

$$(Dx)_{2n} = x_n, \quad (Dx)_{2n+1} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (3.1)$$

Nun sollen die neu gewonnenen Plätze $(Dx)_{2n+1}$ mit geeigneten Werten belegt werden, damit dann der n -te Eintrag $(Dx)_n$ eine gute Näherung von $x(n/2)$ darstellt. Zusätzlich soll der ganze Vektor mit $1/\sqrt{2}$ skaliert werden. Dies leisten sogenannte **$\hat{\mathbf{A}}$ -trous-Filter** f , die in höchster Allgemeinheit durch

$$f_{2k} = \delta(k)/\sqrt{2}, \quad f_{2k+1} = \text{beliebig}$$

definiert sind, wobei f durch Faltung mit dem aufgeweiteten Vektor Dx verknüpft wird:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} x\left(\frac{m}{2}\right) \approx [f * (Dx)]_m = \sum_n f_{m-n} (Dx)_n \stackrel{(3.1)}{=} \sum_n f_{m-2n} x_n.$$

Eine spezielle Klasse solcher \hat{A} -trous-Filter sind die **Lagrange'schen Interpolationsfilter**, die für Polynome bis zu einem beliebig wählbaren ungeraden Grad N exakt sind und damit sehr gut interpretierbar sind. Sei N fest gewählt. Die Komponenten von f mit ungeradem Index sind wie folgt definiert (siehe [Shensa 1992]):

$$f_{2k-1} = f_{-2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{i \neq k} \frac{\frac{1}{2} - i}{k - i} \quad \text{für } -\frac{N+1}{2} + 1 \leq i, k \leq \frac{N+1}{2}.$$

3.2 Der \hat{A} -trous-Algorithmus für die undezimierte DWT

Der Interpolationsfilter $f * D$ wird nun auf unsere Problemstellung angewandt, indem für den beliebigen Vektor x das diskretisierte Wavelet der Oktave i eingesetzt wird.

Die Waveletkoeffizienten der undezimierten DWT mit Skalierungsparameter $a = \pm 2^{i+v/L}$ und Translationsparameter $b = n$ waren nach Abschnitt 1.6 gegeben durch

$$w_n^{i,v,\pm} = \mathcal{WTS}(\pm 2^{i+v/L}, n) \stackrel{(1.3)}{=} \int_{\mathbb{R}} s(t) \overline{\psi}_{\pm 2^{i+v/L}, n}(t) dt,$$

wobei $\overline{\psi}(t)$ für $\overline{\psi}(t)$ geschrieben wird. Da das Signal s aus diskreten Werten $s_m = s(m)$ besteht, ersetzt man zur Berechnung der Waveletkoeffizienten das Integral durch eine Summe und erhält mit (1.2)

$$\mathcal{WTS}(\pm 2^{i+v/L}, n) \approx \frac{1}{\sqrt{2^{i+v/L}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} s_m \overline{\psi}\left(\frac{m-n}{\pm 2^{i+v/L}}\right) =: w_n^{i,v,\pm}. \quad (3.2)$$

Wir betrachten im weiteren diese Summe als Neudefinition der (diskreten) Waveletkoeffizienten $w_n^{i,v,\pm}$. Die Summe kann gelesen werden als Faltung von s mit einem Vektor $g^{i,v,\pm} = (g_k^{i,v,\pm})_{k \in \mathbb{Z}}$, definiert durch

$$g_k^{i,v,\pm} := \frac{1}{\sqrt{2^{i+v/L}}} \overline{\psi}\left(\frac{-k}{\pm 2^{i+v/L}}\right).$$

Mit $k = n - m$ erhält man für (3.2)

$$w_n^{i,v,\pm} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} s_m g_{n-m}^{i,v,\pm} = \left[g^{i,v,\pm} * s \right]_n, \quad \text{also} \quad w^{i,v,\pm} = g^{i,v,\pm} * s.$$

Die fundamentale Formel des \hat{A} -trous-Algorithmus mit dem Aufweitungsoperator D und einem beliebigen \hat{A} -trous-Filter f ist nun gegeben durch

$$g^{i,v,\pm} = D^i g^{0,v,\pm} * \prod_{j=0}^{i-1} D^j f \quad (3.3)$$

Sie wird dann in die letzte Formel für die Waveletkoeffizienten eingesetzt und führt auf eine Filterbankstruktur. Definiert man nämlich Restsignale s^i durch

$$s^i = \prod_{j=0}^{i-1} D^j f * s$$

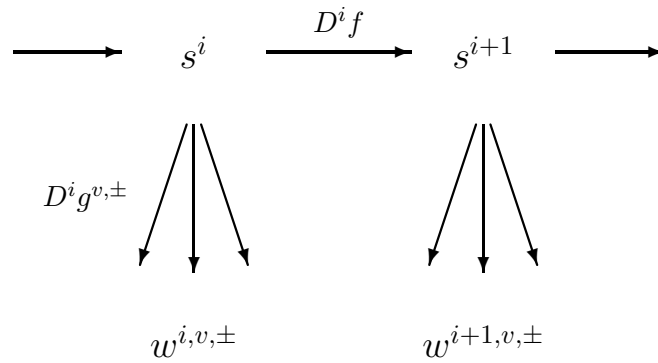
so erhält man

$$w^{i,v,\pm} = D^i g^{0,v,\pm} * \prod_{j=0}^{i-1} D^j f * s = D^i g^{0,v,\pm} * s^i$$

Dies wiederum führt in natürlicher Weise auf folgende Filterbank :

$$\begin{aligned} \text{Startbedingung:} \quad & s^0 = s \\ \text{Iterationsschritt:} \quad & w^{i,v,\pm} = D^i g^{0,v,\pm} * s^i, \quad s^{i+1} = D^i f * s^i \\ & \text{für } i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Man erkennt, dass die Waveletfunktion nur für jede einzelne Stimme v explizit ausgewertet werden muss, und die Auswertung für verschiedene Oktaven durch Interpolation erledigt wird. Setze im folgenden $g^{v,\pm} := g^{0,v,\pm}$.



Nun zum Beweis der fundamentalen Formel (3.3), welcher mittels vollständiger Induktion über die Oktaven i erledigt wird.

1. Induktionsanfang $i = 0$:

$$g^{0,v,\pm} = D^0 g^{0,v,\pm} * \prod_{j=0}^{-1} D^j f$$

2. Induktionsschritt $i \rightarrow i + 1$:

$$\begin{aligned} g^{i+1,v,\pm} &= f * D g^{i,v,\pm} = f * D \left(D^i g^{0,v,\pm} * \prod_{j=0}^{i-1} D^j f \right) \\ &= f * D^{i+1} g^{0,v,\pm} * \prod_{j=1}^i D^j f \\ &= D^{i+1} g^{0,v,\pm} * \prod_{j=0}^i D^j f \end{aligned}$$

Dabei wurde in der zweiten Zeile der Zusammenhang für die Oktave i als Induktionsvoraussetzung eingesetzt, mit der Matrix D durchmultipliziert und zuletzt der Interpolationsfilter f wegen der Kommutativität der Faltung in das hintere Faltungsprodukt integriert.

Dies ist der À-trous-Algorithmus, der von M. Holschneider [Holschneider 1988] zur effizienten Berechnung der Wavelettransformation bei diskretisierten Signalen entwickelt und von M. J. Shensa [Shensa 1992] weiter untersucht wurde.

3.3 Analyseeigenschaften und Forderungen an die Parameter ω_0 und L

Im folgenden wird die Filterbank im Frequenzbereich untersucht. Es wird sich zeigen, dass der Interpolationsfilter die Eigenschaft eines Tiefpassfilters besitzt. Als Wavelet wird nun konkret das Morlet-Wavelet eingesetzt und dabei, abhängig vom Gestaltparameter σ , die Anzahl der notwendigen Stimmen L sowie die Bedingungen an die Hauptfrequenz ω_0 näher untersucht. Wegen der Diskretisierung genügt es, sich auf das Frequenzintervall $[-\pi, +\pi]$ zu beschränken.

Berechnet man die Fourier-Transformierte des Morlet-Wavelets mit Parameter σ , so findet man gemäß der Einführung (1.5)

$$\mathcal{F}\psi_M(\omega) = \sigma e^{-\sigma^2(\omega-\omega_0)^2/2}.$$

Dabei sei davon ausgegangen, dass die Parameter ω_0 und σ untereinander die Bedingung

$$\omega_0 \geq \frac{3}{\sqrt{2}\sigma}$$

erfüllen, so dass das Morlet-Wavelet, wie in der Einführung beschrieben, vereinfacht werden kann. Es liegt mithin eine verschobene und gestreckte Gauß-Funktion vor. Da $\overline{\psi_M(-n)}$ die gleiche Fourier-Transformierte wie $\psi_M(n)$ besitzt, erhält man

$$\mathcal{F}g^{v,\pm}(\omega) \approx \mathcal{F}(\psi_M)(\pm 2^{v/L}\omega)$$

Wegen der Diskretisierung kann keinesfalls von Gleichheit ausgegangen werden. Darauf wird später noch ausführlich eingegangen. Für die folgenden Betrachtungen genügt es zu wissen, dass $\mathcal{F}g^{v,\pm}$ eine Fensterfunktion mit gleicher Hauptfrequenz $\pm\omega_0/2^{v/L}$ und etwas größerer Breite $\geq \sqrt{2}/2^{v/L}\sigma$ ist, was unmittelbar aus der Unschärferelation folgt.

Berechnet man andererseits die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}f$ des Interpolationsfilters f , so zeigt sich, dass $\mathcal{F}f$ auch die Form einer Fensterfunktion besitzt, deren Ränder ungefähr bei $-\pi/2$ und $+\pi/2$ liegen (siehe Abbildung 3.1) [Mertins 2000]. Da eine Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich einer Multiplikation im Frequenzbereich entspricht, gilt für die Fourier-Transformierte des ersten Restsignals

$$\mathcal{F}(s^1)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \mathcal{F}(s^0)(\omega)$$

Das Restsignal s^1 enthält also den Frequenzbereich $[-\pi/2, +\pi/2]$ des Signals s [Shensa 1992]. Die Informationen über die Frequenzen in $[-\pi, -\pi/2]$ und $[+\pi/2, +\pi]$ sollten damit in die Waveletkoeffizienten $w^{1,v,\pm}$ einfließen. Dies ist wegen

$$\mathcal{F}(w^{0,v,\pm})(\omega) = \mathcal{F}(g^{v,\pm})(\omega) \mathcal{F}(s^0)(\omega)$$

genau dann der Fall, wenn alle Fenster der $(g^{v,\pm})_{v,\pm}$ zusammengenommen die beiden Randbereiche überdecken. Aus Symmetriegründen überdecken dann die $(g^{v,+})_v$ das eine und die

$(g^{v,-})_v$ das andere Intervall; o.E. seien die positiven Skalierungen für das positive Intervall zuständig.

Es ist offensichtlich, dass eine ausschließliche Überdeckung der Randbereiche mit Waveletfenstern verlangt, dass die Breite der Frequenzfenster der Wavelets hinreichend klein ist. Dies wiederum führt auf eine untere Schranke für σ , da die Breite des Fensters höchstens $\pi/2$ sein darf. Konkret bedeutet dies

$$\sigma \geq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 1$$

Da die Beträge der Hauptfrequenzen der $(g^{v,\pm})_{v,\pm}$ mit wachsendem v abnehmen, muss das Fenster von $g^{0,+}$ am oberen Rand von $[\pi/2, \pi]$ liegen. Dies kann durch Anpassen des Parameters ω_0 des Morlet-Wavelets erreicht werden, da sein Frequenzfenster für $a = 2^0$ nach (1.6) durch $[\omega_0 - 1/\sqrt{2}\sigma, \omega_0 + 1/\sqrt{2}\sigma]$ gegeben ist. Um zu garantieren, dass das Frequenzfenster von $g^{0,+}$ nicht rechts über $[\pi/2, \pi]$ hinausreicht, muss die Bedingung

$$\omega_0 \leq \pi - \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$$

erfüllt sein. Eine grobe Abschätzung, die garantiert, dass nicht sogar schon die Hauptfrequenzen von $g^{0,+}$ und $g^{0,-}$ in $[-\pi/2, +\pi/2]$ liegen, ist

$$\omega_0 > \frac{\pi}{2}.$$

Da die Breiten der einzelnen Fenster umgekehrt proportional zum gewählten σ sind, ist die Anzahl der benötigten Fenster, d.h. der benötigten Indices v , proportional zu σ , wodurch die Anzahl der Stimmen pro Oktave festgelegt wird. Konkret ist die minimale Fensterbreite durch $\sqrt{2}/2\sigma$ gegeben, da die Fensterbreite des Wavelets für die Oktave 0 und Stimme v durch $\sqrt{2}/2^{v/L}\sigma$ gegeben ist. Man erhält also als Bedingung an L

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sigma} L \geq \frac{\pi}{2}, \quad \text{also} \quad L \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sigma \approx \frac{\sigma}{2}.$$

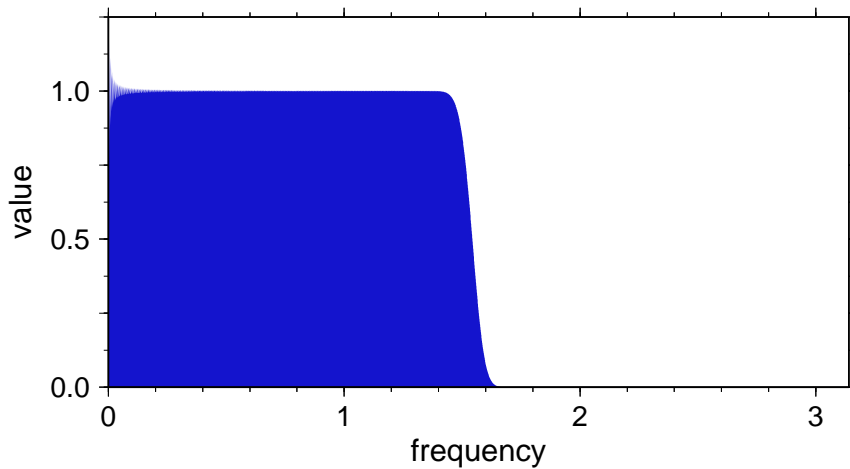


Abb. 3.1: Frequenzinhalt des Lagrange'schen Interpolationsfilters von hohem Grad N

Es seien nun die $(g^{v,\pm})_{v,\pm}$ so konstruiert, dass sie die Randbereiche optimal überdecken. Beachtet man, dass sich die Fourier-Transformierten $\mathcal{F}(D^i f)$ bzw. $\mathcal{F}(D^i g^{v,\pm})$ sich aus

$$\mathcal{F}(D^i f)(\omega) = \mathcal{F}(f)(2^i \omega)$$

und analog

$$\mathcal{F}(D^i g^{v,\pm})(\omega) = \mathcal{F}(g^{v,\pm})(2^i \omega)$$

ergeben, so stellt sich die Analyse mit der konstruierten Filterbank im Frequenzbild wie folgt dar:

1. Vom Frequenzband $[-\pi, +\pi]$ des Signals s^0 filtere mit $D^0 g^{v,\pm}$ die Randfrequenzen $[-\pi, -\pi/2]$ und $[+\pi/2, +\pi]$ in Form der Waveletkoeffizienten $w^{0,v,\pm}$ heraus und erhalte durch $D^0 f$ das Restsignal s^1 mit den Informationen über $[-\pi/2, +\pi/2]$.
2. Aus diesem wiederum filtere, diesmal mit $D^1 g^{v,\pm}$, die Randfrequenzen $[-\pi/2, -\pi/4]$ und $[+\pi/4, +\pi/2]$ in Form der Waveletkoeffizienten $w^{1,v,\pm}$ heraus und erhalte mit $D^1 f$ das neue Restsignal s^2 mit den Informationen über $[-\pi/4, +\pi/4]$.
3. ...

Nach M Zerlegungsschritten gilt mithin:

Es sind die Informationen über die Frequenzen aus $[-\pi, -\pi/2^M]$ und $[+\pi/2^M, +\pi]$ in den Waveletkoeffizienten $(w^{i,v,\pm})_{i=0,\dots,M}$ gespeichert, die Informationen über die restlichen Frequenzen aus $[-\pi/2^M, +\pi/2^M]$ im Restsignal s^{M+1} enthalten!

3.4 Anpassung der Filterbank an die Filterungsbedürfnisse

Wie oben beschrieben, ist die Wahl des Parameters ω_0 eingeschränkt. Um zu garantieren, dass jede einzelne Frequenz des Ausgangssignals bei der Analyse berücksichtigt ist (also entweder in einem Fenster eines Koeffizienten $w^{i,v,\pm}$ oder im Fenster des Restsignals s^{M+1} liegt), muss ω_0 notwendigerweise im Intervall $[\pi/2, \pi]$ liegen. Diese Berücksichtigung wiederum ist wichtig, damit die Analyse injektiv ist (zumindest in guter Näherung), also überhaupt eine inverse Abbildung vom Zeit-Frequenz-Bereich zurück in den Zeitbereich existiert.

Diese Wahl von ω_0 bringt jedoch einige Probleme mit sich: Liegt ω_0 in dem ausgewählten Frequenzbereich, so besitzt die komplexe Schwingung des zugehörigen Morlet-Wavelets eine Periodendauer von zwei bis vier Einheiten. Da der Vektor g^0 das Wavelet nur bei ganzzahligen Argumenten auswertet, ist die Auflösung natürlich viel zu grob und der verwendete Waveletfilter g^0 enthält zu wenig Informationen über die Wavelet-Funktion. Dies äußert sich darin, dass es mit dem Interpolationsverfahren nicht gelingt, das Wavelet für höhere Oktaven aus g^0 hinreichend zu konstruieren. Eine unmittelbare Konsequenz ist der Verlust der optimalen Zeit-Frequenz-Auflösung, die ja vorher zu der Wahl des Morlet-Wavelets geführt hat.

Abbildung 3.2 zeigt oben den Wavelet-Filter g^0 für $\omega_0 = \pi$ und $\sigma = 2.0$, während in der Mitte das durch Interpolation aus g^0 gewonnene Wavelet für die vierte Oktave abgebildet ist, welches offensichtlich nur eine sehr schlechte Approximation des entsprechenden Morlet-Wavelets mit $\omega_0 = \pi/2^4$ aus dem unteren Bild darstellt. Man beachte speziell die sehr grobe Zeitlokalisation des interpolierten Wavelets. Der Interpolationsfilter ist dabei und im folgenden so gewählt, dass er für Polynome bis zum Grad 100 exakt ist.

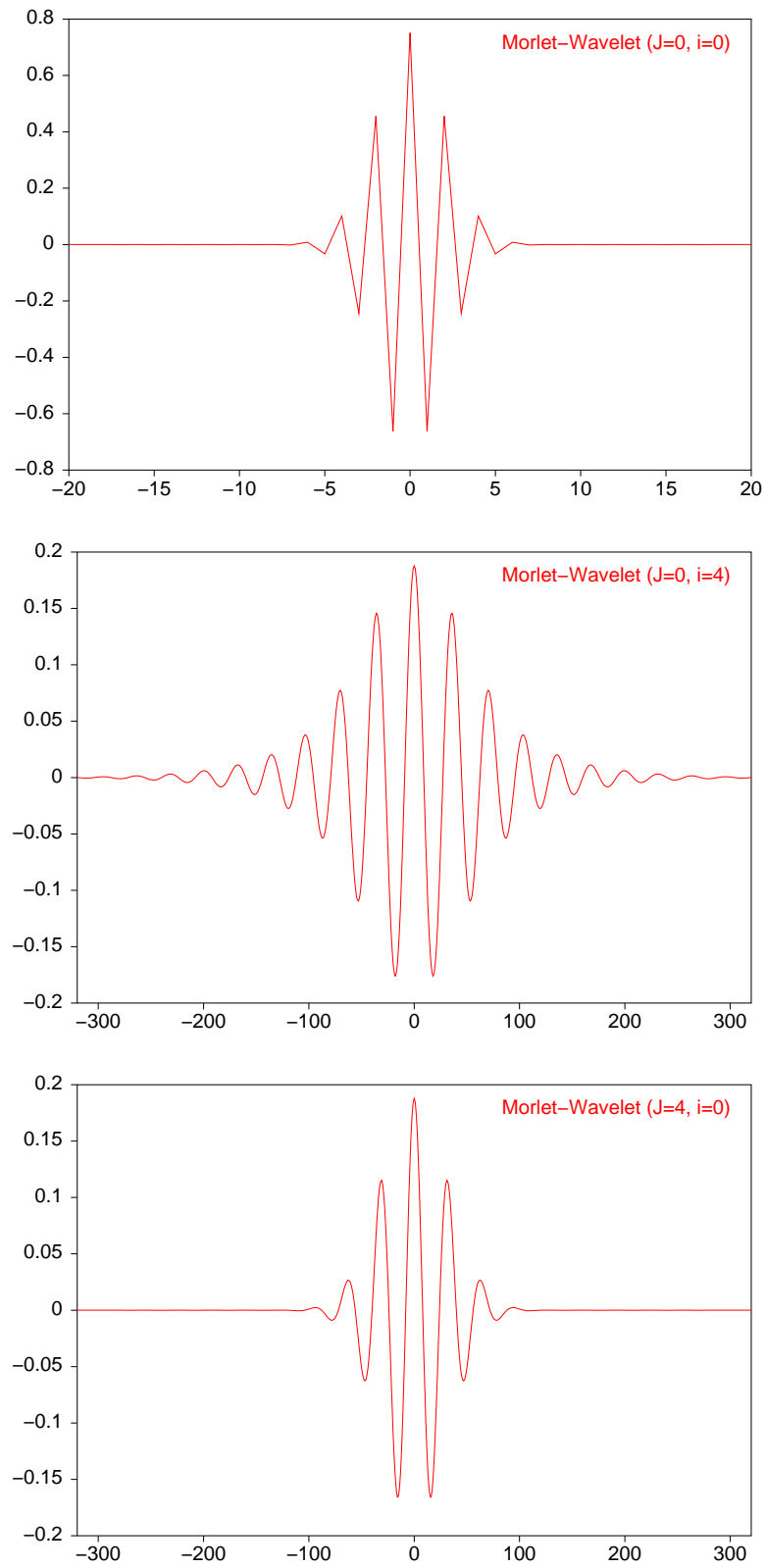


Abb. 3.2: Interpolation der Wavelet-Funktion für Oktave 4

Es ist offenbar notwendig, den Wert von ω_0 klein zu wählen, damit das diskretisierte Wavelet dem Morlet-Wavelet ausreichend gleicht. Um aber nicht die Injektivität zu verletzen, muss die vorher konstruierte Filterbank modifiziert werden. Dies kann durch eine genaue Betrachtung der Filterungsbedürfnisse erreicht werden.

Möchte man ein Signal **filtern**, so darf man davon ausgehen, dass das Signal für den interessanten Frequenzbereich (d.h. dem Bereich, in dem die zu verändernden Frequenzanteile liegen) ausreichend fein diskretisiert ist. Das bedeutet schlicht, dass die Periodendauern der zu manipulierenden Anteile groß im Vergleich zur Diskretisierung sind, also nur Waveletkoeffizienten mit Index $i \geq J$ im filterungsrelevanten Bereich liegen. Desweiteren ist es offensichtlich, dass man nur den besagten Frequenzbereich hoch auflösen muss, während es für die restlichen Frequenzen genügt, sie bei der Analyse nur zu berücksichtigen. Letzteres wiederum ist wichtig, um die Injektivität der Abbildung, also die Existenz einer inversen Abbildung zu gewährleisten. Diese Abdeckung der nicht-filterungsrelevanten hohen Frequenzen kann durch Einführung eines **Hochpass-Restsignals** h erreicht werden, das sich aus den Restsignalen s^J des beschriebenen À-trous-Algorithmus (3.4) bestimmen lässt:

Wie in Abschnitt 3.3 gezeigt, sorgt der Filter f bei hoher Interpolationsgenauigkeit dafür, dass das Restsignal s^J den Frequenzinhalt $[-\pi/2^J, +\pi/2^J]$ des Signals enthält. Dies hängt damit zusammen, dass die Fourier-Transformierte des Filters f im Bereich $[-\pi/2, +\pi/2]$ den Wert $\sqrt{2}$ annimmt, während sie an den Intervallgrenzen sehr rasch abfällt. Normiert man also das Restsignal s^J , so enthält der Vektor h definiert durch

$$h := s - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^J s^J \quad (3.5)$$

genau den hohen Frequenzbereich $[-\pi, -\pi/2^J] \cup [\pi/2^J, \pi]$ des Signals s .

Aus dem Frequenzbild wird nun unmittelbar klar, dass nun die Hauptfrequenz ω_0 der zulässigen Waveletfunktion im Bereich $\pi/2^J$ liegt, wobei die Zulässigkeitsbedingung, wie zuvor, durch die Invertierbarkeit der Transformation gegeben ist. Aber dies gestattet es uns nun, die Filterbank mit einem ausreichend diskretisierten Morlet-Wavelet auszuwerten. Bezeichnet man das nun zulässige Wavelet mit $g_J^{v,\pm}$, so gilt offenbar

$$g_J^{v,\pm} = g^{J,v,\pm}$$

Nun muss noch ein geeignetes **Tiefpass-Restsignal** l gefunden werden, da der filterungsrelevante Frequenzbereich natürlich auch nach oben beschränkt ist, also nur eine endliche Anzahl von Oktaven, M , durch das Morlet-Wavelet hoch aufgelöst werden muss. Wie in der Filterbank von Holschneider (3.4) findet sich auch hier das gesuchte Tiefpass-Restsignal in der Reihe der Restsignale s^i . Weil das Restsignal s^J den Frequenzbereich $[-\pi/2^J, +\pi/2^J]$ des Signals s enthält, ergibt sich nach Normierung für l

$$l := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{J+M} s^{J+M} \quad (3.6)$$

Abbildung 3.3 zeigt oben den Wavelet-Filter g_J^0 für $\omega_0 = \pi$, $\sigma = 2.0$ und $J = 2$. Das mittlere Bild zeigt das mittels Interpolationsverfahren aus g_J^0 gewonnene Wavelet für die vierte Oktave, welches nun offensichtlich eine wesentlich verbesserte Approximation des entsprechenden Morlet-Wavelets mit $\omega_0 = \pi/2^6$ aus dem unteren Bild darstellt. Man beachte speziell die verbesserte Zeitlokalisation des interpolierten Wavelets.

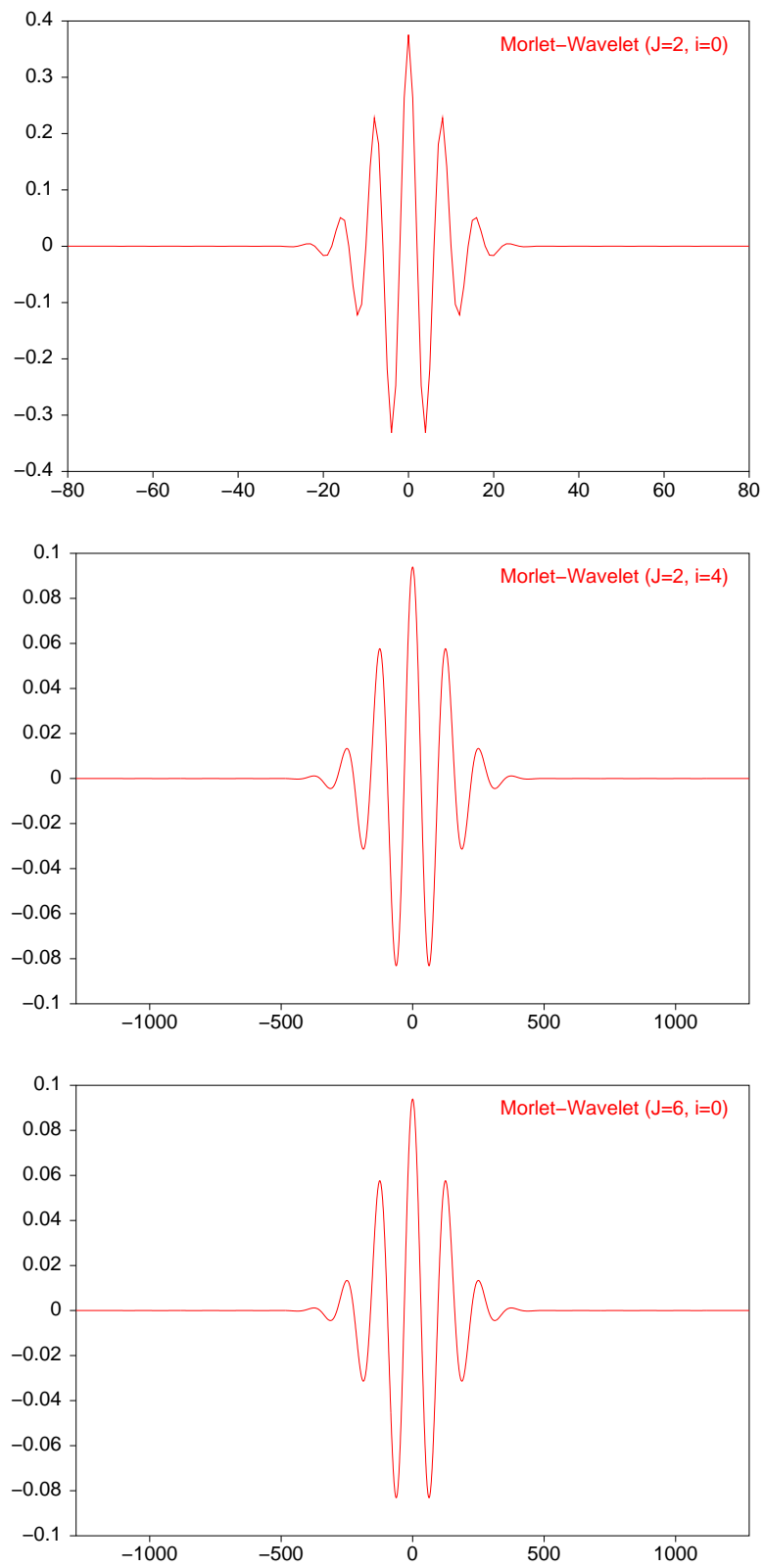


Abb. 3.3: Interpolation der Wavelet-Funktion mit Startoktave $J = 2$

Abb. 3.4:
 Interpolationsfehler
 für $J = 0$ und $J = 1$

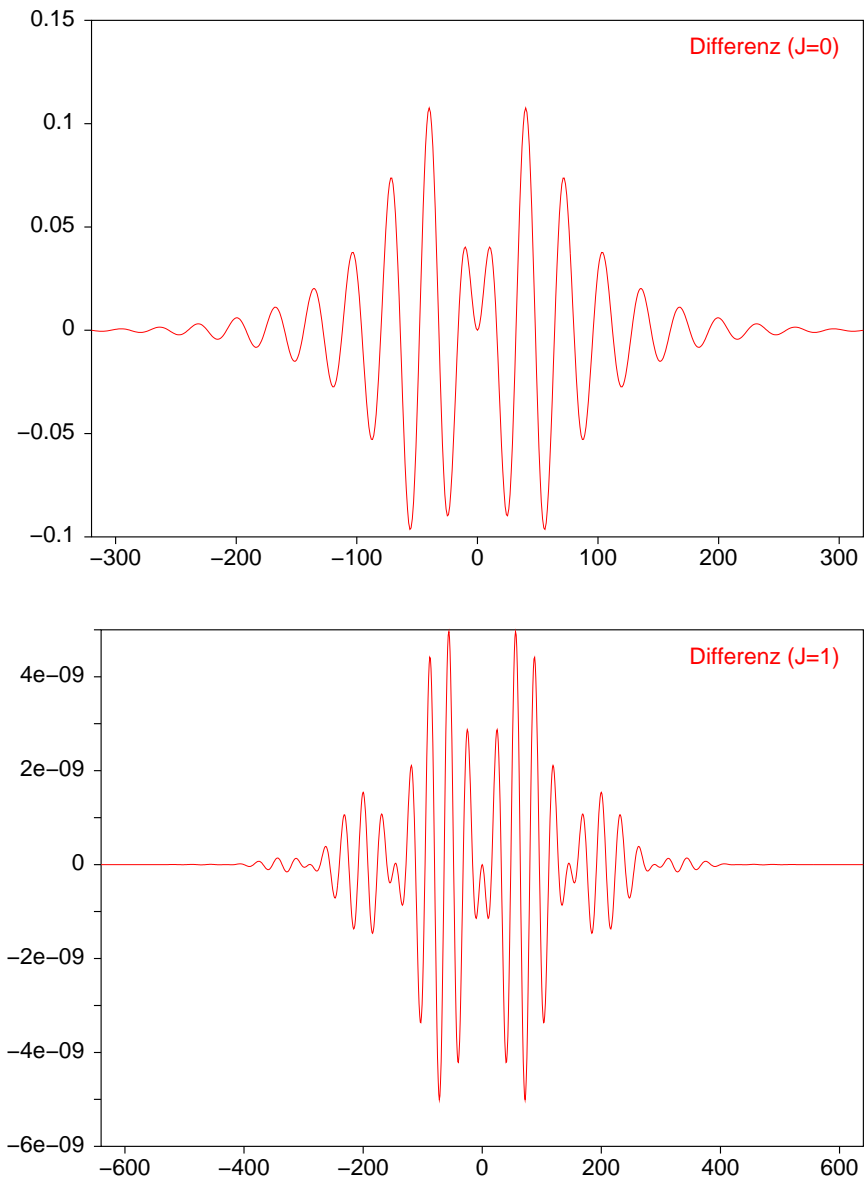


Abbildung 3.4 zeigt die Abweichungen zwischen dem über vier Oktaven interpolierten und dem korrekten Morlet-Wavelet für verschiedene Startoktaven J . Dabei ist der mittlere quadratische Fehler RMS für $J = 0$ gleich 0.63, für $J = 1$ gleich $4 \cdot 10^{-8}$ und für $J = 2$ bereits im Rahmen der Rechengenauigkeit.

Abbildung 3.5 zeigt den Frequenzinhalt des Hochpass-Restsignals h , des Tiefpass-Restsignals l sowie einiger ausgewählter Morlet-Wavelet-Koeffizienten $w^{i,v,+}$ für eine ausreichend hohe Interpolationsgenauigkeit N . Man beachte, dass der Hochpass-Filter h sowie der Tiefpass-Filter l nahezu optimale Frequenzeigenschaften besitzen, während der filterungsrelevante mittlere Frequenzbereich durch das Morlet-Wavelet hinreichend hoch aufgelöst wird.

Die Abbildungen 3.6 und 3.7 zeigen den entsprechenden Hochpass- bzw. Tiefpass-Filter für $J = 4$, $M = 2$ im Zeitbereich.

Abb. 3.5:
Das Filterbankschema
im Frequenzbereich

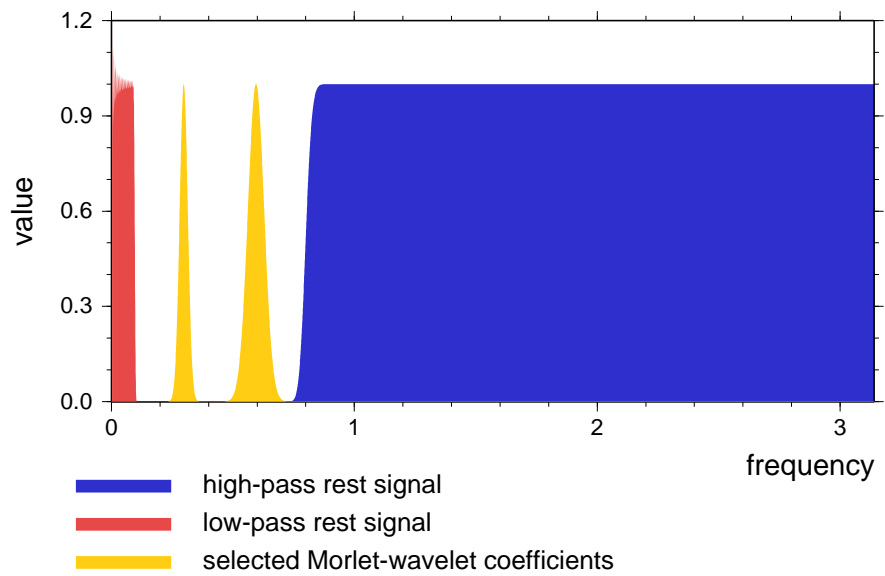


Abb. 3.6:
Der entsprechende
Hochpass-Filter im
Zeitbereich

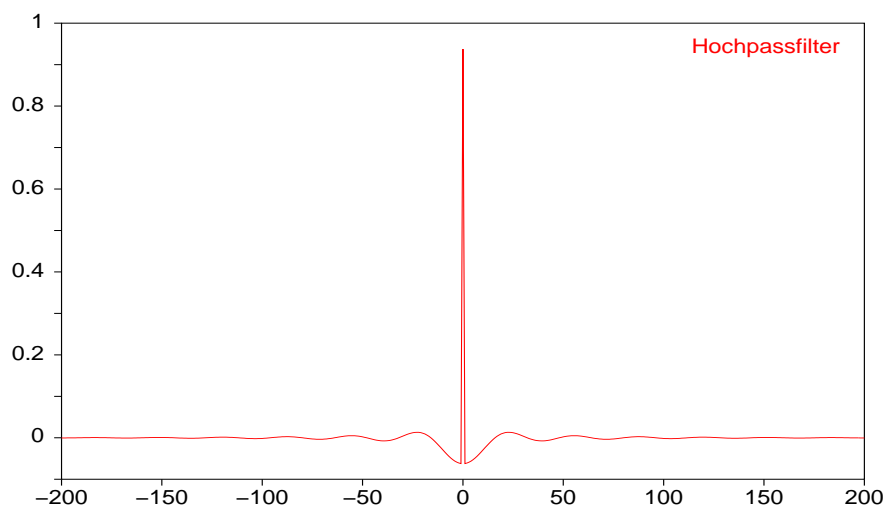
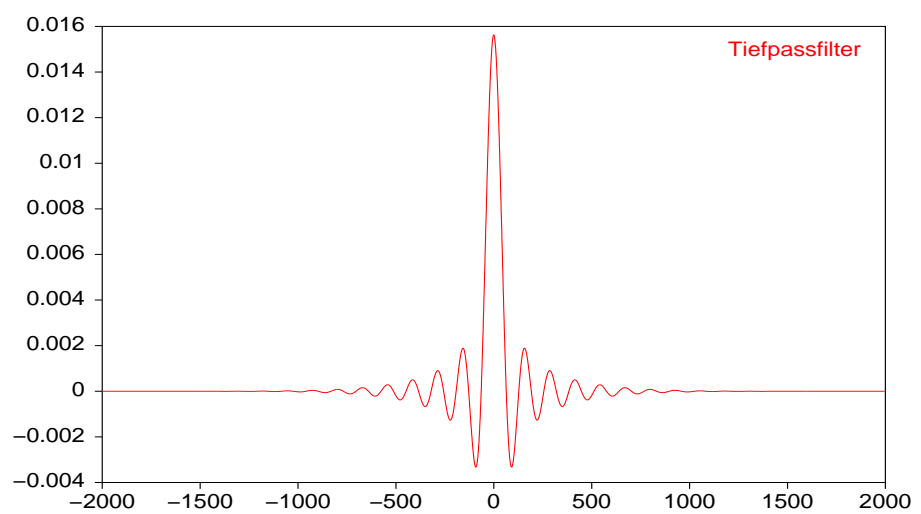


Abb. 3.7:
Der entsprechende
Tiefpass-Filter im
Zeitbereich



Insgesamt erhält man das folgende abgewandelte Filterbankschema :

1. **Startbedingung:** $s^0 = s$

2. **Iterationsschritt:** $s^{i+1} = D^i f * s^i$

3. **Berechnung der Morlet-Wavelet-Koeffizienten:**

$$\text{Für } i = 0, \dots, M-1 : \quad w^{J+i,v,\pm} = D^i g_J^{v,\pm} * s^i$$

4. **Berechnung des Hochpass- und Tiefpass-Restsignals:**

$$h = s - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^J s^J, \quad l = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{J+M} s^{J+M}$$

Dabei sind die auftretenden Objekte wie folgt definiert :

- i, v : Oktave $i = 0, \dots, M-1$, Stimme $v = 0, \dots, L-1$,
- J, M, L : J = Startoktave, M = Anzahl der Oktaven, L = Anzahl der Stimmen,
- s : diskretisiertes Signal ,
- s^i : Restsignal bei der i -ten Oktave,
- h, l : Hochpass-, Tiefpass-Restsignal,
- $w^{i,v,\pm} = W(\pm 2^{i+v/L}, n)$,
- f : Langrange'scher Interpolationsfilter,
- $g_J^{v,\pm}$: skaliertes Morlet-Wavelet der Oktave J
- D : Matrix, die eine Null zwischen je zwei Komponenten eines Vektors einfügt.

Für $\omega_0 \approx \pi/2^J$ und $L > \sigma$ ist das positive Frequenzspektrum des Signals s dann wie folgt aufgespalten (negatives Spektrum analog):

$$\begin{array}{lll} \text{niedrige Frequenzen:} & [0, +\pi/2^{J+M}] & \longrightarrow l \\ \text{mittleres Frequenzband:} & [+ \pi/2^{J+M}, +\pi/2^J] & \longrightarrow (w^{J+i,v,+})_{i,v} \\ \text{hohe Frequenzen:} & [+ \pi/2^J, +\pi] & \longrightarrow h \end{array} \quad \leftarrow \begin{cases} \text{hochaufgelöstes} \\ \text{Spektrum} \end{cases}$$

3.5 Extraktion unerwünschter Zeit-Frequenz-Anteile und Wahl des Parameters M

Nachdem das vorgegebene Signal nun günstig in seine Zeit-Frequenz-Komponenten zerlegt ist, kann mit dem Entfernen der störenden Anteile begonnen werden :

Es sollen im folgenden exemplarisch alle Signalkomponenten mit einer Frequenz (Frequenzbeitrag) in $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ ($\omega_{\min}, \omega_{\max} > 0$) im Zeitbereich $[n_{\min}, n_{\max}]$ entfernt werden.

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, genügt es offensichtlich, nur in dem Frequenz-Bereich, in dem die zu manipulierenden Zeit-Frequenz-Komponenten liegen, mit hoher Auflösung zu arbeiten. Dies führte auf die Einführung einer Startoktave J als Trennlinie zwischen

filterungsrelevanten und hochfrequenten Anteil. Andererseits ist es natürlich nützlich, möglichst wenige Oktaven zu berechnen, sodass alle niederfrequenten, für die Filterung wiederum unwichtigen Komponenten als Restsignal zusammengefasst werden. Letzteres steht für eine geeignete Wahl des Parameters M .

Aus obiger Auflistung ergibt sich grob:

$$[\omega_{\min}, \omega_{\max}] \subset \left[+\pi/2^{J+M-\Delta}, +\pi/2^{J+\Delta} \right],$$

wobei Δ so gewählt sein soll, dass das zu manipulierende Intervall eine geeignete Verkleinerung des hochaufgelösten Frequenzintervalls ist. Damit sind geeignete Parameter J und M gefunden.

Nun zur Manipulation der Waveletkoeffizienten $w^{i,v,\pm}$:

Möchte man die Signalkomponenten aus dem oben beschriebenen Zeit-Frequenz-Bereich entfernen, so besteht der richtige Weg offenbar darin, alle "betroffenen" Waveletkoeffizienten $w_n^{i,v,\pm}$ Null zu setzen. Um diese zu erhalten, wird zunächst nach "betroffenen" Skalierungen $w^{i,v,\pm}$ gesucht und danach die davon Null zu setzenden Verschiebungen $w_n^{i,v,\pm}$ berechnet. Dafür muss jedoch zunächst geklärt werden, wann ein Koeffizient die besagte Eigenschaft besitzt.

"Betroffen" sind offenbar diejenigen Koeffizienten $w^{i,v,\pm}$, deren Frequenzfenster, d.h. das Fenster von $D^i g^{v,\pm}$, das positive Frequenzband $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ oder das entsprechende negative Frequenzband $[-\omega_{\max}, -\omega_{\min}]$ schneidet.

Da die Waveletkoeffizienten wie beschrieben für die mittleren Frequenzbereiche zuständig sind, kann man annehmen, dass keines der Fenster sowohl positive als auch negative Frequenzen beinhaltet, womit für das positive Band nur die $(w^{i,v,+})_{i,v}$ und für das negative nur die $(w^{i,v,-})_{i,v}$ in Betracht kommen. Es werde zunächst das positive Band betrachtet.

Da das Fenster von $D^i g^{v,+}$ die Hauptfrequenz $\omega_0/2^{J+i+v/L}$ und die angenäherte Bandbreite $(2\sqrt{2}/\sigma)/2^{J+i+v/L}$ besitzt, schneidet es $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ genau dann wenn

$$\frac{\omega_0 - \sqrt{2}/\sigma}{2^{J+i+v/L}} < \omega_{\max} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_0 + \sqrt{2}/\sigma}{2^{J+i+v/L}} > \omega_{\min}$$

also zusammenfassend

$$\frac{\omega_0 - \sqrt{2}/\sigma}{\omega_{\max}} < 2^{J+i+v/L} < \frac{\omega_0 + \sqrt{2}/\sigma}{\omega_{\min}} \quad (3.7)$$

beziehungsweise

$$\frac{\ln(\omega_0 - \sqrt{2}/\sigma) - \ln(\omega_{\max})}{\ln 2} - J < i + \frac{v}{L} < \frac{\ln(\omega_0 + \sqrt{2}/\sigma) - \ln(\omega_{\min})}{\ln 2}$$

gilt. Für das negative Frequenzband erhält man aufgrund der offensichtlichen Symmetrie die entsprechenden Waveletkoeffizienten mit negativer Skalierung!

Nachdem nun für die Skalierungsindices i, v, \pm die Auswahl getroffen ist, muss dies noch für die Verschiebung n , d.h. die Zeitkoordinate geschehen.

Berechnet man $w_n^{i,v,\pm}$ analog zu (3.2), so erhält man mit Einsetzen der Morlet-Funktion für ψ und Umformen:

$$\begin{aligned} w_n^{i,v,\pm} &\approx \frac{1}{\sqrt{2^{J+i+v/L}}} \sum_m s_m \bar{\psi}\left(\frac{m-n}{\pm 2^{J+i+v/L}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{J+i+v/L}}} \sum_m \left(s_m e^{-((m-n)/\pm 2^{J+i+v/L})^2/2\sigma^2} \right) e^{-j\omega(m-n)/\pm 2^{J+i+v/L}} \end{aligned}$$

Es wird also ein Teil des Signals s mit einer Fensterfunktion herausgeschnitten. Die dazu gehörenden Wavletkoeffizienten kann man als **Zeitfenster von** $w_n^{i,v,\pm}$ bezeichnen. Das entsprechende Fenster hat den Zentralwert n und eine Breite $\approx 2(2^{i+v/L}\sqrt{2}\sigma)$. Analog zur Skalierung ist eine Verschiebung n nur dann betroffen und wird nun Null gesetzt, wenn das Zeitfenster von $w_n^{i,v,\pm}$ das Zeitband $[n_{\min}, n_{\max}]$ schneidet. Letzteres führt auf die Bedingungen

$$n + 2^{J+i+v/L}\sqrt{2}\sigma > n_{\min} \quad \text{und} \quad n - 2^{J+i+v/L}\sqrt{2}\sigma < n_{\max}$$

was zusammenfassend

$$n_{\min} - 2^{J+i+v/L}\sqrt{2}\sigma < n < n_{\max} + 2^{J+i+v/L}\sqrt{2}\sigma \quad (3.8)$$

ergibt. Damit sind die Null zu setzenden Waveletkoeffizienten $w_n^{i,v,\pm}$ gefunden!

3.6 Wahl des Parameters σ

Wie in (3.7) und (3.8) gesehen, bewirkt eine Abänderung des bis dato nicht weiter bestimmten Parameters σ eine veränderte Auswahl der Null zu setzenden Waveletkoeffizienten.

Möchte man von zwei Signalkomponenten, die ungefähr zur gleichen Zeit auftreten und deren Frequenzen sehr nahe beieinanderliegen, die eine eliminieren und die andere erhalten, so ist es offenbar wichtig, dass keine der von dem zu erhaltenden Signalteil betroffenen Waveletkoeffizienten auch von dem zu eliminierenden Signalteil betroffen sind und Null gesetzt werden.

Frequenzauflösung: Hat man zwei Komponenten, die zur gleichen Zeit auftreten und deren Frequenzen ω_1, ω_2 nahe beieinander liegen, so ist es wegen (3.7) sinnvoll, σ groß zu wählen, damit die zugehörigen Frequenzfenster Ω_1, Ω_2 gegeben durch

$$\Omega_k := [(\omega_0 - \sqrt{2}/\sigma)/\omega_k, (\omega_0 + \sqrt{2}/\sigma)/\omega_k] \quad (k = 1, 2)$$

möglichst klein werden und vorallem gilt

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.$$

Zeitauflösung: Hat man andererseits zwei Komponenten, die die gleiche Frequenz haben und kurz hintereinander zu den Zeiten t_1, t_2 auftreten, so sollte wegen (3.8) σ klein gewählt sein, damit diesmal die Intervalle T_1, T_2 mit

$$T_k := [t_k - 2^{i+v/L}\sqrt{2}\sigma, t_k + 2^{i+v/L}\sqrt{2}\sigma] \quad (k = 1, 2)$$

möglichst klein werden, damit

$$T_1 \cap T_2 = \emptyset$$

garantiert ist.

Es sei noch einmal an folgendes erinnert (siehe Abschnitt 1.5):

Die Auflösung wird charakterisiert durch die Breiten von Zeit- und Frequenzfenster. Das Produkt aus den Breiten des Frequenz- und des Zeitfensters ist für das Morlet-Wavelet minimal und unabhängig von σ . Deshalb gibt es kein allgemein optimales σ , sondern es muss, wie beschrieben, problemspezifisch gewählt werden!

3.7 Konstruktion der adjungierten Transformation A^*

Wie in (2.1) beschrieben, lässt sich im Fall der kontinuierlichen Wavelet-Transformation eine Norm auf dem Raum der Waveletkoeffizienten kanonisch definieren durch

$$\|\mathcal{WT}_s\|^2 = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{WT}_s(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2}.$$

Daraus wurde für die undezimiert diskretisierten Koeffizientensätze $w = (w_n^{i,v,\pm})$ die Norm (2.3) abgeleitet.

Es sei nun die Familie der Waveletkoeffizienten $\{w^{i,v,\pm} \mid i = J, \dots, J+M-1\}$ sowie das Hochpass-Restsignal h und das Tiefpass-Restsignal l zusammenfassend als **Koeffizientensatz** w bezeichnet. Mit dem Ersatz der Koeffizienten $w^{i,v,\pm}$ mit $0 \leq i < J$ und $i \geq J+M-1$ ergibt sich aus (2.3) die folgende Norm auf dem Raum der Koeffizientensätze

$$\|w\|^2 = \sum_n |h_n|^2 + \frac{\ln 2}{C_\psi L} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{v,\pm} \frac{1}{2^{J+i+v/L}} \sum_n |w_n^{J+i,v,\pm}|^2 + \sum_n |l_n|^2 \quad (3.9)$$

Schreibt man den Koeffizientensatz w konkret durch Aneinanderreihen der einzelnen (endlich langen) gewichteten Vektoren h , $w^{i,v,\pm}$, s^M , so erhält man mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle a, b \rangle = \sum_i a_i \bar{b}_i,$$

dass die rechte Seite von (3.9) von der Form $\langle w, w \rangle$ ist, also die Norm von einem Skalarprodukt erzeugt werden kann. Ein solches Skalarprodukt ist zur Konstruktion der zur Analyse adjungierten Transformation A^* notwendig.

Zur besseren Übersicht seien die Matrizen F^i und $G^{i,v,\pm}$ durch

$$F_{m,n}^i = (D^i f)_{m-n}, \quad G_{m,n}^{i,v,\pm} = (D^i g^{v,\pm})_{m-n},$$

erklärt und als Abkürzung

$$c := \frac{\ln 2}{C_\psi L}$$

definiert.

Sei w ein Koeffizientensatz, der, wie bereits erwähnt, durch Aneinanderreihen und Gewichtung der Waveletkoeffizienten $w^{i,v,\pm}$ und der Restsignale h, l entsteht, und s ein beliebiges Signal. Dann gilt nach den Regeln der Matrizenrechnung ($a^* := \bar{a}^T$):

$$\begin{aligned} \langle w, As \rangle &= h^* \left(\left(\text{Id} - \frac{1}{\sqrt{2^J}} \prod_{j=0}^{J-1} F^j \right) s \right) \\ &+ \sum_{i,v,\pm} \left(\frac{c}{\sqrt{2^{J+i+v/L}}} w^{J+i,v,\pm} \right)^* \left(\frac{c}{\sqrt{2^{J+i+v/L}}} G^{i,\tilde{v},\pm} \prod_{j=0}^{i-1} F^j s \right) \\ &+ \left(\frac{1}{\sqrt{2^{J+M}}} l \right)^* \left(\frac{1}{\sqrt{2^{J+M}}} \prod_{j=0}^{J+M} F^j s \right) \end{aligned}$$

Ersetzt man die Matrizenprodukte auf der rechten Seite durch das transponierte Matrizenprodukt auf der linken Seite und sammelt die Gewichtungsfaktoren, so erhält man weiter

$$\begin{aligned}
&= \left(h - \frac{1}{\sqrt{2^J}} \prod_{j=J-1}^0 (F^j)^* h \right)^* s + \sum_{i,v,\pm} \left(\frac{c^2}{2^{J+i+v/L}} \prod_{j=i-1}^0 (F^j)^* (G^{i,v,\pm})^* w^{J+i,v,\pm} \right)^* s \\
&\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2^{J+M}}} \prod_{j=J+M}^0 (F^j)^* l \right)^* s \\
&= \left(h - \frac{1}{\sqrt{2^J}} \prod_{j=J-1}^0 (F^j)^* h + \sum_{i,v,\pm} \frac{c^2}{2^{J+i+v/L}} \prod_{j=i-1}^0 (F^j)^* (G^{i,v,\pm})^* w^{i,v,\pm} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2^{J+M}}} \prod_{j=J+M}^0 (F^j)^* l \right)^* s
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die einzelnen Skalarprodukte aufsummiert wurden. Man kann also A^* ablesen. Nach geschicktem Aufteilen der Gewichtungsfaktoren ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
A^* w &= h + \prod_{j=J-1}^0 \left(\frac{1}{2} F^j \right)^* (-\sqrt{2^J} h) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{v,\pm} \prod_{j=i-1}^0 \left(\frac{1}{2} F^j \right)^* \left(\frac{c^2}{2^{J+v/L}} G^{i,v,\pm} \right)^* w^{i,v,\pm} \\
&\quad + \prod_{j=J+M}^0 \left(\frac{1}{2} F^j \right)^* (\sqrt{2^{J+M}} l)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.8 Inverses Filterbankschema für A^*

Da die Matrizen $(F^i)^*$ und $(G^{i,v,\pm})^*$ aus obiger Rechnung sich zu

$$((F^i)^*)_{m,n} = \overline{F_{n,m}^i} = \overline{(D^i f)_{n-m}} = (D^i f)_{m-n}$$

also

$$((G^{i,v,\pm})^*)_{m,n} = (D^i (g^{v,\pm})^*)_{m-n}$$

ergeben, erkennt man, dass $A^* w$ iterativ gewonnen werden kann durch folgendes inverse Filterbankschema:

1. **Startbedingung:**

$$s^{J+M} := \sqrt{2}^{J+M} l$$

2. **Iterationsschritt:**

$$\tilde{s}^i := \frac{1}{2} D^i f * \widetilde{s^{i+1}}$$

3. **Einfügen der Waveletkoeffizienten:** Für $i = 0, \dots, M-1$

$$\tilde{s}^i := \tilde{s}^i + \sum_{v,\pm} \frac{c^2}{2^{J+v/L}} D^i g^{v,\pm} * w^{i,v,\pm}$$

4. **Einfügen des Hochpass-Restsignals:**

$$\begin{aligned} \tilde{s}^J &:= \tilde{s}^J - \sqrt{2}^J h \\ \tilde{s}^0 &:= \tilde{s}^0 + h \end{aligned}$$

5. **Endschritt:**

$$A^* w := \tilde{s}^0$$

Ebenso wie die Analyse A durch ein Filterbankschema numerisch approximiert werden kann, lässt sich nun deren adjungierte Abbildung A^* durch ein **inverses Filterbankschema** gewinnen. Da die gesuchte inverse Abbildung A^{-1} , wie beschrieben, mit einem Algorithmus berechnet wird, der auf mehrmaligem Anwenden von A und A^* beruht, führen effiziente Algorithmen für A und A^* direkt auf eine effiziente Berechnung von A^{-1} .

3.9 Fehlerkontrolle der Synthese

In diesem letzten Abschnitt wird diskutiert, wie man die Konvergenz, also die Qualität der Synthese optimal kontrollieren kann.

Es sei w der modifizierte Koeffizientensatz und \tilde{w}_k der Koeffizientensatz des rekonstruierten Signals nach k Neumann-Iterationen, d.h. nach Auswertung der Neumann-Reihe bis zum k -ten Summanden. Das Standard-Fehlerkriterium ist gegeben durch den Abstand Δ_k von w und \tilde{w}_k in der Norm (3.9),

$$\Delta_k := \|w - \tilde{w}_k\|.$$

Dabei offenbart sich ein Problem: Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, existiert für fast jeden Koeffizientensatz kein Signal, welches die gegebenen Koeffizienten liefert. Dies bedeutet aber, dass der **minimal erreichbare Fehler Δ_∞ größer als 0 ist**.

Das aus der Synthese gewonnene Signal hat aber die besondere Eigenschaft, dass seine Koeffizienten die Projektion des veränderten Koeffizientensatzes auf das Bild der Analyse sind.

Damit zeichnet sich der Koeffizientensatz der vollständig ausgewerteten Neumann-Reihe, \tilde{w}_∞ , gerade dadurch aus, dass gilt

$$\tilde{w}_\infty \perp w - \tilde{w}_\infty.$$

Es ist mithin sinnvoll, ein zusätzliches Fehlerkriterium einzuführen, um die Qualität der Projektion zu überprüfen. Geeignet ist dafür offenbar der Kosinus c_k des Winkels zwischen \tilde{w}_k und $w - \tilde{w}_k$, der sich nach dem Kosinussatz wie folgt berechnet:

$$c_k := \frac{\|w\|^2 - \|\tilde{w}_k\|^2 - \|w - \tilde{w}_k\|^2}{2 \|\tilde{w}_k\| \|w - \tilde{w}_k\|}.$$

Damit ist der theoretische Hintergrund des Filterungsverfahrens vollständig beschrieben.

3.10 Numerische Ergebnisse

Im folgenden soll die Qualität der Synthese numerisch überprüft werden. Als Eingangssignal wurde hierfür der Delta-Impuls δ gewählt. Er bietet sich als Testfunktion an: Zum einen, weil damit die Rekonstruktion punktweise verfolgt werden kann. Zum anderen enthält er alle Frequenzen gleichverteilt, sodass sich das Frequenzverhalten der Transformationen optimal ablesen lässt.

Der Delta-Impuls wurde mit der gegebenen Analyse-Transformation A zerlegt und mit der Pseudo-Inversen unter Verwendung der Neumann-Reihe rekonstruiert. Dies ist mit einer vollständigen Auswertung der Neumann-Reihe möglich, da keinerlei Koeffizienten verändert wurden. In Abbildung 3.8 werden die Abweichungen zwischen dem Delta-Impuls und seiner Rekonstruktion nach zunehmender Anzahl N von Summanden der Neumann-Reihe dargestellt.

Dabei sind die auftretenden Parameter der Transformation folgendermassen gewählt:

- Morlet-Wavelet mit den Parametern $\omega_0 = \pi$ und $\sigma = 3.0$;
- Berechnung des Morlet-Wavelets im Intervall von $t = -16$ bis $t = +16$;
- Höchste Polynomordnung, für die der Interpolationsfilter exakt ist: 100;
- Startoktave $J = 4$, Anzahl der hochaufgelösten Oktaven $M = 2$;
- Anzahl der Stimmen pro Oktave $L = 10$;
- Konvergenzparameter $\mu = 1.0$.

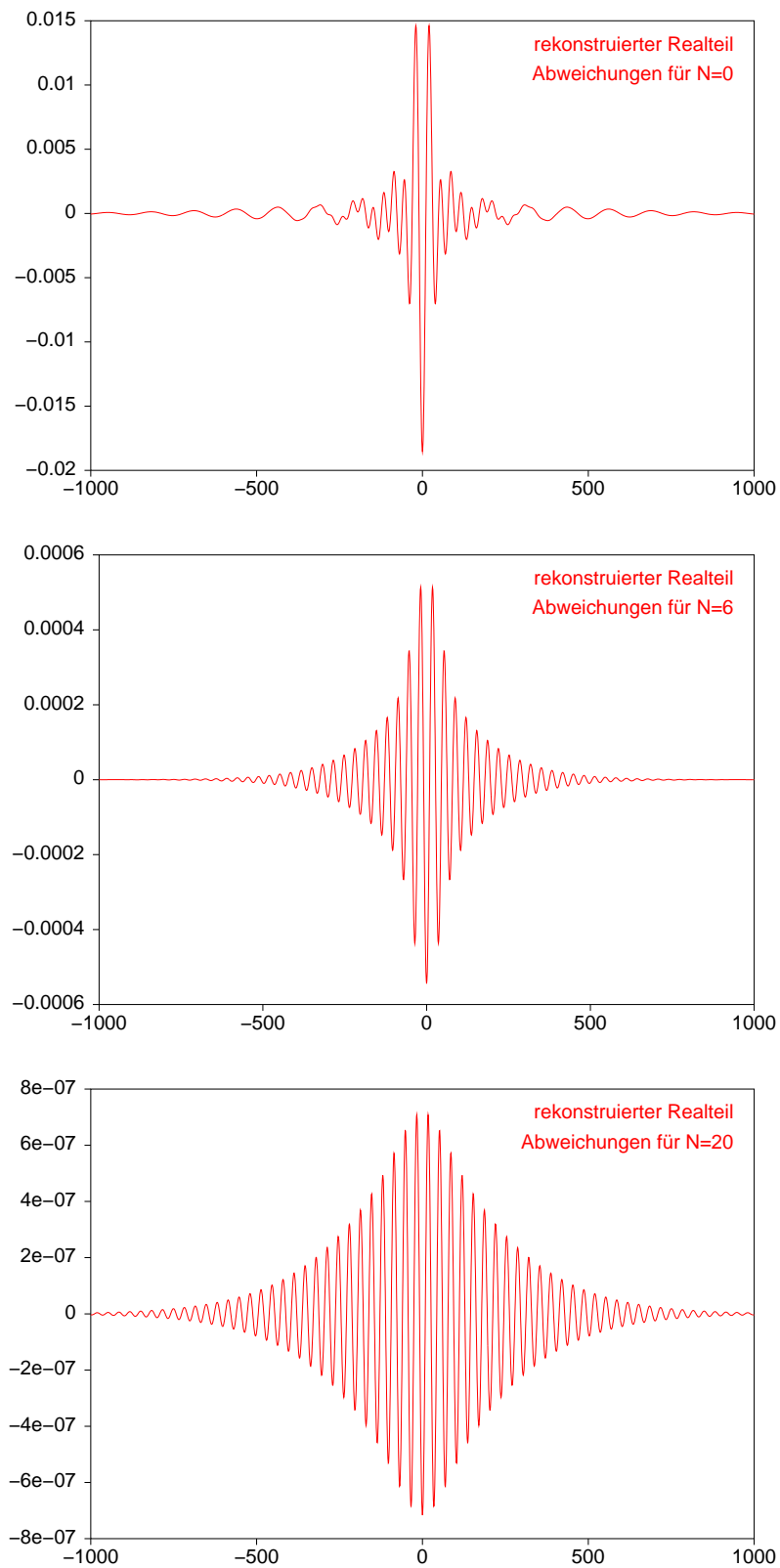


Abb. 3.8: Abweichung zwischen *Delta-Impuls* und *Rekonstruktion* für N Summanden der *Neumann-Reihe*. Bei $N = 50$ liegt man bereits weit unterhalb der *Rechengenauigkeit*.

Kapitel 4 Vergleich der vorgestellten Filterungstechnik mit anderen Verfahren

In diesem Kapitel sollen nun die Vorteile des angegebenen Ansatzes diskutiert werden. Da die Vorzüge einer Zeit-Frequenz-Analyse mit dem Morlet-Wavelet gegenüber Multi-Skalen-Ansätzen hinlänglich bekannt sind und in Abschnitt (1.5) auch beschrieben wurden, wird das hier entwickelte Filterbankschema mit dem Standard-Filterungsverfahren für das Morlet-Wavelet verglichen. Das Hauptaugenmerk des Vergleichs liegt auf der praktischen Umsetzung und der Genauigkeit des gefilterten Signals.

4.1 Das Standard-Filterungsverfahren mit dem Morlet-Wavelet

Für den Vergleich ist es zunächst notwendig, das besagte Standard-Verfahren zu beschreiben. Da der Leser mit der Wavelet-Thematik nun sicherlich hinreichend vertraut ist, wird es nur in Stichpunkten skizziert [siehe Gibert et al. 1998]:

1. Analyse = kontinuierliche Wavelettransformation :

Die Waveletkoeffizienten $\mathcal{WT}s(a, b)$ des Signals $s \in L_2$ sind gegeben durch

$$\mathcal{WT}s(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} s(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (4.1)$$

Hierfür wird ein Verfahren zur numerischen Integralauswertung herangezogen.

2. Extraktion :

Der Zeit-Frequenz-Bereich E soll aus dem Signal eliminiert werden. Dazu wird jedes $\mathcal{WT}s(a, b)$, dessen Zeit-Frequenz-Fenster den Bereich E schneidet, auf Null gesetzt.

3. Synthese = Doppelintegral-Inverse :

Das neue Signal \tilde{s} erhält man durch numerische Integration aus

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{WT}s(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2} \quad (4.2)$$

4. Qualität der Synthese :

Berechnung des Abstands zwischen dem modifizierten Koeffizientensatz und dem Koeffizientensatz des neuen Signals

4.2 Diskussion der Vorteile

Nun also zum Vergleich der Standard-Filterung mit dem Morlet-Wavelet mit der angegebenen Methode:

1. Bestmögliche Approximation

Wie in Abschnitt 2.1 dargelegt, kann nicht jeder modifizierte Koeffizientensatz von einem Signal erzeugt werden. Deshalb berechnet die entwickelte Synthese ein die Fehlernorm minimierendes Signal (Methode der kleinsten Quadrate). Die Doppelintegral-Inverse (4.2) hingegen verwendet als Synthese nur die zur Analyse (4.1) adjungierte Abbildung, was dem Abbrechen der gegebenen Neumann-Reihe nach dem ersten Summanden entspricht.

2. Zufriedenstellende Resultate in kürzerer Zeit

- Möchte man zwei Signalanteile trennen, so benötigt man nur in einem kleinen Frequenzbereich eine hohe Frequenzauflösung. Das gegebene Verfahren analysiert nur diesen filterungsrelevanten Frequenzbereich mit dem Morlet-Wavelet, während die übrigen Frequenzen in einem Hochpass- und Tiefpass-Restsignal zusammengefasst werden.
- Die benötigten Waveletkoeffizienten werden mittels eines effektiven Filterbankschemas berechnet, welches auf einem Interpolationsansatz beruht. Die Anzahl der aufwendigen Auswertungen der Waveletfunktion für viele verschiedene Frequenzen wird deutlich reduziert.
- Das Hochpass- und Tiefpass-Restsignal berechnen sich leicht aus Vektoren des Filterbankschemas. Eine gesonderte Berechnung entfällt.
- Die Berechnung des gefilterten Signals aus den veränderten Koeffizienten erfolgt durch eine schnell konvergierende Reihe, die auf mehrmaligem Anwenden der Analyse-Filterbank und deren adjungierter Abbildung beruht.
- Diese adjungierte Abbildung besitzt wiederum eine Filterbankstruktur, genauer ist es die inverse Filterbank zur Analyse. Sie lässt sich also ebenfalls effizient berechnen.

3. Leichte iterative Nachverbesserung

Eine Verfeinerung des gefilterten Signals lässt sich dadurch erreichen, dass man den vorangegangenen Iterationsschritten aus dem Neumann-Algorithmus weitere folgen lässt. Eine verbesserte Auswertung der Doppelintegral-Inversen (4.2) benötigt hingegen viele zusätzliche Waveletkoeffizienten (4.1), aus denen ebenfalls wieder der zu filternde Zeit-Frequenz-Bereich E herausgeschnitten werden muss.

4. Einfache Umsetzung

Das Standard-Verfahren beruht auf der Auswertung zahlreicher bestimmter Integrale (4.1) und (4.2), deren Werte mit einem numerischen Verfahren approximiert werden müssen. Die aufgezeigte Methode hingegen verwendet fest vorgegebene Filterbankschemata. Das einzige mathematische Objekt, das angenähert werden muss, ist die geometrische Reihe aus dem Neumann-Verfahren.

Kapitel 5 Extraktion der Chandler-Schwingung

Das entwickelte Signalfilterungsverfahren wurde angewandt auf die Zeitreihe der Polbewegung, die in Abschnitt 1.7 eingeführt wurde. Ihre Daten sind für den Zeitraum von 1962–2000 in Abbildung 5.1a dargestellt. Hierbei stellt die im Bild untere, rote Kurve den Realteil der Bewegung (**y-pole**) dar, während die obere blaue Kurve den Imaginärteil (**x-pole**) repräsentiert.

Es wurde zunächst ein Wavelet-Skalogramm des Datensatzes erstellt, welches schlicht den Betrag der Waveletkoeffizienten darstellt, also die Energieverteilung in einem Signal in Abhängigkeit von Zeit und Frequenz angibt. In Abbildung 5.1 ist der prograde Anteil dieses Skalogramms dargestellt. Es zeigt sich deutlich, dass die Polbewegung hauptsächlich aus zwei Schwingungen besteht, einer jährlichen Oszillation sowie der bekannten Chandler-Schwingung, welche eine Hauptperiode von ungefähr 430 Tagen besitzt. Sowohl die Jahresschwingung als auch die Chandler-Schwingung zeichnen sich durch zeitvariable Schwingungsamplituden aus. Hinzu kommt, dass die Periode der Chandler-Schwingung nicht stabil zu sein scheint.

In Abbildung 5.1b ist die extrahierte Chandler-Schwingung dargestellt, welche mit der beschriebenen Methode berechnet wurde. Die zeitliche Variation der Schwingungsamplitude ist klar zu erkennen.

In Abbildung 5.1c sind die Abweichungen zwischen der Polbewegung und der extrahierten Chandler-Schwingung dargestellt. Diese Abweichungen enthalten alle anderen Frequenzkomponenten, wie zum Beispiel die Jahresschwingung oder auch die säkuläre Schwingung des Pols.

Die Abbildungen 5.2a und 5.2b zeigen die in der beschriebenen Methode auftretenden Hochpass- und Tiefpass-Restsignale. Ihre Korrelation zur Chandler Bewegung im Zeit-Frequenz-Bereich ist vernachlässigbar.

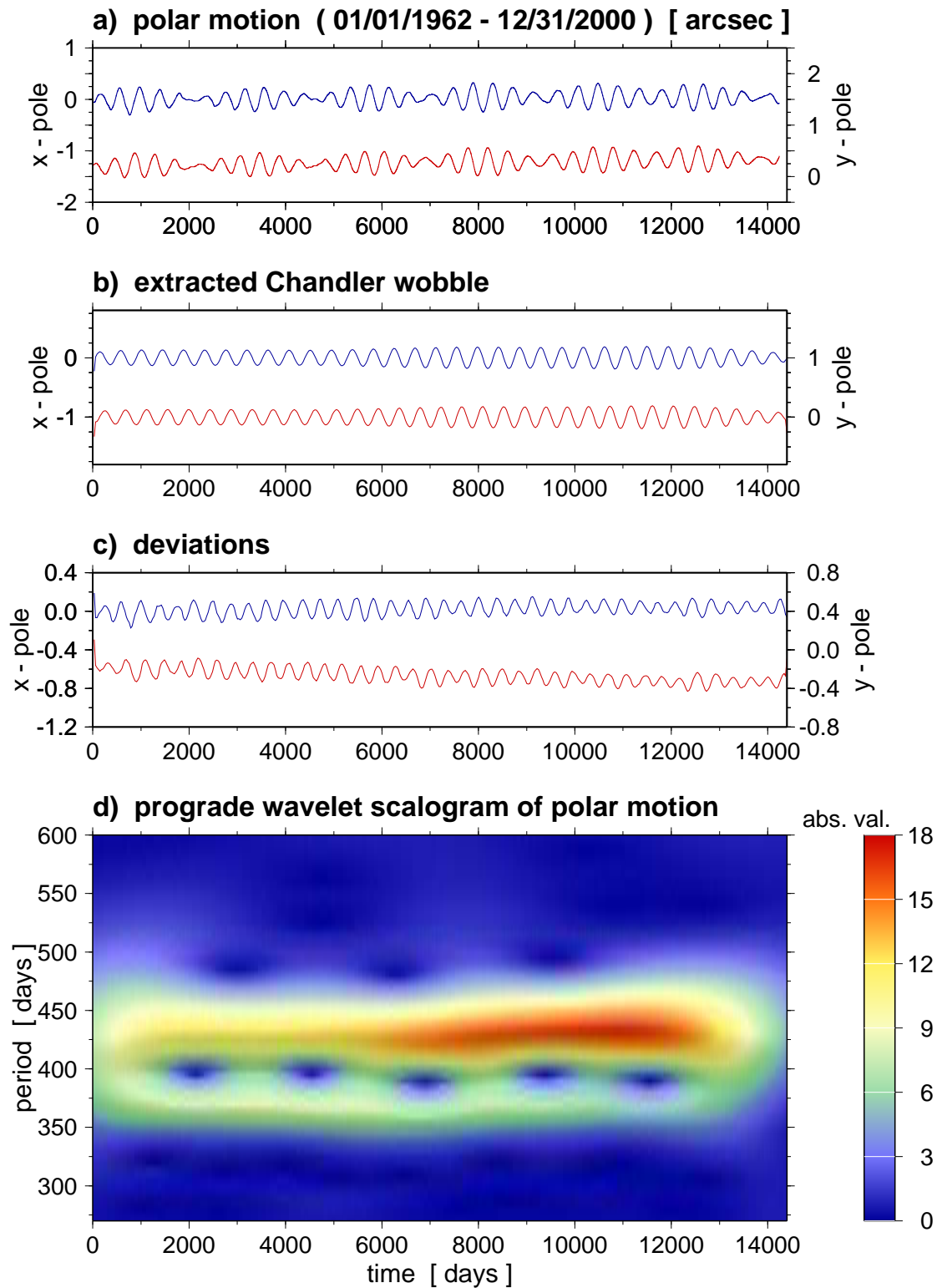


Abb. 5.1: Filterung der IERS Datenreihe zur Polbewegung

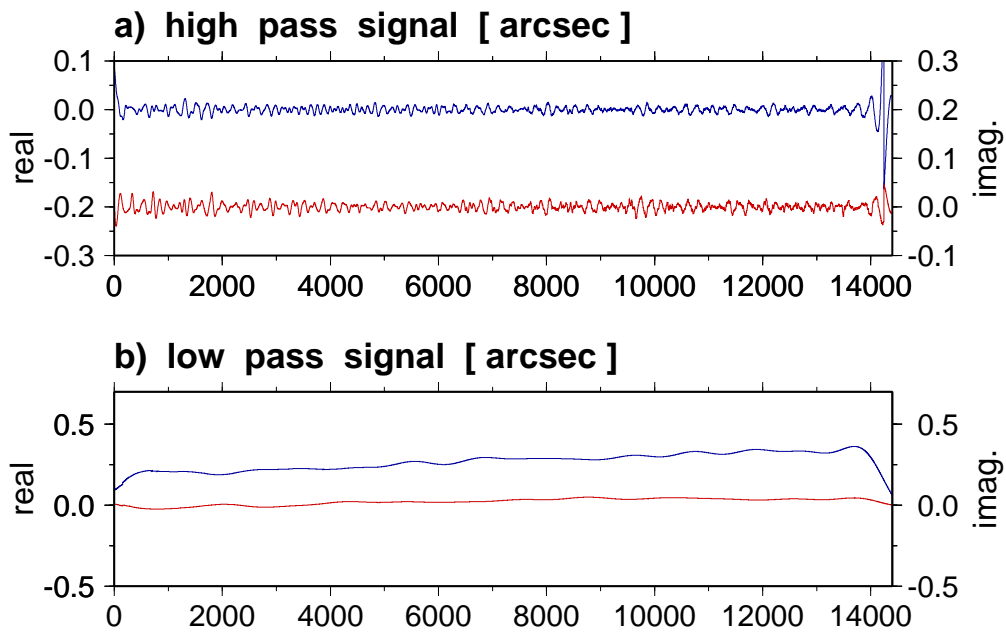


Abb. 5.2: Hochpass- und Tiefpass-Restsignal der IERS Polbewegung

Literaturverzeichnis

- DAUBECHIES, I.: *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia 1992
- FOUFOULA-GEORGIU, E. and KUMAR, P.: *Wavelets in Geophysics*. Academic Press, San Diego 1994
- GIBERT, D., HOLSCHNEIDER, M. und J.-L. LE MOUËL: *Wavelet analysis of the Chandler wobble*. J. Geophys. Res. - Solid Earth, vol. 103(11), 27069–27089, 1998
- HOLSCHNEIDER, M.: *L'analyse d'objets fractals et leur transformé en ondelettes*. Thèse de doctorat, Université de Provence, Aix-Marseille I, 1988
- HOLSCHNEIDER, M.: *Wavelets: an analysis tool*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995
- MERTINS, A.: *Signal Analysis*. Wiley, Chichester 2000
- RUDIN, W.: *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York 1973
- SCHMIDT, M.: *Grundprinzipien der Wavelet-Analyse und Anwendungen in der Geodäsie*. Shaker, Aachen 2001
- SCHMIDT, M.: *Wavelet-Analysen von Erdrotationsschwankungen*. Zeitschrift für Vermessungswesen 126, 94–100, 2001
- SCHMIDT, M. und H. SCHUH: *Abilities of Wavelet analysis for investigating short-period variations of Earth rotation*. IERS Technical Note No. 28, 73–80, 2000
- SCHMITZ-HÜBSCH und H. SCHUH: *Seasonal and Short-Period Fluctuations of Earth Rotation Investigated by Wavelet Analysis*. Festschrift for E.W. Grafarend, Universität Stuttgart, Techn. Rep. Dep. of Geodesy and Geoinformatics, Report Nr. 1999.6–2, 421–431, 1999
- SHENSA, M.J.: *The Discrete Wavelet Transform: Wedding the A Trous and Mallat Algorithms*. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 40, No. 10, 1992
- SHENSA, M.J.: *An Inverse DWT for Nonorthogonal Wavelets*. NCCOSC Technical Report, TR 1621, 1993
- WALTER, W.: *Einführung in die Theorie der Distributionen*. B-I-Hochschulskripten 754, Bibliographisches Institut, Mannheim 1970