DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION

bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe A Theoretische Geodäsie Heft Nr. 121

Manfred Schneider, Chunfang Cui

Theoreme über Bewegungsintegrale und ihre Anwendung in Bahntheorien

München 2005

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISSN 0938-2836 ISBN 3 7696 8201 7

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION

bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe A Theoretische Geodäsie Heft Nr. 121

Manfred Schneider, Chunfang Cui

Theoreme über Bewegungsintegrale und ihre Anwendung in Bahntheorien

München 2005

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISSN 0938-2836 ISBN 3 7696 8201 7

Adresse des Herausgebers /
address of the publisher

Deutsche Geodätische Kommission

Marstallplatz 8
D – 80 539 München

Telefon +49 - (0)89 - 23 031 - 1113
Telefax +49 - (0)89 - 23 031 - 1283/ - 1100
E-mail hornik@dgfi.badw.de
http://dgk.badw.de

Adressen der Autoren /
Addresses of the authors

Prof. Dr.rer.nat. Manfred Schneider
Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie
TU München
Arcisstraße 21
D-80333 München
e-mail: mxsx.tum@t-online.de

Dr.-Ing. Chunfang Cui
Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik
Sekretariat H12
TU Berlin
Straße des 17. Juni 135
D-10623 Berlin
e-mail: cui@alti.bv.tu-berlin.de

Diese Publikation ist als pdf-Dokument veröffentlicht im Internet unter der Adresse /
This volume is published in the internet

http://dgk.badw.de

ISSN 0938-2836 ISBN 3 7696 8201 7

VORWORT

„Nichts ist so praktisch, wie eine gute Theorie“ ist bekanntlich eine anschauliche Beschreibung des Begriffes „gute Theorie“. Auch der mit der Satellitengeodäsie bestens vertraute Fachkollege wird feststellen, dass das Verständnis der vorliegenden Monographie einen nicht unbeträchtlichen Arbeitsaufwand erfordert; leicht zu lesen ist sie nicht. Lohnt sich das dann, ist es eine „gute Theorie“? Was ist ihre praktische Relevanz?

Satellitengeodäsie beruht bekanntlich auf zwei Säulen, auf den numerischen und analytischen Verfahren der Integration der Bewegungsgleichungen eines Satelliten sowie entweder den Bewegungsgleichungen von Bodenpunkten oder weiterer Satelliten (Satellit/Satellit Technik SST). Für Routinearbeiten ist die numerische Integration äußerst zweckmäßig; die Arbeit kann man dabei weitgehend dem Computer überlassen, ein Grund, weshalb numerische Integrationsverfahren in der Praxis vielfach bevorzugt werden. Analytische Integration liegt "off the beaten tracks", wohl deshalb, weil dazu zumindest derzeit noch sehr anspruchsvolle theoretische Vorarbeiten erforderlich sind.

Die analytische Integration erweist sich andererseits von großer praktischer Relevanz dann, wenn es darum geht, neuartige Verfahrensweisen zu entwickeln, zu analysieren und vor allem klar zu verstehen. Der tiefere Grund liegt darin, dass nur analytische Integrationsverfahren eine sachgerechte Analyse der Problemstellungen im Spektralbereich zulassen.

Das Grundkonzept der Analyse im Spektralbereich basiert darauf, dass man die Ergebnisse einer sog. Spektralsynthese mit denen einer Spektralanalyse vergleicht. Die Spektralsynthese analysiert das geometrisch-mechanische Modell. Man beschreibt dabei die Zeitabhängigkeit von Zustandsparametern (Orts- und Geschwindigkeitsvektor in generalisierten Koordinaten/Impulsvariablen) als auch von Funktionalen der Zustandsparameter (d.s. synthetische Messdaten) mittels periodischer Lie-Reihen (d. s. trigonometrische Reihen). Die Spektralanalyse analysiert die Messdaten. Man ermittelt Amplituden, Phasenablagen und Frequenzen aus einer empirischen Zeitreihe von Messdaten.

Durch die derzeitigen Entwicklungen der Satellitentechnologie gewinnen Zeitreihen von (fast stets lückenhaften) sehr großen Mengen an Messdaten wie Radar- und Laseraltimeter, Satellit/Satellit Technik SST wie bei GRACE, GPS-Phasen –und Codemessungen etc. immer mehr an Bedeutung für komplexe geowissenschaftliche Fragestellungen.

Im Rahmen der Spektralanalyse erlauben moderne Computer und neu entwickelte Methoden der multivariaten Messdatenanalyse, letztere basierend auf nichtlinearen Ausgleichungsverfahren, nicht nur die Berechnung von Amplituden/ Phasenablagen bei vorgegebenen Frequenzen. Sie erlauben nunmehr auch die Berechnung der physikalisch bedingten Frequenzen in lückenhaften Zeitreihen von sowohl empirischen Messdaten als auch von durch Simulation erzeugten synthetischen Datenreihen. Vor allem diese physikalisch bedingten Frequenzen bilden für die Praxis eine ungemein wichtige Informationsquelle im Hinblick darauf, ob ein gewählter funktionaler Modellansatz ausreichend ist, welchen Informationsgehalt einzelne Datentypen im Hinblick auf eine stabile Bestimmung von Modellparametern besitzen etc.

Zur Spektralsynthese zerlegt man andererseits die 6 Bahnvariablen $x_i(t)$ bzw. deren Funktionale $f(x_i, t)$ in 3 Komponenten

$$x_i = \overline{x}_i + \delta x_i + \Delta x_i$$

($\overline{x}_i =$ Referenzbahn, $\delta x_i =$ stets periodische gravitative Bahnstörungen, $\Delta x_i =$ episodische Bahnstörungen durch Oberflächenkräfte, messbar mit Akzelerometer). Die Akzelerometerdaten bilden eine explizit von der Zeit abhängige Reihe, die direkt (numerisch) integriert werden kann; Einflüsse durch Oberflächenkräfte können aus diesem Grund durch Reduktion der Messdaten berücksichtigt werden.

Alle (stets implizit über die Position) von der Zeit abhängigen gravitativen Bahnstörungen haben (bis auf spezielle Resonanzeffekte) stets periodischen Charakter; sie können sehr effizient durch Lie-Reihen beschrieben werden. Dabei hängt es in extremen Maße von der Referenzbahn ab, wie kompliziert die Lie-Reihenentwicklung wird. Wählt man beispielsweise in der Satellitengeodäsie eine simple Keplerbahn als Referenzbahn, ist das Ergebnis eine äußerst komplizierte Lie-Reihe, wählt man eine sachgerechtere Referenzbahn, vereinfacht sich die Lie-Reihe beträchtlich.

Für die Wahl einer möglichst günstigen Referenzbahn kommt der Mannigfaltigkeit von expliziten Lösungen (elementarer Funktionen und endlich viele Quadraturen, d. h. Konstanten bestimmter Integrale) eines Bewegungsproblems eine zentrale Bedeutung zu. Die theoretischen Untersuchungen dazu konnten, zumindest für alle derzeit ersichtlichen praktischen Belange, mit der vorliegenden Monographie erfolgreich abgeschlossen werden. Damit sind die Grundlagen geschaffen, alle die vielfältigen Bewegungsprobleme der Himmelsmechanik (Satellitenbahnen, Planetensystem, Mondbahn, Erdrotation etc.) effizient und nach einem einheitlichen Verfahren durch analytische Integration zu lösen und damit die Modelle/Messdaten auch im Spektralbereich zu analysieren. Und meine langjährigen Forschungsarbeiten im Rahmen der Fundamentalstation Wettzell ebenso wie an der TU Berlin haben stetig meine Überzeugung gefestigt, dass zu deren klarem und einwandfreiem Verständnis Betrachtungen und Analysen im Spektralbereich unumgänglich sind.

Die vorgelegte Monographie ist das Ergebnis einer engen Teamarbeit zweier Spitzenwissenschaftler auf dem Gebiet der Himmelsmechanik und der Satellitengeodäsie. Sie beruht auf langjährigen Vorarbeiten beider Seiten, die vor allem durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft unterstützt worden sind. Ihr ist dafür ausdrücklich zu danken; ohne die DFG würde unter den heutigen gesellschaftlichen Bedingungen in Deutschland die stets langsame und daher langfristige Grundlagenforschung im Hinblick auf alternative Methoden verkümmern.

Der Baum neuer Erkenntnis ist nunmehr gepflanzt; wie die Früchte der praktischen Anwendungen schmecken werden, das wird hoffentlich die nahe Zukunft erweisen.

Berlin, im März 2005

Dieter Lelgemann

Zusammenfassung

Die Lösung eines Bewegungsproblems wäre bekannt, wenn man eine ausreichende Anzahl von Bewegungsintegralen angeben könnte. Das ist beispielsweise der Fall beim Kepler-Problem wie auch bei den Stäckel-Systemen, zu denen das Kepler-Problem wie auch das Vinti-Problem zählen.

Die Bewegungsintegrale implizieren meist Erhaltungssätze, welche Symmetrieeigenschaften des dynamischen Systems widerspiegeln. Die Suche nach Bewegungsintegralen lässt sich systematisieren, indem man diese Symmetrieeigenschaften aufsucht. Das bringt das Theorem von Noether zum Ausdruck. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Symmetrien eines Systems als Lösungen der Killing-Gleichungen zu bestimmen. Eine weitere Möglichkeit ist, das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwangs heranzuziehen, um Bewegungsintegrale aufzufinden.

Es besteht also der interessante Zusammenhang:

Gauß-Prinzip - Theorem von Noether - Killing-Gleichungen

wobei die beiden letzteren mit den Symmetrien des betrachteten dynamischen Systems zu tun haben, alle drei aber Wege zum Auffinden von Bewegungsintegralen sind. Andererseits werden durch Theoreme wie die Theoreme von Stäckel und Liouville ganze Klassen von integrablen Bewegungsproblemen erschlossen.

Von besonderem Interesse sind Theoreme über die Integrabilität bzw. Nichtintegrabilität von dynamischen Systemen, vor allem, wenn sie notwendige und hinreichende Bedingungen hierfür formulieren. Genannt sei hier das Nichtintegrabilitätstheorem von Ziglin. Weniger ergiebig ist bislang die Painlevesche Vermutung, jedenfalls aus himmelsmechanischer Sicht.

Der Regelfall scheint aber nach aller bisherigen Erfahrung, dass viele himmelsmechanische Bewegungsprobleme nichtintegrabel sind, man also nicht die ausreichende Anzahl von Bewegungsintegralen angeben kann. In dieser Situation sind Theoreme hilfreich, die es erlauben, wenigstens die existierenden Bewegungsintegrale aufzufinden. Genannt seien hier die Theoreme von Bruns und Poincaré, aber auch die neuen Separationstheoreme und Korollare von Cui.

Die integrablen Bewegungsprobleme sind für die Ausarbeitung von Bahntheorien in der Himmelsmechanik von herausragendem Interesse. Die Lösungen solcher Bewegungsprobleme können als intermediäre Lösungen wenigstens in zweierlei Weise verwendet werden. Zum einen als Lösungsansatz für eine Störungsrechnung im Sinne der Variation der Integrationskonstanten. Zum anderen als Zielfunktionen von Transformationen und damit zur genauen oder genäherten Lösung eines aktuellen Bewegungsproblems mit den Mitteln der Transformationstheorie, beispielsweise durch fastidentische Transformationen basierend auf Lie-Reihen oder Lie-Transformierten.

In der Frage der Integrabilität eines dynamischen Systems ist vor allem bedeutsam, dass geringfügige Zusätze zur Hamiltonfunktion eines integrablen Systems bereits zu dessen Nichtintegrabilität führen können. Hier kommt dem KAM-Theorem eine kaum zu unterschätzende Bedeutung zu, gewährleistet es doch, dass unter klaren Voraussetzungen die Tori eines integrablen Systems durch eine Störung nicht zerstört, sondern lediglich verformt werden.

Ein integrables System kann also unter bestimmten Bedingungen bei einer Störung durchaus integrabel bleiben. Das Hauptproblem der Satellitenbahntheorie zählt hierzu leider nicht, ist es doch nach Ausweis des Theorems von Ziglin nichtintegrabel. Aber das davon geringfügig verschiedene Vinti-Problem ist als Stäckelsystem integrabel.

Damit ist die Frage aufgeworfen, welche Rolle die Nichtintegrabilität spielt, wenn man ein nichtintegrables Bewegungsproblem vermittels Transformationen auf eine integrables abbildet, dessen Lösung als intermediäre Lösung als Zielfunktion Verwendung findet. In anderer Form stellt sich die Frage aber auch in der Störungsrechnung, wenn dort die intermediäre Lösung als Lösungsansatz für ein nichtintegrables Bewegungsproblem verwendet wird. Diese Problematik wird vermutlich nur deshalb nicht wahrgenommen, weil in den Anwendungen weder die Transformationen noch die Störungsgleichungen bis zu einer beliebig hohen Ordnung ausgeführt bzw. gelöst werden können. Die praktisch eingesetzten Lösungsverfahren (nach von Zeipel, Hori, Deprit, Kamel einerseits, nach Poisson und Picard-Lindelöf andererseits, um nur einige zu nennen) wurden bisher auf die allerersten Schritte beschränkt.

Schließt man an die geometrischen Überlegungen zu den Bewegungsintegralen an, so könnte man daran denken, so etwas wie Pseudo-Integrale einzuführen, um Integrabilität eines dynamischen Systems zu erzielen. Man könnte sich an einer Situation orientieren, wie sie beispielsweise bei der Auflösung linearer Gleichungssysteme mit verschwindender Koeffizientendeterminante vorliegt. Hier behilft man sich mit der Einführung von Pseudoinversen. Ein anderer Fall ist aus der Theorie selbstadjungierter Randwertaufgaben bekannt, wo man erfolgreich erweiterte Greensche Funktionen einführt *(Schneider I 1992).*

Inhaltverzeichnis

Abschnitt A

Einführung in die Problemstellung

Wie erhält man die Lösung/Lösungsmannigfaltigkeit eines Bewegungsproblems, das als Anfangs- oder als Randwertaufgabe gestellt ist?

Ein Weg, der nicht nur in der Himmelsmechanik wiederholt erfolgreich beschritten worden ist, nutzt die Kenntnis der Bewegungsintegrale des Bewegungsproblems. Mit dieser Möglichkeit setzt sich die vorliegende Studie auseinander.

1. Kepler-Problem, Dynamische Systeme und Integrabilität

Als einführendes Beispiel sei gewählt

1.1 Bewegungsintegrale des Kepler-Problems

Für das durch die Newton-Eulersche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} =: \mathbf{K}_{\mathbf{Kep}} \tag{1.1}$$

definierte **Kepler-Problem,** das eine Zentralbewegung unter der **Kepler-Kraft** $\mathbf{K}_{\mathbf{Kep}}$ beschreibt. sind bekannt (*Schneider I 1992*) die

- Erhaltung des **Bahndrehimpulses**

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} =: C\mathbf{C_0} \tag{1.2}$$

mit $\mathbf{r}$ Ortsvektor

$\dot{\mathbf{r}}$ Geschwindigkeitsvektor

$\mathbf{C}$ Vektor des Bahndrehimpulses (Integrationskonstante),

- Erhaltung der **Gesamtenergie**

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GM}{r} = h \tag{1.3}$$

mit h bezogene Gesamtenergie (Integrationskonstante), ("bezogene" bedeutet hier und im folgenden eine Abkürzung für "auf die Einheitsmasse bezogene")

- **Laplace-Integral**

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{C} = GM\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{A} \tag{1.4}$$

mit $\mathbf{A}$ Runge-Lenz-Vektor (Integrationskonstante), sowie die

- **Kepler-Gleichung**

$$E - e\sin E = M = n(t - t^*) \tag{1.5}$$

mit E, M und n exzentrische bzw. mittlere Anomalie und mittlere Winkelgeschwindigkeit (je eine Funktion von $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{C}$ und h)

t^* = Zeit zum Apsidendurchgang (Integrationskonstante).

Das sind sechs Funktionen des durch ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$), ***die Phase der Bewegung***, beschriebenen momentanen Bewegungszustandes eines Teilchens. Diese 6 ***Bewegungsintegrale*** sind selbst Differentialgleichungen von je 1. Ordnung für die Bahn $\mathbf{r}(t)$ des um den Zentralkörper M umlaufenden Teilchens m, die der Ordnung sechs der vektoriellen Bewegungsgleichung äquivalent sind und für die vollständige Lösung des Kepler-Problems ausreichen.

Anm.: (1) Beide Integrale (1.2) und (1.3) bestimmen die Gestalt und den Umfang der Bewegungsbahn. Wenn $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$, dann erhält man einen nichtentarteten Kegelschnitt als mögliche Bahnkurve, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel, abhängig davon ob $h<0$, $h=0$ oder $h>0$. Für $\mathbf{C}=\mathbf{0}$ erhält man einen entarteten Kegelschnitt: geradlinige Kepler-Bewegung.

(2) Im Falle $\mathbf{C} \neq 0$ zeigt das Integral (1.2) die Ebenheit der Bewegung und die Erhaltung der Flächengeschwindigkeit. Das Integral (1.4) bestimmt in diesem Falle die Orientierung der Bahn innerhalb der Bewegungsebene. Der Runge-Lenz-Vektor zeigt in die Richtung des Apsidenvektors der Bahnkurve. Da der Vektor $\mathbf{A}$ innerhalb der Bahnebene und senkrecht zu dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ liegt, ist dessen Richtung bereits durch das Impulsintegral (1.2) bestimmt. Das Laplace-Integral ergibt also nur ein unabhängiges Integral der Bewegung. Im entarteten Falle besagt das Laplace-Integral nichts.

(3) Die Kepler-Gleichung stellt das 6-te unabhängige Integral für die elliptische Bewegung dar. Für eine parabolische oder hyperbolische Bahn nimmt das 6-te Integral eine andere Form an.

(4) Zusammengefasst lässt sich die nichtentartete Kepler-Bewegung durch die o.g. 6 unabhängigen Bewegungsintegrale mit 6 beliebigen Integrationskonstanten (drei Komponenten von $\mathbf{C}$, h, eine Komponente von $\mathbf{A}$ oder eine Funktion von dessen drei Komponenten und t^*) eindeutig beschreiben. Eines der 6 Integrale hängt explizit von der Zeit t ab.

1.2 Bewegung eines Teilchens im 3-dimensionalen Raum

Die Bewegung eines Teilchens lässt sich durch die Newton-Eulersche Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f} \tag{1.6}$$

oder äquivalent durch die Gleichungen, die aus ihr durch ***Variablensubstitution*** hervorgehen, d.h. durch

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \qquad \text{und} \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \tag{1.7}$$

beschreiben, also durch insgesamt sechs gewöhnliche Differentialgleichungen je 1. Ordnung in der Zeitableitung. Ein Bewegungsintegral ist dann eine (algebraische oder auch transzendente) funktionale Beziehung des Orts- und Geschwindigkeitsvektors

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \alpha \tag{1.8}$$

bzw., wenn man die frei wählbare Konstante α in die Funktion einbezieht,

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t; \alpha) = 0 . \tag{1.9}$$

Ein nicht explizit zeitabhängiges Bewegungsintegral $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \alpha$ lässt sich meist als Erhaltungssatz interpretieren. Die Bewegungsintegrale des Kepler-Problems ergeben fünf Funktionen der Gestalt

$$\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \alpha_i \; (i = 1,2,\ldots,5) \tag{1.10}$$

und eine zeitabhängige Funktion (vgl. Kepler-Gleichung)

$$\Phi_6(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \alpha_6, \tag{1.11}$$

also fünf Erhaltungssätze und ein explizit zeitabhängiges Integral. Hat man allgemein sechs Bewegungsintegrale

$$\Phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \alpha_i \qquad (i = 1,2,\ldots,6) \tag{1.12}$$

gefunden, so kann man diese Funktionen unter der Bedingung

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_6)}{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{v})} \neq 0, \tag{1.13}$$

also einer nicht verschwindenden ***Funktionaldeterminante***, nach den ***Zustandsvektoren*** auflösen. Man erhält so als Lösung der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_6) = \mathbf{r}(t; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6) \text{ und } \mathbf{v} = \mathbf{v}(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_6) = \mathbf{v}(t; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6),$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6$, die entsprechend der Ordnung des Bewegungsproblems, frei wählbaren Integrations-konstanten bedeuten, die entweder durch Vorgabe von Anfangswerten oder von zeitlichen Randwerten festgelegt werden können: ***Determinierung*** des Bewegungsproblems (*Schneider 1992ff*).

Mit anderen Worten:

*Kennt man sechs unabhängige Bewegungsintegrale der vorgelegten Bewegungsgleichungen, so kennt man deren Lösungsgesamtheit. (**Scharparameter** sind die Integrationskonstanten.)*

Die ***Unabhängigkeit*** der Bewegungsintegrale wird sichergestellt durch das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante (Invertierbarkeit der Jacobimatrix!)

Ein Integral ist dann und nur dann von anderen (un-)abhängig, wenn seine partiellen Ableitungen nach den Zustandsvektoren von denen der anderen linear (un-)abhängig sind.

Ein anderes Kriterium zur Beurteilung der Abhängigkeit ergibt sich aus dem Bestehen einer Beziehung

$$\Psi(\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, ...) = 0 \tag{1.14}$$

unter den Integralen $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, ...$. In einem solchen Fall ist mindestens eines der Integrale von den anderen abhängig.

Ein von anderen abhängiges Integral stellt eine logische Konsequenz der anderen Integrale dar: es bietet zwar keine weitere Information als die durch die anderen Integrale gegebene Information über die Bewegung, aber eine neue mathematische Darstellung der Informationen. Das kann für die Problemlösung hilfreich sein.

1.3 Dynamische Systeme mit ν Freiheitsgraden

Die vorstehenden Überlegungen sollen auf dynamische System mit ν Freiheitsgraden ausgedehnt werden. Ein solches System werde durch ein System von $n = 2\nu$ gewöhnlichen Differentialgleichungen je 1. Ordnung, also ein System Differentialgleichungen *n*. Ordnung

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, ..., y_n; t), \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{1.15}$$

beschrieben. Ein Bewegungsintegral ist eine funktionale Beziehung zwischen den zu bestimmenden Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t), ..., y_n(t)$ und der unabhängigen Variable der Form

$$\Phi(y_1, y_2, ..., y_n; t) = \alpha, \tag{1.16}$$

worin α eine frei wählbare Konstante bedeutet.

Von besonderem Interesse ist der Fall, in dem die unabhängige Variable *t* nicht in den Funktionen f_i der rechten Seiten der Gleichungen (1.15) auftritt, d.h. die Gleichungen (1.19) die Form annehmen

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, ..., y_n) \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{1.17}$$

Ein derartiger Fall wird stationär oder autonom genannt. Ein stationäres dynamisches Systemen liegt beispielsweise vor beim Mehrköperproblem, d.h. dem *N*-Teilchenproblem (Freiheitsgraden $\nu = 3N$) mit Newtonscher Gravitationswechselwirkung. (Das entsprechende Gleichungssystem ist von der Ordnung $n = 6N$.)

In diesem Fall gilt allgemein:

Satz (1): ***Liegen*** $n-1$ ***unabhängige Integrale der Form***

$$\Phi_i(y_1, y_2, ..., y_n) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, ..., n-1) \tag{1.18}$$

vor, dann lässt sich die Lösung des Systems durch eine Quadratur ermitteln.

Zum Beweis: Da die Integrale der Voraussetzung gemäß unabhängig sind, lassen sich $n-1$ unbekannte Funktionen mit Hilfe der Integrale als Funktionen der Integrationskonstanten und der restlichen Funktion y_K darstellen:

$$y_i\left(y_k;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}\right)=\alpha_i \qquad \left(i=1,2,...,n-1;\, i\neq k\right).$$

Führt man diese in die Gleichung für y_K ein, dann bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{dy_K}{dt}&=f_K\left(y_1\left(y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}\right),y_2\left(y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}\right),...,y_K,...,y_n\left(y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}\right)\right)\\&=F\left(y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}\right).\end{aligned}$$

Falls

$$\frac{\partial F}{\partial y_K}=0$$

dann erhält man

$$y_K=F\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}\right)t+\alpha_n \tag{1.19}$$

mit der frei wählbaren Integrationskonstante α_n; andernfalls ergibt die Quadratur

$$t=\int_{\alpha_n}^{y_K}\frac{dy_K}{F\left(y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}\right)} \tag{1.20}$$

zwischen je zwei benachbarten Nullstellen y^σ $(\sigma=1,2,...)$ der Funktion $F\left(y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}\right)$: $\left[y_K,\alpha_n\right]\in\left(y^j,y^{j+1}\right)$ worin α_n eine innerhalb des Intervalls $\left(y^j,y^{j+1}\right)$ frei wählbare Integrationskonstante ist. Es besteht allerdings die Möglichkeit, dass sich die Quadratur nicht über das Intervall $\left(y^j,y^{j+1}\right)$ hinaus analytisch fortsetzen lässt. Eine der Nullstellen y^σ ist dann ein Verzweigungspunkt des Systems, wenn keine analytische Fortsetzung der Quadratur möglich ist. Auf beiden Seiten des Verzweigungspunktes ist das Bewegungsverhalten des Systems unterschiedlich (*Schneider 1992ff)*.

Satz (2): ***Liegen*** $n-2$ ***unabhängige Integrale der Form* (1.18) *vor, dann existiert ein weiteres, das*** $n-1$***-te unabhängige Integral des Gleichungssystems* (1.17).**

Zum Beweis: Mit der Hilfe der vorliegenden Integrale lassen sich $n-2$ unbekannte Funktionen als Funktionen der $n-2$ Integrationskonstanten und von zwei restlichen unbekannten Funktionen y_J und y_K darstellen und das Gleichungssystem reduziert sich zu

$$\frac{dy_J}{dt}=F\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right),\qquad \frac{dy_K}{dt}=G\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right),$$

also ein Gleichungssystem der 2. Ordnung, das in eine Differentialgleichung

$$G\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right)dy_K-F\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right)dy_J=0 \tag{1.21}$$

übergeführt werden kann. Die letztere Gleichung lässt sich im weiteren durch Einführung eines ***integrierenden Faktors*** lösen *(Schneider I 1992, Stumpff 1959ff)*. Eine Funktion $M\left(y_J,y_K\right)$ der Variablen y_J und y_K unter der Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial y_J}\left\{M\left(y_J,y_K\right)G\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial y_K}\left\{M\left(y_J,y_K\right)F\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right)\right\}$$

wird ein integrierender Faktor der Differentialgleichung (1.21) genannt; denn die o.g. Bedingung bedeutet, dass die Ausdrücke $M\left(y_J,y_K\right)G\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right)$ und $M\left(y_J,y_K\right)F\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right)$ die partiellen Ableitungen einer Funktion $\Phi\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right)$ der Variablen nach y_K bzw. nach y_J sind. Damit geht die Differentialgleichung (1.21) über in

$$d\Phi\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right)=0$$

und die Integration ergibt

$$\Phi\left(y_J,y_K;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right)=\alpha_{n-1},$$

das ist ein neues Integral des ursprünglichen Systems. Es ist leicht zu beweisen: wenn die vorliegenden Integrale $\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-2}\right)$ voneinander unabhängig sind, dann ist auch das neue unabhängig. Die Existenz derartiger integrierender Faktoren ist abgesichert durch die Theorie der Differentialgleichungen 1. Ordnung. Aus den Sätzen (1) und (2) folgt

Satz (3): ***Liegen*** $n-2$ ***unabhängige Integrale der Form*** **(1.18)** ***vor, dann lässt sich das System*** **(1.17)** ***vollständig lösen durch ein zusätzliches Integral und eine Quadratur.***

Die vorstehenden Diskussionen ergeben weiter, dass sich die allgemeine Lösung (wenn sie überhaupt existiert) eines dynamischen Systems mit ν Freiheitsgraden durch *N* unabhängige Integrale angeben lässt. Darunter ist mindestens ein Integral zeitabhängig. (Andernfalls beschreibt das Gleichungssystem ein in Ruhe stehendes "dynamisches System".)

Geometrische Überlegungen: Ein Integral der Form (1.16) impliziert zu jedem Zeitpunkt eine Schar von $n-1$-dimensionalen ***Hyperflächen*** im n-dimensionalen Phasenraum. Analog zum 3-dimensionalen Raum sind die folgenden geometrischen Fakten vorstellbar:

- Jedes Integral (1.16) entspricht eine Schar Hyperflächen (Integrationsflächen). Wenn das Integral explizit zeitabhängig ist, ändern sich die Position und Gestalt der Integrationsflächen.
- Zwei voneinander abhängige Integrale beschreiben dieselbe Schar von Hyperflächen.
- Jede Integrationsfläche einer Flächenschar unterscheidet sich von den anderen durch den Wert der Integrationskonstante; sie schneiden sich nicht, außer an möglicherweise existierenden singulären Punkten oder singulären Linien.
- Jede derartige Hyperfläche schneidet die Hyperfläche eines anderen Integrals in je einer sich im Lauf der Zeit ändernden $n-2$-dimensionalen Hyperfläche.
- Die durch $n-1$ Integrale implizierten $n-1$ Hyperflächen (für gegebene Werte der Integrations-konstanten $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$) schneiden sich in einer Kurve im Phasenraum.
- Die durch das *n*-te unabhängige Integral gegebene Hyperfläche schneidet diese Kurve in einem (ebenfalls sich im Lauf der Zeit ändernden) Punkt, der den Zustand des dynamischen Systems angibt und dessen Bewegung im Konfigurationsraum. Die zeitliche Änderung der Position dieses Schnittpunktes beschreibt eine Trajektorie im Phasenraum; sie wird Phasenbahn des Systems genannt.

Im Fall des autonomen Systems (1.17) ist die Schnittlinie der durch die Integrale (1.18) angegebenen $n-1$ Hyperflächen genau die Trajektorie des den Systemzustand repräsentierenden Punktes und das letzte Integral gibt seine Bewegung auf der Trajektorie an.

In einem integrablen dynamischen System mit dem Freiheitsgrad $\nu = 1$ ist der Phasenraum zweidimensional, die Hyperflächen eindimensional. Die Schnittmenge ist dann ein Punkt, der mit dem Variationsbereich der Integrationskonstanten α_1 und α_2 wandert. Eine derartige geometrische Vorstellung hilft öfter bei der Untersuchung der Eigenschaften eines dynamischen Systems.

1.4 Lösbarkeit, Integrabilität und Separierbarkeit von Bewegungsproblemen

1.4.1 Wann gilt ein Bewegungsproblem als gelöst?

Was unter Lösung zu verstehen ist, hängt davon ab, in welcher Form das Bewegungsproblem formuliert ist.

Beispiel: Ist das Bewegungsproblem als Differentialgleichung formuliert, so wird man unter Lösung eine **partikuläre** Lösung verstehen. ***Existenz- und Eindeutigkeitssätze*** aus der Theorie der Differentialgleichungen können hier herangezogen werden, auch zur Frage, ob es lokale oder globale Lösungen sind. Wenn das Bewegungsproblem als Integralgleichung formuliert ist, stehen Existenz- und Eindeutigkeitssätze aus der Theorie der Integral-gleichungen zur Verfügung.

Die Existenz- und Eindeutigkeitssätze sind jedoch nicht immer, wie beispielsweise der ***Satz von Picard – Lindelöf***, konstruktiv, d.h. sie geben selten auch ein Verfahren an, wie man die Lösung bekommen kann.

Gibt es Kriterien, die anzeigen, dass die Lösungsgesamtheit bestimmt ist?

Ist das Bewegungsproblem als Differentialgleichung formuliert, so interessiert häufig dessen **allgemeine Lösung**, nicht nur eine **partikuläre.**

Beispiele: Im Falle des in der Himmelsmechanik wichtigen Kepler-Problems kann man die Lösungsgesamtheit angeben, im Falle des Dreikörperproblems hingegen hat man bisher nur einige partikuläre Lösungen gefunden, die exakten **Euler-Lagrangeschen Lösungen** *(Schneider 1992ff, Stumpff 1959ff)*.

1.4.2 Lösbarkeit und Integrabilität

Das Beispiel des Dreikörperproblems zeigt, dass ein Bewegungsproblem durchaus streng lösbar sein kann, ohne integrabel sein zu müssen. Andererseits zeigt das Kepler-Problem, dass die **Integrabilität** eines Bewegungsproblems die Lösungsgesamtheit erschließen kann.

Man muss also zwischen Lösbarkeit und Integrabilität eines Bewegungsproblems unterscheiden.

So schreibt *Zakharov* in *(Zakharov 1991):*

> *"... the integrability conditions are, after all, much more restrictive than the conditions for the existence of unique solutions."*
>
> Nichtintegrabilität schließt Lösbarkeit nicht aus.

Als Beispiel sei das ***Dreikörperproblem*** angeführt, also die Bewegung dreier Teilchen in Newtonscher Gravitationswechselwirkung, das nicht integrabel ist, jedoch eine Reihe von exakten Lösungen besitzt, die **Euler-Lagrange-Lösungen** *(Schneider II 1993, Stumpff 1959ff).* Auch im N-Körperproblem sind exakte Lösungen bekannt, die Kollineationen, obwohl es als nichtintegrabel gilt.

Die **Integrabilität** eines Bewegungsproblems liefert umgekehrt die **Lösungsmannigfaltigkeit** und nicht nur einzelne partikuläre Lösungen.

Die **Existenz- und Eindeutigkeitssätze** der Theorie der Differentialgleichungen sichern unter bestimmten Voraussetzungen die Lösung einer Bewegungsgleichung, ohne dass die vollständige Integrabilität des Bewegungsproblems gegeben sein muss.

Anm.: *Formuliert man das Bewegungsproblem als Integralgleichung, und zwar*

- *als Volterrasche Integralgleichung im Falle einer* ***Anfangswertaufgabe*** *oder*
- *als Fredholmsche Integralgleichung bei* ***Randwertdeterminierung****,*

so kann auf entsprechende Sätze aus der Theorie der Integralgleichungen zurückgegriffen werden.

Die Existenz einer ausreichenden Anzahl von Bewegungsintegralen impliziert die Kenntnis der Lösungsmannigfaltigkeit des Bewegungsproblems. Das zumindest legen die bekannten integrablen Bewegungsprobleme nahe. Aber unter welchen Voraussetzungen ist das der Fall und wie findet man die Bewegungsintegrale? Mit anderen Worten*: Wann ist ein Bewegungsproblem integrabel?* Im Abschnitt B sollen ohne Anspruch auf Vollständigkeit

- **Theoreme über die Existenz von Bewegungsintegralen** sowie
- **Integrabilitäts -** bzw. **Nichtintegrabilitätstheoreme**

zusammengestellt werden, mit deren Hilfe man herausfinden kann, ob ein Bewegungsproblem integrabel bzw. nichtintegrabel ist.

Begonnen werde hier mit einer ***Definition der Integrabilität eines Bewegungsproblems.*** Das Beispiel des Kepler-Problems könnte als Definition der Integrabilität nahe legen

Def.1 *Ein Bewegungsproblem ist genau dann integrabel, wenn die Anzahl der Bewegungsintegrale mit der Ordnung des Bewegungsproblems übereinstimmt.*

Diese Definition ist zu weitgehend und auch zu ungenau, denn man kommt durchaus mit weniger Bewegungsintegralen aus. Man kann vielmehr definieren

Def.2 *Ein autonomes dynamisches System der Ordnung n heißt* **integrabel***, wenn wenigstens n-2 Bewegungsintegrale existieren.*

Andernfalls wird es als **nichtintegrabel** *bezeichnet.*

Diese Definition der Integrabilität bzw. Nichtintegrabilität

- setzt auf die nach einem ***Satz von Jacobi*** *(Jacobi 1884, Schneider I 1992, Stumpff 1959ff)* bestehende Möglichkeit, die restlichen zwei Integrale durch Quadraturen bekannter Funktionen zu ermitteln

und sie

- bezieht sich ausdrücklich auf die Existenz bzw. Nichtexistenz einer ausreichenden Anzahl von Bewegungsintegralen.

In diesem Sinne ist das bereits genannte Mehrkörperproblem gravitierender Massenpunkte **für $N = 2$ integrabel** und **für** $N \geq 3$ **nichtintegrabel**.

Das Zweikörperproblem ist also integrabel, schon das Dreikörperproblem aber im allg. nichtintegrabel. Für letzteres fehlen $6\times3-6=10$ Bewegungsintegrale. Hingewiesen sei auf die Diskussion dieser Frage bei *(Rebhan 1999).*

Unter gewissen Voraussetzungen genügen sogar schon *n* ***erste Integrale***, so dass man definieren kann:

Def.3 *Ein autonomes* ***Hamiltonsches System,*** *definiert auf einem 2n-dimensionalen Gebiet U des Phasenraumes, heißt dort integrabel, wenn es n erste Integrale* $K_1,\dots,K_n$ *gibt, die in* ***Involution*** *sind und linear unabhängige Gradienten haben.*

Die hier gebrauchten Begriffe werden noch näher erklärt werden.

Anm.: Die Definition (1) der Integrabilität könnte auch wie folgt formuliert werden:

Ein dynamisches System mit ν *Freiheitsgraden ist integrabel, wenn es in allgemeiner Form lösbar ist, d.h. seine Lösung enthält* ν *frei wählbare Integrationskonstanten, mit denen sie zu beliebigen Anfangszuständen oder (konsistenten) Randwerten passt.*

Die Definition (1) wird so zur notwendigen und hinreichenden Bedingung, während die Definitionen (2) und (3) je ein hinreichendes Kriterium formulieren.

1.4.3 Separierbarkeit und Integrabilität

Die kanonischen Bewegungsgleichungen sind die charakteristischen Gleichungen einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung, ***der Hamilton-Jacobi-Gleichung*** *(Jacobi 1884, Schneider I 1992, Stumpff 1959ff)*

$$H(\mathbf{q},S_{\mathbf{q}};t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0\,. \tag{1.22}$$

Ein vollständiges Integral $S(\mathbf{q},\alpha;t)$ dieser Gleichung vermittelt über die (impliziten) Transformations-gleichungen

$$\mathbf{p}=S_{\mathbf{q}} \qquad \beta=S_{\alpha} \qquad (\alpha,\beta\ \text{ Integrationskonstanten}) \tag{1.23}$$

die Lösung der kanonischen Gleichungen

$$\dot{\mathbf{q}}=H_{\mathbf{p}} \qquad \dot{\mathbf{p}}=-H_{\mathbf{q}}\,. \tag{1.24}$$

Die Funktion $S(\mathbf{q},\alpha;t)$ kann dabei als die ***Erzeugende*** einer kanonischen Transformation

$$\mathbf{q},\mathbf{p}\rightarrow\alpha,\beta \tag{1.25}$$

des aktuell gestellten Bewegungsproblems in ein Gleichgewichtsproblem interpretiert werden. Wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, dann folgt

$$H+\frac{\partial S}{\partial t}=0\rightarrow\frac{\partial S}{\partial t}=-E\ \Rightarrow\ S(\mathbf{q},\alpha;t)=-Et+S'(\mathbf{q},\alpha) \tag{1.26}$$

und damit als ***verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung*** *(Schneider I 1992)*

$$H(\mathbf{q},S'_{\mathbf{q}})=E\,. \tag{1.27}$$

Sie ist eine Bestimmungsgleichung für die Erzeugende $S'(\mathbf{q},\alpha)$ und ebenfalls eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung. Sie kann in einer Reihe von Fällen durch Separation, also Trennung der Veränderlichen, exakt gelöst werden. Beispielsweise kann sie auf diesem Wege gelöst werden, wenn man als generalisierte Koordinaten orthogonale krummlinige Koordinaten verwendet und bestimmte Einschränkungen der Funktionsstruktur der potentiellen Energie vornimmt. Diese rühren von der Forderung her, dass die Potentialfunktion eine Lösung der Laplace-Gleichung der Potentialtheorie sein soll. Unter diesen Voraussetzungen sind eine Reihe himmelsmechanisch interessanter Bewegungsprobleme lösbar, beispielsweise das Kepler-Problem und das Vinti-Problem *(Schneider IV 1999).*

Ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung für ein konservatives dynamisches System durch Separation lösbar, dann führt das auf ausreichend viele unabhängige Bewegungsintegrale. Vollständige Separierbarkeit der Hamilton-Jacobi-Gleichung hat also die Integrabilität des Bewegungsproblems zur Folge. Aber die Umkehrung trifft nicht zu. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung muss nicht separabel sein, um lösbar zu sein. Es kann aber auch sein, dass die Separation nur unvollständig gelingt; dann ist eine volle Integrabilität des Bewegungsproblems i. allg. nicht zu erwarten.

Anm. zu Singularitäten und Instabilitäten eines dynamischen Systems

Bei der am Ende Abs. 1.3 angegebenen Beschreibung des Bewegungsbildes eines Systems im Phasenraum ist vorausgesetzt, dass es keine Schnittlinie/Schnittpunkt von Integrationsflächen/Linie einer denselben Flächenschar/Linienschar gibt. Eine derartige Schnittstelle ist eine Singularitätsstelle des dynamischen Systems:

- aus einem auf einer Singularitätsstelle vorgegebenen Satz von Anfangsbedingungen lässt sich die Bewegung nicht eindeutig bestimmen (Mehrdeutigkeit); und
- wenn die Anfangsbedingungen in der Umgebung dieser Singularitätsstelle gegeben wären, würde jede kleine Änderung der Bedingung zu einer großen Änderung des Ablaufs der Bewegung, sogar zu einem völlig anderen Bewegungsverhalten des Systems führen (Instabilität).

Dieses lässt sich durch das folgende einfache **Beispiel** veranschaulichen: Das dynamische System 2. Ordnung

$$y\frac{dx}{dt} = a, \qquad x\frac{dy}{dt} = b, \qquad (ab > 0) \tag{1.28}$$

ist offenbar integrabel und besitzt das Integral

$$y = C\begin{cases} x^{b/a} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ (-x)^{b/a} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \tag{1.29}$$

mit der frei wählbaren Integrationskonstanten *C*. Das Integral (1.29) zeigt eine Schar von aus dem Punkt $(x, y) = (0,0)$ auseinander laufender Integrationslinien (Phasenbahnen), siehe Abb. 1.1. Dieser Punkt ist ein Singularitätspunkt (Knoten) des Systems.

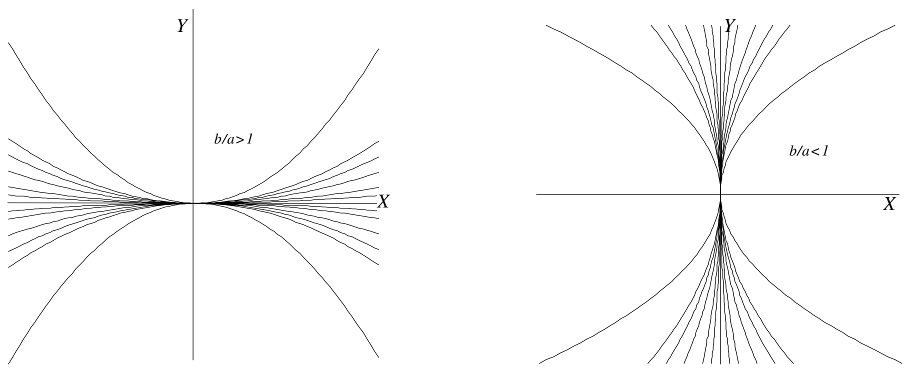

Abb. 1.1

Die Untersuchung der Instabilität (oder Stabilität) eines dynamischen Systems ist theoretisch und praktisch von sehr großer Bedeutung. Eine weitere Diskussion würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit überschreiten. Das Beispiel zeigt jedoch, dass Integrabilität und Stabilität zwei voneinander unabhängige Begriffe sind: ein integrables System kann instabil sein; ein nicht-integrables System kann auch stabil sein.

2. Wie findet man Bewegungsintegrale? (I)

2.1 Bewegungsintegrale als Nebenbedingungen

Die Bewegungsintegrale können auch als Nebenbedingungen gedeutet werden, die von der Bewegung eingehalten werden. Im folgenden soll die von Boltzmann und Hertz eingeführte Bezeichnungsweise für Nebenbedingungen benutzt werden:

Nebenbedingung			
nichtholonom		holonom	
rheonom	skleronom	rheonom	skleronom
$N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)=0$	$N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})=0$	$N(\mathbf{r},t)=0$	$N(\mathbf{r})=0$

Als ***rheonom*** wird danach eine zeitlich fließende, als ***skleronom*** eine starre Nebenbedingung bezeichnet.

2.2 Das Prinzip des kleinsten Zwangs von Gauß

Nach dem ***Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwangs*** ergibt sich die tatsächliche Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ eines Teilchens verglichen mit allen anderen mit bestehenden Nebenbedingungen verträglichen Beschleunigungen aus der Minimierung des **Zwangs** Z, definiert durch

$$Z = m(\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_f)^2 , \tag{2.1}$$

worin die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_f$ diejenige des Teilchens m ist, das sich unter der alleinigen Kraft $\mathbf{K}$ entsprechend der Newton-Eulerschen Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}}_f = \frac{\mathbf{K}}{m} \tag{2.2}$$

bewegt. Die Auswertung des Gaußschen Prinzips läuft auf die Aufgabe hinaus, eine Extremwertaufgabe bei Vorliegen von Nebenbedingungen zu lösen (*Schneider 1992ff)*. Das führt auf die Bestimmungsgleichung für die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ des Teilchens unter der gemeinsamen Wirkung der Kraft $\mathbf{K}$ und einer den Nebenbedingungen entsprechenden Zwangskraft $\mathbf{Z}$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} + \lambda \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N =: \mathbf{K} + \mathbf{Z}, \tag{2.3}$$

worin der ***Lagrange-Multiplikator*** λ sich ergibt zu (*Schneider IV 1999)*

$$\lambda = -\frac{\mathbf{K} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N + mG}{\left|\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N\right|^2} \tag{2.4}$$

mit

$$G(t;\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) =: \frac{\partial N}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N \cdot \tag{2.5}$$

Die Bewegungsgleichung (2.3) lautet damit

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} - \frac{\mathbf{K} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N + mG}{\left|\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N\right|^2} \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N \cdot \tag{2.6}$$

Das Energieintegral (1.3)

$$N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) := \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) - h = 0 \tag{2.7}$$

des Kepler-Problems ist eine nichtholonom-skleronome Nebenbedingung für die Bewegung des Teilchens *m*. Mit (2.7) erhält man für den Lagrange-Multiplikator λ aus (2.4)

$$\lambda = 0 \quad . \tag{2.8}$$

Danach ist das Energieintegral eine Nebenbedingung, die ohne Zwangskraft von der Keplerbewegung von selbst erfüllt wird; der Zwang erreicht hierbei sein absolutes Minimum (*Schneider IV 1999)*

$$\mathrm{Z} = 0. \tag{2.9}$$

Das führt zu dem/der

Theorem/Vermutung: Ein nichtholonomes Bewegungsintegral ist Lösung der Gleichung

$$\lambda = 0 \qquad bzw. \qquad \mathbf{K}\cdot\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}N + G = 0\,, \tag{2.10}$$

woraus sich mit (2.5) ergibt

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}N = -\mathbf{K}\cdot\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}N \tag{2.11}$$

bzw.

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\dot{x}_k\frac{\partial N}{\partial x_k} = -\sum_{k=1}^{3}K_k\frac{\partial N}{\partial \dot{x}_k}\,.$$

Das ist eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung zur Bestimmung eines nichtholonomen Bewegungsintegrals $N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)$ der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}\,. \tag{2.12}$$

Anm.: *1. Im Falle des Keplerproblems sind die Bewegungsintegrale mit der Funktionsstruktur $N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ Lösung der partiellen Differentialgleichung*

$$\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}N = -\mathbf{K}\cdot\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}N \tag{2.13}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{3}\dot{x}_k\frac{\partial N}{\partial x_k} = -\sum_{k=1}^{3}K_k\frac{\partial N}{\partial \dot{x}_k}\,. \tag{2.14}$$

*2. Die Gleichung (2.13) bzw. (2.14) ist eine Bestimmungsgleichung für ein nichtholonom-rheonomes bzw. nichtholonom-skleronomes Bewegungsintegral einer unter der Kraft **K** ablaufenden Bewegung; sie ist aber umgekehrt auch eine Bestimmungsgleichung für die Kraftfunktion $\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)$ bei vorgegebener Funktion $N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)$ bzw. $N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$. Diese **Reziprozität** von N und **K** erlaubt die wechselseitige Bestimmung der Kraft **K** bei vorgegebener Bedingung.*

2.2.1 Beispiele zur eindimensionalen Bewegung

Beispiel 1. Betrachtet sei eine eindimensionale Bewegung, so dass (2.14) lautet

$$\dot{x}\frac{\partial N}{\partial x} = -K\frac{\partial N}{\partial \dot{x}}\,. \tag{2.15}$$

Gesucht wird eine Funktion $N(x,\dot{x})$ als Lösung dieser Gleichung. Setzt man sie an in der Form

$$N(x,\dot{x}) = N_1(x) + N_2(\dot{x})\,, \tag{2.16}$$

so folgt

$$\dot{x}\frac{\partial N_1}{\partial x} = -K\frac{\partial N_2}{\partial \dot{x}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial N_1}{\partial x}\Big/\frac{\partial N_2}{\partial \dot{x}} = \frac{K}{\dot{x}}\,.$$

Sie wird erfüllt durch die Wahl der Funktionen $N_1(x)$ und $N_2(\dot{x})$ entsprechend

$$K := -\frac{\partial N_1(x)}{\partial x} \;\text{ und }\; N_2 := \frac{\dot{x}^2}{2}\,,$$

was auf

$$N(x,\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + N_1(x) \tag{2.17}$$

führt. Deutet man $N_1(x)$ als Potentialfunktion, so ist das gerade das Energieintegral, das für die Bewegung unter der konservativen Kraft

$$K = \frac{\partial N_1(x)}{\partial x} \tag{2.18}$$

für die eindimensionale Bewegung besteht. Für $N_1(x) := \frac{x^2}{2}$ folgt die Bewegungsgleichung des ungedämpften linearen harmonischen Oszillators $\ddot{x} = -x$.

Beispiel 2. Für den gedämpften linearen harmonischen Oszillator mit der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$$

gibt Vujanovic in *(Vujanovic 1970)* das folgende Bewegungsintegral an

$$\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \mu x\dot{x}\right)e^{2\mu t} = const. \text{ mit } \omega^2 := \frac{c}{m} \quad und \quad 2\mu = \frac{k}{m} \cdot$$

Für $k \to 0$, d.h. bei verschwindender Dämpfung, geht es in den Erhaltungssatz der Energie über.

Das Integral ist ein explizit zeitabhängiges Bewegungsintegral, also eine nichtholonom-rheonome Nebenbedingung an die gedämpfte Oszillatorbewegung:

$$N(x,\dot{x};t) := \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \mu x\dot{x}\right)e^{2\mu t} - const. = 0 \cdot$$

Geht man damit und mit der Kraft

$$K := -cx - k\dot{x},$$

die eine konservative und eine dissipative Komponente enthält, in die aus dem Gauß-Prinzip folgende PDE

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \dot{x}_k \frac{\partial N}{\partial x_k} = -\sum_{k=1}^{3} K_k \frac{\partial N}{\partial \dot{x}_k}$$

ein, so bestätigt man, dass ein nichtholonom-rheonomes Bewegungsintegral vorliegt.

Beispiel 3. Man kann das vorangehende Beispiel problemlos auf den Fall des räumlichen gedämpften harmonischen Oszillator verallgemeinern, also auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -c\mathbf{r} - k\dot{\mathbf{r}}\,.$$

Dazu braucht man nur diese Gleichung nach einer Orthonormalbasis zu zerlegen

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i \quad und \quad \mathbf{K} = \sum_{j=1}^{3} K_j \mathbf{e}_j \quad \cdot$$

Wendet man dann die obige Beweisführung auf die drei Komponentengleichungen

$$\ddot{x}_i = K_i \quad i = 1,2,3$$

an, so ergeben sich die Bewegungsintegrale

$$N(x_i,\dot{x}_i;t) := \left(\frac{x_i^2}{2} + \frac{\omega^2 x_i^2}{2} + \mu x_i\dot{x}_i\right)e^{2\mu t} - const. = 0$$

und daraus durch Summation

$$N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) := \left(\frac{\mathbf{r}^2}{2} + \frac{\omega^2 \mathbf{r}^2}{2} + \mu \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right)e^{2\mu t} - const. = 0 \cdot$$

Die runde Klammer ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie sowie der Arbeit der dissipativen geschwindigkeitsproportionalen Kraft. Diese Summe wird exponentiell vermindert.

Beispiel 4. In (*Vujanovic 1990*) findet man ein weiteres explizit zeitabhängiges Bewegungsintegral

$$\frac{\dot{x}^2 t^3}{2} + \frac{x\dot{x}t^2}{2} + \frac{x^6 t^3}{6} = const$$

und zwar der sog. Lane-Emden-Gleichung

$$\ddot{x}+\frac{2}{t}\dot{x}+x^5=0\cdot$$

Auch dieses Bewegungsintegral erfüllt als nichtholonom-rheonome Nebenbedingung die aus dem Gaußprinzip folgende PDE. In beiden Fällen wurden die zeitabhängigen Bewegungsintegrale von Vujanovic als Lösungen verallgemeinerter Killing-Gleichungen gefunden. Das zweite Bewegungsintegral wurde von (Jones & Ames 1967) bereits auf einem anderen Weg gefunden.

2.2.2 Beispiel: Keplerproblem

Analog wie in **2.2.1** erhält man mit der Wahl

$$\mathbf{K}:=\nabla_{\mathbf{r}}N_1(\mathbf{r}) \text{ und } N_2(\dot{\mathbf{r}})=\frac{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{2}, \tag{2.19}$$

das Energieintegral (1.3) für die räumliche Bewegung unter der konservativen Kraft

$$\mathbf{K}_{Kep}=-\frac{mGM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot \tag{2.20}$$

Das gilt bis auf eine Konstante *E*.

Auch die Erhaltung des Bahndrehimpulses (1.2) ist Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.13). So definiert beispielsweise die 1-Komponente des Drehimpulses die Nebenbedingung

$$N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}):=x_2\dot{x}_3-x_3\dot{x}_2-C_1=0\cdot$$

Eingetragen in (2.14) ergibt sich

$$0=x_2\frac{\partial U}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial U}{\partial x_2}\cdot$$

Die rechte Seite dieser Gleichung aber ist gleich der 1-Komponente des Drehmoments der Kepler-Kraft, eine Zentralkraft, und verschwindet (*Schneider IV 1999)*. Analog verfährt man bei den weiteren Komponenten und bestätigt die obige Vermutung. Bleibt noch der Nachweis, dass auch das Laplace-Integral (1.4) die Gleichung (2.13) löst. Das soll am Beispiel der 1-Komponente bestätigt werden. Sie lautet

$$N:=\dot{x}_2C_3-\dot{x}_3C_2-GM\frac{x_1}{r}-A_1=0\cdot$$

Damit ergibt für die rechte Seite von (2.13)

$$0+K_2C_3-K_3C_2=1-\textit{Komponente von }\mathbf{K}\times\mathbf{C}\cdot$$

Die 1-Komponente von $\mathbf{K}\times\mathbf{C}$ aber erhält man aus

$$\mathbf{K}\times\mathbf{C}=\mathbf{K}\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}),$$

$$\frac{\partial N}{\partial x_k}=-GM\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_1}{r}\right)=\begin{cases}-GM\left(\dfrac{1}{r}+x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{1}{r}\right)\right) & \textit{für}\quad k=1\\[2ex] -GMx_1\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{1}{r}\right) & \textit{für}\quad k=2,3\end{cases}$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{x_k}{r^3},$$

so dass folgt

$$\frac{\partial N}{\partial x_k}=\begin{cases}-GM\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{x_1^{\,2}}{r^3}\right) & \textit{für}\quad k=1\\[2ex] GM\dfrac{x_1x_k}{r^3} & \textit{für}\quad k=2,3\end{cases}. \tag{2.21}$$

Damit bestätigt man, dass die 1-Komponente des ***Laplace-Integrals*** die partielle Differentialgleichung (2.13) erfüllt. Analog verfährt man bei den anderen Komponenten.

Erweitert man das Kepler-Problem um **geschwindigkeitsproportionale** Kräfte, so findet man noch Bewegungsintegrale, die eine partielle Erhaltung des Bahndrehimpulses bzw. eine Entsprechung zum Laplace-Integral beinhalten *(Schneider IV 1999).* Das Bewegungsintegral von Vujanovic ist auf Kreisbahnen unmittelbar übertragbar. Ausgehend von der oben angegebenen Interpretation des Bewegungsintegrals könnte es auch in anderen Fällen gültig sein. Das soll hier nicht weiter verfolgt werden.

2.2.3 Lösung der PDE mit Hilfe der Mehrfachpotenzreihe

Für partielle Differentialgleichungen (PDE's) wie die hier diskutierte ist eine abgeschlossene Lösungstheorie bekannt *(Erwe & Peschl 1973),* und zwar kann ihre Lösung auf die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Allerdings erweisen sich die PDE zugehörigen charakteristischen Gleichungen als nichts anderes als die nach Variablensubstitution in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung überführte Newton-Eulersche Bewegungsgleichung. Deren Lösung aber sollte mit Hilfe einer ausreichenden Anzahl von unabhängigen Bewegungsintegralen gefunden werden, letztere als Lösung der PDE ermittelt.

Anm.: Diese Situation ist aus der Hamilton-Mechanik bekannt:

Die charakteristischen Gleichungen der Hamilton-Jacobi-Gleichung (Schneider IV 1992), einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, sind die kanonischen Bewegungs-gleichungen. Deren Lösung läuft auf die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung hinaus (Jacobi 1884, Stumpff 1959ff).

Aus diesem Zirkel führt ein anderer Weg, der im folgenden beschritten werden soll. Am Beispiel einer eindimensionalen Bewegung soll gezeigt werden, wie die partielle Differentialgleichung mit Hilfe einer ***Mehrfachpotenzreihe*** lösbar ist (*Erwe & Peschl 1973)* und auf diese Weise Bewegungsintegrale gefunden werden können. Als Ansatz für das Bewegungsintegral $N(x,v)$ einer eindimensionalen Bewegung wird die Zweifach-potenzreihe entsprechend der Eindimensionalität der Bewegung gewählt

$$N(x,v)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x,v)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{\mu,\sigma=0\\ \mu+\sigma=k}}^{\infty}a_{\mu\sigma}x^{\mu}v^{\sigma} \tag{2.22}$$

also als Entwicklung nach ***homogenen Polynomen*** $P_k(x,v)$ von ***Grad*** *k* (*Erwe & Peschl 1973).* Bis zum Grad 3 lautet der Ansatz ausgeschrieben

$$N(x,v)=P_0(x,v)+P_1(x,v)+P_2(x,v)+P_3(x,v)+\ldots$$

$$P_0(x,v)=a_{00}, \qquad P_1(x,v)=a_{10}x+a_{01}v,$$

$$P_2(x,v)=a_{20}x^2+a_{21}xv+a_{22}v^2, \qquad P_3(x,v)=a_{30}x^3+a_{31}x^2v+a_{32}xv^2+a_{33}v^3.$$

Eingetragen in die PDE

$$v\frac{\partial N}{\partial x}=-K\frac{\partial N}{\partial v}$$

ergibt für die rücktreibende Kraft des eindimensionalen Oszillators

$$K=-x=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{2.23}$$

die PDE in der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{\mu,\sigma=0\\ \mu+\sigma=k}}^{\infty}a_{\mu\sigma}\left(\mu x^{\mu-1}v^{\sigma+1}+\sigma x^{\mu+1}v^{\sigma-1}\right)=0 \text{ bzw. } \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{\mu,\sigma=0\\ \mu+\sigma=k}}^{\infty}a_{\mu\sigma}x^{\mu-1}v^{\sigma-1}\left(\mu v^2+\sigma x^2\right)=0$$

oder bis zum Grad 3 aufgeschrieben

$$(a_{10}v+a_{01}x)+\left(2(a_{20}+a_{02})xv+a_{11}\left(x^2+v^2\right)\right)+\left((3a_{30}+2a_{12})x^2v+(3a_{03}+2a_{21})xv^2+a_{21}x^3+a_{12}v^3\right)=0\,.$$

Für beliebige Variablenpaare x,v lässt sich diese Gleichung nur erfüllen mit den Koeffizienten

$$a_{10}=a_{01}=2(a_{20}+a_{02})=a_{11}=(3a_{30}+2a_{12})=(3a_{03}+2a_{21})=a_{21}=a_{12}=0,$$

woraus folgt $a_{20} = -a_{02}$, $a_{30} = a_{03} = 0$, so dass das Bewegungsintegral die Gestalt annimmt

$$N(x,v) = \frac{v^2}{2} - \frac{x^2}{2}, \text{ setzt man } a_{20} = -\frac{1}{2}. \tag{2.24}$$

Das aber ist der ***Energiesatz***!

Für den allgemeinen Fall einer beliebigen Kraft K erhält man mit dem obigen Ansatz einer Zweifachpotenzreihe nach Eintragen in die PDE die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mu,\sigma=0 \\ \mu+\sigma=k}}^{\infty} a_{\mu\sigma} x^{\mu-1} v^{\sigma-1} \left(\mu v^2 - \sigma K x\right) = 0\cdot$$

Für $K = -x$ resultiert die oben diskutierte Gleichung für den Harmonischen Oszillator!

2.2.4 Partielle Differentialgleichung im dreidimensionalen Fall

Die partielle Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N = -\mathbf{K} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N \tag{2.25}$$

lautet im dreidimensionalen Fall, trägt man die Mehrfachpotenzreihe

$$N(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mu_1,\ldots,\sigma_3=0 \\ \mu_1+\ldots+\sigma_3=k}} a_{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} v_1^{\sigma_1} v_2^{\sigma_2} v_3^{\sigma_3}$$

ein,

$$N(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mu_1,\ldots,\sigma_3=0 \\ \mu_1+\ldots+\sigma_3=k}} a_{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3} x_1^{\mu_1-1} x_2^{\mu_2-1} x_3^{\mu_3-1} v_1^{\sigma_1-1} v_2^{\sigma_2-1} v_3^{\sigma_3-1} \Psi_{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$$

mit

$$\Psi_{\mu_1\mu_2\mu_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3} := \left(\mu_1 v_1^2 - \sigma_1 K_1 x_1\right) x_2 x_3 v_2 v_3 + \left(\mu_2 v_2^2 - \sigma_2 K_2 x_2\right) x_1 x_3 v_1 v_3 + \left(\mu_3 v_3^2 - \sigma_3 K_3 x_3\right) x_1 x_2 v_1 v_2 \cdot$$

Ausgeschrieben bis zur Ordnung 2 ($\mu_1 + \mu_2 + \mu_2 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \le 2$) erhält man

$$\begin{aligned}
&\left(a_{100000} v_1 - a_{000100} K_1\right) + \left(a_{010000} v_2 - a_{000010} K_2\right) + \left(a_{001000} v_3 - a_{000001} K_3\right) + 2\left(a_{200000} x_1 - a_{000200} K_1\right) v_1 \\
&+2\left(a_{020000} x_2 - a_{000020} K_2\right) v_2 + 2\left(a_{002000} x_3 - a_{000002} K_3\right) v_3 + a_{110000}\left(x_2 v_1 + x_1 v_2\right) + a_{101000}\left(x_3 v_1 + x_1 v_3\right) \\
&+a_{011000}\left(x_3 v_2 + x_2 v_3\right) + a_{100010}\left(v_1 v_2 - K_2 x_1\right) + a_{100001}\left(v_1 v_3 - K_3 x_1\right) + a_{010100}\left(v_2 v_1 - K_1 x_2\right) \\
&+a_{001100}\left(v_1 v_3 - K_1 x_3\right) + a_{010010}\left(v_2 v_2 - K_2 x_2\right) + a_{010001}\left(v_2 v_3 - K_3 x_2\right) + a_{100100}\left(v_1 v_1 - K_1 x_1\right) \\
&+a_{001001}\left(v_3 v_3 - K_3 x_3\right) + a_{000110}\left(-K_1 v_2 - K_2 v_1\right) + a_{000101}\left(-K_1 v_3 - K_3 v_1\right) + a_{000011}\left(-K_2 v_3 - K_3 v_2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Die Struktur dieser Gleichung ist der im eindimensionalen Fall ähnlich. Für den Fall des räumlichen harmonischen Oszillator, d.h. für die Kraft

$$\mathbf{K} = -\alpha \mathbf{r},$$

ergibt sich, setzt man o. B. d. A. $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned}
&\left(a_{100000} v_1 + a_{000100} x_1\right) + \left(a_{010000} v_2 + a_{000010} x_2\right) + \left(a_{001000} v_3 + a_{000001} x_3\right) \\
&+2\left(a_{200000} + a_{000200}\right) x_1 v_1 + 2\left(a_{020000} + a_{000020}\right) x_2 v_2 + 2\left(a_{002000} + a_{000002}\right) x_3 v_3 \\
&+\left(a_{110000} + a_{000110}\right)\left(x_1 v_2 + x_2 v_1\right) + \left(a_{101000} + a_{000101}\right)\left(x_1 v_3 + x_3 v_1\right) + \left(a_{011000} + a_{000011}\right)\left(x_2 v_3 + x_3 v_2\right) \\
&+a_{100100}\left(v_1 v_1 + x_1 x_1\right) + a_{010010}\left(v_2 v_2 + x_2 x_2\right) + a_{001001}\left(v_3 v_3 + x_3 x_3\right) \\
&+\left(a_{100010} + a_{010100}\right)\left(v_1 v_2 + x_1 x_2\right) + \left(a_{100001} + a_{001100}\right)\left(v_1 v_3 + x_1 x_3\right) + a_{010001}\left(v_2 v_3 + x_3 x_2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für beliebige Variablen $x_1, x_2, x_3, v_1 v_2, v_3$ nur erfüllbar, wenn man fordert

1. $a_{100000} = a_{000100} = a_{010000} = a_{000010} = a_{001000} = a_{000001} = 0,$
2. $(a_{200000} + a_{000200}) = (a_{020000} + a_{000020}) = (a_{002000} + a_{000002}) = 0,$
3. $(a_{110000} + a_{000110}) = (a_{101000} + a_{000101}) = (a_{011000} + a_{000011}) = (a_{100010} + a_{010100}) = (a_{100001} + a_{001100}) = 0,$
4. $a_{100100} = a_{010010} = a_{001001} = a_{010001} = 0.$

Damit erhält man die Lösung der PDE in der Gestalt, fügt man den Faktor α wieder ein,

$$N(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = \frac{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{2} - \alpha\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{2} =: T_{kin} + E_{pot}\,. \tag{2.26}$$

Das ist der Erhaltungssatz für die Gesamtenergie.

2.2.5 Partikuläre Lösungen von dynamischen Systemen

In Abs. 1.4 wurde bereits erwähnt, dass von nichtintegrablen Bewegungsproblemen durchaus strenge Lösungen gefunden worden sind, beispielsweise die Euler-Lagrange-Lösungen im Dreikörperproblem *(Schneider II 1993, Stumpff. 1959ff.)*

Schmeidler geht in *(Schmeidler 1962)* der Frage nach:

> *"Wie lässt sich entscheiden, ob ein dynamisches Problem, welches durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen definiert ist, partikuläre Lösungen besitzt, bei denen gewisse vorgegebene geometrische Bedingungen während des Ablaufs der Bewegung stets erfüllt sind?"*

Mit einem von ihm entworfenen Verfahren gelingt Schmeidler (*Schmeidler 1958*) ein neuer Beweis für die genannten strengen Euler-Lagrange-Lösungen des Dreikörperproblems. Weiter findet er mit diesem Verfahren eine strenge Lösung des folgenden Bewegungsproblems:

> *"Gibt es Lösungen des ebenen Dreiköperproblems von der Art, dass die Apsidenlinien der Bahnen beider Planeten bei ausschließlicher Berücksichtigung der säkularen Störungen stets die gleiche Richtung haben?"*

Anm.: *Die von Schmeidler (Schmeidler1958) aufgestellte Klasse von Lösungen des ebenen Dreikörperproblems enthält die sog. Poincarèschen periodischen Lösungen zweiter Gattung, ist aber umfassender als diese.*

2.3 Bewegungsintegrale und Symmetrien

Symmetrie *(Schmutzer 1972)* bezeichnet allgemein die Unveränderlichkeit eines Sachverhalts unter einer Operation. Erhaltungssätze lassen sich unter diesem Gesichtspunkt betrachten, d.h. als Aussagen, die sich unter bestimmten Operationen als unveränderlich erweisen. Nach einem von Emmy Noether 1918 angegebenen Theorem (Noether, 1918) kann man die Suche nach Bewegungsintegralen systematisieren, indem man die sog. Symmetrietransformationen aufsucht, unter denen die Lagrange- bzw. Hamilton-Funktion ihre Gestalt beibehalten. Das Theorem ermöglicht insbesondere, Erhaltungsgrößen dadurch aufzufinden, dass man das Transformationsverhalten der Lagrange- bzw. der Hamilton-Funktion untersucht *(Schmutzer 1972).*

2.3.1 Das Theorem von Noether

Für die Lagrange-Mechanik *(Desloge und Karch 1977, Levy-Leblond 1971, Rebhan 1999, Fließbach 1996)* lautet das

Theorem von Noether : Zu jeder Symmetrietransformation gehört eine Erhaltungsgröße

$$\text{(I)} \qquad I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \tag{2.27}$$

oder

$$\text{(II)} \qquad I(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha}\,. \tag{2.28}$$

Die beiden Fälle (I) und (II) beinhalten unterschiedliche Forderungen an die Lagrange-Funktion.

Fall (I) Die neue transformierte Lagrange-Funktion soll aus der alten durch Eintragen der inversen Transformation ohne Änderung der Funktionsstruktur hervorgehen, also

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \to L'(\mathbf{q}(\mathbf{Q},t),\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}};t),t) \equiv L'(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}},t) \tag{2.29}$$

Fall (II) Die transformierte Lagrange-Funktion soll aus der alten durch Eintragen der inversen Transformation hervorgehen und ihre Gestalt ändern gemäß

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \to L'(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}},t) = L(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}},t) + \frac{dF(\mathbf{Q},t)}{dt}\,. \tag{2.30}$$

Hinter diesen beiden Forderungen steht die Forderung

in Fall (I)

Invarianz des Wirkungsfunktionals

$$S := \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L'(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}},t)dt =: S' \tag{2.31}$$

gegenüber einparametrigen Punkttransformationen

$$\mathbf{q} \to \mathbf{Q}:\ \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}},t;\alpha), \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}},t;\alpha) \tag{2.32}$$

bzw.

in Fall (II)

Invarianz der 1. Variationen des Wirkungsfunktionals

$$\delta S := \delta\int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} L'(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}},t)dt =: \delta S'\,\cdot \tag{2.33}$$

Beide Forderungen stellen die **Kovarianz der Lagrange-Gleichungen** sicher gegenüber den Transformationen (*Rebhan 1999),* also **die Invarianz der Gestalt** der Lagrange-Gleichungen unter den Transformationen, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial L'}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} = 0\,\cdot \tag{2.34}$$

2.3.2 Symmetrietransformationen und Erhaltungsgrößen

Unter einer ***Symmetrietransformation*** wird eine einparametrige Punkttransformation

$$\mathbf{q} \to \mathbf{Q}: Q_i = Q_i(q_k,t;\alpha) \qquad i,k = 1,...,n \tag{2.35}$$

verstanden, die

- invertierbar ist,
- in dem kontinuierlichen Parameter α stetig differenzierbar ist

und

- für $\alpha \to 0$ in die identische Transformation übergeht

  $Q_i(q_k,t;\alpha \to 0) = q_i \quad i = 1,...,n\,.$

***Anm.**: Entsprechende Transformationsgleichungen werden für die generalisierten Geschwindigkeiten gefordert.*

Dass unter einer Symmetrietransformation eine Erhaltungsgröße resultiert, soll für den Fall (I) gezeigt werden:

Für die Abhängigkeit der neuen Lagrange-Funktion L' vom Parameter α erhält man

$$\left(\frac{\partial L'}{\partial \alpha}\right)_{Q,\dot{Q}\ fest} =: \frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \alpha}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right)\right]\cdot \tag{2.36}$$

Da aber q_k nicht explizit von α abhängt, folgt

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \tag{2.37}$$

und wegen $L(q,\dot{q},t) \equiv L'(Q,\dot{Q},t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\right\} = 0\,. \tag{2.38}$$

Nach unbestimmter Integration über die Zeit ergibt sich

$$I(q,\dot{q},t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0}\,. \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Ähnlich führt man den Beweis für den Fall (II). Die klassischen Bewegungsintegrale resultieren als Ergebnis infinitesimaler Symmetrietransformationen

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t, \delta\alpha)\,. \tag{2.39}$$

Beispiel: Betrachtet sei die infinitesimale Translation

$$\begin{aligned} q_i \rightarrow Q_i &= Q_i(q_k, t, \delta\alpha) = q_i - \delta\alpha a_i \\ Q_i \rightarrow q_i &= q_i(Q_k, t, \delta\alpha) = Q_i + \delta\alpha a_i \end{aligned} \quad \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{Q}_i\,, \tag{2.40}$$

worin $\mathbf{a} = (a_1,...,a_n)$ eine feste, im übrigen beliebige Translation sei und $\delta\alpha$ ein inifinitesimaler Parameter. Im Fall (I) erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L'}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_k}\left(\frac{\partial q_k(Q_j, t, \delta\alpha)}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_k}a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)a_k = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}a_k = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}a_k = const. \end{aligned}$$

Da die Translation $\mathbf{a} = (a_1,...,a_n)$ beliebig ist, müssen die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion je für sich konstant sein,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \equiv p_k\,. \tag{2.41}$$

Die kanonischen Impulse p_k sind also bei infinitesimalen Translationen Erhaltungsgrößen.

Mit anderen Worten:

Die ***Impulserhaltung*** ist eine Folge der Invarianz eines durch die Lagrange-Funktion *L* beschriebenen dynamischen Systems gegenüber infinitesimalen Translationen als Symmetrietransformationen. In dieser speziellen Transformation kommt die Homogenität des Ortraumes zum Ausdruck. Nimmt man eine infinitesimale Zeittranslation vor, so erhält man die Energieerhaltung, bei einer infinitesimalen Drehung des Raumes folgt der Erhaltungssatz für den Drehimpuls des Systems.

Also *(Fließbach 1996, Schmutzer 1973,1989))*

Homogenität der Zeit ⇔ Energieerhaltung

Homogenität des Ortsraumes ⇔ Impulserhaltung

Isotropie des Ortsraumes ⇔ Drehimpulserhaltung

Auf diese Erhaltungssätze stößt man beispielsweise im Kepler-Problem (s. Abs. 1.). In diesem existiert aber als weiteres Bewegungsintegral das Laplace-Integral mit dem Runge-Lenz-Vektor als Integrationskonstante. Hierfür blieb lange Zeit unbekannt, welche Symmetrie-Transformation auf dieses Bewegungsintegral führt. In *(Desloge & Karch 1977)* ist diese Transformation angegeben.

Die Suche nach den Symmetrien eines dynamischen Systems kann nach einem von Killing angegebenen Verfahren systematisiert werden *(Stephani 1994)*. Auf die Bestimmung der Lösung der Killing-Gleichungen, die ***Killing-Vektoren*** bzw. ***- Tensoren*** soll hier nicht eingegangen werden. Es wird auf *(Stephani 1994, Vujanovic 1970)* verwiesen sowie auf *(Weinberg 1972),* wo vorrangig die Symmetrien der Raumzeit untersucht werden. Aus himmelsmechanischer Sicht sind alle genannten Möglichkeiten der Suche nach Bewegungsintegralen bisher nicht sonderlich ergiebig gewesen. Man findet leider meist nur die schon bekannten Bewegungsintegrale, in denen die allgemeinen Eigenschaften des Raumes und der Zeit zum Ausdruck kommen. Sehr selten findet man ein für das vorgelegte Bewegungsproblem spezifisches Bewegungsintegral *(Vujanovic 1970)*. Das trifft auch auf den folgenden Weg zu.

3. Wie findet man Bewegungsintegrale? (II)

Die im Abschnitt 2.2 formulierte Vermutung, dass Bewegungsintegrale durch Lösung der verschwindendem Zwang $\lambda = 0$ entsprechenden partiellen Differentialgleichung (2.11) gefunden werden können, kann auf eine andere Weise bestätigt werden.

3.1 Poisson-Klammer-Formulierung

Dazu sei ein dynamisches System mit der Hamilton-Funktion H betrachtet. Sind in dessen Phasenraum zwei Funktionen $u(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$ und $v(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$ erklärt, so ist deren ***Poisson-Klammer*** definiert durch

$$\{u;v\} \quad := \quad u_{\bar{\mathbf{q}}} v_{\mathbf{p}} - v_{\bar{\mathbf{q}}} u_{\mathbf{p}} \quad = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial p_i} \right) . \tag{3.1}$$

Die vollständige Zeitableitung einer auf dem Phasenraum erklärten Funktion $A(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$ ergibt sich damit zu

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (A_{\bar{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \bar{\dot{\mathbf{p}}} A_{\mathbf{p}}) \tag{3.2}$$

bzw. mit den kanonischen Gleichungen

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = H_{\mathbf{p}} \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -H_{\mathbf{q}} , \tag{3.3}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (A_{\bar{\mathbf{q}}} H_{\mathbf{p}} - H_{\bar{\mathbf{q}}} A_{\mathbf{p}}) \tag{3.4}$$

und mit der Poisson-Klammer von A und H

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \cdot \tag{3.5}$$

Ist nun

$$A(\mathbf{q},\mathbf{p};t) = const \tag{3.6}$$

ein Bewegungsintegral, so verschwindet die vollständige Zeitableitung

$$\frac{dA}{dt} = 0 \quad \xrightarrow{(3.5)} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} = 0 \cdot \tag{3.7}$$

Diese Gleichung korrespondiert aber der partiellen Differentialgleichung (2.13) bzw. (2.14), d.h., sie ist deren Gegenstück für ein Hamiltonsches System. Die Gleichung (3.7) ist eine partielle Differentialgleichung für ein nichtholonom-rheonomes Bewegungsintegral; sie vereinfacht sich für ein nichtholonom-skleronomes Bewegungsintegral zu

$$\{A, H\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} - \mathbf{K} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} N = 0 \, . \tag{3.8}$$

Beachtet man, dass für kartesische Koordinaten als generalisierte Koordinaten gilt

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{r}} \qquad \text{und} \qquad m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{q}} = m\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K} , \tag{3.9}$$

so stimmt die partielle Differentialgleichung (2.13) mit der Gleichung (3.8) überein, nimmt man die Kraft als konservativ an. Gleichung (2.13) ist allerdings auch noch für Kräfte gültig, die neben konservativen auch nicht konservative Komponenten erhalten, sie geht also über den Geltungsbereich der Gleichung (3.8) hinaus.

Man kann danach das **Theorem** formulieren:

Nichtholonome Bewegungsintegrale sind Lösungen partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung, und zwar im

- nichtkanonischen Fall von Gleichung (2.11) bzw. (2.13)
- kanonischen Fall von Gleichung (3.7) bzw. (3.8).

Für den letzten Fall haben Deprit et al.*(Deprit & Palacian & Deprit 2001)* einen Lösungsalgorithmus entwickelt:

> *"A dynamical system with Hamilton H admits a time-independent function G as an integral if and only if* $\{G,H\}=0$ *. This paper focuses on solving that equation when H is a power series of a small parameter* ε*. We have shown that the solution is equivalent to a Lie transformation ..."*

In Poisson-Klammer-Formulierung folgt nun:

Theorem: Liegen zwei Bewegungsintegrale

$$f_1(\mathbf{q},\mathbf{p};t)=const \qquad \text{und} \qquad f_2(\mathbf{q},\mathbf{p};t)=const \tag{3.10}$$

vor, so bestehen die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\{f_1,H\}=0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t}+\{f_2,H\}=0\,. \tag{3.11}$$

Über die für Poisson-Klammern gültige ***Jacobi-Identität***

$$\{u,\{v,w\}\}+\{v,\{w,u\}\}+\{w,\{u,v\}\}=0 \tag{3.12}$$

folgt dann

$$\frac{\partial\{f_1,f_2\}}{\partial t}+\{\{f_1,f_2\},H\}=0 \tag{3.13}$$

D.h., auch die Poisson-Klammer $\{f_1,f_2\}$ der Bewegungsintegrale ist selbst ein Bewegungsintegral. Dieser Weg ist allerdings nicht ertragreich, weil meistens ein aus den ersten Integralen f_1 und f_2 zusammengesetztes triviales Integral entsteht *(Stumpff 1959ff)*. Jacobi hat das so ausgedrückt:

> *"Damit ein Integral, mit einem zweiten kombiniert, nach und nach alle Integrale liefere, muss es ein solches sein, welches dem besonderen Problem angehört.*
>
> *Aber die ersten Integrale, welche für ein vorgelegtes Problem gefunden werden, sind in der Regel diejenigen, welche aus allgemeinen Prinzipien folgen, mithin dem besonderen Problem nicht eigentümlich angehören. Daher kann man nicht verlangen, dass aus ihnen alle Integrale abgeleitet werden sollen."*

Jacobi spricht hier zwei Themen an,: **Involution** und **Symmetrie**. Über die Symmetrie ist bereits im Abs. 2.3 erläutert; es folgt eine Diskussion über die Bewegungsintegrale in Involution.

3.2 Bewegungsintegrale in Involution

Die Definition 3 der Integrabilität eines autonomen Hamiltonschen Systems besagt, dass dieses dann integrabel ist,

> *"...wenn es n erste Integrale* $K_1,\dots,K_n$ *gibt, die in* ***Involution*** *sind und linear unabhängige Gradienten haben."*

Die in dieser Definition geforderte Involution ist erklärt durch

$$\begin{aligned}&(1)\quad \{H,K_i\}=0 \qquad i=1\,(1)\,n\\ &(2)\quad \{K_i,K_j\}=0 \qquad j=1\,(1)\,n,\quad i\neq j\,.\end{aligned} \tag{3.14}$$

In (1) kommt zum Ausdruck, dass die auf dem Phasenraum definierte Observable

$$A(\mathbf{q},\mathbf{p})=K_i(\mathbf{q},\mathbf{p}) \tag{3.15}$$

längs der Phasenbahn ein Bewegungsintegral ist. D.h., es verschwindet ihre vollständige Zeitableitung (3.2). Geometrisch bedeutet das:

Durch jedes erste Integral $K_i(\mathbf{q},\mathbf{p})$ wird im Phasenraum $\mathbf{R}^{2n}$ eine (2*n*-1)-dimensionale ***Hyperfläche*** (siehe auch Abs. 1.3)

$K_i(\mathbf{q},\mathbf{p}) = C_i \qquad C_i$ ***Scharparameter***

definiert, auf die die Phasenbahn eingeschränkt wird. Bei *K* unabhängigen ersten Integralen

$K_1 = H, K_2, ..., K_k$

kann sich die Bewegung nur auf einer (2*n* – *k*)-dimensionalen, im Phasenraum abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit abspielen.

Unabhängigkeit der ersten Integrale soll heißen, dass die Gradienten der Hyperflächen linear unabhängig sind. Durch (1) wird die Phasenbahn auf den Schnitt der beiden Hyperflächen

$$K_1 := H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = C_1 \text{ und } K_i(\mathbf{q},\mathbf{p}) = C_i \qquad i = 1\,(1)\,n \tag{3.16}$$

eingeschränkt, wobei C_1 und C_i zueinander gehörende Werte der Scharparameter sind. Dabei gilt das auf dem Phasenraum definierte Vektorfeld

$$\left(H_{\bar{\mathbf{p}}}, -H_{\bar{\mathbf{q}}}\right) \xrightarrow[\text{zur Hyperfläche}]{\textbf{tangential}} K_i(\mathbf{q},\mathbf{p}) = C_i \tag{3.17}$$

bzw.

$$(K_{i\bar{\mathbf{p}}}, -K_{i\bar{\mathbf{q}}}) \xrightarrow[\text{zur Hyperfläche}]{\textbf{tangential}} H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = C_1 \,. \tag{3.18}$$

Schreibt man nämlich (1) ausführlich an

$$0 = (H; K_i) \xrightarrow{(3.1)} (H_{\bar{\mathbf{q}}} K_{i\mathbf{p}} - H_{\bar{\mathbf{p}}} K_{i\mathbf{p}})$$

so kann man durch Umstellen die Gestalt

$$(H_{\bar{\mathbf{p}}}, -H_{\bar{\mathbf{q}}}) \begin{pmatrix} K_{i\mathbf{q}} \\ K_{i\mathbf{p}} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{oder} \qquad (K_{i\bar{\mathbf{p}}}, -K_{i\bar{\mathbf{q}}}) \begin{pmatrix} H_{\mathbf{q}} \\ H_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.19}$$

erreichen. Danach ist das Vektorfeld

$$(H_{\bar{\mathbf{p}}}, -H_{\bar{\mathbf{q}}}) \xrightarrow[\text{zum Gradienten}]{\textbf{orthogonal}} von \quad K_i = C_i$$

$$(K_{i\bar{\mathbf{p}}}, -K_{i\bar{\mathbf{q}}}) \xrightarrow[\text{zum Gradienten}]{\textbf{orthogonal}} \quad von \quad H = C_1$$

und somit tangential zur jeweiligen Hyperfläche.

Die ***Involution*** der Integrale stellt danach eine Verträglichkeit der durch sie erzeugten Vektorfelder sicher:

"One can choose a curve C_1 by following the first vectorfield, and take each point of C_1 as starting point for a set of curves C_2 along the second vectorfield; this set of curves defines a two-dimensional surface in phase space. It would be nice if this surface not only was filled with the curves C_2 along the second vectorfield, but also could be covered with the curves C_1 along the first vectorfield. This cannot be done, however, unless the two constants of motion K_1 and K_2 are in ***involution****. In general, therefore, the existence of k integrals of motion does not leave the remaining (2n-k)-dimensional manifold with a simple internal structure, unless the constants of motion are in involution with one another" (Gutzwiller 1990).*

Eine besonders einfache topologische Struktur weist die durch die (ersten) Integrale gegebene Untermannigfaltigkeit des Phasenraums dann auf, wenn gerade *n* solcher Integrale existieren:

Satz von Arnold: *In einem integrablen System sei*

$$N_C := \left\{(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in U \middle| K_i(\mathbf{q},\mathbf{p}) = C_i \in K_i(U) \subset \mathbb{R}\right\}$$

kompakt und zusammenhängend, dann ist N_C dem ***Torus*** *T^n diffeomorph.*

Anm.: *Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf den Satz von Liouville (Giacaglia 1972, Schneider II 1993).* Der Satz von Arnold rechtfertigt nach Giacaglia *(Giacaglia 1972)*

"... That we always consider integrable systems as given by a Hamiltonian $H = H_0(\mathbf{p})$, a function of the momenta only. The frequencies

$$\nu_k = \frac{\partial H_0}{\partial p_k} \qquad k = 1\,(1)\,n$$

will, in general, be rationally independent, so that the motion on the torus, defined by the parameters $q_1,\ldots,q_n$ *is* ***ergodic,*** *in the sense that the trajectories cover such torus* T^n *densely everywhere.*

Die bisherigen Ausführungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Jedes Integral $K_i = C_i$ schränkt die Bewegung entsprechend

$$\frac{dK_i}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{x}} K_{i\mathbf{x}} = 0$$

auf eine durch das Integral definierte Hyperfläche ein. Die n Hyperflächen ergeben zusammen als Bewegungsspielraum des autonomen Systems im Phasenraum eine Untermannigfaltigkeit N_C, die topologisch zum n-dimensionalen ***Torus*** diffeomorph ist. Voraussetzung ist, dass die n Integrale in Involution und unabhängig sind. Erst dadurch wird eine Verträglichkeit der durch die Integrale erzeugten Vektorfelder erreicht. Der Toruscharakter der Untermannigfaltigkeit N_C wird bestätigt, liest man die n Integrale als Teil der Gleichungen einer Transformation

$$\mathbf{q},\mathbf{p} \quad \rightarrow \quad \mathbf{q}',\mathbf{p}'$$

$$p_i' = C_i = K_i(\mathbf{q},\mathbf{p})\,.$$

Die n unabhängigen Funktionen $K_i(\mathbf{q},\mathbf{p})$ vermitteln demnach eine Transformation auf neue Variable, wobei alle neuen Impulse $\mathbf{p}'$ konstant sind.

Das aber bedeutet, dass die konjugierten Koordinaten $\mathbf{q}'$ nicht in der transformierten Hamilton-Funktion H' auftreten, also alle **zyklisch** sind (s. Abs. 1.4, auch 6.1). Die Eigenschaften der Variablen $\mathbf{q}',\mathbf{p}'$ erinnern an die bei der Untersuchung bedingt-periodischer Systeme *(Giacaglia 1972, Schneider I 1992)* vorteilhaften ***Winkel-*** und ***Wirkungsvariablen*** **w, J.**

Das legt nahe die

Def. 4: *Ein autonomes Hamiltonsches System, definiert auf einem Gebiet U des Phasenraums* $\mathbb{R}^{2n}$*, heißt dort* ***integrabel,*** *wenn in U eine Transformation auf Winkel- und Wirkungsvariable* (**w, J**) *möglich ist. Existiert keine solche Transformation, so heißt das dynamische System dort* ***nichtintegrabel****.*

Die Wirkungsvariablen **J** geben die ***Radien*** des Torus an; die Winkelvariablen **w** sind die ***Koordinaten*** auf dem Torus (Abb. 3.1)

Die möglichen Trajektorien eines autonomen, integrablen Hamilton-Systems sind an Tori gebunden. Startet eine Trajektorie auf einem Torus, so bleibt sie immer auf diesem Torus, der daher auch ***invariant*** genannt wird.

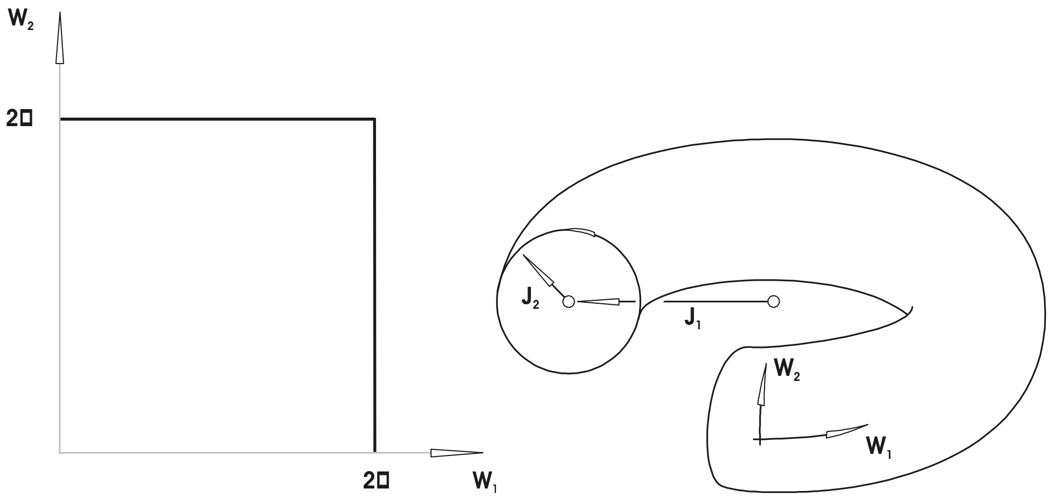

Abb. 3.1 Invarianter Torus T^2 *und seine Abwicklung*

Wenn die Frequenzen $\nu = H_{\mathbf{J}}$ ***kommensurabel*** sind, dann sind die Trajektorien ***geschlossen***; andernfalls bedecken sie den Torus nach und nach vollständig (***Ergodizität***). Abb. 3.2 veranschaulicht das für ein zweidimensionales integrables Hamilton-System.

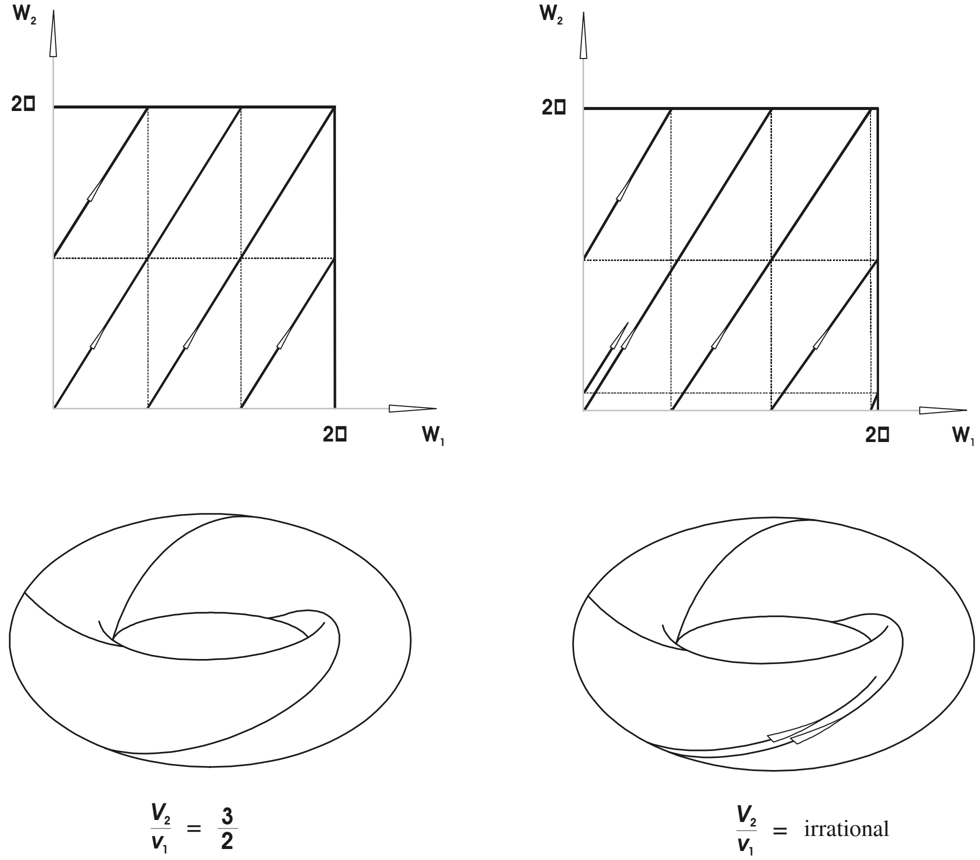

Abb. 3.2 Trajektorien bei kommensurablen/inkommensurablen Frequenzen ν und deren Abwicklungen

3.3 Ergänzung

Betrachtet seien noch einmal das Keplerproblem und seine Bewegungsintegrale. Dadurch sind sechs skalarwertige Funktionen

$$f_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) = \alpha_i \ bzw. \ f_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = \alpha_i \quad \mathrm{i} = 1,...,6 \tag{3.20}$$

gegeben, die nach den je 3 Komponenten des Orts- und Geschwindigkeitsvektors aufgelöst

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(t,\alpha_1,...\alpha_6\right), \qquad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}\left(t,\alpha_1,...\alpha_6\right) \tag{3.21}$$

Bahn und Hodograph der Keplerbewegung ergeben, wobei in (3.20) die 6 Integrationskonstanten α_i frei wählbar sind und ihre Festlegung eine spezielle (nichtentartete/entartete) Keplerbewegung aus der Lösungsschar auswählt: **Determinierung** durch

- **Anfangswerte** $\mathbf{r_0},\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ zur Epoche t_0
- **selbstadjungierte Randwerte** zu den Zeitpunkten t_A und $t_B > t_A$.

Anm.: *Festgehalten seien noch folgende Beziehungen (Dziobek 1888, Schneider II 1993)*

$$\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha = \Phi\nabla_{\alpha}\mathbf{r}\,,\quad \nabla_{\mathbf{r}}\alpha = \Phi\nabla_{\alpha}\dot{\mathbf{r}} \tag{3.22}$$

worin Φ *die Matrix der* ***Poisson-Klammern*** *bedeutet,*

$$\Phi := \left(\left\{\alpha_i,\alpha_j\right\}\right) := \left(\nabla_{\mathbf{r}}\alpha_i\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\alpha_j - \nabla_{\mathbf{r}}\alpha_j\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\alpha_i\right),\ \text{für}\ i,j=1,2,...,6 \tag{3.23}$$

die zur Matrix der ***Lagrange-Klammern***

$$\Psi := \left(\left[\alpha_i,\alpha_j\right]\right) := \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\alpha_j} - \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_j}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\alpha_i}\right),\ \text{für}\ i,j=1,2,...,6 \tag{3.24}$$

reziprok ist (Schneider II 1993). Damit ergeben sich obige Beziehungen in Komponentenform zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial\alpha_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial\alpha_3}{\partial v_1} & \frac{\partial\alpha_4}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial\alpha_6}{\partial v_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial\alpha_3}{\partial v_3} & \frac{\partial\alpha_4}{\partial v_3} & \cdots & \frac{\partial\alpha_6}{\partial v_3} \end{array}\right)^T = \Phi \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial\alpha_3} & \frac{\partial x_1}{\partial\alpha_4} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial\alpha_6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_3}{\partial\alpha_1} & \cdots & \frac{\partial x_3}{\partial\alpha_3} & \frac{\partial x_3}{\partial\alpha_4} & \cdots & \frac{\partial x_3}{\partial\alpha_6} \end{array}\right) \tag{3.25}$$

bzw.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\alpha_4}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\alpha_6}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_3} & \frac{\partial\alpha_4}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial\alpha_6}{\partial x_3} \end{array}\right)^T = \Phi \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial v_1}{\partial\alpha_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial\alpha_3} & \frac{\partial v_1}{\partial\alpha_4} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial\alpha_6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial v_3}{\partial\alpha_1} & \cdots & \frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3} & \frac{\partial v_3}{\partial\alpha_4} & \cdots & \frac{\partial v_3}{\partial\alpha_6} \end{array}\right) \tag{3.26}$$

Die 6 Funktionen $f_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)$ *bzw.* $f_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ in (3.20) definieren im 6-dimensionalen Phasenraum, aufgespannt vom Ortsraum und dem Raum der Geschwindigkeiten, je eine 5-dimensionale **Hyperfläche,** auf die die Keplerbewegung eingeschränkt wird. Die mögliche Keplerbewegung wird zufolge dieser Beschränkungen auf die Schnittmenge (Phasenbahn) dieser 6 Hyperflächen mit den 6 fixierten Werten α_i eingeschränkt, wobei eine der Hyperflächen durch ein zeitabhängiges Integral beschrieben wird, also im Phasenraum wandert.

4. Erste Integrale in Mehrkörperproblemen

Von besonderem Interesse sind Bewegungsintegrale in Mehrkörperproblemen *(Schneider II 1993, Stumpff 1959ff).* Im folgenden werde angenommen, dass allein Gravitationswechselwirkung der beteiligten Körper eine Rolle spielt.

4.1 Erste Integrale im N - Teilchensystem

Betrachtet sei ein System von N Teilchen in Newtonscher Gravitationswechselwirkung. Die Impulsbilanz des i-ten Teilchens lautet in einem Inertialsystem

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \nabla_{\mathbf{r}_i}V\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_n\right) =: \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\mathbf{K}_{ij}\,,\qquad i=1,2,...,N \tag{4.1}$$

wobei die Funktion V bei Newtonscher Gravitationswechselwirkung erklärt ist durch

$$V\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{Gm_im_j}{\left|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right|}\,. \tag{4.2}$$

Das entspricht einer wechselseitigen Anziehungskraft der Teilchen m_i und m_j

$$\mathbf{K}_{i\,j} = -\frac{Gm_i m_j}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|} \tag{4.3}$$

gemäß dem Newtonschen Gravitationsgesetz für zwei Teilchen. Summiert man diese N Bilanzen auf, so folgt für den durch

$$\mathbf{P} := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \tag{4.4}$$

erklärten ***Gesamtimpuls*** **P** des Teilchensystems die Bilanzgleichung

$$\dot{\mathbf{P}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 , \tag{4.5}$$

wenn man beachtet, dass für die wechselseitigen Anziehungskräfte das Newtonsche ***Reaktionsprinzip***

$$\mathbf{K}_{i\,j} = -\mathbf{K}_{j\,i} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{K}_{i\,j} = 0 \tag{4.6}$$

gilt, und wenn man annimmt, dass das Teilchensystem ***abgeschlossen*** ist. Es bleibt danach der Gesamtimpuls **P** erhalten. Führt man jetzt als Repräsentanten des Teilchensystems dessen Massenmittelpunkt MZ ein, dessen Ortsvektor in K erklärt ist, durch das gewogene arithmetische Mittel

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \text{ mit } \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i , \tag{4.7}$$

so folgt wegen

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M\dot{\mathbf{R}} \tag{4.8}$$

aus der Impulserhaltung die gleichförmig-geradlinige Bewegung der Massenmittelpunkte MZ im Inertialsystem K

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \dot{\mathbf{R}}_0 (t - t_0) . \tag{4.9}$$

Die Impulserhaltung impliziert also 6 skalarwertige Integrationskonstanten, zusammengefasst zu $\mathbf{R}_0$ und $\dot{\mathbf{R}}_0$. Das Drehmoment

$$\mathbf{M}^{(i)} := \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{K}_{ij} \tag{4.10}$$

der Wechselwirkungskräfte $\mathbf{K}_{ij}$ verschwindet. Damit aber bleibt der ***Gesamtdrehimpuls***

$$\mathbf{N} := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{N}_i = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

erhalten. Aus der für ein abgeschlossenes Teilchensystem bestehenden Drehimpulsbilanz folgt ja

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{M}^{(i)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}(t) = \mathbf{N}_0 . \tag{4.11}$$

Anm.: Der hochgestellte geklammert Index $^{(i)}$ weist auf Wechselwirkung im System hin.

Aus der Drehimpulserhaltung

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{N}_0 \tag{4.12}$$

folgt für das gewogene arithmetische Mittel

$$\overline{\mathbf{C}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_i \mathbf{C}_i \tag{4.13}$$

der Vektoren

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \tag{4.14}$$

wegen

$$M\overline{\mathbf{C}} = \sum_{j=1}^{N} m_i \mathbf{C}_i \quad \Rightarrow \quad M\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{N}_0 \quad \Rightarrow \overline{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{N}_0}{M} \tag{4.15}$$

die Konstanz des Vektors. Daraus folgt die Existenz einer *invariablen Ebene* eines abgeschlossenen Teilchensystems. Im Unterschied zur drehmomentfreien Bewegung eines einzelnen Teilchens kann aber nicht auf die Ebenheit der Bewegung des Teilchensystems geschlossen werden. Zusammen mit der Impulserhaltung liegen damit $3 \cdot 2 + 3 = 9$ skalarwertige Bewegungsintegrale vor. Zu diesen sog. **ersten** Integralen kommt als zehntes im Falle des abgeschlossenen N-Teilchensystems noch ein Energieerhaltungssatz hinzu. Multipliziert man nämlich die Impulsbilanz des i-ten Teilchens skalar mit der Teilchengeschwindigkeit und summiert über alle Teilchen, also

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right), \tag{4.16}$$

so folgt mit der Beziehung

$$T_{kin} := \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

wegen

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i = 2 \frac{dT_{kin}}{dt}$$

und

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right) = \frac{dV}{dt} =: -\frac{d\tilde{V}}{dt}$$

$$\frac{d\left(T_{kin} + \tilde{V}\right)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{kin} + \tilde{V} = E \,\cdot \tag{4.17}$$

Danach bleibt die Summe E aus kinetischer Energie T_{kin} und potentieller Energie $\tilde{V}$ erhalten. Die Erhaltung des Gesamtimpulses **P**, des Gesamtdrehimpulses **N** und der Gesamtenergie E bilden die ***zehn klassischen*** Bewegungsintegrale des abgeschlossenen N-Teilchensystems. Da bei N Teilchen aber $6N-2$ Bewegungsintegrale nötig wären, fehlen zur Lösung des N-Teilchen-Problems $(6N-2)-10$ Bewegungsintegrale. Nur im Falle $N = 2$, also dem Zweikörperproblem, sind von den 10 klassischen ersten Bewegungsintegralen ausreichend viele bekannt. Wie die exakten Lösungen beispielsweise des Dreikörperproblems belegen, schließt das Fehlen von Bewegungsintegralen die Lösbarkeit nicht aus, wenigstens was die Existenz exakter partikulärer Lösungen betrifft.

4.2 Erste Integrale im Unendlich-viel-Körperproblem

Die für Systeme aus N gravitierenden Massenpunkten bestehenden klassischen Integrale, nämlich Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltung bleiben auch im Falle der ***inkohärenten gravitierenden Kontinua*** bestehen. Diese nehmen eine Zwischenstellung ein *(Schneider II 1993)*

N-Körperproblem $\Rightarrow$ ***Unendlich viel-Körperproblem*** $\Rightarrow$ ***allgemeines Kontinuum***

N endlich — N abzählbar unendlich — N überabzählbar

Es wird durch den Grenzübergang $N \to \infty$ im N-Körperproblem bei im Limes endlicher Gesamtmasse beschrieben. Man verbindet mit dem Unendlich viel-Körperproblem, dem inkohärenten gravitierenden Kontinuum, die Vorstellung, dass

> *ein (i.allg. zeitveränderliches) Raumgebiet V(t) von so vielen Teilchen erfüllt ist, dass man an jeder Stelle von V(t) von einer* ***mittleren Dichte*** $\rho(t)$ *sprechen kann und zwischen den Teilchen keine Zug- und Druckkräfte, sondern nur Gravitation wirkt.*

Im Folgenden sollen mehrere, räumlich getrennte, mit inkohärenter Materie erfüllte Raumgebiete

$V_\nu(t)$ mit je der mittleren Dichte $\rho_\nu(t)$

$\nu = 1, 2, \ldots, s$

betrachtet werden (Abb. 4.1). Ein Punkt $\mathbf{r}_\nu$ in $V_\nu(t)$ erfährt eine Beschleunigung

$$\frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2} = -G\int_{V_\nu} \frac{\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\nu'}{\left|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\nu'\right|^3}\rho_\nu' d\kappa_\nu + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{s} G\int_{V_\mu} \frac{\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu}{\left|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\nu'\right|^3}\rho_\mu d\kappa_\mu \qquad \nu = 1,2,...,s\,) \qquad (4.18)$$

Gravitation der Materie in $V_\nu(t)$ — Gravitation der Materie in $V_1, V_2, ...V_s$

Anm.: $\int_{V_\sigma}$ *bedeutet ein Volumenintegral, erstreckt über alle Volumenelemente* $d\kappa_\sigma$ *des Raumgebietes* $V_\sigma(t)$ *zum Zeitpunkt t.*

Bei s inkohärenten gravitierenden Kontinua sind das s Bewegungsgleichungen, die den Charakter von ***Integro-differentialgleichungen*** haben.

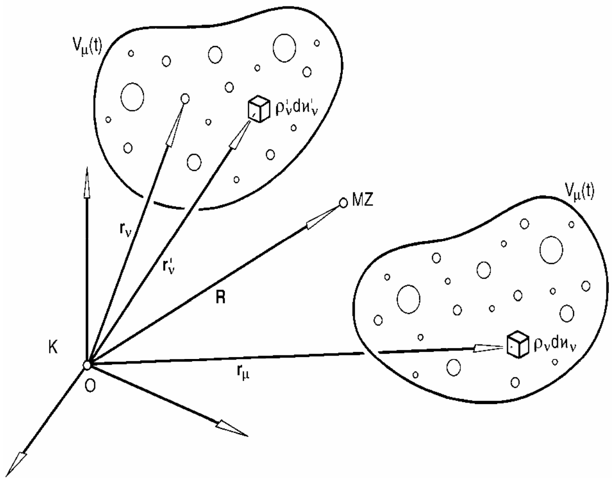

Abb. 4.1 Inkohärente gravitierende Kontinua $\mathbf{r}_\nu$ *Ortsvektor eines Aufpunktes in* V_ν

Daneben besteht für jedes der s Raumgebiete eine ***Kontinuitätsgleichung***

$$\frac{d\rho_\nu}{dt} + \rho_\nu \nabla_{\mathbf{r}_\nu}\cdot \mathbf{v}_\nu = 0\,, \quad \nu = 1,2,...,s\,) \qquad (4.19)$$

als Folge der Massenerhaltung in V_ν. $\mathbf{v}_\nu(t)$ ist ein als stetig differenzierbar angenommenes Gechwindigkeitsfeld in V_ν. Integriert man alle s Gleichungen entsprechend

$$\int_{V_\nu} \rho_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} d\kappa_\nu = -G\int_{V_\nu}\int_{V_\nu} \frac{\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\nu'}{\left|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\nu'\right|^3}\rho_\nu\rho_\nu' d\kappa_\nu d\kappa_\nu' + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{s} G\int_{V_\nu}\int_{V_\nu} \frac{\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu}{\left|\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu\right|^3}\rho_\nu\rho_\mu d\kappa_\nu d\kappa_\mu$$

und summiert anschließend diese s Gleichungen auf, so folgt wegen

$$\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\int_{V_\nu} \frac{\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\nu'}{\left|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\nu'\right|^3}\rho_\nu\rho_\nu' d\kappa_\nu d\kappa_\nu' = \mathbf{0}\,,$$

also der Vertauschbarkeit von gestrichenen und ungestrichenen Größen, sowie wegen

$$\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{s} G\int_{V_\nu}\int_{V_\nu} \frac{\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu}{\left|\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu\right|^3}\rho_\nu\rho_\mu d\kappa_\nu d\kappa_\mu = \mathbf{0}\,,$$

weil sich je zwei entgegengesetzte Summanden der Doppelsumme gegenseitig aufheben, die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu} \rho_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} d\kappa_\nu = \mathbf{0}\,. \qquad (4.20)$$

Da bei Bestehen der Kontinuitätsgleichung für ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{A}_\nu(t)$ in $V_\nu(t)$ Differentiation nach t und Integration über $V_\nu(t)$ entsprechend

$$\frac{d^m}{dt^m}\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu} \rho_\nu \mathbf{A}_\nu d\kappa_\nu = \sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu} \rho_\nu \frac{d^m\mathbf{A}_\nu}{dt^m} d\kappa_\nu$$

vertauschbar sind, kann umgeformt werden in

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\rho_\nu \mathbf{r}_\nu d\kappa_\nu = \mathbf{0}$$

bzw. mit der Definition des Massenmittelpunktes

$$\mathbf{R} := \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\mathbf{r}_\nu\rho_\nu d\kappa_\nu \quad \text{mit} \qquad M = \sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\rho_\nu d\kappa_\nu$$

des Systems der Kontinua sowie der Massenerhaltung

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\rho_\nu d\kappa_\nu = 0$$

in

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0}\,. \tag{4.21}$$

D.h., der Massenmittelpunkt des keinen äußeren Kräften ausgesetzten Systems der gravitierenden inkohärenten Kontinua vollführt eine Trägheitsbewegung.

Es besteht aber auch ein ***Drehimpulssatz***. Dazu multipliziert man die Bewegungsgleichung vektoriell mit $\mathbf{r}_\nu$, integriert anschließend über $V_\nu(t)$ und summiert sodann über alle s Kontinua.

Wegen

$$G\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\int_{V_\nu}\frac{\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{r}'_\nu}{\left|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}'_\nu\right|^3}\rho_\nu\rho'_\nu d\kappa_\nu d\kappa'_\nu = \mathbf{0}$$

sowie

$$\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{s} G\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\int_{V_\mu}\frac{\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{r}_\mu}{\left|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu\right|^3}\rho_\nu\rho_\mu d\kappa_\nu d\kappa_\mu = \mathbf{0}$$

erhält man die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\rho_\nu \mathbf{r}_\nu \times \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} d\kappa_\nu = \mathbf{0} \tag{4.22}$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\rho_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu d\kappa_\nu = \mathbf{0}\,. \tag{4.23}$$

Daraus folgt nach unbestimmter Integration über *t*

$$\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\rho_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu d\kappa_\nu = \mathbf{N_0}\,, \tag{4.24}$$

die ***Erhaltung des Gesamtdrehimpulses***. Man schließt daraus auf die Existenz einer ***invariablen Ebene*** des Systems inkohärenter gravitierender Kontinua.

Schließlich besteht auch ein ***Energiesatz.*** Skalare Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\mathbf{v}_\nu$ und anschließende Integration über $V_\nu(t)$ führt nach Summation über alle Kontinua zu der Energiebilanz

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\rho_\nu \mathbf{v}_\nu \cdot \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} d\kappa_\nu + G\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\int_{V_\nu}\frac{\mathbf{v}_\nu \cdot \left(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}'_\nu\right)}{\left|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}'_\nu\right|^3}\rho_\nu\rho'_\nu d\kappa_\nu d\kappa'_\nu \\ = G\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}\int_{V_\nu}\int_{V_\nu}\frac{\mathbf{v}_\nu \cdot \left(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu\right)}{\left|\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu\right|^3}\rho_\nu\rho_\mu d\kappa_\nu d\kappa_\mu\,,\end{aligned} \tag{4.25}$$

wofür sich auch schreiben lässt

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\rho_\nu \mathbf{v}_\nu \cdot \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} d\kappa_\nu + \frac{G}{2}\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\int_{V_\nu}\frac{(\mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}'_\nu)\cdot\left(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}'_\nu\right)}{\left|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}'_\nu\right|^3}\rho_\nu\rho'_\nu d\kappa_\nu d\kappa'_\nu \\ = -\frac{G}{2}\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}\int_{V_\nu}\int_{V_\nu}\frac{(\mathbf{v}_\mu - \mathbf{v}_\nu)\cdot\left(\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu\right)}{\left|\mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu\right|^3}\rho_\nu\rho_\mu d\kappa_\nu d\kappa_\mu\,.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Bei Bestehen der Kontinuitätsgleichung für ein beliebiges Vektorfeld resultiert der Energiesatz *(Schneider II, 1993)*

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\rho_\nu \mathbf{v}_\nu^2 d\kappa_\nu \qquad \text{kinetische Energie}$$

$$-\frac{G}{2}\sum_{\nu=1}^{s}\int_{V_\nu}\int_{V_\nu}\frac{\rho_\nu\rho'_\nu}{|\mathbf{r}_\nu-\mathbf{r}'_\nu|}d\kappa_\nu d\kappa'_\nu \qquad \text{potentielle Energie der gravitativen Selbstwechselwirkung} \tag{4.27}$$

$$-\frac{G}{2}\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}\int_{V_\nu}\int_{V_\mu}\frac{\rho_\nu\rho_\mu}{|\mathbf{r}_\mu-\mathbf{r}_\nu|}d\kappa_\nu d\kappa_\mu \qquad \text{potentielle Energie der gravitativen Wechselwirkungen der Kontinua}$$

$$= E \qquad \text{Energiekonstante}$$

***Anm.**:*

1. *Die als räumlich und endlich vorausgesetzten Gebiete V_ν dürfen auch in **Flächenbelegungen** ausarten, wenn nur die Bedingung der Inkohärenz erfüllt bleibt.*
2. *Eine gesonderte Behandlung erfordern Stöße der wechselwirkenden Konstituenten der Kontinua untereinander.*

4.3 Erste Integrale im *N*-Körperproblem

Betrachtet werde ein System von N je einfach zusammenhängender, räumlich begrenzter Kontinua. Mit dem durch

$$\mathbf{P}_i := \iiint_{V_i(t)}\rho_i \mathbf{v}_i d\kappa_i \tag{4.28}$$

definierten ***Impuls*** des i-ten Kontinuums, das zum Zeitpunkt das Raumgebiet $V_i(t)$ ausfüllt, erhält man – in Nachbildung zum Teilchensystem – die Impulsbilanz

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{dt} = \mathbf{K}_i\,, \tag{4.29}$$

worin die Kraft sich häufig – wenn auch nicht immer eindeutig – aufspalten lässt in zwei Teile

$$\mathbf{K}_i = \underbrace{\iiint_{V_i(t)}\mathbf{k}_i d\kappa_i}_{\text{Volumenkraft}} + \underbrace{\oiint_{\mathbf{A}_i(t)}\mathbf{t}_i dA_i}_{\text{Flächenkraft}}$$

$\mathbf{k}_i$ Volumenkraftdichte
$\mathbf{t}_i$ Flächenkraftdichte
$\mathbf{A}_i(t)$ Oberfläche des Volumens $V_i(t)$

Der Impuls des i-ten Kontinuums lässt sich bei Erhaltung der Masse

$$M_i := \iiint_{V_i(t)}\rho_i d\kappa_i$$

ρ_i Dichteverteilung im Volumen $V_i(t)$
$\rho_i d\kappa_i = dm_i$ Massenelement am Ort des Volumenelements $d\kappa_i$ zur Zeit t

also

$$\frac{dM_i}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \text{Bestehen einer Kontinuitätsgleichung}$$

schreiben in der Gestalt

$$\mathbf{P}_i = M_i\frac{d\mathbf{R}_i}{dt}\,, \tag{4.30}$$

wenn man die Ortsvektoren der Massenmittelpunkte MZ_i der Kontinua als die gewogenen arithmetischen Mittel einführt gemäß

$$\mathbf{R}_i := \frac{1}{M_i}\iiint_{V_i(t)}\mathbf{r}_i\rho_i d\kappa_i \qquad \mathbf{r}_i \text{ Ortsvektor von } dm_i\,.$$

Trägt man die Impulsdarstellung in die Impulsbilanz ein, so folgt – bei Massenerhaltung – für den Massenmittelpunkt MZ_i die Newton-Eulersche Bewegungsgleichung

$$M_i \frac{d^2\mathbf{R}_i}{dt^2} = \mathbf{K}_i \,. \tag{4.31}$$

***Anm**: Die Zeitableitungen d/dt. etc. sind im Sinne der Kontinuummechanik materielle Ableitungen* (Schneider 1992)!

Für die Relativbewegung der Massenmittelpunkte

$$\mathbf{R}_{ij}(t) := \mathbf{R}_j(t) - \mathbf{R}_i(t) \tag{4.32}$$

zweier Kontinua erhält man durch Subtraktion ihrer Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2\mathbf{R}_{ij}}{dt^2} = \frac{\mathbf{K}_j}{M_j} - \frac{\mathbf{K}_i}{M_i} \,. \tag{4.33}$$

Enthält die Volumenkraft Anteile aus der Wechselwirkung der Körper untereinander (oberer Index (i)) und mit weiteren Körpern (oberer Index (a)), also

$$\mathbf{K}_l = \mathbf{K}_l^{(a)} + \mathbf{K}_l^{(i)} + \mathbf{F}_l \qquad l \in \{i, j\} \,,$$

und genügen die Wechselwirkungskräfte $\mathbf{K}_l^{(i)}$ einem Reaktionsprinzip

$$\mathbf{K}_i^{(i)} = -\mathbf{K}_j^{(j)} =: -\mathbf{K}^{(i)} \,,$$

so lautet die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung

$$\mu_{(ij)} \frac{d^2\mathbf{R}_{ij}}{dt^2} = \mathbf{K}^{(i)} + \mu_{(ij)} \left(\frac{\mathbf{K}_j^{(a)}}{M_j} - \frac{\mathbf{K}_i^{(a)}}{M_i} + \frac{\mathbf{F}_j}{M_j} - \frac{\mathbf{F}_i}{M_i} \right) \tag{4.34}$$

mit der durch

$$\mu_{(ij)} := \frac{M_i M_j}{M_i + M_j} \tag{4.35}$$

definierten ***reduzierten Masse*** des Subsystems (ij) der N Kontinua.

***Anm.**: Die Klammer in der Bewegungsgleichung der Relativbewegung kann meist vernachlässigt werden, so dass sie sich vereinfacht zu*

$$\mu_{(ij)} \frac{d^2\mathbf{R}_{ij}}{dt^2} = \mathbf{K}^{(i)} \,. \tag{4.36}$$

4.3.1 Sonderfall N=1

Ausgehend von der Impulsbilanz (4.29) ergibt sich im kräftefreien Fall, Massenerhaltung vorausgesetzt,

$$\mathbf{K} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{P} = \mathbf{P_0} \;\Rightarrow\; \mathbf{R}(t) = \mathbf{R_0} + \dot{\mathbf{R}}_\mathbf{0}(t - t_0) \tag{4.37}$$

die **Erhaltung des Impulses** und damit eine Trägheitsbewegung des Massenmittelpunktes *MZ* des Körpers im Inertialsystem, das der Impulsbilanz zugrunde liegt. Die Kräftefreiheit

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{Vol} + \mathbf{K}_F = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{K}_{Vol} = -\mathbf{K}_F \tag{4.38}$$

bedeutet nicht, dass keinerlei Kräfte wirken. Der Körper kann selbstgravitierend sein; es kommt aber wegen des Reaktionsprinzips zu keiner gravitativen Selbstkraft, die den Körper in Bewegung setzen würde. Weiter besteht eine **Erhaltung des Drehimpulses N** des Körpers

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} \;\Rightarrow\; \mathbf{N} = \mathbf{N_0} \;\; \textit{für} \;\; \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{4.39}$$

im Falle einer drehmomentfreien ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$) Bewegung, also einer Trägheitsdrehbewegung des Körpers. Das Fehlen eines Drehmomentes impliziert keine Kräftefreiheit der Bewegung. Ein selbstgravitierender Körper erfährt wegen des Reaktionsprinzips auch kein gravitatives Drehmoment. Einen Erhaltungssatz für eine Summe von kinetischer Energie

$$T := \iiint\limits_{V(t)} \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 d\kappa$$

und potentieller Energie

$$\tilde{V} := \iiint\limits_{V(t)} \rho U(\mathbf{r},t) d\kappa$$

bekommt man nur, wenn einerseits die Funktion $U(\mathbf{r},t)$ nicht explizit zeitabhängig ist, also die lokale Zeitableitung verschwindet,

$$\frac{\delta U}{\delta t} = 0 ,$$

sowie andererseits eine Darstellung

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = -\nabla_{\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}) \qquad \mathbf{T} \ \textit{Spannungstensor}$$

möglich ist. Das führt *(Schneider I 1992)* auf den **Erhaltungssatz für die Summe aus der kinetischen und der potentiellen Energie**

$$T + \tilde{V} + \psi = const \qquad mit \quad \psi := \iiint\limits_{V(t)} \rho \frac{d\varphi}{dt} d\kappa \cdot$$

Der Term ψ entfällt, wenn keine Flächenkräfte

$$\mathbf{K}_F = \oiint\limits_{\mathbf{A}(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dA \qquad \mathbf{n} \ \textit{nach außen gerichtete Flächennormale} \cdot$$

auftreten. Dieser Fall liegt vor, wenn sich der Körper in einem zeitunabhängige Gravitationsfeld bewegt. Er lässt sich erweitern zu einem Erhaltungssatz für die aus kinetischer, potentieller und der durch

$$U^I := \iiint\limits_{V(t)} \rho u d\kappa \qquad u \ \textit{spezifische innere Energie}$$

erklärten **inneren Energie** U^I zusammengesetzte Energie (*Schneider I 1992*)

$$E := T + \tilde{V} + U^I .$$

4.3.2 Zweikörpersystem

Betrachtet seien zwei ausgedehnte verformbare Körper in Newtonscher Gravitationswechselwirkung. Für die Relativbewegung der Massenmittelpunkte MZ_1 und MZ_2 der beiden Körper ergab sich die Bewegungsgleichung (4.34)

$$\mu_{(ij)} \frac{d^2 \mathbf{R}_{ij}}{dt^2} = \mathbf{K}^{(i)} + \mu_{(ij)} \left(\frac{\mathbf{K}_j^{(a)}}{M_j} - \frac{\mathbf{K}_i^{(a)}}{M_i} + \frac{\mathbf{F}_j}{M_j} - \frac{\mathbf{F}_i}{M_i} \right)$$

bzw. bei Vernachlässigung der Klammer

$$\mu_{(ij)} \frac{d^2 \mathbf{R}_{ij}}{dt^2} = \mathbf{K}^{(i)} .$$

Bei Newtonscher Gravitationswechselwirkung ist zufolge des Reaktionsprinzips

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{G}_{12} = -G \int_{M_2} \int_{M_1} \frac{\mathbf{l}}{l^3} dM_i dM_j ,$$

worin $\mathbf{l}$ den Verbindungsvektor vom Massenelement des ersten Körpers zum Massenelement des zweiten Körpers bezeichnet.

4.3.3 *N*-Körperproblem bei Newtonscher Gravitationswechselwirkung

Betrachtet sei ein aus *N* Körpern bestehendes abgeschlossenes System. Bei alleiniger Newtonscher Gravitationswechselwirkung der Körper bestehen **Erhaltungssätze** für den **Gesamtimpuls**

$$\mathbf{P} := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{N} M_i \dot{\mathbf{R}}_{MZ_i}\,, \qquad \mathbf{R}_{MZ_i} \text{ Ortsvektor des Massenmittelpunktes MZ}_i \text{ des i-ten Körpers,}$$

den **Gesamtdrehimpuls**

$$\mathbf{N} := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{N}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_{MZ_i} \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_{MZ_i} \times M_i \dot{\mathbf{R}}_{MZ_i}$$

sowie für die **Gesamtenergie**

$$E = T + \tilde{V} \qquad \text{mit } T = \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{2} \dot{\mathbf{R}}^2_{MZ_i} = \text{kinetische Energie, } \tilde{V} = \text{potentielle Energie des Systems.}$$

Die Beweisführung läuft analog zu der im *n*-Teilchensystem (s. Abschnitt 4.1) bzw. dem Unendlich-viel-Köperproblem (s. Abschnitt 4.2). Der Beweis stützt sich wesentlich darauf, dass bei Newtonscher Gravitationswechselwirkung die Summe der Gravitationskräfte und der Gravitationsdrehmomente verschwindet. Außerdem wird Massenerhaltung vorausgesetzt. Aus der Impulserhaltung schließt man auf die Trägheitsbewegung des Massenmittelpunktes des *N*-Körpersystems, aus der Drehimpulserhaltung auf die Existenz einer invariablen Ebene.

4.4 Erste Integrale in relativistischen Mehrkörperproblemen

Wie das Kepler-Problem in der nichtrelativistischen Himmelsmechanik der Prototyp des integrablen Bewegungsproblems ist, ist es das Schwarzschild-Problem (*Schmutzer 1968)* in der allgemein-relativistischen Himmelsmechanik *(Schneider III 1996).* In seiner vollen Allgemeinheit ist das nichtrelativistische Zweikörperproblem bisher nicht streng gelöst. Strenge oder wenigstens genäherte Lösungen wurden unter einschränkenden Annahmen gefunden.:

- Zweikörperproblem gravitierender Massenpunkte: streng gelöst
- Zweikörperproblem gravitierender starrer Körper: genähert gelöst
- Zweikörperproblem bei veränderlichen Massen: genähert gelöst

In den letzteren beiden Fällen wurden Lösungen störungstheoretisch ausgearbeitet, wobei teilweise Bewegungsintegrale gefunden wurden. Allgemein-relativistisch sind für das Zweikörper-Problem in erster wie auch in zweiter post-Newtonscher Näherung Bewegungsintegrale gefunden worden, eine strenge Lösung des relativistischen Zweikörperproblems ist bisher nicht gelungen. Ähnliches gilt für die Kopplung von Bahn- und Drehbewegung des relativistischen Zweikörperproblems *(Schneider III 1996).*

5. Aufbau eines integrablen Näherungssystems mittels einer fast-identischen kanonischen Transformation

5.1 Störungsrechnung versus Transformationstheorie

In vielen Bewegungsproblemen der Himmelsmechanik kann die Kräftefunktion (oder im kanonischen Formalismus die Hamilton-Funktion)

$$\mathbf{K} = \mathbf{K_0} + \mathbf{S} \qquad \text{bzw.} \qquad F = F_0 + F_1 \tag{5.1}$$

zerlegt werden in einen dominierenden Anteil $\mathbf{K_0}$ $(bzw.\, F_0)$ und der Größenordnung nach kleine Zusatzkräfte **S** $(bzw.\, F_1)$, d.h.

$$|\mathbf{S}| \ll |\mathbf{K_0}|$$

Sie werden durch einen (oder auch mehrere Kleinheitsparameter) ε charakterisiert: $O(\mathbf{S}) = O(\varepsilon)$.

Die Zerlegung der Kräftefunktion (analog der Hamilton-Funktion) kann häufig so vorgenommen werden, dass das durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K_0}$$

definierte Bewegungsproblem integrabel ist. Die Lösung dieses vereinfachten, sog. ***intermediären Bewegungsproblems***

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t, \vec{\alpha}) \qquad \vec{\alpha} \text{ frei wählbare Integrationskonstanten}$$

ist eine erste Annäherung an die Lösung des aktuell gestellten Bewegungsproblems $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}$ und kann auf verschiedene Weise zu dessen Lösung verwendet werden.

5.1.1 Störungsrechnung im Sinne der Variation der Konstanten

Die intermediäre Lösung $\mathbf{r}_0(t, \vec{\alpha})$ kann beispielsweise als Lösungsansatz für das aktuelle Problem

$$\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}_0(t, \vec{\alpha}(t)) \tag{5.2}$$

verwendet werden, wobei die Integrationskonstanten $\vec{\alpha}$ als Zeitfunktionen $\vec{\alpha}(t)$ aufgefasst werden und ihre Zeitveränderlichkeit aus Störungs- oder Variationsgleichungen

$$\dot{\vec{\alpha}} = f\left(t, \vec{\alpha}(t), \mathbf{S}(t, \vec{\alpha}(t), \varepsilon)\right) \tag{5.3}$$

bestimmt wird, die einen Zusammenhang mit der Störkraft formulieren. Geht man mit einer Lösung dieser Störungsgleichungen in den Lösungsansatz $\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}_0(t, \vec{\alpha}(t))$ ein, so resultiert daraus die gesuchte Lösung (5.2) des aktuellen Bewegungsproblems.

Diese von Euler begründete ***Methode der Variation der Konstanten*** wurde von Lagrange weiterentwickelt und durch die Einführung einer Störungsfunktion eine besonders einfache Gestalt gegeben. Die von Lagrange formulierten Variationsgleichungen, die sog. ***Lagrangeschen Planetengleichungen***, sind seither Grundlage zahlreicher himmelsmechanischer Störungsrechnungen, insbesondere in den Theorien der Planetenbewegungen. Sie sind in der Folge weiter entwickelt worden, um verschiedene Sätze nichtkanonischer/kanonischer Integrationskonstanten zu verwenden und vor allem der physikalischen Situation angepasste Zerlegungen der Störkräfte Rechnung tragen zu können. Ein herausragendes Beispiel ist die von Gauß gegebene Fassung der Planetengleichungen, die die Störkraft nach einem bahnbegleitenden Dreibein ermöglicht. Bis heute sind die verschiedenen Varianten der Variationsgleichungen Ausgangspunkt der Störungsrechnung in den Theorien der Planetenbahnen, der Mondbahn, der Bahnen künstlicher Erdsatelliten usw. Das intermediäre Bewegungsproblem war dabei fast ausnahmslos das Keplerproblem und der damit definierten Schnittstelle $\mathbf{K_0}/\mathbf{S}$. Das Verfahren ist aber in seinem Grundgedanken so flexibel, dass diese Schnittstelle auch anders gelegt werden kann. Das ist beispielsweise in der Theorie der Satellitenbahnen wünschenswert, wenn wie im Falle der Erde neben der Kepler-Kraft noch eine weitere dominierende, von der Abplattung der Erde herrührende Kraftkomponente existiert und man diese ganz oder weitgehend im intermediären Bewegungsproblem unterbringen will. Als Beispiele seien genannt das streng lösbare Vinti-Problem und eine darauf aufbauende kanonische Störungsrechnung, oder die von Cui verwendete intermediäre Lösung und die daran anschließende kanonische Störungsrechnung in Hill-

Variablen. Diese macht Gebrauch von einer zweiten Möglichkeit der Nutzung intermediärer Lösungen, nämlich dem Einsatz der Transformationstheorie zur Lösung eines Störungsproblems.

5.1.2 Transformationstheorie

Dass ein Bewegungsproblem durch Transformationen gelöst werden kann, wird klar, wenn man beachtet, dass beispielsweise die kanonischen Bewegungsgleichungen die charakteristischen Gleichungen der Hamilton-Jacobi-Gleichung *(Schneider I 1992)*

$$H(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}; t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{5.4}$$

sind, und ein vollständiges Integral $S(\mathbf{q}, \alpha; t)$ dieser partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung über die Transformationsgleichungen

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \qquad \text{einer Transformation} \quad \mathbf{q}, \mathbf{p} \to \beta, \alpha$$

die Lösung der kanonischen Gleichungen

$$\dot{\mathbf{q}} = H_{\mathbf{p}} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{q}}$$

vermittelt (***Satz von Jacobi***).

Die Transformation $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \beta, \alpha$ mit der ***Erzeugenden*** $S(\mathbf{q}, \alpha; t)$ transformiert das aktuell gestellte Beegungsproblem mit der Hamilton-Funktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ in ein Gleichgewichtsproblem, das durch eine verschwindende Hamilton-Funktion $H'(\alpha, \beta)$ beschrieben wird. Die transformierten generalisierten Koordinaten und Impulse α, β sind alle Konstanten.

Es zeigt sich, dass diese Möglichkeit jedenfalls dann besteht, wenn die Hamilton-Jacobi-Gleichung für eine vorgegebene Hamilton-Funktion lösbar ist. Das ist beispielsweise der Fall, wenn diese Gleichung durch Separation der Variablen lösbar ist, was bei Stäckel-Systemen gegeben ist. Aber diese Möglichkeit ist nach dem Theorem von Stäckel nur für krummlinige, orthogonale Koordinaten und eine in der Regel eingeschränkte Klasse von Potentialfunktionen sichergestellt. Zu den Stäckel-Systemen zählen für die Himmelsmechanik wichtige Bewegungsprobleme wie das Kepler-Problem und das Vinti-Problem. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist aber auch in Fällen lösbar, in denen sie nicht separierbar ist.

Transformationen können nun wenigstens auf zweierlei Weise eingesetzt werden, um Bewegungsprobleme zu lösen. Einerseits kann man sie verwenden, um die Funktionsstruktur der Kräftefunktion/Hamilton-Funktion so abzuändern, dass das gestellte Bewegungsproblem leichter lösbar ist. Diese Möglichkeit wird seit Delaunay und Poincaré in vielfältiger Weise genutzt. Ein erster Höhepunkt ist ohne Zweifel das um 1900 von von Zeipel *(Brouwer & Clemence 1961, Schneider II 1993)* entwickelte Verfahren einer auf ***fast-identischen kanonischen Transformationen*** basierenden Störungsrechnung und dessen Anwendung auf die Bahnen der Kleinplaneten. Dieses Verfahren hat dann Brouwer um 1960 eingesetzt zur Ausarbeitung einer Bahntheorie 2. Ordnung, in der neben dem Kepler-Term weitere zonale Harmonische des Geopotentials berücksichtigt sind. Charakteristisch für diese Entwicklung ist, dass die zu lösenden Bewegungsgleichungen nicht mehr allein die Störkräfte enthalten, sondern in der Regel die Gesamtkraft (analog die Hamilton-Funktion des aktuellen Bewegungsproblems). Es werden jetzt also nicht mehr notwendig Variations- bzw. Störungsgleichungen gelöst, sondern Bewegungsgleichungen. Die Anwendungen des von Zeipel-Verfahrens ließ freilich einige Schwächen offenkundig werden, die insbesondere von Deprit um 1969 aufgezeigt worden sind. In den sechziger Jahren des 20. Jahrhunderts wurden bedeutende methodische Fortschritte erzielt vor allem durch Hori, Deprit, Kamel, Henrard, Mersman *(Stumpff 1959-1974)*, die die auf Sophus Lie zurückgehende Transformationstheorie für die Himmelsmechanik erschlossen. Sie entwickelten Formalismen, die fast-identische Transformationen mit Hilfe von sog. Lie-Reihen bzw. Lie-Transformation ausführen (*Giacaglia 1972).* Die Bezeichnung zu Ehren von Lie geht dabei wohl auf den Mathematiker Gröbner *(Gröbner 1967)* zurück. Zusammen mit der parallel verlaufenen Entwicklung leistungsfähiger Programme zur symbolischen Formelmanipulation konnten zahlreiche Anwendungen erfolgreich durchgeführt und in vielen Gebieten der Himmelsmechanik genauere Bahntheorien ausgearbeitet werden. Genannt seien etwa die Theorien von Kinoshita zur Bahnbewegung von Erdsatelliten und zur Rotation der Erde, die Lösung des Hauptproblems der Satellitenbahntheorie in 4. Ordnung durch Deprit & Rom, die Arbeiten zur Mondtheorie und zu den Planetentheorien.

Die fast-identischen kanonischen Transformationen dienen der Erzeugung eines integrablen approximativen Systems zu einem gegebenen Bewegungsproblem. **Wenn das mit dem in dieser Weise erhaltenen integrablen System ein**

gegebenes Bewegungsproblem für beliebige Grade annähert, dann lässt sich das Bewegungsproblem praktisch als integrabel ansehen.

Die Methode der kanonischen Transformation durch Lie-Reihen wurde von Hori *(Hori 1966)* **mit der Absicht einer Lösung 2. Ordnung** in die Satellitenbahntheorie eingeführt. Eine Lie-Reihe ergibt eine kanonische Kontakttransformation (Lie-Transformation) durch ihre Erzeugende, die sich als Funktion der transformierten Variablen ausdrücken lässt. Die Lie-Transformation lässt sich für kanonische Variable aller Art ("unspecified canonical variables" nach Hori) verwenden und die entsprechenden Lie-Reihen sowohl für jede Variable als auch für jede beliebige Funktion der Variablen sind von derselben einheitlichen Struktur. Dazu muss die Lösung des transformierten Systems bekannt sein. Hori hat aufgrund einer Kepler-Bewegung mit der Anwendung des Mittelwertverfahrens über eine "pseudo-Zeit" *(Schneider II 1993)* anstelle der Lösung des transformierten Systems eine Methode zur Bestimmung der Erzeugenden und gleichzeitig der transformierten Hamilton-Funktion aus der Störfunktion des originalen Systems entwickelt, und ein zweistufiges Schema zur Lösung des Gleichungssystems für Satellitenbewegung vorgeschlagen. Nach Hori's Schema ist es Aksnes 1967 gelungen, eine Lösung 2. Ordnung für Satellitenbahnen abzuleiten.

Eine von Hori abweichende Methode ist von Cui erarbeitet worden, die sich zur Bestimmung eines ein gegebenes Bewegungsproblem am besten annähernden integrablen Systems, insbesondere eines für eine Lösung gegebener Ordnung der Satellitenbewegung geeigneten integrablen Systems verwenden lässt.

5.2 Kanonische Transformation mittels Lie-Reihen

Eine durch die Funktion $s = s(X',Y')$ erzeugte Lie-Reihe der konjugierten Variablen $(X',Y') = (x_1',x_2',\cdots, x_n';y_1',y_2',\cdots,y_n')$ ist definiert durch

$$x_j = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}D_s^k x'_j = x'_j + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}D_s^k x'_j\,,\quad y_j = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}D_s^k y'_j = y'_j + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}D_s^k y'_j\,, \qquad \wedge \tag{5.5}$$

wobei

$$D_s^{\,0} z = z\big|_{X',Y'}\,, \qquad D_s^{\,k} z = \left\{D_s^{\,k-1}z, s\right\}\Big|_{X',Y'}\,, \qquad k\geq 1 \tag{5.6}$$

die Lie-Differentiale k . Ordnung einer beliebigen Funktion $z = z(X',Y')$ bezeichnen mit der Poisson-Klammer

$$\{U,V\}_{X'Y'} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x'_j}\frac{\partial V}{\partial y'_j} - \frac{\partial V}{\partial x'_j}\frac{\partial U}{\partial y'_j}\right) \tag{5.7}$$

Zu erwähnen sind folgende Eigenschaften:

$$D^k(af+bg) = aD^k f + bD^k g\,, \qquad D^k(fg) = \sum_j \binom{k}{j} D^j f D^{k-j} g\,,$$
$$D^k\{f,g\} = \sum_j \binom{k}{j}\left\{D^j f, D^{k-j} g\right\}. \tag{5.8}$$

Die Funktion $s = s(X',Y')$ ist die sog. erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation, oder kurz die Erzeugende der Lie-Reihe. Wenn es eine positive Zahl *A* gibt, so dass die absoluten Werte der erzeugenden Funktion $s = s(X',Y')$ und aller ihrer partiellen Ableitungen kleiner als *A* sind,

$$|s(X,Y)| < A\,, \qquad \left|\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n+m_1+m_2+\ldots+m_n} s}{\partial x_{i_1}^{\,k_1}\partial x_{i_2}^{\,k_2}\ldots\partial x_{i_n}^{\,k_n}\partial y_{j_1}^{\,m_1}\partial y_{j_2}^{\,m_2}\ldots\partial y_{j_n}^{\,m_n}}\right| < A\,,$$

dann erweist sich die Lie-Reihe als konvergent. Zum Beweis braucht man nur die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}A^k = e^A$$

zu beachten. Es ist leicht nachzuweisen, dass eine konvergente Lie-Reihe (5.5) eine kanonische Transformation, also eine Lie-Transformation ergibt, die den kanonischen Variablensatz $(X,Y) = \{x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ in einen neuen Satz kanonischer Variablen (X',Y') abbildet. Dazu bildet man die Poisson-Klammer der Variablen (X,Y). Mit Hilfe von (5.8) erhält man

$$\{x_i,y_j\}_{X'Y'} = \left\{\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}D^m x_i', \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}D^k y_j'\right\}_{X'Y'} = \sum_{m\geq 0}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{m!}\frac{1}{k!}\left\{D^m x_i', D^k y_j'\right\}_{X'Y'}.$$

Mit $q = m + k$ folgt weiter

$$\left\{x_i, y_j\right\}_{X'Y'} = \sum_{q\geq 0}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\frac{1}{(q-m)!}\left\{D^m x_i', D^{q-m} y_j'\right\}_{X'Y'} = \sum_{q\geq 0}\frac{1}{q!}\sum_{m\geq 0}\binom{q}{m}\left\{D^m x_i', D^{q-m} y_j'\right\}_{X'Y'} .$$

Mit Hilfe der letzten der Gleichungen (5.8) ergibt sich

$$\left\{x_i, y_j\right\}_{X'Y'} = \sum_{q\geq 0}\frac{1}{q!}\sum_{m\geq 0}\binom{q}{m}\left\{D^m x_i', D^{q-m} y_j'\right\}_{X'Y'} = \sum_{q\geq 0}\frac{1}{q!} D^q \left\{x_i', y_j'\right\}_{X'Y'} .$$

weil definitionsgemäß $\left\{x_i', y_j'\right\}_{X'Y'} = \delta_{ij}$ gilt und folglich $D^q\left\{x_i', y_j'\right\}_{X'Y'} = 0$ für $q \geq 1$. Schließlich folgt

$$\left\{x_i, y_j\right\}_{X,Y'} = \delta_{ij} .$$

Damit ist bewiesen, dass die Lie-Transformation (5.5) eine *kanonische Kontakttransformation* ist. Ohne Beweis sei angemerkt, dass sich eine beliebige Funktion $L(X',Y')$ der Variablen (X',Y') unter der Lie-Transformation (5.5) in eine Funktion gleicher Struktur der Variablen (X,Y) gemäß

$$L(X,Y) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!} D_s^k L = L(X',Y') + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!} D_s^k L . \tag{5.9}$$

transformiert: **Vertauschungssatz von Lie** *(Giacaglia 1972, Gröbner 1967, Schneider I 1992).*

Wenn die erzeugende Funktion $s = s(X',Y')$ und deren partielle Ableitungen klein sind, z.B. von der Größenordnung $O(\varepsilon) << 1$, (Transformation mit kleinen Parametern oder fast-identische Transformation) dann lässt sich die Berechnung der Transformation auf die Berechnung der ersten wenigen Terme der Lie-Reihe beschränken; die Zahl der Reihenterme ist durch die geforderte Genauigkeit bedingt. Im folgenden werden nur fast-identische Transformationen diskutiert. Es ist bekannt, dass alle Lie-Transformationen in einem $2n$-dimensionalen Phasenraum eine Transformationsgruppe bilden:

Eine **identische Lie-Transformation**

$$\mathbf{L}^0: \quad X = X', \qquad Y = Y' \tag{5.10}$$

ist das Einheitselement der Gruppe; die entsprechende Erzeugende ist $s^0 = 0$;

Zu jeder nicht-identischen Lie-Transformation (5.5) gibt es genau eine Lie-Transformation, welche die kanonischen Variablen (X',Y') in die Variablen (X,Y) überführt. Diese wird die **Inverse** $\mathbf{L}^{-1}$ von (5.5) genannt; die entsprechende Erzeugende ist

$$s^{-1} = s^{-1}(X,Y) = -s(X',Y')\Big|_{X'=X, Y'=Y} . \tag{5.11}$$

Wenn die erste Lie-Transformation (5.5) mit der Erzeugenden $s = s(X',Y') = O(\varepsilon)$ die Variablen (X,Y) in (X',Y') transformiert, und dann eine zweite Lie-Transformation

$$\mathbf{L}': \quad x'_j = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!} D_{s'}^k x''_j = x''_j + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!} D_{s'}^k x''_j , \quad y'_j = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!} D_{s'}^k y''_j = y''_j + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!} D_{s'}^k y''_j \tag{5.12}$$

mit der Erzeugenden $s' = s'(X'',Y'') = O(\delta)$ die Variablen (X',Y') in (X'',Y'') transformiert, dann gibt es genau eine Lie-Transformation

$$\hat{\mathbf{L}}: \quad x_j = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!} D_{\hat{s}}^k x''_j = x''_j + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!} D_{\hat{s}}^k x''_j , \quad y_j = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!} D_{\hat{s}}^k y''_j = y''_j + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!} D_{\hat{s}}^k y''_j \tag{5.13}$$

welche die kanonischen Variablen (X,Y) direkt in die Variablen (X'',Y'') transformiert. Diese Transformation stellt sich als Produkt der Transformationen (5.5) und (5.12) dar.

Ersichtlich ist $\hat{\mathbf{L}}$ ein Produkt der o.g. beiden Lie-Transformationen: $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}' \otimes \mathbf{L}$. Die Erzeugende $\hat{s} = \hat{s}(X'',Y'')$ des Produktes lässt sich aus den Erzeugenden s und s' der Teiltransformationen (5.5) und (5.12) bestimmen. Führt man (5.12) in (5.5) ein und vernachlässigt man Terme höherer Ordnung, dann erhält man

$$\hat{s} = (s + s')_{X''Y''} + \frac{1}{2}\{s, s'\}_{X''Y''} + \frac{1}{12}\{s - s', \{s, s'\}\}_{X''Y''} + \cdots . \tag{5.14}$$

Anmerkungen:

1) Wenn die Transformation (5.13) identisch ist, dann ist die Transformation (5.12) die Inverse von (5.5) $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1} \otimes \mathbf{L} = \mathbf{L}^0$ und es muss sein $\hat{s} = \left(s + s^{-1}\right)\big|_{X,Y} + \frac{1}{2}\left\{s, s^{-1}\right\}_{X,Y} + \frac{1}{12}\left\{s - s^{-1}, \left\{s, s^{-1}\right\}\right\}_{X,Y} + \cdots = s^0 = 0$. Damit ist (5.11) bewiesen.

2) In den Anwendungen bietet die Ersetzung einer das System in eine integrable Form überführenden Transformation durch ein Produkt zweier oder mehrerer Transformationen die Möglichkeit, die Bestimmung einer sehr komplizierten Erzeugenden durch Bestimmung zweier oder mehrerer vergleichsweise einfacher Erzeugenden zu erreichen.

5.3 Bestimmung der Lie-Transformation für ein gestörtes Zweikörperproblem, Hori-Methode

Das Ziel der Anwendung der Lie-Transformation für Untersuchungen eines kanonischen Systems von Differentialgleichungen liegt darin, die zur Lösung des Systems ungünstigen Terme, z.B. von bestimmten generalisierten Koordinaten abhängige Terme, aus der Hamilton-Funktion zu beseitigen und damit das System näher an eine integrable Form heranzuführen. Dazu ist eine zu einem gegebenen zu lösenden System (Hamilton-Funktion) geeignete Lie-Transformation (Erzeugende) zu finden. Verwendet sei die Transformation (5.9) für die Hamilton-Funktion des zu transformierenden kanonischen Systems:

$$F(X,Y) = F(X',Y') + \sum \frac{1}{k!} D_s^k F \cdot$$

Da die Lie-Transformation eine Kontakttransformation ist, bleibt die Hamilton-Funktion unverändert, d.h.

$$F'(X',Y') = F\left(X(X',Y'), Y(X',Y')\right)$$

und daher

$$F'(X',Y') = F(X',Y') + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} D_s^k F \cdot \tag{5.15}$$

Die letztere Gleichung verknüpft die Erzeugende einer Lie-Transformation mit der Hamilton-Funktion $F'(X',Y')$ des transformierten kanonischen Systems von Differentialgleichungen für ein vorgegebenes kanonischen System; sie dient als **fundamentale Differentialgleichung** zur Anwendung der Lie-Transformationen für die Differentialgleichungen kanonischer Systeme. Die fundamentale Differentialgleichung (5.15) lässt sich auf zweierlei Weise verwenden:

A) Bestimmung der Erzeugenden s zur Überführung das Ausgangssystems in ein vorgegebenes transformiertes System $F'(X',Y')$;

B) Bestimmung der Hamilton-Funktion $F'(X',Y')$ des durch eine Lie-Transformation mit gegebener Erzeugenden s transformierten Systems.

5.3.1 Hori's Gleichung zum Aufbau einer Lie-Transformation zur Elimination der periodischen Terme

Von der Gleichung (5.15) ausgehend wurden unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der Erzeugenden ausgearbeitet, beispielsweise die **Methode von Hori** *(Giacaglia 1972, Schneider II 1993)*. Bei Hori wird das Ausgangssystem in der Form angenommen

$$F(X,Y) = F_0(X,Y) + R(X,Y), \tag{5.16}$$

worin $F_0(X,Y)$ den Kepler-Term bezeichnet; $R(X,Y)$ ist die restliche Komponente der Hamilton-Funktion, die sog. Störungsfunktion. Das Zielsystem wird in der Form

$$F'(X',Y') = F_0(X',Y') + R'(X',Y'), \tag{5.17}$$

angesetzt, damit der Kepler-Term direkt in die transformierte Hamilton-Funktion übertragen wird. Durch ein kanonisches Hilfssystem

$$\frac{dz}{dt'} = \left\{z, F_0(X',Y')\right\} \tag{5.18}$$

führt Hori eine ***Pseudozeit*** t' ein. Damit erhält er für die Erzeugende $s = s(X',Y')$

$$\frac{ds}{dt'} = \{s, F_0(X',Y')\}. \tag{5.19}$$

Einführen von (5.16), (5.17) und (5.19) in die Gleichung (5.15) ergibt die Hori-Gleichung

$$\frac{ds}{dt'} = R - R' + \{R,s\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{ds}{dt'},s\right\} + \frac{1}{2}\{\{R,s\},s\} - \frac{1}{6}\left\{\left\{\frac{ds}{dt'}s\right\},s\right\} + \ldots. \tag{5.20}$$

Durch eine saubere Trennung der Terme nach verschiedenen Größenordnungen

$$R' = R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} + \ldots, \qquad s = s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + \ldots, \tag{5.21}$$

und Anwendung einer Mittelwertbildung über die Pseudozeit

$$(A)_s = \lim_{T \to \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A(X',Y')\,dt' \right\} \tag{5.22}$$

ist es Hori gelungen, eine Lösung der Gleichung (5.20) schrittweise in der Form

$$R^{(1)} = (R)_s, \qquad s^{(1)} = \int \left(R - R^{(1)}\right) dt';$$

$$R^{(2)} = \frac{1}{2}\left\{R + R^{(1)}, s^{(1)}\right\}_s \qquad s^{(2)} = \frac{1}{2}\int \left(\left\{R + R^{(1)}, s^{(1)}\right\} - 2R^{(2)}\right) dt';$$

$$R^{(3)} = \frac{1}{2}\left\{R + R^{(1)}, s^{(2)}\right\}_s - \frac{1}{2}\left\{\frac{ds^{(2)}}{dt'}, s^{(1)}\right\}_s + \frac{1}{6}\left\{\left\{2R + R^{(1)}, s^{(1)}\right\}, s^{(1)}\right\}_s \tag{5.23}$$

zu erreichen.

5.3.2 Hori's Schema zur Konstruktion eines integrablen Näherungssystems für die Satellitenbewegung mittels zweier Lie-Transformationen

Bekannt ist, dass es in der Störungsfunktion langperiodische Terme gibt, und dass zur Elimination eines langperiodischen Terms eine Erzeugende niedrigerer Ordnung erforderlich ist. Selbst wenn z.B. der Integrand in der Formel (5.23) für $s^{(2)}$ von 2. Ordnung ist, kann $s^{(2)}$ auch von 1. Ordnung sein. Das stört die Konvergenz der Reihen (5.21). Um die Divergenz zu vermeiden, schlug Hori vor: alle lang-periodischen Komponenten in eine zweite Lie-Transformation zu verschieben. Da die lang-periodischen Terme in der Störungsfunktion für die Satellitenbewegung von 2. oder höherer Ordnung sind, ergibt sich aus (5.23) eine leicht modifizierte Lösung, welche zu einer konvergenten Reihe (5.21) führt. Nach dem Horischen Schema lassen sich alle periodischen Terme bis auf die 2. Ordnung der Störungsfunktion durch die Erzeugenden erfassen. Vernachlässigt man die restlichen periodischen Terme (sie sind allerdings der 3. Ordnung), so erhält man ein das ursprüngliche System annäherndes integrables System.

In *(Aksnes 1970)* und *(Cui 1990)* ist je eine Lösung 2. Ordnung für die Satellitenbewegung im Gravitationsfeld der Erde nach dem Hori-Schema ausgearbeitet worden. In der Lösung von Aksnes sind allerdings nur die zonalen Harmonischen berücksichtigt, bei Cui hingegen alle Harmonischen.

In *(Cui 1990)* ist gezeigt, dass das Hori-Schema basierend auf zwei Lie-Transformationen mit der Anwendung des Mittelwertverfahrens (5.22) theoretisch nicht verträglich ist: Wenn (5.22) in (5.23) durchweg verwendet wird, dann bleibt keine periodische Komponente in der transformierten Störungsfunktion R' mehr übrig. Eine zweite Lie-Transformation wird dann nichts bringen. Cui zeigte weiter, dass zur Lösung der Hori-Gleichung (5.20) ein "Quasi-Mittelwertverfahren" zulässig ist. Der Quasi-Mittelwert A_s einer Funktion $A(t)$ der Zeit lässt sich definieren durch

$$\frac{Max|A_s|}{Max|A(t)|} = O(1) \quad \text{und} \quad \lim_{T \to \infty} \left\{ \frac{1}{T}\int_0^T \left(A(t) - A_s\right) dt \right\} = 0.$$

Er kann selbst auch eine Funktion der Zeit sein (gleitendes Mittel). Ersichtlich ist der durch (5.22) definierte Mittelwert ein Sonderfall des hier definierten Quasi-Mittelwertes. Ein zweiter Sonderfall ist $A_s = A(t)$. In *(Cui 1990)* wurden Mittelwerte aller bei der ersten Lie-Transformation des Lösungsvorgangs auftretenden, kurzperiodische und konstante Komponenten beinhaltenden Terme mittels (5.22) berechnet, während alle langperiodische Komponenten enthaltenden Terme selbst als ihre Quasi-Mittelwerte angenommen wurden. Damit übernimmt die transformierte Störungsfunktion außer den konstanten Termen auch die langperiodische Komponenten enthaltenden Terme und daher wird die Hori-Idee durchführbar. Für die zweite Lie-Transformation wird das exakte Mittelwertverfahren durchweg verwendet. Darüber hinaus wird eine von Lelgemann (1983) gefundene verallgemeinerte Kepler-Bewegung (siehe Abs. 9.2) anstelle der Kepler-Bewegung als F_0 angenommen, so dass die intermediäre Bahn alle säkularen Störungen 1. Ordnung erfasst.

5.4 Methode von Cui

Die von Cui entwickelte Methodik zielt darauf ab, die zu einer in der Hamilton-Funktion bestehenden integrablen Form nicht passenden periodischen Terme, soweit wie möglich, durch fast-identische Lie-Transformationen zu beseitigen, vorausgesetzt, dass eine solche integrable Form tatsächlich in der gegebenen Hamilton-Funktion besteht und dominiert. Damit verbleiben die Terme, die nicht durch die fast-identische Transformation eliminiert werden können, in der transformierten Hamilton-Funktion. Aus Letzterem entsteht ein möglichst nahe am ursprünglichen System liegendes integrables System durch Vernachlässigung der nicht zu der integrablen Form passenden Terme. Das Verfahren besteht aus

1) einer **elementaren fast-identischen Lie-Transformation**, die einen ausgewählten periodischen Term oder einen Satz derartiger Terme eliminiert;
2) dazu einer konvergenzbeschleunigenden Hilfsmaßnahme;
3) einem Schema zu schrittweiser Konstruktion einer fast-identischen Lie-Transformation zur Elimination möglichst vieler periodischer Terme aus der Hamilton-Funktion.

Das Verfahren lässt sich sowohl auf die Bahntheorie als auch auf andere Gebiete anwenden. Für die Anwendung in der Bahntheorie ist eine integrable Form im Abs. 9 angegeben.

5.4.1 Fast-identische Lie-Transformation zur Elimination ausgewählter periodischer Terme

Gegeben sei die Hamilton-Funktion

$$F(X,Y) = F^*(X,Y) + R_r(X,Y) + R(X,Y), \tag{5.24}$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $F^*(X,Y)$ stellt eine integrable Form mit der allgemeinen Lösung $X = X^*(t;\alpha)$, $Y = Y^*(t;\alpha)$ dar, wobei α die frei wählbaren Integrationskonstanten bezeichnet;

(2) $R_r(X,Y) + R(X,Y) = O(\varepsilon)$ mit $\varepsilon \ll 1$; (5.25)

(3) $\lim\limits_{T\to\infty}\left\{\dfrac{1}{t_2-t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} R\left(X^*(t,\alpha),Y^*(t,\alpha)\right)dt\right\} = 0$, $\int R\left(X^*(t,\alpha),Y^*(t,\alpha)\right)dt = O(\delta)$. (5.26)

Die Bedingung (2) zeigt, dass die integrable Form $F^*(X,Y)$ der dominierende Teil der Hamilton-Funktion ist, während die Bedingung (3) andeutet, dass $R(X,Y)$ eine periodische Funktion der Zeit mit genügend kurzer Periode ist.

Es soll folgender Satz bewiesen werden.

Satz: Unter den o.g. Bedingungen (1)~(3) *gibt es eine fast-identische Lie-Transformation* $(X,Y) \Rightarrow (\hat{X},\hat{Y})$, *mit der Erzeugenden*

$$s = \int R\left(X^*(t,\alpha),Y^*(t,\alpha)\right)dt = O(\delta), \tag{5.27}$$

die das System (5.24) *in*

$$\hat{F}(\hat{X},\hat{Y}) = F^*(\hat{X},\hat{Y}) + R_r(\hat{X},\hat{Y}) + \hat{R}(\hat{X},\hat{Y}) \tag{5.28}$$

mit $F^*(\hat{X},\hat{Y}) = F^*(X,Y)\big|_{X,Y=\hat{X},\hat{Y}}$, $R_r(\hat{X},\hat{Y}) = R_r(X,Y)\big|_{X,Y=\hat{X},\hat{Y}}$ *und* $\left|\hat{R}(\hat{X},\hat{Y})\right| \ll \left|R(\hat{X},\hat{Y})\right|$ *überführt, d.h. den periodischen Term* $R(X,Y)$ *aus der Hamilton-Funktion eliminiert.* An dessen Stelle entsteht ein Term $\hat{R}$ in höherer Größenordnung.

Die sonstigen Terme bleiben dabei unverändert.

Für den kleinen Parameter δ in (5.27) kann $\delta = \varepsilon$ oder $\delta >> \varepsilon$ sein; das hängt vom Resonanzverhalten des Systems ab:

- wenn $R(X,Y)$ kurzperiodisch (entspricht **Nichtresonanz**) ist, dann ist $\delta = \varepsilon$;
- wenn sie mäßig langperiodisch (entspricht **mäßiger Resonanz**) ist, $\varepsilon << \delta << 1$.
- Im Fall, dass die Periode von $R(X,Y)$ extrem lang ist, kann $\delta = 1$ sein.

Der letzte Fall der sogenannten **Deep Resonance** ist durch die Bedingung (5.27) ausgeschlossen.

Damit lässt sich der zu beweisende Satz folgendermaßen umformulieren:

Satz: *Unter den Bedingungen (5.24) - (5.26) lassen sich alle bis auf Terme mäßiger Resonanz durch eine fast-identische Lie-Transformation eliminieren.*

Zum Beweis des Satzes und zur Bestimmung des dabei entstehenden Terms $\hat{R}$ trägt man (5.24) und (5.28) in (5.15) ein. Das ergibt

$$0 = R - \hat{R} + \{\hat{F}, s\} + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+1)!} D_s^{\,k} \{\hat{F}, s\} + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} D_s^{\,k} (R - \hat{R}) \cdot \tag{5.29}$$

Da die Variablen $(\hat{X}, \hat{Y})$ kanonisch sind und das transformierte Gleichungssystem erfüllen, gilt die Gleichung $\frac{dz}{dt} = \{z, \hat{F}\}$ für beliebige Funktion $z = z(\hat{X}, \hat{Y})$ der Variablen, insbesondere für die Erzeugende s . Die Gleichung (5.29) nimmt dann (anstelle (5.20) bei Hori) die Form an

$$\frac{ds}{dt} = R - \hat{R} + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} D_s^k (R - \hat{R}) - \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+1)!} D_s^k \left(\frac{ds}{dt}\right) \cdot \tag{5.30}$$

Aus (5.27) erhält man

$$\frac{ds}{dt} = R\,; \tag{5.31}$$

Einführung in (5.30) ergibt dann

$$\hat{R} + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} D_s^k \hat{R} = \sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!} D_s^k R\,, \tag{5.32}$$

also eine Gleichung zur Bestimmung der Funktion $\hat{R}$. Sie lässt sich folgendermaßen lösen: Mit dem Ansatz

$$\hat{R} = \sum_{k\geq 0} a_k D_s^k R = a_0 + \sum_{k\geq 1} a_k D_s^k R\,,$$

erhält man

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} D_s^k \hat{R} = \sum_{k\geq 1} \sum_{m\geq 0} \frac{1}{k!} a_m D_s^{k+m} R \xrightarrow[k=n-m]{k+m=n} \sum_{n\geq 1} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(n-m)!} a_m D_s^n R \xrightarrow{n\to k} \sum_{k\geq 1} \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{(k-m)!} a_m D_s^k R \cdot$$

Beide in (5.32) eingeführt, ergibt die Gleichung

$$a_0 R + \sum_{k\geq 1} a_k D_s^k R + \sum_{k\geq 1} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{(k-m)!} a_m D_s^k R = \sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!} D_s^k R \cdot$$

Vergleich der Koeffizienten der Lie-Differentiale $D_s^k R$ auf beiden Seiten ergibt

$$a_0 = 0\,, \quad a_k + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{(k-m)!} a_m = \frac{k}{(k+1)!} \qquad k \geq 1\,,$$

d.h. ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a_k mit einer Koeffizentenmatrix von Dreiecksgestalt. Die Lösung lässt sich direkt schrittweise berechnen. Man erhält schließlich

$$\hat{R} = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} D_s^k R =: K(R, s) = O(\varepsilon\delta) \tag{5.33}$$

und damit für die transformierte Hamilton-Funktion:

$$\hat{F} = F^* + R_r + K(R,s)\,. \tag{5.34}$$

Aus (5.24) und (5.34) ersieht man, dass der periodische Teil R der ursprünglichen Hamilton-Funktion durch die mittels der Erzeugenden (5.31) spezifizierte fast-identische Lie-Transformation beseitigt ist und statt dessen erhält die transformierte Hamilton-Funktion einen um die Größenordnung $O(\delta) << 1$ kleineren Term $\hat{R}$. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Anm.: (1) Die Abwesenheit des absichtlich in der transformierten Hamilton-Funktion belassenen Terms R_r in der Gleichung (5.31) zur Bestimmung der Erzeugenden bzw. (5.32) zur Bestimmung der transformierten Störungsfunktion erlaubt eine freie Wahl des durch die Transformation zu eliminierenden Teils aus der Hamilton-Funktion oder eine freie Aufteilung zwischen R_r und R. Die einzige Forderung dabei ist, dass R periodisch sein muss und ihre Integration über die Zeit (5.27) klein ist. In der praktischen Anwendung wird R so gewählt, so dass R_r nur Terme höherer Ordnung enthält.

(2) Die durch (5.31)-(5.34) gegebene Transformation ist eine **elementare fast-identische Lie-Transformation**, eine fast-identische Lie-Transformation zur Beseitigung eines beliebig gewählten periodischen Terms. Durch mehrmalige Verwendung einer solchen elementaren Transformation lassen sich mehre periodische Terme aus der Hamilton-Funktion eliminieren.

(3) Für die Funktion $K(R,s)$ gelten die Rechenregeln:

$$K(R_1+R_2,s) = K(R_1,s) + K(R_2,s)\,,$$

$$K(R,s_1+s_2) = K(R,s_1) + K(R,s_2) + X(R,s_1,s_2) \tag{5.35}$$

mit

$$\begin{aligned} X(R,s_1,s_2) = &-\frac{1}{6}\left(\{\{R,s_1\},s_2\}+\{\{R,s_2\},s_1\}\right) \\ &+\frac{1}{24}\Big(\{\{\{R,s_1\},s_2\},s_2\}+\{\{\{R,s_1\},s_1\},s_2\}+\{\{\{R,s_1\},s_2\},s_1\} \\ &\quad+\{\{\{R,s_2\},s_1\},s_1\}+\{\{\{R,s_2\},s_1\},s_2\}+\{\{\{R,s_2\},s_2\},s_1\}\Big)+\ldots\,. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Eine die Konvergenz beschleunigende Maßnahme: Nun werde die Hamilton-Funktion (5.24) erneut aufgeteilt gemäß

$$F(X,Y) = F^*(X,Y) + R_r(X,Y) + R(X,Y) \equiv F^*(X,Y) + \big(R_r(X,Y) - P(X,Y)\big) + \big(R(X,Y) + P(X,Y)\big)\,,$$

wobei $P(X,Y)$ eine durch eine fast-identische Transformation eliminierbare periodische Funktion der Zeit ist. Eine fast-identische Lie-Transformation mit der Erzeugenden

$$s = \int (R+P)\,dt = \int R\,dt + \int P\,dt = \hat{s} + \Delta s \tag{5.37}$$

wird die periodischen Terme $R+P$ beseitigen und statt dessen eine kleinere Komponente $K(R+P,\hat{s}+\Delta s) = K(R,\hat{s}) + K(R,\Delta s) + X(R,\hat{s},\Delta s) + K(P,\hat{s}) + K(P,\Delta s) + X(P,\hat{s},\Delta s)$ in der Hamilton-Funktion belassen. Damit ergibt sich die transformierte Hamilton-Funktion nach (5.34) zu

$$F' = F^* + R_r - P + K(R,\hat{s}) + K(R,\Delta s) + X(R,\hat{s},\Delta s) + K(P,\hat{s}) + K(P,\Delta s) + X(P,\hat{s},\Delta s)\,. \tag{5.38}$$

Als Funktion $P(X,Y)$ wählt man die periodische Komponente von $K(R,\hat{s})$:

$P(X,Y) = K_p(R,\hat{s}) = K(R,\hat{s}) - K_r(R,\hat{s})$, wobei $K_r(R,\hat{s})$ die nicht durch eine fast-identische Transformation eliminierbare Komponente von $K(R,\hat{s})$ ist. Eintragen in (5.38) ergibt

$$F' = F^* + R_r + K_r(R,\hat{s}) + K(R,\Delta s) + X(R,\hat{s},\Delta s) + K(P,\hat{s}) + K(P,\Delta s) + X(P,\hat{s},\Delta s)\,. \tag{5.39}$$

Da $\Delta s = \int K_p(R,\hat{s})\,dt$ großenordnungsmäßig kleiner als $\hat{s} = \int R\,dt$ ist, ist die in (5.39) übrig gebliebene Störungsfunktion $K(R,\Delta s) + X(R,\hat{s},\Delta s) + K(P,\hat{s}) + K(P,\Delta s) + X(P,\hat{s},\Delta s)$ kleiner als $K(R,s)$ in (5.34). Mit anderen Worten: die Transformation (5.37) mit $P(X,Y) = K_p(R,\hat{s})$ beseitigt mehr periodische Komponenten aus der Hamilton-Funktion als die Transformation (5.31). Damit beschleunigt der zusätzliche Term Δs in der Erzeugenden den Konvergenzvorgang für sukzessive Eliminationen der periodischen Komponenten vermittels der fast-identischen Lie-Transformationen.

Die hier konzipierte Methode zum sukzessiven Aufbau einer fast-identischen Lie-Transformation lässt sich vielfach verwenden. In den nächsten Abschnitten werden zwei Anwendungsweisen vorgestellt.

5.4.2 Konstruktive Überprüfung der Integrabilität eines gegebenen Bewegungsproblems durch fast-identische Lie-Transformationen

Es sei die Hamilton-Funktion

$$F = F^* + R = F^* + R_1 + R_2 + R_3 + ... \qquad (5.40)$$

eines dynamischen Systems gegeben, worin F^* eine integrable Form darstellt; $R = O(\varepsilon)$ sei die rein periodische Störungsfunktion mit den Termen $R_k = O(\varepsilon^k)$ in verschiedenen Ordnungen. Angenommen sei, dass höchstens eine Resonanz in Termen 2. und höherer Ordnung auftritt:

$$\int R_k dt = \text{periodisch } = \begin{cases} O(\varepsilon) & \text{für } \; k = 1 \\ O(\varepsilon^{k-\alpha}) & \text{für } \; k \geq 2 \end{cases}, \qquad (5.41)$$

worin $0 \leq \alpha < 2$ die Stärke der Resonanzeffekte angibt. Eine Lie-Transformation mit der Erzeugenden

$$s^{(1)} = \int R_1 dt = O(\varepsilon)$$

wird den Term R_1 der Störungsfunktion R eliminieren und statt dessen eine durch R_1 und $s^{(1)}$ nach (5.33) bestimmte Reihe

$$K\left(R_1, s^{(1)}\right) := \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} D^k_{s^{(1)}} R_1 \qquad (5.42)$$

zurücklassen. Nach der Abtrennung aller mit der integrablen Form zusammenpassenden Komponenten $F^{*(1)}$ aus der Klammer-Reihe $K\left(R, s^{(1)}\right)$ erhält man die transformierte Hamilton-Funktion

$$F = F^* + F^{*(1)} + \left(K\left(R, s^{(1)}\right) - F^{*(1)}\right) + R_2 + R_3 + ... =: F^{(1)} + R^{(1)}.$$

Nun stellt

$$F^{(1)} = F^* + F^{*(1)}$$

ein integrables Näherungssystems zu dem gegebenen dynamischen System dar; die Störungsfunktion des transformierten Systems, $R^{(1)} = O(\varepsilon^2)$, ist das Residuum. Der Annäherungsgrad ist daher **1**. Wenn die Störungsfunktion die Bedingung (5.41) erfüllt, dann lässt sich eine zweite fast-identische Transformation einführen. Die entsprechende Erzeugende und die transformierte Hamilton-Funktion sind

$$s^{(2)} = \int R^{(1)} dt = O\left(\varepsilon^{2-\alpha}\right),$$

$$F = F^* + F^{*(1)} + F^{*(2)} + \left(K\left(R^{(2)}, s^{(2)}\right) - F^{*(2)}\right) =: F^{(2)} + R^{(2)}$$

mit dem Residuum $R^{(2)} = O\left(R^{(1)}\right) \cdot O\left(s^{(2)}\right) = O\left(\varepsilon^{4-\alpha}\right)$ und dem Annäherungsgrad $4 - \alpha - 1 = 2(2-\alpha) + \alpha - 1$.

Eine dritte Transformation wird das Residuum zu $R^{(3)} = O\left(\varepsilon^{4(2-\alpha)+\alpha}\right)$ reduzieren, also ein integrables Näherungssystem des Grades $4(2-\alpha) + \alpha - 1$ erstellen. Im allgemeinen erhält man ein integrables System vom Annäherungsgrad

$$\nu_k = 2^{k-1}(2-\alpha) + \alpha - 1 \qquad (5.43)$$

mit dem Residuum der Ordnung $O\left(\varepsilon^{\nu_k + 1}\right)$ nach der *k*-ten Transformation ($k \geq 2$).

Anm.: Es ist ersichtlich, dass sich der Annäherungsgrad durch jede eingeführte Transformation um $\nu_k - \nu_{k-1} = 2^{k-2}(2-\alpha) > 0$ erhöht. Die Erhöhungsrate erhöht sich ihrerseits mit der wachsenden Anzahl der Transformationsschritte.

Beispiel: Für $\alpha = 1$ ergibt sich der Annäherungsgrad $\nu_3 = 4$ bei der dritten Transformation; weitere Transformationen führen zu $\nu_4 = 8$, $\nu_5 = 16$ usw. Für $\alpha = 3/2$ ergibt sich entsprechend $\nu_3 = 5/2$, $\nu_4 = 9/2$ und $\nu_5 = 17/2$.

Dieser Vorgang bricht ab, sobald (z.B. nach der $k-\text{ten}$ Transformation) das Residuum die Bedingung (5.41) nicht mehr erfüllt. Damit liegt ein das gegebene Bewegungsproblem am besten annäherndes integrables System vor. Das gegebene dynamische System ist also durch ein integrables System ν_k-gradig näherungsweise oder kurz ν_k-gradig integrabel. Wenn sich der o.g. Vorgang unbegrenzt fortsetzen lässt, d.h., die Bedingung (5.41) durch das sich jeweils aus der fast-identischen Transformation ergebende Residuum immer erfüllt wird, dann erweist sich das gegebene System als integrabel.

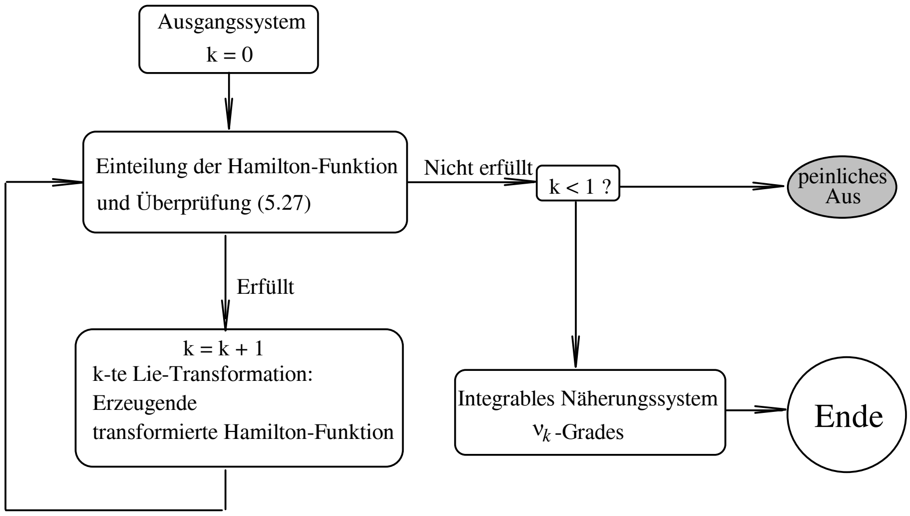

Abb. 5.1 Auffinden eines ein gegebenes System am besten annäherndes integrables System

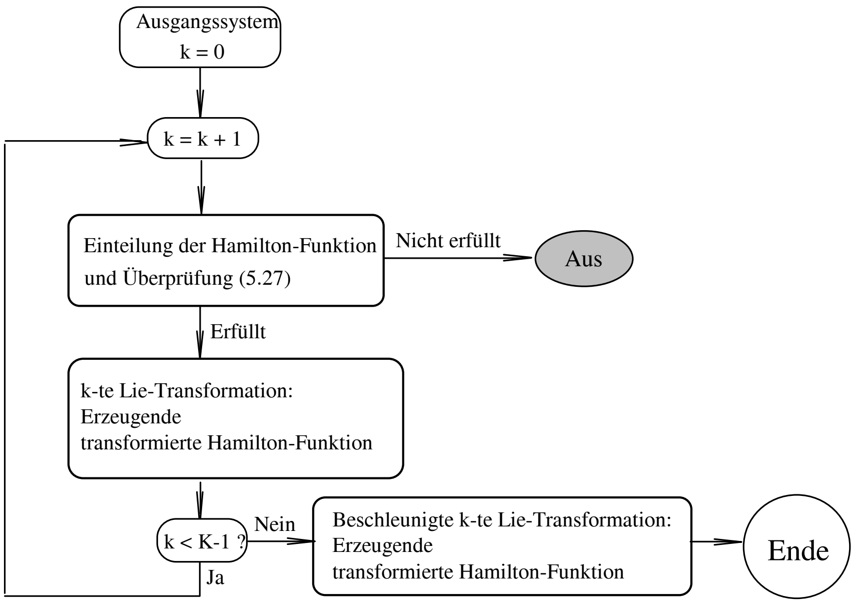

Abb. 5.2 Konstruktion des für eine Lösung gewisser Ordnung verwendeten integrablen Näherungssystems

Der mathematische Unterschied zwischen einem ν_k -gradig integrablen System und einem (echt) integrablen System besteht darin, dass jedes integrable Näherungssystem eines ν_k -gradig integrablen Systems eine asymptotisch genäherte Lösung des ursprünglichen Systems ergibt, während die integrablen Näherungssysteme eines (echt) integrablen Systems die ersten Terme der konvergenten Lösungsreihe des Systems ergeben.

Eine theoretisch verträgliche Abschätzung der Genauigkeit einer asymptotisch genäherten Lösung liegt bisher nicht vor.

5.4.3 Konstruktion eines integrablen Näherungssystems für eine Lösung gewisser Ordnung eines vorgelegten Bewegungsproblems

Eine Lösung *J*. Ordnung eines gegebenen dynamischen Systems ist eine formale Näherungslösung des Systems mit dem Abbruchfehler der Ordnung $O\left(\varepsilon^{J+1}\right)$ in periodischen Komponenten und $O\left(\varepsilon^{J+2}\right)$ in säkularen Komponenten, worin ε für den das System charakterisierenden kleinen Parameter steht. Dabei ist es nicht erforderlich, dass das fragliche System integrabel ist. (In den meisten Fällen ist die Integrabilität eines System nicht einfach festzustellen.) Eine derartige Lösung bekommt man aus den Integralen eines zu dem gegebenen System $J+1$-gradig integrablen Näherungssystems (allerdings nur wenn es existiert) zusammen mit der zum Aufbau dieses Systems durchgeführten fast-identischen Transformation. Bei der Berechnung der Transformation sind nur Terme bis zur Ordnung $O\left(\varepsilon^{J}\right)$ zu berücksichtigen.

Die Anzahl *K* der zum Aufbau des integrablen genäherten Systems geforderten fast-identischen Transformationen lässt sich mittels der Ungleichungen

$$\nu_K = 2^{K-1}(2-\alpha)+\alpha-1 \geq J+1 \quad \text{und} \quad \nu_{K-1} = 2^{K-2}(2-\alpha)+\alpha-1 < J+1$$

bestimmen; sie hängt von dem Resonanzverhalten des dynamischen Systems ab. Beispielsweise sind für eine Lösung 3. Ordnung 3 Transformationen bei $\alpha=1$ und 4 Transformationen bei $\alpha=3/2$ erforderlich. Sobald die Anzahl *K* festgelegt ist, lässt sich das angestrebte integrable Näherungssystem nach dem im vorigen Abschnitt angegebenen Schema schrittweise konstruieren. Mit Hilfe der im Abschnitt 5.4.1 konzipierten Maßnahme zur Beschleunigung der Konvergenz kann ein Transformationsschritt gespart werden. Das Ablaufschema ist in Abb. 5.2 angegeben.

Abschnitt B

Theoreme über Bewegungsintegrale

In diesem Abschnitt werden aus der Literatur bekannte Theoreme über Integrabilität/Nichtintegrabilität von dynamischen Systemen zusammengetragen. Darüber hinaus werden neue Theoreme über das Vorliegen von Bewegungsintegralen vorgestellt und ihr Zusammenhang mit bekannten Theoremen aufgezeigt.

6. Aus der Literatur bekannte Theoreme

6.1 Zyklische Koordinaten

Generalisierte Koordinaten, die in der Lagrange-Funktion *L* oder der Hamilton-Funktion *H* eines Bewegungsproblems nicht explizit auftreten, werden **zyklische** oder **verborgene Koordinaten** genannt. Jede solche Koordinate hat ein Bewegungsintegral zur Folge *(Schneider I 1992)*.

Fasst q' die in der konkreten Formulierung eines Bewegungsproblems zyklischen Koordinaten unter den gewählten generalisierten Koordinaten $\overline{q} := \left(\overline{q}', \overline{q}''\right)$ zusammen, so folgt wegen

$$\nabla_{\mathbf{q}'} L = 0 \tag{6.1}$$

aus den zugehörigen Lagrange-Gleichungen 2. Art *(Schneider I 1992)*, d.h. aus

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}'} L\right) - \nabla_{\mathbf{q}'} L = 0,$$

als Resultat

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{\mathbf{q}}'} L\right) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\dot{\mathbf{q}}'} L = \alpha', \qquad (\alpha' \text{ Integrationskonstante}). \tag{6.2}$$

Übersetzt in die Hamiltonsche Formulierung bedeutet das die zeitliche Konstanz der zu den q' kanonisch konjugierten Impulsen p', d.h. die **Bewegungsintegrale**

$$p' := \nabla_{\dot{q}'} L = \alpha'. \tag{6.3}$$

Mit Hilfe dieser Bewegungsintegrale kann man die Ordnung der Lagrange-Gleichungen 2. Ordnung gerade um die Anzahl der zyklischen Koordinaten verringern. Führt man nämlich die durch

$$R := L - \overline{\dot{q}}\alpha' \tag{6.4}$$

definierte **Routhsche Funktion** ein und ersetzt in den Lagrange-Gleichungen die Lagrange-Funktion L durch diese, so verbleiben für die nichtzyklischen Koordinaten q'' die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{q}''} R\right) - \nabla_{q''} R = 0. \tag{6.5}$$

Darin hat R die Bedeutung einer Lagrange-Funktion eines dynamischen Systems von $n - j$ (*j*= Zahl der zyklischen Koordinaten in *L*) Freiheitsgraden. Das legt die Frage nahe, ob man ein Bewegungsproblem nicht von vorn herein so formulieren kann, dass alle gewählten generalisierten Koordinaten zyklisch sind. Das hätte auch nach Lagrange die Bewegungsintegrale

$$\nabla_{q} L = \alpha \qquad (j = n \text{ Integrationskonstanten}) \tag{6.6}$$

zur Folge, also übersetzt in die kanonische Formulierung die zeitliche Konstanz aller generalisierten Impulse **p**. Das gleiche Ergebnis folgt natürlich auch aus den kanonischen Gleichungen

$$0 = \nabla_{q} L \quad \longrightarrow \quad -\nabla_{q} H = \dot{p} \quad \Rightarrow \quad p = \alpha. \tag{6.7}$$

Die Bahn würde sich in diesem Falle durch Quadratur der kanonischen Gleichungen

$$\dot{q} = \nabla_\alpha H(\alpha, t)$$

ergeben, die besonders einfach wird, wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit zeitabhängig ist. Wegen

$$\dot{q} = \nabla_\alpha H(\alpha) = \omega \qquad (\omega \text{ Konstante}) \tag{6.8}$$

folgt dann ja nach unbestimmter Integration über t

$$q(t) = \omega t + \beta \qquad (\beta \text{ Integrationskonstante}). \tag{6.9}$$

Zusammengefasst:

Zyklische Koordinaten vereinfachen die Lösung der Lagrange-Gleichungen 2. Art wie auch die der kanonischen Gleichungen. Das Auftreten zyklischer Koordinaten hängt mit der getroffenen Wahl der generalisierten Koordinaten zusammen. Gäbe es eine Wahl generalisierter Koordinaten so, dass alle q ausnahmslos zyklisch sind, dann besäße die Hamilton-Funktion die Funktionsstruktur $H(p,t)$ und die Bahn $q(t)$ ließe sich durch Quadratur der kanonischen Gleichungen

$$\dot{q} = \nabla_\alpha H(\alpha, t)$$

berechnen, in denen α die konstanten generalisierten Impulse p sind.

Da die bei der Formulierung eines Bewegungsproblems gewählten generalisierten Koordinaten q i. allg. nicht sämtlich zyklisch sein werden, stellt sich die Frage wie folgt:

Gibt es eine Variablentransformation $\mathrm{q} \to \mathrm{q}'$*, so dass die transformierten generalisierten Koordinaten sämtlich zyklisch sind ?*

In der Hamilton-Mechanik läuft das auf die Aufgabe hinaus, eine geeignete kanonische Transformation zu bestimmen, die auf eine Hamilton-Funktion führt, die von keiner generalisierten Koordinate mehr abhängt. Dem gleichwertig ist es, durch Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung die eine solche kanonische Transformation vermittelnde erzeugende Funktion aufzusuchen. Ob sich diese Aufgabe lösen lässt, läuft auf die Lösbarkeit der Hamilton-Jacobi-Gleichung hinaus *(Schneider I 1992).*

Anm.: *Schmeidler hat in (Schmeidler 1958,1962) gezeigt,*

"dass Hamiltonsche Systeme immer dann Integrale, die ganzen Klassen von Potentialfunktionen gemeinsam sind, besitzen, wenn zyklische Koordinaten vorhanden sind".

Er stellt mit Hilfe der von Lie entwickelten Theorie der Transformations- und Funktionengruppen Kriterien auf, mit denen man erkennen kann, ob zyklische Koordinaten und Integrale entsprechender Art vorliegen. Damit kann er bekannte Fälle, in denen die Grundgleichung der Stellardynamik Integrale besitzt, verifizieren und überdies zeigen, dass über die bekannten Integrale hinaus keine weiteren von gleicher Art möglich sind. Das Ergebnis erweist sich als Sonderfall einer von Lynden-Bell diskutierten Klasse von Integralen der Grundgleichung der Stellardynamik, ist aber methodisch unabhängig gewonnen.

6.2 Energie- bzw. Jacobi-Integral

Da man durch Übergang in einen erweiterten Phasenraum $\mathbb{R}^{2n+2}$ erreichen kann *(Schneider I 1992)*, dass das dynamische System durch eine zeitunabhängige Hamilton-Funktion $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ beschrieben werden kann, soll im folgenden nur der Fall eines solchen ***autonomen Systems*** behandelt werden. Dann ist wegen *(Giacaglia 1972, Schneider I 1992)*

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = E\,. \tag{6.10}$$

Mit der Beziehung von Hamilton- und Lagrange-Funktion *(Schneider I 1992)* folgt der Erhaltungssatz

$$\bar{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{q}} - L\big(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p})\big) = E\,.$$

Wenn nun die Lagrange-Funktion darstellbar ist durch *(Fließbach 1996, Schneider I 1992)*

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};t) = T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};t) - \tilde{V}(\mathbf{q};t)$$

also durch die Differenz von kinetischer Energie T und potentieller Energie $\tilde{V}$, dann lautet der Erhaltungssatz, drückt man die generalisierten Impulse aus durch

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L$$

und setzt man noch

$$\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T ,$$

so folgt

$$\bar{\dot{\mathbf{q}}} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T - \left(T - \tilde{V}\right) = E \,. \tag{6.11}$$

Anm.: Querstriche bedeuten hier und im weiteren, dass die jeweilige Variable, gelesen als Spaltenmatrix, transponiert wird, also zu einer Zeilenmatrix wird.

Die kinetische Energie T setzt sich nun aus drei Anteilen hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von den generalisierten Geschwindigkeiten zusammen *(Schneider I 1992)*

$$T = T_2 + T_1 + T_0 ,$$

worin der untere Index auf eine quadratische, lineare und keine Abhängigkeit hinweist. Mit der Eulerschen Homogenitätsrelation *(Schneider I 1992)* folgt dann

$$\bar{\dot{\mathbf{q}}} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} T = 2T_2 + T_1$$

und damit die Erhaltung der Hamilton-Funktion in der Gestalt

$$T_2 - T_0 + \tilde{V}(\mathbf{q},t) = E \,.$$

In dieser Form ergibt sich bei ***rheonomer Transformation***

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q},t)$$

$$T_1 = T_0 = 0 \quad \to \quad T = T_2$$

die Erhaltung der Gesamtenergie des dynamischen Systems,

$$T + \tilde{V}(\mathbf{q},t) = E \,.$$

Im rheonomen Fall heißt der Erhaltungssatz für die Hamilton-Funktion das ***Jacobi-Integral***. Dieses beinhaltet nicht die Erhaltung der Gesamtenergie, sondern ist ein erweiterter Erhaltungssatz. In beiden Fällen ist die Erhaltung der Hamilton-Funktion eine Bedingungsgleichung für die Phasenbahn

$$\bar{\mathbf{x}}(t) := \left(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)\right)$$

des dynamischen Systems, weil

$$H(\mathbf{x}) = E$$

in Phasenraum eine $(2n-1)$-dimensionale ***Hyperfläche*** *(Gutzwiller 1990, Schneider I 1992)* definiert, auf die die Bewegung eingeschränkt ist. Aus der vollständigen Zeitableitung

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \bar{\dot{\mathbf{x}}} H_{\mathbf{x}}$$

folgt nämlich die Orthogonalität,

$$\bar{\dot{\mathbf{x}}} H_{\mathbf{x}} = 0 , \tag{6.12}$$

von $\dot{\mathbf{x}}$ und dem Gradienten H_x der durch (6.10) definierten Hyperfläche. Zufolge dieser Orthogonalität liegt $\dot{\mathbf{x}}$ stets in dieser Hyperfläche *(Schneider I 1992)*. Der Betrag wird wegen

$$\left|\dot{\mathbf{x}}\right|^2 = \bar{\dot{\mathbf{x}}}\dot{\mathbf{x}} = \bar{\dot{\mathbf{x}}}\Phi_0 H_{\mathbf{x}} = -H_{\bar{\mathbf{x}}}\Phi_0 \dot{\mathbf{x}} = -H_{\bar{\mathbf{x}}}\Phi_0^2 H_{\mathbf{x}} = H_{\bar{\mathbf{x}}} H_{\mathbf{x}} \tag{6.13}$$

mit der ***kanonischen Matrix***

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (I \text{ -- Einheitsmatrix, } \mathbf{0} \text{ -- Nullmatrix}) \tag{6.14}$$

durch den Betrag des Gradienten $H_{\mathbf{x}}$ bestimmt.

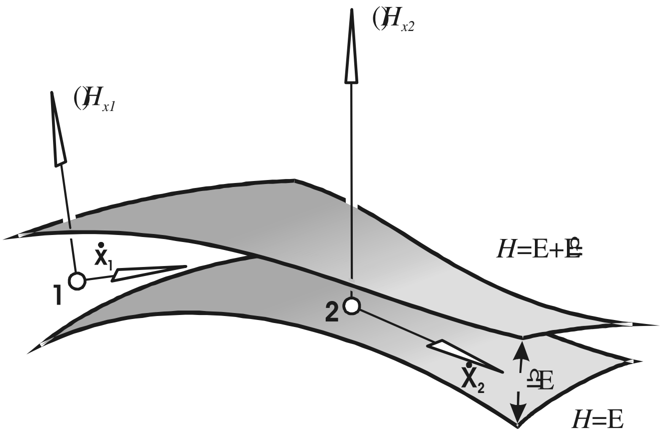

Abb. 6.1 Geschwindigkeit $|\dot{\mathbf{x}}|$ *und Dichtigkeit der Hyperflächen im Phasenraum*

Mit abnehmendem Abstand der Hyperflächen (Abb. 6.1)

$H(\mathbf{x}) = E$ und $H(\mathbf{x}) = E + \delta E$

im Phasenraum wächst der Betrag $|\dot{\mathbf{x}}|$ der Geschwindigkeit. Die Bewegung im Phasenraum ist außerdem charakterisiert durch

$$\nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = 0$$

d.h., durch verschwindende ***Divergenz*** des Geschwindigkeitsfeldes *(Schneider I 1992)*

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 H_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \tag{6.15}$$

6.3 Theoreme von Poincaré und von Bruns

Giacaglia führt in (*Giacaglia 1972)* zur Frage, von welcher Form Bewegungsintegrale sicher nicht sind, aus:

> *"were considered in a too much general form and thought to prevent the lightest chance of integrability of dynamical system. In fact celebrated problems like the n-body gravitational problem, the restricted problem of three bodies, the asymmetric top and others have been proved to be non-integrable in the sense that in particular coordinates and cases, there are no uniform integrals or even more special cases like algebraic or analytic integrals."*

So hat Poincaré in *(Poincaré 1957)* das folgende Theorem bewiesen:

6.3.1 Theorem von Poincaré

Das durch die kanonischen Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

mit der Hamilton-Funktion (ε Kleinheitsparameter)

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \ldots, \qquad F_0 = F_0(x), \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{6.16}$$

beschriebene dynamische System mit *n* Freiheitsgraden *hat, von bestimmten Ausnahmefällen* **abgesehen**, *keine weiteren analytischen und uniformen Bewegungsintegrale als das Integral*

$$F = const.$$

Wichtig sind die getroffenen Voraussetzungen *(Hagihara 1957)*

1. Explizite Zeitunabhängigkeit der Hamilton-Funktion: $\partial F / \partial t = 0$.
2. Im ungestörten Fall $\varepsilon = 0$ ist die Hamilton-Funktion allein von den Impulsen x abhängig $F = F_0(x)$.
3. Die Hamilton-Funktion ist im gestörten Fall in eine Potenzreihe nach dem kleinen Parameter entwickelbar

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} F_{\nu}(x, y) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x, y) + \varepsilon^2 F_2(x, y) + \ldots$$

4. Die Hessesche Matrix ist hinsichtlich der *n* Variablen x_i von Null verschieden.

Das bedeutet:

Ad 1. Das dynamische System wird als ***autonom*** vorausgesetzt. Das kann ggf. durch Übergang in den erweiterten Phasenraum erreicht werden.

Ad 2. Es wird vorausgesetzt, dass im ungestörten Fall das dynamische System vollständig in zyklischen Variablen formulierbar und damit integrabel ist. Mit anderen Worten: im ungestörten Fall wird die Darstellung mit Winkel-/ Wirkungsvariablen als möglich angenommen.

Ad. 3. Die Potenzreihe kann abbrechen. Die einzelnen Reihenterme können im allg. von allen kanonischen Variablen abhängen.

Zur Beweisführung wird auch auf *(Hagihara 1957)* verwiesen. Dort wird auch bewiesen das Theorem von Bruns.

6.3.2 Theorem von Bruns

Bruns hatte 1887 gezeigt, dass das folgende System von kanonischen Bewegungsgleichungen für das in den Jacobischen Koordinaten *(Schneider II 1993, Stumpff 1959 ff)* formulierte Mehrkörperproblem

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \ldots N, N = 3n - 3$$

mit der Hamilton-Funktion

$$F = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i^2}{2\mu_i} - U \qquad \mu_i := m_i \frac{M_{i-1}}{M_i} \tag{6.17}$$

außer den klassischen Integralen keine weiteren in den Koordinaten und Impulsen algebraischen Integrale besitzt. D.h., es existieren keine Integrale der Form

$$f(y_1, \ldots, y_N, x_1, \ldots, x_N) = a \qquad (a \text{ willkürliche Konstante})$$

worin die Funktion *f* algebraisch in den Variablen *y und x* ist.

Anm.: In *(Hagihara 1957)* findet man überdies den Beweis, dass es auch keine zeitabhängigen Bewegungsintegrale

$$f(y_1, \ldots, y_{3n}, x_1, \ldots, x_{3n}, t) = a \qquad (a \text{ willkürliche Konstante})$$

des *n*-Teilchensystems

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \ldots, 3n$$

gibt, wenn *f* algebraisch in den Variablen ist.

Das Theorem von Poincaré ist einerseits allgemeiner als das Theorem von Bruns, weil Poincaré zeigt,

> ”*not only that there exists no algebraic integral, but that there exists not even a transcendental uniform integral, and not only that an integral cannot be uniform for all values of the variables, but that it cannot remain uniform for all value even in a restrained domain”(Hagihara 1957).*

Andererseits ist das Theorem von Bruns allgemeiner *(Hagihara 1957).* als das von Poincaré, weil dieser nur zeigen kann,

> *"that there can exist no algebraic integral for all rather small values of masses, and Bruns demonstrates that there exist none for any system of values of masses:"*

6.4 Theorem von Stäckel

Broucke führt in *(Broucke 1981)* aus:

> *"It is not known what is the most general separable system with n degrees of freedom. However it is known what is the most general separable diagonal system with n degrees of freedom. This was discovered by Stäckel (Stäckel 1891), and such systems are now called Stäckel Systems."*

Das Keplerproblem ist ein sog. **Stäckelsystem,** d.h., es wird durch eine (verkürzte) **Hamilton-Jacobi-Gleichung** beschrieben, die durch **Separation der Variablen** streng gelöst werden kann *(Schneider I 1992 und IV 1999).*

Mit anderen Worten:

> *es kann eine ausreichende Anzahl von Bewegungsintegralen angegeben werden, so dass die Lösung des Bewegungsproblems auf die Ausführung von Quadraturen hinausläuft.*

Nach dem ***Theorem von Stäckel*** muss die Hamilton-Funktion F die Funktionsstruktur *(Stäckel 1891, Schneider I 1992)*

$$H = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{p}}\mathbf{A}\mathbf{p} + \tilde{V}(\mathbf{q}) \tag{6.18}$$

aufweisen mit den kanonisch konjugierten Variablen

q — generalisierte Koordinaten

p — generalisierte Impulse

und der Diagonalmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1(\mathbf{q}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

Auf eine solche Funktionsstruktur führt die Verwendung orthogonaler krummliniger Koordinaten als generalisierte Koordinaten **q**. Die Elemente der Diagonalmatrix **A** lauten in diesem Fall

$$A_k = \frac{1}{m}\frac{1}{g_{kk}(\mathbf{q})} \tag{6.20}$$

so dass die Hamilton-Funktion eines Stäckelsystems die Gestalt hat

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{g_{kk}(\mathbf{q})}p_k^2 + \tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot \tag{6.21}$$

Fordert man noch, dass das durch

$$\tilde{V} =: -mU \tag{6.22}$$

definierte Potential $U(\mathbf{q})$ Lösung der ***Laplace-Gleichung*** *(Schneider I 1992 und IV 1999)*

$$\Delta U = 0 \tag{6.23}$$

sein soll, dann ist die zulässige Funktionsstruktur der potentiellen Energie

$$\tilde{V} = \sum_{k=1}^{3}\frac{f_k(q_k)}{g_{kk}(\mathbf{q})} \,. \tag{6.24}$$

Die im Stäckel-Theorem geforderte Struktur der Hamilton-Funktion ist also

$$H = T + \tilde{V} = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{g_{kk}(\mathbf{q})}(p_k^2 + f_k(q_k)) \tag{6.25}$$

Wie diese Funktionsstruktur für die 11 bekannten Sätze orthogonaler krummliniger Koordinaten konkret aussieht wird eingehend in *(Schneider IV 1999)* erörtert. Die Einschränkung (6.24) der zulässigen Funktionsstruktur der potentiellen

Energie engt die Möglichkeiten, für die Störungsrechnung geeignete intermediäre Lösungen anzugeben, erheblich ein. Neben dem Keplerproblem hat in der Theorie der Satellitenbahnen nur das **Vinti-Problem** eine gewisse Bedeutung als intermediäres Bewegungsproblem erlangt (*Schneider IV 1999, Stumpff 1959).*

Anm.*: Die von Liouville angenommene Gestalt der verkürzten Hamilton-Jacobi-Gleichung, die Separierbarkeit zulässt, ist ein Sonderfall der im Theorem von Stäckel vorausgesetzten Funktionsstruktur (Thiry 1970).*

Die Vermutung, dass ein kanonisches System integrabel ist, wenn die Hamilton-Jacobi-Gleichung separierbar ist, beides also als synonym angesehen werden kann, ist nicht zutreffend.

Gründe sind:

1. *Die Hamilton-Jacobi-Gleichung muss nicht separierbar sein, um lösbar zu sein (Erwe & Peschl 1973).*
2. *Mit dem Theorem von Stäckel und den in ihm enthaltenen Sonderfällen (Theorem von Liouville) ist nur der Bereich der orthogonalen krummlinigen Koordinaten abgedeckt, also durch Flächen 1. und 2. Ordnung (**Quadriken**) bestimmte orthogonale krummlinige Koordinaten (Moon & Spencer 1961, Schneider IV 1999).*

Im Hinblick auf Anwendungen in der Bahntheorie fehlen für Koordinaten, die durch Flächen 4. Ordnung **(Zykliden)** definierbar sind, einschlägige Untersuchungen. Bei diesen Koordinaten, unter die sich die auf Quadriken definierten Koordinaten subsumieren lassen, liegt in der Regel keine einfache Separabilität mehr vor, vielmehr häufig eine sog. **R-Separabilität** *(Moon & Spencer 1961, Schneider IV 1999).*

Weitere Definitionsmöglichkeiten für Koordinaten sind in *(Neutsch 1995)* zu finden.

6.5 Die Theoreme von Painleve und Ziglin

Das **Theorem von Kolmogorov** behauptet Stabilität invarianter Tori eines ungestörten integrablen Hamiltonschen Systems unter kleinen Störungen, d.h. das Fortbestehen bedingt periodischer Bewegungen eines integrablen kanonischen Systems bei hinreichend kleinen Störungen. Bewiesen wurde das Theorem von Arnold und Moser, wobei in den Beweisen wie auch in der Beweisskizze von Kolmogorov eine aus der Theorie diophantischer Gleichungen als **Irrationalitätsbedingung** bekannte Bedingung eine Rolle spielt, die zuerst von Siegel in ähnlichen Untersuchungen verwendet worden ist. Nach dem **KAM-Theorem** *(Moser 1973, Contopoulos 2002, Morbidelli 2002, Lichtenberg & Lieberman 1983, Rebhan 1999, Schneider II 1993)* werden die Tori des ungestörten Problems durch die Störung lediglich verformt, aber nicht zerstört. Die Trajektorien bleiben an Tori gebunden. Unter den im KAM-Theorem angegebenen Bedingungen kann wie im ungestörten integrablen System auch im gestörten System auf Winkel-/Wirkungsvariable transformiert werden.

Setzt das KAM-Theorem an den Tori an, so liegt dem Theorem von Ziglin eine Stabilitätsbetrachtung zugrunde. Der **Satz von Hartman-Grobman** *(Steeb & Kunick 1989)* macht u.a. die Aussage

> *Die Bahnen eines nichtlinearen Systems können lokal in der Umgebung eines Fixpunktes x^* in diejenigen des zugeordneten linearen Systems mittels einer stetigen Koordinatentransformation abgebildet werden.*

Es wird so verständlich, dass ein dynamisches System dann nichtintegrabel ist, wenn die (lineare) Stabilitätsanalyse ergibt, dass die Bahnen des linearen Systems (Lösungen der Poincaréschen Variationsgleichungen) in der Umgebung von x^* instabil sind.

6.5.1 Das Theorem von Painleve

Das Theorem von Painleve spricht eine **Vermutung der Integrabilität** eines dynamischen Systems aus, die auf der sogenannten **Painleve-Eigenschaft** beruht. Sie formuliert ein ***notwendige Bedingung*** an die ins Komplexe fortgesetzte Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t) \xrightarrow[\text{ins Komplexe}]{\text{Fortsetzung}} \frac{d\mathbf{w}}{dz} = F(\mathbf{w},z) \quad \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{C}^n . \tag{6.26}$$

Wenn ein dynamisches System die Painleve-Eigenschaft besitzt, dann ist es nach der Painleveschen Vermutung integrabel. Es sind jedoch integrable dynamische Systeme bekannt, die die Painleve-Eigenschaft nicht besitzen. Ein Beispiel dafür, das Lotka-Volterra-System, findet man in *(Steeb & Kunick 1989).*

Die Vermutung von Painleve geht ursprünglich auf eine Idee von Sophie Kovalevskaya zurück *(Jackson 1990):*

> *Kovalevskaja for the first time, introduced the concept of a complex time variable into the study of dynamics, and she noted that all of the integrals of known integrable systems are* ***meromorphic functions*** *in the entire complex z-plane (that is, the integrals are single-valued analytic functions of z except for poles, which are movable).*

Eine zentrale Rolle spielen danach die sog. meromorphen Funktionen *(Jänich 1999).* Eine Funktion $f(z): U \subset \mathbb{C}$ heißt meromorph, wenn sie in der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ bis auf Pole holomorph ist. Pole sind einer von drei **Singularitäts-typen**:

$$\textbf{hebbare Singularität} \;---\; \textbf{Pol} \;---\; \textbf{wesentliche Singularität}\ .$$

Ein Punkt z_0, der nicht zum Definitionsbereich *U* von *f* gehört, um den es aber eine kleine offene Kreisscheibe gibt, in der er der einzige nicht zu *U* gehörige Punkt ist, heißt **isolierter Punkt** oder auch **isolierte Singularität.**

Eine isolierte Singularität heißt *(Jänich 1999)*

- **hebbar**, wenn *f* durch eine geeignete Festsetzung von $f(z_0)$ zu einer auf der Menge $U \cup \{z_0\}$ holomorphen Funktion wird. Durch die Festsetzung wird der Definitionsbereich von *f* um das punktförmige Loch erweitert.
- **Pol,** wenn sie nicht hebbar ist, es aber ein $m \geq 1$ gibt, so dass die Funktion $(z - z_0)^m f(z)$ bei z_0 eine hebbare Singularität hat. Das kleinste derartige *m* heißt die **Ordnung des Poles.**
- **wesentliche Singularität** von *f*, wenn *f* weder hebbar noch ein Pol ist.

Die Untersuchung der Singularitätenstruktur der ins Komplexe fortgesetzten Differentialgleichungen, die das dynamische System beschreiben, gibt nun Hinweise darauf, ob das betrachtete System integrabel ist oder nicht. Painleve und andere haben dieses Lösungsverhalten gewöhnlicher Differentialgleichungen im Komplexen untersucht, die sog. Painleve - Eigenschaft. Sie ist wie folgt definiert.

Definition der Painleve-Eigenschaft: Die Differentialgleichung *n*-ter Ordnung

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F\left(z, w, ..., \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}\right) \tag{6.27}$$

mit F rational in $w, ..., \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}$ und analytisch in z oder ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung (*j*=1,...,*n*)

$$\frac{dw_j}{dz} = F_j(w_q, ..., w_n) \tag{6.28}$$

mit F_j rational in $w_q, ..., w_n$ hat die **Painleve-Eigenschaft**, wenn alle ihre Lösungen nur ***bewegliche Pole*** besitzen.

D.h., bewegliche wesentliche Singularitäten und bewegliche Verzweigungspunkte sind nicht zugelassen (Ince 1956, Steeb & Kunick 1989).

Beispiel: Die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

wird gelöst durch

$$x = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \qquad x_0 = x(0)\cdot$$

Diese allgemeine Lösung hat bei $t = 1/x_0$ einen einfachen Pol, dessen Lage von der Anfangsbedingung x_0 abhängt: **beweglicher Pol.**

Hingegen hat die allgemeine Lösung $x = \frac{x_0}{1-t}$ der Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1-t}$ bei $t = 1$ eine **feste Singularität**.

Eine notwendige Bedingung dafür, ob eine Differentialgleichung im Komplexen die Painleve-Eigenschaft hat, enthält das

Theorem (notwendige Bedingung für die Painleve-Eigenschaft):

Notwendig für das Vorliegen der Painleve-Eigenschaft der Differentialgleichung (6.27) bzw. des Gleichungssystems (6.28) ist, dass es **Laurentreihen**

$$w(z) = \left(z - z_0\right)^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(z - z_0\right)^j \tag{6.29}$$

bzw.

$$w_k(z) = \left(z - z_0\right)^{n_k} \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} \left(z - z_0\right)^j \tag{6.30}$$

gibt, die die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in einer Umgebung des Poles $z = z_1$ darstellen.

D.h. (n-1) Entwicklungskoeffizienten a_j bzw. a_{kj} müssen beliebig wählbar sein.

Die in diesem Theorem geforderte Darstellbarkeit der allgemeinen Lösung durch eine Laurentreihe führt auf die sog. singuläre Punktanalyse. Dazu wird die Laurentreihe als Lösungsansatz verwendet und in die zu lösende Differentialgleichung eingetragen. Die auszuführenden Schritte sind in *(Steeb & Kunick 1989)* ausführlich behandelt. Dort finden sich auch Beispiele zur Anwendung.

Anm.: 1. *Das Theorem formuliert nur eine **notwendige** Bedingung für das Vorliegen der Painleve-Eigenschaft. Eine **hinreichende** Bedingung findet man in (Ince 1956).*

2. *Die Bezeichnung **meromorph** (= bruchförmig) rührt daher (Jänich 1999), dass die meromorphen Funktionen gerade diejenigen sind, die sich lokal als Quotienten holomorpher Funktionen darstellen lassen.*

3. *Eine holomorphe Funktion lässt sich i.allg. um eine isolierte Singularität nicht in eine Potenzreihe entwickeln, wohl aber in eine Laurentreihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(z - z_0\right)^{-n}}_{\textbf{Hauptteil}} \text{ und } \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n}_{\textbf{Nebenteil}} .$$

6.5.2 Das Nichtintegrabiltätstheorem von Ziglin

Mit Hilfe des Theorems von Ziglin lässt sich herausfinden , ob ein autonomes dynamisches System neben der Hamilton-Funktion weitere analytische erste Integrale besitzt. Es ist wiederholt verwendet worden, um die Nichtintegrabilität dynamischer Systeme zu beweisen, beispielsweise in *(Irigoyen & Simo 1993)* zum Nachweis der Nichtintegrabilität des **Hauptproblems der Theorie der Satellitenbahnen**. Ehe das Theorem angegeben wird, sollen einige vorbereitende Erläuterungen vorangestellt werden.

6.5.2.1 Linearisierung der Bewegungsgleichungen: Poincarésche Variationsgleichungen

Betrachtet werde ein autonomes dynamisches System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$$

Diese Bewegungsgleichungen sollen linearisiert werden. Dazu werde angesetzt

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathbf{x}_0(t)}_{\text{bekannte Lösung}} + \underbrace{\delta(t)}_{\text{Störung}} \tag{6.31}$$

mit $\left|\delta(t)\right| \ll \left|\mathbf{x}_0(t)\right|$. Eingetragen in die Bewegungsgleichung ergibt sich nach Taylorentwicklung um $\mathbf{x}_0(t)$

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \mathbf{A}\big|_{\mathbf{x}_0(t)} \delta(t) \tag{6.32}$$

mit der Jacobi-Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0(t)) := (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f})\big|_{\mathbf{x}_0(t)}$.

Aus der **Poincaréschen Variationsgleichung** kann die Störung $\delta(t)$ der ungestörten Bewegung $\mathbf{x}_0(t)$ berechnet werden. Dabei sind vor allem zwei Fälle in der Anwendung von Interesse

1. **Gleichgewichtspunkt** als ungestörte Bewegung: $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{A}(t) := \mathbf{A}$. Die Variationsgleichung ist jetzt eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanter Koeffizientenmatrix **A**.
2. Die ungestörte Bewegung ist eine periodische Bewegung, beispielsweise eine elliptische Kepler-Bewegung. Die Variationsgleichung ist jetzt eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten.

Für beide Fälle gibt es eine gut ausgearbeitete Lösungstheorie. Die Poincarésche Variationsgleichung ist Grundlage zahlreicher Stabilitätsuntersuchungen in linearer Näherung, insbesondere der sog. **indirekten Methode von Ljapunov**, basierend auf dem **Prinzip der ersten Annäherung** *(Ljapunov 1966, Leipholz 1968, Schneider I 1992).* Beispiel: Lineare Stabilitätsuntersuchung der Trägheitsdrehbewegung eines starren Körpers um eine seiner Hauptträgheitsachsen *(Schneider II 1993).*

Zwei Wege zur Lösung der Poincaréschen Variationsgleichung sollen vorgestellt werden.

1. Lösungsdarstellung durch eine Lie-Reihe
2. Darstellung der Lösung durch ein Fundamentalsystem.

Dabei soll zunächst der Fall der Bewegung um einen Gleichgewichtspunkt angenommen werden, also einer zeitlich konstanten Jacobi-Matrix **A**.

6.5.2.2 Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die Lösung zu einer Anfangswertaufgabe der Variationsgleichung kann durch eine Lie-Reihe

$$\delta(\mathbf{x}_0, t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 \;, \qquad \text{Anfangsbedingung: } t_0, \delta(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{6.33}$$

mit der durch

$$\exp(\mathbf{A}t) := \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots \qquad \mathbf{I} \;\; \text{Einheitsmatrix} \tag{6.34}$$

erklärten **Exponentialmatrix** dargestellt werden. Sie existiert für alle $t, \mathbf{x}_0$. Alternativ kann die allgemeine Lösung durch lineare Superposition

$$\delta(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j \delta^j(t) \tag{6.35}$$

von N linear unabhängigen Lösungen $\delta^1(t), \ldots, \delta^N(t)$ der Variationsgleichung dargestellt werden, wobei die N Konstanten c_j durch die Anfangswerte $\mathbf{x}_0$ festgelegt werden. Besitzt die Matrix **A** N linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}^j$ (einfache Eigenwerte λ_j), so können die Vektoren

$$\delta^j(t) = \exp(\lambda_j t)\mathbf{v}^j \tag{6.36}$$

als Basis des Lösungsraumes gewählt werden. Die Eigenwerte sind die Wurzeln der **charakteristischen Gleichung**

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = (a_{ik}) \;\; i,k = 1,\ldots N \tag{6.37}$$

der gestellten Eigenwertaufgabe $\mathbf{A}\lambda = \mathbf{I}\lambda$.

Durch die (einfachen) Eigenwerte λ_j ist der Charakter der Bewegung um den Gleichgewichtspunkt, d.h. deren Stabilität oder Instabilität vollständig bestimmt. U nd zwar gilt *(Leipholz 1968):*

Fall (a): Wenn alle λ_j negative reelle Zahlen sind oder negative Realteile haben, dann streben alle partikulären Lösungen $\delta^j(t)$ für $t \to \infty$ nach Null und damit auch die allgemeine Lösung $\mathbf{x}(t)$. Die Bewegung ist **asymptotisch stabil** für alle $\mathbf{x}_0$ (**Punktattraktor**).

Fall (b): Ist ein Eigenwert eine positive reelle Zahl oder besitzt er einen positiven Realteil, dann wächst die zugehörige partikuläre Lösung und auch die allgemeine Lösung für $t \to \infty$ unbeschränkt - auch bei noch so kleiner Auslenkung $\mathbf{x}_0$. Die Bewegung ist **instabil.**

Fall (c): Besitzt die charakteristische Gleichung keine Wurzel mit positivem Realteil, aber solche mit verschwindenden Realteilen, so ist die Bewegung zwar nicht asymptotisch stabil, wohl aber **stabil.**

Anm.: Auf das Vorliegen mehrfacher Eigenwerte soll hier nicht eingegangen, sondern auf die Literatur verwiesen werden *(Meirovitch 1970, Malkin 1959).*

6.5.2.3 Lösung linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten

Von besonderem Interesse sind Variationsgleichungen mit periodischen Koeffizienten, d.h. mit einer periodischen Matrix $\mathbf{A}(t)$. Auf diesen Fall wird man geführt, wenn etwa die ungestörte Bewegung eine elliptische Keplerbewegung ist, so dass

$$\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t) \qquad T \text{ Periode der elliptischen Keplerbewegung}. \tag{6.38}$$

Weitere Einzelheiten sind u.a. in (*Meirovitch 1970, Contopoulos 2002, Maciejewski & Przybylska 2003)* zu finden.

6.5.2.4 Das Theorem von Ziglin

Vorbereitend seien einige Definitionen in enger Anlehnung an *(Steeb & Kunick 1989)* aufgeführt. Die Differentialgleichung im Komplexen

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0, \tag{6.39}$$

habe bei z_0 eine isolierte Singularität (s. Abschnitt 6.5.1), d.h. die Koeffizientenfunktionen $p(z)$ und $q(z)$ seien in einer punktierten Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < r$ analytische Funktionen. Weiter sei K eine in dieser punktierten Kreisscheibe enthaltenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_1.

Es bezeichne L_K den komplexen Vektorraum der analytischen Lösungen $w: L_K \to C$ der obigen Differentialgleichung und es sei $w_1(z)$ und $w_2(z)$ eine Basis von L_K, d.h. ein Fundamentalsystem.

Daran schließt sich die folgende **Definition (Monodromieabbildung)** an:

Ein durch analytische Fortsetzung einmal im mathematisch positiven Sinne um die isolierte Singularität z_0 herum, d.h. längs

$$\gamma(s) = z_0 + (z_1 - z_0)e^{2\pi is} \qquad 0 \le s \le 1 \tag{6.40}$$

gegebener **Transportisomorphismus** $\tau: L_K \to L_K$ des Lösungsraumes über K in sich heißt **Monodromieabbildung** von L_K um z_0. Ihr entspricht, vermittelt durch den Isomorphismus

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \to c_1 w_1 + c_2 w_2 \;\Leftrightarrow\; C^2 \simeq L_K, \tag{6.41}$$

eine komplexe 2×2-Matrix, die sog. **Monodromiematrix** *M (Contopoulos 2002, Meirovitch 1970*). Sie heißt **nichtresonant**, wenn keine Beziehung der Form

$$\sigma^m = 1 \quad \text{mit } m \in \mathbf{Z} \setminus 0$$

besteht für einen Eigenwert σ der Matrix *M*. Eine Monodromiematrix $M(C)$ mit Eigenwerten σ_1 und $1/\sigma_1$ ist also dann und nur dann nichtresonant, wenn der Eigenwert σ keine Wurzel von eins ist. Andernfalls heißt *M* resonant, ihre Eigenwerte sind dann $\pm i$ *(Meirovitch 1970).*

Die Monodromiematrizen können aus einer hypergeometrischen Gleichung gewonnen werden, die aus der sog. **Normalvariationsgleichung** hervorgeht *(Steeb & Kunick 1989).* Sie ergibt sich aus der Poincaréschen Variationsgleichung durch eine Transformation, vermittelt durch eine orthogonale Matrix *(Meirovitch 1970, Steeb & Kunick 1989).* Nach diesen Vorbereitungen kann das **Nichtintegrabilitätstheorem von Ziglin** angegeben werden. Es lautet:

> *Sei die* ***Monodromiematrix*** $M(C_1)$ ***nichtresonant****. Für die Existenz eines zusätzlichen Integrals I (neben der Hamilton-Funktion), welches analytisch in einer Umgebung einer Lösung des vorgelegten Hamiltonschen Systems ist, ist es notwendig, dass wenigstens für ein j entweder*
>
> (i) $M(C_1;\lambda_j)$ *kommutiert mit* $M(C_2;\lambda_j)$ *oder*
>
> (ii) $trM(C_2;\lambda_j) = 0$

In (*Steeb & Kunick 1989)* wird noch das folgende ***Korollar*** angegeben

> *Wenn es zwei* ***nichtresonante*** *Monodromiematrizen* $M(C_1)$ *und* $M(C_2)$ *in G gibt und wenn keines der* $M(C_1;\lambda_j)$ *und* $M(C_2;\lambda_j)$ *kommutiert, kann das oben angeführte dynamische System kein zusätzliches analytisches Integral haben.*

Der Beweis des Theorems von Ziglin stützt sich auf den

Monodromie- oder **Eindeutigkeitssatz der Funktionentheorie** *(Jänich 1999):*

> *Ist die Funktion* $f(z)$ *in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G der komplexen Ebene holomorph und sind ferner* $a \in G, b \in G$ *beliebige Punkte dieses Gebiets, dann führt die analytische Fortsetzung von a nach b auf verschiedenen Kurven stets zur gleichen Potenzreihe.*

Eine andere Fassung dieses Satzes findet man bei (*Smirnow 1961)*

> *Ein reguläres Funktionselement, das in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G unbeschränkt fortsetzbar ist, erzeugt in G eine eindeutige holomorphe Funktion.*

Oder allgemeiner

> *Sind* W_0 *und* W_1 *homotope Wege auf R vom Punkte* P_0 *nach* P_1 *und ist das reguläre Funktions-element zum Punkt* P_0 *auf* R *längs aller Wege* $W_\tau\ (0 \le \tau \le 1)$ *der Deformation* $W_0 \to W_1$ *fortsetzbar, so führt die analytische Fortsetzung längs der Wege* W_τ *zu demselben regulären Funktionselement im Punkte* P_1.

Die bei der Anwendung des Ziglinschen Theorems auszuführenden Schritte werden in *(Steeb & Kunick 1989)* an einem Beispiel ausführlich erläutert. Dort findet man weitere Beispiele auf Integrabilität untersuchter Hamiltonscher Systeme. Hingewiesen sei auch auf die Studie (*Maciejewski & Przybylska 2003*), in der auf einer von Morales-Ruiz und Ramis ausgearbeiteten Erweiterung des Theorems von Ziglin die Nichtintegrabilität der Drehbewegung eines starren Satelliten in Gravitations- und Magnetfeldern nachgewiesen wird.

7. Neue Separabilitäts- & Integrabilitätstheoreme für kanonischeSysteme

Nunmehr soll folgende Umbezeichnung vorgenommen werden, um Anschluss an die u. a. in *(Cui 1990 und 1997)* verwendete Bezeichnungsweise herzustellen:

Hamilton-Funktion F statt bisher H,

generalisierte Koordinaten **y** statt bisher **q**,

generalisierte Impulse **x** statt bisher **p**.

Ferner wird eine ***Austauschtransformation*** durchgeführt gedacht, die einen Rollentausch von generalisierten Koordinaten sowie Impulsen zur Folge hat und einen Vorzeichenwechsel der Hamilton-Funktion *(Schneider I 1992).*

Von Cui *(1990 und 1997)* wurden neue Separationstheoreme und Integrabilitätstheoreme für ein kanonisches Systems gefunden, die bekannte Theoreme als Sonderfälle enthalten. Sie werden im folgenden in verallgemeinerter Form angegeben. Da sich ein nichautonomes System durch Einführung eines zusätzlichen Variablenpaares in ein autonomes System umwandeln lässt, kann man sich auf autonome kanonische Systeme mit der Hamilton-Funktion

$$F = F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = F(x_1, x_2, ..., x_N; y_1, y_2, ..., y_n) \tag{7.1}$$

beschränken. Es besteht für solche Systeme jedenfalls ein Erhaltungssatz für die Hamilton-Funktion.

Bei den hier vorzustellenden Theoremen wird eine paarweise Separation der konjugierten Variablen vorgenommen. D.h., eine generalisierte Koordinate y_j wird bei der Separation immer mit ihrem konjugierten Impuls x_j verbunden. Die Hamilton-Funktion lässt sich daher in der Form

$$F = F(z) = F(z_1, z_2, ..., z_n) \tag{7.1a}$$

ausdrücken, worin $z_j = (x_j, y_j)$ ein konjugiertes Variablenpaar bezeichnet. Wenn die Koordinate y_j zyklisch ist, vertritt y_j den entsprechenden Impuls x_j.

7.1 Theoreme von Cui

7.1.1 Grundtheorem

Die weiteren Entwicklungen in dieser Arbeit gehen von nachstehendem Theorem aus.

***Theorem* A**: *Wenn es einen Satz* $\mathsf{A} = \{z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ... z_{\kappa_K}\}$ *konjugierter Variablenpaare gibt, von denen die Hamilton-Funktion nur über eine Kombination*

$$\alpha = \alpha(\mathsf{A}) = \alpha(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}) \tag{7.2}$$

abhängt, d.h. wenn sich die Hamilton-Funktion in der Form

$$F = F(\alpha(\mathsf{A}), \mathsf{B}) \tag{7.3}$$

darstellen lässt, wobei (7.2) eine beliebige Funktion der Argumente unter den übrigen Einschränkungen für die Hamilton-Funktionen ist, und

$$\mathsf{B} = \{z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\} \tag{7.4}$$

die restlichen Variablen erfasst, dann ist

$$\alpha = \alpha(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}) = const \tag{7.5}$$

ein ***Integral*** *des kanonischen Systems.*

Beweis: Die zeitliche Ableitung der Funktion $\alpha(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K})$ lässt sich über die Poisson-Klammer

$$\frac{d\alpha}{dt} = \{\alpha, F\}$$

berechnen; man erhält unter Berücksichtigung der Bedingung (7.3), $\frac{\partial F}{\partial x_{\kappa_j}} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_{\kappa_j}}$, $\frac{\partial F}{\partial y_{\kappa_j}} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y_{\kappa_j}}$, also

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}\{\alpha,\alpha\} = 0\,.$$

Damit ist (7.5) bestätigt.

Als Sonderfälle erhält man unmittelbar:

***Korollar* 1**: Wenn die Menge A die sämtlichen Variablen erfasst ($K = n$, B ist damit eine leere Menge), dann zeigt (7.5) die Erhaltung der Hamilton-Funktion

$$F = F\left(z_1, z_2, ..., z_n\right) = const \tag{7.5a}$$

an.

***Korollar* 2**: Wenn die Menge A nur ein einziges Variablenpaar $\left(z_\kappa\right) = \left(x_\kappa, y_\kappa\right)$, $K = 1$ enthält, worin $\kappa \in \{1, 2, ..., n\}$, dann ergibt sich das Integral

$$\alpha = \alpha\left(z_\kappa\right) = const\,, \tag{7.5b}$$

das das Impuls-Integral als Sonderfall erfasst, wenn eine der beiden Variablen x_κ, y_κ aus (7.5b) und damit aus der Hamilton-Funktion verschwindet.

Anm:

(1) Das Theorem A wird die Grundlage der im Folgenden zu entwickelnden Theorie der Bahnbewegung sein.

Aus den obigen Ausführungen ersieht man, dass die aus der klassischen Mechanik bekannten Erhaltung der Hamilton-Funktion (Energie- bzw. Jacobi-Integral) und das Theorem vom Impuls-Integral Sonderfälle des Theorems A von Cui sind. Angemerkt sei , dass sich die Bedingung für das Korollar 1, d.h. die Bedingung (7.2) mit $K = n$ für ein autonomes System immer erfüllen lässt.

Das Korollar 2 kann als **erweitertes Impuls-Integral** bezeichnet werden.

(2) Nach dem Muster des Impuls-Integrals hat man vielfach versucht, die Hamilton-Funktion durch die **Wirkungs- und Winkelvariablen** (**action-angle variables**) auszudrücken, indem man die Existenz eines Integrals erkennen kann durch Überprüfung, ob die Hamilton-Funktion von einer generalisierten Koordinaten nicht abhängt. Auf einer solchen Darstellung aufbauend ist es **Poincaré** gelungen, seine wichtigen Theoreme über die Integrabilität aufzustellen. Die Möglichkeit einer derartigen Darstellung für alle kanonischen Systeme ist aber theoretisch nicht gesichert. Selbst wenn es möglich wäre, hätte es i.allg. eine komplizierte Darstellung der Observablen und daher Schwierigkeiten in den Anwendungen zur Folge.

Mit dem Theorem von **Stäckel** gelang es, diese Tradition zu durchbrechen und einen Weg aufzuzeigen, Integrale für ein nicht in Wirkungs- und Winkelvariablen dargestelltes kanonisches System zu finden.

*Das **Theorem A** stellt einen weiteren Schritt in dieser Richtung dar.* Um zu erkennen, ob ein Integral vorliegt, ist lediglich die Bedingung (7.3) zu überprüfen. Dazu genügt eine Betrachtung der Hamilton-Funktion, wobei eine einfache algebraische Umschreibung ihrer Darstellung notwendig sein kann.

7.1.2 Separation eines Systems durch Anwendungen von Integrationstheoremen

Es ist bekannt, dass jedes unabhängige Integral eines Systems zu einer Separation des Systems in zwei unabhängige Untersysteme führt. Die durch das Integral (7.5) bewirkte Separation des kanonischen Systems lässt sich mit folgendem Satz beschreiben:

Satz: *Unter der Bedingung* (7.2) *lässt sich das Gleichungssystem in zwei voneinander unabhängige Untersysteme für die beiden Variablensätze* A bzw. B *zerlegen, womit die Ordnung des Systems um* 4 abnimmt.

Zum Beweis sind die Gleichungen für die Elemente der Variablenmengen B und A aufzustellen; man erhält

$$\frac{dx_{\lambda_j}}{dt} = \frac{\partial F(\mathsf{B},\alpha)}{\partial y_{\lambda_j}} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_{\lambda_j}}\,, \qquad \frac{dy_{\lambda_j}}{dt} = -\frac{\partial F(\mathsf{B},\alpha)}{\partial x_{\lambda_j}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\lambda_j}} \quad (j = 1, 2, ..., L) \tag{A}$$

mit der Hamilton-Funktion $\Phi(\mathsf{B}) = F(\mathsf{B},\alpha)$ und

$$\frac{dx_{\kappa_j}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_{\kappa_j}} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y_{\kappa_j}}, \qquad \frac{dy_{\kappa_j}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_{\kappa_j}} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_{\kappa_j}}, \quad (\ j = 1,2,...,K\ ) \text{(B)}$$

mit der Hamilton-Funktion $F = F(\mathsf{B},\alpha)$ und dem Integral (7.5).

Man sieht, dass beide Systeme kanonisch sind. Und zwar ist das erste System autonom, so dass es ein Energie-Integral $\Phi(\mathsf{B}) = const.$ besitzt. Das zweite System besitzt das Integral (7.5). Durch Verwendung der in Abs. 1.3 angegebenen Sätze erkennt man weiter, dass sich die Ordnungen beider Gleichungssysteme um je 2 reduzieren lassen. **w.z.b.w**. Die folgenden zwei Theoreme zeigen weitere alternative Wege, Integrale zu finden bzw. Möglichkeiten zur Separierung eines kanonischen Systems aufzuzeigen.

***Theorem* B**: Wenn es zwei disjunkte Teilmengen

$$\mathsf{A}_1 = \{z_{\mu_1}, z_{\mu_2}, ..., z_{\mu_M}\} \text{ und } \mathsf{A}_2 = \{z_{\nu_1}, z_{\nu_2}, ..., z_{\nu_N}\}$$

von konjugierten Variablenpaaren in der Variablenmenge A gibt, von denen die Hamilton-Funktion über

$$F = F\big(\alpha_1(\mathsf{A}_1), \alpha_2(\alpha_1(\mathsf{A}_1), \mathsf{A}_2); \mathsf{B}\big), \tag{7.6}$$

abhängt, worin B für die restlichen Variablen steht, dann *gibt es für das System zwei voneinander unabhängige Integrale*

$$\alpha_1\left(z_{\mu_1}, z_{\mu_2}, ..., z_{\mu_M}\right) = const$$

und

$$\alpha_2\left(\alpha_1; z_{\nu_1}, z_{\nu_2}, ..., z_{\nu_N}\right) = const\ . \tag{7.7}$$

Zum **Beweis** sind, so ähnlich wie beim Theorem A, die Poisson-Klammern $\{\alpha_1, F\}$ und $\{\alpha_2, F\}$ zu berechnen: es ergibt sich

$$\{\alpha_1, F\} = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\right)\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1}\right)\{\alpha_1, \alpha_1\} = 0\,,\ \ \{\alpha_2, F\} = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\right)\{\alpha_2, \alpha_2\} = 0\,.$$

Die Unabhängigkeit zwischen α_1 und α_2 erkennt man daran, dass α_2 von den Variablen $\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ...z_{\lambda_L}\right)$ abhängt, hingegen α_1 nicht.

Das Theorem **B** erweist sich als eine erweiterte Form vom Theorem A, bietet eine Separation des über die durch den o.g. Satz beschriebene Separation ergebenen Untersystems (B) an und führt zu einer Senkung der Ordnung des Untersystems um 2. Das Erkennen der Bedingung (7.6) erfolgt ebenso wie bei dem Theorem A: über die Betrachtung des Ausdrucks der Hamilton-Funktion und über eine eventuelle algebraische Umformung der Hamilton-Funktion.

Das Kriterium einer weiteren Separationsmöglichkeit des o.g. Untersystems (A) gibt das folgende Theorem an:

***Theorem* C**: Wenn es unter der Bedingung (7.2) ferner eine echte Teilmenge $\mathsf{B}_1 = \{z_{\mu_1}, z_{\mu_2}, ..., z_{\mu_M}\} \subset \mathsf{B}$ konjugierter Variablenpaaren gibt, von denen die Hamilton-Funktion über die Form

$$F = F\big(\alpha(\mathsf{A}); \beta_1(\alpha(\mathsf{A}); \mathsf{B}_1); \mathsf{B}_2\big), \tag{7.8}$$

abhängt, worin $\mathsf{B}_2 = \mathsf{B}\setminus\mathsf{B}_1$ für die restlichen Variablen steht, dann *gibt es für das System außer* (7.5) *ein weiteres unabhängiges Integral*

$$\beta_1\left(z_{\mu_1}, z_{\mu_2}, ..., z_{\mu_M}\right) = const \tag{7.9}$$

Der **Beweis** erfolgt genauso wie beim Theorem B.

Durch wiederholte Anwendung der o.g. Theoreme lässt sich ein kanonisches System nach dem Schema von Abb.7.1 so weit wie möglich sukzessiv separieren. Dazu ist nur notwendig, in den jeweiligen separierten Untersystemen zu ermitteln, ob ein neues unabhängiges Integral existiert oder die entsprechende Bedingung erfüllt wird.

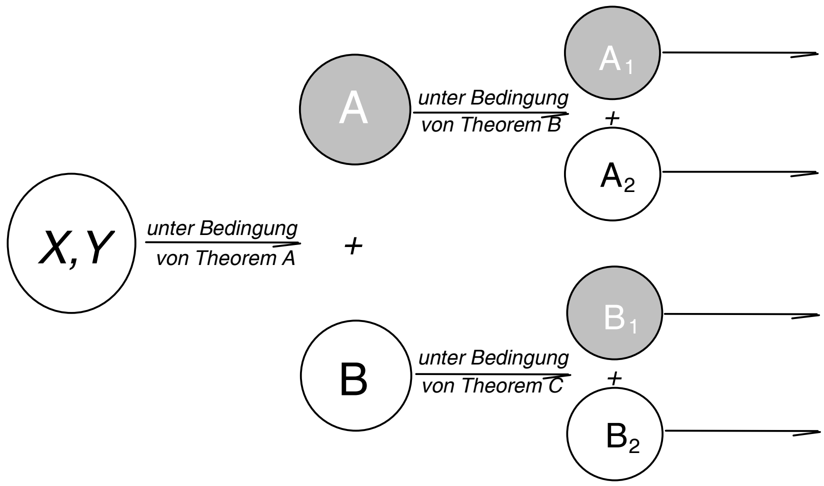

Abb. 7.1 Sukzessive Separatoinen der Variablen durch Anwendungen der Theoreme A, B und C

7.1.3 Eine integrable Form

Betrachtet werde ein kanonisches System mit einer Hamilton-Funktion der Gestalt

$$F = F\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}; z_n\right), \tag{7.10}$$

worin

$$\alpha_1 = \alpha_1\left(z_{\kappa_1}\right),$$

$$\alpha_j = \alpha_j\left(z_{\kappa_j}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}\right),\ \left(j = 2, \ldots, n-1\right) \tag{7.11}$$

je eine Funktion der kanonischen Variablen ist; $z_{\kappa_j} := \left(x_{\kappa_j}, y_{\kappa_j}\right)$ steht für ein konjugiertes Variablenpaar. Es ist ersichtlich, dass α_j von den j Variablenpaaren $\left(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, \ldots, z_{\kappa_j}\right)$ abhängt; ihre partiellen Ableitungen lassen sich über

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial z_{\kappa_k}} = 0 \text{ (für } k > j\text{)},\quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial z_{\kappa_k}} = \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial z_{\kappa_j}}\right) \text{ (für } k = j\text{)},\quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial z_{\kappa_k}} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial z_{\kappa_k}} \text{ (für } k < j\text{)} \tag{7.12}$$

bestimmen, worin $\left(\dfrac{\partial \alpha_j}{\partial z_{\kappa_j}}\right)$ für die ”direkte” partielle Ableitung steht, die aus der Definitionsformel (7.11) unmittelbar abgeleitet wird. $\dfrac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_k}$ ist jedoch die vollständige partielle Ableitung, in der sowohl die ”direkten” als auch ”indirekten” Abhängigkeiten erfasst werden. Der Definition (7.11) folgend erhält man

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_k} = \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_k}\right) + \sum_{\sigma=1}^{j-k-1}\left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_{k+\sigma}}\right)\frac{\partial \alpha_{k+\sigma}}{\partial \alpha_k}. \tag{7.13}$$

Nun ist die Zeitableitung

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = \left\{\alpha_j, F\right\} := \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial y_k}\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) = \sum_{k=1}^{j}\left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_{\kappa_k}}\frac{\partial F}{\partial y_{\kappa_k}} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial y_{\kappa_k}}\frac{\partial F}{\partial x_{\kappa_k}}\right)$$

der Funktion α_j $\left(j = 1, 2, \ldots, n-1\right)$ zu bestimmen. Die partiellen Ableitungen der Hamilton-Funktion lassen sich entsprechend

$$\frac{\partial F}{\partial z_k} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial z_k}, \quad (k \le n-1)$$

berechnen und die der Funktion α_j mit Hilfe von (7.12). Damit ergibt sich

$$\left\{\alpha_j, F\right\} = \sum_k \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial y_k} \frac{\partial F}{\partial x_k} \right) = \sum_k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_k} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial y_k} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} \right) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \left\{\alpha_j, \alpha_i\right\}, \tag{7.14}$$

wonach noch die Poisson-Klammer $\left\{\alpha_j, \alpha_i\right\}$ zu berechnen bleibt. Mit Hilfe von (7.12) erhält man

$$\left\{\alpha_j, \alpha_i\right\} = \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_k} \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_{\kappa_k}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_{\kappa_k}} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial y_{\kappa_k}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_{\kappa_k}} \right) = 0 \, . \tag{7.15}$$

Eingetragen in (7.14) erhält man $\frac{d\alpha_j}{dt} = \left\{\alpha_j, F\right\} = 0$ und damit die Integrale

$$\alpha_j = const., \quad \left(j = 1, 2, ..., n-1 \right) \tag{7.16}$$

des Systems.

Die oben geführte Diskussion lässt sich zu folgendem Integrabilitätstheorem zusammenfassen:

Theorem* D**: *Ein kanonisches System mit der Hamilton-Funktion (7.10) mit (7.11) ist* ***integrabel. D*ie Integrale (7.16), zusammen mit der Erhaltung der Hamilton-Funktion*

$$F\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}; z_n\right) := \alpha_n = const.$$

sind ***in Involution****.*

7.2 Einfache Beispiele und Anwendungen der Theoreme von Cui

Im letzten Abschnitt sind die **Theoreme A ~ D von Cui** in allgemeiner Form dargestellt worden. Sie erfassen zahlreiche separable/integrable Fälle. Alle diese Theoreme sind nicht auf Wirkungs-/Winkelvariable beschränkt.

Die einfachsten Beispiele für das Theorem **A** sind durch die beiden Korollare im Abs.7.1 beschrieben; sie führen zum Energie-Integral und dem Impuls-Integral. Ein weiteres Beispiel ist die orthogonale Zerlegung des Phasenraums in zwei oder mehrere zueinander orthogonale Untermannigfaltigkeiten. Eine Separation der Variablen lässt sich nämlich durch orthogonale Mannigfaltigkeiten im Phasenraum geometrisch interpretieren. In einem *n*-dimensionalen Konfigurationsraum $Y := \left\{y_1, y_2, ..., y_n\right\}$ kann man das Linienelement durch

$$\left(ds\right)^2 = \left(dy_1, dy_2, ..., dy_n\right) \mathbf{M} \left(dy_1, dy_2, ..., dy_n\right)^T$$

darstellen und die kinetische Energie des Systems durch

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{y}_1, \dot{y}_2, ..., \dot{y}_n\right) \mathbf{M} \left(\dot{y}_1, \dot{y}_2, ..., \dot{y}_n\right)^T,$$

worin

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$$

die Matrix der Metrik des Konfigurationsraumes ist. Die generalisierten Impulse kann man durch

$$\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T = \mathbf{M} \left(\dot{y}_1, \dot{y}_2, ..., \dot{y}_n\right)^T$$

einführen; damit erhält man einen 2*n*-dimensionalen Phasenraum $\left(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n\right)$, in dem gilt

$$T = \frac{1}{2} \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \mathbf{M}^{-1} \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T.$$

Eine durch das Theorem **A** gesicherte Separation entspricht einer Zerlegung des Konfigurationsraums in zwei zueinander orthogonale Unterräume mit den Koordinaten $\left\{y_{\kappa_1}, y_{\kappa_2}, ..., y_{\kappa_K}\right\}$ und $\left\{y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, ..., y_{\lambda_L}\right\}$, wobei $\{\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_K\}$ und $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_L\}$ ($K + L = n$, $1 \le K < n$) disjunkte Teilmengen der Indexmenge $\{1, 2, ..., n\}$ sind. Die Orthogonalität der beiden Untermannigfaltigkeiten impliziert die blockweise Diagonalgestalt der Metrikmatrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{und damit} \qquad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2^{-1} \end{pmatrix}, \tag{7.17}$$

mit den Metrikmatrizen der zwei Untermannigfaltigkeiten $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$, die i. allg. von allen generalisierten Koordinaten abhängen. Allerdings ist hier keine Diagonalgestalt der Matrizen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ (entsprechend die Orthogonalität der Untermannigfaltigkeiten) gefordert. Als Funktion der generalisierten Koordinaten lassen sich die Matrizen in der Form

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \phi_1\left(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, ..., y_{\lambda_L}\right)\tilde{\mathbf{M}}_1\left(y_{\kappa_1}, y_{\kappa_2}, ..., y_{\kappa_K}\right),\\
&\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \phi_2\left(y_{\kappa_1}, y_{\kappa_2}, ..., y_{\kappa_K}\right)\tilde{\mathbf{M}}_2\left(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, ..., y_{\lambda_L}\right)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

angeben, wobei $\tilde{\mathbf{M}}_i$ ($i = 1,2$) die innere Struktur der entsprechenden Untermannigfaltigkeit darstellt; $\phi_1\left(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, ..., y_{\lambda_L}\right)$ und $\phi_2\left(y_{\kappa_1}, y_{\kappa_2}, ..., y_{\kappa_K}\right)$ beschreiben die wechselseitigen Wirkungen der beiden Untermannigfaltigkeiten.

Mit der durch (7.17) und (7.18) definierten orthogonalen Zerlegung des Raums nimmt die kinetische Energie die Form

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\left(x_{\kappa_1}, x_{\kappa_2}, ..., x_{\kappa_K}\right)\mathbf{M}_1^{-1}\left(x_{\kappa_1}, x_{\kappa_2}, ..., x_{\kappa_K}\right)^T + \frac{1}{2}\left(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, ..., x_{\lambda_L}\right)\mathbf{M}_2^{-1}\left(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, ..., x_{\lambda_L}\right)^T\\
&=: \frac{\tilde{T}_1\left(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}\right)}{\phi_1\left(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, ..., y_{\lambda_L}\right)} + \frac{\tilde{T}_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right)}{\phi_2\left(y_{\kappa_1}, y_{\kappa_2}, ..., y_{\kappa_K}\right)}
\end{aligned}$$

an, wobei $\tilde{T}_1$ von den Variablenpaaren $\left\{z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}\right\}$ abhängt, $\tilde{T}_2$ von $\left\{z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right\}$. Fordert man weiter eine entsprechende Zerlegung der potentiellen Energie

$$\begin{aligned}
U &= U_1\left(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}; y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, ..., y_{\lambda_L}\right) + U_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}; y_{\kappa_1}, y_{\kappa_2}, ..., y_{\kappa_K}\right)\\
&= \frac{\tilde{U}_1\left(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}\right)}{\phi_1\left(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, ..., y_{\lambda_L}\right)} + \frac{\tilde{U}_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right)}{\phi_2\left(y_{\kappa_1}, y_{\kappa_2}, ..., y_{\kappa_K}\right)}
\end{aligned}$$

so lässt sich die Hamilton-Funktion in zwei Teile zerlegen:

$$F = \frac{\tilde{F}_1\left(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}\right)}{\phi_1\left(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, ..., y_{\lambda_L}\right)} + \frac{\tilde{F}_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right)}{\phi_2\left(y_{\kappa_1}, y_{\kappa_2}, ..., y_{\kappa_K}\right)}, \tag{7.19}$$

worin

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}_1\left(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}\right) = \tilde{T}_1\left(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}\right) + \tilde{U}_1\left(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}\right),\\
&\tilde{F}_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right) = \tilde{T}_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right) + \tilde{U}_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right)
\end{aligned}$$

je eine Funktion der in der zugehörigen Untermannigfaltigkeit definierten generalisierten Koordinaten und der konjugierten generalisierten Impulse ist.

Ein Sonderfall ist durch

$$\phi_1\left(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, ..., y_{\lambda_L}\right) = 1 \tag{7.20}$$

gegeben. In diesem Fall ist eine Zerlegung der Hamilton-Funktion möglich der Gestalt

$$F = \tilde{F}_1\left(z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}, ..., z_{\kappa_K}; \tilde{F}_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right)\right) + \frac{\tilde{F}_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right)}{\phi_2\left(y_{\kappa_1}, y_{\kappa_2}, ..., y_{\kappa_K}\right)}, \tag{7.21}$$

Danach hängt die Hamilton-Funktion von den Variablen $\left\{z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right\}$ ausschließlich über die Funktion $\tilde{F}_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right)$ ab. Das entspricht der Voraussetzung des Theorems **A** und führt auf das Integral

$$\tilde{F}_2\left(z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, ..., z_{\lambda_L}\right) = \alpha \quad (\alpha \text{ -- Integrationskonstante}).$$

Damit ist gezeigt, dass eine gruppenweise Separation mit Hilfe des Theorems **A** einer orthogonalen Zerlegung (7.17) ~ (7.18) mit (7.20) und einer dazu gehörigen Zerlegung der Hamilton-Funktion (7.21) entspricht. Führt man das Integrals in (7.19) ein, so erhält man

$$F=\tilde{F}_1\left(z_{\kappa_1},z_{\kappa_2},...,z_{\kappa_K};\alpha\right)+\frac{\alpha}{\phi_2\left(y_{\kappa_1},y_{\kappa_2},...,y_{\kappa_K}\right)}\,.$$

Eine analoge orthogonale Zerlegung in der zweiten Mannigfaltigkeit $\left\{y_{\lambda_1},y_{\lambda_2},...,y_{\lambda_L}\right\}\Rightarrow\left\{y_\lambda\right\}_1+\left\{y_\lambda\right\}_2$ mit

$$\mathbf{M}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{M}_3 & 0\\ 0 & \mathbf{M}_4\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3=\mathbf{M}_3\left(y_{\lambda_1},y_{\lambda_2},...,y_{\lambda_L}\right)=\tilde{\mathbf{M}}_3\left(\left(y_\lambda\right)_1\right),$$

$$\mathbf{M}_4=\mathbf{M}_4\left(y_1,y_2,...,y_n\right)=\phi_4\left(\left(y_\lambda\right)_1\right)\tilde{\mathbf{M}}_4\left(\left(y_\lambda\right)_2\right)$$

ermöglicht eine Zerlegung der Hamilton-Funktion der Form

$$\tilde{F}_2\left(z_{\lambda_1},z_{\lambda_2},...,z_{\lambda_L}\right)=\tilde{F}_3\left(\left\{z_\lambda\right\}_1;\tilde{F}_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_2\right)\right)+\frac{\tilde{F}_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_2\right)}{\phi_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_1\right)}$$

und führt auf die Integrale

$$\tilde{F}_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_2\right)=\alpha_3\,,\qquad \tilde{F}_3\left(\left\{z_\lambda\right\}_1;\alpha_3\right)+\frac{\alpha_3}{\phi_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_1\right)}=\alpha_2\,,\qquad \tilde{F}_1\left(\left\{z_\kappa\right\};\alpha_2;\alpha_3\right)+\frac{\alpha_2}{\phi_2\left(\left\{z_\kappa\right\}\right)}=\alpha_1$$

für ein kanonisches System mit einer Hamilton-Funktion der Struktur

$$F=\tilde{F}_1\left(\left\{z_\kappa\right\};\tilde{F}_3\left(\left\{z_\lambda\right\}_1;\tilde{F}_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_2\right)\right);\frac{\tilde{F}_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_2\right)}{\phi_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_1\right)}\right)+\frac{1}{\phi_2\left(\left\{z_\kappa\right\}\right)}\left(\tilde{F}_3\left(\left\{z_\lambda\right\}_1;\tilde{F}_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_2\right)\right)+\frac{\tilde{F}_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_2\right)}{\phi_4\left(\left\{z_\lambda\right\}_1\right)}\right).\tag{7.22}$$

Im Fall einer Bewegung mit 3 Freiheitsgraden gehen die Variablengruppen $\left\{z_\kappa\right\}$, $\left\{z_\lambda\right\}_1$ und $\left\{z_\lambda\right\}_2$ in je ein konjugiertes Variablenpaar z_1, z_2 und z_3 über, und die Metrikmatrix M vereinfacht sich zu

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \phi_2\left(y_1\right) & 0\\ 0 & 0 & \phi_2\left(y_1\right)\phi_4\left(y_2\right)\end{pmatrix}.\tag{7.23}$$

Die Hamilton-Funktion lässt sich in der Gestalt

$$F=\tilde{F}_1\left(z_1;\tilde{F}_3\left(z_2;\tilde{F}_4\left(z_3\right)\right);\frac{\tilde{F}_4\left(z_3\right)}{\phi_4\left(z_2\right)}\right)+\frac{1}{\phi_2\left(z_1\right)}\left(\tilde{F}_3\left(z_2;\tilde{F}_4\left(z_3\right)\right)+\frac{\tilde{F}_4\left(z_3\right)}{\phi_4\left(z_2\right)}\right)\tag{7.24}$$

angeben. Damit ist gezeigt, dass ein kanonisches System der Form (7.24) mit (7.23) integrabel ist. Auf (7.23) führen mehrere Sätze orthogonaler krummliniger Koordinaten, beispielsweise die Kugelkoordinaten $\left(r,\theta,\lambda\right)$ mit der Metrikmatrix

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}.$$

Ein integrables System entsprechend dem Theorem **D** lässt sich durch die Hamilton-Funktion ($n=4$)

$$F=\frac{1}{2}x_r^2+U_r\left(z_r;\alpha_\theta,\alpha_\lambda\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}x_\theta^2+U_\theta\left(z_\theta;\alpha_\lambda\right)\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2}x_\lambda^2+U_\lambda\left(z_\lambda\right)\right)-U_\tau\left(\tau;\alpha_r,\alpha_\theta,\alpha_\lambda\right)-T\tag{7.25}$$

angeben, was zu den Integralen

$$\alpha_1:=\alpha_\lambda=x_\lambda^2+2U_\lambda\left(z_\lambda\right),\qquad \alpha_2:=\alpha_\theta=x_\theta^2+2U_\theta\left(z_\theta,\alpha_\lambda\right)+\frac{\alpha_\lambda}{\sin^2\theta}\,,$$

$$\alpha_3:=\alpha_r=x_r^2+2U_r\left(z_r;\alpha_\theta,\alpha_\lambda\right)+\frac{1}{r^2}\alpha_\theta\tag{7.26}$$

führt. Ein viertes Integral ergibt sich aus der Erhaltung der Hamilton-Funktion.

Einem **nicht-orthogonalen Kugelkoordinatensystem** (r, y_2, y_3) entspricht die Metrikmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 a_{22}(y_2, y_3) & r^2 a_{23}(y_2, y_3) \\ 0 & r^2 a_{23}(y_2, y_3) & r^2 a_{33}(y_2, y_3) \end{pmatrix}.$$

Anm.: Die Hill-Variablen beschreiben ein nicht-orthogonales Kugelkoordinatensystem (siehe Abs. 9).

Das Theorem **A** liefert für ein System mit der Hamilton-Funktion

$$F = F_1\big(\dot r, r; \alpha(x_2, x_3, y_2, y_3)\big) + \frac{1}{r^2}\alpha(x_2, x_3, y_2, y_3)$$

zwei Integrale

$$\beta_1 := \alpha(x_2, x_3, y_2, y_3) = const., \qquad \beta_2 := F_1(\dot r, r; \alpha) = const.$$

Ob es ein weiteres Integral gibt, hängt von der Struktur der Funktion $\alpha(x_2, x_3, y_2, y_3)$ ab.

Nach dem Theorem **A** existiert ein weiteres Integral unter verschiedenen Voraussetzungen, beispielsweise wenn die Funktion α die folgenden Strukturen besitzt:

$$\alpha = \alpha\big(x_2, y_2; \alpha_1(x_3, y_3)\big), \text{ oder } \alpha = \alpha\big(x_3, y_3; \alpha_2(x_2, y_2)\big), \text{ oder } \alpha = \alpha(x_2, x_3) \text{ usw.;}$$

dann ergibt sich ein drittes Integral

$$\beta_3 = \alpha_1(x_3, y_3), \text{ oder } \beta_3 = \alpha_2(x_2, y_2), \text{ oder } \beta_3 = x_3 \text{ usw..}$$

Das letzte Beispiel gibt eine allgemeine Form des Lelgemann-Systems (9.44) an:

$$\alpha = \alpha(G, H).$$

Eine andersgeartete Einschränkung der Metrik kann

$$m_{jk} = \delta_{jk} m_{jj}(y_j) \text{ für } j \in \{1, 2, ..., n\} \tag{7.27}$$

sein und damit nimmt die Hamilton-Funktion die Form

$$F = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_{\kappa_i \kappa_i}(y_{\kappa_i})}\left(\frac{1}{2}x_{\kappa_i}^2 + U_{\kappa_i}(z_{\kappa_i}; \alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_{i-1})\right) \tag{7.28}$$

an. Das System erweist sich nach dem Theorem D als integrabel und ergibt die Integrale

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= m_{\kappa_1 \kappa_1}(y_{\kappa_1})\left(\frac{1}{2}x_{\kappa_1}^2 + U_{\kappa_1}(z_{\kappa_1})\right) \\ \alpha_i &= m_{\kappa_i \kappa_i}(y_{\kappa_i})\left(\frac{1}{2}x_{\kappa_i}^2 + U_{\kappa_i}(z_{\kappa_i}; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1})\right), \; i \in \{2, ..., n-1\}. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Ein einfacher Sonderfall davon ist $m_{jj} = 1$, $U(z) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 y_j^2$ für $j \in \{1, 2, ..., n\}$, woraus sich ergibt

$$\alpha_j(z_j) = x_j^2 + \omega_j^2 y_j^2 = const\,. \tag{7.30}$$

Das dadurch definierte konservative dynamische System (Eigenschwingung) ist integrabel mit den n ersten Integralen *(Steeb & Kunick 1989).*

Anm: Die beiden Einschränkungen (7.20) und (7.27) für die Koordinatensysteme stellen zwei Klassen von Koordinatensystemen dar; sie erschöpfen die Vielfalt der praktisch verwendbaren Koordinaten aber nicht. Deshalb schränken die o.g. Beispiele auch die Anwendungsmöglichkeit des Integrabilitätstheorems **D** nicht ein. Weitere Beispiele für Anwendungen in der Bahntheorie findet man in Abs. 9.

7.3 Vergleich zwischen dem Theorem D von Cui und dem Stäckel-Theorem

Das Stäckel-Theorem (s. Abschn. 6.4) wie auch das Cui-Theorem D formulieren Bedingungen, unter denen ein kanonisches System integrierbar ist durch Separation der Variablen. Während im Theorem von Stäckel eine Hamilton-Funktion mit einer Funktionsstruktur

$$F(Q,P)=T(Q,P)+V(Q)$$

vorausgesetzt wird, ist im Theorem D von Cui eine Funktionsstruktur

$$F=F(X,Y,t)$$

zugelassen, d.h. die Hamilton-Funktion kann im Gegensatz zum Stäckel-Theorem auch explizit zeitabhängig sein.

Das **Stäckel-Theorem** formuliert eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität eines kanonischen Systems durch Separation der Variablen, die die Funktionsstruktur einschränkt auf

$$H=T+V=\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{g_{kk}(\mathbf{q})}\left(p_k^2+f_k(q_k)\right)$$

mit einer zunächst beliebigen Metrik $g_{kk}(\mathbf{q})$. Diese Funktionsstruktur liegt vor, wenn man als generalisierte Koordinaten orthogonale krummlinige Koordinaten verwendet und von der potentiellen Energie bzw. dem ihr zugeordneten Gravitationspotential fordert, dass es Lösung der Laplace-Gleichung ist. Eine systematische Durchmusterung der in Frage kommenden separablen Fälle ist in *(Schneider IV 1999)* zu finden.

Beispielsweise ist ein System mit der Hamilton-Funktion (räumliche Koordinaten r,θ,λ)

$$F=\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2+U_r(r)\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}x_\theta{}^2+U_\theta(\theta)\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2}x_\lambda{}^2+U_\lambda(\lambda)\right), \qquad (7.31)$$

nach dem Stäckel-Theorem integrabel und besitzt die Integrale

$$\alpha_1=\frac{1}{2}x_\lambda^2+U_\lambda(\lambda),\quad \alpha_2=\frac{1}{2}x_\theta^2+U_\theta(\theta),\quad \frac{1}{2}\dot{r}^2+U_r(r)=\alpha_3.$$

Das **Theorem D von Cui** formuliert eine Bedingung, die bislang nur als hinreichend, aber nicht auch als notwendig bewiesen ist.

Die Integrabilität eines Teils der durch das Stäckel-Theorem als integrabel erwiesenen Systeme kann auch durch das Theorem D bestätigt werden, z.B. das System (7.31) als ein Sonderfall des integrablen System (7.25). Dabei ist aber die Erfüllung der Laplace-Gleichung nicht erforderlich. Für andere Systeme wie etwa ein System mit den ellipsoidischen Koordinaten, konnte die Integrabilität nicht mittels des Theorems von Cui bestätigt werden. (Die orthogonale Zerlegung in der Form (7.17)~(7.18) eignet sich dazu nicht; eine geeignete Zerlegung konnte bisher nicht gefunden werden). Die von Cui formulierte Bedingung ist nur hinreichend, aber nicht auch notwendig; sie sagt trotzdem die Integrabilität einer großen Klasse von kanonischen Systemen aus, aber deckt nicht alle integrablen Systeme ab.

Abschnitt C

Anwendungen integrabler Bewegungsprobleme in Bahntheorien

Das Kepler-Problem ist in der Himmelsmechanik der Prototyp eines integrablen Bewegungsproblems. Es wurde vielfach in der Entwicklung von Bahntheorien als Ausgangspunkt gewählt. Im folgendem wird ein von Cui gefundenes integrables Bewegungsproblem als Ausgangspunkt für Bahntheorien herangezogen werden, das über das Kepler-Problem hinausgeht. Vorbereitend dazu sollen einige Sachverhalte aus dem Kepler-Problem mittels der Hillschen Variablen sowie der Kepler- und Kugel-Variablen dargestellt werden.

8. Störungsrechnung in beliebigen Galilei-Systemen

8.1 Bewegungsgleichung in einem beliebigen Galilei-System

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens in einem beliebigen Galilei-System B lautet *(Schneider II 1993)*

$$m\frac{D^2\mathbf{x}}{Dt^2} = \mathbf{K}\left(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt};t\right) + \mathbf{F} + \mathbf{C} \tag{8.1}$$

worin bedeuten

$\mathbf{K}\left(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt};t\right)$	die auf das betrachtete Teilchen wirkende äußere Kraft,
$\mathbf{F} := -m\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{Z} + \mathbf{T}$	Führungskraft,
$-m\mathbf{R}$	translatorische Führungskraft,
$\mathbf{Z} := -m\mathbf{d}\times(\mathbf{d}\times\mathbf{x})$	Zentrifugalkraft,
$\mathbf{T} := -m\frac{D\mathbf{d}}{Dt}\times\mathbf{x}$	Euler-(Kreisel)-Kraft,
$\mathbf{C} := -2m\mathbf{d}\times\frac{D\mathbf{x}}{Dt}$	Coriolis-Kraft. (8.2)

Die in der Gleichung (8.1) zusätzlich zur Kraft **K** auftretenden Terme **F** und **C** sind Trägheitskräfte. $\mathbf{x}$, $\frac{D\mathbf{x}}{Dt}$ und $\frac{D^2\mathbf{x}}{Dt^2}$ bezeichnen den Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor des Teilchens im System B; **d** und $\ddot{\mathbf{R}}$ sind der Vektor der Drehgeschwindigkeit bzw. der translatorischen Beschleunigung des Systems bezüglich eines Inertialsystems. Mit der effektiven Kraft $\mathbf{K}+\mathbf{F}+\mathbf{C}$ nimmt die Bewegungsgleichung (8.1) die Newton-Eulersche Form an.

Führt man die Potentialfunktionen *(Schneider I+II 1992-93)*

$U_Z := \frac{1}{2}(\mathbf{d}(t)\times\mathbf{x})\cdot(\mathbf{d}(t)\times\mathbf{x})$	Potential der bezogenen Fliehkraft
$U_F := \mathbf{x}\cdot\ddot{\mathbf{R}}$	Potential der bezogenen translatorischen Führungskraft
$\Phi := -2\mathbf{x}\cdot\left(\mathbf{d}(t)\times\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)$	Potential der bezogenen Coriolis-Kraft
$\mathbf{A} := \frac{1}{3}\mathbf{x}\times\left(\frac{D\mathbf{d}}{Dt}\times\mathbf{x}\right)$	Vektorpotential der bezogenen Euler-Kraft (8.3)

ein, dann lässt sich die Bewegungsgleichung (8.1) schreiben in der vektoriellen Form

$$\frac{D^2\mathbf{x}}{Dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{K}(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt};t) + \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\left(U_F + U_Z + \Phi\right) + \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\times\mathbf{A}\ . \tag{8.4}$$

8.2 Jacobi-Integral

Skalare Multiplikation der Gleichung (8.4) mit der Geschwindigkeit $\frac{D\mathbf{x}}{Dt}$ im Galilei-System ergibt

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\frac{D^2\mathbf{x}}{Dt^2}=\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\left(\frac{1}{m}\mathbf{K}(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt};t)+\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\left(U_F+U_Z+\Phi\right)+\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\times\mathbf{A}\right) \tag{8.5}$$

oder

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2\right)=\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\frac{1}{m}\mathbf{K}(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt};t)+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\left(U_F+U_Z+\Phi\right)+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{A}\,. \tag{8.6}$$

Die rechte Seite kann als vollständige Zeitableitung eines Ausdrucks geschrieben werden dann, wenn:

1. Die bezogene Kraft $\frac{1}{m}\mathbf{K}(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt};t)$ nicht explizit zeitabhängig und überdies als Gradient einer skalaren Potentialfunktion darstellbar ist, d.h. wenn

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})=m\nabla_{\mathbf{x}}U_G(\mathbf{x})\,. \tag{8.7}$$

2. $U_F+U_Z+\Phi$ nicht explizit zeitabhängig ist, also insbesondere nicht von einem $\mathbf{d}(t)$ und einem $\ddot{\mathbf{R}}(t)\neq\mathbf{0}$ abhängt. D.h., die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Bezugssystems B darf nicht zeitveränderlich sein. Dann ist $\frac{D\mathbf{d}}{Dt}=\mathbf{0}$ und es entfällt der Term mit dem Vektorpotential $\mathbf{A}$.

3. Keine translatorische Führungsbeschleunigung $\ddot{\mathbf{R}}(t)\neq\mathbf{0}$ auftritt.

Wenn alle diese Voraussetzungen erfüllt sind, dann folgt

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\left(U_G+U_Z+\Phi\right)=\frac{D}{Dt}\left(U_G+U_Z+\Phi\right) \tag{8.8}$$

Da (Skalarprodukt zweier senkrechter Vektoren!)

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\Phi=0\,, \tag{8.9}$$

folgt (*C* Integrationskonstante)

$$\frac{1}{2}\frac{D}{Dt}\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2=\frac{DU_S}{Dt}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2=2U_S(\mathbf{x})-C\,. \tag{8.10}$$

Darin ist

$$U_S=U_G+U_Z \tag{8.11}$$

das Schwerepotential im Bezugssystem B.

Beispiele: 1. Im eingeschränkten Dreikörperproblem bewegt sich das Teilchen im Gravitationsfeld zweier endlicher Massen, die einander in festem Abstand auf Kreisbahnen umlaufen. Dieses Feld ist in einem mitrotierenden Bezugssystem, in dem die endlichen Massen an festen Plätzen ruhen, unveränderlich und damit auch die potentielle Energie des Teilchens *(Schneider II 1993)*.

Als generalisierte Koordinaten **q** werden zweckmäßigerweise die kartesischen Koordinaten x_i $(i=1,2,3)$ des Teilchens im rotierenden Bezugssystem B gewählt:

$$\mathbf{r}=\mathbf{D}_3(t)\mathbf{x}\ \text{ mit }\ \mathbf{x}:=\left(x_1,x_2,x_3\right)$$

$$\mathbf{D}_3(t):=\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t & 0\\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{8.12}$$

ω Winkelgeschwindigkeit der Drehung.

Diese Drehtransformation ist eine rheonome Transformation

$$\mathbf{x} \to \mathbf{r}: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q} = \mathbf{x}, t) \tag{8.13}$$

des Ortsvektors **x** im rotierenden Bezugssystem B auf den Ortsvektor **r** des Teilchens im Inertialsystem K.

Für den Anteil T_0 der Zerlegung der kinetischen Energie *(Schneider I 1992)* erhält man mit dieser Transformation

$$T_0 := \frac{m}{2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{m}{2}\omega^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \tag{8.14}$$

und damit als potentielle Energie des Teilchens im Bezugssystem B

$$\tilde{V}_{pot}^{B} := -T_0 + \tilde{V} = -\frac{m}{2}\omega^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \tilde{V} = -\frac{m}{2}\omega^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - mU_G =: mU_S \tag{8.15}$$

Zusammen mit

$$T_2 := \frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} = \frac{m}{2}\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2 \tag{8.16}$$

ergibt sich das ***Jacobi-Integral***

$$\frac{m}{2}\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2 = mU_S(\mathbf{x}) - C \tag{8.17}$$

in Übereinstimmung mit der in Abs. 3.1 angegebenen Herleitung.

2. Für die hier interessierende Bewegung eines Satelliten im Schwerefeld einer um eine feste Achse gleichförmig rotierenden starren Erde ist die potentielle Energie im erdfesten Bezugssystem B ebenfalls nicht explizit zeitabhängig (in B!). Der Übergang von einem geozentrisch gelagerten Inertialsystem K zum erdfesten System B ist wiederum eine rheonome Transformation.

Das Jacobi-Integral nimmt die Gestalt an

$$\frac{m}{2}\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2 = mU_S(\mathbf{x}) - C\,\cdot \tag{8.18}$$

8.3 Verallgemeinertes Jacobi-Integral

Die bei der Herleitung des Jacobi-Integrals getroffenen Annahmen sind nur genähert erfüllt: die Erde rotiert um eine variable Achse mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit und das Schwerefeld ist zeitlich veränderlich. Hinzu kommt eine Reihe von weiteren, gravitativen und nichtgravitativen, Störkräften. Es stellt sich daher die Frage, ob ein verallgemeinertes Jacobi-Integral existiert oder ob man auf andere Weise den Abweichungen von den getroffenen Annahmen Rechnung tragen kann. Darauf soll näher eingegangen werden. Die Gleichung

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2\right) = \frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\frac{1}{m}\mathbf{K}(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt};t) + \frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\left(U_F + U_Z + \Phi\right) + \frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\times\mathbf{A}\,, \tag{8.19}$$

die aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{D^2\mathbf{x}}{Dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{K}(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt};t) + \nabla_{\mathbf{x}}\left(U_F + U_Z + \Phi\right) + \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\times\mathbf{A} \tag{8.20}$$

nach skalarer Multiplikation mit der Geschwindigkeit $\frac{D\mathbf{x}}{Dt}$ folgt, geht, mit der Aufspaltung der Kraft

$$\mathbf{K}(\mathbf{x},t) = m\nabla_{\mathbf{x}}U_G(\mathbf{x},t) + \mathbf{Z}\left(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt},t\right) \text{ und } U_S := U_G + U_F + U_Z + \Phi\,, \tag{8.21}$$

worin

$$\mathbf{Z}\left(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt},t\right) \tag{8.22}$$

die Resultierende aller ***nichtgravitativen*** Kräfte wie z.B. Atmosphärenwiderstand, Strahlungsdruckkräfte etc. bedeute, über in

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2\right)=\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\left(\nabla_{\mathbf{x}}(U_S)+\mathbf{Z}(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt},t)\right)+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{A}\cdot \tag{8.23}$$

Nach unbestimmter Integration über die Zeit t ergibt sich

$$\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2=2U_S-\int^t\left(\frac{\partial U_S}{\partial t}+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\left(\mathbf{Z}(\mathbf{x}\ \ ,\frac{D\mathbf{x}}{Dt},t)+\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\times\mathbf{A}\right)\right)Dt-C\cdot \tag{8.24}$$

Wegen

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\Phi=0 \tag{8.25}$$

kann man in

$$U_S:=U_G+U_F+U_Z+\Phi \tag{8.26}$$

die Potentialfunktion Φ der (bezogenen) Corioliskraft weglassen, so dass das ***verallgemeinerte Jacobi-Integral*** lautet

$$\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2=2U_S-\int^t\left(\frac{\partial U_S}{\partial t}+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\mathbf{Z}\left(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt},t\right)+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\times\mathbf{A}\right)Dt-C \tag{8.27}$$

mit der Potentialfunktion

$$U_S:=U_G+U_F+U_Z=U_G\left(\mathbf{x},t\right)-\mathbf{x}\cdot\ddot{\mathbf{R}}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{d}(t)\times\mathbf{x}\right)^2\cdot \tag{8.28}$$

Der Integrand

$$\left(\frac{\partial U_S}{\partial t}+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\mathbf{Z}\left(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt},t\right)+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{A}\right) \tag{8.29}$$

verschwindet, wenn sich $\mathbf{d}$ zeitlich nicht ändert und wenn das Bezugssystem B translatorisch nicht beschleunigt ist, d.h. wenn $\dot{\mathbf{d}}\equiv\mathbf{0}$ und $\ddot{\mathbf{R}}=\mathbf{0}$.

Bemerkungen zum Integranden:

1. Er kann **nicht** als vollständige Zeitableitung einer skalaren Funktion F geschrieben werden, d.h., es ist

$$\frac{DF}{Dt}=\left(\frac{\partial U_S}{\partial t}+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\mathbf{Z}\left(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt},t\right)+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{A}\right) \tag{8.30}$$

   nicht erreichbar.

2. Man kann ihn physikalisch nicht zum Verschwinden bringen oder zu einer Konstanten machen, d.h., es gelingt **nicht,**

$$\left(\frac{\partial U_S}{\partial t}+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\mathbf{Z}\left(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt},t\right)+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{A}\right)=0\quad\text{bzw.}\quad=\text{const.} \tag{8.31}$$

   zu erreichen. Ein Ausweg aus dieser Situation bietet sich wie folgt.

Annahme*:* Längs der aktuellen Bahn sind

$$\frac{1}{m}\mathbf{Z}\left(\mathbf{x},\frac{D\mathbf{x}}{Dt},t\right)=:\mathbf{F}(t)\qquad\text{und}\qquad rot\ \mathbf{A}=:\mathbf{G}(t) \tag{8.32}$$

reine Zeitfunktionen, so dass mit einer weiteren Potentialfunktion

$$\begin{aligned}U_T(t)&:=\mathbf{x}\cdot\left(\frac{1}{m}\mathbf{Z}\left(\mathbf{x}(t),\frac{D\mathbf{x}(t)}{Dt},t\right)+rot\ \mathbf{A}\left(\mathbf{x}(t),t\right)\right)\\&=\mathbf{x}\cdot(\qquad\mathbf{F}(t)\qquad\qquad+\qquad\mathbf{G}(t)\qquad)\end{aligned} \tag{8.33}$$

die Bewegungsgleichung des Teilchens in B lautet

$$\frac{D^2\mathbf{x}}{Dt^2} = \nabla_{\mathbf{x}}\left(U_{vS}\right)$$

mit dem **verallgemeinerten Schwerepotential**

$$U_{vS} = U_S + U_T = U_G + U_F + U_Z + \Phi + U_T \,. \tag{8.34}$$

Das verallgemeinerte Jacobi-Integral kann man damit in der Form

$$\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)^2 = 2U_{vS} - 2\int^t \frac{\partial U_{vS}}{\partial t} Dt - C' =: 2U_{vS} \;- C(t) \tag{8.35}$$

schreiben, worin $C(t)$ eine zeitveränderliche "Jacobi-Konstante" ist, definiert durch

$$C(t) := 2\int^t \frac{\partial U_{vS}}{\partial t} Dt - C' \,. \tag{8.36}$$

Das unbestimmte Integral

$$\int^t \frac{\partial U_{vS}}{\partial t} Dt \tag{8.37}$$

kann mit dem verallgemeinerten Schwerepotential $U_{vS}(t)$ berechnet werden, wenn man die Bewegung $\mathbf{x}(t)$ im Galilei-System kennt.

8.4 Störungsgleichungen in einem mit einem Zentralkörper verbundenen Galilei-System

Im allgemeinen ist ein Bezugssystem entweder willkürlich vorgegeben (durch Vorgabe der transatorischen Beschleunigung $\ddot{\mathbf{R}}$ und der Drehrate $\mathbf{d}$ in (8.2)) oder mit einem Körper oder einem aus mehreren Körpern gebildeten Körpersystem (Bezugskörper) verbunden. Im letzteren Fall müssen $\ddot{\mathbf{R}}$ und $\mathbf{d}$ des Bezugssystems bzw. die des Bezugskörpers durch die Newtonschen Bewegungsgleichung bestimmt werden.

Betrachtet wird die Bewegung eines Teilchens m bzgl. eines mit einem ausgedehnten Körper K verbundenen Bezugssystems oder grob gesprochen die Bewegung des Teilchens um den Körper K. Die translatorische Beschleunigung des Bezugssystems ist gleich der des Massenmittelpunktes des Körpers K. Die auf den Körper K und auf das Teilchen wirkenden Kräfte sind

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{R}} &= \sum_\alpha \underline{\mathbf{F}}^\alpha - \mathbf{F}\,, \\ m\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F} + \sum_\alpha \mathbf{F}^\alpha + \mathbf{Z}\,, \end{aligned} \tag{8.38}$$

worin M und m die Massen des Körpers und des Teilchens bezeichnen (angenommen: $m \ll M$); $\mathbf{R}$ und $\mathbf{r}$ sind ihre Ortsvektoren bzgl. eines beliebigen Inertialsystems. $\mathbf{F}$ ist die durch den Zentralkörper K auf das Teilchen wirkende Kraft, $\underline{\mathbf{F}}^\alpha$ und $\mathbf{F}^\alpha$ die durch einen Außenkörper (Teilchen) α ($\alpha = 1, 2, \ldots$) auf den Körper K und auf das Teilchen wirkende Kraft. Alle diese Kräfte seien als gravitative angenommen. $\mathbf{Z}$ erfasse die nichtgravitativen Kräfte auf das Teilchen.

Alle diese Kräfte werden in die Gleichung (8.1) eingeführt; dann erhält man

$$\frac{D^2\mathbf{x}}{Dt^2} = \frac{1}{m}\left(1+\frac{m}{M}\right)\mathbf{F} - \mathbf{d}\times\left(\mathbf{d}\times\mathbf{x}\right) - 2\mathbf{d}\times\frac{D\mathbf{x}}{Dt} - \frac{D\mathbf{d}}{Dt}\times\mathbf{x} + \frac{1}{m}\sum_\alpha\left(\mathbf{F}^\alpha - \frac{m}{M}\underline{\mathbf{F}}^\alpha\right) + \frac{1}{m}\mathbf{Z}\,. \tag{8.39}$$

Die gravitative Kraft $\mathbf{F}$ des Zentralkörpers lässt sich aus dem Potential V_K des Gravitationsfeldes des Körpers ableiten. Das letztere kann mittels

$$V_K = \frac{GM}{r} + \delta V$$

ausgedrückt werden, worin r den Abstand des angezogenen Teilchens zum Massenmittelpunkt C des Körpers bezeichnet. Der erste Term in V_K lässt sich als das Potential eines Teilchens, das die gesamte Masse des Körpers besitzt und das in dessen Massenmittelpunkt positioniert ist, interpretieren. Der zusätzliche Teil

$$\delta V = \frac{GM}{r}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{a}{r}\right)^n\left(c_{n(0)}P_{n(0)}\left(\cos\theta\right) + \sum_{m=1}^{n}\left(c_{nm}P_{nm}\left(\cos\theta\right)\cos m\lambda + s_{nm}P_{nm}\left(\cos\theta\right)\sin m\lambda\right)\right)$$

des Potentials hängt von der Massenverteilung im Körper K ab, worin (θ, λ) die Kugelkoordinaten des Teilchens in einem (mit dem Massenmittelpunkt C als dessen Ursprung) beliebig orientierten Koordinatensystem sind. a ist eine willkürlich eingeführte Größe mit der Dimension der Länge.

(c_{nm}, s_{nm}) sind von der Position des Teilchens unabhängige harmonische Koeffizienten; sie hängen aber von den Definitionen des Koordinatensystems und der Größe a ab. Entsprechend lässt sich die Kraft $\mathbf{F}$ in

$$\mathbf{F} = \frac{GM\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \delta\mathbf{F}$$

zerlegen. Unter den Bedingungen, dass einerseits die Gleichung

$$\frac{D^2\mathbf{x}}{Dt^2} = -\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{GM\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \left(\mathbf{d}\times(\mathbf{d}\times\mathbf{x}) + 2\mathbf{d}\times\frac{D\mathbf{x}}{Dt} - \frac{D\mathbf{d}}{Dt}\times\mathbf{x}\right) =: \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \cdot \tag{8.40}$$

integrabel ist und andererseits gilt

$$\left|\delta\mathbf{F} + \frac{1}{m}\sum_\alpha\left(\mathbf{F}^\alpha - \frac{m}{M}\underline{\mathbf{F}}^\alpha\right) + \frac{1}{m}\mathbf{Z}\right| << \left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{GM}{|\mathbf{x}|^2},$$

stellt (8.39) eine Störungsgleichung für die Bewegung eines Teilchens um den bewegten Bezugskörper (Zentralkörper) dar, wobei $\mathbf{f}_0$ und $\mathbf{f}_1$ die Hauptterme sind und

$$\mathbf{f}_2 = \delta\mathbf{F} + \frac{1}{m}\sum_\alpha\left(\mathbf{F}^\alpha - \frac{m}{M}\underline{\mathbf{F}}^\alpha\right) + \frac{1}{m}\mathbf{Z}$$

die (gravitativen und nichtgravitativen) Störkräfte bezeichnet.

Für ein nichtrotierendes Galilei-System gilt $\dot{\mathbf{d}} = \frac{D\mathbf{d}}{Dt} = 0$. Damit ergibt sich wegen $\frac{D}{Dt} \to \frac{d}{dt}$ und $\mathbf{x} \to \mathbf{r}$ aus (8.39), die **Bewegungsgleichung in einem mit dem Massenmittelpunkt des Zentralkörpers verbundenen rotationsfreien Galileisystems zu**

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{GM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} + \mathbf{f}_2 \tag{8.41}$$

mit der Abkürzung

$$\mathbf{f}_s = \left(1+\frac{m}{M}\right)\delta\mathbf{F} + \frac{1}{m}\sum_\alpha\left(\mathbf{F}^\alpha - \frac{m}{M}\underline{\mathbf{F}}^\alpha\right) + \frac{1}{m}\mathbf{Z} \cdot \tag{8.42}$$

Die Gleichung (8.41) stellt sich als eine Störungsgleichung mit der Störkraft $\mathbf{f}_s$ dann dar, wenn

$$|\mathbf{f}_s| << \frac{G(M+m)}{|\mathbf{r}|^2}.$$

Der Vergleich mit (1.1) zeigt, dass der Hauptterm der Gleichung (8.41) ein Kepler-Problem beschreibt, in dem die Masse des Zentralkörpers gleich der Summe $M+m$ des Zentralkörpers und des betrachteten Teilchens ist. Diese Gleichung ist die Grundgleichung der Bahntheorie. Für die Bahnbewegung beschreiben die drei Terme der Störkraft die Abweichung des Gravitationsfelds des Zentralkörpers vom Feld einer Punktmasse, die gravitativen Störkräfte zufolge anderer Himmelskörper sowie die nicht-gravitativen Störkräfte.

9. Bewegungsgleichungen in Bahntheorien basierend auf den Hill-Variablen, kanonischen Kugelkoordinaten und Kepler-Variablen

In den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts wurden die Hill-Variablen in die Satellitenbahntheorie eingeführt *(Izsak, I., 1963; Aksnes, K., 1965; Lelgemann, D., 1983*), die für Bahnen mit beliebiger Exzentrizität, insbesondere für Bahnen mit kleinen Exzentrizitäten (nahezu kreisförmige Bahnen) geeignet sind. Die Arbeit (*Cui, Ch. & Mareyen, M., 1995)* enthält die theoretischen Grundlagen der Anwendung der Hill-Variablen in der Himmelsmechanik, insbesondere in der Theorie der Satellitenbahnen.

Die kanonischen Kugelkoordinaten sind für die Bahnbewegung bei extrem kleiner Inklination (dazu gehören nicht nur die Bewegung der äquatorialen Satelliten, sondern auch die Bewegung der Planeten im Sonnensystem, darunter die Bewegung der Erde bzw. des Massenzentrums des Erde-Mond-Systems) zu verwenden.

9.1 Das Gaußsche Bahnkoordinatensystem und die Hill-Variablen

9.1.1 Definitionen und geometrische Eigenschaften

Gegeben seien Orts- und Geschwindigkeitsvektor **r** und **v** eines Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt, und zwar bezüglich eines durch einen festen Punkt O und drei orthonormierte Basisvektoren $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ repräsentierten Bezugssystems. Als solches sei insbesondere das **Gaußsche Bahnkoordinatensystem** gewählt, dessen Basisvektoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) := (\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ definiert sind durch (siehe Abb. 9.1)

$$\mathbf{s} := \mathbf{r}/r, \qquad \mathbf{t} := \mathbf{n}\times\mathbf{s}, \qquad \mathbf{n} := \mathbf{G}/G,$$
$$\mathbf{G} = \mathbf{r}\times\mathbf{v}, \qquad G = |\mathbf{G}|, \qquad r = |\mathbf{r}|. \tag{9.1}$$

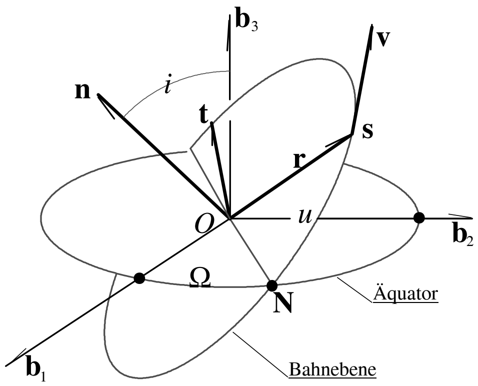

Abb. 9.1 Das Gaußsche Bahnkoordinatensystem und die Hill-Variablen

Das Gaußsche Bahnkoordinatensystem ist ein bewegliches lokales System. Der Einheitsvektor **s** liegt in der Richtung des Ortsvektors und werde der radiale Einheitsvektor genannt. Die Vektoren **s** und **t** spannen eine Ebene auf, die Bahnebene, in der momentaner Orts- und Geschwindigkeitsvektor **r** und **v** liegen. Der Einheitsvektor **t** wird der transversale Einheitsvektor genannt. Der Vektor **n** steht senkrecht auf der Bahnebene und heißt Bahnnormalenvektor oder Normaleneinheitsvektor.

Das Bezugssystem $(O; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ kann dem gestellten Bewegungsproblem in weiten Grenzen angepasst werden. In der Himmelsmechanik wird oft das Ekliptiksystem (für die Planetenbewegung) oder das rotationsfreie Äquatorsystem (für die Satellitenbewegung) gewählt, wobei $\mathbf{b}_3$ zum Ekliptikpol bzw. zum Rotationspol der Erde zeigt. Der Ursprung O liegt im Massenmittelpunkt des Zentralkörpers.

Im Gaußschen Bahnkoordinatensystem lassen sich unterschiedliche Bahnvariable zur Beschreibung der Bahnbewegungen definieren, beispielsweise die Kepler-Variablen $(i, \Omega; a, e; \omega, M)$ zur Beschreibung der Bewegungen in einem Kegelschnitt. Die Kepler-Variablen sind für die Untersuchung der Bewegungen in einer elliptischen Bahn mit sehr kleiner Exzentrizität, die sowohl theoretisch als auch praktisch von großer Bedeutung ist, nicht geeignet, da in diesem Fall

Singularitäten in den Bewegungsgleichungen auftreten. Um diese Singularitäten zu vermeiden, sind andere Variablen zu verwenden, zum Beispiel die Hill-Variablen. Die Hill-Variablen $(\dot{r}, G, H; r, u, \Omega)$ sind folgendermaßen definiert:

$\dot{r}$ radiale Geschwindigkeit (radiale Komponente des linearen Impulses pro Einheitsmasse),

G und H Gesamtbetrag und Polkomponente des Drehimpulses pro Einheitsmasse,

r, u, Ω Abstand, Argument der Breite und Rektaszension des aufsteigenden Bahnknotens **N**.

Alle sechs Variablen $(\dot{r}, G, H; r, u, \Omega)$ lassen sich aus Orts- und Geschwindigkeitsvektor **r** und **v** eindeutig bestimmen. Während die Hill-Variablen r und G durch (9.1) gegeben sind, lassen sich die anderen Variablen folgendermaßen bestimmen:

$$\dot{r} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{s} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/r\,, \qquad H = \mathbf{G}\cdot\mathbf{b}_3 = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{b}_3 = G\cos i$$

$$\cos\Omega = \mathbf{N}\cdot\mathbf{b}_1\,, \qquad \sin\Omega = \mathbf{N}\cdot\mathbf{b}_2\,,$$

$$\cos u = \mathbf{s}\cdot\mathbf{N}\,, \qquad \sin u = \mathbf{s}\cdot\mathbf{W}\,, \tag{9.2}$$

Darin ist

$$\mathbf{N} = \mathbf{b}_3\times\mathbf{G}/|\mathbf{b}_3\times\mathbf{G}| \tag{9.3}$$

die Richtung zum aufsteigenden Bahnknoten. Der Vektor

$$\mathbf{W} = \mathbf{n}\times\mathbf{N} \tag{9.4}$$

ist orthogonal zu den Vektoren **n** und **N** und liegt in der Bahnebene. i ist die Inklination (Bahnneigung).

Die Gaußschen Basisvektoren $(\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{n})$ gehen aus den Basisvektoren $(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$ über eine Rotation hervor:

$$(\mathbf{s},\,\mathbf{t},\,\mathbf{n})^T = \mathbf{R}_3(u)\mathbf{R}_1(i)\mathbf{R}_3(\Omega)(\mathbf{b}_1,\,\mathbf{b}_2,\,\mathbf{b}_3)^T\,, \tag{9.5}$$

oder umgekehrt

$$(\mathbf{b}_1,\,\mathbf{b}_2,\,\mathbf{b}_3)^T = \mathbf{R}_3^T(\Omega)\mathbf{R}_1^T(i)\mathbf{R}_3^T(u)(\mathbf{s},\,\mathbf{t},\,\mathbf{n})^T = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_1(-i)\mathbf{R}_3(-u)(\mathbf{s},\,\mathbf{t},\,\mathbf{n})^T\,, \tag{9.6}$$

wobei die elementaren Rotationsmatrizen sind. Multiplikation der Matrizen ergibt

$$\mathbf{R}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\ \mathbf{R}_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},\ \mathbf{R}_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i & -\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i & \sin\Omega\sin i \\ \cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i & -\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i & -\cos\Omega\sin i \\ \sin u\sin i & \cos u\sin i & \cos i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

und

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i & \cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i & \sin u\sin i \\ -\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i & -\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i & \cos u\sin i \\ \sin\Omega\sin i & -\cos\Omega\sin i & \cos i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}. \tag{9.9}$$

Der Ortsvektor des Teilchens lässt sich damit darstellen durch

$$\mathbf{r} = r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i)\mathbf{b}_1 + r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i)\mathbf{b}_2 + r\sin u\sin i\mathbf{b}_3 \tag{9.10}$$

woraus für die Koordinaten in der Basis $(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$ folgt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i \\ \cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i \\ \sin u\sin i \end{pmatrix}. \tag{9.11}$$

Ausgehend von (9.9) erhält man für die Differentiale der Gaußschen Basisvektoren

$$d\mathbf{s} = \left(du + \cos i d\Omega\right)\mathbf{t} + \left(\sin u di - \cos u \sin i d\Omega\right)\mathbf{n} ,$$

$$d\mathbf{t} = -\left(du + \cos i d\Omega\right)\mathbf{s} + \left(\cos u di + \sin u \sin i d\Omega\right)\mathbf{n} ,$$

$$d\mathbf{n} = -\left(\sin u di - \sin i \cos u d\Omega\right)\mathbf{s} - \left(\cos u di + \sin i \sin u d\Omega\right)\mathbf{t} . \tag{9.12}$$

9.1.2 Die Gaußschen Komponenten der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren

Für das Differential von $\mathbf{r} = r\mathbf{s}$ ergibt sich aus(9.12)

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{s} + rd\mathbf{s} = dr\mathbf{s} + r\left(du + \cos i d\Omega\right)\mathbf{t} + r\left(\sin u di - \cos u \sin i d\Omega\right)\mathbf{n} . \tag{9.13}$$

Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich damit

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{s} + r\left(\frac{du}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{t} + r\left(\sin u \frac{di}{dt} - \cos u \sin i \frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{n} . \tag{9.14}$$

Da der Geschwindigkeitsvektor entsprechend der Definition der Basisvektoren des Gaußschen Bahnkoordinatensystems in der Bahnebene liegt, verschwindet seine normale Komponente. Die radiale Komponente ist gemäß der ersten Gleichung in (9.2) $\dot{r}$. Schließlich ist die transversale Komponente entsprechend der Definition des Drehimpulses G/r. Man erhält somit die Darstellung

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{s} + \frac{G}{r}\mathbf{t} . \tag{9.15}$$

Der Vergleich mit (9.14) ergibt die folgenden Beziehungen, im Folgenden **kinematische Identitäten** genannt:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} , \qquad \frac{du}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{G}{r^2} , \qquad \sin u \frac{di}{dt} - \cos u \sin i \frac{d\Omega}{dt} = 0 . \tag{9.16}$$

Mit Hilfe von (9.12) und (9.16) erhält man daraus die Darstellung der Beschleunigung in Hill-Variablen,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d\dot{r}}{dt} - \frac{G^2}{r^3}\right)\mathbf{s} + \frac{1}{r}\frac{dG}{dt}\mathbf{t} + \frac{G}{r}\left(\cos u \frac{di}{dt} + \sin u \sin i \frac{di}{dt}\right)\mathbf{n} . \tag{9.17}$$

Anm: Die kinematischen Identitäten (9.16) lassen sich als nichtholonome Zwangsbedingungen für die unabhängigen Variablen auffassen. So ist ein durch die Hill-Variablen beschriebenes dynamisches System ein skleronomes, nichtholonomes System.

9.1.3 Das Gaußsche Gleichungssystem für die Bahnbewegung in Form der Hill-Variablen

Projiziert man die Vektoren auf beiden Seiten des zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes auf die Gaußschen Basisvektoren

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} = f_1\mathbf{s} + f_2\mathbf{t} + f_3\mathbf{n} , \tag{9.18}$$

wobei $\omega = u - f$ die auf das Teilchen wirkende Kraft ist, so erhält man

$$\frac{d\dot{r}}{dt} - \frac{G^2}{r^3} = f_1 , \qquad \frac{1}{r}\frac{dG}{dt} = f_2 , \qquad \frac{G}{r}\left(\cos u \frac{di}{dt} + \sin u \sin i \frac{d\Omega}{dt}\right) = f_3 . \tag{9.19}$$

Die 6 Gleichungen (9.19) und (9.16) lassen sich durch lineare Kombination in eine Form umschreiben, so dass jede Gleichung nur eine Zeitableitung der 6 Variablen enthält:

$$\frac{d\dot{r}}{dt}-\frac{G^2}{r^3}=f_1\,,\qquad \frac{dG}{dt}=rf_2\,,\qquad \frac{di}{dt}=\frac{r}{G}\cos uf_3\,;$$

$$\frac{dr}{dt}=\dot{r}\,,\qquad \frac{du}{dt}=\frac{G}{r^2}-\frac{r}{G}\cot i\sin uf_3\,,\qquad \sin i\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r}{G}\sin uf_3\,. \tag{9.20}$$

Aus der zweiten der Gleichungen (9.2) ergibt sich

$$di=\cot i\frac{dG}{G}-\frac{1}{\sin i}\frac{dH}{G}\,, \tag{9.21}$$

womit sich die dritte Gleichung in der ersten Zeile von (9.20) durch

$$\frac{dH}{dt}=r\left(\cos if_2-\sin i\sin uf_3\right) \tag{9.22}$$

ersetzen lässt.

(9.20) ist ein System von Differentialgleichungen für die Bewegung eines Teilchens: **Gaußsches Gleichungssystem der Planetenbewegung in Form der Hill-Variablen**. Dessen Herleitung erfolgte in zwei Schritten:

(1) Darstellung des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors mittels der Gaußschen Basisvektoren und der Hill-Variablen;

(2) Darstellung des zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes bezüglich der Gaußschen Basis.

9.1.4 Die Hill-Variablen als kanonische Variable

Für den Fall, dass sich die auf das Teilchen wirkende Kraft als Gradient einer skalaren Funktion des Ortsvektors (und der Zeit)

$$\mathbf{f}=gradV\left(\mathbf{r},t\right)$$

darstellen lässt, kann das Differential der Funktion $V\left(\mathbf{r},t\right)$ gemäß

$$dV=gradV\cdot d\mathbf{r}+\frac{\partial V}{\partial t}dt=\mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}+\frac{\partial V}{\partial t}dt$$

berechnet werden. Trägt man (9.13) und (9.18) in diese Gleichung ein, erhält man

$$dV=f_1dr+r\sin uf_3di+rf_2du+r\left(\cos if_2-\cos u\sin if_3\right)d\Omega+\frac{\partial V}{\partial t}dt$$

und damit

$$f_1=\frac{\partial V}{\partial r}\,,\qquad r\sin uf_3=\frac{\partial V}{\partial i}\,,$$

$$rf_2=\frac{\partial V}{\partial u}\,,\qquad r\left(\cos if_2-\cos u\sin if_3\right)=\frac{\partial V}{\partial\Omega}\,. \tag{9.23}$$

Danach sind drei Kraftkomponenten aus vier partiellen Ableitungen zu bestimmen; eine der Ableitungen muss daher von den anderen abhängen. Aus den letzten drei Gleichungen erhält man die folgende Identität zwischen den partiellen Ableitungen

$$\sin u\left(\cos i\frac{\partial V}{\partial u}-\frac{\partial V}{\partial\Omega}\right)-\cos u\sin i\frac{\partial V}{\partial i}=0\,. \tag{9.24}$$

Führt man die Gleichungen (9.23) in (9.20) ein, so folgt

$$\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{G^2}{r^3}+\frac{\partial V}{\partial r}, \qquad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial V}{\partial u}, \qquad \frac{di}{dt}=\frac{1}{G\sin i}\left(\cos i\frac{\partial V}{\partial u}-\frac{\partial V}{\partial \Omega}\right)$$

$$\frac{dr}{dt}=\dot{r}, \qquad \frac{du}{dt}=\frac{G}{r^2}-\frac{\partial V}{\partial G}, \qquad \frac{d\Omega}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial H} \tag{9.25}$$

oder

$$\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{G^2}{r^3}+\frac{\partial V}{\partial r}, \qquad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial V}{\partial u}, \qquad \frac{dH}{dt}=\frac{\partial V}{\partial \Omega}$$

$$\frac{dr}{dt}=\dot{r}, \qquad \frac{du}{dt}=\frac{G}{r^2}-\frac{\partial V}{\partial G}, \qquad \frac{d\Omega}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial H}. \tag{9.25a}$$

Das ist das **Lagrangesche Gleichungssystem für Bahnbewegungen, dargestellt in Hill-Variablen**.

Führt man die Funktion

$$F=-T+V=-\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+V=-\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2+\frac{G^2}{r^2}\right)+V \tag{9.26}$$

ein, dann nimmt das Gleichungssystem (9.25a) die Gestalt

$$\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \frac{dH}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \Omega},$$

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \dot{r}}, \qquad \frac{du}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G}, \qquad \frac{d\Omega}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H}, \tag{9.27}$$

eines kanonisches Systems an, wobei (r,u,Ω) die generalisierten Koordinaten sind und $(\dot{r},G,H)$ die konjugierten generalisierten Impulse. F ist die Hamilton-Funktion. Damit ist die Kanonizität der Hill-Variablen gezeigt *(Schneider II 1993)*.

9.1.5 Erweiterte Hill-Variablen zur Behandlung von Problemen mit zeitabhängigem Potential

Wenn das Potential V allein eine Funktion der Variablen $(r,u,\Omega;\dot{r},G,H)$ ist, die Zeit also nicht explizit auftritt, dann ist das System (9.27) ein autonomes System. Für ein autonomes System aber gilt der Energiesatz:

$$F=\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2+\frac{G^2}{r^2}\right)-V\left(r,u,\Omega;\dot{r},G,H\right)=const\cdot$$

Wenn hingegen das Potential explizit zeitabhängig ist, dann liegt ein nichtautonomes System vor. In diesem Fall ist ein Satz von um das Variablenpaar (τ, T) erweiterter Hill-Variablen $(r,u,\Omega,\tau;\dot{r},G,H,T)$ für die Problemlösung zweckmäßig. τ ist physikalisch mit der Zeit t bis auf eine zusätzliche Konstante identisch, $\tau = t + c$; sie spielt aber nicht die Rolle einer unabhängigen Variablen, sondern die einer zusätzlichen generalisierten Koordinate. T ist der zu τ konjugierte generalisierte Impuls. In der Anwendung muss man

(1) die Zeit t in $V\left(r,u,\Omega;G,H;t\right)$ durch τ ersetzen: $V\left(r,u,\Omega;G,H;\tau\right)$;

(2) in der Hamilton-Funktion $F=T-V$ muss man einen zusätzlichen Term T einführen, so dass diese für die **erweiterten Hill-Variablen** $\left(r,u,\Omega,\tau;\dot{r},G,H,T\right)$ die Form

$$F=-\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2+\frac{G^2}{r^2}\right)+V\left(G,H,r,u,\Omega;\tau\right)-T \tag{9.28}$$

annimmt und damit das kanonische Gleichungssystem die Form

$$\frac{d\dot r}{dt}=\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \frac{dH}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \Omega}, \qquad \frac{dT}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \tau}$$

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \dot r}, \qquad \frac{du}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G}, \qquad \frac{d\Omega}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H}, \qquad \frac{d\tau}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial T}. \tag{9.29}$$

Das System (9.28)-(9.29) ist äquivalent dem System (9.26)-(9.27) in dem Sinne, dass die Lösung des letzteren eine Teillösung darstellt. Durch Einführung des zusätzlichen Variablenpaars, d.h. durch den Übergang in einen **erweiterten Phasenraum** *(Schneider I+II 1992/3)*, wird aus einem nichtautonomen kanonischen System ein autonomes System.

9.1.6 Integration des in Hill-Variablen formulierten Kepler-Problems

Das Kepler-Problem ist definiert durch das Potential

$$V=\frac{\mu}{r},$$

wobei $\mu = GM$ den Gravitationskoeffizienten des im Raum fest liegenden Zentralkörpers bezeichnet; M ist dessen Masse. Die Hamilton-Funktion lautet

$$F=-\frac{1}{2}\left(\dot r^2+\frac{G^2}{r^2}\right)+\frac{\mu}{r}. \tag{9.30}$$

Das System ist bekanntlich integrabel. Das Impuls-Theorem (entsprechend dem im Abs. 7 angegebenen Theorem A mit $K=1$) zeigt zwei Bewegungsintegrale:

$$G=\alpha_1, \qquad H=\alpha_2. \tag{9.31}$$

Man kann die Hamilton-Funktion umschreiben in

$$F=-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{G^2}\left(e^2-1\right). \tag{9.30a}$$

mit der Abkürzung

$$e^2=\left(\frac{G\dot r}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}-1\right)^2. \tag{9.32}$$

Damit ist das dritte Integral

$$e^2=\alpha_3 \tag{9.33}$$

über das Energie-Theorem ermittelt. Das Integral (9.33) gibt eine algebraische Beziehung zwischen r und $\dot r$ an; damit bleibt nur eine von beiden Variablen unabhängig. Durch

$$\frac{G\dot r}{\mu}=e\sin f, \qquad \frac{G^2}{\mu r}-1=e\cos f \tag{9.34}$$

führt man eine Winkelvariable f ein, so dass die Gleichung (9.33) erfüllt wird. Es ist ersichtlich, dass (9.34) einen Kegelschnitt beschreibt, wobei $p=G^2/\mu$ bzw. e den Parameter bzw. die Exzentrizität des Kegelschnitts bedeuten; beide zusammen bestimmen die Größe und die Gestalt der Bahn. f ist die wahre Anomalie, welche die Position des Körpers in der Bahnebene bezüglich der Apsidenlinie beschreibt.

Da e und f nach den Gleichungen (9.34) als Funktionen der Variablen r, $\dot{r}$ und G definiert sind, erhält man

$$\left.\begin{aligned} ede &= \frac{G}{\mu}\frac{G\dot{r}}{\mu}d\dot{r} - \frac{1}{r}\frac{G^2}{\mu r}\left(\frac{G^2}{\mu r}-1\right)dr + \frac{1}{G}\left(e^2 + \left(\frac{G^2}{\mu r}+1\right)\left(\frac{G^2}{\mu r}-1\right)\right)dG, \\ e^2 df &= \frac{G}{\mu}\left(\frac{G^2}{\mu r}-1\right)d\dot{r} + \frac{1}{r}\frac{G^2}{\mu r}\left(\frac{G\dot{r}}{\mu}\right)dr - \frac{1}{G}\left(\frac{G^2}{\mu r}+1\right)\left(\frac{G\dot{r}}{\mu}\right)dG, \end{aligned}\right\} \tag{9.35}$$

und daraus

$$\left\{f, e^2\right\} = -2\frac{G^2}{\mu^2}\frac{G}{r^2}\,.$$

Damit ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{df}{dt} = \{f, F\} = \frac{\partial F}{\partial e^2}\left\{f, e^2\right\} = \frac{G}{r^2} \tag{9.36}$$

für die Winkelvariable f.

Für die Variablen u und Ω erhält man die Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G} = \frac{G}{r^2}\,, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H} = 0\,. \tag{9.37}$$

Integration ergibt

$$u = f + \alpha_4\,, \qquad \Omega = \alpha_5 \tag{9.38}$$

mit den Integrationskonstanten α_4 und α_5.

Es ist ersichtlich, dass die zeitliche Entwicklung der drei Variablen u, r und $\dot{r}$ über (9.38) und (9.34) von f abhängt. Es verbleibt, die Differentialgleichung für f zu lösen. Aus der klassischen Himmelsmechanik ist die Lösung dieser Gleichung für alle drei Kategorien nichtentarteter Kepler-Bewegungen, (nämlich elliptische, parabolische und hyperbolische Bewegung) bekannt. Für die **elliptische Bewegung** ($e < 1$) führt man die sog. exzentrische Anomalie E mittels

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right) \tag{9.39}$$

ein und erhält damit die Lösung in Gestalt der **Kepler-Gleichung**:

$$M := E - e\sin E = \left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\mu^2}{G^3}\left(t - t^*\right), \tag{9.40}$$

wobei M die mittlere Anomalie genannt wird. Die Kepler-Gleichung stellt das sechste Integral dar. $\alpha_6 = t^*$ ist die entsprechende Integrationskonstante; sie gibt die Zeit des Apsidendurchgangs an. Damit liegt die allgemeine Lösung für die elliptische Kepler-Bewegung vor. Die mittlere Anomalie ist nach (9.40) eine Funktion von E und e; E ist nach (9.39) eine Funktion von f und e; die beiden letzteren sind Funktionen von $(\dot{r}, r, G)$. Für das Differential erhält man

$$dM = \frac{r^2}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}df - \frac{1}{\left(1-e^2\right)^{3/2}}\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin f de\,.$$

Zusammen mit (9.35) für de und df erhält man

$$dM = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2}\left(\frac{G}{\mu}\left(\left(\frac{G^2}{\mu r}-1\right) - 2e^2\frac{\mu r}{G^2}\right)d\dot{r} + \frac{\mu}{G^2}\left(\frac{G\dot{r}}{\mu}\right)\left(\left(\frac{G^2}{\mu r}\right)^2 - e^2\right)dr - \frac{1}{G}\left(\frac{G^2}{\mu r}+1\right)\left(\frac{G\dot{r}}{\mu}\right)dG\right). \tag{9.41}$$

Kombination von (9.41) mit der zweiten Gleichung in (9.35) ergibt

$$d(f-M)=\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{G^2}{\mu r}-1\right)+2\sqrt{1-e^2}\,\frac{\mu r}{G^2}\right)\frac{Gd\dot{r}}{\mu}$$

$$+\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{G^2}{\mu r}\right)^2+\sqrt{1-e^2}\right)\left(\frac{G\dot{r}}{\mu}\right)\frac{\mu dr}{G^2}-\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{G^2}{\mu r}+1\right)\left(\frac{G\dot{r}}{\mu}\right)\frac{dG}{G}, \tag{9.42}$$

eine wohl erstmals von Izsak angegebene Beziehung. Andererseits ergibt sich aus (9.40) die Zeitableitung der mittleren Anomalie,

$$\frac{dM}{dt}=\left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\mu^2}{G^3}.$$

Zusammen mit (9.36) resultiert daraus

$$\frac{G^2}{r^2}=\left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\mu^2}{G^2}+G\frac{d(f-M)}{dt}. \tag{9.43}$$

Zu den weiteren Fällen nichtentarteter Keplerbahnen sei auf *(Schneider I 1992, Stumpff I 1959)* verwiesen.

9.2 Zu verallgemeinerten Kepler-Problemen führende integrable Systeme in Form der Hill-Variablen

Die erste und direkte Anregung zur Integrabilitätsuntersuchung in der Himmelsmechanik entstand aus der Suche nach intermediären Systemen, deren Lösung als Ausgangspunkt zur Störungsrechnung dienen soll:

> *In order to solve the exact problem approximately, we first solve an approximate problem exactly.*
>
> ——*T. E. Sterne*

Hier bedeutet das zunächst zu lösende approximative Problem ein intermediäres System, das in erster Linie integrabel sein muss.

Außer der Integrabilität soll ein intermediäres System für die gestörten Kepler-Probleme

1) die aktuellen Störkräfte so weit wie möglich erfassen und

2) eine einer Kepler-Bahn qualitativ so nahe wie möglich liegende intermediäre Bahn ergeben.

Bekannt sind drei intermediäre Systeme in der Satellitenbahntheorie: das Vinti-System, das Kyner-Bennet-System und das Lelgemann-System.

Das Vinti-System erfasst den J_2 -Term des Erdpotentials sowie einen Teil des J_4 -Terms und ergibt eine geschlossene Lösung. Die Lösung ist aber komplizierter als die Kepler-Lösung und basiert auf einer komplizierten Darstellung des Erdpotentials (elliptische harmonische Funktionen).

Das Kyner-Bennet-System legt eine Kraft fest, die zu säkularen Störungen in dem Argument des Perigäums, in der Länge des Knotens und in der mittlerer Anomalie führt, d.h., es führt zu einem verallgemeinerten Kepler-Problem. Die Kyner-Bennet-Kraft führt aber nicht nur zu säkularen Störungen, sondern auch zu komplizierten kurzperiodischen Störungen. Die Probleme dabei könnten in der Ableitung der benötigten Kraft liegen. Das ist eigentlich ein inverse Aufgabe der Mechanik; die Lösung sollte allerdings nicht so kompliziert wie bei Kyner und Bennet sein. Eine Diskussion darüber wird im Abs. 9.4.3 geführt werden. Die Bedeutung des Kynner-Bennet-Systems liegt nicht in der dabei angegebenen Kraft, sondern in der durch das System angeregten Denklinie, das säkulare und sogar das langperiodische Bewegungsverhalten durch ein intermediäres System zu erfassen. Das Kyner-Bennet-System stellt einen ersten Versuch in dieser Richtung dar.

Lelgemann (*Lelgemann, 1983*) übernimmt, direkt und mehr logischerweise, einen Teil des Erdpotentials in das intermediäre System und findet, dass das System integrabel ist und eine rotierende Kepler-Bahn ergibt. Die Lösung führt zur einfachen Darstellung der Störungen durch den restlichen Teil des Erdpotentials (als Störfunktion angesehen). Darauf basierend ist in (*Cui, 1990 und 1997*) die Suche nach intermediären Systemen in allgemeinerer Form (nicht nur das durch das Erdpotential, sondern auch das durch einen dritten Himmelskörper hervorgerufene säkulare Bewegungsverhalten erfassende integrable Systeme) fortgesetzt; die Ergebnisse wurden für eine Lösung zweiter Ordnung in der

Satellitenbahntheorie verwendet. Diese hat seinerseits die im Abs. 7 angegebene Separabilitäts- und Integrabilitätsuntersuchung angeregt. Im folgenden werden das Lelgemann-System und ein mit Hilfe des Theorems **D** gefundenes integrables System dargestellt.

Ein das gesamte langperiodische Bewegungsverhalten erfassendes integrables System ist bislang nicht gefunden, obwohl das theoretisch nicht ausgeschlossen ist.

9.2.1 Das Lelgemann-System: ein eine säkular drehende Kepler-Bahn ergebendes integrables System

Das Lelgemann-System lässt sich in einer allgemeinen Form durch die Hamilton-Funktion

$$F=-\frac{1}{2}\dot r^2-\frac{1}{2}\frac{G^2}{r^2}+\frac{\mu}{r}+\frac{G^2}{r^2}X(G,H)=-\frac{1}{2}\dot r^2-\frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{r^2}+\frac{\mu}{r} \tag{9.44}$$

unter der Bedingung

$$\Gamma^2:=G^2\left(1-2X(G,H)\right)\geq 0 \tag{9.45}$$

definieren, wobei $X(G,H)$ eine beliebige Funktion der Variablen G und H ist. Das System ergibt sich aus dem Kepler-System (9.30) durch Ersetzen des Impulses G mittels einer von G und H abhängigen konstanten Größe Γ, ist also ein verallgemeinertes Kepler-System. Alle Folgerungen aus dem Kepler-System bleiben dann gültig, wenn G durch Γ ersetzt wird; man erhält anstelle (9.32), (9.34) - (9.36) und (9.40)-(9.43)

$$\left(\frac{\Gamma\dot r}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}-1\right)^2=e^2=const, \tag{9.32a}$$

$$\frac{\Gamma\dot r}{\mu}=e\sin f, \qquad \frac{\Gamma^2}{\mu r}-1=e\cos f \tag{9.34a}$$

$$\left.\begin{aligned}
ede&=\frac{\Gamma}{\mu}\frac{\Gamma\dot r}{\mu}d\dot r-\frac{1}{r}\frac{\Gamma^2}{\mu r}\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}-1\right)dr+\frac{1}{\Gamma}\left(e^2+\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}+1\right)\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}-1\right)\right)d\Gamma,\\
e^2df&=\frac{\Gamma}{\mu}\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}-1\right)d\dot r+\frac{1}{r}\frac{\Gamma^2}{\mu r}\left(\frac{\Gamma\dot r}{\mu}\right)dr-\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}+1\right)\left(\frac{\Gamma\dot r}{\mu}\right)d\Gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{9.35a}$$

$$\frac{df}{dt}=\frac{\Gamma}{r^2}, \tag{9.36a}$$

$$M:=E-e\sin E=\frac{dM}{dt}(t-t^*)=\left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\mu^2}{\Gamma^3}(t-t^*), \tag{9.40a}$$

$$dM=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2}\left(\frac{\Gamma}{\mu}\left(\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}-1\right)-2e^2\frac{\mu r}{\Gamma^2}\right)d\dot r+\frac{\mu}{\Gamma^2}\left(\frac{\Gamma\dot r}{\mu}\right)\left(\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}\right)^2-e^2\right)dr-\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}+1\right)\left(\frac{\Gamma\dot r}{\mu}\right)d\Gamma\right), \tag{9.41a}$$

$$\begin{aligned}
d(f-M)&=\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}-1\right)+2\sqrt{1-e^2}\frac{\mu r}{\Gamma^2}\right)\frac{\Gamma d\dot r}{\mu}\\
&\quad+\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}\right)^2+\sqrt{1-e^2}\right)\left(\frac{\Gamma\dot r}{\mu}\right)\frac{\mu dr}{\Gamma^2}-\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}+1\right)\left(\frac{\Gamma\dot r}{\mu}\right)\frac{d\Gamma}{\Gamma},
\end{aligned} \tag{9.42a}$$

$$\frac{\Gamma^2}{r^2}=\left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\mu^2}{\Gamma^2}+\Gamma\frac{d(f-M)}{dt} \tag{9.43a}$$

für die Bahnellipse und die Bewegung auf der Ellipse. Für die Variablen u, ω und Ω erhält man anstelle (9.37) die Gleichungen

$$\frac{du}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G}=\frac{\Gamma}{r^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G}=\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\frac{df}{dt}, \qquad \frac{d\Omega}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H}=\frac{\Gamma}{r^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial H}=\frac{\partial\Gamma}{\partial H}\frac{df}{dt}, \tag{9.37a}$$

aus denen sich ergeben

$$u = \frac{\partial \Gamma}{\partial G} f + u_0 , \qquad \Omega = \frac{\partial \Gamma}{\partial H} f + \Omega_0 , \tag{9.46}$$

und daher

$$\omega = u - f = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial G} - 1 \right) f + u_0 . \tag{9.47}$$

Damit ist das Bewegungsproblem in einer allgemeinen Form mit den 6 Integrationskonstanten G, H, e, t^*, u_0 und Ω_0 gelöst. Die Lösung beschreibt

- eine sich um die Polachse drehende (durch säkulare Änderung in Ω) Bahnebene mit einer festen Inklination;
- eine sich innerhalb der Bahnebene drehende (durch säkulare Änderung in ω) elliptische Bahn mit fester Exzentrizität und
- eine Umlaufbewegung des Körpers in der elliptischen Bahn (durch f oder M oder E gegeben).

Die säkularen Änderungen in Ω und ω sind als lineare Funktionen der wahren Anomalie in (9.46)-(9.47) gegeben. Das sind durch den zusätzlichen Term $X(G,H)$ verursachte Störeffekte, die verschwinden für die Kepler-Bewegung ($X(G,H) = 0$). Bezüglich der mittleren Anomalie lassen sie sich durch

$$\Omega = \frac{\partial \Gamma}{\partial H} M + \frac{\partial \Gamma}{\partial H} (f - M) + \Omega_0 , \qquad \omega = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial G} - 1 \right) M + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial G} - 1 \right) (f - M) + u_0$$

ausdrücken, wobei $(f - M)$, "***equation of centre***" genannt, eine rein periodische Funktion der Zeit ist. Zur Erfassung der zum säkularen Bewegungsverhalten führenden Komponenten aus dem Erdpotential mittels des Lelgemann-Systems sind die von den Variablen u und Ω unabhängigen zonalen Terme

$$\bar{V} = \frac{\mu}{r} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{(2p)} c_{(2p)0} \, \mathrm{F}_{(2p)0p}(i) = \frac{\Gamma^2}{r^2} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2} \right)^{(2p)} \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} \right)^{(2p-1)} c_{(2p)0} \, \mathrm{F}_{(2p)0p}(i)$$

zu berücksichtigen. Aus der zweiten Gleichung in (9.34a) erhält man $\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} \right)^{\nu} = (1 + e \cos f)^{\nu}$. Eine Reihenentwicklung ergibt

$$\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} \right)^{\nu} = Y_{(\nu)0}(e^2) + 2 \sum_{q=1}^{\nu} Y_{(\nu)q}(e^2) e^q \cos qf \tag{9.48}$$

mit den Koeffizienten

$$Y_{\nu q}(e^2) = \left(\frac{1}{2} \right)^q \sum_{j=0}^{[(\nu-q)/2]} \binom{\nu}{q+2j} \binom{q+2j}{j} \left(\frac{e}{2} \right)^{2j} \qquad (q \geq 0). \tag{9.49}$$

Für eine positive Integerzahl ν entartet die Reihe (9.48) zu einem trigonometrischen Polynom und die Koeffizienten $Y_{\nu q}(e^2)$ in ν-gradige Polynome des Arguments e^2. Eine Abschätzung der Größenordnungen ergibt

$$Y_{\nu 0}(e^2) = 1 + O(e^2) . \tag{9.50}$$

Verwendung der Reihenentwicklung (9.48) ergibt

$$\begin{aligned} \bar{V} = {} & \frac{\Gamma^2}{r^2} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2} \right)^{(2p)} c_{(2p)0} \, \mathrm{F}_{(2p)0p}(i) + \frac{\Gamma^2}{r^2} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2} \right)^{(2p)} c_{(2p)0} \, \mathrm{F}_{(2p)0p}(i) \left(Y_{(2p-1)0}(e^2) - 1 \right) \\ & + 2 \frac{\Gamma^2}{r^2} \sum_{p \geq 2} \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2} \right)^{(2p)} c_{(2p)0} \, \mathrm{F}_{(2p)0p}(i) \sum_{q=1}^{2p-1} Y_{(2p-1)q}(e^2) e^q \cos qf \end{aligned} \tag{9.51}$$

Aus (9.51) ersieht man, dass sich der erste Term durch das Lelgemann-System erfassen lässt, wenn man die Größe Γ durch

$$\Gamma^2 = G^2\left(1-2\sum_{p\geq 2}\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{(2p)} c_{(2p)0}\,\mathrm{F}_{(2p)0p}(i)\right) \tag{9.52}$$

definiert.

9.2.2 Ein weiteres integrables System

In den erweiterten Hillschen Variablen $(r,u,\Omega,\tau;\dot r,G,H,T)$ gilt das kanonische Gleichungssystem (9.85) der Bahnbewegung eines punktartigen Himmelskörpers um einen Zentralkörper mit der Hamilton-Funktion

$$F = -\frac{1}{2}\left(\dot r^2 + \frac{G^2}{r^2}\right) + \frac{\mu}{r} + R\left(\dot r, G, H, T; r, u, \Omega, \tau\right),$$

worin μ / r der Kepler-Term ist und R die Störfunktion. Im Folgenden wird gezeigt, dass *das System*

$$F = -\frac{1}{2}\dot r^2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + \Phi\left(G,H,e^2\right) + \Psi\left(G,H,e^2,\tau\right) - T \tag{9.53}$$

mit

$$\Gamma = \Gamma(G,H), \qquad e^2 = \left(\frac{\Gamma \dot r}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r} - 1\right)^2 \tag{9.54}$$

integrabel ist. Umformulierung ergibt

$$F = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\Gamma}\right)^2\left(e^2-1\right) + \Phi\left(G,H,e^2\right) + \Psi\left(G,H,e^2,\tau\right) - T\,. \tag{9.53a}$$

Damit ist die Hamilton-Funktion als eine Funktion von *G*, *H* und $e^2 = e^2\left(\dot r, r, G, H\right)$ sowie des konjugierten Variablenpaars (T,τ) dargestellt:

$$F = F\left(G,H,e^2\left(\dot r, r; G, H\right), T, \tau\right). \tag{9.53a}$$

Es ist ersichtlich, dass das System (9.53b) die Bedingung (7.8) - (7.9) erfüllt. Damit erhält man nach dem in Abs. 7.1 angeführten Theorem D die Integrale

$$\alpha_1 = G = const., \qquad \alpha_2 = H = const.,$$

$$\alpha_3 = e^2\left(\dot r, r, G, H\right) = const., \tag{9.55}$$

und man erkennt die Integrabilität des Systems. Ein viertes Integral

$$\alpha_4 = \Psi\left(G,H,e^2,\tau\right) - T = const. \tag{9.56}$$

ergibt sich aus der Erhaltung der Hamilton-Funktion.

Die allgemeine Lösung des Systems (9.53) ergibt sich mittels der in Abs. 9.1.6 verwendeten Methode. Als Beispiel wird hier die allgemeine Lösung für den einfachen Fall

$$F = -\frac{1}{2}\dot r^2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + \Phi\left(G,H,e^2\right) \tag{9.57}$$

angegeben.

(A) Die Bahngleichung (Kegelschnitt als Bahnkurve): Da die Integrale (9.55) identisch mit den entsprechenden Integralen für das Lelgemann-System sind, lassen sich die dort definierten Variablen *f*, *E*, *M* und *f* - *M* hier genau so verwenden und es gelten die Formeln (9.35a), (9.41a) und (9.42a).

Die zeitliche Entwicklung der wahren Anomalie lässt sich über die Differentialgleichung $\frac{df}{dt}=\{f,F\}$ ermitteln. Aus der Gleichung (9.53a) anstelle von (9.36a) erhält man aber

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial F}{\partial e^2}\{f,e^2\}=\left(1-2\frac{\Gamma^2}{\mu^2}\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\right)\frac{\Gamma}{r^2}=:\vartheta\frac{\Gamma}{r^2}\,. \tag{9.58}$$

Daraus ergibt sich für $e^2<1$

$$M:=E-e\sin E=\vartheta\frac{\mu^2}{\Gamma^3}\left(1-e^2\right)^{3/2}\left(t-t^*\right), \tag{9.59}$$

und

$$\frac{\Gamma^2}{r^2}=\left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\mu^2}{\Gamma^2}+\Gamma\vartheta^{-1}\frac{d\left(f-M\right)}{dt} \tag{9.60}$$

anstelle von (9.40a) und (9.43a), wobei t^* (Zeit des Apsidendurchgangs) eine weitere Integrationskonstante ist.

(B) Integrale für die Variablen u und Ω. Partielle Ableitung der Hamilton-Funktion ergibt

$$\frac{du}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G}=\vartheta\frac{\Gamma}{r^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G}-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial G}-\frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\right),$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H}=\vartheta\frac{\Gamma}{r^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial H}-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial H}-\frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial H}\right).$$

Integration unter Berücksichtigung der Gleichung (9.58) führt zu

$$u=\frac{\partial\Gamma}{\partial G}f-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial G}-\frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\right)\left(t-t^*\right)+u^*,$$

$$\Omega=\frac{\partial\Gamma}{\partial H}f-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial H}-\frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial H}\right)\left(t-t^*\right)+\Omega^* \tag{9.61}$$

mit den unabhängigen Integrationskonstanten u^* und Ω^*, die sich als das Argument der Breite sowie Länge des Knotens zum Zeitpunkt des Apsidendurchgangs interpretieren lassen. Damit liegen 6 unabhängige Integrale vor, also die allgemeine Lösung des Systems (9.53) mit 6 frei wählbaren Integrationskonstanten, die zur Anpassung an beliebige vorgegebene Anfangsbedingungen oder selbstadjungierte Randbedingungen führen. Zusammengefasst beschreibt die Lösung eine sich im Raum drehende elliptische Bahn mit fester Inklination. Die Inklination lässt sich durch die beiden Erhaltungsgrößen G und H bestimmen. Die Drehung der Bahnebene ist durch die zeitliche Entwicklung angegeben. Das Argument der Breite des Apsidenlinie,

$$\omega:=u-f=\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial G}-1\right)f-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial G}-\frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\right)\left(t-t^*\right)+u^*, \tag{9.62}$$

gibt die Drehung der Bahnellipse innerhalb der Bahnebene an. Es ist ersichtlich, dass beide Drehungen je eine der wahren Anomalie proportionale Komponente, eine der Zeit (der Mittlerer Anomalie) proportionale Komponente sowie eine mit der zeitlichen Änderung des Potentials verbundene Komponente enthalten.

Anm.: Vergleich des Systems (9.57) mit dem Lelgemann-System (9.44) zeigt:

(1) Beide Systeme führen zu einer elliptische Bahn mit konstanter Inklination und konstanter Exzentrizität. Dabei ist der Parameter der Ellipse durch $p=\Gamma^2/\mu$ anstelle von $p=G^2/\mu$ bei der Kepler-Bewegung bestimmt. Folglich behalten alle für die Kepler-Bewegung geltenden Beziehungen zwischen den elliptischen Größen e, f und M einerseits und den Bewegungsgrößen $\dot r$, r, und G andererseits ihre Gültigkeit, wenn die Variable G durch Γ ersetzt wird.

(2) Für die zeitliche Entwicklungen der wahren und mittleren Anomalie bei dem System (9.44) erhält man $\frac{df}{dt}=\frac{\Gamma}{r^2}$ und $\frac{dM}{dt}=\frac{\mu^2}{\Gamma^3}\left(1-e^2\right)^{3/2}$; das ergibt sich, wenn man die Größe G in den entsprechen Formeln für die

Kepler-Bewegung durch Γ ersetzt. Für das System (9.57) ist ein Zeitskalar $\vartheta = 1 - 2\frac{\Gamma^2}{\mu^2}\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}$ einzuführen:
$\frac{df}{dt} = \vartheta\frac{\Gamma}{r^2}$, $\frac{dM}{dt} = \vartheta\frac{\mu^2}{\Gamma^3}\left(1-e^2\right)^{3/2}$.

(3) Für das System (9.44) ändern sich die Winkelvariablen u und Ω proportional zu der wahren Anomalie nach (9.46). Hingegen enthalten die Änderung von u und Ω beim System (9.57) sowohl eine der wahren Anomalie proportionale Komponente als auch eine der Zeit oder der mittleren Anomalie proportionale Komponente. Aus (9.61) erhält man

$$u = \frac{\partial\Gamma}{\partial G} f - \vartheta^{-1}\left(1-e^2\right)^{-3/2}\frac{\Gamma^2}{\mu^2}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial G} - 2\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\right)M + u^*,$$

$$\Omega = \frac{\partial\Gamma}{\partial H} f - \vartheta^{-1}\left(1-e^2\right)^{-3/2}\frac{\Gamma^2}{\mu^2}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial H} - 2\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial H}\right)M + \Omega^*. \tag{9.61a}$$

Das integrable System (9.57) lässt sich für die Bewegung künstlicher Satelliten im Erdgravitationsfeld verwenden. Mit diesem System als intermediäres System lässt sich der erste Term in (9.51) über die durch (9.52) definierte Größe Γ erfassen. Darüber hinaus, mit Hilfe von (9.60), wandelt sich der zweite Term in (9.51) zu

$$\frac{\Gamma^2}{r^2}\sum_{p\geq 2}\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{(2p)} c_{(2p)0}\,\mathrm{F}_{(2p)0p}(i)\left(Y_{(2p-1)0}\left(e^2\right)-1\right)$$

$$= \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\sum_{p\geq 2}\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{(2p)} c_{(2p)0}\,\mathrm{F}_{(2p)0p}(i)\left(Y_{(2p-1)0}\left(e^2\right)-1\right)\left(1-e^2\right)^{3/2}$$

$$+\Gamma\vartheta^{-1}\sum_{p\geq 2}\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{(2p)} c_{(2p)0}\,\mathrm{F}_{(2p)0p}(i)\left(Y_{(2p-1)0}\left(e^2\right)-1\right)\frac{d(f-M)}{dt}.$$

Der erste Term auf der rechten Seite lässt sich über die Definition

$$\Phi\left(G,H,e^2\right) = \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\sum_{p\geq 2}\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{(2p)} c_{(2p)0}\,\mathrm{F}_{(2p)0p}(i)\left(Y_{(2p-1)0}\left(e^2\right)-1\right)\left(1-e^2\right)^{3/2}$$

durch das System (9.57) erfassen. Da alle die verbleibenden Terme periodisch sind, sind sämtliche zu säkularem Bewegungsverhalten führende Komponenten des Erdpotentials mittels des integrablen Systems erfasst. Das System mit der Hamilton-Funktion (9.53) ist die bislang gefundene allgemeinste integrable Form in den Hill-Variablen. Daraus erhält man die Gleichungen

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial F}{\partial e^2}\left\{f,e^2\right\} = \left(1 - 2\frac{\Gamma^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}+\frac{\partial\Psi}{\partial e^2}\right)\right)\frac{\Gamma}{r^2},$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G} = \vartheta\frac{\Gamma}{r^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial G} - \frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial G} - \frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Psi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\right),$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H} = \vartheta\frac{\Gamma}{r^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial H} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial H} - \frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial H}\right) - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial H} - \frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Psi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial H}\right)$$

für die Winkelvariablen f, u und Ω. Da die partiellen Ableitungen von Ψ von der Zeit abhängen, lässt sich die Zeitabhängigkeit der mittleren Anomalie nicht direkt durch (9.59) ausdrücken. Eine weitere Untersuchung dazu ist notwendig. Das integrable System (9.53) lässt sich für die Bahnbewegung der Planeten und des Mondes verwenden. Wenn die Störeffekte der anderen Himmelskörper berücksichtigt werden sollen, muss dieses System auch für die Satellitenbewegung verwendet werden.

9.3 Die Kanonischen Kugelvariablen

Die Hill-Variablen sind für geneigte Bahnen definiert, aber bei verschwindender Bahnneigung tritt eine Singularität auf; sie sind daher für Bahnen mit kleiner Inklination (äquatornahe Erdsatelliten und Planeten nahe der ekliptikalen Ebene) zur Beschreibung der Bahnbewegung nicht geeignet. In diesem Fall lässt sich die Bewegung mittels der kanonischen Kugelvariablen $(r,\theta,\lambda;\dot{r},J,H)$ beschreiben.

9.3.1 Definition und Bewegungsgleichungen

Die **Kugelkoordinaten** sind definiert durch (siehe Abb. 9.2)

r – Radiusvektor,

θ — Polabstand,

λ – ekliptikale Länge bezüglich des Frühlingspunktes.

Damit sind die Einheitsvektoren, in deren Richtungen die drei Koordinaten anwachsen, festgelegt:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\lambda \\ \sin\theta\sin\lambda \\ \cos\theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\lambda \\ \cos\theta\sin\lambda \\ -\sin\theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich die Differentiale

$$d\mathbf{s}_1 = d\theta\mathbf{s}_2 + \sin\theta d\lambda\mathbf{s}_3, \qquad d\mathbf{s}_2 = -d\theta\mathbf{s}_1 + \cos\theta d\lambda\mathbf{s}_3, \qquad d\mathbf{s}_3 = -\sin\theta d\lambda\mathbf{s}_1 - \cos\theta d\lambda\mathbf{s}_2. \tag{9.63}$$

Die entsprechenden **generalisierten Impulse** lauten dann folgendermaßen:

$\dot{r}$ – radiale Geschwindigkeit,

J – Komponente der Drehimpulses in der Richtung $\mathbf{s}_3$: $J = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{s}_3$,

H – Komponente der Drehimpulses in der Richtung $\mathbf{b}_3$ (Polrichtung): $H = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{b}_3$.

$(\dot{r},J,H)$ sind die zu den Koordinaten konjugierten Impulse. τ und T sind eine zusätzlich eingeführte Koordinate bzw. ein Impuls.

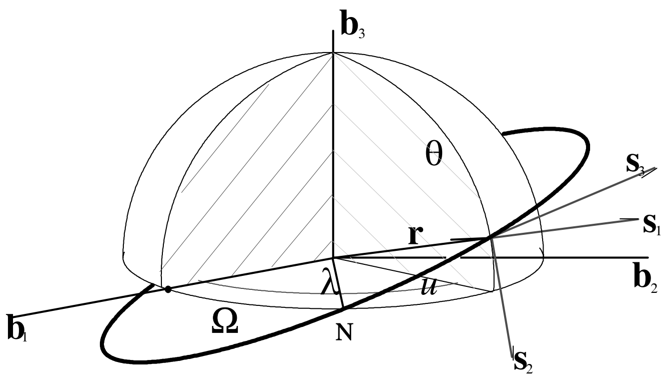

Abb. 9.2 Definition kanonischer Kugelkoordinaten

Aus der Definition ist ersichtlich, dass sich der Ortsvektor mittels der Koordinaten (r,θ,λ) durch

$$\mathbf{r} = r\mathbf{s}_1 = r(\sin\theta\cos\lambda,\ \sin\theta\sin\lambda,\ \cos\theta)\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = (x,y,z)\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \tag{9.64}$$

ausdrücken lässt, wobei für sein Differential gilt

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{s}_1 + rd\theta\mathbf{s}_2 + r\sin\theta d\lambda\mathbf{s}_3 \,. \tag{9.65}$$

Die generalisierten Impulse lassen sich durch die Koordinaten und ihre zeitlichen Ableitungen beschreiben:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \qquad J = r^2\frac{d\theta}{dt}, \qquad H = r^2\sin^2\theta\frac{d\lambda}{dt} \tag{9.66}$$

Aus (9.65) und (9.66) erhält man die Geschwindigkeitskomponenten als Funktionen der Koordinaten und der generalisierten Impulse:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{s}_1 + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{s}_2 + r\sin\theta\frac{d\lambda}{dt}\mathbf{s}_3 = \dot{r}\mathbf{s}_1 + \frac{J}{r}\mathbf{s}_2 + \frac{H}{r\sin\theta}\mathbf{s}_3 \,.$$

Damit aber erhält man für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{1}{r^2}\left(J^2 + \frac{H^2}{\sin^2\theta}\right)\right).$$

Die Gleichungen (9.66) können somit in der Form geschrieben werden

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial T}{\partial\dot{r}}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial T}{\partial J}, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial T}{\partial H} \tag{9.66a}$$

Ein weitere Ableitung ergibt die Beschleunigungskomponenten als Funktionen der Koordinaten, der Impulse und ihrer zeitlichen Ableitungen:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d\dot{r}}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r}\right)\mathbf{s}_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{dJ}{dt} + \frac{\partial T}{\partial\theta}\right)\mathbf{s}_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{dH}{dt} + \frac{\partial T}{\partial\lambda}\right). \tag{9.67}$$

Eingesetzt in die Newtonsche Bewegungsgleichung erhält man

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial r} + f_1, \qquad \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial\theta} + rf_2, \qquad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial\lambda} + r\sin\theta f_3 \tag{9.67a}$$

mit den Kraftkomponenten (f_1, f_2, f_3) bezüglich der Einheitsvektoren $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$.

Für den Fall, dass sich die Kraft aus einer von Ort und Zeit abhängigen skalarwertigen Funktion $V = V(r,\theta,\lambda;t)$ ableiten lässt, $\mathbf{f} = GradV$, lassen sich die Kraftkomponenten durch

$$f_1 = \frac{\partial V}{\partial r}, \qquad rf_2 = \frac{\partial V}{\partial\theta}, \qquad r\sin\theta f_3 = \frac{\partial V}{\partial\lambda}$$

ausdrücken. Damit nehmen die Gleichungen (9.67a) die Gestalt an

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r}, \qquad \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial\theta}, \qquad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial\lambda} + \frac{\partial V}{\partial\lambda}.$$

Die letzteren, zusammen mit (9.66a), bilden ein System von Differentialgleichungen für die Variablen $(r,\theta,\lambda;\dot{r},J,H)$, das kanonische Form annimmt,

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{d\dot{r}}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial r}, & \dfrac{dJ}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial\theta}, & \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}, & \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial\tau}; \\ \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial\dot{r}}, & \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial J}, & \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial H}, & \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial T} \end{array}\right\} \tag{9.68}$$

mit der Hamilton-Funktion

$$F = -\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{1}{r^2}\left(J^2 + \frac{H^2}{\sin^2\theta}\right)\right) + V(r,\theta,\lambda,\tau) - T \,. \tag{9.69}$$

Damit ist gleichzeitig bewiesen, dass die Variablen $(r,\theta,\lambda;\dot{r},J,H)$ kanonisch sind.

9.3.2 Beziehungen zwischen den kanonischen Kugelvariablen und den Hill-Variablen

Aus der Gleichung (9.64) und (9.10) erhält man

$$\begin{aligned}&\sin\theta\cos\lambda = \cos u\cos\Omega - \cos i\sin u\sin\Omega\,,\\&\sin\theta\sin\lambda = \cos u\sin\Omega + \cos i\sin u\cos\Omega\,,\\&\cos\theta = \sin i\sin u\,.\end{aligned}\tag{9.70}$$

Das sind drei unabhängige Beziehungen zwischen den Hill- und den Kugelvariablen; zusammen mit der Identität der Variablen $\dot{r}$, H und r, die in beiden Variablensätze als unabhängige Variable zu betrachten sind, bilden sie eine eindeutige Transformation zwischen den beiden Sätzen. Ergänzend seien noch einige in den Anwendungen hilfreiche Formeln angegeben.

Der Vergleich von (9.69) und (9.28) ergibt

$$G^2 = J^2 + H^2/\sin^2\theta\,.\tag{9.71}$$

Aus letzterer und der dritten Gleichung von (9.70) erhält man

$$\begin{aligned}&(J/G)\sin\theta = -\sin i\cos u\,, && \cos^2\theta = \frac{1}{2}\sin^2 i\left(1-\cos 2u\right)\\&(J/G)^2\sin^2\theta - \cos^2\theta = \sin^2 i\cos 2u\,, && (J/G)^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}\sin^2 i\left(1+\cos 2u\right),\\&(J/G)^2\sin^2\theta + \cos^2\theta = \sin^2 i\,, && (J/G)\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}\sin^2 i\sin 2u\,.\end{aligned}$$

Die ersten zwei Gleichungen in (9.70) lassen sich umschreiben zu

$$\begin{aligned}&\sin\theta\cos(\lambda-\Omega) = \cos u\,, \qquad \sin\theta\sin(\lambda-\Omega) = \cos i\sin u\,,\\&\cos i\tan u = \tan(\lambda-\Omega)\,.\end{aligned}\tag{9.72}$$

Man erhält damit die Differentiale

$$\begin{aligned}&dG = \frac{J}{G}dJ + \frac{\cos i}{\sin^2\theta}dH - \frac{\cos^2 i\cos\theta}{\sin^2\theta}G\,d\theta\,,\\&di = \cos i\left(\cos i\cos u\,d\left(J/H\right) - \sin\theta\sin u\,d\theta\right)\sin^{-2}\theta\,,\\&du = -\frac{1}{\sin i}\left(\cos i\left(1-\sin^2 i\right)\sin u\,d\left(J/H\right) + \sin\theta\cos u\,d\theta\right)\sin^{-2}\theta\,,\\&d\Omega = d\lambda + \left(\cos^2 i\sin u\,d\left(J/H\right) + \cos i\cos u\sin\theta\,d\theta\right)\sin^{-2}\theta\,.\end{aligned}\tag{9.73}$$

Mit Hilfe von (9.70) und (9.72) lassen sich die Kugelflächenfunktionen $P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda$, $P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda$ durch die Hill-Variablen ausdrücken (siehe *Cui, 1997*):

$$P_{nm}(\cos\theta)\cos m(\lambda-\Theta) = \begin{cases}\sum\limits_{p=0}^{n} F_{nmp}(i)\cos\left((n-2p)u + m(\Omega-\Theta)\right) & \text{für } n-m = \text{gerade}\\ \sum\limits_{p=0}^{n} F_{nmp}(i)\sin\left((n-2p)u + m(\Omega-\Theta)\right) & \text{für } n-m = \text{ungerade}\end{cases},$$

$$P_{nm}(\cos\theta)\sin m(\lambda-\Theta) = \begin{cases}\sum\limits_{p=0}^{n} F_{nmp}(i)\sin\left((n-2p)u + m(\Omega-\Theta)\right) & \text{für } n-m = \text{gerade}\\ -\sum\limits_{p=0}^{n} F_{nmp}(i)\cos\left((n-2p)u + m(\Omega-\Theta)\right) & \text{für } n-m = \text{ungerade}\end{cases}\tag{9.74}$$

und

$$\begin{aligned}&P_{nm}(\cos\theta)P_{nm}(\cos\theta_\alpha)\cos m(\lambda-\lambda_\alpha)\\&= \begin{cases}\sum\limits_{q=0}^{n}\sum\limits_{p=0}^{n} F_{nmp}(i)F_{nmq}(i_\alpha)\cos\left((n-2p)u - (n-2q)u_\alpha + m(\Omega-\Omega_\alpha)\right) & \text{für } n-m = \text{gerade}\\ -\sum\limits_{q=0}^{n}\sum\limits_{p=0}^{n} F_{nmp}(i)F_{nmq}(i_\alpha)\cos\left((n-2p)u + (n-2q)u_\alpha + m(\Omega+\Omega_\alpha)\right) & \text{für } n-m = \text{ungerade}\end{cases},\end{aligned}\tag{9.75}$$

worin $F_{nmp}(i)$ die Kaulaschen Inklinationsfunktionen bezeichnen. Für Bahnen mit kleiner Inklination erhält man weiter

$$\sin\theta = 1 - \frac{1}{4}\sin^2 i\left(1-\cos 2u\right) + O\left(\sin^4 i\right), \qquad \sin\theta\cos\theta = \sin i \sin u + O\left(\sin^3 i\right),$$

$$\sin^m\theta\begin{Bmatrix}\cos m(\lambda-\Theta)\\ \sin m(\lambda-\Theta)\end{Bmatrix} = \left(1-ms^2\right)\begin{Bmatrix}\cos\left(mu+m(\Omega-\Theta)\right)\\ \sin\left(mu+m(\Omega-\Theta)\right)\end{Bmatrix} + ms^2\begin{Bmatrix}\cos\left((m-2)u+m(\Omega-\Theta)\right)\\ \sin\left((m-2)u+m(\Omega-\Theta)\right)\end{Bmatrix} + O\left(s^4\right), \tag{9.76}$$

mit $s^2 := \sin^2\frac{i}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos i)$.

Die kanonischen Kugelvariablen sind insbesondere für die Bahnbewegung mit sehr kleiner Inklination $\sin i \ll 1$ oder $\sin i = 0$ zu verwenden. Für diesen Fall sind die Hill- und Kepler-Variablen nicht geeignet; denn die Variablen u, ω und Ω sind für $\sin i = 0$ nicht definierbar. In diesen Bereich gehören sowohl die Bewegung der Planeten im Sonnensystem, insbesondere die Bahnbewegung des Erde-Mond-Systems, als auch die Bewegung der äquatornahen Satelliten.

9.3.3 Ein integrables System in kanonischen Kugelvariablen

So ähnlich wie beim System (9.53) kann mittels des Integrabilitätstheorems **D** aus dem Abs. 7 gezeigt werden, dass ein System mit der Hamilton-Funktion der Form

$$F = -\frac{1}{2}\dot r^2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + \Phi\left(G(J,\theta,H),H,e^2\right) + \Psi\left(G(J,\theta,H),H,\tau\right) - T \tag{9.77}$$

integrabel und worin $G = G(J,\theta,H)$ der absolute Wert des gesamten Drehimpulses ist; er ist eine bekannte Funktion der Variablen (J,θ,H). Die Exzentrizität e ist definiert durch $e^2 = \left(\frac{\Gamma\dot r}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}-1\right)^2$, die Größe $\Gamma = \Gamma(G,H)$ ist eine beliebige Funktion ihrer Argumente.

9.4 Die Kepler-Variablen für eine gestörte elliptische Bewegung

9.4.1 Kinematische Eigenschaft der Kepler-Variablen und die Gaußschen Gleichungen der Planetenbewegung

In der Himmelsmechanik wird die Lösung des Kepler-Problems traditionell mittels der Kepler-Elemente $(i,\Omega;a,e;\omega,M)$ dargestellt; diese lassen sich wie folgt durch die Hillschen Variablen $(r,u,\Omega,\dot r,G,H)$ ausdrücken:

1. Die Variable Ω ist in beiden Variablensätzen identisch.

2. i ist nach der zweiten der Gleichungen (9.2) eine Funktion der Variablen G und H; eine Transformationsgleichung für die Differentiale ist durch (9.21) gegeben.

3. Für $\omega = u - f$ besteht die Differentialbeziehung

$$d\omega = du - df = -\frac{1}{e^2}\frac{G}{\mu}\left(\frac{G^2}{\mu r}-1\right)d\dot r + \frac{1}{e^2}\frac{1}{G}\left(\frac{G^2}{\mu r}+1\right)\left(\frac{G\dot r}{\mu}\right)dG - \frac{1}{e^2}\frac{1}{r}\frac{G^2}{\mu r}\left(\frac{G\dot r}{\mu}\right)dr + du, \tag{9.78}$$

wobei die zweite der Gleichungen (9.34) genutzt wurde.

4. Die große Halbachse a ist definiert durch die Bahngleichung $r = \frac{\left(1-e^2\right)a}{1+e\cos f}$; diese ergibt, zusammen mit der zweiten der Gleichungen (9.33), den Ausdruck $a = \frac{G^2/\mu}{1-e^2}$, der zu der Differentialbeziehung

$$da = \frac{2a}{1-e^2}\left(\frac{G}{\mu}\frac{G\dot r}{\mu}d\dot r - \frac{1}{r}\frac{G^2}{\mu r}\left(\frac{G^2}{\mu r}-1\right)dr + \frac{1}{G}\left(\frac{G^2}{\mu r}\right)^2 dG\right) \tag{9.79}$$

führt, wobei die erste der Gleichungen (9.34) genutzt wurde.

5. Die mittlere Anomalie M hängt von den Variablen $(\dot{r},r,G)$ ab; entsprechend besteht die Beziehung (9.40).Letztere zusammen mit (9.79) und der ersten der Gleichungen (9.34) liefert eine eindeutige Transformation zwischen (a,e,M) und $(\dot{r},r,G)$. Zusammen mit (9.21) und (9.78) ist demnach eine Transformation zwischen den Hill- und Kepler-Variablen gegeben.

Die Umkehrung dieser Transformation ergibt

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu}{G^2}dr = \frac{\mu r}{G^2}\frac{da}{a} - \left(\frac{G^2}{\mu r}-1\right)\frac{de}{e\left(1-e^2\right)} + \frac{1}{\left(1-e^2\right)^{3/2}}\frac{G\dot{r}}{\mu}dM\,,\\
&du = d\omega + \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\,dM + \frac{1}{\left(1-e^2\right)e}\left(\frac{G^2}{\mu r}+1\right)\left(\frac{G\dot{r}}{\mu}\right)de\,,\\
&d\Omega = d\Omega\,,\\
&\frac{G}{\mu}d\dot{r} = -\frac{1}{2}\frac{G\dot{r}}{\mu}\frac{da}{a} + \left(\frac{G^2}{\mu r}\right)^2\frac{G\dot{r}}{\mu}\frac{de}{e\left(1-e^2\right)} + \frac{1}{\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left(\frac{G^2}{\mu r}\right)^2\left(\frac{G^2}{\mu r}-1\right)dM\,,\\
&\frac{dG}{G} = \frac{da}{2a} - \frac{ede}{1-e^2}\,,\\
&\frac{dH}{G} = \frac{1}{2}\cos i\frac{da}{a} - \cos i\frac{ede}{1-e^2} - \sin i\,di\,.
\end{aligned}
\tag{9.80}
$$

Mit dieser Transformation nehmen die kinematischen Identitäten (9.14) und die Darstellung (9.17) der Beschleunigung die Gestalt an

$$
\begin{aligned}
&\frac{r}{a}\frac{da}{dt} - a\cos f\frac{de}{dt} + \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}e\sin f\left(\frac{dM}{dt}-\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right) = 0\,,\\
&\frac{1}{1-e^2}\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin f\frac{de}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \cos i\frac{d\Omega}{dt} + \sqrt{1-e^2}\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{dM}{dt}-\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right) = 0\,,\\
&\sin u\frac{di}{dt} - \cos u\sin i\frac{d\Omega}{dt} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{9.81}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} = &\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}e\sin f\frac{da}{dt} + \sqrt{1-e^2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{a^2}{r^2}\sin f\frac{de}{dt} + \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{a^2}{r^2}e\cos f\left(\frac{dM}{dt}-\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right)\right)\mathbf{s}\\
&+\frac{1}{2a}\sqrt{1-e^2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{a}{r}\left(\frac{da}{dt}-\frac{2ea}{1-e^2}\frac{de}{dt}\right)\mathbf{t} + \frac{\sqrt{\left(1-e^2\right)\mu a}}{r}\left(\cos u\frac{di}{dt}+\sin u\sin i\frac{d\Omega}{dt}\right)\mathbf{n}\,.
\end{aligned}
\tag{9.82}
$$

Damit folgt nun aus der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$
\left.
\begin{aligned}
-\frac{1}{2a}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\frac{\mu}{a}}e\sin f\frac{da}{dt} + \sqrt{1-e^2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{a^2}{r^2}\sin f\frac{de}{dt} + \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{\left(1-e^2\right)a^3}{r^3}\left(\frac{dM}{dt}-\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right) - \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{a^2}{r^2}\frac{dM}{dt} &= f_1,\\
\frac{\sqrt{1-e^2}}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{a}{r}\left(\frac{da}{dt}-\frac{2ea}{1-e^2}\frac{de}{dt}\right) &= f_2,\\
\frac{\sqrt{\left(1-e^2\right)\mu a}}{r}\left(\cos u\frac{di}{dt}+\sin u\sin i\frac{d\Omega}{dt}\right) &= f_3
\end{aligned}
\right\}\,,
\tag{9.83}
$$

worin wiederum (f_1,f_2,f_3) die Komponenten der auf die Einheitsmasse wirkenden Kraft bezüglich des Gaußschen Koordinatensystems bezeichnen. Die über die Kepler-Kraft hinausgehende Störkraft (S,T,W) ist definiert durch

$$
\mathbf{f} = f_1\mathbf{s} + f_2\mathbf{t} + f_3\mathbf{n} = \left(-\frac{\mu}{r^2}+S\right)\mathbf{s} + T\mathbf{t} + W\mathbf{n}\,,
\tag{9.84}
$$

wobei $-\frac{\mu}{r^2}$ der Betrag der Kepler-Kraft ist. Subtrahiert man diese Kraft, so nehmen die obigen Gleichungen die Gestalt von Störungsgleichungen an:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2a}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\frac{\mu}{a}}e\sin f\frac{da}{dt}+\sqrt{1-e^2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{a^2}{r^2}\sin f\frac{de}{dt}+\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{a^2}{r^2}e\cos f\left(\frac{dM}{dt}-\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\right)=S\,,\\
&\frac{\sqrt{1-e^2}}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{a}{r}\left(\frac{da}{dt}-\frac{2ea}{1-e^2}\frac{de}{dt}\right)=T\,,\\
&\frac{\sqrt{\left(1-e^2\right)\mu a}}{r}\left(\cos u\frac{di}{dt}+\sin u\sin i\frac{d\Omega}{dt}\right)=W\,.
\end{aligned}
\tag{9.85}
$$

Zusammen mit den Gleichungen (9.81) bilden diese Gleichungen ein vollständiges System von Differentialgleichungen für die Kepler-Variablen zur Beschreibung der gestörten Kepler-Bewegung. Eine geeignete lineare Kombination dieser Gleichungen führt zu den bekannten **Gaußschen Gleichungen der Planetenbewegung**:

$$
\begin{aligned}
&\frac{di}{dt}=\frac{r}{\sqrt{\left(1-e^2\right)\mu a}}\cos uW\,,\\
&\sin i\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r}{\sqrt{\left(1-e^2\right)\mu a}}\sin uW\,,\\
&\frac{da}{dt}=\frac{2a}{\sqrt{1-e^2}}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(e\sin fS+\frac{p}{r}T\right),\\
&\frac{de}{dt}=\sqrt{1-e^2}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(\sin fS+\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)T\right),\\
&\frac{d\omega}{dt}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(\cos fS-\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin fT\right)-\cos i\frac{d\Omega}{dt}\,,\\
&\frac{dM}{dt}-\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}=\frac{1-e^2}{e}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(\left(\cos f-\frac{2er}{p}\right)S-\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin fT\right).
\end{aligned}
\tag{9.86}
$$

Sie werden üblicherweise *(Schneider II 1993)* nach der Methode "**Variation der Konstanten**" hergeleitet. Hier wurden sie in zwei Schritten, nämlich durch eine kinematische Überlegung einerseits und eine direkte Anwendung des zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes andererseits hergeleitet, ebenso wie bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen in den Hill-Variablen sowie in den Kugelvariablen.

9.4.2 Die inverse dynamische Aufgabe in Kepler-Variablen und die Erfassung der zu säkularen Störungen in den Winkelvariablen Ω, ω und M führenden Kraft

Bewegungsgleichungen lassen sich im allgemeinen zur Lösung zweier unterschiedlicher Aufgaben verwenden, nämlich

(A) Bestimmung der Bewegung bei gegebener Kraft – direkte dynamische Aufgabe;

(B) Bestimmung der Kraft, die zur gegebenen Bewegung führt – inverse dynamische Aufgabe.

Die Lösung der ersten Aufgabe erfolgt durch Integrieren der Differentialgleichungen, z.B. der Gleichungen (9.86). Für die inverse Aufgabe des Gleichungssystems (9.86) ist die Bewegung durch die 6 Kepler-Variablen mit den 3 kinematischen Eigenschaften (9.81) als Zwangsbedingungen vorzugeben. Sobald diese Funktionen vorgegeben sind, lassen sich die Kraftkomponenten (S, T, W) über die Gleichungen (9.85) berechnen.

In der Bahntheorie stellt sich die sowohl theoretisch als auch praktisch bedeutsame Frage: unter welcher Kraft ist eine stabile Bahnbewegung möglich? Es ist bekannt, dass eine säkulare Störung in i, a oder e, nicht aber in M, Ω und ω, die Stabilität der Bahnbewegung beeinträchtigt. Damit wird aus der Fragestellung (B), d.h. der Bestimmung der Kraft (S, T, W), die Frage, welche Kräfte zu säkularen Störungen in Ω, ω und M und zu nur rein periodischen Störungen in i, a und e führen.

Gegeben seien also die säkularen Störungen $(d\Omega/dt)_s$, $(d\omega/dt)_s$ und $(dM/dt)_s$ in Ω, ω und M. Welche Kraftkomponenten (S, T, W) führen dazu.

Das ist freilich keine inverse Aufgabe im oben genannten Sinn. Erstens sind die periodischen Störungen nicht vorgegeben; zweitens ist noch nicht gesichert, ob die gegebenen säkularen Störungen $(d\Omega/dt)_s$, $(d\omega/dt)_s$ und $(dM/dt)_s$ die kinematischen Bedingungen (9.81) erfüllen. Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Problems ist daher nicht gesichert. Um eine Lösung zu finden, muss man die Gaußschen Gleichungen (9.86) im einzelnen betrachten.

(A) Aus den Gleichungen für i und Ω in (9.86) erkennt man, dass zur Sicherstellung der Periodizität der Störung in i und der Existenz einer säkularen Komponente der Störung in Ω die Kraftkomponente W einen Faktor $\sin u$ besitzen muss und keinen Faktor $\cos u$ besitzen darf. Gesetzt wird $W = \sin u\zeta$, wobei ζ eine Funktion von r und von den nicht säkular gestörten Variablen i und e sowie von der einen nichtverschwindenden Mittelwert besitzenden Funktion a ist. Sie kann nämlich eine überwiegende Konstante mit zusätzlichen kleinen periodischen Termen sein. Damit erhält man

$$\sin i\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\sin u\sin u\zeta = \frac{1}{2}\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\zeta - \frac{1}{2}\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\zeta\cos 2u \tag{9.87}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\cos u\sin u\zeta = \frac{1}{2}\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\sin 2u\zeta\,.$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (9.87) erfasst die säkulare Störung in Ω:

$$\sin i\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s = \frac{1}{2}\frac{r}{\sqrt{(1-e^2)\mu a}}\zeta$$

Daraus folgt

$$\zeta = 2\frac{\sqrt{(1-e^2)\mu a}}{r}\sin i\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s\,. \tag{9.88}$$

Damit ist

$$W = 2\frac{\sqrt{(1-e^2)\mu a}}{r}\sin i\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s\sin u \tag{9.89}$$

bestimmt, was zu einer säkularen Störung $(d\Omega/dt)_s$ in Ω sowie auch zu rein periodischen Störungen in Ω und in i führt. Dabei ist zu bemerken, dass die "säkulare" Störung $(d\Omega/dt)_s$ keine Konstante sein muss; sie muss aber einen nichtverschwindenden Mittelwert besitzen. Sie ist auch von der gleichen Form wie ζ, aufgebaut aus einer überwiegenden Konstanten und kleinen periodischen Termen.

(B) Aus den Gleichungen für e und a ist ersichtlich, dass sich die Periodizität der Störungen in e und a durch die folgenden Forderungen an die Kraftkomponenten S und T sichern lässt:

- S besitzt keinen Faktor $\sin f$;
- T muss rein periodisch sein und besitzt keinen Faktor $\cos f$.

Angenommen werde weiter: $S = S(r,\,a,\,e,\,i)$, $T = T(u)$.

Der Gleichung für ω entnimmt man ferner, dass S einen Faktor $\cos f$ besitzen muss, um einen säkularen Anteil an den Störungen in ω zu sichern. Dazu werde $S = \left(\frac{p}{r}-1\right)\xi$ angenommen, wobei ξ eine einen nichtverschwindenden Mittelwert besitzende Funktion von r und den nicht säkular gestörten Variablen i, e und a ist. Eingeführt in die Gleichung für ω ergibt sich zusammen mit (9.87)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\xi - \frac{1}{2}\frac{\cos i}{\sin i}\frac{r}{\sqrt{(1-e^2)\mu a}}\zeta$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\cos 2f\xi + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin fT(u) + \frac{1}{2}\frac{\cos i}{\sin i}\frac{r}{\sqrt{(1-e^2)\mu a}}\zeta\cos 2u\,,$$

Da die letzten drei Terme rein periodisch sind, erhält man

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s = -\frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\sqrt{\frac{a}{\mu}}\xi - \frac{1}{2}\frac{\cos i}{\sin i}\frac{r}{\sqrt{(1-e^2)\mu a}}\zeta\,,$$

oder mit (9.88)

$$\xi = -2\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s + \cos i\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s\right),$$

und daher

$$S = -2\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s + \cos i\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s\right)\left(\frac{p}{r}-1\right). \tag{9.90}$$

Damit sind die Komponenten *S* und *W* der zu säkularen Störungen in ω und Ω, aber nicht in *a*, *e* und *i* führenden Kraft bestimmt. Die Komponente *T* trägt zu den säkularen Störungen in ω nichts bei, solange rein periodische Störungen in *a*, *e* und *i* wie vorab gefordert werden.

(C) Aus der Gleichung für *M* erkennt man, dass die Annahme $T = T(u)$ zur Bestimmung der säkularen Störung in *M* auch nichts beiträgt; sie wird daher ausgeschlossen: $T = 0$. Zusammengefasst lässt sich also die gesuchte Kraft in der Gestalt

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = 2\sqrt{\frac{\mu}{p}}\begin{pmatrix} -\left(\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s + \cos i\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s\right)\left(\frac{p}{r}-1\right) \\ 0 \\ \frac{p}{r}\sin i\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s \sin u \end{pmatrix} \tag{9.91}$$

angeben.

Schließlich ist die Störung in *M* allein durch die Komponente *S* zu bestimmen:

$$\frac{dM}{dt} - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = -2\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\cos f - \frac{2er}{p}\right)\left(\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s + \cos i\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s\right)\left(\frac{p}{r}-1\right).$$

Sie zeigt die Abhängigkeit der säkularen Störung in *M* von denen in Ω und ω. Sobald $(d\Omega/dt)_s$ und $(d\omega/dt)_s$ festgelegt sind, lässt sich $(dM/dt)_s$ nicht mehr frei wählen. Der Einfachheit halber werde gesetzt:

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\tau, \qquad \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\eta, \qquad \tau,\ \eta \text{ – Konstante.}$$

Damit erhält man

$$\frac{dM}{dt} - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{4-5e^2}{1-e^2}(\eta + \tau\cos i) + \left(\frac{dM}{dt}\right)_p \tag{9.92}$$

mit den periodische Termen

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_p = -2\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{1}{1-e^2}(\eta + \tau\cos i)\left(-2e\cos f + 2e^3\cos^3 f + \frac{1}{2}(1-e^2)\cos 2f + \frac{1}{8}e^2\cos 4f\right).$$

9.4.3 Die Kyner-Bennett-Kraft

Die Kyner-Bennett-Kraft scheint der erste Versuch einer Lösung der im letzten Abschnitt gestellten Aufgabe zu sein. Kyner und Bennett haben im Zusammenhang mit der Ausarbeitung einer Modifikation der Encke-Methode zur speziellen Störungsrechnung eine Kraft angegeben, die zwar zu säkularen Störungen in Ω, *ω* und *M*, nicht aber in *i*, *e* und *a* führt:

$$\mathbf{k}_{KB} = \frac{\mu}{r^3}\frac{p}{r}\left\{\tau^2\left(1-\gamma^2\right)\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial\Omega^2} + 2\tau(1-\gamma)^2(1+\eta)\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial\Omega\partial u} - (1-\gamma)^2\left(2\eta-\eta^2\right)\mathbf{R}\right\}\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(2\gamma-\gamma^2\right)\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \qquad =: \mathbf{k}(\tau,\eta,\gamma;t) \tag{9.93}$$

mit den Abkürzungen

p = Halbparameter der Bahnellipse,

$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3^T(\Omega)\mathbf{R}_1^T(i)\mathbf{R}_3^T(u) = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_1(-i)\mathbf{R}_3(-u)$.

Sie ist eine Funktion der Drehraten

$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\gamma = -\left(\frac{dM}{dt}\right)_s$ = Abweichung der mittleren Bewegung von der Kepler-Bewegung,

$\eta = \left(\frac{d\omega}{df}\right)_s = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s$ = säkulare Drehrate der Apsidenlinie bzgl. f,

$$\tau = \left(\frac{d\Omega}{df}\right)_s = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s = \text{säkulare Drehrate der Knoten bzgl. } f. \tag{9.94}$$

Auf der rechten Seite von (9.93) ist der Ausdruck in geschweiften Klammern eine quadratische Matrix. Der zweite Term ist ein Vektor. Durch Einführung der Basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ entspricht die Gleichung einer vektoriellen Gleichung:

$$\mathbf{k}_{KB} = \frac{\mu}{r^3}\frac{p}{r}(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3)\left\{\tau^2\left(1-\gamma^2\right)\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial\Omega^2} + 2\tau(1-\gamma)^2(1+\eta)\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial\Omega\partial u} - (1-\gamma)^2\left(2\eta-\eta^2\right)\mathbf{R}\right\}\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(2\gamma-\gamma^2\right)\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$$

oder, wenn man die Multiplikation der Matrizen ausführt,

$$\mathbf{k}_{KB} = \frac{\mu}{r^2}\left\{\left(\tau^2\left(1-\gamma^2\right)\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial\Omega^2} + 2\tau(1-\gamma)^2(1+\eta)\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial\Omega\partial u} - (1-\gamma)^2\left(2\eta-\eta^2\right)\mathbf{s}\right)\frac{p}{r} + \left(2\gamma-\gamma^2\right)\mathbf{s}\right\},$$

wobei $\mathbf{s}$ den radialen Einheitsvektor bezeichnet (siehe (9.9)). Differentiation ergibt

$\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial\Omega^2} = -\left(\cos^2 i + \sin^2 i\cos^2 u\right)\mathbf{s} + \sin^2 i\cos u\sin u\,\mathbf{t} + \cos i\sin i\sin u\,\mathbf{n}$, $\qquad \frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial\Omega\partial u} = -\cos i\,\mathbf{s} + \sin i\sin u\,\mathbf{n}$ und daher

$$\begin{aligned}
S_{KB} &= \frac{\mu}{r^2}\Bigg(\left(2\gamma-\gamma^2\right) - \left((1-\gamma)^2\left(\eta(2-\eta) + 2\tau(1+\eta)\cos i\right) + \frac{1}{2}\tau^2\left(1-\gamma^2\right)\left(1+\cos^2 i\right)\right)\frac{p}{r} \\
&\quad - \frac{1}{2}\tau^2\left(1-\gamma^2\right)\sin^2 i\,\frac{p}{r}\cos 2u\Bigg) \\
T_{KB} &= \frac{1}{2}\frac{\mu}{r^2}\tau^2\left(1-\gamma^2\right)\sin^2 i\,\frac{p}{r}\sin 2u \\
W_{KB} &= \frac{\mu}{r^2}\tau\left(2(1-\gamma)^2(1+\eta) + \tau\left(1-\gamma^2\right)\cos i\right)\sin i\,\frac{p}{r}\sin u
\end{aligned} \tag{9.95}$$

Vergleich der Kyner-Bennett-Kraft mit der Kraft (9.91) unter der Beachtung von (9.94) zeigt:

(1) Beide Kräfte führen zu säkularen und periodischen Störungen in Ω, *ω* und *M* und rein periodischen Störungen in *i*, *e* und *a*.

(2) Es besteht eine grobe Übereinstimmung zwischen den dritten Komponenten in beiden Kraftfunktionen im linearen Bereich. Unterschiede bleiben insofern, als zwar in (9.91), hingegen nicht in (9.95) gefordert wird, dass die Größe $\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s$ konstant ist.

(3) In (9.95) gibt es für die erste und zweite Kraftkomponente von u abhängige Terme, die zu den säkularen Störungen nichts beitragen. Diese sind in unserer Lösung ausgeschlossen.

(4) Die durch die Kraft (9.91) verursachten säkularen Störungen in Ω und ω sind identisch mit den zur Bestimmung der Kraftkomponenten vorausgesetzten $(d\Omega/dt)_s$ und $(d\omega/dt)_s$; die säkulare Störung in M hängt von $(d\Omega/dt)_s$ und $(d\omega/dt)_s$ ab und sie lässt sich nicht vorab frei wählen. Die durch die Kraft (9.95) verursachten säkularen Störungen, die sich über die Gaußschen Gleichungen ableiten, sind

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_s = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\tau\left(2(1-\gamma)^2(1+\eta)+\tau\left(1-\gamma^2\right)\cos i\right) = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\tau + \text{nichtlineare Terme},$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_s = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\left((1-\gamma)^2\eta(2-\eta)+\frac{1}{2}\tau^2\left(1-\gamma^2\right)\sin^2 i\right) = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\eta + \text{nichtlineare Terme},$$

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_s = \frac{1}{1-e^2}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\left(-2\gamma+(\eta+\tau\cos i)\left(1+\frac{5}{4}e^2\right)\right) + \text{nichtlineare Terme.} \tag{9.96}$$

Damit erkennt man, dass die o.g. Identitäten zwischen den vorausgesetzten und abgeleiteten säkularen Störungen nur für $(d\Omega/dt)_s$ und $(d\omega/dt)_s$ im linearen Bereiche bestehen; für $(dM/dt)_s$ ist das nicht erkennbar.

(5) Kombination der letzten Gleichungen in (9.94) und (9.96) ergibt

$$-\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\gamma = \frac{1}{1-e^2}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\left(-2\gamma+(\eta+\tau\cos i)\left(1+\frac{5}{4}e^2\right)\right).$$

Daraus erhält man

$$\gamma = \frac{1}{4}(\eta+\tau\cos i)\frac{4+5e^2}{1+e^2},$$

eine Beziehung unter den Drehraten γ, η und τ, also eine kinematische Zwangsbedingung, die in der Arbeit von Kyner und Bennett nicht beachtet ist. Diese in die letzte Gleichung von (9.96) eingetragen ergibt

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_s = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(\eta+\tau\cos i)\frac{4+5e^2}{1+e^2},$$

in grober Übereinstimmung mit (9.92). Ein erkennbarer, aber nicht erklärbarer Unterschied bleibt noch im letzten Faktor.

(6) Ein gravierender Unterschied ist, dass in der Kyner-Bennett-Kraft nichtlineare Terme der Drehraten γ, η und τ entstehen, die zu einer Unumkehrbarkeit zwischen der Bestimmung der Bewegung und der Bestimmung der Kraft führen.

Eine Erklärung für das Entstehen der nichtlineare Terme und des unter Punkt (5) gezeigten Unterschiedes führt zu der Vermutung, dass in der genannten Arbeit von den Autoren eine ungeeignete Methode verwendet worden ist. Kyner und Bennett führen aus, dass die Zusatzkraft daraus resultiert, dass man die intermediäre Lösung zweimal nach der Zeit ableitet, also bildet

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{X} + 2\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{R}\ddot{\mathbf{X}}. \tag{9.97}$$

Aus dieser oder in einer allgemeinen Form aus

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$$

ein Gleichungssystem für die Kepler-Variablen abzuleiten ist eine in der Himmelsmechanik als gelöst zu betrachtende Aufgabe. Es ergeben sich die Gaußschen Gleichungen (9.86) oder lineare Kombinationen als alternative Formen. Die Gaußschen Gleichungen sind sowohl bzgl. der Kraftkomponenten als auch bzgl. der Änderungsraten der Variablen linear. Jeder Ausdruck einer Kraftkomponente in der Gestalt einer nichtlinearen Funktion der Änderungsraten der Variablen oder umgekehrt verstößt jedenfalls gegen die Gaußschen Gleichungen und ist daher theoretisch nicht mit diesen verträglich.

10. Bahnbewegungen im Sonnensystem

In der klassischen Himmelsmechanik wurden die Planetenbewegung und die Mondbewegung insoweit untersucht, als der Zentralkörper als eine Punktmasse betrachtet und alle Störkörper (Planeten) als in Bewegung auf je einer kreisförmigen Bahn auf der ekliptikalen Ebene befindlich angenommen sind. Hier wird ein Weg vorgestellt, die Effekte durch die Massenverteilung des Zentralkörpers sowie durch Neigung und Exzentrizität der Bahn der Störkörper in allgemeiner Form zu erfassen.

10.1 Zwei öfter verwendete Bezugssysteme und Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen des Massenmittelpunktes (Index C oder MZ) des Zentralkörpers und des betreffenden Teilchens in einem beliebigen Inertialsystem lauten

$$M\frac{d^2\mathbf{x}_C}{dt^2} = -\mathbf{F} + \sum_\alpha \mathbf{F}_C^\alpha , \qquad m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} + \sum_\alpha \mathbf{F}^\alpha , \tag{10.1}$$

worin $\mathbf{x}_C$ und $\mathbf{x}$ die Ortsvektoren bezeichnen und $\mathbf{F}$ die durch den Zentralkörper auf das Teilchen wirkende Kraft ist. M und m sind die Massen von beiden. $\mathbf{F}_C^\alpha$ und $\mathbf{F}^\alpha$ sind die durch den Störkörper (betrachtet als Teilchen) α auf den Zentralkörper und auf das Teilchen wirkenden Kräfte. Alle diese Kräfte sind als gravitativ angenommen. Differenzbildung ergibt aus (10.1)

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} := \frac{d^2\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_C\right)}{dt^2} = \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\mathbf{F} + \sum_\alpha\left(\frac{1}{m}\mathbf{F}^\alpha - \frac{1}{M}\mathbf{F}_C^\alpha\right), \tag{10.2}$$

die Gleichung für die relative Bewegung, also für die Bewegung des Teilchens in einem mit dem MZ des Zentralkörpers verbundenen rotationsfreien (**körperzentrierten**) Galilei-Systems. Führt man beide Gleichungen in (10.1) zusammen, so erhält man

$$\frac{d^2\mathbf{x}_O}{dt^2} = \frac{1}{M+m}\sum_\alpha \mathbf{F}^\alpha + \frac{1}{M+m}\sum_\alpha \mathbf{F}_C^\alpha , \tag{10.3}$$

die Bewegungsgleichung des MZs O des aus dem Zentralkörper und dem Teilchen bestehenden Systems. Ferner ergibt Differenzbildung aus (10.3) und der zweiten Gleichung in (10.1)

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} := \frac{d^2\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_O\right)}{dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F} + \sum_\alpha \frac{M}{M+m}\left(\frac{1}{m}\mathbf{F}^\alpha - \frac{1}{M}\mathbf{F}_C^\alpha\right) \tag{10.4}$$

als Bewegungsgleichung des Teilchens bzgl. eines mit dem MZ O verbundenen rotationsfreien (**baryzentrischen**) Galilei-Systems. Die Gleichungen (10.2) und (10.4) sind zwei typische Formen für die Bahnbewegung. (10.4) wird in erster Linie für die Bewegung eines Mondes um seinen Planeten verwendet, wobei alle auftretenden Kräfte als gravitativ angenommen sind; sie lassen sich, nach dem Gesetz von Newton, durch

$$\frac{1}{m_\beta}\mathbf{F}_\beta^a = \frac{Gm_\alpha\left(\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha\right)}{\left|\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\alpha\right|^3} \tag{10.5}$$

ausdrücken, wobei a und b die anziehende und angezogene Punktmasse indizieren sowie m_α, m_β ihre Massen und $\mathbf{r}_\alpha$ und $\mathbf{r}_\beta$ ihre bzgl. eines beliebig gewählten Punktes im Raum definierten Ortsvektoren. Eine rohe Abschätzung mit der Hilfe der Dreiecksungleichung ergibt

$$\left|\frac{1}{m}\mathbf{F}^\alpha - \frac{1}{M}\mathbf{F}_C^\alpha\right| \le 4\frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_C\right|}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha\right|}\left|\frac{1}{m}\mathbf{F}^\alpha\right| .$$

Daher erkennt man, dass die ersten Terme auf der rechten Seiten der Gleichung (10.2) und (10.4) eine dominierende Rolle spielen, wenn $\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_C\right| \ll \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha\right|$. Dann spielt der Planet C, zu dem der Mond gehört, die Rolle des Zentralkörpers und die Sonne und andere Planeten sind als Störkörper zu betrachten. Trotzdem die Anziehungskraft der Sonne auf die Einheitsmasse des Mondes $\frac{1}{m}\mathbf{F}^\alpha$ ($\alpha = \text{Sonne}$) in den Gleichungen (10.2) und (10.4) größer als die Kraft $\frac{1}{m}\mathbf{F}$ des Planeten C ist, beeinflusst sie die relative Bewegung des Mondes zu seinem Planeten nur unwesentlich. Das ist der

Grund, die das Sonnensystem beherrschende Sonne in der Mondbewegung nur als Störkörper zu betrachten *(Schneider IV 1999)*.

Die Gleichung (10.2) lässt sich für die Planetenbewegung verwenden, in der die Sonne den Zentralkörper darstellt und alle anderen Planeten Störkörper sind. Sie lässt sich ebenfalls für die Bewegung künstlicher Satelliten verwenden, bei denen der Mond, die Sonne und die Planeten Störkörper sind. Da sich die Sonne und alle Planeten nahe an der ekliptikalen Ebene befinden, wird ein ekliptikales Koordinatensystem für die Planeten- und Mondbewegung verwendet, womit die Störfunktionen durch die Sonne und Planeten eine einfache Form annimmt. Dabei spielt die Störkraft aus dem Gravitationsfeld der Erde eine sekundäre Rolle und ihr Ausdruck nimmt auch keine komplizierte Gestalt an. Für die Satellitenbewegung spielt dagegen das Erdgravitationsfeld eine Hauptrolle, weswegen ausschließlich äquatoriale Koordinaten verwendet werden.

10.2 Gravitationspotential einer Punktmasse und eines ausgedehnten Körpers

10.2.1 Potential in körperzentrierten und körperfesten Koordinatensystemen

Betrachtet wird zunächst das Gravitationspotential einer Punktmasse α (10.5); nunmehr wird $\mathbf{r}_\beta$ als der Ortsvektor eines Punktes, an dem sich die betreffende Einheitsmasse befindet, interpretiert und der Index β wird weggelassen. Das Potential der Kraft $\mathbf{f}_\alpha := \frac{1}{m_\beta}\mathbf{F}_\beta^a$ lässt sich durch $\partial V_\alpha / \partial \mathbf{r} = \mathbf{f}_\alpha$ definieren. Da die Position der betreffenden Einheitsmasse von der Position der Punktmasse α unabhängig ist, ergibt eine Wegintegration $V_\alpha = \int \mathbf{f}_\alpha \cdot d\mathbf{r}$, wobei $\mathbf{r}_\beta$ als konstant betrachtet wird. Damit erhält man

$$V_\alpha = \frac{Gm_\alpha}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha|}.$$

Bekanntlich lässt sich der reziproke Abstand mittels der konvergenten Potenzreihen

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}|} = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{r_\alpha}{r}\right)^n P_{n(0)}(\cos\gamma_\alpha) & \text{für} \quad r > r_\alpha \\ \dfrac{1}{r_\alpha}\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{r}{r_\alpha}\right)^n P_{n(0)}(\cos\gamma_\alpha) & \text{für} \quad r < r_\alpha \end{cases} \qquad \text{mit } r_\beta = |\mathbf{r}_\beta| \text{ und } r = |\mathbf{r}| \tag{10.6}$$

darstellen, worin $\gamma_\alpha = (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r})$ den aus den Vektoren $\mathbf{r}_\alpha$ und $\mathbf{r}$ gebildeten Winkel bezeichnet. Damit erhält man

$$V_\alpha = \frac{Gm_\alpha}{|\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}|} = \begin{cases} \dfrac{Gm_\alpha}{r}\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{r_\alpha}{r}\right)^n P_{n(0)}(\cos\gamma_\alpha) & \text{für} \quad r > r_\alpha \\ \dfrac{Gm_\alpha}{r_\alpha}\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{r}{r_\alpha}\right)^n P_{n(0)}(\cos\gamma_\alpha) & \text{für} \quad r < r_\alpha \end{cases}.$$

Mit dem Additionstheorem der Legendre-Polynome

$$P_{n(0)}(\cos\gamma_\alpha) = P_{n0}(\cos\theta_\alpha)P_{n0}(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{nm}(\cos\theta_\alpha)P_{nm}(\cos\theta)\cos m(\lambda-\lambda_\alpha) \tag{10.7}$$

lässt sich das Potential V_α als eine Funktion der Kugelkoordinaten (r,θ,λ) und $(r_\alpha,\theta_\alpha,\lambda_\alpha)$ der Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}_\alpha$ darstellen; es ergibt sich

$$\begin{aligned} V_\alpha = \frac{G}{r}\sum_{n\geq 1}\Bigg\{ & m_\alpha\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n P_{n0}(\cos\theta_\alpha)\left(\frac{a}{r}\right)^n P_{n0}(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}m_\alpha\left(\frac{r_\beta}{a}\right)^n P_{nm}(\cos\theta_\alpha)\cos m\lambda_\alpha\left(\frac{a}{r}\right)^n P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda \\ & + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}m_\alpha\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n P_{nm}(\cos\theta_\alpha)\sin m\lambda_\alpha\left(\frac{a}{r}\right)^n P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda\Bigg\} \qquad \text{für } r > r_\alpha \end{aligned}$$

und

$$V_\alpha = G\sum_{n\ge1}\left\{\frac{m_\alpha}{r_\alpha}\left(\frac{a}{r_\alpha}\right)^n P_{n0}(\cos\theta_\alpha)\left(\frac{r}{a}\right)^n P_{n0}(\cos\theta)+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{m_\alpha}{r_\alpha}\left(\frac{a}{r_\alpha}\right)^n P_{nm}(\cos\theta_\alpha)\cos m\lambda_\alpha\left(\frac{r}{a}\right)^n P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda\cdot\right.$$
$$\left.+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{m_\alpha}{r_\alpha}\left(\frac{a}{r_\alpha}\right)^n P_{nm}(\cos\theta_\alpha)\sin m\lambda_\alpha\left(\frac{r}{a}\right)^n P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda\right\}\qquad \text{für } r<r_\alpha, \tag{10.8}$$

worin a ein willkürlich eingeführter Längenparameter ist. Damit sind alle Terme in zwei getrennt nach der Masse und den Koordinaten der anziehenden Punktmasse und den Koordinaten des angezogenen Punktes im Raum abhängige Faktoren faktorisiert. Da das Potential wie die Kraft additiv ist, ergibt sich das Potential mehrerer anziehender Punktmassen durch Zusammensetzung der Potentiale aller beteiligten anziehenden Punktmassen.: $V=\sum_\alpha V_\alpha$. Man braucht dazu nur die von den anziehenden Punktmassen abhängigen Faktoren in (10.8) zusammenzufügen; man erhält z.B. für $r>r_\alpha$

$$V=\frac{GM}{r}\sum_{n\ge1}\left\{c_{n(0)}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_{n0}(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_{nm}(\cos\theta)\left(c_{nm}\cos m\lambda+s_{nm}\sin m\lambda\right)\right\} \tag{10.9}$$

mit

$$M=\sum_\alpha m_\alpha,\qquad c_{n(0)}=\sum_\alpha\frac{m_\alpha}{M}\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n P_{n0}(\cos\theta_\alpha)$$
$$c_{nm}=2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\sum_\alpha\frac{m_\alpha}{M}\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n P_{nm}(\cos\theta_\alpha)\cos m\lambda_\alpha,\qquad s_{nm}=2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\sum_\alpha\frac{m_\alpha}{M}\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n P_{nm}(\cos\theta_\alpha)\sin m\lambda_\alpha \tag{10.10}$$

Es ist ersichtlich, dass

$$c_{0(0)}=\frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha=1,\quad c_{1(0)}=\frac{1}{M}\frac{z_C}{a},\quad c_{1(1)}=\frac{1}{M}\frac{x_C}{a}\ \text{ und }\ s_{1(1)}=\frac{1}{M}\frac{y_C}{a}, \tag{10.11}$$

worin (x_C, y_C, z_C) die kartesischen Koordinaten des Massenmittelpunktes *C* des aus den Punktmassen $\{m_\alpha, \mathbf{r}_\alpha\}$ bestehenden Systems sind. Wird ein mit dem Massenmittelpunkt *C* verbundenes Koordinatensystem verwendet, dann vereinfacht sich (10.9) zu

$$V=\frac{GM}{r}+\frac{GM}{r}\sum_{n\ge2}\left\{c_{n(0)}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_{n0}(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_{nm}(\cos\theta)\left(c_{nm}\cos m\lambda+s_{nm}\sin m\lambda\right)\right\} \tag{10.12}$$

Für ein Kontinuum gehen die Summationen über β je in eine Volumintegration über den ganzen Körper über. Damit ergibt sich (siehe Abb. 10.1)

$$M=\iiint_K dm,$$
$$c_{n(0)}=\frac{1}{M}\iiint_K\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n P_{n0}(\cos\theta_\alpha)\,dm$$
$$c_{nm}=\frac{2}{M}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iiint_K\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n P_{nm}(\cos\theta_\alpha)\cos m\lambda_\alpha\,dm,$$
$$s_{nm}=\frac{2}{M}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iiint_K\left(\frac{r_\alpha}{a}\right)^n P_{nm}(\cos\theta_\alpha)\sin m\lambda_\alpha\,dm\cdot \tag{10.13}$$

Dabei bleiben die Eigenschaften (10.11) erhalten; nun sind (x_C, y_C, z_C) die kartesischen Koordinaten des Massenmittelpunktes *C* des Körpers *K*.

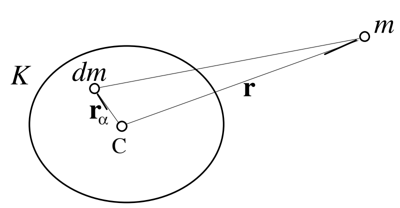

Abb. 10.1 Gravivationsfeld eines Kontinuums

(10.12) gibt, zusammen mit (10.10) oder (10.13), den **Ausdruck des Potentials eines Teilchensystems $\{m_\alpha, \mathbf{r}_\alpha\}$ oder eines Kontinuums *K* bzgl. eines körperzentrierten, beliebig orientierten Koordinatensystems unter der Bedingung $r > Max\{r_\alpha\}$.** Die Koeffizienten c_{nm} und s_{nm} hängen von der Massenverteilung innerhalb des Systems ab. Für einen Starrkörper oder ein starres Teilchensystem bleibt die Massenverteilung im Lauf der Zeit unveränderlich. Daher sind die Koeffizienten c_{nm} und s_{nm} in einem beliebig orientierten körperfesten Koordinatensystem konstant.

Für einen sich im Raum drehenden Starrkörper lässt sich das körperfeste Koordinatensystem so orientieren, dass die *Z*-Achse des Systems mit der Drehachse des Körpers zusammenfällt (äquatoriales System). Damit ergibt eine Rotation des Koordinatensystems den **Ausdruck des Potentials bzgl. eines körperzentrierten rotationsfreien Galilei-Systems:**

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r}\sum_{n\geq 2}\left\{c_{n(0)}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_{n0}(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_{nm}(\cos\theta)\big(c_{nm}\cos m(\lambda-\Theta) + s_{nm}\sin m(\lambda-\Theta)\big)\right\}, \tag{10.14}$$

worin Θ den Drehwinkel des Körpers bezeichnet. Die Koeffizienten c_{nm} und s_{nm} sind bzgl. der Rotationsachse des Körpers definiert.

Für die Bewegung eines Mondes eines der Planeten wird zur Vereinfachung der Darstellung der Störfunktionen durch die dritten Himmelskörper ein ekliptikales Koordinatensystem verwendet. Daraus entsteht die Notwendigkeit, den ursprünglich in einem körperzentrierten äquatorialen Koordinatensystem gegebenen Ausdruck des Potentials in das ekliptikale System zu transformieren. Für praktische Anwendungen reicht es aus, nur den Abplattungsterm ($(n, m) = (2, 0)$) des Potentials zu berücksichtigen. Die dafür gebrauchte Transformation erfolgt durch Anwendung des Additionstheorems (10.7):

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 c_{2(0)}\left(P_{2(0)}(\cos\theta_\alpha)P_{2(0)}(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{2}\frac{(2-m)!}{(2+m)!}P_{2(m)}(\cos\theta_\alpha)P_{2(m)}(\cos\theta)\cos m(\lambda-\lambda_\alpha)\right)$$

Es seien (θ, λ) und $(\theta_\alpha, \lambda_\alpha)$ die Kugelflächenkoordinaten des angezogenen Punktes und eines auf dem äquatorialen Pol liegenden Punktes α im ekliptikalen System, in dem die Länge bzgl. des Frühlingspunkt gemessen ist. θ gibt dann den Polabstand des angezogenen Punktes im äquatorialen System an. Ersichtlich gilt $(\theta_\alpha, \lambda_\alpha) = (\varepsilon, -\pi/2)$. Damit ergibt das Additionstheorem

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2\left(\hat{c}_{2(0)}P_{2(0)}(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{2}\hat{c}_{2(m)}P_{2(m)}(\cos\theta)\cos m(\lambda+\pi/2)\right), \tag{10.15}$$

als Funktion der ekliptikalen Koordinaten mit der Abkürzung

$$\hat{c}_{2(m)} = 2\frac{(2-m)!}{(2+m)!}c_{2(0)}P_{2(m)}(\cos\varepsilon) \quad (m = 0, 1, 2). \tag{10.16}$$

10.2.2 Störfunktion durch einen dritten Himmelskörper

Die in der Bewegungsgleichung im körperzentrierten System auftretende Scheinkraft durch einen dritten Störkörper α ist

$$\mathbf{f}^\alpha = \frac{1}{m}\mathbf{F}^\alpha - \frac{1}{M}\mathbf{F}_C^\alpha,$$

oder, eingeschränkt auf gravitative Kräfte,

$$\mathbf{f}^\alpha = Gm_\alpha\left(\frac{\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha}{|\mathbf{r}_\alpha|^3}\right) \tag{10.17}$$

wobei $\mathbf{r}_\alpha$ und $\mathbf{r}$ die bzgl. eines im Raum beliebig gewählten Referenzpunktes definierten Ortsvektoren des als eine Punktmasse betrachteten Störkörpers und der angezogenen Einheitsmasse sind. Die entsprechende Störfunktion erhält man als Wegintegral

$$V_\alpha = Gm_\alpha\int_L\left(\frac{\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha}{|\mathbf{r}_\alpha|^3}\right)\cdot d\mathbf{r} = Gm_\alpha\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r}_\alpha\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_\alpha|^3}\right).$$

Anwendung (10.17) für den reziproken Abstand und $\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}_\alpha||\mathbf{r}|\cos(\mathbf{r}_\alpha,\mathbf{r})$ für den zweiten Term ergibt

$$V_\alpha = \begin{cases} \dfrac{Gm_\alpha}{r} + \dfrac{Gm_\alpha}{r}\sum\limits_{n\geq 1}\left(\left(\dfrac{r_\alpha}{r}\right)^n - \Delta_{n(1)}\right)P_{n0}\left(\cos(\mathbf{r}_\alpha,\mathbf{r})\right) & \text{für} \quad r_\alpha < r \\ \dfrac{Gm_\alpha}{r_\alpha}\sum\limits_{n\geq 2}\left(\dfrac{r}{r_\alpha}\right)^n P_{n0}\left(\cos(\mathbf{r}_\alpha,\mathbf{r})\right) & \text{für} \quad r_\alpha > r \end{cases} \tag{10.18}$$

mit den Abkürzungen

$$\Delta_{n(1)} = \delta_{n(1)}\left(\frac{r}{r_\alpha}\right)^2, \qquad \delta_{n(1)} - \text{Kronecker Symbol.}$$

In (10.18) sind $r_\alpha = |\mathbf{r}_\alpha|$ und $r = |\mathbf{r}|$. Als Referenzpunkt wählt man den Massenmittelpunkt des Zentralkörpers (die Sonne). Dann gibt (10.18) die **Störfunktionen für die Planetenbewegung** an. Mit dem Additionstheorem erhält man

$$V_\alpha = \frac{Gm_\alpha}{r}\left\{1+\sum_{n\geq 1}\left(\left(\frac{r_\alpha}{r}\right)^n - \Delta_{n(1)}\right)\left(P_{n0}(\cos\theta_\alpha)P_{n0}(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{nm}(\cos\theta_\alpha)P_{nm}(\cos\theta)\cos m(\lambda-\lambda_\alpha)\right)\right\} \quad \text{für } r > r_\alpha,$$

$$V_\alpha = \frac{Gm_\alpha}{r_\alpha}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{r}{r_\alpha}\right)^n\left(P_{n0}(\cos\theta_\alpha)P_{n0}(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_{nm}(\cos\theta_\alpha)P_{nm}(\cos\theta)\cos m(\lambda-\lambda_\alpha)\right) \quad \text{für } r_\alpha > r. \tag{10.19}$$

Damit sind die Koordinaten des Störkörpers und die des angezogenen Teilchens faktorisiert.

10.2.3 Ausdruck der Potentialfunktionen im baryzentrischen Koordinatensystem

Aus der Definition des gesamten MZs O des Erde-Mond-Systems erhält man $(M+m)\mathbf{x}_O = M\mathbf{x}_C + m\mathbf{x}$. In dem mit dem Punkt O als dessen Ursprung definierten Koordinatensystem ist $\mathbf{x}_O = 0$; man erhält $\mathbf{x} - \mathbf{x}_C = (1+\bar{m})\mathbf{x}$ mit $\bar{m} = m/M$. In der erhaltenen Gleichung bedeuten $\mathbf{x} - \mathbf{x}_C$ und $\mathbf{x}$ den Ortsvektor des Mondes bzgl. des Punktes C bzw. O; die Gleichung beschreibt also den Wechsel des Bezugssystems. Da beide Vektoren $\mathbf{x} - \mathbf{x}_C$ und $\mathbf{x}$ auf derselben Linie liegen, bleiben die Winkelbeziehungen zu jedem gegebenen Vektor bei dem o.g. Wechsel unverändert. Deshalb ergibt der Wechsel r zu $(1+\bar{m})|\mathbf{x}| \xrightarrow{\text{umschreiben in}} (1+\bar{m})r$ in (10.12)

$$V = \frac{1}{1+\bar{m}}\frac{GM}{r}\left\{1+\frac{GM}{r}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n\left(\bar{c}_{n(0)}P_{n(0)}(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}P_{nm}(\cos\theta)\left(\bar{c}_{nm}\cos m\lambda + \bar{s}_{nm}\sin m\lambda\right)\right)\right\}. \tag{10.20}$$

mit

$$\bar{c}_{nm} = \frac{c_{nm}}{(1+\bar{m})^n}, \qquad \bar{s}_{nm} = \frac{s_{nm}}{(1+\bar{m})^n} \tag{10.21}$$

das Potential in dem baryzentrischen Galilei-System. Für die Bewegung im baryzentrischen System lässt sich die Kraft durch einen dritten Störkörper mittels

$$\mathbf{f}^\alpha = Gm_\alpha\frac{M}{M+m}\left(\frac{\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_C}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_C|^3}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_C = -\bar{m}\mathbf{r}} = Gm_\alpha\frac{M}{M+m}\left(\frac{\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha + \bar{m}\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_\alpha + \bar{m}\mathbf{r}|^3}\right)$$

anstelle von (10.17) ausdrücken. Das Scheinpotential ergibt sich als Wegintegral

$$V_\alpha = Gm_\alpha\frac{M}{M+m}\int\left(\frac{\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha + \bar{m}\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_\alpha + \bar{m}\mathbf{r}|^3}\right)\cdot d\mathbf{r},$$

in dem der Ortsvektor $\mathbf{r}_\alpha$ von $\mathbf{r}$ unabhängig ist. Integration ergibt

$$V_\alpha = Gm_\alpha\frac{M}{M+m}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}|} + \frac{1}{\bar{m}}\frac{1}{|\mathbf{r}_\alpha + \bar{m}\mathbf{r}|}\right).$$

Beide Terme in der Klammer führen zu der skalarwertigen Funktion $|\mathbf{a} \mp \mathbf{b}|^{-1}$ von zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Für diese ist die folgende Formel unschwer zu beweisen:

$$\frac{1}{|\mathbf{a} \mp \mathbf{b}|} = \frac{1}{a} \sum_{n \geq 0} (\pm 1)^n \left(\frac{b}{a} \right)^n P_{n(0)} \left(\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right) \text{ für } a > b, \tag{10.22}$$

worin $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ die Beträge der Vektoren sind; $P_{n(0)}(\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ ist das Legendre-Polynom vom Grade n. Anwendung auf beide Terme ergibt (die Terme für $n = 0$ verschwinden wegen dessen Unabhängigkeit vom Ortsvektor und $n = 1$ wegen $1 - (-\overline{m})^0 = 0$)

$$V_\alpha = \frac{Gm_\alpha}{\tilde{r}_\alpha} \left(\frac{M}{M + m} \right) \sum_{n \geq 2} \left(1 - (-\overline{m})^{n-1} \right) \left(\frac{r}{\tilde{r}_\alpha} \right)^n P_{n(0)} \left(\cos(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}) \right) \cdot \tag{10.23}$$

(10.23) gibt die **Störfunktionen für die Mondbewegung** an, worin $\tilde{r}_\alpha = |\mathbf{r}_\alpha|$ der Abstand des Störkörpers zum Baryzentrum des Erde-Mond-Systems ist. Anwendung des Additionstheorems ergibt

$$\begin{aligned} V_\alpha = \frac{Gm_\alpha}{\tilde{r}_\alpha} \left(\frac{M}{M+m} \right) \sum_{n \geq 2} \Bigg\{ & \left(\frac{r}{\tilde{r}_\alpha} \right)^n \left(1 - (-\overline{m})^{n-1} \right) P_{n0}\left(\cos \tilde{\theta}_\alpha \right) P_{n0}(\cos \theta) \\ & + 2 \left(\frac{r}{\tilde{r}_\alpha} \right)^n \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left(1 - (-\overline{m})^{n-1} \right) P_{nm}\left(\cos \tilde{\theta}_\alpha \right) P_{nm}(\cos \theta) \cos m \left(\lambda - \tilde{\lambda}_\alpha \right) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{10.24}$$

worin $\left(\tilde{r}_\pi, \tilde{\theta}_\pi, \tilde{\lambda}_\pi \right)$ die Kugelkoordinaten des Störkörpers in dem mit dem Planet-Mond-Massenmittelpunkt verbundenen ekliptikalen System bezeichnen.

Anm.: Wenn man den Abstand des Mondes zum MZ der Erde mit $\overline{r}$ bezeichnet, erhält man nach der Definition $r = (1 + \overline{m})^{-1} \overline{r}$. Trägt man letztere in (10.23) ein , so ergibt sich

$$\begin{aligned} V_\alpha &= \frac{Gm_\alpha}{\tilde{r}_\alpha} \sum_{n \geq 2} \left(\left(\frac{1}{1 + \overline{m}} \right)^{n-1} - \left(\frac{-\overline{m}}{1 + \overline{m}} \right)^{n-1} \right) \left(\frac{\overline{r}}{\tilde{r}_\alpha} \right)^n P_{n(0)} \left(\cos(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}) \right) \\ &= \frac{Gm_\alpha}{\tilde{r}_\alpha} \left(\left(\frac{\overline{r}}{\tilde{r}_\alpha} \right)^2 P_{2(0)}(\cos \psi_\alpha) + \frac{M - m}{M + m} \left(\frac{\overline{r}}{\tilde{r}_\alpha} \right)^3 P_{3(0)}(\cos \psi_\alpha) + \frac{\left(M^2 - Mm + m^2 \right)}{(M + m)^2} \left(\frac{\overline{r}}{\tilde{r}_\alpha} \right)^4 P_{4(0)}(\cos \psi_\alpha) + \ldots \right) \cdot \end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme sind in der klassischen Mondtheorie zu finden *(Brown, 1895, Brower & Clemence, 1961)*. Der Ausdruck (10.23) stellt eine Verallgemeinerung der klassischen Theorie dar und ermöglicht die Einbeziehung der Terme höherer Ordnung.

10.2.4 Transformation der (Planet-Mond-)baryzentrischen Koordinaten $\left(\tilde{r}_\pi, \tilde{\theta}_\pi, \tilde{\lambda}_\pi \right)$ eines Planeten in heliozentrische Koordinaten

Weiter sind die Koordinaten $\left(\tilde{r}_\pi, \tilde{\theta}_\pi, \tilde{\lambda}_\pi \right)$ in das heliozentrische System zu transformieren. Die Sonne-Planeten-Geometrie zeigt

$$\tilde{r}_\pi \begin{pmatrix} \sin \tilde{\theta}_\pi \cos \tilde{\lambda}_\pi \\ \sin \tilde{\theta}_\pi \sin \tilde{\lambda}_\pi \\ \cos \tilde{\theta}_\pi \end{pmatrix} = r_s \begin{pmatrix} \cos \lambda_s \\ \sin \lambda_s \\ 0 \end{pmatrix} + r_\pi \begin{pmatrix} \sin \theta_\pi \cos \lambda_\pi \\ \sin \theta_\pi \sin \lambda_\pi \\ \cos \theta_\pi \end{pmatrix},$$

worin $(r_s, 0, \lambda_s)$ die Kugelkoordinaten der Sonne in den mit dem MZ des Planeten-Mond-Systems verbundenen ekliptikalen Koordinatensystem bezeichnen; $(r_\pi, \theta_\pi, \lambda_\pi)$ geben die Kugelkoordinaten eines Störplaneten π in dem heliozentrischen ekliptikalen Koordinatensystem an. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} &\tilde{r}_\pi \sin \tilde{\theta}_\pi \cos \tilde{\lambda}_\pi = r_s \cos \lambda_s + r_\pi \sin \theta_\pi \cos \lambda_\pi && \Rightarrow && \tilde{r}_\pi \cos \tilde{\lambda}_\pi = r_s \cos \lambda_s + r_\pi \cos \lambda_\pi + O\left(r_\pi \cos^2 \theta_\pi \right), \\ &\tilde{r}_\pi \sin \tilde{\theta}_\pi \sin \tilde{\lambda}_\pi = r_s \sin \lambda_s + r_\pi \sin \theta_\pi \sin \lambda_\pi && \Rightarrow && \tilde{r}_\pi \sin \tilde{\lambda}_\pi = r_s \sin \lambda_s + r_\pi \sin \lambda_\pi + O\left(r_\pi \cos^2 \theta_\pi \right), \\ &\tilde{r}_\pi \cos \tilde{\theta}_\pi = r_\pi \cos \theta_\pi && \Rightarrow && \cos \tilde{\theta}_\pi = \frac{r_\pi}{\tilde{r}_\pi} \cos \theta_\pi = \frac{r_\pi}{\tilde{r}_\pi} \sin i_\pi \cos u_\pi \end{aligned} \tag{10.25}$$

und

$$(\tilde{r}_\pi)^2 = (r_\pi)^2 + (r_s)^2 - 2r_\pi r_s \sin\theta_\pi \cos\left(\tilde{\lambda}_\pi - \lambda_s\right) = (r_\pi)^2 + (r_s)^2 - 2r_\pi r_s \cos(\lambda_\pi - \lambda_s) + O\left(\cos^2\theta_\pi\right) \tag{10.26}$$

Die ersten beiden Gleichungen in (10.25) ergeben

$$\cos m\tilde{\lambda}_\pi = \sum_\kappa \binom{m}{\kappa}\left(\frac{r_s}{\tilde{r}_\pi}\right)^\kappa \left(\frac{r_\pi}{\tilde{r}_\pi}\right)^{m-\kappa} \cos\left(m\lambda_\pi - \kappa(\lambda_\pi - \lambda_s)\right), \quad \sin m\tilde{\lambda}_\pi = \sum_\kappa \binom{m}{\kappa}\left(\frac{r_s}{\tilde{r}_\pi}\right)^\kappa \left(\frac{r_\pi}{\tilde{r}_\pi}\right)^{m-\kappa} \sin\left(m\lambda_\pi - \kappa(\lambda_\pi - \lambda_s)\right). \tag{10.27}$$

Die negativen Potenzen des Abstandes r_π^c lassen sich durch

$$\left(\frac{1}{\tilde{r}_\pi}\right)^k = \left((r_\pi)^2 + (r_s)^2 - 2r_\pi r_s \cos(\lambda_\pi - \lambda_s)\right)^{-k/2} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{r_\pi}\right)^k \left(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\lambda_\pi - \lambda_s)\right)^{-k/2} & \text{mit } \alpha = \dfrac{r_s}{r_\pi} \text{ für } r_\pi > r_s \\ \left(\dfrac{1}{r_s}\right)^k \left(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\lambda_\pi - \lambda_s)\right)^{-k/2} & \text{mit } \alpha = \dfrac{r_\pi}{r_s} \text{ für } r_s > r_\pi \end{cases}$$

ausdrücken ($k > 0$). Die Funktion $\left(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\psi\right)^{-k/2}$ lässt sich weiter in eine trigonometrische Reihen der Form

$$\left(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\psi\right)^{-k/2} = L_0^k(\alpha) + 2\sum_{n\ge1} L_n^k(\alpha)\cos n\psi ,$$

mit den Koeffizienten

$$L_0^k(\alpha) = 1 + \sum_{\mu\ge1}\left(b_\mu^k\right)^2 \alpha^{2\mu}, \quad L_n^k(\alpha) = b_n^k\alpha^n + \sum_{\mu\ge1} b_\mu^k b_{\mu+n}^k \alpha^{2\mu+n} \text{ für } (n = 1,2,3,\ldots) \tag{10.28}$$

entwickeln, wobei

$$b_n^k := B_n^{-k/2} = (-1)^n \frac{(-k/2)(-k/2-1)\ldots(-k/2-n+1)}{n!} = \frac{k(k+2)\ldots(k+2n-2)}{2\cdot 4\ldots(2n)}$$

die binomischen Koeffizienten für den negativen Grad $-k/2$ sind. Für $k = odd$ sind $L_n^k(\alpha)$ in der Himmelsmechanik als **Laplacesche Koeffizienten** bekannt (siehe z.B. *Brouwer und Clemence, 1961*). Damit erhält man

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_\pi}{\tilde{r}_\pi}\right)^k &= L_0^k(\xi_\pi) + 2\sum_{\nu\ge1} L_\nu^k(\xi_\pi)\cos\nu(\lambda_\pi - \lambda_s) \quad \text{mit} \quad \xi_\pi = \frac{r_s}{r_\pi} \quad \text{für} \quad r_\pi > r_s \\ \left(\frac{r_s}{\tilde{r}_\pi}\right)^k &= L_0^k(\eta_\pi) + 2\sum_{\nu\ge1} L_\nu^k(\eta_\pi)\cos\nu(\lambda_\pi - \lambda_s) \quad \text{mit} \quad \eta_\pi = \frac{r_\pi}{r_s} \quad \text{für} \quad r_s > r_\pi . \end{aligned} \tag{10.29}$$

Mit (10.25), (10.27) und (10.29) sind die in (10.24) auftretenden Koordinaten eines Störplaneten bzgl. des baryzentrischen Systems durch seine heliozentrischen Koordinaten unter Vernachlässigung der Terme der Ordnung $O\left(\sin^2 i_\pi\right)$ approximativ ausgedrückt, worin i_π die Inklination der Planetenbahn um die Sonne bezeichnet. Die heliozentrischen Koordinaten eines Störplaneten als Funktionen der Zeit sind als genügend genau bekannt angenommen.

10.3 Die Potentialfunktionen für die Bahnbewegungen im Sonnensystem

Die Hamilton-Funktion der Bahnbewegung lautet

$$F = -\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{G^2}{2r^2} + V - T$$

wobei T der zu der Zeitvariablen τ (als die vierte generalisierte Koordinate) konjugierte Impuls ist; die Potentialfunktion lässt sich für Satelliten-, Planeten- und Mondbewegung mit der Hilfe der im vorigen Abschnitt skizzierten Methode formulieren. Sie sind im folgenden, als Vorbereitung für die vorgesehenen Problemlösungen, zusammengestellt.

10.3.1 Erdpotential für die Satellitenbewegung

Koordinatensystem: geozentrisches äquatoriales System.

1) Satellitenbewegung mit erheblicher Inklination

$$\begin{aligned} V = \frac{GM}{r}\Bigg\{ & 1 + \sum_{p\geq 2}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{2p} c_{(2p)0}F_{(2p)0p}(i) \\ & + 2\sum_{k\geq 2}^{(e)}\sum_{p}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{k+2p} c_{(k+2p)0}F_{(k+2p)0p}(i)\cos ku + 2\sum_{k\geq 1}^{(o)}\sum_{p}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{k+2p} c_{(k+2p)0}F_{(k+2p)0p}(i)\sin ku \\ & + \sum_{m\geq 1}\sum_{k}^{(e)}\sum_{p}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{k+2p} F_{(k+2p)mp}(i)\left(c_{(k+2p)m}\cos\alpha_{km} + s_{(k+2p)m}\sin\alpha_{km}\right) \\ & + \sum_{m\geq 1}\sum_{k}^{(o)}\sum_{p}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{k+2p} F_{(k+2p)mp}(i)\left(c_{(k+2p)m}\sin\alpha_{km} - s_{(k+2p)m}\cos\alpha_{km}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{10.30}$$

mit der Abkürzung

$$\alpha_{km} = ku + m(\Omega - \Theta),$$

worin die Summation $\sum\limits_{n\geq 2}^{(e)}$ für $n - m = \text{even}$ durchgeführt wird und $\sum\limits_{n\geq 2}^{(o)}$ für $n - m = \text{odd}$.

2) Satellitenbewegung mit extrem kleiner Inklination

$$\begin{aligned} V = \frac{GM}{r}\Bigg\{ & 1 + \sum_{p\geq 1}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{2p} c_{(2p)0}\left(\eta^0_{(2p)0} + \eta^0_{(2p)2}\cos^2\theta\right) + \sum_{p\geq 1}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{2p+1} c_{(2p+1)0}\eta^0_{(2p+1)1}\cos\theta \\ & + \sum_{n\geq 2}^{(e)}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\eta^m_{n0} + \eta^m_{n2}\cos^2\theta\right)\left(c_{nm}\cos m(\lambda-\Theta) + s_{nm}\sin m(\lambda-\Theta)\right) \\ & + \sum_{n\geq 2}^{(o)}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n}\sum_{m=1}^{n}\eta^m_{n1}\cos\theta\left(c_{nm}\cos m(\lambda-\Theta) + s_{nm}\sin m(\lambda-\Theta)\right)\Bigg\} + O\left(\cos^3\theta\right), \end{aligned} \tag{10.31}$$

mit den Abkürzungen

$$\eta^m_{(m+2\nu)0} = (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{2^{m+2\nu}\nu!(m+\nu)!}, \qquad \eta^m_{(m+2\nu+1)1} = (-1)^\nu \frac{(2\nu+1)!(2m+2\nu+2)}{2^{m+2\nu+1}\nu!(m+\nu+1)!},$$

$$\eta^m_{(m+2\nu)2} = (-1)^{\nu-1}\frac{(2\nu)!\left(m(m+\nu+1) + \nu(2m+2\nu+2)(2m+2\nu+1)\right)}{2^{m+2\nu+1}\nu!(m+\nu+1)!}.$$

10.3.2 Potentialfunktionen für die Planetenbewegung

Koordinatensystem: heliozentrisches ekliptikales System.

Potential der Sonne

$$\begin{aligned} V_s = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r}\left(\frac{a_s}{r}\right)^2\Bigg\{ & c_{2(0)}\left(F_{2(0)1}(i) + 2F_{2(0)0}(i)\cos 2u\right) + \sum_{p\geq 0}F_{2(2)p}(i)\left(c_{2(2)}\cos\alpha^s_{(2-2p)2} + s_{2(2)}\sin\alpha^s_{(2-2p)2}\right) \\ & + \sum_{p\geq 0}F_{2(1)p}(i)\left(c_{2(1)}\sin\alpha^s_{(2-2p)1} - s_{2(1)}\cos\alpha^s_{(2-2p)1}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{10.32}$$

mit der Abkürzung

$$\alpha^s_{km} = ku + m(\Omega - \Theta_s).$$

Planetenstörungen

$$
\begin{aligned}
V_\pi = \frac{Gm_\pi}{r} \Bigg\{ & 1 + \sum_{p\geq 1} \left(\frac{r_\pi}{r}\right)^{2p} \Big(\Phi_{(2p)0p}(i,i_\pi) + \Psi_{(2p)0p}(i,i_\pi)\cos 2u_\pi\Big) \\
& + 2\sum_{k\geq 2}^{(e)} \sum_{p} \left(\frac{r_\pi}{r}\right)^{k+2p} \Big(\Phi_{(k+2p)0p}(i,i_\pi) + \Psi_{(k+2p)0p}(i,i_\pi)\cos 2u_\pi\Big)\cos ku \\
& + 2\sum_{m\geq 1} \sum_{k}^{(e)} \sum_{p} \left(\frac{r_\pi}{r}\right)^{k+2p} \Big(\Phi_{(k+2p)mp}(i,i_\pi) + \Psi_{(k+2p)mp}(i,i_\pi)\cos 2u_\pi\Big)\cos\alpha_{km}^{\pi} \\
& + 2\left(\sum_{k\geq 1}^{(o)} \sum_{p} \left(\frac{r_\pi}{r}\right)^{k+2p} \tilde{F}^{1}_{(k+2p)0p} \sin ku + \sum_{m\geq 1} \sum_{k\geq 1}^{(o)} \sum_{p} \left(\frac{r_\pi}{r}\right)^{k+2p} \tilde{F}^{1}_{(k+2p)mp} \sin\alpha_{km}^{\pi}\right) \sin i_\pi \cos u_\pi \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{r_\pi}{r} - \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^2\right)\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 i_\pi + \frac{1}{4}\sin^2 i_\pi \cos 2u_\pi\right)\Big((1+\cos i)\cos\alpha^{\pi}_{(1)1} + (1-\cos i)\cos\alpha^{\pi}_{(-1)1}\Big) \\
& + \left(\frac{r_\pi}{r} - \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^2\right) \sin i_\pi \sin i \sin u \sin u_\pi \Bigg\} \qquad (\text{für } \pi < \bar{\pi}), \qquad (10.33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_\pi = \frac{Gm_\pi}{r_\pi} \Bigg\{ & \sum_{p\geq 1} \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^{2p} \Big(\Phi_{(2p)0p}(i,i_\pi) + \Psi_{(2p)0p}(i,i_\pi)\cos 2u_\pi\Big) \\
& + 2\sum_{k\geq 2}^{(e)} \sum_{p} \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^{k+2p} \Big(\Phi_{(k+2p)0p}(i,i_\pi) + \Psi_{(k+2p)0p}(i,i_\pi)\cos 2u_\pi\Big)\cos ku \\
& + 2\sum_{m\geq 1} \sum_{k}^{(e)} \sum_{p} \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^{k+2p} \Big(\Phi_{(k+2p)mp}(i,i_\pi) + \Psi_{(k+2p)mp}(i,i_\pi)\cos 2u_\pi\Big)\cos\alpha_{km}^{\pi} \\
& + 2\left(\sum_{k\geq 1}^{(o)} \sum_{p} \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^{k+2p} \tilde{F}^{1}_{(k+2p)0p}(i) \sin ku + \sum_{m\geq 1} \sum_{k}^{(o)} \sum_{p} \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^{k+2p} \tilde{F}^{1}_{(k+2p)mp}(i) \sin\alpha_{km}^{\pi}\right) \sin i_\pi \cos u_\pi \Bigg\} \quad (\text{für } \pi > \bar{\pi}). \qquad (10.34)
\end{aligned}
$$

mit den Abkürzungen

$$\Phi_{nmp}(i,i_\pi) = \left(\tilde{F}^{0}_{nmp}(i) + \frac{1}{2}\sin^2 i_\pi \tilde{F}^{2}_{nmp}(i)\right), \qquad \Psi_{nmp}(i,i_\pi) = -\frac{1}{2}\sin^2 i_\pi \tilde{F}^{2}_{nmp}(i),$$

$$\tilde{F}^{j}_{nmp}(i) = \eta^{j}_{nm} F_{nmp}(i), \quad (j = 0, 1, 2),$$

$$\alpha^{\pi}_{km} = ku + m(\Omega - \lambda_\pi).$$

Hier sind die Planeten entsprechend ihrer Entfernung von der Sonne nummeriert. $\bar{\pi}$ indiziert den angezogenen Planeten, π – den Störplaneten.

10.3.3 Mondbewegung

Koordinatensystem: geozentrisches ekliptikales System.

Potential der Erde

$$V = \frac{GM}{(1+\bar{m})r}\left\{1 + \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \left(\hat{c}_{2(0)}\Big(F_{2(0)1}(i) + 2F_{2(0)0}(i)\cos 2u\Big) - 2\sum_{m=1}^{2}\sum_{p=0}^{2}(-1)^m \hat{c}_{2(m)} F_{2(m)p}(i)\cos\alpha_{(2-2p)m}\right)\right\} \qquad (10.35)$$

mit

$$\alpha_{km} = ku + m\Omega.$$

Sonnenstörung

$$
\begin{aligned}
V_s = \frac{Gm_s}{\left(1+\overline{m}\right)r_s}\Bigg\{ & \sum_p \left(\frac{r}{r_s}\right)^{2p} \Phi^0_{(2p)0p}(i) + 2\overset{(e)}{\sum_{k\geq 2}}\sum_p \left(\frac{r}{r_s}\right)^{k+2p} \Phi^0_{(k+2p)0p}(i)\cos ku \\
& +2\sum_{m\geq 1}\overset{(e)}{\sum_{k}}\sum_p \left(\frac{r}{r_s}\right)^{k+2p} \Phi^0_{(k+2p)0p}(i)\cos\alpha^s_{km}\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (10.36)
$$

mit den Abkürzungen

$$
\Phi^j_{nmp}(i) = \left(1-(-1)^{m-1}\right)\eta^j_{nm}F_{nmp}(i)\,, \qquad (\,j=0,1\,)
$$

und

$$
\alpha^s_{km} = ku + m(\Omega-\lambda_s)\,,
$$

worin r_s der Abstand der Sonne zum Erde-Mond-Zentrum ist. λ_s bezeichnet die ekliptikale Länge der Sonne, r_s und λ_s sind von der Mondbewegung unabhängige Funktionen der Zeit.

Planetenstörungen

$$
\begin{aligned}
V_\pi = \frac{Gm_\pi}{\left(1+\overline{m}\right)r_s}\Bigg\{ & \sum_p \left(\frac{r}{r_s}\right)^{2p} \Phi^0_{(2p)0p}(i)\left(L^{2p+1}_0(\eta_\pi) + 2\sum_{\nu\geq 1} L^{2p+1}_\nu(\eta_\pi)\cos\nu(\lambda_\pi-\lambda_s)\right) \\
& +2\overset{(e)}{\sum_{k\geq 2}}\sum_p \left(\frac{r}{r_s}\right)^{k+2p} \Phi^0_{(k+2p)0p}(i)\left(L^{k+2p+1}_0(\eta_\pi)\cos ku + \sum_{\nu\geq 1} L^{k+2p+1}_\nu(\eta_\pi)\left(\cos\alpha^\pi_{k0(-\nu)}+\cos\alpha^\pi_{k0\nu}\right)\right) \\
& +2\frac{r_\pi}{r_s}\sin i_\pi \overset{(o)}{\sum_{k\geq 1}}\sum_p \left(\frac{r}{r_s}\right)^{k+2p} \Phi^1_{(k+2p)0p}(i)\left(L^{k+2p+1}_0(\eta_\pi)\sin ku + \sum_{\nu\geq 1} L^{k+2p+1}_\nu(\eta_\pi)\left(\sin\alpha^\pi_{k0(-\nu)}+\sin\alpha^\pi_{k0\nu}\right)\right)\cos u_\pi \\
& +2\overset{(e)}{\sum_{k}}\sum_{m\geq 1}\sum_p \left(\frac{r}{r_s}\right)^{k+2p} \Phi^0_{(k+2p)mp}(i)\sum_\kappa \binom{m}{\kappa}(\eta_\pi)^{m-\kappa}\Bigg(L^{k+2p+m+1}_0(\eta_\pi)\cos\alpha^\pi_{km\kappa} \\
& \qquad + \sum_{\nu\geq 1} L^{k+2p+m+1}_\nu(\eta_\pi)\left(\cos\alpha^\pi_{km(\kappa-\nu)}+\cos\alpha^\pi_{km(\kappa+\nu)}\right)\Bigg) \\
& +2\frac{r_\pi}{r_s}\overset{(o)}{\sum_{k}}\sum_{m\geq 1}\sum_p \left(\frac{r}{r_s}\right)^{k+2p} \Phi^1_{(k+2p)mp}(i)\sum_\kappa \binom{m}{\kappa}(\eta_\pi)^{m-\kappa}\Bigg(L^{k+2p+m+1}_0(\eta_\pi)\sin\alpha^\pi_{km\kappa} \\
& \qquad + \sum_{\nu\geq 1} L^{k+2p+m+1}_\nu(\eta_\pi)\left(\sin\alpha^\pi_{km(\kappa-\nu)}+\sin\alpha^\pi_{km(\kappa+\nu)}\right)\Bigg)\sin i_\pi\cos u_\pi\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
(\text{für } r_s > r_\pi) \qquad (10.37)
$$

und

$$
\begin{aligned}
V_\pi = \frac{Gm_\pi}{\left(1+\overline{m}\right)r_\pi}\Bigg\{ & \sum_{p\geq 1} \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^{2p} \Phi^0_{(2p)0p}(i)\left(L^{2p+1}_0(\xi_\pi) + 2\sum_{\nu\geq 1} L^{2p+1}_\nu(\xi_\pi)\cos\nu(\lambda_\pi-\lambda_s)\right) \\
& +2\overset{(e)}{\sum_{k\geq 2}}\sum_p \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^{k+2p} \Phi^0_{(k+2p)0p}(i)\left(L^{k+2p+1}_0(\xi_\pi)\cos\alpha^\pi_{k00} + \sum_{\nu\geq 1} L^{k+2p+1}_\nu(\xi_\pi)\left(\cos\alpha^\pi_{k0(-\nu)}+\cos\alpha^\pi_{k0\nu}\right)\right) \\
& +2\sin i_\pi \overset{(o)}{\sum_{k\geq 1}}\sum_p \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^{k+2p} \Phi^1_{(k+2p)0p}(i)\left(L^{k+2p+1}_0(\xi_\pi)\sin\alpha^\pi_{k00} + \sum_{\nu\geq 1} L^{k+2p+1}_\nu(\xi_\pi)\left(\sin\alpha^\pi_{k0(-\nu)}+\sin\alpha^\pi_{k0\nu}\right)\right)\cos u_\pi \\
& +2\overset{(e)}{\sum_{k\geq 2}}\sum_{m\geq 1}\sum_p \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^{k+2p} \Phi^0_{(k+2p)mp}(i)\sum_\kappa \binom{m}{\kappa}(\xi_\pi)^{m-\kappa}\Bigg(L^{k+2p+m+1}_0(\xi_\pi)\cos\alpha^\pi_{km\kappa} \\
& \qquad + \sum_{\nu\geq 1} L^{k+2p+m+1}_\nu(\xi_\pi)\left(\cos\alpha^\pi_{km(\kappa-\nu)}+\cos\alpha^\pi_{km(\kappa+\nu)}\right)\Bigg) \\
& +2\overset{(o)}{\sum_{k\geq 1}}\sum_p \left(\frac{r}{r_\pi}\right)^{k+2p} \Phi^1_{(k+2p)0p}(i)\sum_\kappa \binom{m}{\kappa}(\xi_\pi)^{m-\kappa}\Bigg(L^{k+2p+m+1}_0(\xi_\pi)\sin\alpha^\pi_{km\kappa} \\
& \qquad + \sum_{\nu\geq 1} L^{k+2p+m+1}_\nu(\xi_\pi)\left(\sin\alpha^\pi_{km(\kappa-\nu)}+\sin\alpha^\pi_{km(\kappa+\nu)}\right)\Bigg)\sin i_\pi\cos u_\pi\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
(\text{für } r_\pi > r_s) \qquad (10.38)
$$

mit der Abkürzung

$$\alpha^{\pi}_{kmj} = ku + m(\Omega - \lambda_\pi) + j(\lambda_\pi - \lambda_s)\,.$$

10.4 Zerlegung der Hamilton-Funktion einer Bahnbewegung im Sonnensystem in eine integrable Form und ein periodisches Residuum

Die Hamilton-Funktion des gegebenen Bewegungssystems lautet

$$F = -\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2}\right) + V_c + \sum_\alpha V_\alpha - T \qquad \text{in Hill-Variablen}$$

oder

$$F = -\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{1}{r^2}\left(J^2 + \frac{H^2}{\sin^2\theta}\right)\right) + V_c + \sum_\alpha V_\alpha - T \qquad \text{in Kugelvariablen}$$

mit

V_c – Potential des Zentralkörpers, das mittels (10.30) oder (10.31), (10.32) und (10.35) für die Satelliten-, Planeten- und Mondbewegung ausgedrückt wird,

V_α – Störfunktion des Störkörpers α, die durch (10.34), (10.36)-(10.38) für die Planeten- und Mondbewegung angegeben ist.

Eine allgemeine Lösung des gegebenen Systems erhält man aus den Integralen eines zu dem System genügend nahe liegenden integrablen Systems (integrablen Näherungssystems). Zur Problemlösung ist daher ein solches Näherungssystem zu finden. Es wird das integrable System

$$F = -\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + \Phi\left(G,H,e^2\right) + \Psi\left(G,H,\tau\right) - T \tag{9.53}$$

als ein Muster des gesuchten integrablen Näherungssystem angenommen.

Die Frage ist, ob es einen Teil in der Hamilton-Funktion eines Bewegungsproblems gibt, der sich durch ein integrables System der Form (9.53) erfassen lässt und wie man diesen Teil aus der Hamilton-Funktion abtrennen kann.

Aus den o.g. Potentialfunktionen lässt sich ein in Form (9.53) dargestellter Teil V^* durch die folgenden Schritte abtrennen:

- Ausschließung der Bahnvariablen Ω oder u aus den Potentialfunktionen; also im Fall der Kugelkoordinaten der von λ abhängigen Terme und der Terme, welche die Faktoren $\sin\theta$ oder $\left(J/G\right)^2\sin^2\theta - \cos^2\theta$ enthalten. Es ergibt sich z.B. aus der Störfunktion (10.37)

$$V_\pi = \frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})r_s}\sum_p\left(\frac{r}{r_s}\right)^{2p}\Phi^0_{(2p)0p}(i)\left(L_0^{2p+1}(\eta_\pi) + 2\sum_{\nu\ge1}L_\nu^{2p+1}(\eta_\pi)\cos\nu(\lambda_\pi - \lambda_s)\right) + \ldots$$

- Ersatz des Radiusvektors r in den von den Winkelvariablen λ_π, λ_s oder u_π abhängigen Termen durch $p = \Gamma^2/\mu$;

$$\begin{aligned} V_\pi = {} & \frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})r_s}\sum_p\left(\frac{r}{r_s}\right)^{2p}\Phi^0_{(2p)0p}(i)\,L_0^{2p+1}(\eta_\pi) \\ & + 2\frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})r_s}\sum_p\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r_s}\right)^{2p}\Phi^0_{(2p)0p}(i)\sum_{\nu\ge1}L_\nu^{2p+1}(\eta_\pi)\cos\nu(\lambda_\pi - \lambda_s) + \ldots \end{aligned}$$

- Zerlegung der Potenzen der Radiusvektoren r_π und r_s in je einen konstanten Teil und einen von der Zeit (über die wahre Anomalie) explizit abhängigen Teil:

$$\left(\frac{p_\pi}{r_\pi}\right)^\nu = Y_{(\nu)0}\left(e_\pi^2\right) + \left(\left(\frac{p_\pi}{r_\pi}\right)^\nu - Y_{(\nu)0}\left(e_\pi^2\right)\right), \qquad \left(\frac{p_s}{r_s}\right)^\nu = Y_{(\nu)0}\left(e_s^2\right) + \left(\left(\frac{p_s}{r_s}\right)^\nu - Y_{(\nu)0}\left(e_s^2\right)\right).$$

  Dabei ersetzt man den mit dem zweiten Teil verbundenen Faktor r durch p.

Damit ergibt sich aus dem o.g. Beispiel

$$\begin{aligned}
V_\pi &= \frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\,p_s}\sum_p \left(\frac{r}{p_s}\right)^{2p} Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}(i)\,L_0^{2p+1}(\eta_\pi)\\
&+\frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\,p_s}\sum_p \left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p}\Phi^0_{(2p)0p}(i)\,L_0^{2p+1}(\eta_\pi)\left(\left(\frac{p_s}{r_s}\right)^{2p+1}-Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\right)\\
&+2\frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\,r_s}\sum_p \left(\frac{p}{r_s}\right)^{2p}\Phi^0_{(2p)0p}(i)\sum_{\nu\ge1}L_\nu^{2p+1}(\eta_\pi)\cos\nu(\lambda_\pi-\lambda_s)+\ldots
\end{aligned}$$

- Ersetzung der verbleibenden Potenz von r durch

$$\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}\right)^{\nu}=\left(\frac{\Gamma^2}{\mu r}\right)^{2}\left(1+\left(Y_{(\nu-2)0}\left(e^2\right)-1\right)\right),$$

womit die von der wahren Anomalie abhängige Komponente abgetrennt ist:

$$\begin{aligned}
V_\pi &= \frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\mu}\frac{\Gamma^2}{r^2}\sum_p \left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}(i)\,L_0^{2p+1}(\eta_\pi)\\
&+\frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\mu}\frac{\Gamma^2}{r^2}\sum_p \left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}(i)\,L_0^{2p+1}(\eta_\pi)\left(Y_{(-2p-2)0}\left(e^2\right)-1\right)\\
&+\frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\,p_s}\sum_p \left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p}\Phi^0_{(2p)0p}(i)\,L_0^{2p+1}(\eta_\pi)\left(\left(\frac{p_s}{r_s}\right)^{2p+1}-Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\right)\\
&+2\frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\,r_s}\sum_p \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r_s}\right)^{2p}\Phi^0_{(2p)0p}(i)\sum_{\nu\ge1}L_\nu^{2p+1}(\eta_\pi)\cos\nu(\lambda_\pi-\lambda_s)+\ldots
\end{aligned}$$

- Ersetzung des Faktor Γ^2/r^2 in dem von der Exzentrizität abhängigen Term:

$$\begin{aligned}
V_\pi^* &= \frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\mu}\frac{\Gamma^2}{r^2}\sum_p \left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}(i)\,L_0^{2p+1}(\eta_\pi)\\
&+\frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\mu}\frac{\mu^2}{\Gamma^2}\sum_p \left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}(i)\,L_0^{2p+1}(\eta_\pi)\left(Y_{(-2p-2)0}\left(e^2\right)-1\right)\left(1-e^2\right)^{3/2}\\
&+\frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\,p_s}\sum_p \left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p}\Phi^0_{(2p)0p}(i)\,L_0^{2p+1}(\eta_\pi)\left(\left(\frac{p_s}{r_s}\right)^{2p+1}-Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\right)\\
&+2\frac{Gm_\pi}{(1+\bar{m})\,r_s}\sum_p \left(\frac{\Gamma^2}{\mu r_s}\right)^{2p}\Phi^0_{(2p)0p}(i)\sum_{\nu\ge1}L_\nu^{2p+1}(\eta_\pi)\cos\nu(\lambda_\pi-\lambda_s)\,.
\end{aligned} \tag{10.39}$$

Damit ist die zu dem integrablen Näherungssystem passende Komponente der Potentialfunktion (10.37) abgegrenzt. Der erste Term in (10.39) geht über in die Definition der Größen Γ; der zweite Term wird durch die Funktion $\Phi\left(G,H,e^2\right)$ in (9.53) übernommen; die letzten zwei Terme gehören zu $\Psi(G,H,\tau)$.

Zusammengefasst erhält man als das erste annähernde System

für die Satellitenbewegung im Erdgravitationsfeld:

$$\begin{aligned}
F^* &= -\frac{1}{2}\dot{r}^2-\frac{1}{2}\frac{G^2}{r^2}\left(1-2\sum_{p\ge2}\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{2p}c_{(2p)0}F_{(2p)0p}(i)\right)+\frac{\mu}{r}\\
&+\frac{\mu^2}{\Gamma^2}\sum_{p\ge2}\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{2p}c_{(2p)0}F_{(2p)0p}(i)\left(Y_{(2p-1)0}\left(e^2\right)-1\right)\left(1-e^2\right)^{3/2}-T
\end{aligned} \tag{10.40}$$

mit

$$\Gamma^2=G^2\left(1-2\sum_{p\ge2}\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{2p}c_{(2p)0}F_{(2p)0p}(i)\right) \tag{10.41}$$

oder

$$F^* = -\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\sum_{n\geq 2}^{(e)}\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{2p} c_{(2p)0}\left(\eta^0_{(2p)0} + \frac{1}{2}\eta^0_{(2p)2}\sin^2 i\right)\left(Y_{(2p-1)0}\left(e^2\right)-1\right)\left(1-e^2\right)^{3/2} - T \tag{10.42}$$

mit

$$\Gamma^2 = G^2\left(1 - 2\sum_{n\geq 2}\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{2p} c_{(2p)0}\left(\eta^0_{(2p)0} + \frac{1}{2}\eta^0_{(2p)2}\sin^2 i\right)\right). \tag{10.43}$$

für die Planetenbewegung:

$$F^*_{\bar{\pi}} = -\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\bar{\Phi}_{\bar{\pi}}\left(G,H,e^2\right)\left(1-e^2\right)^{3/2} + \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\bar{\Psi}_{\bar{\pi}}\left(G,H,\tau\right) - T \tag{10.44}$$

mit

$$\Gamma^2 = G^2\left(1 - 2X_{\bar{\pi}}\left(G,H\right)\right),$$

$$\begin{aligned} X_{\bar{\pi}}\left(G,H\right) = {} & \left(\frac{\mu a_s}{\Gamma^2}\right)^2 c_{2(0)}F_{2(0)1}\left(i\right) + \sum_{\pi=1}^{\bar{\pi}-1}\frac{\mu_\pi}{\mu}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{p_\pi}{p}\right)^{2p} Y_{(-2p)0}\left(e_\pi^2\right)\Phi_{(2p)0p}\left(i,i_\pi\right) \\ & + \sum_{\pi\geq\bar{\pi}+1}\frac{\mu_\pi}{\mu}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{p}{p_\pi}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_\pi^2\right)\Phi_{(2p)0p}\left(i,i_\pi\right), \end{aligned} \tag{10.45}$$

$$\mu = \mu_s + \sum_{\pi=1}^{\bar{\pi}-1}\mu_\pi = G\left(M_s + \sum_{\pi=1}^{\bar{\pi}-1}M_\pi\right), \tag{10.46}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{\bar{\pi}}\left(G,H,e^2\right) = {} & \sum_{\pi=1}^{\bar{\pi}-1}\frac{\mu_\pi}{\mu}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{p_\pi}{p}\right)^{2p} Y_{(-2p)0}\left(e_\pi^2\right)\Phi_{(2p)0p}\left(i,i_\pi\right)\left(Y_{(2p-1)0}\left(e^2\right)-1\right) \\ & + \sum_{\pi\geq\bar{\pi}+1}\frac{\mu_\pi}{\mu}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{p}{p_\pi}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_\pi^2\right)\Phi_{(2p)0p}\left(i,i_\pi\right)\left(Y_{(-2p-2)0}\left(e^2\right)-1\right) \end{aligned} \tag{10.47}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\bar{\pi}}\left(G,H,\tau\right) = {} & \sum_{\pi=1}^{\bar{\pi}-1}\frac{\mu_\pi}{\mu}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{p_\pi}{p}\right)^{2p}\left(\Phi_{(2p)0p}\left(i,i_\pi\right)\left(\left(\frac{r_\pi}{p_\pi}\right)^{2p} - Y_{(-2p)0}\left(e_\pi^2\right)\right) + \left(\frac{r_\pi}{p_\pi}\right)^{2p}\Psi_{(2p)0p}\left(i,i_\pi\right)\cos 2u_\pi\right) \\ & + \sum_{\pi\geq\bar{\pi}+1}\frac{\mu_\pi}{\mu}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{p}{p_\pi}\right)^{2p+1}\left(\Phi_{(2p)0p}\left(i,i_\pi\right)\left(\left(\frac{p_\pi}{r_\pi}\right)^{2p+1} - Y_{(2p+1)0}\left(e_\pi^2\right)\right) + \left(\frac{p_\pi}{r_\pi}\right)^{2p+1}\Psi_{(2p)0p}\left(i,i_\pi\right)\cos 2u_\pi\right) \end{aligned} \tag{10.48}$$

und **für die Mondbewegung**

$$F^*_M = -\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\bar{\Phi}_M\left(G,H,e^2\right)\left(1-e^2\right)^{3/2} + \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\bar{\Psi}_M\left(G,H,\tau\right) - T \tag{10.49}$$

mit

$$\mu = \frac{Gm_E}{\left(1+\bar{m}\right)}, \tag{10.50}$$

$$\Gamma^2 = G^2\left(1 - 2X_M\left(G,H\right)\right),$$

$$\begin{aligned} X_M\left(G,H\right) = {} & \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^2 \hat{c}_{2(0)}F_{2(0)1}\left(i\right) + \frac{\mu_s}{\mu_e}\sum_p\left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right) \\ & + \sum_{\pi=1}^{\bar{\pi}-1}\frac{\mu_\pi}{\mu_e}\sum_p\left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right)L_0^{2p+1}\left(\eta_\pi\right) \\ & + \sum_{\pi\geq\bar{\pi}+1}\frac{\mu_\pi}{\mu_e}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{p}{p_\pi}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_\pi^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right)L_0^{2p+1}\left(\xi_\pi\right) \end{aligned} \tag{10.51}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_M\left(G,H,e^2\right) &= \frac{\mu_s}{\mu_e}\sum_p\left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right)\left(Y_{(-2p-2)0}\left(e^2\right)-1\right)\\ &+\sum_{\pi=1}^{\bar{\pi}-1}\frac{\mu_\pi}{\mu_e}\sum_p\left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right)L_0^{2p+1}\left(\eta_\pi\right)\left(Y_{(-2p-2)0}\left(e^2\right)-1\right)\\ &+\sum_{\pi\geq\bar{\pi}+1}\frac{\mu_\pi}{\mu_e}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{p}{p_\pi}\right)^{2p+1} Y_{(2p+1)0}\left(e_\pi^2\right)\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right)L_0^{2p+1}\left(\xi_\pi\right)\left(Y_{(-2p-2)0}\left(e^2\right)-1\right),\end{aligned} \tag{10.52}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_M\left(G,H,\tau\right) &= \frac{\mu_s}{\mu_e}\sum_p\left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p+1}\left(\left(\frac{p_s}{r_s}\right)^{2p+1}-Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\right)\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right)\\ &+\sum_{\pi=1}^{\bar{\pi}-1}\frac{\mu_\pi}{\mu_e}\sum_p\left(\frac{p}{p_s}\right)^{2p+1}\left(\left(\frac{p_s}{r_s}\right)^{2p+1}-Y_{(2p+1)0}\left(e_s^2\right)\right)\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right)L_0^{2p+1}\left(\eta_\pi\right)\\ &+2\sum_{\pi=1}^{\bar{\pi}-1}\frac{\mu_\pi}{\mu_e}\sum_p\left(\frac{p}{r_s}\right)^{2p+1}\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right)\sum_{\nu\geq 1}L_\nu^{2p+1}\left(\eta_\pi\right)\cos\nu\left(\lambda_\pi-\lambda_s\right)\\ &+\sum_{\pi\geq\bar{\pi}+1}\frac{\mu_\pi}{\mu_e}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{p}{p_\pi}\right)^{2p+1}\left(\left(\frac{p_\pi}{r_\pi}\right)^{2p+1}-Y_{(2p+1)0}\left(e_\pi^2\right)\right)\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right)L_0^{2p+1}\left(\xi_\pi\right)\\ &+2\sum_{\pi\geq\bar{\pi}+1}\frac{\mu_\pi}{\mu_e}\sum_{p\geq 1}\left(\frac{p}{r_\pi}\right)^{2p+1}\Phi^0_{(2p)0p}\left(i\right)\sum_{\nu\geq 1}L_\nu^{2p+1}\left(\xi_\pi\right)\cos\nu\left(\lambda_\pi-\lambda_s\right).\end{aligned} \tag{10.53}$$

Damit lässt sich das ursprüngliche System ausdrücken durch

$$F = -\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + \Phi\left(G,H,e^2\right) + \Psi\left(G,H,\tau\right) - T + R\left(\dot{r},G,H,T;r,u,\Omega,\tau\right), \tag{10.54}$$

worin das Residuum $R = F - F^*$ rein periodisch ist. Dieses und dessen partielle Ableitungen sind größenordnungsmäßig klein. Wenn die Quadratur $\int R dt$ ebenfalls größenordnungsmäßig kleiner als F^* ist, dann lässt sich das periodische Residuum R durch eine fast-identische kanonische Transformation aus der Hamilton-Funktion beseitigen.

Durch die Transformation entsteht ein neues integrable System

$$F'^* = -\frac{1}{2}\dot{r}'^2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'^2}{r'^2} + \frac{\mu}{r'} + \Phi'\left(G',H',e'^2\right) + \Psi'\left(G',H',\tau'\right) - T', \tag{10.55}$$

das mit einem größenordnungsmäßig kleinen Residuum $|R'| << |R|$ nahe zu dem gegebenen System liegt:

$$F' = F'^* + R'\left(\dot{r}',G',H',T';r',u',\Omega',\tau'\right). \tag{10.56}$$

Wenn das Residuum R' genügend klein ist, dann lassen sich dessen sämtliche Integrale als eine Näherungslösung des gegebenen Systems annehmen.

Anm.: Aus (10.46) erkennt man weiter, dass *nicht nur der Gravitationskoeffizient* $\mu_s = GM$ *der Sonne, sondern auch die Gravitationskoeffizienten aller nahe an der Sonne befindlichen Planeten zu dem Halbparameter der elliptischen Bahn eines Planeten beitragen*.

10.5 Integration einer Funktion der Gestalt $\cos\left(ku + m\Omega + l\Theta + qf\right)$ über die Zeit

Zur Elimination von Termen der Gestalt $\cos\beta_{kmql} = \cos\left(ku + m\Omega + l\Theta + qf\right)$ bzw. $\sin\beta_{kmql}$ aus der Hamilton-Funktion durch eine Lie-Transformation ist das Integral

$$\int \cos\beta_{kmql}\, dt = \int \cos\left(ku + m\Omega + l\Theta + qf\right) dt$$

zu berechnen.

Aus (9.61)erhält man (der Einfachheit halber ist $\Psi(G,H;\tau) \equiv 0$ angenommen.)

$$\frac{du}{dt} = \vartheta \frac{\Gamma}{r^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial G} - \vartheta^{-1}\frac{\Gamma^3}{\mu^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial G} - \frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\right)\left(\frac{\mu r}{\Gamma^2}\right)^2\right),$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \vartheta \frac{\Gamma}{r^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial H} - \vartheta^{-1}\frac{\Gamma^3}{\mu^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial H} - \frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial H}\right)\left(\frac{\mu r}{\Gamma^2}\right)^2\right),$$

$$\frac{df}{dt} = \left(1 - 2\frac{\Gamma^2}{\mu^2}\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\right)\frac{\Gamma}{r^2} := \vartheta\frac{\Gamma}{r^2}, \qquad \frac{\Gamma^2}{r^2} = \left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\mu^2}{\Gamma^2} + \Gamma\vartheta^{-1}\frac{d\left(f-M\right)}{dt}.$$

Die zeitliche Ableitung von Θ lässt sich durch

$$\frac{d\Theta}{dt} = \dot\Theta = \vartheta\frac{\Gamma}{r^2}\vartheta^{-1}\frac{\Gamma^3\dot\Theta}{\mu^2}\left(\frac{\mu r}{\Gamma^2}\right)^2$$

ausdrücken. Damit folgt

$$d\beta_{kmql} := d\left(ku + m\Omega + qf - l\Theta\right) = \vartheta\frac{\Gamma}{r^2}M_{kmql}\left(1 - \frac{N_{kml}}{M_{kmql}}\left(\left(\frac{\mu r}{\Gamma^2}\right)^2 - 1\right)\right)dt \tag{10.57}$$

mit der Abkürzung

$$M_{kmql} = k\frac{\partial\Gamma}{\partial G} + m\frac{\partial\Gamma}{\partial H} + q - N_{kml},$$

$$N_{kml} = \vartheta^{-1}\frac{\Gamma^3}{\mu^2}\left(k\left(\frac{\partial\Phi}{\partial G} - \frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\right) + m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial H} - \frac{2}{\Gamma}\left(1-e^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial e^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial H}\right) - l\dot\Theta\right),$$

unter der Bedingung

$$M_{kmql} \neq 0.$$

Wenn

$$\left|\frac{N_{kml}}{M_{kmql}}\left(\left(\frac{\mu r}{\Gamma^2}\right)^2 - 1\right)\right| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{N_{kml}}{M_{kmql}}\right| < \frac{1}{2e}, \tag{10.58}$$

dann ergibt eine binomische Reihenentwicklung

$$dt = \vartheta^{-1}\frac{r^2}{\Gamma}\frac{1}{M_{kmql}}\left(1 + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{N_{kml}}{M_{kmql}}\right)^n\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2 - 1\right)^n\right)d\beta_{kmql}$$

und

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2 - 1\right)dt = \frac{1}{\vartheta N_{kml}}\frac{r^2}{\Gamma}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{N_{kml}}{M_{kmql}}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2 - 1\right)\right)^n d\beta_{kmql}.$$

Für den Faktor $\left((r/p)^2-1\right)^n$ erhält man mit Hilfe des binomischen Satzes und der Exzentrizitätsfunktionen

$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2-1\right)^n=\sum_{\kappa=0}^{n}(-1)^\kappa\binom{\kappa}{n}\left(\frac{r}{p}\right)^{2\kappa}=\sum_{\kappa=0}^{n}(-1)^\kappa\binom{\kappa}{n}\left(Y_{(-2\kappa)0}\left(e^2\right)+2\sum_{j\geq1}Y_{(-2\kappa)j}\left(e^2\right)e^j\cos jf\right)$$
$$=\sum_{\alpha\geq1}^{\infty}\frac{1}{\alpha!\alpha!}\phi_n(2\alpha)\left(\frac{e}{2}\right)^{2\alpha}+2\sum_{j\geq1}\left(\frac{-1}{2}\right)^j\frac{1}{j!}\phi_n(j)e^j\cos jf+2\sum_{j\geq1}\sum_{\sigma\geq1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^j\frac{\phi_n(j+2\alpha)}{\alpha!(j+\alpha)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2\alpha}e^j\cos jf,$$

wobei

$$\phi_n(m)=\sum_{\kappa=1}^{n}(-1)^\kappa\binom{n}{\kappa}\frac{(m+2\kappa-1)!}{(2\kappa-1)!}$$

eine Funktion der Integerzahl m ist. Es lässt sich durch mathematische Induktion zeigen, dass $\phi_n(m)=0$ für $m<n$. Damit lässt sich der Laufbereich des Summationsindex σ in o.g. Gleichung reduzieren; man erhält

$$e^{-n}\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2-1\right)^n=2^{-n}\sum_{2\alpha\geq n}\frac{1}{\alpha!\alpha!}\phi_n(2\alpha)\left(\frac{e}{2}\right)^{2\alpha-n}$$
$$+2\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{j\geq1}(-1)^j\left(\frac{\phi_n(j)}{j!}\left(\frac{e}{2}\right)^{j-n}+\sum_{2\alpha\geq n-j}\frac{\phi_n(j+2\alpha)}{\alpha!(j+\alpha)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2\alpha-n+j}\right)\cos jf\,. \tag{10.59}$$

Es ist ersichtlich, dass es keine negative Potenz von e auf der rechten Seite gibt, da die darin erscheinende Funktion $\phi_n(m)$ erst ab $m=n$ zu zählen ist. Deshalb ist die rechte Seite von der Größenordnung $O(1)$. Mit Hilfe von (10.59) erhält man

$$dt=\frac{r^2}{\Gamma}\frac{1}{\vartheta M_{kmql}}\left(1+\Psi_0^{kmql}+2\sum_{\nu\geq1}\Psi_\nu^{kmql}e^\nu\cos\nu f\right)d\beta_{kmql}, \tag{10.60}$$
$$\left(\left(\frac{r}{p}\right)^2-1\right)dt=\frac{1}{\vartheta N_{kml}}\frac{r^2}{\Gamma}\left(\Psi_0^{kmql}+2\sum_{\nu\geq1}\Psi_\nu^{kmql}e^\nu\cos\nu f\right)d\beta_{kmql}$$

mit der Abkürzung

$$\Psi_0^{kmql}:=\sum_{n\geq1}\left(\frac{N_{kml}}{M_{kmql}}\right)^n\sum_{2\alpha\geq n}\frac{1}{\alpha!\alpha!}\phi_n(2\alpha)\left(\frac{e}{2}\right)^{2\alpha},$$
$$\Psi_\nu^{kmql}:=\left(\frac{-1}{2}\right)^\nu\sum_{n\geq1}\left(\frac{N_{kml}}{M_{kmql}}\right)^n\left(\sum_{2\alpha\geq n-\nu}\frac{\phi_n(\nu+2\alpha)}{\alpha!(\nu+\alpha)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2\alpha}+\frac{\phi_n(\nu)}{\nu!}\right),\qquad(\nu\geq1). \tag{10.61}$$

Mit Hilfe von (10.60) erhält man weiter

$$\int\frac{\Gamma}{r^2}\begin{pmatrix}\cos\beta_{kmql}\\ \sin\beta_{kmql}\end{pmatrix}dt=\frac{1+\Psi_0^{kmql}}{\vartheta M_{kmql}}\int\begin{pmatrix}\cos\beta_{kmql}\\ \sin\beta_{kmql}\end{pmatrix}d\beta_{kmql}+\sum_{\nu\geq1}\Psi_\nu^{kmql}e^\nu\int\begin{pmatrix}\cos\beta_{km(q-\nu)l}+\cos\beta_{km(q+\nu)l}\\ \sin\beta_{km(q-\nu)l}+\sin\beta_{km(q+\nu)l}\end{pmatrix}\frac{d\beta_{kmql}}{\vartheta M_{kmql}}, \tag{10.62}$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite direkt integriert werden kann; das resultiert in

$$\frac{1+\Psi_0^{kmql}}{\vartheta M_{kmql}}\begin{pmatrix}\sin\beta_{kmql}\\ -\cos\beta_{kmql}\end{pmatrix}.$$

Das Differential $d\beta_{kmql}$ im zweiten Term lässt sich mit Hilfe von (10.57) in dt umwandeln. Damit erhält man wieder Integrationen über die Zeit, für die man die Formel (10.62) verwenden kann. Da der zweite Term um die Größenordnung $O(e)$ kleiner als der erste ist, führt eine iterative Verwendung von (10.62) zu einer Auswertung der Integration $\int\frac{\Gamma}{r^2}\begin{pmatrix}\cos\beta_{kmql}\\ \sin\beta_{kmql}\end{pmatrix}dt$ mit ausreichender Genauigkeit.

Wie im Abschnitt 10.4 ausgeführt werden wird, lässt sich die Formel (10.62) bei der Ausarbeitung einer Lösung 3. Ordnung der Bahnbewegung künstlicher Satelliten verwenden.

Die hier vorgestellte Methode ist für eine Lösung 2. Ordnung für die Satellitenbewegung mittels weniger Iterationsschritte verwendbar. Für eine Lösung 3. Ordnung sind aber mehr Iterationen notwendig. Ein alternativer Weg soll im Weiteren untersucht werden, womit eine allgemeine und relativ einfache Formel erzielt werden kann.

10.6 Konzept einer Lösung 3. Ordnung für die Satellitenbewegung

Eine analytische Lösung k. Ordnung ist eine Lösung mit einem Abbruchfehler von $O\left(\varepsilon^{k+1}\right)$, wobei ε für einen das Problem charakterisierenden dimensionslosen kleinen Parameter steht. In der Satellitenbahntheorie ist $\varepsilon = J_2 \approx 10^{-3}$. Deshalb ist der relative Fehler für eine Lösung 2. Ordnung $\delta = O\left(10^{-9}\right)$ und für eine Lösung 3. Ordnung $\delta = O\left(10^{-12}\right)$. Eine Lösung 2. Ordnung für die Satellitenbewegung ist in (*Cui, 1997*) unter Einbeziehung der Störungen durch einen dritten Himmelskörper, der nicht-gravitativen Störungen sowie der Resonanzeffekte angegeben.

Nach dem im Abschnitt 6.4 konzipierten Verfahren ist eine Lösung 3. Ordnung mittels zweier Lie-Transformationen möglich. Der Einfachheit halber wird hier nur das Gravitationsfeld einer im Raum gleichmäßig rotierenden starren Erde berücksichtigt. Allerdings werden zwei weitere Einschränkungen hinsichtlich der Problemstellung vorgenommen:

(1) Ausschluss einer Bahnkonfiguration mit kritischer Inklination, in der starke Resonanzeffekte hinsichtlich der Umlaufsbewegungen des Satelliten bezüglich des Erdzentrums und bezüglich der elliptischen Bahn auftreten;

(2) Ausschluss einer zyklischen Bahnkonfiguration, in der starke Resonanzeffekte zwischen der Umlaufbewegung des Satelliten und der Rotation der Erde auftreten.

Die Schlüsselaufgabe der Lösung 3. Ordnung liegt im Aufbau einer Lie-Transformation als Produkt zweier Transformationen, die zur Elimination aller periodischen Komponenten bis zur 3. Ordnung aus der Hamilton-Funktion führt. Sobald eine solche Transformation aufgebaut (d. i., ihre Erzeugende ermittelt worden) ist, liegen ein integrables System und dessen allgemeine Lösung vor. Diese Lösung wird als eine Näherungslösung des ursprünglichen Problems angenommen.

10.6.1 Die Hamilton-Funktion

Die das Bewegungsproblem beschreibende Hamilton-Funktion lässt sich durch (10.54) ausdrücken. Eine Umformulierung ergibt

$$F = F_0^* + R\left(\dot{r}, G, H, T; r, u, \Omega, \tau\right) \tag{10.63}$$

mit

$$F_0^* = -\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{G^2}{r^2}\left(1 - 2X_0\left(G,H\right)\right) + \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\bar{\Phi}_0\left(G,H,e^2\right)\left(1-e^2\right)^{3/2} - T\,,$$

worin F^* mittels (10.40) angegeben ist und $\Gamma\left(G,H\right)$, $X_0\left(G,H\right)$ und $\bar{\Phi}_0\left(G,H,e^2\right)$ durch (10.40)-(10.41) definiert sind.

Da die explizite Abhängigkeit der Hamilton-Funktion (10.30) von der Zeit (durch den Winkel Θ, also den Rotationswinkel der Erde) immer mit der Abhängigkeit von der Winkelkoordinate Ω verknüpft ist, entfällt in diesem Spezialfall der Term $\Psi\left(G,H,\tau\right)$. Das Residuum (Abweichung der Hamilton-Funktion von F^*) R lässt sich zerlegen in

$$\begin{aligned}
R &:= R_z + R_t\,,\\
R_z &= 2\frac{\Gamma^2}{r^2}\sum_{q\geq 1} C_{00q}e^q\cos qf + \Gamma\vartheta^{-1}\sum_{p\geq 2}\gamma_{(2p)0}\,\mathrm{F}_{(2p)0p}\left(i\right)\left(Y_{(2p-1)0}\left(e^2\right)-1\right)\frac{d\left(f-M\right)}{dt}\\
&\quad + 2\frac{\Gamma^2}{r^2}\sum_{s\geq 1}\left(C_{(2s)00}\cos\alpha_{(2s)00} + \sum_{q\geq 1}C_{(2s)0q}e^q\left(\cos\alpha_{(2s)0q} + \cos\alpha_{(2s)0(-q)}\right)\right)\\
&\quad + 2\frac{\Gamma^2}{r^2}\sum_{s\geq 0}\left(C_{(2s+1)00}\sin\alpha_{(2s+1)00} + \sum_{q\geq 1}C_{(2s+1)0q}e^q\left(\sin\alpha_{(2s+1)0q} + \sin\alpha_{(2s+1)0(-q)}\right)\right),\\
R_t &= \frac{\Gamma^2}{r^2}\sum_{m\geq 1}\sum_{k}^{(e)}\left\{\left(C_{km0}\cos\alpha_{km0} + S_{km0}\sin\alpha_{km0}\right) + \sum_{q\geq 1}\left(C_{kmq}\left(\cos\alpha_{kmq} + \cos\alpha_{km(-q)}\right) + S_{kmq}\left(\sin\alpha_{kmq} + \sin\alpha_{km(-q)}\right)\right)\right\}\\
&\quad + \frac{\Gamma^2}{r^2}\sum_{m\geq 1}\sum_{k}^{(o)}\left\{\left(C_{km0}\sin\alpha_{km0} - S_{km0}\cos\alpha_{km0}\right) + \sum_{q\geq 1}\left(C_{kmq}\left(\sin_{kmq} + \sin\alpha_{km(-q)}\right) - S_{kmq}\left(\cos\alpha_{kmq} + \cos\alpha_{km(-q)}\right)\right)\right\}
\end{aligned} \tag{10.64}$$

mit den Abkürzungen

$$\alpha_{kmq} = ku + m(\Omega - \Theta) + qf \;,$$

$$C_{k0q}\left(\Gamma, c, e^2\right) = \sum_{p\ge 0} \gamma_{(k+2p)0} \mathrm{F}_{(k+2p)0p}(i) Y_{(k+2p-1)q}\left(e^2\right), \; \gamma_{n0} = \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^n c_{n0}$$

$$\begin{Bmatrix} C_{kmq}\left(\Gamma, c, e^2\right) \\ S_{kmq}\left(\Gamma, c, e^2\right) \end{Bmatrix} = \sum_{p\ge 0} \begin{Bmatrix} c_{(k+2p)m} \\ s_{(k+2p)m} \end{Bmatrix} \left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^n \mathrm{F}_{(k+2p)mp}(i) Y_{(k+2p-1)q}\left(e^2\right), \qquad (m \ge 1). \tag{10.65}$$

In der Summation $\sum\limits_k^{(e)}$ läuft der Index k unter der Bedingung $k - m = gerade$; in $\sum\limits_k^{(o)}$ unter der Bedingung $k - m = ungerade$.

Da die hier verwendete Lie-Transformation fast-identisch ist, ergibt sich die Abschätzung der Größenordnung von Γ und Φ für das transformierte System ebenso wie für das originale System zu

$$\Gamma = G\left(1 + O\left(c_{(2)0}\right)\right) = G\left(1 + O(\varepsilon)\right), \qquad \Phi = O\left(\varepsilon^2 e^2\right)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial G} = 1 + O(\varepsilon), \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial H} = O(\varepsilon), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \Gamma} = O\left(\varepsilon^2 e^2\right),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial G} = O\left(\varepsilon^2 e^2\right), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial H} = O\left(\varepsilon^2 e^2\right), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial e^2} = O\left(\varepsilon^2\right). \tag{10.66}$$

Für eine Lösung 3. Ordnung wird als Ziel der dazu eingesetzten Lie-Transformation festgelegt, ein transformiertes System der Gestalt

$$F' = -\frac{1}{2}\dot r'^2 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'^2}{r'^2} + \frac{\mu}{r'} + \Phi'\left(G', H', e'^2\right) + \Psi'\left(G', H', \tau'\right) - T' + R'\left(\dot r', G', H', T'; r', u', \Omega', \tau'\right), \tag{10.56}$$

zu erreichen, worin $R'\left(\dot r', G', H'; r', u', (\Omega' - \Theta)\right) = O\left(\varepsilon^4\right) = O\left(c_{(2)0}{}^4\right)$.

10.6.2 Quadratur des Residuums über die Zeit und Integrabilität des Systems

Zur Berechnung der Quadratur des Residuums (10.64) über die Zeit sind die Formeln (14.48) - (14.49) zu verwenden. Mit

$$\alpha_{kmq} := \beta_{kmq(-m)},$$

$$\overline{\Psi}_0^{kmq} := \Psi_0^{kmq(-m)} = \sum_{n\ge 1}\left(\frac{Q_{km}}{P_{kmq}}\right)^n \sum_{2\alpha \ge n} \frac{1}{\alpha!\alpha!}\phi_n(2\alpha)\left(\frac{e}{2}\right)^{2\alpha},$$

$$\overline{\Psi}_\nu^{kmq} := \Psi_\nu^{kmq(-m)} = \left(\frac{-1}{2}\right)^\nu \sum_{n\ge 1}\left(\frac{Q_{km}}{P_{kmq}}\right)^n \left(\sum_{2\alpha \ge n-\nu} \frac{\phi_n(\nu + 2\alpha)}{\alpha!(\nu+\alpha)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2\alpha} + \frac{\phi_n(\nu)}{\nu!}\right) \qquad (\nu \ge 0) \tag{10.67}$$

$$Q_{km} := N_{km(-m)} = -k\overline{\sigma} + m\left(\theta_e - \overline{\tau}\right), \quad P_{kmq} := M_{kmq(-m)} = k\left(1 + \sigma + \overline{\sigma}\right) + q - m\left(\theta_e - \tau - \overline{\tau}\right),$$

und den Abkürzungen

$$\sigma := \frac{\partial \Gamma}{\partial G} - 1, \qquad \tau := \frac{\partial \Gamma}{\partial H},$$

$$\overline{\sigma} := \vartheta^{-1}\frac{\Gamma^3}{\mu^2}\left(\frac{2}{\Gamma}\left(1 - e^2\right)\frac{\partial \Phi}{\partial e^2}\frac{\partial \Gamma}{\partial G} - \frac{\partial \Phi}{\partial G}\right), \qquad \overline{\tau} := \vartheta^{-1}\frac{\Gamma^3}{\mu^2}\left(\frac{2}{\Gamma}\left(1 - e^2\right)\frac{\partial \Phi}{\partial e^2}\frac{\partial \Gamma}{\partial H} - \frac{\partial \Phi}{\partial H}\right),$$

$$\theta_e := \vartheta^{-1}\frac{\Gamma^3}{\mu^2}\dot\Theta. \tag{10.68}$$

ergibt sich ,eingesetzt in die Integrationsformel (10.61),

$$\int \frac{\Gamma}{r^2}\begin{pmatrix}\cos\alpha_{kmq}\\ \sin\alpha_{kmq}\end{pmatrix}dt = \frac{1+\overline{\Psi}_0^{kmq}}{\vartheta P_{kmq}}\int\begin{pmatrix}\cos\alpha_{kmq}\\ \sin\alpha_{kmq}\end{pmatrix}d\alpha_{kmq} + \sum_{\nu\geq 1}\frac{\overline{\Psi}_\nu^{kmq}}{\vartheta P_{kmq}}e^\nu\int\begin{pmatrix}\cos\alpha_{km(q-\nu)}+\cos\alpha_{km(q+\nu)}\\ \sin\alpha_{km(q-\nu)}+\sin\alpha_{km(q+\nu)}\end{pmatrix}d\alpha_{kmq}\,.$$

Durch eine zweite Iteration erhält man

$$\int \frac{\Gamma}{r^2}\begin{pmatrix}\cos\alpha_{kmq}\\ \sin\alpha_{kmq}\end{pmatrix}dt = \frac{\left(1+\overline{\xi}_{q(0)}^{km}\right)}{\vartheta P_{kmq}}\begin{pmatrix}\sin\alpha_{kmq}\\ -\cos\alpha_{kmq}\end{pmatrix} + \sum_{j\geq 1}e^j\left\{\frac{\overline{\xi}_{q(-j)}^{km}}{\vartheta P_{km(q-j)}}\begin{pmatrix}\sin\alpha_{km(q-j)}\\ -\cos\alpha_{km(q-j)}\end{pmatrix} + \frac{\overline{\xi}_{q(j)}^{km}}{\vartheta P_{km(q+j)}}\begin{pmatrix}\sin\alpha_{km(q+j)}\\ -\cos\alpha_{km(q+j)}\end{pmatrix}\right\} + \Delta_{kmq} \tag{10.69}$$

mit den Abkürzungen

$$\overline{\xi}_{q(0)}^{km} = \overline{\Psi}_0^{kmq}\left(1-\sum_{\alpha\geq 1}\alpha^2\left(\frac{\overline{\Psi}_\alpha^{km(q-\alpha)}}{P_{km(q-\alpha)}}+\frac{\overline{\Psi}_\alpha^{km(q+\alpha)}}{P_{km(q+\alpha)}}\right)\frac{\overline{\Psi}_\alpha^{kmq}}{P_{kmq}}e^{2\alpha}\right) + \sum_{\alpha\geq 1}\alpha\left(\overline{\Psi}_\alpha^{km(q-\alpha)}-\overline{\Psi}_\alpha^{km(q+\alpha)}\right)\frac{\overline{\Psi}_\alpha^{kmq}}{P_{kmq}}e^{2\alpha}\,,$$

$$\begin{aligned}\overline{\xi}_{q(-j)}^{km} = {}& \overline{\Psi}_j^{kmq} + \sum_{\alpha=1}^{j}\alpha\overline{\Psi}_{(j-\alpha)}^{km(q-\alpha)}\frac{\overline{\Psi}_\alpha^{kmq}}{P_{kmq}} - \sum_{\alpha\geq 1}\left(\alpha\overline{\Psi}_{(j+\alpha)}^{km(q+\alpha)}\frac{\overline{\Psi}_\alpha^{kmq}}{P_{kmq}} - (j+\alpha)\overline{\Psi}_\alpha^{km(q-j-\alpha)}\frac{\overline{\Psi}_{(j+\alpha)}^{kmq}}{P_{kmq}}\right)e^{2\alpha}\\ &+\overline{\Psi}_0^{km(q-j)}\left(\sum_{\alpha=1}^{j-1}\alpha(j-\alpha)\frac{\overline{\Psi}_{(j-\alpha)}^{km(q-\alpha)}\overline{\Psi}_\alpha^{kmq}}{P_{km(q-\alpha)}P_{kmq}} - \sum_{\alpha\geq 1}\alpha(j+\alpha)\left(\frac{\overline{\Psi}_{(j+\alpha)}^{km(q+\alpha)}\overline{\Psi}_\alpha^{kmq}}{P_{km(q+\alpha)}P_{kmq}}+\frac{\overline{\Psi}_\alpha^{km(q-j-\alpha)}\overline{\Psi}_{(j+\alpha)}^{kmq}}{P_{km(q-j-\alpha)}P_{kmq}}\right)e^{2\alpha}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\xi}_{q(j)}^{km} = {}& \overline{\Psi}_j^{kmq} - \sum_{\alpha=1}^{j}\alpha\overline{\Psi}_{(j-\alpha)}^{km(q+\alpha)}\frac{\overline{\Psi}_\alpha^{kmq}}{P_{kmq}} + \sum_{\alpha\geq 1}\left(\alpha\overline{\Psi}_{(j+\alpha)}^{km(q-\alpha)}\frac{\overline{\Psi}_\alpha^{kmq}}{P_{kmq}} - (j+\alpha)\overline{\Psi}_\alpha^{km(q+j+\alpha)}\frac{\overline{\Psi}_{(j+\alpha)}^{kmq}}{P_{kmq}}\right)e^{2\alpha}\\ &+\overline{\Psi}_0^{km(q+j)}\left(\sum_{\alpha=1}^{j-1}\alpha(j-\alpha)\frac{\overline{\Psi}_{(j-\alpha)}^{km(q+\alpha)}\overline{\Psi}_\alpha^{kmq}}{P_{km(q+\alpha)}P_{kmq}} - \sum_{\alpha\geq 1}\alpha(j+\alpha)\left(\frac{\overline{\Psi}_{(j+\alpha)}^{km(q-\alpha)}\overline{\Psi}_\alpha^{kmq}}{P_{km(q-\alpha)}P_{kmq}}+\frac{\overline{\Psi}_\alpha^{km(q+j+\alpha)}\overline{\Psi}_{(j+\alpha)}^{kmq}}{P_{km(q+j+\alpha)}P_{kmq}}\right)e^{2\alpha}\right).\end{aligned} \tag{10.70}$$

Man sieht, dass in den Integrationsformeln (10.69)-(10.70) Divisoren P_{kmq} und $P_{kmq}P_{kmq'}$ $(q' \neq q)$ auftreten. Ein Resonanzeffekt kann also dann auftreten, wenn P_{kmq} oder $P_{kmq'}$ sehr klein wird. (Da die Differenz zwischen P_{kmq} und $P_{kmq'}$ eine Integerzahl, nämlich $q-q'$ ist, ist es ausgeschlossen, dass beide gleichzeitig klein werden!) Zur Erfüllung der Bedingung (6.25)-(6.27) für eine fast-identische Lie-Transformation ist es daher notwendig und hinreichend, den Wertbereich von P_{kmq} durch

$$\left|P_{kmq}\right| \geq O\left(\varepsilon^\alpha\right) > O\left(\varepsilon^2\right) \tag{10.71}$$

mit $0 \leq \alpha < 2$ zu begrenzen. Für $m=0$ tritt ein Resonanzeffekt für die Indexkombination $q=-k$, $P_{k0(-k)} = k\left(\sigma+\overline{\sigma}\right)$ auf. Da $\overline{\sigma} = O\left(\varepsilon^2\right)$ aus (10.66) bekannt ist, erfordert (10.71) $\sigma = O\left(\varepsilon^\alpha\right)$ $(\alpha < 2)$. Andererseits erhält man aus (10.66) $\sigma = \frac{3}{4}\gamma_{(2)0}\left(1-5\cos^2 i\right)+O\left(\varepsilon^2\right)$; damit ändert sich die Forderung (10.71) zu $\left|1-5\cos^2 i\right| \geq O\left(\varepsilon^{\alpha-1}\right)$, d.h. die Bahninklination muss um $O\left(\varepsilon^{\alpha-1}\right)$ von ihrem kritischen Wert entfernt sein. Für $m \neq 0$ erfordert die Bedingung (10.71) $\left|k+q+k\left(\sigma+\overline{\sigma}\right)-m\left(\theta_e-\tau-\overline{\tau}\right)\right| \geq O\left(\varepsilon^\alpha\right) > O\left(\varepsilon^2\right)$, d.h., dass die drei Zahlen $\left\{\left(\sigma+\overline{\sigma}\right),\left(\theta_e-\tau-\overline{\tau}\right),1\right\}$ nicht kommensurabel sind, oder grob gesprochen, die Drehraten der Umlaufsbewegung des Satelliten und der Rotation der Erde nicht kommensurabel sind.

Unter der Bedingung (10.71) wird die Bedingung (5.26) im Abs. 5.4.1 für die zur Elimination der periodischen Komponenten aus der Hamilton-Funktion eingesetzten fast-identischen Lie-Transformationen erfüllt. Damit lässt sich die dort konzipierte Überprüfung der Integrabilität zu dem Bewegungsproblem einsetzen.

Aus dem Residuum (10.64) folgt, dass sich alle durch die jeweilige im Abschnitt 6.4.2 eingeführte fast-identische Transformation ergebenden Residuen $K\left(R^{(k)},s^{(k)}\right)$ in eine mit der integrablen Form (10.49) zusammenpassende Komponente $F^{*(k)}$ sowie eine die gleiche Funktionsstruktur wie das Residuum (10.64) besitzende und die Bedingung (10.71) erfüllende rein periodische Komponente zerlegen lassen. Dieser Sachverhalt ermöglicht ein immer weitergehendes integrables Näherungssystem mit höherem Annäherungsgrad.

Damit ist bewiesen, dass *das Bewegungsproblem durch ein integrables System zu beliebigen Graden approximierbar, also,* ***integrabel*** *ist.*

Anm.: (1) In der Himmelsmechanik ist bislang nur das **Stäckel-System**, zu denen das Kepler-Problem und das Vinti-System gehören, als integrabel bekannt.

(2) Die Bedingung (10.71) stellt sich dar als ein Sonderfall der in der KAM-Theorie für eine bedingte periodische Bewegung geforderten Bedingung (*Arnold, V. V. et el, 1988*).

10.6.3 Zweistufige Strategie zum Aufbau des integrablen Näherungssystems als Zielsystem

Die Elimination aller periodischen Terme aus der Hamilton-Funktion lässt sich auf zwei Transformationen verteilen: Mittels der ersten Transformation eliminiert man alle kurzperiodischen Komponenten der zonalen Terme einschließlich der Kopplungen bis zur dritten Ordnung; mittels der zweiten Transformation werden langperiodischen zonalen Terme und die tesseralen Terme eliminiert. Dadurch verbleiben nur Terme 4. Ordnung, die sich ihrerseits in einen durch das integrable System (10.49) erfassbaren Teil und einen rein periodischen Teil zerlegen lassen. Im folgenden wird der das Resonanzverhalten beschreibende Parameter zu $\alpha = 1$ angenommen.

1) Die erste Lie-Transformation, Elimination der zonalen Terme

Mit der ersten Lie-Transformation werden die zonalen Terme aus der Hamilton-Funktion eliminiert. Dazu ist die Erzeugende

$$s^{(1)} = \int R_z dt \tag{10.72}$$

zu bestimmen. Der weitere Teil der Hamilton-Funktion bleibt dabei unverändert. Die transformierte Hamilton-Funktion lässt sich nach (6.34) bestimmen zu:

$$F^{(1)} = F_0^* + R_t + \frac{1}{2}\left\{R_z, s^{(1)}\right\} - \frac{1}{6}\left\{\left\{R, s^{(1)}\right\}, s^{(1)}\right\} + \frac{1}{24}\left\{\left\{\left\{R, s^{(1)}\right\}, s^{(1)}\right\}, s^{(1)}\right\} + O\left(\varepsilon^5\right) \cdot \tag{10.73}$$

Da starke Resonanzeffekte (kritische Inklination) ausgeschlossen sind, ist hier der in (6.34) auftretende kleine Parameter δ gleich dem die Größenordnung des Residuums beschreibenden Parameter $\varepsilon = \gamma_{2(0)}$ gesetzt.

2) Die zweite Lie-Transformation, Elimination der durch die erste Transformation belassenen nichtlinearen zonalen Terme und der tesseralen Terme

Da die nach der ersten Lie-Transformation sich ergebende Hamilton-Funktion (10.73) noch nicht integrabel ist, ist eine zweite Transformation erforderlich. Dazu zerlegt man den Klammerterm in (10.73) nach dem im Abschnitt 10.4 gezeigten Durchführungsschema in zwei Teile:

$$K^{(1)} = \frac{1}{2}\left\{R_z, s^{(1)}\right\} - \frac{1}{6}\left\{\left\{R_z, s^{(1)}\right\}, s^{(1)}\right\} + \frac{1}{24}\left\{\left\{\left\{R_z, s^{(1)}\right\}, s^{(1)}\right\}, s^{(1)}\right\} = \left(\frac{\Gamma^2}{r^2} X_1\left(G,H\right) + \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\bar{\Phi}_1\left(G,H,e^2\right)\left(1-e^2\right)^{3/2}\right) + K_1$$

worin der erste Teil zu der integrablen Form (10.49) passt und K_1 periodisch ist. Man erhält also

$$F^{(1)} = F_1^* + \mathrm{R}_t + K_1 \cdot \tag{10.74}$$

mit

$$F_1^* = F_0^* + \frac{\Gamma^2}{r^2} X_1\left(G,H\right) + \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\bar{\Phi}_1\left(G,H,e^2\right)\left(1-e^2\right)^{3/2}$$

Zur Elimination der periodischen Terme $\mathrm{R}_t + K_1$ ist eine Transformation mit der Erzeugenden $s = \int\left(R_t + K_1\right)dt$ erforderlich. Zur Beschleunigung der Konvergenz wird

$$s^{(2)} = \int\left(R_t + K_1\right)dt + \int K_p^{(2)} dt =: \hat{s} + \Delta s \tag{10.75}$$

gesetzt, wobei

$$K^{(2)} = \frac{1}{2}\left\{R_t + K_1, \hat{s}\right\} - \frac{1}{6}\left\{\left\{R_t + K_1, \hat{s}\right\}, \hat{s}\right\} = K_c^{(2)} + K_p^{(2)} = O\left(\varepsilon^3\right)$$

den Klammerterm bezeichnet; dieser lässt sich wieder in zwei Teile zerlegen. Einer davon, $K_c^{(2)}$, passt zu der integrablen Form, der restliche, $K_p^{(2)}$, ist periodisch. Die Funktion Δs ist definiert durch

$$\Delta s = \int K_p^{(2)} dt = O\left(\varepsilon^2\right).$$

Nach der zweiten Transformation ergibt sich das restliche Residuum zu

$$\hat{R} = K_c^{(2)} + \frac{1}{2}\{R_t + K_1, \Delta s\} + O\left(\varepsilon^5\right),$$

das sich ferner in eine zu dem integrablen System passende Komponente sowie eine rein periodische Komponente zerlegen lässt; es ergibt sich demnach

$$\hat{R} = \frac{\Gamma^2}{r^2} X_2\left(G,H\right) + \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\bar{\Phi}_2\left(G,H,e^2\right)\left(1-e^2\right)^{3/2} + \Delta R + O\left(\varepsilon^5\right)$$

mit $\Delta R = O\left(\varepsilon^4\right)$.

Damit erhält man die transformierte Hamilton-Funktion

$$F^{(2)} = F_2^* + \Delta R + O\left(\varepsilon^5\right) \tag{10.76}$$

mit den Abkürzungen

$$F_2^* = -\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{G^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + \frac{\Gamma^2}{r^2} X\left(G,H\right) + \frac{\mu^2}{\Gamma^2}\bar{\Phi}\left(G,H,e^2\right)\left(1-e^2\right)^{3/2} - T, \tag{10.77}$$

$$X\left(G,H\right) = X_0\left(G,H\right) + X_1\left(G,H\right) + X_2\left(G,H\right),$$

$$\bar{\Phi}\left(G,H,e^2\right) = \bar{\Phi}_0\left(G,H,e^2\right) + \bar{\Phi}_1\left(G,H,e^2\right) + \bar{\Phi}_2\left(G,H,e^2\right). \tag{10.78}$$

und

$$\Gamma^2 = G^2 - 2\Gamma^2 X\left(G,H\right). \tag{10.79}$$

Nun weicht das System (10.77) von dem transformierten System (10.76) nur noch durch eine periodische Komponente $\Delta R = O\left(\varepsilon^4\right)$ ab. Das System (10.77) ist daher ein für eine Lösung 3. Ordnung ausreichendes Näherungssystem von (10.76) als auch, über die o.g. zwei Lie-Transformationen, des originalen Systems (10.63). Die zur Störungsrechnung zu verwendende Erzeugende der gesamten Transformation lässt sich mittels (6.14) aus $s^{(1)}$ und $s^{(2)}$ berechnen:

$$s = \left(s^{(1)} + s^{(2)}\right) + \frac{1}{2}\left\{s^{(1)}, s^{(2)}\right\} + \frac{1}{12}\left\{s^{(1)} - s^{(2)}, \left\{s^{(1)}, s^{(2)}\right\}\right\} + O\left(\varepsilon^4\right). \tag{10.80}$$

Damit ist der Weg zu einer Lösung 3. Ordnung des Bewegungsproblems für Satelliten ermittelt. Die Durchführung ist freilich sehr aufwendig.

Mit geringen Modifikationen lässt sich die erläuterte Methode sowohl auf die Bewegung der Planeten sowie auf die des Mondes übertragen.

Schlussbemerkungen und Ausblick

Die Begriffe

Lösbarkeit ---- Integrabilität ---- Separabilität

eines dynamischen Systems sind nicht bedeutungsgleich. Nur in Ausnahmefällen wie dem Kepler-Problem, den Stäckel-Systemen oder den Cui-Systemen sind die Bewegungsprobleme sowohl lösbar als auch integrabel/ separabel.

Schon beim Dreikörperproblem ist das nicht mehr der Fall. Zwar findet man mit den partikulären Euler-Lagrangeschen Lösungen exakte Lösungen des Dreikörperproblems, aber es scheint keine ausreichende Anzahl an Bewegungsintegralen zu existieren, um es als integrabel einzustufen und damit die Lösungsgesamtheit auffinden zu können. Eine Separabilität des Dreikörperproblems ist nicht bekannt. Auch wenn man das allgemeine Dreikörperproblem so stark vereinfacht wie beim eingeschränkten Dreikörperproblem ändert sich das Bild nicht. Zwar existieren um die Librationspunkte Scharen von strengen Lösungen, die Charlierschen Lösungen, aber eben um den Preis, daß man wesentliche Nichtlinearitäten der Umgebung der Librationspunkte $L_{1,\ldots,5}$ aus dem Bewegungsproblem herausnimmt.

Vollständige Separabilität eines Bewegungsproblems impliziert zwar die Integrabilität und damit die Lösbarkeit, aber wiederum kann das Bewegungsproblem lösbar sein, ohne daß es separabel sein muß. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung kann eine Lösung besitzen, ohne daß sie separierbar sein muß. Integrable/separable dynamische Systeme sind von besonderer Bedeutung in der himmelsmechanischen Störungsrechnung und damit für die Entwicklung von Bahntheorien, beispielsweise von Planeten-, Mond- und Satellitenbahntheorien.

Das wohl wichtigste Beispiel eines integrablen Bewegungsproblem ist das Kepler-Problem. Es ist das den meisten Bahntheorien zugrunde liegende integrable Bewegungsproblem. Man kennt eine ausreichende Anzahl von Bewegungsintegralen des Bewegungsproblems

$$\Phi_6(\mathbf{r},\mathbf{v};t) = \alpha_6,$$

aus denen man die Lösungsgesamtheit des Kepler-Problems erhält (Integrabilität):

$$\Phi_i(\mathbf{r},\mathbf{v};t) = \alpha_i \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}(\Phi_1,\Phi_2,\ldots\Phi_6) = \mathbf{r}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_6;t) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(\Phi_1,\Phi_2,\ldots\Phi_6) = \mathbf{v}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_6;t) \end{cases}$$

Variiert man die Integrationskonstanten in ihren möglichen Laufbereichen, so kommt es zur einer Klassifikation der Lösungsgesamtheit.

Beispiel: Im Falle des Keplerproblems etwa erhält man für

$E<0$ elliptische

$E=0$ parabolische Kegelschnitte

$E>0$ hyperbolische

als mögliche Bahnkurven. Und zwar ergeben sich für

$G \neq 0$ nichtentartete

Kegelschnitte

$G = 0$ entartete (lineare)

G *Betrag des Bahndrehimpulses*, *Hill-Variable*!!

Die linearen Keplerbahnen sind solche mit verschwindendem Bahndrehimpuls *(Schneider I 1992)*

Setzt man in diese Bewegungsintegrale den Bewegungszustand $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ zu einem Zeitpunkt t_0 ein, so lassen sich die Integrationskonstanten α_i berechnen, und damit sind die rechten Seiten der Bewegungsintegrale festgelegt. Aus diesen erhält man jetzt zu einem beliebigen Zeitpunkt *t* den Bewegungszustand $\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$, also

$$t_0 : \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 \xrightarrow[\text{Integrationskonstanten}]{\text{Berechnung der}} \Phi_i(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0;t_0) = \alpha_i$$

$$\Phi_i(\mathbf{r},\mathbf{v};t) = \alpha_i \xrightarrow[\text{momentanen Bewegungszustand}]{\text{Auflösung nach dem}} \mathbf{r}(t,\vec{\alpha}), \mathbf{v}(t,\vec{\alpha})$$

Eines der Bewegungsintegrale muß außer von den Variablen **r** und **v** von der Zeit *t* abhängen.

Man könnte zunächst vermuten, daß die Erzeugung des ganzen Lösungsverlaufs aus dem Bewegungszustand zu einem Zeitpunkt vermittels der Bewegungsintegrale auf die Anfangswert-determinierung beschränkt ist. Wie aus der vorläufigen Bahnbestimmung nach Gauß bekannt ist *(Schneider IV 1999),* trifft das aber nicht nur bei Anfangswertdeterminierung des Bewegungsproblems zu, sondern auch bei Randwertdeterminierung, freilich beschränkt auf den durch die Zeitpunkte, zu denen die Randbedingungen gegeben sind, begrenzten Zeitraum. Dieser kann unendlich ausgedehnt sein. Das Beispiel der Lösung einer Randwertaufgabe zum Kepler-Problem nach dem Gaußschen Sektor-zu-Dreieck-Verfahren *(Schneider I 1992)* deutet die Möglichkeit der Bestimmung der Lösungsgesamtheit bei Randwertdeterminierung an. Bei diesem Verfahren wird nicht auf Bewegungsintegrale zurückgegriffen. Es ist aber nicht klar, was bei Randwertdeterminierung an die Stelle der Bewegungsintegrale treten und wie man Integrabilität in diesem Fall definieren könnte.

Die Regel scheint nun zu sein, daß **Integrabilität** eines dynamischen Systems i.allg. nicht vorliegt, also keine ausreichende Anzahl von Bewegungsintegralen gefunden wird bzw. gar nicht existiert (**Nichtintegrabilität**).Die ausreichende Anzahl N ergibt sich aus der Anzahl der Freiheitsgrade des dynamischen Systems.

Man kommt nun mit einer geringeren Anzahl von Bewegungsintegralen aus, wie Jacobi und Arnold gezeigt haben *(Schneider I 1992).* Der Satz von Liouville für integrable, konservative Hamilton-Systeme *(Rebhan 1999),* wonach unter bestimmten Voraussetzungen die Lösung des Bewegungsproblems auf die Ausführung von Quadraturen zurückgeführt werden kann, impliziert, daß vollständige Separabilität und vollständige Integrabilität im allgemeinen äquivalent sind. Und es folgt umgekehrt aus diesem Satz, daß bei vollständiger Integrabilität ein vollständiger Satz von Winkel-/ Wirkungsvariablen existiert. Daraus aber folgt die vollständige Separabilität in allen Winkelvariablen. Das Beispiel par excellence hierfür sind die Stäckel-Systeme *(Schneider IV 1999).*

Von herausragendem Interesse sind einerseits Theoreme über

- Integrabilität/Nichtintegrabilität,die die Existenz /Nichtexistenz von Bewegungsintegralen belegen (z.B. Theorem von Ziglin)

und andererseits Theoreme über

- Verfahren zum Auffinden von Bewegungsintegralen (z.B. Theoreme von Liouville, von Stäckel und von Cui), also konstruktive Verfahren

sowie

- Bestimmungsgleichungen für Bewegungsintegrale, wie sie sich aus der Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwangs von Gauß ergeben oder
- aus der Lösung der Killinggleichungen bei der Untersuchung der Symmetrieeigenschaften des betrachteten dynamischen Systems.

Während die Existenz- und Eindeutigkeitssätze der Theorie der Differentialgleichungen bzw. der Integralgleichungstheorie etwas zur **Lösbarkeit** der Bewegungsprobleme aussagen, beinhalten die **Integrabilität/Nichtintegrabilitätstheoreme** meist Aussagen darüber, ob ein dynamisches System integrabel/nichtintegrabel ist und unter welchen Umständen Integrale existieren. Das trifft vor allem auf die Separationstheoreme zu, die meist in konstruktiver Weise aufzeigen, unter welchen Bedingungen vollständige oder teilweise **Separabilität** eines dynamisches Systems vorliegt.

Da Nichtintegrabilität der Regelfall zu sein scheint, kommen integrable /vollständig separable dynamische Systeme somit nur als intermediäre Bewegungsprobleme für die Entwicklung von Bahntheorien in Betracht. Damit läuft die Ausarbeitung einer Bahntheorie meist auf folgenden **Zweischritt** hinaus

1. Formulierung eines **intermediären Bewegungsproblems**
2. Beheben der Vereinfachungen, die im intermediären Bewegungsproblem getroffen worden sind, durch **Störungsrechnung**.

Das setzt voraus, daß man eine Schnittstelle in der Kräftefunktion bzw. Hamilton-Funktion so legen kann, daß die im intermediären Bewegungsproblem vernachlässigten Kräfte bzw. Anteile der Hamilton-Funktion in einem näher zu definierenden Sinn als ***klein*** betrachtet werden können.

Die Störungsrechnung selbst kann in verschiedener Weise angelegt werden, beispielsweise im Sinne

- der **Variation der Konstanten** des intermediären Bewegungsproblems
- der **Theorie der kanonischen Transformationen**, vermittelt durch eine **erzeugende Funktion**.

Im ersten Fall bleiben Systeme von Variationsgleichungen für die variierten Integrationskonstanten zu lösen, die die zeitliche Entwicklung der variierenden Integrationskonstanten des intermediären Bewegungsproblems und durch Eintragen in dessen exakt bekannte Lösung den Bewegungsablauf des aktuell gestellten Bewegungsproblems ergeben.

Im zweiten Fall wird versucht, durch eine bzw. eine Folge kanonischer Transformationen die Funktionsstruktur der Hamilton-Funktion des Störungsproblems so abzuändern, daß dieses leichter einer Lösung zugänglich wird.

Statt dessen kann auch versucht werden, die Hamilton-Funktion des aktuellen Bewegungsproblems so weit als möglich dadurch anzunähern, daß man ein intermediäres Bewegungsproblem sucht, dessen Hamilton-Funktion diejenige des aktuellen Bewegungsproblems annähert. Die intermediäre Lösung wird hierbei als eine die aktuell gesuchte Lösung so weit als möglich approximierende **Zielfunktion** einer bzw. einer Abfolge kanonischer Transformationen, vermittelt durch erzeugende Funktionen, eingesetzt.

Wenn das aktuelle Bewegungsproblem nichtintegrabel ist, dann wird ein nichtintegrabler Rest der Hamilton-Funktion verbleiben. Dieses von Cui vorgeschlagene Verfahren einer **Exhaustion der Hamilton-Funktion** durch eine integrable Hamiltonfunktion, wobei ein möglichst kleiner Restanteil aus der Hamilton-Funktion des aktuellen Bewegungsproblems verbleibt, wird am Beispiel des Konzepts für die Ausarbeitung einer Satellitenbahntheorie 3. Ordnung aufgezeigt. Vorausgesetzt werden muß hierbei, daß

1. die kritische Bahnneigung außer Betracht bleibt und
2. die mittlere Bewegung des Satelliten und die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung inkommensurabel sind.

Das Verfahren weist in eine ähnliche Richtung wie die **quadratischen** (superkonvergenten) Verfahren *(Lichtenberg & Liebermann 1983, Schneider II 1993),* die auf dem KAM-Theorem aufbauen. Im Unterschied zu diesen geschieht hier die Exhaustion mit einer vorgegebenen intermediären Lösung als Zielfunktion, die durch frei wählbare Funktionen parametrisiert ist.

Offene Fragen für künftige Untersuchungen sind unter anderen:

- Lösung bzw. Ausarbeitung eines Lösungsweges für die aus dem Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges folgende partielle Differentialgleichung;
- Aufsuchen und physikalische Deutung der den Stäckel-Systemen korrespondierenden Symmetrie-transformationen;
- Bestimmung weiterer nach den Theoremen /Korollaren von Cui möglicher (partiell oder vollständig) integrabler Fälle;
- Anwendung der Cui-Theoreme auf Fragen der Theorie der Rotation von Himmelskörpern;
- Ausarbeitung einer Satellitenbahntheorie 3. Ordnung nach dem skizzierten Konzept der Exhaustion;
- Anwendung des Konzepts der Exhaustion der Hamilton-Funktion auf die Planeten- und Mondbewegung;
- Genauer Methodenvergleich mit den superkonvergenten Verfahren basierend auf dem KAM-Theorem;
- Untersuchung des Hauptproblems der Satellitenbahntheorie auf Nichtintegrabilität nach dem Konzept der Exhaustion;
- Untersuchung von Stabilitätsfragen mit Hilfe der neuen Separationstheoreme von Cui und dem Konzept der Exhaustion;
- Untersuchung der Frage nach der Existenz eines "third integral" *(Contopoulos 2002)* mit Hilfe der Theoreme von Cui.

Literaturverzeichnis

ARNOLD V. I., KOZLOV, V. V. & NEISHTADT, A. I. (1988): *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics.* Springer Verlag Berlin

BAUMGARTE J. (1973): *Stabilization of the Differential Equations of Keplerian Motion.* In B. D. Tapley and V. Szebehely (eds.): Recent Advances in Dynamical Astronomy. Reidel Publishing Company, Dordrecht

BROUCKE R. (1981): *The Lagrangian Theory of Stäckel Systems.* Cel. Mech., Vol. 25, No. 2

BROUWER D., CLEMENCE, G. M. (1961): *Methods of Celestial Mechanik.* Acad. Press, New York and London

BRUNS (1882/18*83): Vorlesungen über Himmlische Mechanik.* Leipzig

CONTOPOULOS G. (2002): *Order and Chaos in Dynamical Astronomy.* Springer-Verlag , Berlin

CUI CH. (1990): *Die Bewegung künstlicher Satelliten im anisotropen Gravitationsfeld einer gleichmäßig rotierenden starren Modellerde – Eine analytische Lösung 2. Ordnung* – Veröff. d. Dt. Geod. Komm., C 357, München

CUI CH., MAREYEN M. (1992) G*auß's equations of motion in terms of Hill variables and first application to numerical integration of satellite orbits*, manuscripta geodaetica, 17, 155-163

CUI CH. (1997): *Satellite Orbit Integration based on Canonical Transformations with Special Regard to the Resonance and Coupling Effects.* Veröff. d. Dt. Geod. Komm., A 112, München

DESLOGE E. A., KARCH R. I. (1977): *Noether`s theorem in classical mechanics*, Am. J. of Physics, Vo.l 45., No. 4

DZIOBEK O. (1888): *Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen.* Verlag Joh. Barth, Leipzig

ERWE F., PESCHL E. (1973): *Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung.* BI-Hochschultaschenbücher Bd. 87, Mannheim

FLIESSBACH TH. (1996): M*echanik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik I, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg*

GIACAGLIA G. E. O. (1972): *Perturbation Methods in Nonlinear Systems.* Springer Verlag, Berlin

GRÖBNER W. (1967): *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen.* VEB Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin

GUTZWILLER M. C., SCHMIDT D. S. (1986): *The Motion of the Moon as Computed by the Method of Hill, Brown and Eckert.* U.S. Government Printing Office, Washington

GUTZWILLER M. C. (1990): *Chaos in Classical and Quantum Mechanics.* Springer Verlag New York/Berlin/Heidelberg

HAGIHARA Y. (1957): *Celestial Mechanics.* Kasai Publ. & Print. Comp., Tokio 1957

HORI G. (1966): *Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables.* Publ. Astron. Soc., Japan, Vol. 18, p. 287

IZSAK I. (1963): *A Note on Perturbation Theory.* Astron. J., Vol. 68, p. 559

INCE E. L. (1956): *Ordinary Differential Equations.* Dover Publ., New York

IRIGOYEN M., SIMO C. (1993): *Nonintegrability of the* J_2-*Problem.* Cel. Mech. Vol. 55 No. 3

JÄNICH K. (1999): *Funktionentheorie, Springer-Lehrbuch 5.* Auflage. Springer-Verlag, Berlin

JACKSON E. A. (1990): *Perspectives of Nonlinear Dynamics 1 + 2.* Cambridge University Press, Cambridge

JACOBI C. G. J. (1884): *Vorlesungen über Dynamik.* Druck und Verlag von G. Reimer, Berlin, 2. revidierte Ausgabe

JONES S. E., AMES W. F. *(1967)*: *Similarity variables and first integrals of ordinary differential equations.* Int. J. of Non-Linear Mechanics 2, ,257-260

KYNER W. T.; BENNETT M. M. (1966): *Modified Encke Special Perturbation Method.* Astron. Journ. Vol. 71, 7

LEIPHOLZ H. (1968): *Stabilitätstheorie.* Teubner Verlag, Stuttgart

LICHTENBERG A. J., LIEBERMANN M. A. (1983): *Regular and Stochastic Motion.* Springer Verlag Berlin

LIE S. (1970): *Theorie der Transformationsgruppen*, Chelsea Publ. Comp., NewYork (Nachdruck d. Aufl. v. 1890)

LELGEMANN D. (1983): *A Linear Solution of the Equation of Motion of an Earth-orbiting Satellite based on a Lie-Series.* Cel. Mech., Vol. 30, p. 309

LEVY-LEBLOND J. M. (1971): *Conservation Laws for Gauge-Variant Lagrangians in Classical Mechanics*, APJ Vol. 39

MACIEJEWSKI A. J., PRZYBYLSKA M. (2003): *Non-integrability of the Problem of Rigid Satellite in Gravitational and Magnetic Fields.* Cel. Mech. & Dynamical Astronomy Vol. 87 No. 4

MALKIN J. G. (1959): *Theorie der Stabilität einer Bewegung.* Akademie Verlag , Berlin

MEIROVITCH L. (1970): *Methods of Analytical Dynamics.* MacGraw-Hill Company, New York

MOON P., SPENCER D. E. (1961): *Field Theory Handbook – including coordinate systems, differential equations and their solutions.* Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg

MORBIDELLI A. (2002): *Modern Celestial Mechanics – Aspects of Solar System Dynamics.* Taylor & Francis, London, New York

MOSER J. (1973): *Stable and random motions in Dynamical System.* Princeton University Press

NEUTSCH W. (1995): *Koordinaten.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

NOETHER E. (1918): Nachr. d. kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 235

POINCARE H.: *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste*. Dover Publ., New York (Nachdruck *1957)*

REBHAN E. (1999): *Theoretische Physik, Bd. 1 Mechanik, Elektrodynamik.* Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin

SCHMEIDLER F. (1958): *Partikuläre Integrale von Gleichungs-systemen,* Astron. Nachrichten Bd. 285, Heft 2

SCHMEIDLER F. (1962): *Gemeinsame Integrale ganzer Klassen von dynamischen Problemen*, Astron. Nachrichten Band 287, Heft 1/2

SCHMUTZER E. (1973): *Grundprinzipien der klassischen Mechanik und der klassischen Feldtheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

SCHMUTZER E. (1978): *Relativistische Physik (Klassische Theorie).* Teubner Verlagsges. Leipzig

SCHMUTZER, E. (1989): *Grundlagen der theoretischen Phsyik I + II*, BI-Wissenschaftsverlag Mannheim

SCHMUTZER E. (1972): *Symmetrien und Erhaltungssätze der Physik*, WTB 75, Akademie-Verlag Berlin

SCHNEIDER M. (1992 – *1999): Himmelsmechanik*

I: *Grundlagen* 1992,

II: *Systemmodelle* 1993,

III: *Gravitationstheorie* 1996,

IV: *Theorie der Satellitenbewegung, Bahnbestimmung* 1999,

Bibliographisches Institut, Mannheim/Leipzig/Wien/ Zürich und Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/ Berlin/ Oxford

SIEGEL C. L. (1956): *Vorlesungen über Himmelsmechanik.* Springer Verlag Berlin

SMIRNOW W. (1961): *Lehrgang der höheren Mathematik.* Berlin

STEEB W. H., KUNICK A. (1989): *Chaos in Dynamischen Systemen.* BI-Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/ Zürich, 2. Auflage

STEEB W. H. (1991): *A Handbook of Terms Used in Chaos and Quantum Chaos.* BI-Wissenschaftsverlag Mann-heim/Wien/Zürich

STEPHANI H. (1994): *Differentialgleichungen -Symmetrien und Lösungsmethoden-.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

STUMPFF K. (1959 – *1974): Himmelsmechanik.* Bde. I – III. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

THIRY Y. (1970): *Les Fondements de la mecanique Celeste.* Gordon and Breach, Paris.

VUJANOVIC B. (1970): *A group-variational procedure for finding first integrals of dynamical systems.* Int. J. Non-linear Mechanics vol. 5 , pp. 269-278. Pergamon Press

WEINBERG ST. (1972): *Gravitation and Cosmology – Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* Wiley New York

ZAKHAROV V. E. (Hrsg.) (1991): *What is Integrability?* Springer Verlag, Berlin

Danksagung

Die Autoren danken Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Lelgemann für die Unterstützung während ihrer mehrjährigen Zusammenarbeit. Aus Fördermitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft konnten zwei mehrtägige Treffen zur Bearbeitung der vorliegenden Studie finanziert werden, wofür wir der DFG danken. Schließlich danken wir dem Ständigen Sekretär der Deutschen Geodätischen Kommission, Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Rummel, für die Aufnahme der Arbeit in deren Veröffentlichungsreihe „Theoretische Geodäsie“.

Schließlich danken wir Frau Rosemarie Kunkel, Sekretariat Prof. Lelgemann, für mannigfache Hilfe bei der Herstellung der Druckvorlage.