

Kerstin Wienholz

**Zur Bestimmung der GPS-Phasenmehrdeutigkeiten
in großräumigen Netzen**

München 2003

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck

Zur Bestimmung der GPS-Phasenmehrdeutigkeiten
in großräumigen Netzen

Von der Fakultät VI
Bauingenieurwesen und Angewandte Geowissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Kerstin Wienholz

D 83

München 2003

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

Deutsche Geodätische Kommission

Marstallplatz 8 • D – 80 539 München

Telefon (089) 23 031 113 • Telefax (089) 23 031 – 283/– 100

E-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://www.dgfi.badw.de/dgfi/DGK/dgk.html>

Vorsitzender der Prüfungskommission: Prof. Dr.-Ing. Lothar Gründig

Hauptgutachter: Prof. Dr.-Ing. Dieter Lelgemann

Zweitgutachter: Prof. Dr.-Ing. Harald Schuh

Drittgutachter: Dr.-Ing.habil. Jürgen Klotz

Tad der Einreichung: 31.09.2002

Tag der Prüfung: 31.01.2003

© 2003 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	8
1. Einleitung	11
1.1. Motivation	11
1.2. Bedeutung der Mehrdeutigkeiten	11
1.3. Überblick über bestehende Verfahren	11
1.4. Beitrag und Beschreibung dieser Arbeit	12
2. Die TUB-Methode	14
2.1. Zusammenhang zwischen Satelliten- und Empfängerkoordinaten	14
2.1.1. Parameter der broadcast- und präzisen Bahnen	15
2.1.2. Partielle Ableitungen der Entfernung r_r^s	16
2.2. Modellierung der GPS-Phasendifferenz	18
2.2.1. Phasendifferenz als Funktion der Strecke	18
2.2.2. Satelliten- und Empfängeruhrdifferenzen	20
2.3. Signalausbreitung in der Ionosphäre	21
2.3.1. Die ionosphärische Verzögerung $ION_r^s(t)$	22
2.3.2. Modellierung des Gesamtelektroneninhaltes $TEC_r^s(t)$	23
2.4. Phasenauswertung ohne Differenzbildung	25
2.4.1. Fehler durch Linearkombinationen und Differenzbildungen	25
2.4.2. Beobachtungsgleichungen	25
2.4.3. Redundanzbetrachtungen	26
2.5. Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten und L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paare	27
2.5.1. Separation der ionosphärischen Refraktion	28
2.5.2. Festsetzen der Mehrdeutigkeiten	29
2.6. Qualitätskriterien für die Mehrdeutigkeitsbestimmung	30
2.6.1. Lagrangsche Multiplikatorenregel	30
2.6.2. Vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen	31
2.6.3. Zwang der Nebenbedingungen: Simulationsbeispiel	33
2.6.4. Korrelaten bei der Mehrdeutigkeitsbestimmung	37
3. Ergebnisse	40
3.1. Berliner Messkampagne 1996	41
3.2. SAPOS-Referenzstationen in Berlin	49
3.3. Referenzstationsnetz im Burgenland (Österreich)	54
3.4. IGS-Stationsdaten	58
4. Diskussion	65
Anhang	65
A. Grundlagen der GPS-Phasenmessung	67
B. TUBGPS - Die GPS-Auswertungssoftware der TU Berlin	70
B.1. Einzelpunkt-Code-Lösung und Bestimmung der Uhrfehler	70
B.2. Dreifachdifferenzlösung	72
B.3. Phasensprungsuche	73
B.4. Float- und Fixed-Lösung	75
B.5. Bestimmung der Mehrdeutigkeiten	76
B.6. Bestimmung der Korrelaten	77
B.7. Refraktion in der Troposphäre	77

C. Linearkombinationen und Differenzbildungen	80
C.1. Linearkombinationen der Phasenbeobachtungen	80
C.2. Differenzbildungen	82
D. Simulationsbeispiel zur Untersuchung der Korrelaten	84
E. Testdaten der SAPOS-Stationen vom 14.02.2001	86
F. Phasensprünge der Testdatensätze	89
G. Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten und Korrelaten der Testdatensätze	91
G.1. Berliner Messkampagne 1996	91
G.2. SAPOS-Referenzstationen in Berlin	93
G.3. Referenzstationsnetz im Burgenland (Österreich)	94
G.4. IGS-Stationsdaten	96
H. QIF-Verfahren (Quasi-Ionosphere-Free)	99

Tabellenverzeichnis

2.1.	Bahngenaugigkeiten 2001	14
2.2.	Basislinienfehler in Abhängigkeit der Bahnen	14
2.3.	Anzahl der Unbekannten u und Redundanz r der verschiedenen Ansätze	27
2.4.	Ausgleichung 1,2 und 3 mit Bedingungsgleichungen (2.138) bis (2.140)	34
2.5.	Ausgleichung 4 mit Bedingungsgleichungen (2.138) bis (2.141)	34
2.6.	Ausgleichung 5 mit Bedingungsgleichungen (2.138) bis (2.142)	34
2.7.	Ausgleichung 6 mit Bedingungsgleichungen (2.138) bis (2.143)	35
2.8.	Änderung der Gleichungen (2.138) und (2.139)	36
2.9.	Änderung der Gleichungen (2.138) bis (2.140)	36
2.10.	Änderung der Gleichungen (2.138) bis (2.141)	37
2.11.	Korrelaten bei fehlerfreien Doppeldifferenzmehreutigkeiten	38
2.12.	Korrelaten bei Fehler von 1 cycle in $I_{1,rb}^{sa}$ mit $s = 1$ und $r = 8002$	39
2.13.	Korrelaten aus drei Ausgleichungen mit $s = 1$ und $r = 8002$	39
2.14.	Korrelaten bei Fehler von 1 cycle in $I_{2,rb}^{sa}$ mit $s = 1$ und $r = 8002$	39
3.1.	Messung 2481	42
3.2.	Ergebnisse für $I_{f,48b}^{17a}$ und $I_{f,49b}^{17a}$ ($f = 1, 2$)	42
3.3.	Korrelaten 65 - 68 der Ausgleichungen 1-4	43
3.4.	F_{rb}^{sa} -Doppeldifferenzen	46
3.5.	Doppeldifferenzmehreutigkeiten der Ausgleichungen 6-8 und resultierende Korrelaten	47
3.6.	Doppeldifferenzmehreutigkeiten für die Station 109 aus Sollkoordinaten	47
3.7.	Ergebnisse für die Basislinien und Distanzen zwischen den Stationen	48
3.8.	Messung 2231	49
3.9.	Mittlerer Gewichtseinheitsfehler σ_0 a posteriori der float-Lösungen	50
3.10.	Ergebnisse der fixed-Lösung für die Basislinien und Distanzen mit broadcast-Bahnen	53
3.11.	Ergebnisse der fixed-Lösung für die Basislinien und Distanzen mit präzisen Bahnen	53
3.12.	Messung 3641	54
3.13.	Geänderte Doppeldifferenzmehreutigkeit $I_{1,rb}^{25a}$ mit $r = \text{Ober-03}$	56
3.14.	Ergebnisse für die Basislinien und Distanzen zwischen den Stationen	57
3.15.	Messung 2451	58
3.16.	Verwendete IGS-Stationen und ihre Ausrüstung	59
3.17.	Ergebnisse für die Basislinien und Distanzen zwischen den Stationen	61
3.18.	Doppeldifferenzmehreutigkeiten nach 4 Stundenlösung	61
3.19.	Mehreutigkeits-Paare 18 - 23	62
3.20.	Differenzen der Distanzen	64
B.1.	Modellkonstanten K_1, K_2 und K_3	78
D.1.	Sollkoordinaten der Neupunkte	84
D.2.	Koordinaten der Festpunkte	84
D.3.	Strecken mit zufälligen Fehlern in [LE] zwischen Fest- und Neupunkten	84
D.4.	Vermittelnde Ausgleichungen mit verschiedenen Bedingungsgleichungen	85
D.5.	Ausgeglichene Koordinaten der Neupunkte A und B	85
D.6.	Ausgeglichene Koordinaten der Neupunkte C und D	85
E.1.	Sollkoordinaten der SAPOS-Stationen ETRS89	86
E.2.	Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe	86
E.3.	Kartesische Koordinaten	86
E.4.	Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe	86
E.5.	Kartesische Koordinaten	86
E.6.	Bedingungsgleichungen	87
E.7.	Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe	87
E.8.	Kartesische Koordinaten	87

E.9. Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe	87
E.10. Kartesische Koordinaten	87
E.11. Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe	88
E.12. Kartesische Koordinaten	88
E.13. Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe	88
E.14. Kartesische Koordinaten	88
E.15. Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe	88
E.16. Kartesische Koordinaten	88
F.1. Phasensprünge auf der Station 34	89
F.2. Phasensprünge auf der Station 34	89
F.3. Phasensprünge auf den Stationen 932, 33, 48, 49, 107 und 109	89
F.4. Phasensprünge auf der Station Gues-04	90
F.5. Phasensprünge auf der Station 8002	90
F.6. Phasensprünge auf den Stationen 8002 und 8003	90
G.1. Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten b=932 und a=21	91
G.2. Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten b=932 und a=21	92
G.3. Korrelaten der Ausgleichungen 1 - 8, 5b	92
G.4. Korrelaten der Ausgleichungen 1 - 8, 5b	93
G.5. Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten mit broadcast- und präzisen Bahnen b=8001 und a=31	93
G.6. Korrelaten der Ausgleichungen mit broadcast- und präzisen Bahnen	94
G.7. Korrelaten der Ausgleichungen mit broadcast- und präzisen Bahnen	94
G.8. Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten b=Gues-04 und a=1	94
G.9. Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten der Station Neus-01	95
G.10. Korrelaten der Ausgleichungen	95
G.11. Korrelaten der Ausgleichungen	96
G.12. Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten	96
G.13. Korrelaten der Ausgleichungen	97
G.14. Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten für die Stationen WTZR, POTS, LAMA und BOR1	97
G.15. Korrelaten aus den Ausgleichungen 1, 2 und 3	98
G.16. Korrelaten aus den Ausgleichungen 1, 2 und 3	98
G.17. Neue Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten der 4.5-Stunden-Lösung	98

Abbildungsverzeichnis

2.1. Bahnparameter $a, e, i, \Omega, \omega, u$ im ICRS	15
2.2. Atmosphärische Refraktion	21
2.3. Jährliche solare Flussdichte 1947-2001 (2800 MHz)	22
2.4. Tägliche solare Flussdichte 1.1.1985 - 30.07.2002 (2800 MHz)	22
2.5. Winkelabstand Λ_r^s	24
2.6. Single-Layer-Modell	24
2.7. Extremwert E mit Nebenbedingung	31
2.8. Koordinatenbestimmung von A, B, C und D	33
2.9. Korrelaten λ_1 und λ_2	35
2.10. Korrelaten λ_1 und λ_3	35
2.11. Korrelaten λ_1 und λ_4	35
2.12. Kurvenverlauf aller Korrelaten	35
2.13. Korrelaten bei fehlerfreien Doppeldifferenzmehrfachdeutigkeiten	37
2.14. Korrelaten bei Fehler von 1 cycle in I_{1,r^s}^{sa} mit $s = 1$ und $r = 8002$	38
2.15. Korrelaten bei Fehler von 1 cycle in I_{2,r^s}^{sa} mit $s = 1$ und $r = 8002$	38
3.1. Phasensprung von 1 cycle in L1	40
3.2. Phasensprung von -1 cycle in L1	40
3.3. GPS Punkte der Messkampagne 1996 (UTM Koordinaten)	41
3.4. Phasenresiduen auf der Station 33 zum Satelliten PRN-Nr. 3	42
3.5. Phasenresiduen auf der Station 48 zum Satelliten PRN-Nr. 1	42
3.6. Korrelaten der Ausgleichung 1	43
3.7. Korrelaten der Ausgleichung 2	43
3.8. Korrelaten der Ausgleichung 3	44
3.9. Korrelaten der Ausgleichung 4	44
3.10. Korrelaten der Ausgleichung 5	44
3.11. Korrelaten der Ausgleichung 6	45
3.12. Korrelaten der Ausgleichung 7	45
3.13. Korrelaten der Ausgleichung 8	46
3.14. Restklaffungen (Ausgl. 5)	46
3.15. Restklaffungen (Ausgl. 6)	46
3.16. Restklaffungen (Ausgl. 7)	47
3.17. Restklaffungen (Ausgl. 8)	47
3.18. Endgültige Restklaffungen	47
3.19. Endgültige Korrelaten	47
3.20. SAPOS-Referenzstationen (UTM Koordinaten)	49
3.21. $R_r(t)$ aus broadcast-Bahnen	50
3.22. $R_r(t)$ mit präzisen IGS Bahnen	50
3.23. $S^s(t)$ aus broadcast-Bahnen	50
3.24. $S^s(t)$ mit präzisen IGS Bahnen	50
3.25. $R_r(t)$ -Differenzen	51
3.26. $S^s(t)$ -Differenzen	51
3.27. $H_r^s(t)$ mit broadcast-Bahnen	51
3.28. $H_r^s(t)$ mit präzisen IGS Bahnen	51
3.29. $H_r^s(t)$ mit broadcast-Bahnen	51
3.30. $H_r^s(t)$ mit präzisen IGS Bahnen	51
3.31. Differenzen der F_r^s -Werte	52
3.32. λ_1 - λ_{22} aus broadcast-Bahnen	52
3.33. λ_1 - λ_{22} aus präzisen Bahnen	52
3.34. Restklaffg. mit broadcast-Bahnen	52
3.35. Restklaffg. mit präzisen IGS Bahnen	52
3.36. Koordinatendifferenzen	53

3.37. Das SATVB GPS/GLONASS Referenzstationsnetzwerk der BEWAG im Burgenland [Titz, 1999]	54
3.38. Phasenresiduen auf der Referenzstation Gues-04 zum Satelliten PRN-Nr. 27	55
3.39. Phasenresiduen auf der Station Ober-03 zum Satelliten PRN-Nr. 13	55
3.40. Korrelaten (Ausgleich 1)	55
3.41. Restklaffungen (Ausgleich 1)	56
3.42. Restklaffungen (Ausgleich 2)	56
3.43. Korrelaten ohne Bedingungsgleichung 38 (Ausgleich 2)	56
3.44. Korrelaten aus Ausgleichung mit falscher Bedingungsgleichung 18 (Ausgleich 3)	57
3.45. Restklaffungen der Helmerttransformation mit falscher Bedingungsgleichung 18 (Ausgleich 3)	57
3.46. EUREF-Stationen	58
3.47. Residuen auf der Station WTZR zum Satelliten PRN-Nr. 21	59
3.48. Residuen auf der Station LAMA zum Satelliten PRN-Nr. 22	59
3.49. Korrelaten $\lambda_1 - \lambda_{30}$	60
3.50. Korrelaten $\lambda_1 - \lambda_{17}, \lambda_{19}, \lambda_{21} - \lambda_{30}$	60
3.51. Restklaffungen bei 28 Bedingungsgleichungen	60
3.52. Restklaffungen der neuen float-Lsg.	60
3.53. Restklaffungen aus Ergebnis mit 28 Bedingungsgleichungen und 4 Stationen	60
3.54. Korrelaten der Ausgleichung 1	62
3.55. Korrelaten der Ausgleichung 2	63
3.56. Korrelaten der Ausgleichung 3	63
3.57. Restklaffungen	63
A.1. Darstellung von Phase, Phasenwinkel und Amplitude	67
B.1. Strukturdiagramm TUBGPS	71
B.2. Normalgleichungsmatrix	76

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Entwicklung sowie die Ergebnisse der TUB-Methode dargestellt. Dieses spezielle Verfahren dient zur Auflösung von GPS-Phasenmehrdeutigkeiten in klein- und großräumigen Netzen. Es zeichnet sich durch die Berücksichtigung der Korrelaten als Qualitätskriterien aus, wodurch eine Beurteilung der berechneten Mehrdeutigkeiten ermöglicht wird.

Zunächst kann anhand eines Simulationsbeispiels zur vermittelnden Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten gezeigt werden, dass jede falsche Bedingung einen größeren Zwang auf das Ausgleichungssystem ausübt. Der Zwang spiegelt sich in den zugehörigen Lagrangschen Faktoren oder auch Korrelaten wider, deren Betrag in Abhängigkeit von der Größe des Fehlers der Bedingungsgleichung stark anwächst. Diese Erkenntnisse können bei der TUB-Methode zur Untersuchung der verschiedensten Parameter angewendet werden, wobei in dieser Arbeit die Aufmerksamkeit auf die Untersuchung der Mehrdeutigkeiten gelegt wird.

Der TUB-Methode liegt eine spezielle Parametrisierung der Beobachtungsgleichungen zu Grunde, bei der mehrere unbekannte Parameter zu einer neuen zeitabhängigen und einer zeitunabhängigen Hilfsunbekannten zusammengefasst werden. Durch eine solche Reduktion der Unbekannten entsteht ein stabiles Gleichungssystem, welches ohne Bildung von Differenzen und Linearkombinationen gelöst werden kann. Die direkte Auswertung der Originalphasenbeobachtungen verhindert eine Fehlerfortpflanzung zufälliger Fehler und damit eine künstliche Erhöhung des Phasenrauschens. Die Konfidenzintervalle, die die ganzzahligen Werte der Mehrdeutigkeiten enthalten, können dadurch klein gehalten werden. Bei der Suche nach diesen ganzen Zahlen müssen zunächst die zeitabhängigen Hilfsunbekannten auf verschiedene Arten in Abhängigkeit von der Basislinienlänge von der ionosphärischen Refraktion separiert werden. Danach können die Mehrdeutigkeiten in Form von Doppeldifferenzen bezogen auf einen Basissatelliten und eine Basisstation bzw. in Form von L_1/L_2 -Mehrdeutigkeiten-Paaren in einem iterativen Prozess gelöst werden. Zur Kontrolle werden mit Hilfe der gelösten L_1/L_2 -Mehrdeutigkeiten-Paare Bedingungsgleichungen geformt und in den Ausgleichungsprozess eingeführt. Eine anschließende Untersuchung der Korrelaten gibt Aufschluss über die Qualität der gefundenen Mehrdeutigkeiten.

Das Potential der TUB-Methode wird zunächst anhand eines Datensatzes mit Basislinienlängen von 13-48 km getestet. Hier gelingt es durch die Analyse der Korrelaten falsche Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten zu identifizieren und aus mehreren ganzen Zahlen die richtige herauszufiltern. In zwei weiteren Netzen mit Basislinienlängen von 26-106 km werden die Einflüsse verschiedener Bahngenaugigkeiten auf die Parameter der Beobachtungsgleichungen untersucht. Die Auflösung der Mehrdeutigkeiten gelingt in den genannten Beispielen zu 100%, wobei Beobachtungszeiten von ca. 2 Stunden ausreichen. Bei Punktabständen im Bereich von 700 - 1000 km kommt es zu größeren Modellgenauigkeiten. Die Auswertung von Daten mehrerer IGS-Stationen zeigt, dass für 20% der Mehrdeutigkeiten keine ganzen Zahlen gefunden werden können. Hierbei liegen entweder keine oder zu viele ganze Zahlen in den Konfidenzintervallen. Im zweiten Fall ergeben sich an Stelle von einem mehrere L_1/L_2 -Mehrdeutigkeiten-Paare, die sich zu wenig voneinander unterscheiden. Werden diese als Bedingungen in das Gleichungssystem eingeführt, weichen auch die Beträge der Korrelaten kaum voneinander ab. Für Basislinien im Bereich von 1000 - 2000 km können momentan noch keine befriedigenden Ergebnisse erzielt werden.

Die Analyse der Korrelaten erweist sich als hilfreiches Werkzeug bei der Qualitätsbeurteilung der Mehrdeutigkeiten. Die betragsmäßig größten Korrelaten ergeben sich dort, wo falsche Mehrdeutigkeiten größere Zwänge in den Bedingungsgleichungen ausüben. Fehler, die z.B. durch die Verwendung von broadcast-Ephemeriden hervorgerufen werden, können dadurch aufgedeckt werden. Liegen mehrere ganze Zahlen in den Konfidenzintervallen, weisen die Beträge der Korrelaten auf die zum Normalgleichungssystem passenden Werte hin. Zu beobachten sind aber starke Abhängigkeiten der Bedingungsgleichungen. So wachsen auch die Beträge der Faktoren an, die über den Satelliten und die Station mit einer falschen Bedingung verknüpft sind. Zu den Korrelationen zwischen den Lagrangschen Faktoren sollten daher noch tiefere Untersuchungen durchgeführt werden. Als sinnvoll erweist sich, die Bestimmung der Mehrdeutigkeiten eines Datensatzes mit verschiedenen langen Beobachtungszeiten durchzuführen. Durch den Vergleich der aus diesen Lösungen ermittelten Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten kann eine zusätzliche Überprüfung der Ergebnisse durchgeführt werden. Insbesondere zeigt sich bei Basislinien von 1000 km, dass mit Daten kürzerer Beobachtungszeiträume ganze Zahlen festgelegt werden können, die sich aus längeren Messungen nicht oder falsch ergeben.

Die Verwendung der Korrelaten als Indikatoren für falsche Bedingungen ist nicht nur zur Beurteilung der Mehrdeutigkeiten bei der GPS-Auswertung einsetzbar. Vielmehr können alle Parameter, die sich in geeignete Bedingungen fassen lassen, bei sämtlichen Problemen der Datenanalyse überprüft werden.

Summary

The development and the results of the TUB method are presented in this paper. This special method serves in resolving GPS phase ambiguities in small-range and large-range networks. It is characterized by taking into account the correlates as quality criteria, thus enabling an assessment of the calculated ambiguities.

First of all: by simulating an example to mediate the adjustment of conditions between unknown quantities it can be shown that every incorrect condition exerts a major constraint on the adjustment system. This constraint is reflected by the pertaining Lagrange factors (or correlates), the value of which increases rapidly in line with the magnitude of error in the equation of condition. This knowledge can be used in the TUB method to investigate various parameters. However, in this paper the emphasis is on the investigation of ambiguities.

The TUB method is based on a special parameterization of the observation equations so that several unknown parameters are combined in one newly established time-dependent auxiliary parameter and in one time-independent auxiliary parameter. By reduction of the unknown parameters a stable equation system is brought about which can be solved without resulting in differences and linear combinations. The direct analysis of original phase observations prevents the error-propagation of accidental errors and hence an artificial increase in phase noise. Therefore the confidence intervals, characterized by integer numbers, can be kept rather small. In finding these integer numbers the time-dependent auxiliary parameters must first be separated in different ways, depending on the lengths of the base lines, from the ionospheric refraction. Then the ambiguities in the form of double differences, related to a base satellite and a base station (or in the form of L1/L2 ambiguity pairs), can be solved in an iterative process. As a controlling device equations of condition are formed with the help of L1/L2 ambiguity pairs and inserted in the adjustment process. A subsequent analysis of the correlates gives information about the qualities of the ambiguities found.

To begin with the potential of the TUB method is tested by means of a data set with base line lengths ranging from 13 to 48 km. By analyzing the correlates incorrect double difference ambiguities can be identified and among several integer numbers the correct one is filtered out. In two further nets with base line lengths from 26 to 106 km the influences of various more or less accurate orbits on the parameters of the observation equations are investigated. In the aforementioned examples a resolution of the ambiguities is possible at a success rate of 100 percent while an observation time of about two hours is sufficient. When terrain points are between 700 and 1000 km apart the model shows considerable inaccuracies. The evaluation of data stemming from various IGS stations evidences that in about 20 percent of all ambiguities integer numbers cannot be found. In these cases the confidence intervals either do not provide any integer number or too many of them. In the latter case there are, instead of a single one, several L1/L2 ambiguity pairs that do not differ very much from one another. When these ambiguity pairs are inserted in the equation system the values of the correlates do not differ very much either. For the time being no satisfactory results can be achieved for base lines ranging between 1000 and 2000 km.

The analysis of the correlates proves to be a useful tool in evaluating the quality of ambiguities. The correlates with the highest values occur when incorrect ambiguities exert major constraints on the equations of condition. In these cases errors can be detected, e.g., those arising from the use of broad-cast ephemerides. When several integer numbers are found in the confidence intervals the values of the correlates suggest values matching the normal equation system. Considerable interdependencies of the equations of condition are evident. Consequently there is an increase in the values that are linked to an incorrect condition via satellite and station. Therefore the correlations between the Lagrange factors should be investigated more closely. It is useful to determine the ambiguities of a data set by observation times of different lengths. By comparing the double difference ambiguities calculated from these solutions an additional examination of the results is made possible. Particularly when base lines of more than 1000 km are used it turns out that with data resulting from shorter observation times integer numbers can be calculated that would either not result at all or only inaccurately from longer measurements.

The use of correlates as indicators for incorrect conditions is not only suitable for evaluating ambiguities in GPS analysis. Moreover, all parameters that can be formulated in appropriate conditions may be examined in any case of problems regarding the analysis of data.

1. Einleitung

1.1. Motivation

Zu den wesentlichen Aufgaben der Geodäsie zählt die Bestimmung hochgenauer Punktkoordinaten. Die Anlage und Pflege von Lagenetzen in der Ingenieurgeodäsie sowie von Referenznetzen in der Landesvermessung ist dabei ohne den Einsatz von Satellitenmessverfahren kaum zu bewältigen. Bei der Beobachtung geodynamischer Prozesse und im Rahmen der SAPOS-Dienste¹ entsteht neben der Forderung nach einer vorgegebenen Genauigkeit der Bedarf nach einer möglichst schnellen Positionierung. Je nach Anwendung werden auch exakte Echtzeitlösungen benötigt. Eine herausragende Stellung bei der Lösung dieser Probleme nimmt das Satellitenavigationssystem GPS (Global Positioning System) ein. Einer der systemimmanenten Nachteile besteht darin, die Anzahl der Anfangswellenzyklen, die so genannten Mehrdeutigkeiten (engl. Ambiguities), korrekt zu bestimmen. Wie aus dem nachfolgenden Abschnitt hervorgeht, ist dieser Wert für die Ermittlung einer eindeutigen und hochgenauen Entfernung zwischen Satellit und Empfänger unabdingbar und damit Grundvoraussetzung für den Erhalt exakter Empfängerkoordinaten. Sind die Mehrdeutigkeiten bekannt, können hohe Positionsgenauigkeiten in nur kurzen Beobachtungszeiten erzielt werden.

Die Aufgabe dieser Arbeit bestand darin, ein Verfahren zu entwickeln und zu testen, welches einerseits zu zuverlässigen Ergebnissen in der Mehrdeutigkeitsberechnung führt und andererseits eine Qualitätskontrolle der ermittelten Größen zulässt. Im Folgenden wird dieses neue Verfahren als TUB-Methode (Technische Universität Berlin) bezeichnet. Zielstellung der TUB-Methode ist die exakte Auflösung der Mehrdeutigkeiten bei kurzen Beobachtungszeiten in großräumigen Netzen.

1.2. Bedeutung der Mehrdeutigkeiten

Das GPS-Weltraumsegment wurde so konzipiert, dass auf jedem Punkt der Erdoberfläche zu jeder Zeit mindestens vier Satelliten sichtbar sind. Dafür ist eine Anzahl von wenigstens 24 Satelliten nötig, die sich in einer Höhe von ca. 20 000 km um die Erde bewegen. Sie senden permanent zwei Trägersignale² aus, auf denen zwei Codes³ und die Navigationsnachrichten aufmoduliert sind. Zu Navigationszwecken kann der Zeitunterschied zwischen Satelliten- und Empfängeruhr sowie die drei Koordinaten des Empfängers aus den Pseudoentfernungen⁴ der Codes zu vier Satelliten abgeleitet werden. Für geodätisch hochpräzise Koordinatenbestimmungen sind die Trägerphasendifferenzen zwischen Empfänger- und Satellitensignal sowie die Dopplercounts von Bedeutung [Bauer, 1997]. Die Messung dieser Größen wird erst durch die Schwebungsfrequenz ermöglicht, die aus der Überlagerung des dopplerverschobenen Satellitensignals mit dem Referenzsignal im Empfänger hervorgeht (Anhang A). Der Dopplercount ergibt sich aus den Zyklen der Schwebungsfrequenz, die ab der ersten Messepoche gezählt werden. Er entspricht der Anzahl der vollen Wellendurchgänge zwischen zwei Messzeitpunkten. Aus der Phasenlage der Schwebungsfrequenz wird die Phasendifferenz der Eingangssignale abgeleitet. Eindeutige Entfernungen können zunächst noch nicht berechnet werden, da die Gesamtanzahl der Wellenzyklen, die zwischen Sende- und erstem Messzeitpunkt vom Satelliten ausgestrahlt werden, nicht messbar und damit unbekannt sind. Bei diesen unbekannt Größen handelt es sich um die eingangs erwähnten Mehrdeutigkeiten, zu deren besondere Eigenschaft die Ganzzahligkeit zählt. Sie können als Anfangszählerstände im Empfänger interpretiert werden.

1.3. Überblick über bestehende Verfahren

Zur Beseitigung der Messfehler bzw. Ermittlung aller Einflussgrößen wie z. B. Mehrdeutigkeiten, Wegverzögerungen in der Atmosphäre, Satelliten- und Empfängeruhrfehler usw. werden simultane Beobachtungen von mindestens zwei Empfängern benötigt. Mit besonders hoher Genauigkeit kann nur die Basislinie, der Differenzvektor zwischen beiden Empfängern, bestimmt werden. In kleinräumigen Netzen mit Basislinien im Bereich weniger Kilometer existieren zahlreiche Verfahren, die sehr gute Ergebnisse bei der Berechnung der Anfangszählerstände hervorbringen. Auf diesen kurzen Distanzen sind die Einflüsse der ionosphärischen Refraktion nahezu gleich, so dass einfache Modelle eine ausreichende Korrektur ermöglichen. Die L_1 - und L_2 -Mehrdeutigkeiten

¹Satellitenpositionierungsdienst der AdV

²Trägersignale: L_1 und L_2 im L-Band mit $f_1 = 1575.43$ MHz, $\lambda_1 = 19$ cm und $f_2 = 1227.60$ MHz, $\lambda_2 = 24$ cm

³C/A-Code (Clear Access/Coarse Acquisition) und P-Code (Protected/Precise)

⁴Durch Uhrfehler verfälschte Strecke zwischen Satellit und Empfänger, die aus der Laufzeitmessung hervorgeht.

können in diesen Fällen relativ unproblematisch direkt als ganze Zahlen bestimmt werden. Bei zunehmenden Punktabständen ergeben sich jedoch größere Schwierigkeiten durch die räumliche Variation der Ionosphäre und den damit auftretenden Wegverzögerungen. Sobald auf Grund der Länge der Basislinien entfernungsabhängige Fehler wie ionosphärische Refraktion, troposphärische Refraktion und Bahnfehler der Satelliten größer werden als punkt- oder empfangnerabhängige Fehler wie Mehrwege-Effekte⁵, Variation des Antennenphasenzentrums⁶ und Messrauschen, spricht man von großräumigen Netzen und langen Basislinien. Als Obergrenze für großräumige Netze kann der Punktabstand angegeben werden, bei dem eine Zweifrequenz-Mehrdeutigkeiten-Auflösung nicht mehr möglich ist oder bei dem Fehler durch das Referenzsystem dominieren. Die Basislinienlängen dieser Netze liegen demnach zwischen 10 und 2000 km.

Je nachdem ob es sich um Kurzzeitmessungen (Rapid Static Messungen) oder Langzeitmessungen (klassisch statische Messungen), lange oder kurze Basislinien handelt, werden unterschiedliche Methoden zum Festsetzen der Mehrdeutigkeiten verwendet. Die meisten Verfahren zur Ermittlung der Anfangszählerstände laufen zweistufig ab. Generell werden in einer ersten Ausgleichung der Phasenmessungen unbekannte Parameter wie z.B. Koordinaten berechnet und die Mehrdeutigkeiten in Form von reellen Werten bestimmt. Diese Lösung des Gleichungssystems wird als float-Lösung bezeichnet. Gelingt es, aus den reellen Werten die korrekten ganzen Zahlen für die Anfangszählerstände abzuleiten, spricht man vom Lösen, Festsetzen oder Fixen der Mehrdeutigkeiten. In einem zweiten Ausgleichungsschritt können die gelösten Mehrdeutigkeiten als bekannte Werte eingesetzt werden. Damit entfällt eine große Anzahl von unbekanntem Parametern. Ein wesentlich stabileres Gleichungssystem entsteht und eine neue Lösung, die fixed-Lösung, kann ermittelt werden. Inwieweit sich die Ergebnisse durch das Festsetzen der Mehrdeutigkeiten im Vergleich zur float-Lösung ändern, hängt von der Anzahl der unbekanntem Parameter ausschließlich der Mehrdeutigkeiten und der Anzahl der Messungen ab. Werden nur wenige Unbekannte bestimmt, ist die fixed-Lösung bei kurzen Beobachtungszeiten wesentlich besser als die entsprechende float-Lösung. Ein längerer Beobachtungszeitraum führt kaum noch zu einer weiteren Steigerung der Genauigkeit. Will man nur kurze Basislinien bestimmen, führt das Festsetzen der Mehrdeutigkeiten demzufolge in relativ kurzen Beobachtungszeiten zu genauen Punktkoordinaten. Statische Messungen in kurzen Zeiträumen (Rapid Static Messungen) werden damit möglich. Sollen viele Parameter berechnet werden wie z.B. Satellitenbahnverbesserungen, Parameter der Erdorientierung usw. wirken sich gelöste Mehrdeutigkeiten genauigkeitssteigernd auf die Ergebnisse langer Beobachtungszeiträume aus. Die Qualität der float-Lösungen bleibt hier weit hinter der der fixed-Lösungen zurück [Teunissen und Kleusberg, 1998].

Für die Auswertung von GPS-Phasendifferenzdaten bei großen Punktabständen sind drei Verfahren von besonderer Bedeutung. Der erste der drei zu nennenden Algorithmen stützt sich auf die Bildung der Melbourne-Wübbena Linearkombination, einer Kombination aus den Phasenmessungen auf L_1 und L_2 mit den P-Code-Messungen auf L_1 und L_2 . Gelöst werden hier zuerst die Wide-Lane-Mehrdeutigkeiten⁷, aus denen dann die L_1 - und der L_2 -Mehrdeutigkeiten hervorgehen. Mit der Melbourne-Wübbena Linearkombination lassen sich exakte Werte für die Mehrdeutigkeiten für Basislinienlängen bis zu 2000 km berechnen [Mervart, 1995]. Stehen keine präzisen Zweifrequenz-Code-Messungen zur Verfügung, bildet die ionosphärische Refraktion für die Auflösung der Mehrdeutigkeiten in großräumigen Netzen den limitierenden Faktor. Mit dem zweiten Verfahren, der QIF-Strategie Quasi-Ionosphere-Free) (Anhang H), sind ebenfalls gute Resultate hinsichtlich der Auflösung der Mehrdeutigkeiten zu erreichen. Grundlage für die Gewinnung von ganzen Zahlen für die Mehrdeutigkeiten bildet ausschließlich die Ausgleichung von Phasendoppeldifferenzen. Die QIF-Methode kommt ohne präzise Code-Messungen auf sehr gute Ergebnisse bei Basislinienlängen bis zu 1000 km. In Abhängigkeit von den ionosphärischen Bedingungen werden die Ergebnisse jedoch bei noch größeren Punktabständen schlechter [Mervart, 1995]. Es wirkt sich dabei nachteilig aus, dass Originalmessungen nur in Form von Phasendoppeldifferenzen (Kapitel 2.4.1) verarbeitet werden und die Mehrdeutigkeitenlösung nur basislinienweise möglich ist. Eine dritte Möglichkeit wird durch die Erzeugung von genauen float-Lösungen aus sehr langen GPS-Messungen gegeben. Verwendung finden dabei Daten mit Beobachtungszeiten bis zu mehreren Tagen.

1.4. Beitrag und Beschreibung dieser Arbeit

Die TUB-Methode wurde als eine neue Herangehensweise bei der Lösung der Mehrdeutigkeiten zur Erzeugung von float- und fixed Lösungen in Netzen mit kurzen, mittleren und langen Basislinien entwickelt. Zu Beginn des zweiten Kapitels werden die theoretischen Grundlagen der TUB-Methode wie die Parametrisierung der Beobachtungsgleichungen und die Berechnung der Mehrdeutigkeiten erläutert. Wie zu sehen sein wird, basiert das neue Verfahren weder auf der Bildung von Differenzen noch von Linearkombinationen. Zur Vermeidung einer Erhöhung des Phasenrauschens werden hier die Originalphasenmessungen ausgeglichen. Die TUB-Methode wurde

⁵ Verlängerung des Signalweges durch Reflexion an nahestehenden Objekten

⁶ Elektrisches und geometrisches Phasenzentrum stimmen nicht überein. Position des elektrischen Phasenzentrums ist zusätzlich noch vom Azimut und der Elevation des Satelliten abhängig.

⁷ Die Wide-Lane-Mehrdeutigkeit entspricht der Differenz aus der L_1 - und der L_2 -Mehrdeutigkeit (Kapitel C.1).

so konzipiert, dass eine Auflösung aller Mehrdeutigkeiten in einem iterativen Prozess möglich ist. Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass sich für einige Mehrdeutigkeiten keine oder mehrere Lösungen ergeben. In diesen Fällen stellt sich die Frage, ob die Qualität der gefundenen, ganzen Zahlen überprüft, falsche Werte identifiziert und aus mehreren der richtige Wert herausgefunden werden kann. Die TUB-Methode zeigt auf, dass eine Qualitätskontrolle und damit die Beantwortung der genannten Fragen durch eine Analyse der Korrelaten möglich wird. Die Mehrdeutigkeiten werden hierzu in Form von Bedingungsgleichungen in das Gleichungssystem eingeführt. Aus jeder Bedingungsgleichung geht eine Korrelate hervor, in deren Betrag sich der Zwang der Bedingung auf das Gleichungssystem widerspiegelt. Der Zusammenhang zwischen Korrelaten und Bedingungsgleichungen wird am Ende des zweiten Kapitels dargestellt, wobei die Möglichkeiten der Qualitätskontrolle anhand eines Simulationsbeispiels demonstriert werden. Die Umsetzung des gesamten theoretischen Grundkonzeptes kann dem Kapitel 3 entnommen werden. Vier Datensätze verschiedener Netzgrößen mit Ausdehnungen von 26 km bis zu 1000 km werden hinsichtlich der Berechnung der Mehrdeutigkeiten und der anschließenden Qualitätskontrolle getestet und überprüft. Einer der Testdatensätze dient außerdem zur Analyse des Einflusses verschiedener Bahngenauigkeiten von präzisen und broadcast-Bahnen auf die Parameter der Beobachtungsgleichungen. Im Anhang werden die erstellten Auswerteprogramme erläutert und die einzelnen Ergebnisse der Testdatensätze zahlenmäßig aufgelistet.

2. Die TUB-Methode

Im Gegensatz zu anderen Verfahren der Mehrdeutigkeitsbestimmung ergeben sich bei dem hier vorgestellten Algorithmus die reellen Zahlen, aus denen die Mehrdeutigkeiten hervorgehen, weder aus Differenzen (Anhang C.2) noch aus Linearkombinationen (Anhang C.1) der Phasenmessungen. Die Mehrdeutigkeiten selbst werden in Form von Doppeldifferenzen ermittelt. Die berechneten ganzen Zahlen können bei dieser Methode einer Qualitätskontrolle unterzogen werden, so dass falsche Werte identifiziert und korrigiert werden können. Dieses Verfahren wurde für kurze, mittlere und lange Basislinien entwickelt und eignet sich damit für die Auflösung von Mehrdeutigkeiten in großräumigen Netzen. Im Vorfeld wird eine float-Lösung durch Ausgleichung der Originalphasenmessungen erzeugt, ohne dass Differenzen oder Linearkombinationen gebildet werden. Durch die spezielle Parametrisierung der Beobachtungsgleichungen wird die Anzahl der Unbekannten so reduziert, dass ein stabiles Gleichungssystem entsteht. Mit den Ergebnissen der float-Lösung werden Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten bestimmt, die als bekannte Werte zur Erzeugung einer fixed-Lösung wieder in die Ausgleichung eingegeben werden. Zur Kontrolle können aber auch mit den gefundenen Mehrdeutigkeiten Bedingungsgleichungen geformt und in den Ausgleichungsprozess eingeführt werden. Eine Untersuchung der Lagrangschen Faktoren gibt Aufschluss über die Qualität der gefundenen Mehrdeutigkeiten. Der Betrag der Korrelate steigt z.B. erheblich an, wenn eine Mehrdeutigkeit der dazugehörigen Bedingungsgleichung nur um einen Zyklus verfälscht wurde. Führt man alle gefundenen Mehrdeutigkeiten in Form von Bedingungsgleichungen in das Gleichungssystem ein, ist die Kontrolle des gesamten Systems möglich. Andererseits kann die Auswertung auch so durchgeführt werden, dass zunächst nur eine Bedingungsgleichung in der Ausgleichung verwendet und anschließend die Korrelate berechnet wird. In jeder nächsten Ausgleichung kommt eine Bedingungsgleichung dazu, so dass in einem iterativen Prozess die Qualität der gefundenen Mehrdeutigkeiten überprüft werden kann.

2.1. Zusammenhang zwischen Satelliten- und Empfängerkoordinaten

Ein wichtiger Faktor, der die Genauigkeit der GPS-Messungen beeinflusst, ist die Qualität der Bahnen. Dabei spielt der IGS (International GPS Service for Geodynamics), der 1992 seine Tätigkeit aufnahm und seitdem dem Nutzer zusätzlich zu den broadcast-Ephemeriden genauere Bahndaten zur Verfügung stellt, eine wesentliche Rolle (Tabelle 2.1) [Rothacher und Mervart, 1996].

Typ der Bahn	Qualität [m]	Verfügbarkeit
broadcast-Bahnen	3.00	Echtzeit
IGS Predicted Orbits	0.50	Echtzeit
IGS Ultra Rapid Orbits	0.25	Echtzeit
IGS Rapid Orbits	0.05	17 Stunden später
IGS Final Orbits	< 0.05	13 Tage später

Tabelle 2.1: Bahnngenauigkeiten 2001

Bahnfehler [m]	Basislinienlänge [km]	Basislinienfehler [mm]
3.00	1	0.1
3.00	10	1.2
3.00	100	12.0
3.00	1000	120.0
0.05	1	-
0.05	10	-
0.05	100	-
0.05	1000	0.5

Tabelle 2.2: Basislinienfehler in Abhängigkeit der Bahnen

Eine Näherungsformel [Baueršima, 1982] zeigt den Zusammenhang zwischen den Basislinienfehlern Δx und den Bahnfehlern ΔX in Abhängigkeit von der Basislinienlänge l und der Entfernung r_r^s zwischen Satellit und Empfänger.

$$\Delta x(m) \approx \frac{l}{r_r^s} \cdot \Delta X(m) \approx \frac{l(km)}{25000(km)} \cdot \Delta X(m) \quad (2.1)$$

Die broadcast-Ephemeriden sind im ICRS gegeben und werden durch Keplerelemente und deren Änderungsraten dargestellt [Van Dierendonck, 1978]. Für die Auswertung der GPS-Messungen muss eine Umrechnung dieser Bahndaten in die geozentrischen, kartesischen Koordinaten bezogen auf ein erdfestes Bezugssystem (ITRS International Terrestrial Reference System) erfolgen, wobei die Länge des aufsteigenden Knotens Ω wegen der Längenunterschiede zwischen Frühlingspunkt und dem Meridian von Greenwich auf Grund der Erdrotation korrigiert werden muss. Die Länge des aufsteigenden Knotens ist damit unmittelbar mit der Größe LOD (length of day), der Differenz zwischen astronomisch bestimmter Länge des Tages und 86400 SI Sekunden, korreliert.

$$\begin{pmatrix} x^s \\ y^s \\ z^s \end{pmatrix}_{ITRS} = r^s \begin{pmatrix} \cos u \cos \tilde{\Omega} - \sin u \sin \tilde{\Omega} \cos i \\ \cos u \sin \tilde{\Omega} + \sin u \cos \tilde{\Omega} \cos i \\ \sin u \sin i \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$\tilde{\Omega}$: korrigierte Länge des aufsteigenden Knotens um GAST

Die präzisen Bahnen werden in Form von Positions- und Geschwindigkeitskomponenten bezüglich eines erdfesten Referenzsystems (ITRS) dem Nutzer zur Verfügung gestellt. Um in einem raumfesten System (ICRS) arbeiten zu können, müssen Transformationen durchgeführt werden, die die Präzession, die Nutation, die Erdrotation und die Polbewegung berücksichtigen:

$$[\vec{e}_i]_{ITRS} = D \cdot R \cdot N \cdot P \cdot [\vec{e}_i]_{ICRS} \quad (2.5)$$

- P : Präzessionsmatrix
 N : Nutationsmatrix
 R : Erdrotationsmatrix mit $\overset{3}{R}(GAST + \Delta\Theta) = \overset{3}{R}(\Theta)$
 D : Polbewegungsmatrix
 $GAST$: Greenwich Apparent Siderial Time
 $\Delta\Theta$: Erdrotationsschwankung

Für die Transformation der Vektorkomponenten gilt dann:

$$\begin{pmatrix} x^s \\ y^s \\ z^s \end{pmatrix}_{ICRS} = P^T N^T R^T D^T \begin{pmatrix} x^s \\ y^s \\ z^s \end{pmatrix}_{ITRS} \quad (2.6)$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{ICRS} \approx P^T N^T R^T D^T \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{ITRS} + P^T N^T \frac{dR(\Theta)}{d\Theta} D^T \begin{pmatrix} x^s \\ y^s \\ z^s \end{pmatrix}_{ITRS} \frac{d\Theta}{dt} \quad (2.7)$$

Aus den Koordinaten- und Geschwindigkeitskomponenten im raumfesten System gewinnt man wiederum Keplervariablen, die durch Interpolation und Gleichung (2.4) die Satellitenkoordinaten zum Aussendezeitpunkt ergeben.

2.1.2. Partielle Ableitungen der Entfernung r_r^s

Die Satellitenkoordinaten sind über die gemessene Entfernung unmittelbar mit den Empfängerkoordinaten verknüpft. Das folgende Kapitel verdeutlicht, wie Bahnfehler die Empfängerkoordinaten beeinflussen. Um zu zeigen, dass sich manche Einflüsse nicht voneinander trennen lassen, bietet sich die folgende Parametrisierung der kartesischen Koordinaten des Empfängers x_r, y_r, z_r an.

Position der Station (Empfänger):

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix}_{ITRS} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ ((1 - e^2) N + h) \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{mit } N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (2.8)$$

- h : ellipsoidische Höhe
 λ : geografische Länge
 ϕ : geografische Breite
 a : Halbachse des Referenzellipsoides
 e : erste numerische Exzentrizität des Referenzellipsoides

Die Position des Satelliten x^s, y^s, z^s wird durch (2.4) beschrieben. Beide Koordinatentripel $(x^s \ y^s \ z^s)^T$ und $(x_r \ y_r \ z_r)^T$ sind demnach in einem gemeinsamen System, dem ITRS, definiert. Das Verbindungsglied zwischen beiden Positionen ist die geometrische Entfernung r_r^s :

$$\begin{aligned} r_r^s{}^2 &= (x^s - x_r)^2 + (y^s - y_r)^2 + (z^s - z_r)^2 \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bildet man die partiellen Ableitungen der Entfernung r_r^s nach Satelliten- und Empfängerkoordinaten und fasst zusammen, erhält man die Matrixgleichung (2.10):

$$r_r^s \partial r_r^s = (\Delta x \ \Delta y \ \Delta z) \begin{pmatrix} \partial x^s \\ \partial y^s \\ \partial z^s \end{pmatrix} - (\Delta x \ \Delta y \ \Delta z) \begin{pmatrix} \partial x_r \\ \partial y_r \\ \partial z_r \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Da die kartesischen Satellitenkoordinaten von den Keplervariablen abhängen, ergibt sich aus einer weiteren partiellen Ableitung der Gleichung (2.4) für die Matrix $(\partial x^s \ \partial y^s \ \partial z^s)^T$ der folgende Ausdruck:

$$\begin{pmatrix} \partial x^s \\ \partial y^s \\ \partial z^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^s/r^s & r^s \sin u \sin \tilde{\Omega} \sin i & r^s (-\sin u \cos \tilde{\Omega} - \cos u \sin \tilde{\Omega} \cos i) & -y^s \\ y^s/r^s & -r^s \sin u \cos \tilde{\Omega} \sin i & r^s (-\sin u \sin \tilde{\Omega} + \cos u \cos \tilde{\Omega} \cos i) & x^s \\ z^s/r^s & r^s \sin u \cos i & r^s \cos u \sin i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial r^s \\ \partial i \\ \partial u \\ \partial \tilde{\Omega} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Zur Beschreibung des Tripels $(\partial x_r \ \partial y_r \ \partial z_r)^T$ wird (2.8) partiell abgeleitet, so dass man die Gleichung (2.12) erhält.

$$\begin{pmatrix} \partial x_r \\ \partial y_r \\ \partial z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda & -\left((1-e^2) a_e (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-3/2} + h\right) \sin \phi \cos \lambda & -y_r \\ \cos \phi \sin \lambda & -\left((1-e^2) a_e (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-3/2} + h\right) \sin \phi \sin \lambda & x_r \\ \sin \phi & \left((1-e^2) a_e (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-3/2} + h\right) \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial h \\ \partial \phi \\ \partial \lambda \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

(2.11) und (2.12) setzt man wieder in (2.10) ein. Um die Abhängigkeit zwischen $\partial \tilde{\Omega}$ und $\partial \lambda$ zu zeigen, werden im Weiteren nur die dafür relevanten Terme berücksichtigt:

$$r_r^s \partial r_r^s = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}^T \left\{ \begin{pmatrix} x^s/r^s \cdot \partial r^s + \dots & -y^s \cdot \partial \tilde{\Omega} \\ y^s/r^s \cdot \partial r^s - \dots & +x^s \cdot \partial \tilde{\Omega} \\ z^s/r^s \cdot \partial r^s + \dots & +0 \cdot \partial \tilde{\Omega} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda \cdot \partial h + \dots & -y_r \cdot \partial \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \cdot \partial h - \dots & +x_r \cdot \partial \lambda \\ \sin \phi \cdot \partial h + \dots & +0 \cdot \partial \lambda \end{pmatrix} \right\} \quad (2.13)$$

(2.13) wird weiter ausmultipliziert, wobei vor allem die Faktoren betrachtet werden, in denen $\partial \tilde{\Omega}$ und $\partial \lambda$ auftreten.

$$\begin{aligned} r_r^s \partial r_r^s &= \left\{ \partial \tilde{\Omega} (-\Delta x \cdot y^s + \Delta y \cdot x^s) + \dots \right\} - \left\{ \partial \lambda (-\Delta x \cdot y_r + \Delta y \cdot x_r) + \dots \right\} \\ &= \left\{ \dots + \partial \tilde{\Omega} (x_r y^s - x^s y_r) - \partial \lambda (x_r y^s - x^s y_r) + \dots \right\} \\ &= \left\{ \dots + (x_r y^s - x^s y_r) (\partial \tilde{\Omega} - \partial \lambda) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aus (2.14) ist ersichtlich, dass die Ableitungen der geometrischen Entfernung r_r^s nach $\tilde{\Omega}$ bzw. λ bis auf das Vorzeichen übereinstimmen.

$$r_r^s \frac{\partial r_r^s}{\partial \tilde{\Omega}} + r_r^s \frac{\partial r_r^s}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.15)$$

Die Matrixgleichungen können dann entweder so

$$\begin{aligned} r_r^s \partial r_r^s &= \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}^T \left\{ P \begin{pmatrix} \partial r^s \\ \partial i \\ \partial u \\ \partial \tilde{\Omega} - \partial \lambda \end{pmatrix} - Q \begin{pmatrix} \partial h \\ \partial \phi \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit} \\ P &= \begin{pmatrix} x^s/r^s & r^s \sin u \sin \tilde{\Omega} \sin i & r^s (-\sin u \cos \tilde{\Omega} - \cos u \sin \tilde{\Omega} \cos i) & -y^s \\ y^s/r^s & -r^s \sin u \cos \tilde{\Omega} \sin i & r^s (-\sin u \sin \tilde{\Omega} + \cos u \cos \tilde{\Omega} \cos i) & x^s \\ z^s/r^s & r^s \sin u \cos i & r^s \cos u \sin i & 0 \end{pmatrix} \\ Q &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda & -\left((1-e^2) a_e (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-3/2} + h\right) \sin \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda & -\left((1-e^2) a_e (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-3/2} + h\right) \sin \phi \sin \lambda \\ \sin \phi & \left((1-e^2) a_e (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-3/2} + h\right) \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

oder aber in der folgenden Form aufgefasst werden.

$$\begin{aligned}
 r_r^s \partial r_r^s &= \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}^T \left\{ R \begin{pmatrix} \partial r^s \\ \partial i \\ \partial u \end{pmatrix} - S \begin{pmatrix} \partial h \\ \partial \phi \\ \partial \lambda - \partial \tilde{\Omega} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{mit} \\
 R &= \begin{pmatrix} x^s/r^s & r^s \sin u \sin \tilde{\Omega} \sin i & r^s \begin{pmatrix} -\sin u \cos \tilde{\Omega} - \cos u \sin \tilde{\Omega} \cos i \\ -\sin u \sin \tilde{\Omega} + \cos u \cos \tilde{\Omega} \cos i \end{pmatrix} \\
 y^s/r^s & -r^s \sin u \cos \tilde{\Omega} \sin i & r^s \begin{pmatrix} -\sin u \cos \tilde{\Omega} - \cos u \sin \tilde{\Omega} \cos i \\ -\sin u \sin \tilde{\Omega} + \cos u \cos \tilde{\Omega} \cos i \end{pmatrix} \\
 z^s/r^s & r^s \sin u \cos i & r^s \cos u \sin i \end{pmatrix} \\
 S &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda & -\left((1-e^2) a_e (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-3/2} + h \right) \sin \phi \cos \lambda & -y_r \\
 \cos \phi \sin \lambda & -\left((1-e^2) a_e (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-3/2} + h \right) \sin \phi \sin \lambda & x_r \\
 \sin \phi & \left((1-e^2) a_e (1-e^2 \sin^2 \phi)^{-3/2} + h \right) \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Ein Bahnfehler bezüglich der Länge des aufsteigenden Knotens wirkt sich unmittelbar auf die Länge der Station aus, wobei die Anteile nicht voneinander getrennt werden können.

Zur Berechnung von Bahnverbesserungen bei der Verwendung von broadcast-Ephemeriden greift man auf ausgedehnte GPS-Messungen mit langen Basislinien zurück und hält die Stationskoordinaten während der Ausgleichung fest. Die Software TUBGPS (Anhang B) wurde so konzipiert, dass Verbesserungen für Ω , u und i ermittelt werden können. Die Höhe der GPS-Satelliten ist relativ stabil und wird deshalb nicht als unbekannter Parameter angesetzt. Andernfalls ist eine exakte Zuordnung der Werte zu Zenitrefraktion oder Bahnhöhe nicht möglich. Als Unbekannte werden demzufolge die Größen ϕ , λ , h und Δr_z und/oder Ω , i und u eingeführt.

2.2. Modellierung der GPS-Phasendifferenz

Die Phasenlage der Schwebungsfrequenz entspricht der Phasendifferenz der beiden hochfrequenten Eingangssignale des Satelliten und des Empfängers (Anhang A). Aus ihr lässt sich die Entfernung zwischen Sende- und Empfangsantenne ableiten, wodurch eine hochpräzise Koordinatenbestimmung möglich ist. Als Funktion der Laufzeit enthält sie einen Zeitunterschied zwischen Satelliten- und Empfängeroszillator. Eliminiert man die Uhrfehler und ermittelt aus der korrigierten Beobachtungsgröße eine Entfernung, so würde diese nicht dem direkten Abstand zwischen Sender und Empfänger entsprechen, da Refraktionserscheinungen den Signalweg verändern. All diese Effekte werden in den folgenden Beobachtungsgleichungen berücksichtigt und entsprechend nach [Gehlich, 1995] modelliert. Die GPS-Phasendifferenz wird mit φ_r^s bezeichnet. Der untere Index kennzeichnet den Empfänger (r für (engl.) receiver) und der obere den Satelliten (s für (engl.) satellite).

2.2.1. Phasendifferenz als Funktion der Strecke

φ_r^s ergibt sich aus der Phase des Referenzsignals φ_r zu einem Empfangszeitpunkt t_r und der Phase des Satellitensignals φ^s zum Aussendezeitpunkt t^s .

$$\varphi_r^s(t_r) = \varphi_r(t_r) - \varphi^s(t^s) \quad (2.18)$$

Da die Phasenmessung nur modulo 1 erfolgen kann, fehlt die Information über die Anzahl der gesamten Wellenzyklen, die vom Sendezeitpunkt bis zum Empfangszeitpunkt ausgestrahlt wurden. Man kann diese Zahl auch als unbekanntes Zählerstand im Empfänger erklären. Ab der ersten Messepoche wird der Dopplercount beobachtet, so dass sich der Zählerstand mit jedem eintreffenden Wellenzyklus ändert. Unbekannt bleibt jedoch sein Anfangswert I_r^s , der als Mehrdeutigkeit bzw. Ambiguity bezeichnet wird.

$$\varphi_r^s(t_r) = \varphi_r(t_r) - \varphi^s(t^s) + I_r^s \quad (2.19)$$

Falls das Signal unterbrochen wird, treten Phasensprünge auf, die sich in den Zählerständen bemerkbar machen.

$$I_r^s(t_r) = I_r^s + \sum_{t_i=0}^{t_r} C_r^s(t_i) \quad t_r : \text{aktuelle Messepoche} \quad (2.20)$$

Liegen keine Phasensprünge vor, gilt:

$$I_r^s(t_r) = I_r^s \quad \text{mit} \quad \sum_{t_i=0}^{t_r} C_r^s(t_i) = 0 \quad (2.21)$$

Für die weitere Entwicklung der Gleichung wird davon ausgegangen, dass sämtliche Phasensprünge während der Vorverarbeitung (Anhang B.3) identifiziert und eliminiert werden. Der Zählerstand I_r^s geht deshalb als zeitunabhängige Größe in die Modellierung ein.

Um aus den beobachteten Phasendifferenzen die Entfernung zwischen Satellit und Empfänger berechnen zu können, sind weitere Umformungen nötig:

$$\begin{aligned}\varphi_r^s(t_r) &= \varphi_r(t_r) - \varphi^s(t^s) + I_r^s & / & + \varphi^s(t_r) - \varphi^s(t_r) \\ &= \varphi_r(t_r) - \varphi^s(t_r) + \underbrace{\varphi^s(t_r) - \varphi^s(t^s)}_{= \int_{t^s}^{t_r} f dt} + I_r^s\end{aligned}\quad (2.22)$$

Für einen sehr kurzen Zeitraum ($t_r - t^s \approx 0.07$ sec) kann der Oszillator des Satelliten als stabil angenommen werden. Die Frequenz f kann als Konstante vor das Integral gezogen werden:

$$\Rightarrow \varphi^s(t_r) - \varphi^s(t^s) = \int_{t^s}^{t_r} f dt = (t_r - t^s)f(t) \quad (2.23)$$

Die Laufzeit $t_r - t^s$ ergibt sich aus der Integration des Brechungsindex n bzw. der Brechzahl N (Kapitel 2.3) über den gekrümmten Signalweg l .

$$t_r - t^s = \frac{1}{c} \int_l n dl = \frac{1}{c} \int_l (1 + N) dl = \frac{1}{c} \left(\underbrace{\int_l dl}_{r_r^s(t_r) + \Delta r_l} + \int_l N dl \right) \quad (2.24)$$

Korrekterweise muss man die Entfernung r_r^s als Funktion der Zeiten t_r und t^s darstellen, da sie sich aus den Empfängerkoordinaten zum Zeitpunkt t_r ergibt, aber von der Position des Satelliten zum Aussendezeitpunkt t^s abhängig ist.

$$r_r^s(t_r, t^s) = \sqrt{\{x^s(t^s) - x_r(t_r)\}^2 + \{y^s(t^s) - y_r(t_r)\}^2 + \{z^s(t^s) - z_r(t_r)\}^2} \quad (2.25)$$

In den weiteren Formeln wird auf die Angabe der Aussendezeit wegen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Δr_l ist die Abweichung der direkten Entfernung r_r^s zwischen Satellit und Empfänger vom gekrümmten Laufweg l .

$$\Delta r_l = l - r_r^s \quad (2.26)$$

Für Elevationen $E > 5^\circ$ gilt: $\Delta r_l \approx 0$. In diesen Fällen kann im zweiten Integral über r integriert werden, da $l \sim r_r^s$.

$$t_r - t^s = \frac{1}{c} \left(r_r^s(t_r) + \underbrace{\Delta r_l}_{\approx 0} + \int_r N dr \right) \quad (2.27)$$

Zerlegt man das letzte Integral in den Laufweg r_{trop} durch die Troposphäre und den Laufweg r_{ion} durch die Ionosphäre, lassen sich ionosphärische und troposphärische Refraktion unabhängig voneinander berechnen (Kapitel 2.3).

$$t_r - t^s = \frac{r_r^s(t_r)}{c} + \underbrace{\frac{1}{c} \int_{r_{trop}} N_{trop} dr}_{\Delta r_{trop}^s(t_r)} + \underbrace{\frac{1}{c} \int_{r_{ion}} N_{ion} dr}_{\Delta r_{ion}^s(t_r)} \quad f = 1, 2 \quad (2.28)$$

Setzt man (2.28) in die Beobachtungsgleichung (2.22) ein, erhält man für die Phasendifferenzen die Formel:

$$\varphi_r^s(t_r) = \varphi_r(t_r) - \varphi^s(t_r) + \frac{f}{c} \{r_r^s(t_r) + \Delta r_{trop}^s(t_r) + \Delta r_{ion}^s(t_r)\} + I_r^s \quad (2.29)$$

2.2.2. Satelliten- und Empfängeruhrdifferenzen

Auf Grund der Differentialbeziehung $f = d\varphi/dt$ lassen sich die momentanen Phasen $\varphi_r(t_r)$ und $\varphi^s(t_r)$ in ihre Anfangszustände $\varphi_r(t_0)$ bzw. $\varphi^s(t_0)$ und ihre Änderung in einer Zeitspanne von t_0 bis zum momentanen Messzeitpunkt t_r zerlegen.

$$\varphi_r(t_r) = \varphi_r(t_0) + \int_{t_0}^{t_r} f_r(t) dt \quad (2.30)$$

$$\varphi^s(t_r) = \varphi^s(t_0) + \int_{t_0}^{t_r} f^s(t) dt \quad (2.31)$$

t_0 : Referenzepoche (Zeitpunkt der ersten Messung bezogen auf Empfängerzeit)
 t_r : beliebige Messepoche (bezogen auf Empfängerzeit)

Behandelt man einen der an der Messung beteiligten Oszillatoren als Referenzuhr $r = b$ und bildet über den gesamten Messzeitraum Differenzen zu allen anderen Uhren, ergeben sich für die Stationen r die zeitabhängigen Empfängeruhrdifferenzen $R_r(t_r)$ und für die Satelliten s die zeitabhängigen Satellitenuhrdifferenzen $S^s(t_r)$.

$$R_r(t_r) = \int_{t_0}^{t_r} f_r(t) dt - \int_{t_0}^{t_r} f_b(t) dt = \int_{t_0}^{t_r} (f_r(t) - f_b(t)) dt \quad (2.32)$$

$$S^s(t_r) = \int_{t_0}^{t_r} f^s(t) dt - \int_{t_0}^{t_r} f_b(t) dt = \int_{t_0}^{t_r} (f^s(t) - f_b(t)) dt \quad (2.33)$$

Durch Einfügen der neuen Variablen S^s und R_r in die Formeln für die Phasen $\varphi_r(t_r)$ und $\varphi^s(t_r)$ erhält man:

$$\varphi_r(t_r) = \varphi_r(t_0) + R_r(t_r) + \int_{t_0}^{t_r} f_b(t) dt \quad (2.34)$$

$$\varphi^s(t_r) = \varphi^s(t_0) + S^s(t_r) + \int_{t_0}^{t_r} f_b(t) dt \quad (2.35)$$

Die Phasendifferenz $\varphi_r(t_r) - \varphi^s(t_r)$ lässt sich damit wie folgt modellieren:

$$\begin{aligned} \varphi_r(t_r) - \varphi^s(t_r) &= \varphi_r(t_0) + R_r(t_r) + \int_{t_0}^{t_r} f_b(t) dt - \varphi^s(t_0) - S^s(t_r) - \int_{t_0}^{t_r} f_b(t) dt \\ &= \varphi_r(t_0) - \varphi^s(t_0) + R_r(t_r) - S^s(t_r) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Verwendet man die Darstellung (2.36) und setzt diese in die Gleichung (2.29) ein, gelten für die erste Messepoche t_0 und die noch folgenden Epochen t_r unterschiedliche Beobachtungsgleichungen.

$$t_0 : \quad \varphi_r^s(t_0) = \varphi_r(t_0) - \varphi^s(t_0) + \frac{f}{c} \{ r_r^s(t_0) + \Delta r_{trop_r^s}(t_0) + \Delta r_{ion1_r^s}(t_0) \} + I_r^s \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} t_r : \quad \varphi_r^s(t_r) &= \varphi_r(t_0) - \varphi^s(t_0) + \frac{f}{c} \{ r_r^s(t_r) + \Delta r_{trop_r^s}(t_r) + \Delta r_{ion2_r^s}(t_r) \} + I_r^s \\ &\quad + R_r(t_r) - S^s(t_r) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aus den bisher eingeführten Modellierungen für die beobachteten Phasendifferenzen erhält man für die Messungen auf L_1 und L_2 die Gleichungen:

$$\begin{aligned} L_1 : \quad \varphi_{1r}^s(t) &= \varphi_{1r}(t_0) - \varphi_{1r}^s(t_0) + \frac{f_1}{c} \{ r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t) + \Delta r_{ion1_r^s}(t) \} + I_{1r}^s \\ &\quad + R_{1r}(t) - S_1^s(t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} L_2 : \quad \varphi_{2r}^s(t) &= \varphi_{2r}(t_0) - \varphi_{2r}^s(t_0) + \frac{f_2}{c} \{ r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t) + \Delta r_{ion2_r^s}(t) \} + I_{2r}^s \\ &\quad + R_{2r}(t) - S_2^s(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die Frequenzen f_1 und f_2 werden aus der Grundfrequenz abgeleitet und stehen damit in folgendem Verhältnis:

$$f_1 = 154 \cdot f_0 \quad f_2 = 120 \cdot f_0 \quad \frac{f_2}{f_1} = \alpha = \frac{120}{154} \quad (2.41)$$

Mit (2.41) lässt sich die Beobachtung auf L_2 auch in der Form

$$L_2: \quad \varphi_{2r}^s(t) = \alpha \varphi_{1r}(t_0) - \alpha \varphi_1^s(t_0) + \frac{f_2}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r}^s(t) + \Delta r_{ion2r}^s(t)\} + I_{2r}^s + \alpha R_{1r}(t) - \alpha S_1^s(t) \quad (2.42)$$

schreiben. Die Anzahl der Unbekannten reduziert sich, da die Größen $\varphi_{2r}(t_0)$, $\varphi_2^s(t_0)$, $R_{2r}(t)$ und $S_2^s(t)$ wegfallen bzw. durch die entsprechenden Unbekannten aus der L_1 -Beobachtungsgleichung darstellbar sind. Eine Unterscheidung über die Indizes hinsichtlich der Frequenz wird im Weiteren für die Empfänger- und Satellitenuhren sowie ihrer Phasenablagen zum Zeitpunkt t_0 nicht mehr vorgenommen.

2.3. Signalausbreitung in der Ionosphäre

Das elektromagnetische Signal, das vom GPS-Satelliten ausgesendet wird, unterliegt auf dem Weg durch die Atmosphäre bis hin zur GPS-Antenne bestimmten Refraktionserscheinungen. Für GPS-Messungen sind in diesem Zusammenhang zwei Bereiche der Atmosphäre, die Troposphäre und die Ionosphäre, von entscheidender Bedeutung. Wie die Abbildung 2.2 zeigt, kommt es in diesen Gebieten durch die medialen Eigenschaften der Ionosphäre und der Troposphäre zu einer Krümmung des Signallaufweges. Um aus der gemessenen Entfernung den geradlinigen Abstand zwischen Satellit und Empfänger herleiten zu können, müssen diese Wegverzögerungen bekannt sein. Die dazu notwendige Modellierung der Troposphäre, die die Software TUBGPS vornimmt, wird im Anhang B.7 näher erläutert. Für die Auflösung der Mehrdeutigkeiten ist die ionosphärische Refraktion von entscheidender Bedeutung, weshalb im folgenden Kapitel näher darauf eingegangen wird.

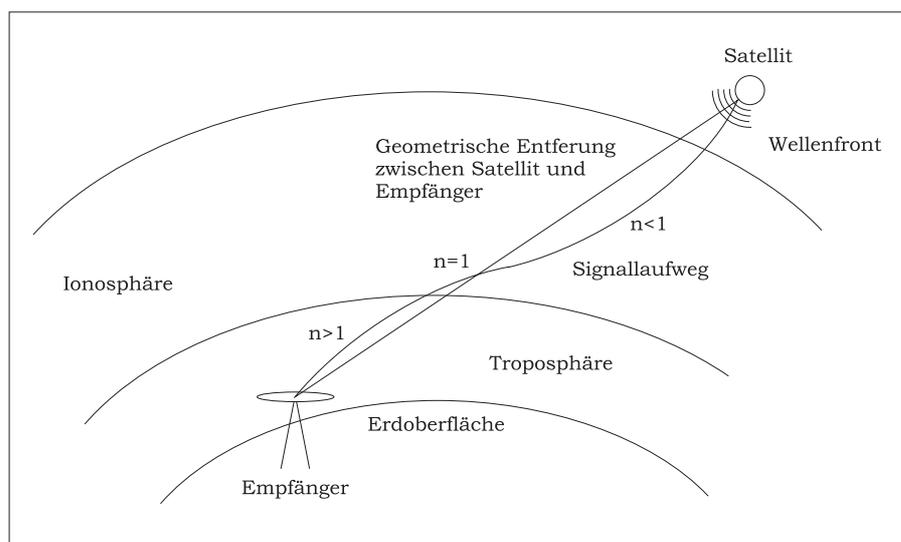


Abb. 2.2: Atmosphärische Refraktion

Die Ionosphäre erstreckt sich über eine Höhe von ca. 50 km bis etwa 1000 km. Durch die ultraviolette Strahlung der Sonne erfolgt in diesem Bereich die Ionisierung von Atomen und Molekülen. Die Dichte der freien Elektronen, die Hauptursache der Laufzeitverzögerung, unterliegt verschiedenen Einflüssen wie tageszeitlichen Schwankungen, dem elfjährigen Sonnenfleckenzyklus und Szintillationen¹. Die Verteilung der Elektronen in der Ionosphäre wird auch vom Magnetfeld der Erde beeinflusst. Lokal auftretende Ionenwolken sind meist nicht modellierbar und machen sich daher als Störung in den Messungen bemerkbar. Die Abbildungen 2.3 und 2.4 zeigen Messungen² der solaren Flussdichte, wodurch der Verlauf des Sonnenfleckenzyklus deutlich wird. Aus Abbildung 2.4 ist zu entnehmen, dass sich das letzte Maximum des Zyklus über die Jahre 1999 bis 2002 erstreckt.

¹ kurzperiodische, heftige Variationen des Ionisierungsgrades der Erdatmosphäre

² Abbildungen 2.3 und 2.4 zeigen die solare Flussdichte (solar flux), die aus Messungen des Dominion Radio Observatory nahe

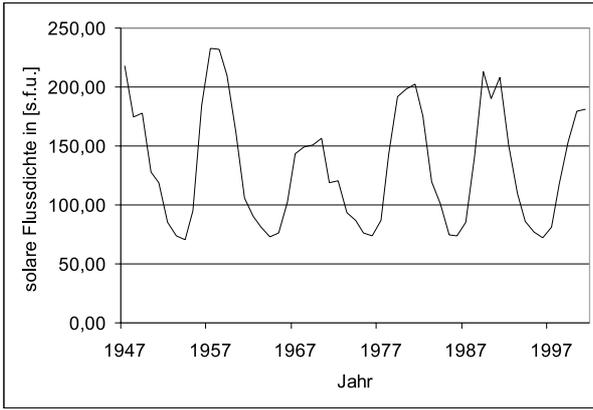


Abb. 2.3: Jährliche solare Flussdichte 1947-2001 (2800 MHz)

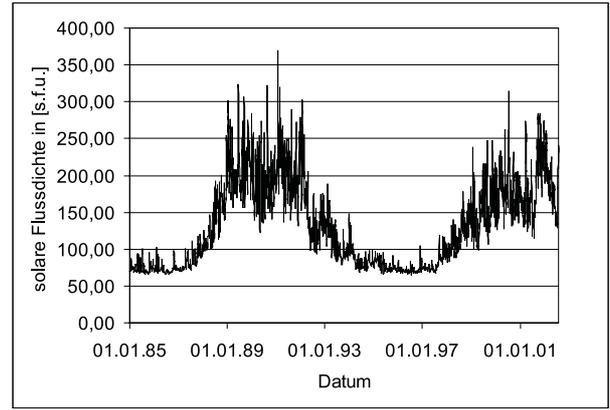


Abb. 2.4: Tägliche solare Flussdichte 1.1.1985 - 30.07.2002 (2800 MHz)

2.3.1. Die ionosphärische Verzögerung $ION_r^s(t)$

Im Vakuum bewegen sich elektromagnetische Signale mit der Lichtgeschwindigkeit c . Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ν gilt in diesem Fall

$$c = \nu = f\lambda. \quad (2.43)$$

Werden andere Medien durchstreift, ändert sich diese Geschwindigkeit. Zur Verdeutlichung dieser Tatsache führt man den Brechungsindex n und die Brechzahl N ein.

$$n = \frac{c}{\nu} = N + 1 \quad (2.44)$$

Die Ionosphäre beeinflusst als dispersives Medium die Ausbreitungsgeschwindigkeit ν der elektromagnetischen GPS-Signale in Abhängigkeit von ihrer Frequenz f . Die Ableitung dieser Geschwindigkeit nach der Wellenlänge

$$\frac{d\nu}{d\lambda} \quad (2.45)$$

nennt man Geschwindigkeitsdispersion. In Medien, in denen $d\nu/d\lambda$ verschieden von Null ist, unterscheidet sich die Ausbreitung der Phase eines Wellenvorganges mit einheitlicher Wellenlänge (Phasengeschwindigkeit ν_p) von der einer Wellengruppe, die durch Überlagerung mehrere Wellenzüge unterschiedlicher Frequenz entsteht (Gruppengeschwindigkeit ν_g). Der Zusammenhang zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit wird beschrieben durch

$$\nu_g = \nu_p - \lambda \frac{d\nu_p}{d\lambda} \quad (2.46)$$

Für die Brechungsindizes gilt entsprechend

$$n_g = n_p + f \frac{dn}{df}. \quad (2.47)$$

Bei GPS muss man für die Codemessungen ν_g und für die Trägerphasenmessungen ν_p ansetzen. Der Brechungsindex für die Phasenausbreitung lässt sich als Potenzreihe darstellen.

$$n_p = 1 + \frac{c_2}{f^2} + \frac{c_3}{f^3} + \frac{c_4}{f^4} + \dots \quad (2.48)$$

Für n_g erhält man aus Gleichung (2.47) und der Ableitung der Formel (2.48) den mathematischen Zusammenhang:

$$n_g = 1 - \frac{c_2}{f^2} - 2\frac{c_3}{f^3} - 3\frac{c_4}{f^4} + \dots \quad (2.49)$$

Penticton in British Columbia gewonnen wurden. Die Flussdichte auf einer Wellenlänge von 10,7 cm (2800 MHz) wird zur lokalen Mittagszeit um 20.00 Uhr UTC in Penticton gemessen ($1 \text{ s.f.u.} = 10^{-22} \text{ Joules sec}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$). Die Daten stammen vom NGDC (National Geophysical Data Center), von der Abteilung STP (Solar Terrestrial Physics) des NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration). ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/SOLAR_DATA/SOLAR_RADIO/FLUX/

Dementsprechend unterscheiden sich auch die dazugehörigen Brechzahlen N_{ion} in der Ionosphäre. Eine Abschätzung für c_2 ergibt sich aus der Dispersionformel ionisierter Gase, wobei Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden.

$$c_2 = -K \cdot E(r, t) \quad (2.50)$$

$E(r, t)$ ist die Zahl der freien Elektronen und K eine physikalische Konstante, die sämtliche Parameter vereinigt ($K = 40.3 \frac{m^3}{sec^2}$). Werden in den Gleichungen (2.48) und (2.49) die höheren Koeffizienten nicht berücksichtigt, gilt

$$N_{ionp} = -\frac{K}{f^2} \cdot E(r, t) \quad \text{und} \quad N_{iong} = +\frac{K}{f^2} \cdot E(r, t) \quad (2.51)$$

Liegen präzise Code- und Phasenmessungen gleichzeitig vor, kann dieser Zusammenhang der Brechzahlen bei der Auswertung zusätzlich genutzt werden. Arbeitet man weiterhin nur mit dem Koeffizienten c_2 , ist erkennbar, dass die Brechzahlen umgekehrt proportional zum Quadrat der Frequenz ist. Ein großer Teil der Laufzeitverzögerung kann demnach durch Verwendung von zwei Frequenzen erfasst werden [Seeber, 1993].

Mit dem vereinfachten Ansatz erhält man die Verzögerung des Phasenlaufweges $\Delta r_{ionf_r^s}(t)$ mit $f = 1, 2$ durch Integration von N_{ionp} über den Laufweg in der Ionosphäre r_{ion} (Gleichung (2.28))

$$\Delta r_{ionf_r^s}(t) = -\frac{K}{f^2} \int_{\underbrace{r_{ion}}_{TEC_r^s(t)}} E(r, t) dr \quad (2.52)$$

Der Gesamtelektroneninhalt längs des Laufweges $TEC_r^s(t)$ (Total Electron Content) wird in der Einheit $[m^{-2}]$ angegeben. Er entspricht der Anzahl der freien Elektronen, die sich entlang des Signalweges in einem Zylinder mit der Grundfläche von einem Quadratmeter und einer Höhe r_r^s befinden.

Die Laufzeitverzögerungen $\Delta r_{ionf_r^s}(t)$ lassen sich durch Multiplikation mit dem Term $\frac{f}{c}$ zu einer Unbekannten $ION_r^s(t)$ vereinigen:

$$ION_r^s(t) = \frac{f_1}{c} \Delta r_{ion1_r^s}(t) = -\frac{K}{c \cdot f_1} TEC_r^s(t) \quad (2.53)$$

Fasst man K , c und f_1 zu einer Konstanten β zusammen ($\beta = -8.5327 \cdot 10^{-17} m^2$), gilt:

$$ION_r^s(t) = \beta \cdot TEC_r^s(t) \quad (2.54)$$

Für die ionosphärische Refraktion auf der zweiten Frequenz ergibt sich dann:

$$\frac{f_2}{c} \Delta r_{ion2_r^s}(t) = -\frac{f_2}{c} \frac{K}{f_2^2} TEC_r^s(t) = \frac{ION_r^s(t)}{\alpha} \quad (2.55)$$

$ION_r^s(t)$ wird in die Gleichungen (2.39) und (2.42) eingeführt, wodurch man die Beobachtungsgleichungen

$$L_1: \quad \varphi_{1_r^s}(t) = \varphi_r(t_0) - \varphi^s(t_0) + \frac{f_1}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} + ION_r^s(t) + I_{1_r^s} + R_r(t) - S^s(t) \quad (2.56)$$

$$L_2: \quad \varphi_{2_r^s}(t) = \alpha \varphi_r(t_0) - \alpha \varphi^s(t_0) + \frac{f_2}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} + \frac{ION_r^s(t)}{\alpha} + I_{2_r^s} + \alpha R_r(t) - \alpha S^s(t) \quad (2.57)$$

gewinnt [Gehlich, 1995]. Sie bilden die Grundlage für die Berechnung von Linearkombinationen und Differenzen (Kapitel C.1 und C.2) während der Vorverarbeitung der GPS-Phasenmessungen.

2.3.2. Modellierung des Gesamtelektroneninhaltes $TEC_r^s(t)$

Der Berechnung der ionosphärischen Refraktion liegt das Single-Layer-Modell zu Grunde. Danach konzentrieren sich alle freie Elektronen in einer Schale infinitesimaler Dicke. Die Höhe über der Erdoberfläche h dieser idealisierten Schicht beträgt nach [Wild et al., 1989] ca. 350 km. Damit erwartet man in einem Abstand von $R + h$, wobei R der mittlerer Erdradius ist, eine maximale Elektronendichte und damit auch die größte Refraktion. Die Abbildungen 2.5 und 2.6 zeigen, wie das Signal in Abhängigkeit des Zenitwinkels $\zeta(t)$ bzw. Elevationswinkels $E_r^s(t)$ an der Elektronenschicht unter einem Zenitwinkel $\zeta'(t)$ gebrochen wird.

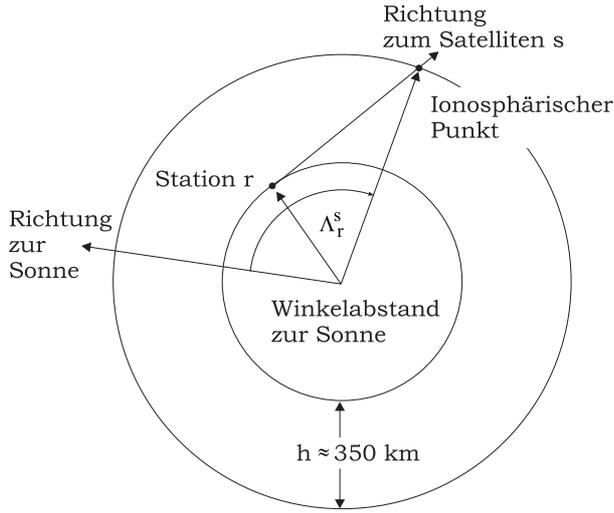
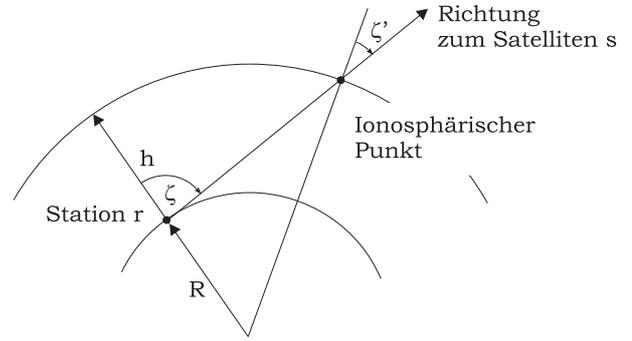
Abb. 2.5: Winkelabstand Λ_r^s 

Abb. 2.6: Single-Layer-Modell

In erster Näherung ist der Gesamtelektroneninhalt indirekt proportional zum vertikalen Elektronengehalt $VEC_r^s(t)$, der Oberflächendichte der infinitesimalen Elektronenschicht in Zenitrichtung, und dem Cosinus des Zenitwinkels $\zeta'(t)$.

$$TEC_r^s(t) = VEC_r^s(t) \cdot \frac{1}{\cos \zeta'(t)} \quad (2.58)$$

Die Funktion zur Berechnung des reziproken Wertes von $\cos \zeta'(t)$ wird als Mappingfunktion bezeichnet und im Weiteren mit $S(E_r^s(t))$ abgekürzt.

$$TEC_r^s(t) = VEC_r^s(t) \cdot S(E_r^s(t)) \quad (2.59)$$

Der Winkel $\zeta'(t)$ ergibt sich auf Grund des Single-Layer-Modells aus:

$$\cos \zeta'(t) = \frac{R}{R+h} \sin E_r^s(t) \quad (2.60)$$

Damit lautet die einfache Mappingfunktion $S(E_r^s(t))$ zur Modellierung des totalen Elektronengehaltes:

$$S(E_r^s(t)) = \frac{1}{\cos \zeta'(t)} \quad \text{mit} \quad \cos \zeta'(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \cos^2 E_r^s(t)} \quad (2.61)$$

Der vertikale Elektronengehalt $VEC_r^s(t)$ ist eine Funktion des Winkelabstandes Λ_r^s vom ionosphärischen Punkt zur Sonne, der magnetischen Breite $\phi_{m_r}^s$ des ionosphärischen Punktes und der Zeit t [Lohmar, 1984].

$$VEC_r^s(t) = VEC(\Lambda_r^s, \phi_{m_r}^s, t) \quad (2.62)$$

Die Abhängigkeit des vertikalen Elektronengehaltes von den obigen Parametern kann noch genauer formuliert werden. Nach [Georgiadou und Kleusberg, 1986] werden Polynome erster Ordnung zur Approximation der magnetischen Breite und Polynome zweiter Ordnung für den Winkelabstand zur Sonne verwendet. Für die Zeitabhängigkeit wird ein Polynom zweiten Grades angesetzt, so dass sich $VEC_r^s(t)$ aufspaltet in:

$$VEC_r^s(t) = VEC(\Lambda_r^s) + VEC(\phi_{m_r}^s) + VEC(t) \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } VEC(\phi_{m_r}^s) &= \sum_{i=0}^1 a_i (\phi_{m_r}^s - \phi_{m_0})^i \\ VEC(\Lambda_r^s) &= \sum_{i=0}^2 b_i (\Lambda_r^s - \Lambda_0)^i \text{ und} \\ VEC(t) &= \sum_{i=0}^2 c_i (t - t_{r0})^i \end{aligned} \quad (2.64)$$

ϕ_{m0} : mittlere magnetische Breite
 Λ_0 : mittlerer Winkelabstand zur Sonne
 t_0 : Tagesbeginn

In Regionen, wo sich der breitenabhängige Teil des Elektronengehaltes nicht linear ändert (Anomalie-Zonen bei $\phi_{m_r^s} \approx \pm 12^\circ$), wird statt des linearen ein exponentieller Ansatz verwendet.

$$VEC(\phi_{m_r^s}) = a \cdot e^{-\left(\frac{\phi_{m_r^s} - \phi_{m0}}{\sigma}\right)^2} \quad (2.65)$$

Den wesentlichen Anteil bei der Berechnung von $VEC_r^s(t)$ übernimmt die Funktion $VEC(\Lambda_r^s)$, die sich auch am schwierigsten modellieren lässt. Nach dem Kreuzungspunktverfahren [Gehlich, 1993] kann dieser Teil aber durch Differenzbildung zwischen Beobachtungen eliminiert werden, die im Durchstoßpunkt der Single-Layer-Ionosphäre den gleichen Wert für Λ besitzen (Kapitel 2.5.1).

2.4. Phasenauswertung ohne Differenzbildung

2.4.1. Fehler durch Linearkombinationen und Differenzbildungen

Bei der Vorverarbeitung der Phasemessungen werden Differenzen gebildet (Kapitel C.2), um grobe Fehler und Phasensprünge zu finden. Bei der Hauptverarbeitung der Daten ist es jedoch von großem Vorteil, direkt mit den Originalphasen zu arbeiten. Der Nachteil der Linearkombinationen und der Differenzbildungen ergibt sich aus dem sich fortpflanzenden Fehler der Originalmessungen. Z.B. werden für die Phasenbeobachtungen φ_3 (Anhang C.1) auf L_3 mittlere Fehler erzeugt, die unter der Annahme, dass $\sigma(\varphi) = \sigma(\varphi_1) = \sigma(\varphi_2)$ ist, dem 1.3-fachen von $\sigma(\varphi)$ entsprechen:

$$\sigma(\varphi_3) = \sigma(\varphi) \sqrt{1 + \alpha^2} \approx 1.3 \sigma(\varphi) \quad (2.66)$$

Bildet man Doppeldifferenzen der Originalmessungen, muss man davon ausgehen, dass sich der Fehler um das Zweifache vergrößert.

$$\text{Fehlerfortpflanzung in Einzeldifferenzen:} \quad \varphi_{rk}^i = \varphi_r^i - \varphi_k^i \quad (2.67)$$

$$\sigma(\varphi_{rk}^i) = \sqrt{2} \sigma(\varphi) \quad (2.68)$$

$$\text{Fehlerfortpflanzung in Doppeldifferenzen:} \quad \varphi_{rk}^{ij} = \varphi_{rk}^i - \varphi_{rk}^j \quad (2.69)$$

$$\sigma(\varphi_{rk}^{ij}) = 2 \sigma(\varphi) \quad (2.70)$$

Gleicht man Differenzen oder Linearkombinationen aus, kann es zu Problemen durch die Minimierung der Größe $\sum vv$ kommen.

$$\Delta\varphi + v = (\varphi_a + \sigma(a)) - (\varphi_b + \sigma(b)) + v = f(x_i) \quad (2.71)$$

Ein grober Fehler, der in beiden Beobachtungen mit der gleichen Größe $\sigma(a) = \sigma(b)$ enthalten ist, macht sich nicht im Wert der Verbesserung bemerkbar. Er fällt durch die Bildung von Einzeldifferenzen heraus.

$$v = \varphi_a - \varphi_b - f(x_i) = f(\Delta x_i) \quad (2.72)$$

Andererseits könnten zufällige Fehler der gleichen Größe mit entgegengesetzten Vorzeichen $\sigma(a) = -\sigma(b)$ in den Messungen auftreten. Statt einer Verbesserung der Näherungswerte der Unbekannten kommt es hier zur Minimierung der zufälligen Fehler.

$$v = \varphi_a - \varphi_b - f(x_i) + 2\sigma(a) = f(\Delta x_i) \quad (2.73)$$

2.4.2. Beobachtungsgleichungen

Die bisherigen Modellierungen haben die folgenden Gleichungen für die Phasenbeobachtungen auf L_1 und L_2 ergeben.

$$L_1: \quad \varphi_{1r}^s(t) = \varphi_r(t_0) - \varphi^s(t_0) + \frac{f_1}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} + ION_r^s(t) + I_{1r}^s + R_r(t) - S^s(t) \quad (2.74)$$

$$L_2: \quad \varphi_{2r}^s(t) = \alpha\varphi_r(t_0) - \alpha\varphi^s(t_0) + \frac{f_2}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} + \frac{ION_r^s(t)}{\alpha} + I_{2r}^s + \alpha R_r(t) - \alpha S^s(t) \quad (2.75)$$

Stützt man sich bei dem Hauptteil der Auswertung der GPS-Phasenbeobachtungen nicht auf die Bildung von Differenzen und Linearkombinationen, erhält man nur durch Elimination mehrerer Unbekannten der Gleichungen (2.74) und (2.75) ein stabiles Normalgleichungssystem [Gehlich und Lelgemann, 1997]. Es bietet sich an, die Mehrdeutigkeiten und die Phasenablagen der Uhren zum Zeitpunkt t_0 zu den zeitunabhängigen Größen Q_{1r}^s und Q_{2r}^s zusammenzufassen.

$$Q_{1r}^s = \varphi_r(t_0) - \varphi^s(t_0) + I_{1r}^s \quad (2.76)$$

$$Q_{2r}^s = \alpha\varphi_r(t_0) - \alpha\varphi^s(t_0) + I_{2r}^s \quad (2.77)$$

Setzt man (2.76) und (2.77) in die Beobachtungsgleichungen (2.74) und (2.75) ein, folgt:

$$L_1: \quad \varphi_{1r}^s(t) = \frac{f_1}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r}^s(t)\} + ION_r^s(t) + R_r(t) - S^s(t) + Q_{1r}^s \quad (2.78)$$

$$L_2: \quad \varphi_{2r}^s(t) = \frac{f_2}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r}^s(t)\} + \frac{ION_r^s(t)}{\alpha} + \alpha R_r(t) - \alpha S^s(t) + Q_{2r}^s \quad (2.79)$$

Um die Anzahl der Unbekannten weiter zu reduzieren, werden in einem zweiten Schritt die zeitunabhängigen Werte F_r^s eingeführt und die ionosphärische Refraktion mit dem Parameter Q_{2r}^s zu einem neuen, zeitabhängigen Wert $H_r^s(t)$ vereinigt:

$$F_r^s = Q_{1r}^s - \alpha Q_{2r}^s \quad (2.80)$$

$$H_r^s(t) = \alpha Q_{2r}^s + ION_r^s(t) \quad (2.81)$$

Die endgültigen Beobachtungsgleichungen lauten :

$$L_1: \quad \varphi_{1r}^s(t) = \frac{f_1}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r}^s(t)\} + R_r(t) - S^s(t) + F_r^s + H_r^s(t) \quad (2.82)$$

$$L_2: \quad \varphi_{2r}^s(t) = \frac{f_2}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r}^s(t)\} + \alpha R_r(t) - \alpha S^s(t) + \frac{H_r^s(t)}{\alpha} \quad (2.83)$$

2.4.3. Redundanzbetrachtungen

Parametrisiert man die Beobachtungsgleichungen auf die oben erläuterte Weise, ergibt sich ein redundantes Gleichungssystem. Die Anzahl der Beobachtungen l bei Messungen auf zwei Frequenzen mit m Empfängern zu n Satelliten in i Epochen berechnet sich aus:

$$l = 2 \cdot i \cdot n \cdot m \quad (2.84)$$

Je nachdem welche Voraussetzungen getroffen werden können, sind insgesamt u unbekannte Parameter zu berechnen.

1. Satellitenkoordinaten werden festgehalten und die troposphärische Refraktion in Zenitrichtung ist während der gesamten Messdauer konstant.

zeitunabhängige Parameter:	$3 \cdot n$ (Stationskoordinaten) $1 \cdot n$ (troposphärische Refraktion) $n \cdot m$ (F_{rs})
zeitabhängige Parameter:	$(n - 1) \cdot i$ (Empfängeruhrdifferenzen) $m \cdot i$ (Satellitenuhrdifferenzen) $n \cdot m \cdot i$ ($H_{rs}(t)$)

$$u = n(4 + m) + i(n - 1 + m + nm) \quad (2.85)$$

2. Stationskoordinaten werden festgehalten, Bahnverbesserungen berechnet und die troposphärische Refraktion in Zenitrichtung ist während der gesamten Messdauer konstant.

zeitunabhängige Unbekannte:	$3 \cdot m$ (Bahnverbesserungen) $1 \cdot n$ (troposphärische Refraktion) $n \cdot m$ (F_{rs})
zeitabhängige Unbekannte:	$(n - 1) \cdot i$ (Empfängeruhrdifferenzen) $m \cdot i$ (Satellitenuhrdifferenzen) $n \cdot m \cdot i$ ($H_{rs}(t)$)

$$u = 3m + n + nm + i(n - 1 + m + nm) \quad (2.86)$$

3. Die troposphärische Zenitrefraktion wird als zeitabhängige Größe modelliert, wobei entweder die Stations- oder die Satellitenkoordinaten festgehalten werden.

$$\begin{array}{ll} \text{zeitunabhängige Unbekannte:} & 3 \cdot n \text{ (Stationskoordinaten)} \rightarrow u_1 \\ & \text{oder } 3 \cdot m \text{ (Bahnverbesserungen)} \rightarrow u_2 \\ & nm \text{ (} F_{rs} \text{)} \\ \text{zeitabhängige Unbekannte:} & 1 \cdot n \cdot i \text{ (troposphärische Refraktionen)} \\ & (n - 1) \cdot i \text{ (Empfängeruhrdifferenzen)} \\ & m \cdot i \text{ (Satellitenuhrdifferenzen)} \\ & n \cdot m \cdot i \text{ (} H_{rs}(t) \text{)} \end{array}$$

$$u_1 = 3n + nm + i(2n - 1 + m + nm) \quad (2.87)$$

$$u_2 = 3m + nm + i(2n - 1 + m + nm) \quad (2.88)$$

Aus der Tabelle 2.3 sind die Anzahl der Unbekannten sowie die Redundanz der verschiedenen Ansätze bei einer Beobachtungsanzahl von $l = 12000$ ($i = 300$, $n = 4$, $m = 5$) zu entnehmen.

1. Ansatz		2. Ansatz		3. Ansatz	
u	r	u	r	$u_1 = 9632$	$r_1 = 2368$
8480	3520	8439	3561	$u_2 = 9635$	$r_2 = 2365$

Tabelle 2.3: Anzahl der Unbekannten u und Redundanz r der verschiedenen Ansätze

2.5. Doppeldifferenzmehrdutigkeiten und L_1/L_2 -Mehrdutigkeiten-Paare

Die in Kapitel 2.2.1 in Gleichung (2.19) eingeführten Anfangswerte der Zählerstände I_r^s selbst können nicht berechnet werden. Deklariert man einen der Satelliten als Basissatelliten $s = a$ [Goad, 1985] und bezieht sich auf die Referenzstation $r = b$, können folgende Doppeldifferenzen³ gebildet werden [Gehlich und Lelgemann, 1997].

$$\begin{aligned} Q_{1rb}^{sa} &= (Q_{1r}^s - Q_{1b}^s) - (Q_{1r}^a - Q_{1b}^a) = Q_{1rb}^s - Q_{1rb}^a \\ &= I_{1rb}^{sa} \\ Q_{2rb}^{sa} &= (Q_{2r}^s - Q_{2b}^s) - (Q_{2r}^a - Q_{2b}^a) = Q_{2rb}^s - Q_{2rb}^a \\ &= I_{2rb}^{sa} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Die Oszillatorphasen zur Referenzepoche t_0 werden durch diese Art der Differenzbildung eliminiert. Es verbleibt eine Doppeldifferenz von Zählerständen I_{1rb}^{sa} bzw. I_{2rb}^{sa} , bei denen es sich wiederum um ganze Zahlen handeln muss. Die Einzeldifferenzen der Q_r^s -Werte können auch wie folgt kombiniert werden:

$$\begin{aligned} Q_{1rb}^s - Q_{1rb}^a - \alpha\{Q_{2rb}^s - Q_{2rb}^a\} &= Q_{1rb}^{sa} - \alpha Q_{2rb}^{sa} \\ &= I_{1rb}^{sa} - \alpha I_{2rb}^{sa} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Auf diese Weise erhält man einen Wert, der sich aus einer bestimmten Kombination der Doppeldifferenzen der Mehrdeutigkeiten ergibt. Er wird als L_1/L_2 -Mehrdutigkeiten-Paar bezeichnet. Zunächst liegen die Doppeldifferenzmehrdutigkeiten und die L_1/L_2 -Mehrdutigkeiten-Paare auf Grund von Modellfehlern und zufälligen Fehlern in Form von reellen Zahlen $R_{f_{rb}}^{sa}$ ($f = 1, 2$) vor.

$$\begin{aligned} Q_{f_{rb}}^{sa} &= R_{f_{rb}}^{sa} \pm \sigma(R_{f_{rb}}^{sa}) \quad f = 1, 2 \\ Q_{1rb}^{sa} - \alpha Q_{2rb}^{sa} &= R_{1/2rb}^{sa} \pm \sigma(R_{1/2rb}^{sa}) \end{aligned} \quad (2.91)$$

³ Die Schreibweise der Doppeldifferenzen orientiert sich an derjenigen, die im Anhang C.2 eingeführt wurde. Auf die Differenzzeichen wird demzufolge verzichtet. Nur aus den jeweils oben und unten stehenden Indizes, die die beteiligten Satelliten und Empfänger kennzeichnen, geht hervor, dass es sich um Doppeldifferenzen handelt.

Gelingt es jedoch, aus diesen reellen Zahlen ganze Werte zu gewinnen, können die Mehrdeutigkeiten in Form von Doppeldifferenzen gelöst werden. Das folgende Verfahren bildet die Differenzen so, dass reelle Zahlen R_{2rb}^{sa} für die Mehrdeutigkeitsdifferenzen I_{2rb}^{sa} sowie reelle Zahlen $R_{1/2rb}^{sa}$ für die Paare $I_{1rb}^{sa} - \alpha I_{2rb}^{sa}$ ermittelt werden. Zusammen mit ihren mittleren Fehlern kann man daraus ganze Werte für I_{1rb}^{sa} und I_{2rb}^{sa} ableiten.

$$R_{2rb}^{sa} \quad \text{und} \quad R_{1rb}^{sa} - \alpha R_{2rb}^{sa} \quad \Rightarrow \quad I_{f rb}^{sa} \quad (f = 1, 2) \quad (2.92)$$

2.5.1. Separation der ionosphärischen Refraktion

Die float-Lösung liefert Werte für die Größen $H_r^s(t)$ und F_r^s . Diese werden verwendet, um die Parameter Q_r^s bzw. die Differenzen Q_{rb}^{sa} zu bilden. Die $H_r^s(t)$ -Werte müssen dazu um die ionosphärische Refraktion $ION_r^s(t)$ reduziert werden.

Kurze Basislinien

Bei kurzen Basislinien mit einer Länge bis ca. 5 km und ruhiger Ionosphäre geht man davon aus, dass die ionosphärische Refraktion die Messungen aller Stationen zu allen Satelliten in gleicher Weise beeinflusst. Im Wesentlichen hängt $ION_r^s(t)$ von der einfallenden UV-Strahlung der Sonne und damit vom Abstand zur Sonne Λ_r^s und der magnetischen Breite $\phi_{m_r}^s$ ab. Betrachtet man die simultanen Messungen zu einem Satelliten s auf der Referenzstation $r = b$ und einer anderen Station r , existieren auf Grund der geringen Entfernung kaum Unterschiede im vertikalen Elektronengehalt sowie in den Elevationen $E_r^s(t)$ und $E_b^s(t)$. Bei der Bildung von Einzeldifferenzen der H_r^s -Werte fallen somit die Werte $ION_b^s(t)$ bzw. $ION_r^s(t)$ heraus.

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } ION_r^s(t) = ION_b^s(t) \quad \Rightarrow \quad H_{rb}^s(t) &= H_r^s(t) - H_b^s(t) \\ &= \alpha Q_{2r}^s + ION_r^s(t) - \alpha Q_{2b}^s - ION_b^s(t) \\ &= \alpha (Q_{2r}^s - Q_{2b}^s) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Die gleichen Bedingungen gelten auch für einen Basissatelliten $s = a$.

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } ION_r^a(t) = ION_b^a(t) \quad \Rightarrow \quad H_{rb}^a(t) &= H_r^a(t) - H_b^a(t) \\ &= \alpha Q_{2r}^a + ION_r^a(t) - \alpha Q_{2b}^a - ION_b^a(t) \\ &= \alpha (Q_{2r}^a - Q_{2b}^a) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Aus den Doppeldifferenzen der $H_r^s(t)$ -Werte gehen rein formal die Differenzmehrdeutigkeiten I_{2rb}^{sa} hervor. Da die Modellierung der komplexen Struktur der Ionosphäre unter diesen Annahmen nicht exakt ist, erhält man zunächst Schätzwerte R_{2rb}^{sa} für die Doppeldifferenzen der Mehrdeutigkeiten I_{2rb}^{sa} mit einem mittleren Fehler der Größe $\sigma(R_{2rb}^{sa})$ (Gleichung 2.96).

$$\begin{aligned} H_{rb}^{sa} &= H_{rb}^s(t) - H_{rb}^a(t) \\ &= \alpha (Q_{2r}^s - Q_{2b}^s) - (Q_{2r}^a - Q_{2b}^a) \\ &= \alpha R_{2rb}^{sa} \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\frac{H_{rb}^{sa}}{\alpha} = R_{2rb}^{sa} \pm \sigma(R_{2rb}^{sa}) \quad \Rightarrow \quad I_{2rb}^{sa} \quad (2.96)$$

Mittlere Basislinien

Bei mittleren Basislinien mit einer Länge von ca. 10 km bis 15 km und ruhigen ionosphärischen Verhältnissen sind die Refraktionen mit gleichem Winkelabstand zur Sonne unterschiedlicher Epochen gleich, da sich auch hier die Elevationen nur geringfügig ändern.

Ansatz: $ION_r^s(t_k) = ION_b^s(t_j)$ bzw. $ION_r^a(t_l) = ION_b^a(t_m)$

$$\begin{aligned} \alpha Q_{2rb}^s &= H_r^s(t_k) - H_b^s(t_j) \\ \alpha Q_{2rb}^a &= H_r^a(t_l) - H_b^a(t_m) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Als Ergebnis liegen die Differenzen Q_{2rb}^s und Q_{2rb}^a vor. Aus den Doppeldifferenzen Q_{2rb}^{sa} ergeben sich Schätzwerte R_{2rb}^{sa} für die Mehrdeutigkeitsdifferenzen I_{2rb}^{sa} mit einem mittleren Fehler der Größe $\sigma(R_{2rb}^{sa})$.

$$\begin{aligned} Q_{2rb}^{sa} &= Q_{2rb}^s - Q_{2rb}^a \\ &= R_{2rb}^{sa} \pm \sigma(R_{2rb}^{sa}) \quad \Rightarrow \quad I_{2rb}^{sa} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Lange Basislinien

Bei längeren Basislinien kann man nicht mehr von gleichbleibenden ionosphärischen Einflüssen ausgehen. Wie Kapitel 2.3.2 zeigt, kann der vertikale Elektronengehalt in mehrere Anteile (Gleichung 2.63) zerlegt werden. Für die Modellierung der H_r^s -Werte gilt dann:

$$H_r^s(t) = \alpha Q_{2r}^s + \beta \left\{ VEC(\Lambda_r^s) + VEC(\phi_{m_r}^s, \lambda_r^s, t) \right\} S(E_r^s(t)) \quad (2.99)$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch die Mappingfunktion $S(E_r^s(t))$ erhält man:

$$\frac{H_r^s(t)}{S(E_r^s(t))} = \alpha \frac{Q_{2r}^s}{S(E_r^s(t))} + \beta \left\{ VEC(\Lambda_r^s) + VEC(\phi_{m_r}^s, \lambda_r^s, t) \right\} \quad (2.100)$$

Um die Einflüsse des Sonnenstandes zu eliminieren, müssen die Messzeitpunkte aus den Daten herausgesucht werden, die den gleichen Winkelabstand zur Sonne Λ_r^s aufweisen. Dies ist bei längeren Messungen relativ einfach zu berücksichtigen, da sich die Erde gegenüber der Sonne in einer halben Stunde in einer mittleren Breite von 50° um ca. 536 km weiter bewegt. Ausgehend von der Basisstation $r = b$ und einem zu einer beliebigen Messepoche t_k dazugehörigen Wert $H_b^s(t_k)$ wird der Winkelabstand Λ_b^s ermittelt und mit den Winkelabständen Λ_r^s einer zweiten Station verglichen. Der gesuchte Wert $H_r^s(t_l)$, für den $\Lambda_r^s = \Lambda_b^s$ gilt, wird durch Interpolation gewonnen. Anschließend kann folgende Differenz gebildet werden:

$$\begin{aligned} \frac{H_r^s(t_l)}{S(E_r^s(t_l))} - \frac{H_b^s(t_k)}{S(E_b^s(t_k))} &= \alpha \left(\frac{Q_{2r}^s}{S(E_r^s(t_l))} - \frac{Q_{2b}^s}{S(E_b^s(t_k))} \right) \\ &+ \beta \left\{ VEC(\phi_{m_r}^s, \lambda_r^s, t) - VEC(\phi_{m_b}^s, \lambda_b^s, t) \right\} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Da keine Bestimmung der einzelnen Q_r^s -Werte möglich ist, führt man zweckmäßigerweise wieder die Differenz $Q_{2rb}^s = Q_{2r}^s - Q_{2b}^s$ als Unbekannte ein.

$$\begin{aligned} \frac{H_r^s(t_l)}{S(E_r^s(t_l))} - \frac{H_b^s(t_k)}{S(E_b^s(t_k))} &= \alpha \left(\frac{Q_{2r}^s}{S(E_r^s(t_l))} - \frac{Q_{2b}^s}{S(E_b^s(t_k))} + \frac{Q_{2b}^s}{S(E_r^s(t_l))} - \frac{Q_{2b}^s}{S(E_r^s(t_l))} \right) \\ &+ \beta \left\{ VEC(\phi_{m_r}^s, \lambda_r^s, t) - VEC(\phi_{m_b}^s, \lambda_b^s, t) \right\} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Die Gleichung lässt sich damit umformulieren zu:

$$\begin{aligned} \frac{H_r^s(t_l)}{S(E_r^s(t_l))} - \frac{H_b^s(t_k)}{S(E_b^s(t_k))} &= \alpha \left(\left(\frac{1}{S(E_r^s(t_l))} - \frac{1}{S(E_b^s(t_k))} \right) Q_{2b}^s + \frac{Q_{2rb}^s}{S(E_r^s(t_l))} \right) \\ &+ \beta \left\{ VEC(\phi_{m_r}^s, \lambda_r^s, t) - VEC(\phi_{m_b}^s, \lambda_b^s, t) \right\} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Eine Ausgleichung bringt die Größen Q_{2b}^s und Q_{2rb}^s hervor, aus denen sich dann Q_{2r}^s sowie die mittlere Fehler $\sigma(Q_{2r}^s)$ berechnen lassen. Die gleichen Berechnungen werden bezüglich des Basissatelliten $s=a$ durchgeführt, so dass Q_{2b}^a und Q_{2rb}^a ermittelt werden können. Bildet man anschließend die Doppeldifferenzen Q_{2rb}^{sa} , erhält man wiederum Schätzwerte der Mehrdeutigkeiten R_{2rb}^{sa} mit ihren mittleren Fehlern $\sigma(R_{2rb}^{sa})$.

2.5.2. Festsetzen der Mehrdeutigkeiten

Durch verschiedene Arten der Prozessierung der H_r^s -Werte liegen nun die Doppeldifferenzen R_{2rb}^{sa} mit ihren mittleren Fehlern $\sigma(R_{2rb}^{sa})$ und somit Schätzwerte für die Mehrdeutigkeiten I_{2rb}^{sa} vor. Zusätzlich lassen sich aus den Doppeldifferenzen der F_r^s -Werte reelle Zahlen für die L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paare und ihre mittleren Fehler $\sigma(R_{1/2rb}^{sa})$ gewinnen.

$$\begin{aligned} (F_r^s - F_b^s) - (F_r^a - F_b^a) &= Q_{1rb}^{sa} - \alpha Q_{2rb}^{sa} \\ &= R_{1/2rs}^{sa} \pm \sigma(R_{1/2rs}^{sa}) \Rightarrow I_{1rb}^{sa} - \alpha I_{2rb}^{sa} \end{aligned} \quad (2.104)$$

Die Aufgabe besteht darin, aus den berechneten Werten und ihren Fehlern die Differenzmehrdeutigkeiten zu berechnen, die wirklich beim Messprozess erzeugt wurden. Zur Festlegung der möglichen ganzen Zahlen werden einerseits Konfidenzintervalle Δ_A für I_{2rb}^{sa} und andererseits Intervalle Δ_B für I_{1rb}^{sa} berechnet.

$$\Delta_A : \quad \langle R_{2rb}^{sa} - t \cdot \sigma(R_{2rb}^{sa}), R_{2rb}^{sa} + t \cdot \sigma(R_{2rb}^{sa}) \rangle \quad (2.105)$$

$$\Delta_B : \quad \langle R_{1/2rb}^{sa} - t \cdot \sigma(R_{1/2rb}^{sa}), R_{1/2rb}^{sa} + t \cdot \sigma(R_{1/2rb}^{sa}) \rangle \quad (2.106)$$

t : Schrankenwert der gewählten Sicherheitswahrscheinlichkeit

In der Regel umfasst das Konfidenzintervall Δ_A in Abhängigkeit von den mittleren Fehlern $\sigma(R_{2_{rb}^{sa}})$ und der gewählten Sicherheitswahrscheinlichkeit mehrere ganze Zahlen, unter denen auch der wahre Wert $I_{2_{rb}^{sa}}$ liegen sollte. Bildet man also:

$$I_{2_{rb}^{sa}} = nint(R_{2_{rb}^{sa}}) \quad (2.107)$$

existieren möglicherweise n ganze Zahlen $I_{2_{rb}^{sa}}^i$ ($i = 1, \dots, n$), die im Intervall Δ_A liegen. Um den richtigen Wert herauszufinden, wird die Bedingung (2.104) zu Hilfe genommen und wie folgt umgestellt:

$$\begin{aligned} Q_{1_{rb}^{sa}} &= F_{rb}^{sa} + \alpha Q_{2_{rb}^{sa}} \\ &\text{bzw.} \\ I_{1_{rb}^{sa}} &= F_{rb}^{sa} + \alpha I_{2_{rb}^{sa}} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Setzt man nun der Reihe nach die n ganzen Zahlen $I_{2_{rb}^{sa}}^i$ in die Gleichung (2.108) ein, erhält man n verschiedenen reelle Zahlen $R_{1_{rb}^{sa}}^i$ ($i = 1, \dots, n$), die sich in n verschiedene L_1 -Mehrdeutigkeiten $I_{1_{rb}^{sa}}^i$ und ihre Abweichungen δ_i zur reellen Zahl zerlegen lassen.

$$R_{1_{rb}^{sa}}^i = I_{1_{rb}^{sa}}^i + \delta_i = F_{rb}^{sa} + \alpha I_{2_{rb}^{sa}}^i \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \quad (2.109)$$

Existiert ein reeller Wert $R_{1_{rb}^{sa}}^i$ unter den n Größen für den gilt, dass seine Abweichung δ_i kleiner als das gesamte Konfidenzintervall Δ_B ist, können die Mehrdeutigkeiten festgelegt werden:

$$\text{für } \delta_i < 2t \cdot \sigma(R_{1/2_{rb}^{sa}}) \text{ gilt } I_{1_{rb}^{sa}}^i = I_{1_{rb}^{sa}} \quad \text{und} \quad I_{2_{rb}^{sa}}^i = I_{2_{rb}^{sa}} \quad (2.110)$$

Dem gleichen Sachverhalt wird man gerecht, indem man der Reihe nach neue Doppeldifferenzen \tilde{F}_{rb}^{sa} aus den n Mehrdeutigkeitsdifferenzen berechnet und überprüft, ob diese neuen Werte im Vertrauensbereich Δ_B liegen.

$$\tilde{F}_{rb}^{sa} = I_{1_{rb}^{sa}}^i - \alpha I_{2_{rb}^{sa}}^i \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \quad (2.111)$$

Sollten die Berechnungen ergeben, dass keine Werte für \tilde{F}_{rb}^{sa} die vorgegebenen Bedingungen erfüllen, können die Mehrdeutigkeiten nicht festgesetzt werden. Liegen mehrere Werte \tilde{F}_{rb}^{sa} im Intervall Δ_B , ist eine eindeutige Mehrdeutigkeitsbestimmung zunächst nicht möglich.

2.6. Qualitätskriterien für die Mehrdeutigkeitsbestimmung

Das hier vorgestellte Verfahren zur Berechnung von Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten ist so konzipiert, dass eine Auflösung aller Mehrdeutigkeiten möglich ist. Dennoch kann es dazu kommen, dass für einige Doppeldifferenzen keine oder mehrere ganze Zahlen in den berechneten Konfidenzintervallen liegen. Generell stellt sich dann die Frage, ob es Möglichkeiten gibt, die Qualität der gefundenen ganzen Zahlen zu überprüfen, falsche Werte zu identifizieren und aus mehreren die richtige Mehrdeutigkeit herauszufinden.

2.6.1. Lagrangsche Multiplikatorenregel

Bei der Bestimmung von Extremwerten einer Funktion mit mehreren Parametern sind die Veränderlichen durch Nebenbedingungen miteinander verknüpft. Eine mögliche Lösung ist die Reduzierung der Zahl der Veränderlichen durch Elimination auf Grund der Nebenbedingungen. Daraus resultiert aber eine nicht gerechtfertigte Bevorzugung einer Veränderlichen gegenüber den anderen. Die Multiplikatorenmethode von Lagrange bietet eine gleichberechtigte Behandlung aller Parameter. Sie soll am Beispiel einer Raumfunktion $z = f(x, y)$ veranschaulicht werden.

Zwei Veränderliche x und y beschreiben durch die Funktion $z = f(x, y)$ eine Fläche im Raum (Abbildung 2.7) und sind durch eine Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ miteinander verknüpft. Die Gleichung der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ stellt eine Kurve K' in der xy -Ebene dar. Für die Extremwertberechnung sind nur die Werte x, y der Funktion $z = f(x, y)$ gesucht, die der Nebenbedingung genügen. In diesem Beispiel müssen demnach nur die Extrempunkte der Raumkurve K , deren Projektion auf die xy -Ebene der Kurve K' entspricht, ermittelt werden. Eine Kurve L aus einer Schar von Kurven $c = f(x, y)$ mit $c = const$ schneidet die Kurve K in dem gesuchten Extrempunkt E . Die Projektion L' dieser einen Kurve auf die xy -Ebene berührt K' im Punkt E' . Die Funktionen $g(x, y) = 0$ und $f(x, y) = c$ müssen deshalb in E' den gleichen Differentialquotienten haben. Es muss also gelten:

$$f_x : f_y = g_x : g_y \quad (2.112)$$

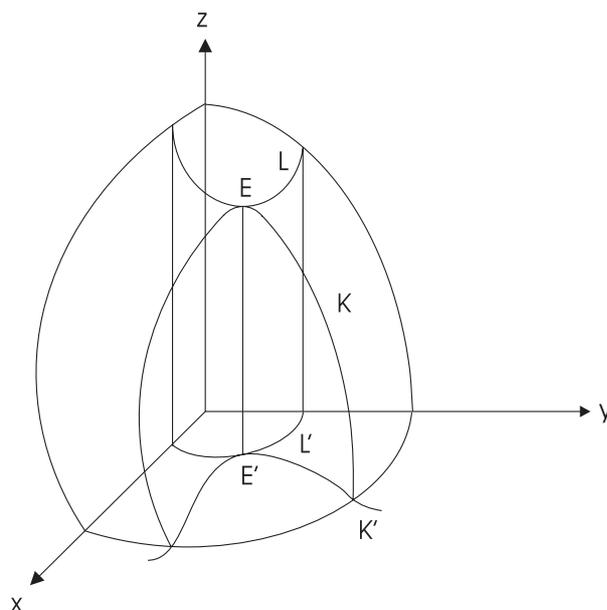


Abb. 2.7: Extremwert E mit Nebenbedingung

Einerseits sind f_x und g_x und andererseits f_y und g_y einander proportional. Führt man einen Proportionalitätsfaktor $-\lambda$, den Lagrangschen Multiplikator, ein, erhält man

$$f_x = -\lambda g_x \quad \text{oder} \quad f_x + \lambda g_x = 0 \quad (2.113)$$

$$f_y = -\lambda g_y \quad \text{oder} \quad f_y + \lambda g_y = 0 \quad (2.114)$$

Die Gleichungen (2.113) und (2.114) stellen die partiellen Ableitungen der Funktion

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (2.115)$$

dar. Basierend auf diesen Erkenntnissen kann die Lagrangsche Multiplikatorenregel formuliert werden:

”Zur Bestimmung der Extremwerte einer Funktion $z = f(x, y)$ mit der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ bildet man mit dem unbestimmten Multiplikator λ eine Hilfsfunktion $F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ und die ersten partiellen Ableitungen dieser Hilfsfunktion. Aus dem Gleichungssystem $F_x = f_x + \lambda g_x = 0$, $F_y = f_y + \lambda g_y = 0$, $g(x, y) = 0$ werden die Koordinaten des möglichen Extremwertes und der Multiplikator λ berechnet.”⁴

2.6.2. Vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen

Es müssen u unbekannte Parameter x_j mit $j = 1, 2, \dots, u$, die als Funktionen $f_i(x_j)$ mit $i = 1, 2, \dots, n$ von n unabhängigen Messwerten L_i mit den Gewichten P_i darstellbar sind, bestimmt werden. Die Beobachtungen werden dabei um die Werte v_i verbessert. Existieren außerdem r Bedingungsgleichungen $g_k(x_j)$ mit $k = 1, 2, \dots, r$ und gilt $n - (u - r) > 0$, spricht man von einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten und geht von folgendem Ansatz aus [Reissmann, 1980]:

$$v_i = f_i(x_j) - L_i \quad (2.116)$$

$$g_k(x_j) = 0 \quad (2.117)$$

Linearisiert man die Gleichungen (2.116) und (2.117) und arbeitet mit Näherungswerten x_{j_0} für die Unbekannten, gewinnt man die Funktionen:

$$x_j = x_{j_0} + \Delta x_j \quad (2.118)$$

$$l_i = L_i - f_i(x_{j_0}) \quad (2.119)$$

$$w_k = g_k(x_{j_0}) \quad (2.120)$$

⁴Kleine Enzyklopädie Mathematik, Gellert, W., H. Küstner, M. Hellwich und H. Kästner, Hrsg., (1965), Seite 439

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (2.121)$$

$$B_{kj} = \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \quad (2.122)$$

In Matrixschreibweise lauten die Gleichungen:

$$v = A\Delta x - l \quad (2.123)$$

$$B^T \Delta x + w = 0 \quad (2.124)$$

Gemäß dem Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate ist Δx so zu bestimmen, dass die gewichtete Summe der Verbesserungsquadrate minimal wird.

$$v^T P v = \text{Min.} \quad (2.125)$$

Das Problem wird lösbar, wenn man (2.125) als Hauptbedingung und die Bedingungsgleichungen als Nebenbedingungen zu einer Gesamtfunktion Ω additiv zusammenfasst. Den Nebenbedingungen werden die Lagrangschen Faktoren λ zugeordnet, die in diesem Zusammenhang auch als Korrelaten bezeichnet werden.

$$\Omega = v^T P v + 2\lambda^T (B^T \Delta x + w) \quad (2.126)$$

Verwendet man für die Verbesserungen den Ausdruck (2.123) und setzt diesen in die Gleichung (2.126) ein, ergibt sich:

$$\Omega = (A\Delta x - l)^T P (A\Delta x - l) + 2\lambda^T (B^T \Delta x + w) \quad (2.127)$$

Um das Minimum von Ω zu suchen, muss die partielle Ableitung $\partial\Omega/\partial x$ entsprechend der Extremwertforderung zu Null gesetzt werden.

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0 = 2A^T P A \Delta x - 2A^T P l + 2\lambda^T B \quad (2.128)$$

Multipliziert man (2.128) mit 0.5 und fügt die Gleichung (2.124) hinzu, erhält man das zu lösende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} A^T P A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T P l \\ -w \end{pmatrix} \quad (2.129)$$

Aus 2.123 und 2.129 geht die Rechenprobe hervor, die, wenn sie nicht den Genauigkeitsvorgaben entsprechend erfüllt wird, eine weitere Iteration erfordert.

$$A^T P v = -B\lambda \quad (2.130)$$

Bei den Korrelaten λ handelt es sich um Proportionalitätsfaktoren zwischen den Funktionen $v^T P v_{x_j}$ und g_{x_j} . Sie geben damit an, in welchem Verhältnis die partiellen Ableitungen der Haupt- und Nebenbedingungen bezogen auf die Berechnung der Extremwerte stehen.

$$-\lambda = \frac{v^T P v_{x_j}}{g_{x_j}} \quad (2.131)$$

Den Nebenbedingungen wird über die Größe der Korrelaten ein Gewicht zugeordnet, mit welchem diese im Vergleich zu den Hauptbedingungen an der Berechnung des Extremwertes beteiligt sind. Daraus lässt sich auch schlussfolgern, welchen Einfluss oder Zwang die Nebenbedingungen auf die Lösung der Extremwertaufgabe ausüben.

Neben der Interpretation der Werte für λ_k lassen sich auch Informationen über das Gleichungssystem aus den Gewichtskoeffizienten oder Kofaktoren gewinnen, die sich aus der Invertierung ergeben.

$$\begin{pmatrix} A^T P A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{x\lambda} \\ Q_{x\lambda} & Q_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

Die mittleren Fehler der Unbekannten x_j sowie der Korrelaten berechnen sich wie folgt.

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{v^T P v}{n - u + r}} \quad (2.133)$$

$$m_{x_j} = m_0 \sqrt{Q_{jj}} \quad (2.134)$$

$$m_{\lambda_k} = m_0 \sqrt{Q_{\lambda\lambda}} \quad (2.135)$$

Außerdem kann man den Korrelationskoeffizienten r_{ik} bilden, der den Grad der gegenseitigen Abhängigkeit zweier Größen wiedergibt.

$$r_{ik} = \frac{Q_{j\lambda}}{\sqrt{Q_{\lambda\lambda}Q_{jj}}} \quad (2.136)$$

Der Wert des Korrelationskoeffizienten liegt immer zwischen +1 und -1. Gilt $|r| = 0$, besteht keine Abhängigkeit zwischen den Werten. Je näher sein Betrag an 1 herankommt, desto größer ist der funktionale Zusammenhang der beiden Werte. Verwendet man die Korrelaten als Indikatoren für falsche Bedingungen, so geben die dazugehörigen Korrelationskoeffizienten an, welche der Unbekannten in welcher Größe von welcher Bedingungsgleichung beeinflusst werden.

2.6.3. Zwang der Nebenbedingungen: Simulationsbeispiel

An einem einfachen Beispiel soll verdeutlicht werden, welche Werte die Lagrangschen Multiplikatoren unter bestimmten Bedingungen annehmen und inwieweit daraus Schlussfolgerungen für die Berechnung der Unbekannten zu ziehen sind. Abbildung 2.8 zeigt eine Punktconfiguration, die gleiche Schnittbedingungen bezüglich der Koordinatenberechnung der Punkte A, B, C und D aufweist. Aus den Sollkoordinaten der Punkte A, B, C und D und den Koordinaten der Festpunkte 1, 2 ... 9 wurden mit zufälligen Fehlern behaftete Strecken berechnet, die in diesem Beispiel als Beobachtungen behandelt werden. Die Nebenbedingungen resultieren aus der Tatsache, dass die vier Neupunkte gleichzeitig Eckpunkte eines Quadrates mit einer Seitenlänge von 4 Längeneinheiten sind.

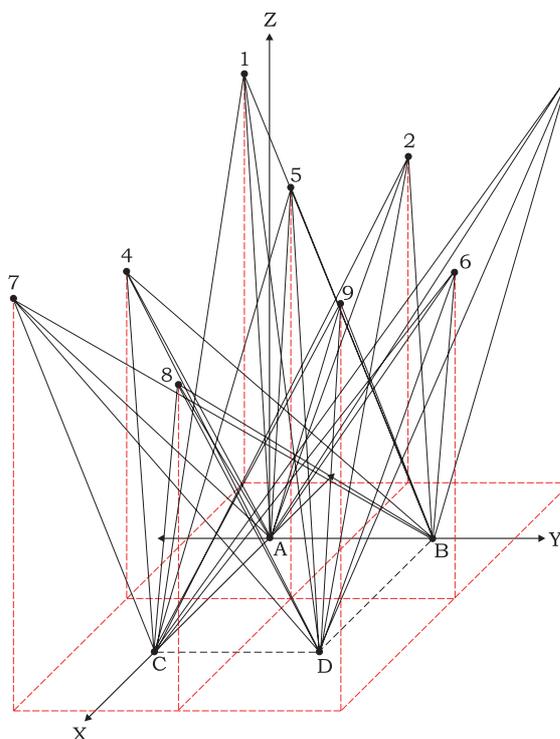


Abb. 2.8: Koordinatenbestimmung von A, B, C und D

Die Beobachtungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} L_{Ai} + v_i &= \sqrt{\Delta x_{Ai}^2 + \Delta y_{Ai}^2 + \Delta z_{Ai}^2} \\ L_{Bi} + v_i &= \sqrt{\Delta x_{Bi}^2 + \Delta y_{Bi}^2 + \Delta z_{Bi}^2} \\ L_{Ci} + v_i &= \sqrt{\Delta x_{Ci}^2 + \Delta y_{Ci}^2 + \Delta z_{Ci}^2} \\ L_{Di} + v_i &= \sqrt{\Delta x_{Di}^2 + \Delta y_{Di}^2 + \Delta z_{Di}^2} \quad i = 1, 2 \dots 9 \end{aligned} \quad (2.137)$$

Folgende Bedingungsgleichungen können aufgestellt werden.

$$g_1 = \sqrt{\Delta x_{BA}^2 + \Delta y_{BA}^2 + \Delta z_{BA}^2} - 4 = 0 \quad / \cdot 2\lambda_1 \quad (2.138)$$

$$g_2 = \sqrt{\Delta x_{CA}^2 + \Delta y_{CA}^2 + \Delta z_{CA}^2} - 4 = 0 \quad / \cdot 2\lambda_2 \quad (2.139)$$

$$g_3 = \sqrt{\Delta x_{DB}^2 + \Delta y_{DB}^2 + \Delta z_{DB}^2} - 4 = 0 \quad / \cdot 2\lambda_3 \quad (2.140)$$

$$g_4 = \sqrt{\Delta x_{DC}^2 + \Delta y_{DC}^2 + \Delta z_{DC}^2} - 4 = 0 \quad / \cdot 2\lambda_4 \quad (2.141)$$

$$g_5 = \sqrt{\Delta x_{CB}^2 + \Delta y_{CB}^2 + \Delta z_{CB}^2} - \sqrt{32} = 0 \quad / \cdot 2\lambda_5 \quad (2.142)$$

$$g_6 = \sqrt{\Delta x_{DA}^2 + \Delta y_{DA}^2 + \Delta z_{DA}^2} - \sqrt{32} = 0 \quad / \cdot 2\lambda_6 \quad (2.143)$$

Die Werte für die Beobachtungen, die Koordinaten der Festpunkte und die ausgeglichenen Koordinaten der Punkte A, B, C und D sind dem Anhang D zu entnehmen. In den folgenden Tabellen und Grafiken sind die unter verschiedenen Voraussetzungen berechneten Multiplikatoren dargestellt. Zunächst werden sechs Ausgleichungen durchgeführt, die sich in der Anzahl der Bedingungsgleichungen unterscheiden. Der erste Ausgleich findet mit einer Bedingungsgleichung statt. In den Ausgleichungen 2-6 wird jeweils eine weitere Bedingung dem Gleichungssystem zugefügt. In den Tabellen 2.4, 2.5, 2.6 und 2.7 sind die berechneten Multiplikatoren für die jeweiligen Iterationsschritte aufgelistet.

Iteration	Ausgleich 1		Ausgleich 2		Ausgleich 3		
	λ_1	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_3	
1	-0.0146	-0.0150	-0.0053	-0.0137	-0.0053	-0.0187	
2	-0.0109	-0.0109	0.0005	-0.0109	0.0004	-0.0098	
3	-0.0109	-0.0109	0.0004	-0.0109	0.0044	-0.0098	

Tabelle 2.4: Ausgleichung 1,2 und 3 mit Bedingungsgleichungen (2.138) bis (2.140)

Iteration	Ausgleich 4			
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	-0.0137	-0.0055	-0.0183	0.0088
2	-0.0109	0.0004	-0.0097	0.0163
3	-0.0109	0.0004	-0.0097	0.0163

Tabelle 2.5: Ausgleichung 4 mit Bedingungsgleichungen (2.138) bis (2.141)

Iteration	Ausgleich 5				
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1	-0.0261	-0.0185	-0.0306	-0.0030	0.0337
2	-0.0138	-0.0024	-0.0127	0.0134	0.0081
3	-0.0138	-0.0024	-0.0126	0.0134	0.0081
4	-0.0138	-0.0024	-0.0126	0.0134	0.0081

Tabelle 2.6: Ausgleichung 5 mit Bedingungsgleichungen (2.138) bis (2.142)

Auf Grund der zufälligen Fehler der Beobachtungen und der gewählten Näherungskordinaten unterscheiden sich die Lagrangschen Faktoren voneinander. Die Werte für λ_i mit $i = 1, 2 \dots 4$ bleiben in den Ausgleichungen 1-4 fast unverändert. Erst wenn auch die Bedingung für die Diagonale dazukommt (Tabelle 2.6) steigen die Beträge insgesamt etwas an, wobei das Verhältnis untereinander erhalten bleibt. Weitere Iterationsschritte führen nicht mehr zu Wertveränderungen. Fügt man noch die letzte Bedingungsgleichung (2.143) hinzu und übt damit maximalen Zwang aus, vergrößern sich die Beträge aller Proportionalitätsfaktoren im Vergleich zu den vorherigen Ausgleichungen erheblich und nehmen mit jeder Iteration zu. Ein großer Zwang spiegelt sich demnach im Ansteigen der Korrelaten wieder. Der Anteil der Nebenbedingungen bei der Lösung der Extremwertaufgabe wächst um ein Vielfaches im Gegensatz zur Hauptbedingung.

Iteration	Ausgleich 6					
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
1	-4.1887	-4.5803	-4.2907	-4.2326	6.4897	5.7078
2	-3.4888	-3.4819	-3.4868	-3.4598	4.9983	4.8307
3	-3.5282	-3.5168	-3.5269	-3.5009	5.0190	4.9269
4	-3.6104	-3.5990	-3.6091	-3.5831	5.1156	5.0645
5	-3.7753	-3.7640	-3.7741	-3.7481	5.3389	5.3083
6	-4.1054	-4.0940	-4.1042	-4.0781	5.8006	5.7802

Tabelle 2.7: Ausgleichung 6 mit Bedingungsgleichungen (2.138) bis (2.143)

Um zu untersuchen, wie sich eine falsche Bedingung auf die Größe der Korrelaten auswirkt, wird eine neue Ausgleichung mit den Bedingungsgleichungen (2.138)-(2.141) gerechnet. Allerdings ändert sich hier der Wert der Gleichung g_1 , wodurch eine falsche Seitenlänge vorgegeben wird.

$$g_1 = \sqrt{\Delta x_{BA}^2 + \Delta y_{BA}^2 + \Delta z_{BA}^2} - \beta \quad \text{mit } 0 < \beta < 8 \quad (2.144)$$

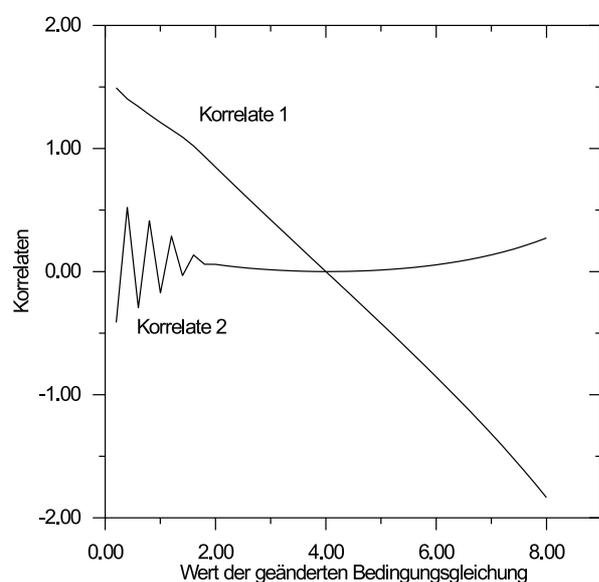


Abb. 2.9: Korrelaten λ_1 und λ_2

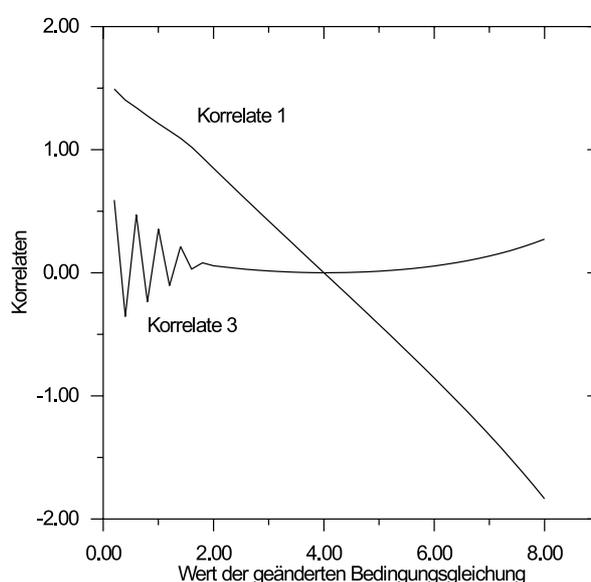


Abb. 2.10: Korrelaten λ_1 und λ_3

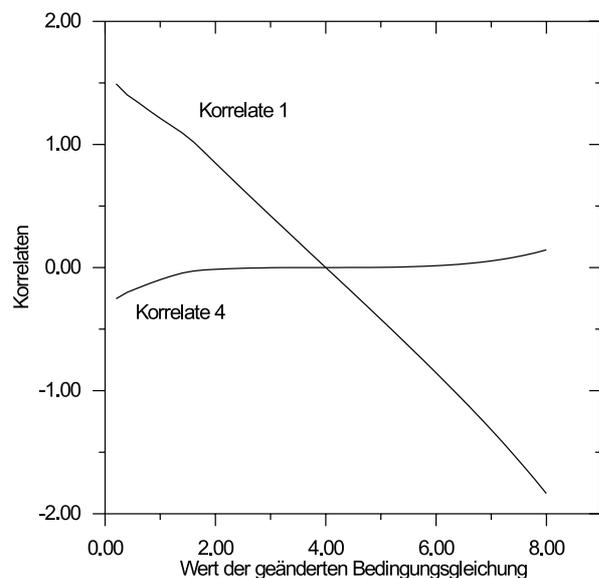


Abb. 2.11: Korrelaten λ_1 und λ_4

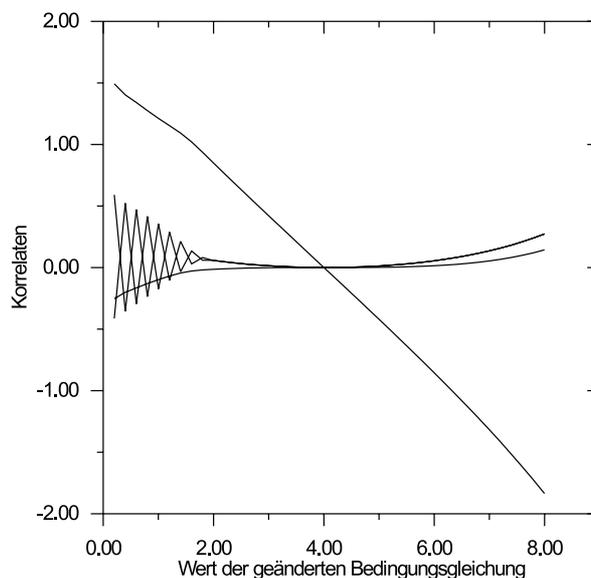


Abb. 2.12: Kurvenverlauf aller Korrelaten

Die Abbildungen 2.9 bis 2.12 zeigen den Verlauf der Multiplikatoren λ_i mit $i = 1, 2 \dots 4$ in Abhängigkeit von der geänderten Bedingungsgleichung. Der Betrag des Lagrangschen Faktors λ_1 wächst proportional zum zunehmenden Fehler der Bedingungsgleichung (2.138). Die Faktoren der anderen Bedingungsgleichungen schwanken in einem wesentlich geringeren Maße. Nimmt die Gleichung g_1 für $\beta = 4$ den Wert 0 an, treffen alle Kurven in einem kleinen Gebiet zusammen. Dort entsprechen die Korrelaten den Werten aus der Tabelle 2.5. Die fehlerbehaftete Bedingungsgleichung kann in diesem Beispiel auf Grund ihrer Korrelate identifiziert werden. Durch Variation des Wertes für g_1 kann sogar die Größe des Fehlers festgestellt werden.

Bleibt man bei der Ausgleichung mit den vier Bedingungsgleichungen (2.138) bis (2.141) und ändert mehrere Nebenbedingungen gleichzeitig, macht sich dies ebenfalls in den Multiplikatoren deutlich bemerkbar. In der Tabelle 2.8 stehen die Korrelaten, die sich aus einer Ausgleichung mit folgenden Vorgaben für die Gleichungen g_1 und g_2 ergeben.

$$g_1 = \sqrt{\Delta x_{BA}^2 + \Delta y_{BA}^2 + \Delta z_{BA}^2} - 5.5 \quad (2.145)$$

$$g_2 = \sqrt{\Delta x_{CA}^2 + \Delta y_{CA}^2 + \Delta z_{CA}^2} - 6.0 \quad (2.146)$$

Iteration	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	-0.7006	-0.8953	0.0292	0.0345
2	-0.5522	-0.7691	-0.0418	0.0042
3	-0.5437	-0.7635	-0.0500	-0.0059

Tabelle 2.8: Änderung der Gleichungen (2.138) und (2.139)

Tabelle 2.9 spiegelt die Ergebnisse der Ausgleichung mit der zusätzlich zu g_1 und g_2 verfälschten Gleichung g_3 wieder.

$$g_1 = \sqrt{\Delta x_{BA}^2 + \Delta y_{BA}^2 + \Delta z_{BA}^2} - 5.5 \quad (2.147)$$

$$g_2 = \sqrt{\Delta x_{CA}^2 + \Delta y_{CA}^2 + \Delta z_{CA}^2} - 6.0 \quad (2.148)$$

$$g_3 = \sqrt{\Delta x_{DB}^2 + \Delta y_{DB}^2 + \Delta z_{DB}^2} - 6.0 \quad (2.149)$$

Iteration	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	-0.6432	-0.8908	-0.8069	0.0007
2	-0.5391	-0.8263	-0.8375	-0.0955
3	-0.5394	-0.8304	-0.8395	-0.0982

Tabelle 2.9: Änderung der Gleichungen (2.138) bis (2.140)

Werden die Nebenbedingungen mit den Vorgaben

$$g_1 = \sqrt{\Delta x_{BA}^2 + \Delta y_{BA}^2 + \Delta z_{BA}^2} - 5.5 \quad (2.150)$$

$$g_2 = \sqrt{\Delta x_{CA}^2 + \Delta y_{CA}^2 + \Delta z_{CA}^2} - 6.0 \quad (2.151)$$

$$g_3 = \sqrt{\Delta x_{DB}^2 + \Delta y_{DB}^2 + \Delta z_{DB}^2} - 6.0 \quad (2.152)$$

$$g_4 = \sqrt{\Delta x_{DC}^2 + \Delta y_{DC}^2 + \Delta z_{DC}^2} - 1.0 \quad (2.153)$$

ins Gleichungssystem eingeführt, erhält man die Multiplikatoren, die in Tabelle 2.10 aufgelistet sind.

Aus allen Rechnungen lassen sich Rückschlüsse aus den Korrelaten über die verwendeten Nebenbedingungen ziehen. Werden zwei oder drei Nebenbedingungen verfälscht, nehmen die Beträge der Proportionalitätsfaktoren der nicht geänderten Gleichungen sehr kleine Werte an. Die anderen Korrelaten fallen betragsmäßig höher aus. Werden alle Bedingungen geändert, so nehmen auch alle dazugehörigen Korrelaten höhere Werte an. Die Untersuchung der Korrelaten ist demzufolge bei der Fehlersuche sehr hilfreich. Nebenbedingungen, die falsche Werte enthalten, können über die Größe der Korrelaten identifiziert und in günstigen Fällen auch verbessert werden.

Iteration	λ_1	λ_2	λ_1	λ_1
1	-0.6488	-0.9251	-0.7562	1.2641
2	-0.3861	-0.7959	-0.6186	0.9937
3	-0.3815	-0.5916	-0.8412	0.9773

Tabelle 2.10: Änderung der Gleichungen (2.138) bis (2.141)

2.6.4. Korrelaten bei der Mehrdeutigkeitsbestimmung

Die Bedingungsgleichungen, die zusätzlich zu den Beobachtungsgleichungen der Phasendifferenzen (Gleichungen (2.82) und (2.83)) in die Ausgleichung eingeführt werden können, ergeben sich aus den Doppeldifferenzen der F_r^s -Werte und den L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paaren $I_{1rb}^{sa} - \alpha I_{2rb}^{sa}$.

$$g(x) = c \quad (2.154)$$

$$(F_r^s - F_b^s) - (F_r^a - F_b^a) = I_{1rb}^{sa} - \alpha I_{2rb}^{sa} \quad (2.155)$$

Berechnet man die Korrelaten im Rahmen der GPS-Phasenauswertung auf die Weise, wie im Kapitel 2.6.2 geschildert, treten Speicher- und /oder Rechenzeitprobleme auf. Sofern man die gesamte Normalgleichungsmatrix verwendet, müssen je nach Beobachtungsdauer mehrere Gigabyte an Speicherplatz zur Verfügung gestellt werden. Andererseits handelt es sich bei dieser Matrix um eine Sparse-Matrix⁵, die speichersparend verarbeitet werden kann. Allerdings wird in diesem Fall ein großer Teil der Rechenzeit für die Verwaltung der Nichtnullmatrixelemente verwendet.

Die Software TUBGPS wurde so programmiert, dass mittels der Givenstransformation⁶ nur ein Teil der Normalgleichungsmatrix aufgebaut wird, wodurch Zeit und Speicherplatz eingespart werden kann (Anhang B.4). Kommen die Bedingungsgleichungen dazu, verändert sich das Gleichungssystem derart, dass eine QR-Zerlegung⁷ nicht mehr durchgeführt werden kann. Führt man jedoch die Bedingungsgleichungen als zusätzliche Beobachtungen ins System ein, kann nach wie vor mit dem gleichen Algorithmus gearbeitet werden. Die Korrelaten ergeben sich dann aus dem Gleichungssystem:

$$B\lambda = A^T P l - A^T P A \Delta x = b \quad (2.156)$$

Die Elemente der Spaltenmatrix Δx werden im Rahmen einer vermittelnden Ausgleichung mit den zusätzlichen Beobachtungsgleichungen, die aus den Bedingungsgleichungen resultieren, berechnet. B wird so aufgestellt, als ob Bedingungsgleichungen vorliegen würden. Zur Berechnung der Spaltenmatrix b werden nur Teile der Matrix $A^T P A$ benötigt, so dass es hier nicht zu Speicherplatzproblemen kommen kann. Das Gleichungssystem (2.156) wird nach dem Eliminationsverfahren von Gauss zerlegt und gelöst. Der Korrelationskoeffizient kann in diesem Verfahren nicht berechnet werden, da die Gewichtskoeffizienten $Q_{j\lambda}$ und $Q_{\lambda\lambda}$ nicht aus der Ausgleichung hervorgehen. Zur Einschätzung der Qualität des Mehrdeutigkeits-Paares können aber die Werte aller Korrelaten miteinander verglichen werden.

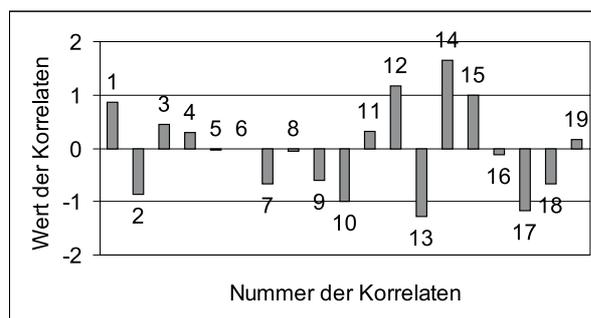


Abb. 2.13: Korrelaten bei fehlerfreien Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten

Anhand eines Datensatzes vom 14.2.2001 wird verdeutlicht, wie sich die Lagrangschen Faktoren verhalten, sobald die Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten fehlerhaft sind. Der Datensatz besteht aus GPS-Messungen der drei

⁵Matrix, die zum überwiegenden Teil mit Nullelementen besetzt ist

⁶Spezielles Verfahren für die QR-Zerlegung einer Matrix [Montenbruck, 200]

⁷Zerlegung einer positiv definiten Matrix in eine orthonormale Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R

Berliner SAPOS-Referenzstationen (Kapitel 3.2, Abbildung 3.20) mit Basislinienlängen von ca. 10 - 27 km. Zur Berechnung der Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten wird die Station 8001 als Basisstation und der Satellit mit der PRN-Nummer 19 als Basissatellit ausgewählt. Die Koordinaten der SAPOS-Referenzstationen, die sich aus den jeweiligen Testrechnungen ergeben, werden im Anhang E aufgeführt. Zunächst werden die fehlerfreien Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten ermittelt und alle daraus resultierenden Mehrdeutigkeits-Paare als Bedingungsgleichungen dem Gleichungssystem zugefügt. Dies führt zu den in der Tabelle 2.11 und der Abbildung 2.13 aufgelisteten Korrelaten.

Nr.	Satellit s	Station r	Mehrdeutigkeits-Paar cycle	I_{1rb}^{sa} cycle	I_{2rb}^{sa} cycle	Korrelate λ_i
1	1	8002	18389.58	46814	36478	0.867
2	13	8002	12084.30	30763	23971	-0.870
3	4	8002	13627.88	34691	27031	0.441
4	24	8002	26950.86	68608	53460	0.299
5	22	8002	22812.04	58071	45249	-0.027
6	27	8002	-5787.99	-14735	-11482	-0.021
7	20	8002	9690.38	24667	19220	-0.670
8	8	8002	16582.87	42213	32892	-0.060
9	10	8002	1742968.62	4437112	3457484	-0.595
10	1	8003	-10541.94	-26837	-20912	-1.000
11	13	8003	-26369.74	-67130	-52309	0.311
12	4	8003	-43574.94	-110930	-86439	1.171
13	24	8003	-58337.45	-148512	-115724	-1.279
14	22	8003	11803.10	30047	23413	1.646
15	27	8003	-6248.12	-15905	-12393	0.987
16	20	8003	13440.31	34212	26657	-0.120
17	28	8003	-249978.64	-636395	-495901	-1.177
18	8	8003	-14193.70	-36135	-28158	-0.657
19	10	8003	17610.27	44823	34923	0.154

Tabelle 2.11: Korrelaten bei fehlerfreien Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten

Die Multiplikatoren aus der Tabelle 2.12 sind Ergebnisse einer Ausgleichung, in der eine der Bedingungsgleichungen fehlerhaft ist. I_{1rb}^{sa} mit $s = 1$ und $r = 8002$ wurde um einen Zyklus verfälscht. Dies schlägt sich in einer starken Änderung der Lagrangschen Faktoren insbesondere von λ_1 nieder, was auch deutlich aus Abbildung 2.14 hervorgeht. Ändert man die Doppeldifferenzmehrdeutigkeit I_{2rb}^{sa} mit $s = 1$ und $r = 8002$ um einen Zyklus, ergeben sich ebenfalls neue Proportionalitätsfaktoren, die in Tabelle 2.14 vertafelt und in Abbildung 2.15 grafisch dargestellt sind. Auch hier hebt sich λ_1 von den anderen Faktoren deutlich ab.

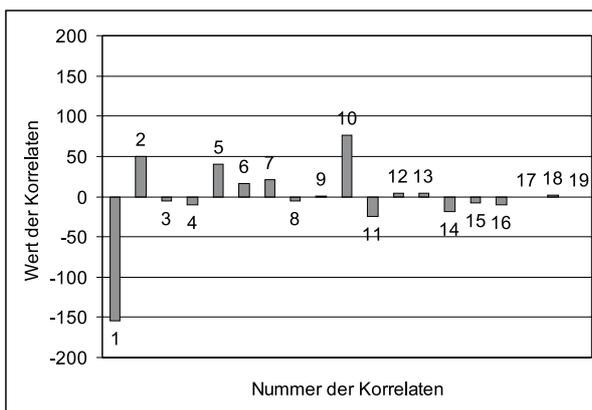


Abb. 2.14: Korrelaten bei Fehler von 1 cycle in I_{1rb}^{sa} mit $s = 1$ und $r = 8002$

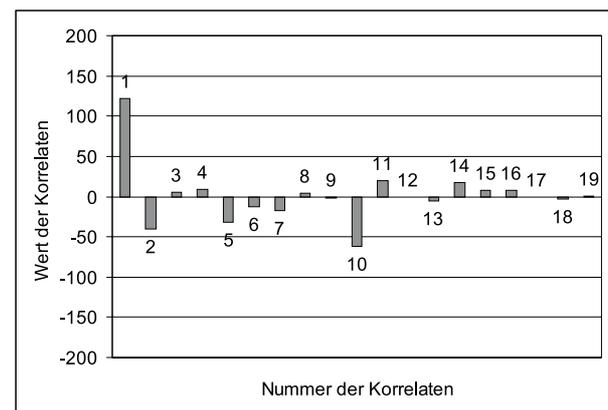


Abb. 2.15: Korrelaten bei Fehler von 1 cycle in I_{2rb}^{sa} mit $s = 1$ und $r = 8002$

Sind mehrere Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten fehlerhaft, bietet es sich an, die Bedingungsgleichungen nacheinander ins Gleichungssystem einzufügen und die Veränderung der Korrelaten zu beobachten. In der Tabelle 2.13 sind die Ergebnisse für die Korrelaten aus drei Ausgleichungen zusammengefasst, in denen jeweils nur mit einer Bedingungsgleichung gearbeitet wird. Die erste Ausgleichung findet mit der fehlerfreien Bedingung statt. Die Korrelaten der zweiten und dritten Ausgleichung ergeben sich aus den fehlerhaften Bedingungen, die entweder einen Fehler von 1 cycle in I_{1rb}^{sa} oder in I_{2rb}^{sa} enthalten.

Nr.	Satellit s	Station r	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]	$I_{1_{rb}}^{sa}$ [cycle]	$I_{2_{rb}}^{sa}$ [cycle]	Korrelate λ_i
1	1	8002	18390.58	46815	36478	-154.420
2	13	8002	12084.30	30763	23971	50.047
3	4	8002	13627.88	34691	27031	-5.328
4	24	8002	26950.86	68608	53460	-10.426
5	22	8002	22812.04	58071	45249	40.493
6	27	8002	-5787.99	-14735	-11482	16.528
7	20	8002	9690.38	24667	19220	20.737
8	8	8002	16582.87	42213	32892	-5.747
9	10	8002	1742968.62	4437112	3457484	0.508
10	1	8003	-10541.94	-26837	-20912	76.357
11	13	8003	-26369.74	-67130	-52309	-24.991
12	4	8003	-43574.94	-110930	-86439	4.047
13	24	8003	-58337.45	-148512	-115724	4.052
14	22	8003	11803.10	30047	23413	-18.551
15	27	8003	-6248.12	-15905	-12393	-7.239
16	20	8003	13440.31	34212	26657	-10.796
17	28	8003	-249978.64	-636395	-495901	-1.149
18	8	8003	-14193.70	-36135	-28158	2.169
19	10	8003	17610.27	44823	34923	-0.395

Tabelle 2.12: Korrelaten bei Fehler von 1 cycle in $I_{1_{rb}}^{sa}$ mit $s = 1$ und $r = 8002$

Nr. d. Ausgleichung	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]	$I_{1_{rb}}^{sa}$ [cycle]	$I_{2_{rb}}^{sa}$ [cycle]	Korrelate
1	18389.58	46814	36478	0.022
2	18390.58	46815	36478	-61.279
3	18388.80	46814	36479	47.829

Tabelle 2.13: Korrelaten aus drei Ausgleichungen mit $s = 1$ und $r = 8002$

Nr.	Satellit s	Station r	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]	$I_{1_{rb}}^{sa}$ [cycle]	$I_{2_{rb}}^{sa}$ [cycle]	Korrelate λ_i
1	1	8002	18388.80	46814	36479	121.991
2	13	8002	12084.30	30763	23971	-40.585
3	4	8002	13627.88	34691	27031	4.941
4	24	8002	26950.86	68608	53460	8.664
5	22	8002	22812.04	58071	45249	-31.632
6	27	8002	-5787.99	-14735	-11482	-12.929
7	20	8002	9690.38	24667	19220	-17.368
8	8	8002	16582.87	42213	32892	4.375
9	10	8002	1742968.62	4437112	3457484	-1.456
10	1	8003	-10541.94	-26837	-20912	-61.338
11	13	8003	-26369.74	-67130	-52309	20.046
12	4	8003	-43574.94	-110930	-86439	-1.072
13	24	8003	-58337.45	-148512	-115724	-5.436
14	22	8003	11803.10	30047	23413	17.400
15	27	8003	-6248.12	-15905	-12393	7.403
16	20	8003	13440.31	34212	26657	8.207
17	28	8003	-249978.64	-636395	-495901	-1.200
18	8	8003	-14193.70	-36135	-28158	-2.862
19	10	8003	17610.27	44823	34923	0.582

Tabelle 2.14: Korrelaten bei Fehler von 1 cycle in $I_{2_{rb}}^{sa}$ mit $s = 1$ und $r = 8002$

Aus den theoretischen Überlegungen und Testbeispielen geht hervor, dass eine Überprüfung der Doppeldifferenzmehrdetigkeiten durch die Untersuchung der Korrelaten möglich wird. Für diese Analysen muss vorausgesetzt werden, dass die GPS-Phasendifferenzen von allen Phasensprüngen befreit sind. Andernfalls kommt es zu einer systematischen Verfälschung, wodurch aus den Beträgen der Korrelaten keine geeigneten Rückschlüsse zu ziehen sind.

3. Ergebnisse

Die folgenden Kapitel präsentieren die Ergebnisse der Software TUBGPS, die auf den bisher beschriebenen Algorithmen basiert. Getestet werden Datensätze verschiedener Basislinienlängen. Auch der Einfluss verschieden genauer Bahndaten auf die Ergebnisse wird näher untersucht. Der Schwerpunkt liegt an dieser Stelle bei großräumigen Netzen. Zunächst werden Daten mit Basislinien zwischen 13 und 48 km ausgewertet, wobei zur Berechnung der Satellitenkoordinaten broadcast-Bahnen verwendet werden. Der zweite Datensatz besteht aus einem Netz mit Basislinien im Bereich von 11 - 27.3 km und dient zum Vergleich der Einflüsse von broadcast- und präzise Bahndaten. Berechnungen von Daten mit Punktabständen bis zu 100 km werden während des dritten Tests unter Zuhilfenahme präziser Bahnen durchgeführt. Den Abschluss bilden Auswertungen von IGS-Stationsdaten mit Entfernungen bis zu 1000 km.

Die Berechnung der Mehrdeutigkeiten baut darauf auf, dass während der Vorverarbeitung alle Phasensprünge identifiziert und eliminiert werden. Wird ein Phasensprung auf L_1 auf einer der Stationen in der Größe von 1 cycle nicht beseitigt, ändern sich Koordinaten dieser Station im Vergleich zur sauberen Lösung im Bereich von 1 bis 5 Zentimeter. Auch ein großer Teil der anderen Parameter wird um 0.01 bis 0.07 cycle verfälscht. Der mittlere Fehler a posteriori steigt um das Dreieinhalbfache an, so dass sich auch die Fehler der F_r^s - und $H_r^s(t)$ -Werte um diesen Betrag erhöhen. Für die betroffene Station ergeben sich verfälschte Mehrdeutigkeits-Paare und damit falsche Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten. Für einen großen Teil der Mehrdeutigkeiten auf L_1 und L_2 liegen jeweils zwei ganze Zahlen im Vertrauensintervall, was teilweise auch für die phasensprungfreien Stationen gilt.

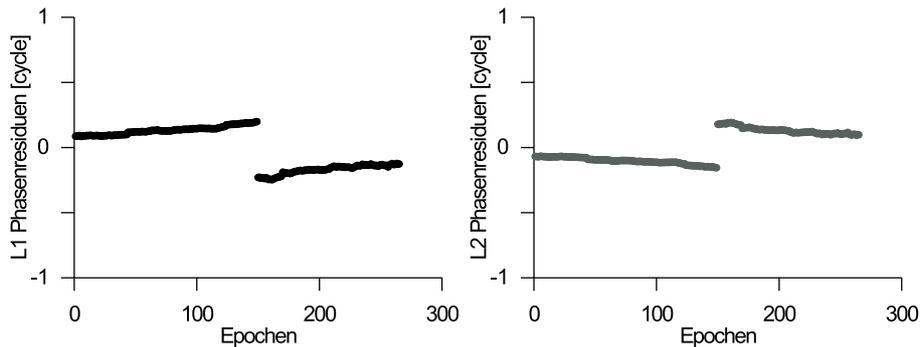


Abb. 3.1: Phasensprung von 1 cycle in L_1

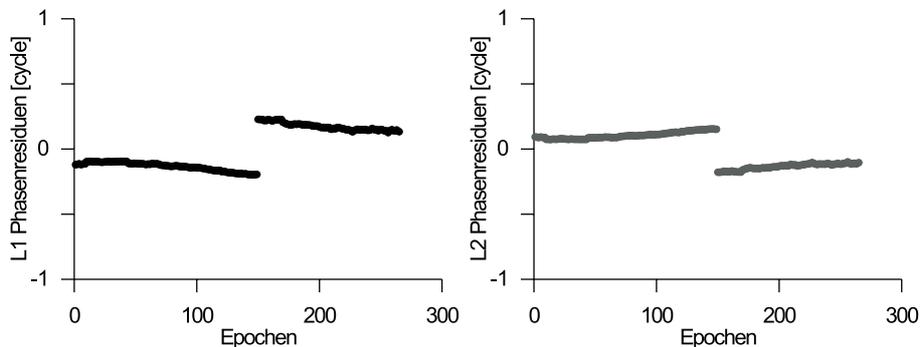


Abb. 3.2: Phasensprung von -1 cycle in L_1

Durch die Erzeugung der Residuen, Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Phasen φ_r^s , bietet sich eine abschließende Kontrollmöglichkeit der Daten in Bezug auf noch unentdeckte Phasensprünge. Die Abbildungen 3.1 und 3.2 demonstrieren den Verlauf der Residuenkurven im Fall von nicht identifizierten Signalunterbrechungen. Zur Epoche 150 wurde erst ein Phasensprung von +1 cycle und danach von -1 cycle auf L_1 angebracht.

Wie man erkennen kann, machen sich diese simulierten Fehler als Sprünge in den Residuen bemerkbar und erleichtern somit eine abschließende Analyse des Datenmaterials. Informationen über die Qualität der Daten lassen sich nicht nur aus den Residuen ableiten. Die gewonnenen Erfahrungen zeigen, dass eine abschließende Beurteilung der Auswertung erst möglich wird, wenn die entsprechende Software neben den Ergebniskoordinaten folgende Werte zur Verfügung stellt:

- Liste aller Phasensprünge
- Liste eliminiertes Beobachtungen
- Residuen und Residuenplots
- Plots der ionosphärischen Refraktion
- Zeitreihen der Unbekannten $R_r(t)$, $S^s(t)$ und $H_r^s(t)$
- Liste aller Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten bzw. aller L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paare und den dazugehörigen Korrelaten

Für die nachfolgend beschriebenen Auswertungen werden deshalb die Phasensprünge der einzelnen Testdatensätze im Anhang F aufgelistet. Die ermittelten Mehrdeutigkeiten sowie die Korrelaten jedes Datensatzes, sind den Tabellen des Anhangs G zu entnehmen.

3.1. Berliner Messkampagne 1996

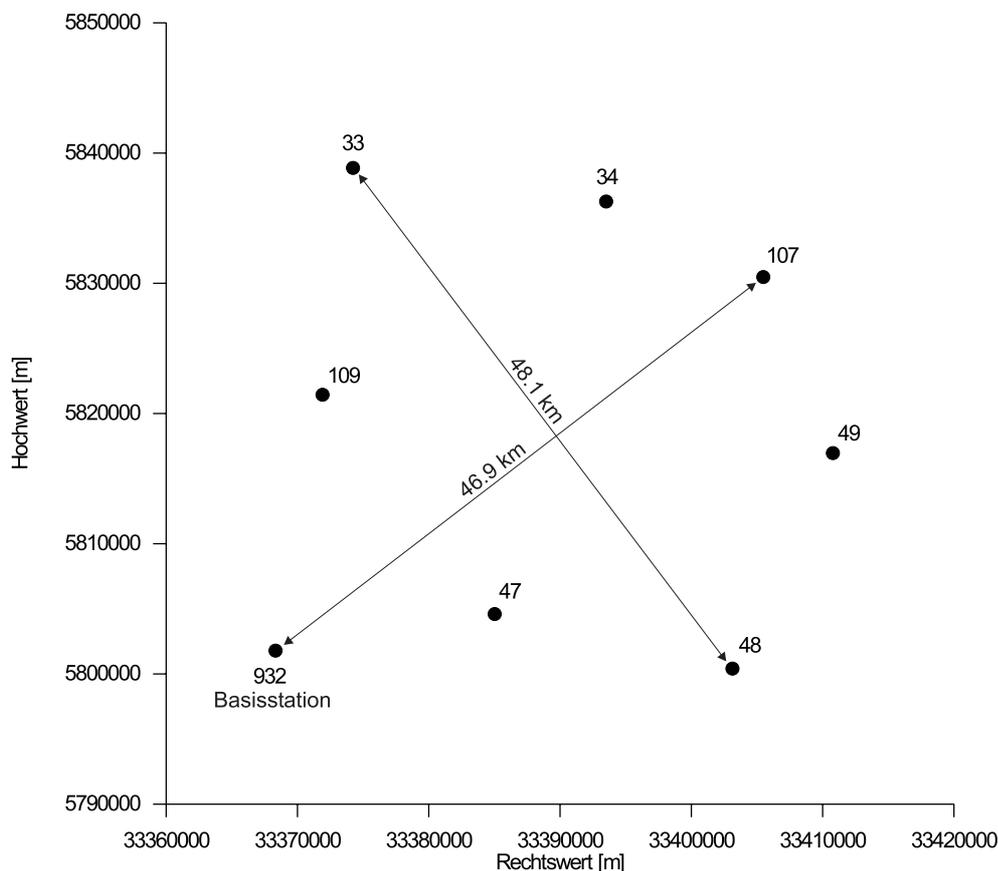


Abb. 3.3: GPS Punkte der Messkampagne 1996 (UTM Koordinaten)

1996 führten die Berliner Senatsverwaltung für Stadtentwicklung und die Technische Universität Berlin eine GPS-Messkampagne zur Bestimmung von Geoidundulationen im Raum Berlin durch. Verwendet wurden Punkte der BRAREF/BREF-GPS-Kampagne 1994, die mit Zweifrequenzempfängern des Typs Trimble 4000 SSE bzw. 4000 ST und geodätischen Trimble- L_1/L_2 -Antennen bestückt wurden. An jeweils zwei Tagen wurden insgesamt vier Messungen mit einer Beobachtungsdauer von ca. 5 Stunden durchgeführt. Die Auswertung einer dieser Messungen (Tabelle 3.1) wird im Folgenden näher erläutert.

Messung	Datum	Stationen	Messdauer [sec]	Messintervall [sec]
2481	04.09.1996	932,33,34,47,48,49,107,109	21660.0 - 39600.0	60

Tabelle 3.1: Messung 2481

Die Abstände der Punkte variieren zwischen 13 und 48 km (Abbildung 3.3), so dass die Methode für lange Basislinien zur Mehrdeutigkeitsberechnung eingesetzt wird. Generell dient Punkt 932 als Basisstation ($b=932$) und - zur Berechnung der Mehrdeutigkeiten - der Satellit mit der PRN-Nummer 21 als Referenzsatellit ($a=21$). Die Koordinaten der Satelliten werden aus den broadcast-Ephemeriden berechnet. Die Vorverarbeitung der Beobachtungen zeigt, dass die Messungen fast aller Stationen durch eine relativ hohe Anzahl großer Phasensprünge verfälscht ist (Tabellen F.1 - F.3 im Anhang F). Mit den gesäuberten Daten ergeben sich aus der float-Lösung für alle Stationen und alle Satelliten Residuenplots, aus denen zu entnehmen ist, dass weitere Signalunterbrechungen nicht mehr in den Daten enthalten sind. Da sich die Plots alle ähneln, werden hier nur die Abbildungen 3.4 und 3.5 präsentiert.

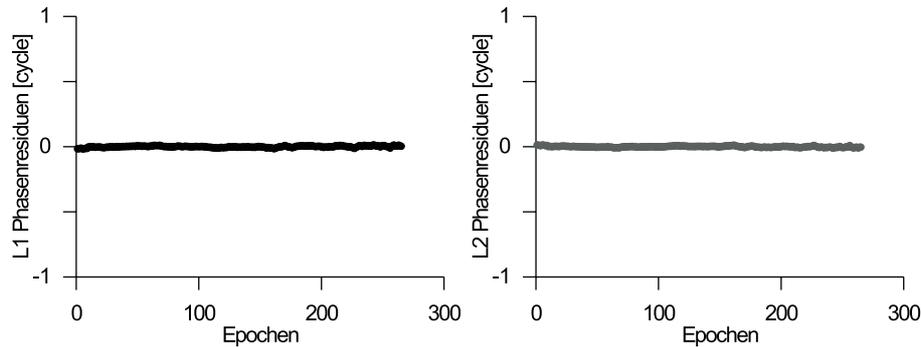


Abb. 3.4: Phasenresiduen auf der Station 33 zum Satelliten PRN-Nr. 3

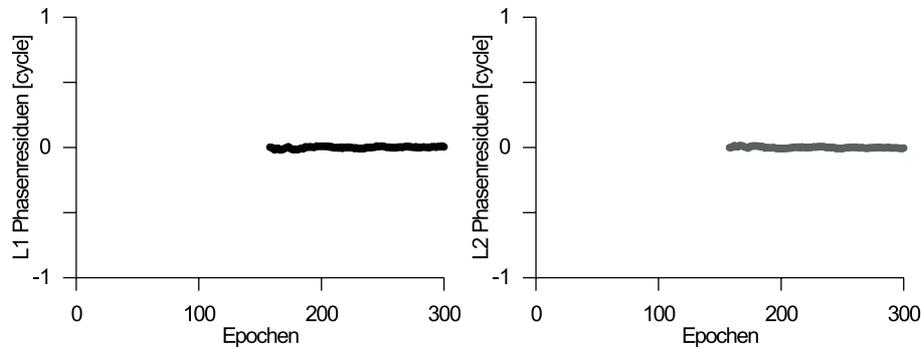


Abb. 3.5: Phasenresiduen auf der Station 48 zum Satelliten PRN-Nr. 1

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	$I_{1_{rb}}^{sa}$ [cycle]	$I_{2_{rb}}^{sa}$ [cycle]	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]
65	17	48	641992	698877	97412.52
66	17	48	641996	698882	97412.62
67	17	49	-1465226	-927276	-742673.27
68	17	49	-1465222	-927271	-742673.17

Tabelle 3.2: Ergebnisse für $I_{f_{48b}}^{17a}$ und $I_{f_{49b}}^{17a}$ ($f = 1, 2$)

Bei der Suche nach ganzen Zahlen für die Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten wird zunächst ein Vertrauensbereich ausgewählt, dessen Größe auf einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % basiert. In einem iterativen Prozess kommt man damit für 64 von insgesamt 66 L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paaren zu eindeutigen Ergebnissen. Sie sind in den Tabellen G.1 und G.2 im Anhang G aufgelistet, wobei jede Zeile der Tabellen einer später zu formenden Bedingungs-gleichung entspricht. Erst bei einer statistischen Sicherheit von 99.9 % können Werte für

die Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten $I_{f_{48b}}^{17a}$ und $I_{f_{49b}}^{17a}$ ($f = 1, 2$) fixiert werden. Allerdings erfüllen jeweils zwei Paare die geforderten Bedingungen. Diese mehrdeutigen Ergebnisse sind der Tabelle 3.2 zu entnehmen. Auch hier werden mit den laufenden Nummern die Bedingungsgleichungen gekennzeichnet.

Um herauszufinden, ob die Bedingungsgleichung 65 oder 66 bzw. 67 oder 68 den richtigen Wert für das entsprechende Mehrdeutigkeits-Paar enthält, werden in den Ausgleichungen 1 bis 4 zusätzlich zu den Bedingungsgleichungen 1 - 64 nacheinander die Gleichungen 65 - 68 eingeführt. In Ausgleichung 1 wird λ_{65} zusätzlich zu den Faktoren λ_1 - λ_{64} ermittelt, in Ausgleichung 2 λ_{66} u.s.w.

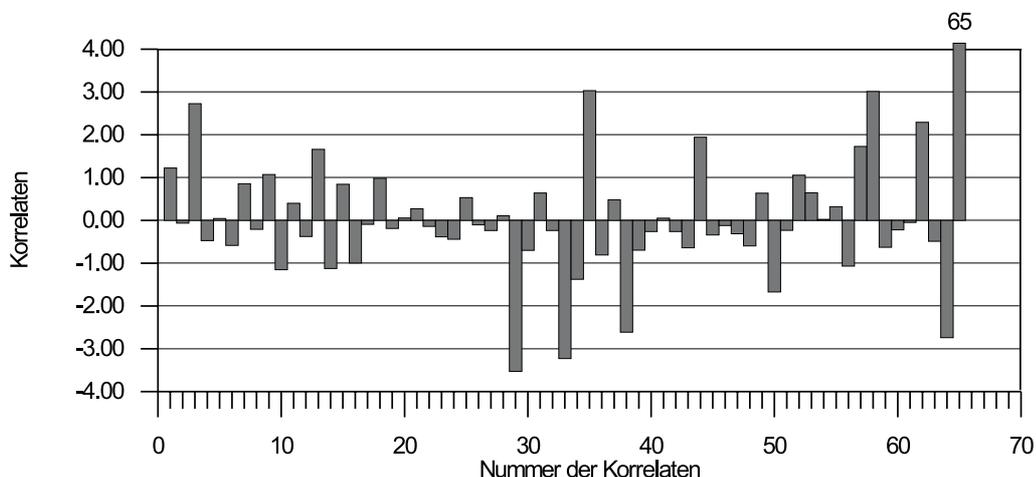


Abb. 3.6: Korrelaten der Ausgleichung 1

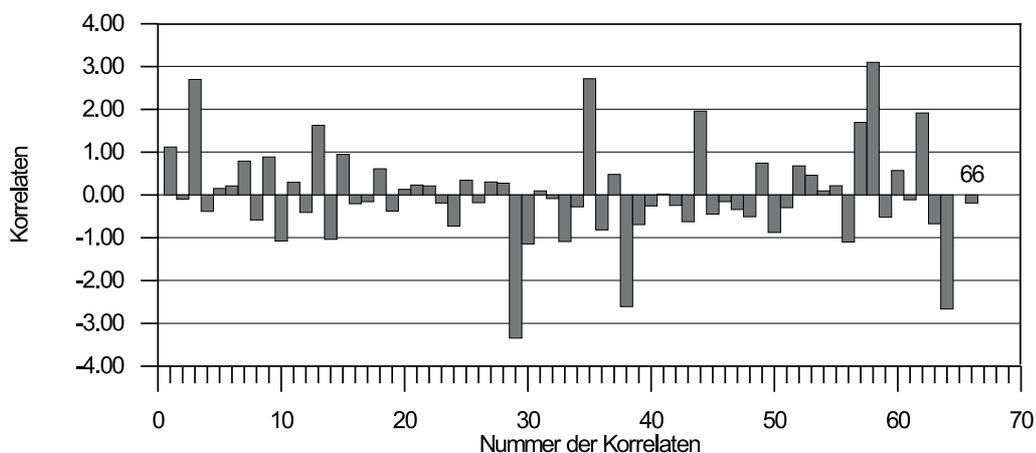


Abb. 3.7: Korrelaten der Ausgleichung 2

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	Korrelaten $\lambda_{65} - \lambda_{68}$
65	17	48	4.139
66	17	48	-0.188
67	17	49	3.568
68	17	49	-0.758

Tabelle 3.3: Korrelaten 65 - 68 der Ausgleichungen 1-4

Anhand der Tabelle 3.3 und den Abbildungen 3.6 - 3.9 ist deutlich zu erkennen, dass die Bedingungsgleichungen 66 und 68 gemessen an den Gleichungen 65 und 67 kleinere Proportionalitätsfaktoren erzeugen. Vergleicht man die Lagrangschen Faktoren der Tabellen G.3 und G.4 im Anhang G miteinander, fällt auf, dass die Beträge der Korrelaten aus den Ausgleichungen 2 und 4 zum überwiegenden Teil kleiner ausfallen als in den Ausgleichungen 1 und 3. Die falschen Bedingungen 65 und 67 üben also größeren Zwang aus, der sich in den anderen Bedingungsgleichungen besonders in denen, die mit dem Satelliten $s = 17$ verbunden sind ($\lambda_6, \lambda_{16}, \lambda_{22}, \lambda_{50}$ und λ_{60}),

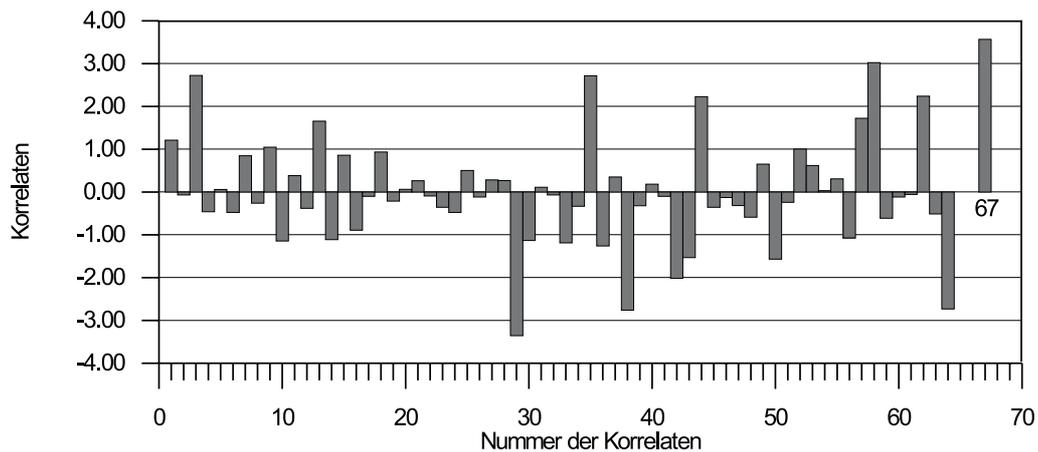


Abb. 3.8: Korrelaten der Ausgleichung 3

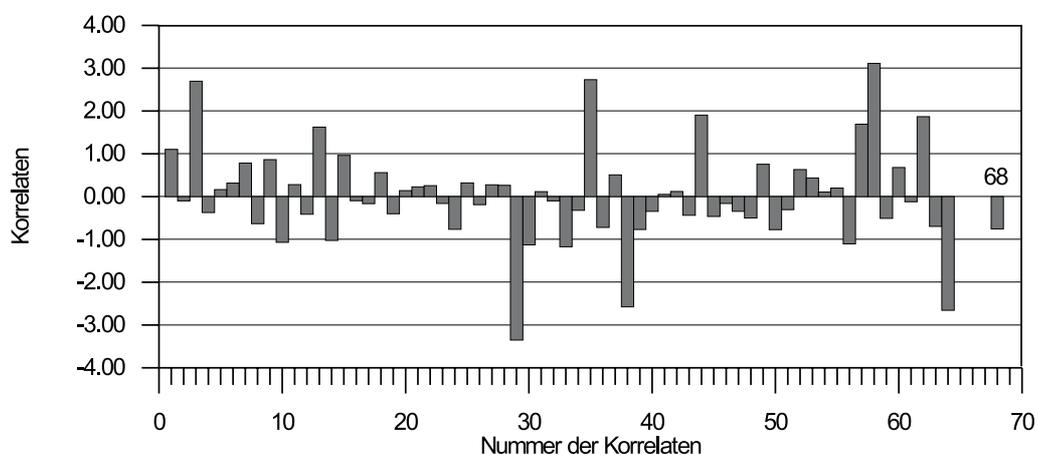


Abb. 3.9: Korrelaten der Ausgleichung 4

niederschlägt. In einem fünften Ausgleich werden deshalb die Mehrdeutigkeits-Paare 66 und 68 gemeinsam mit den 64 eindeutig bestimmten Werten als Bedingungen verwendet.

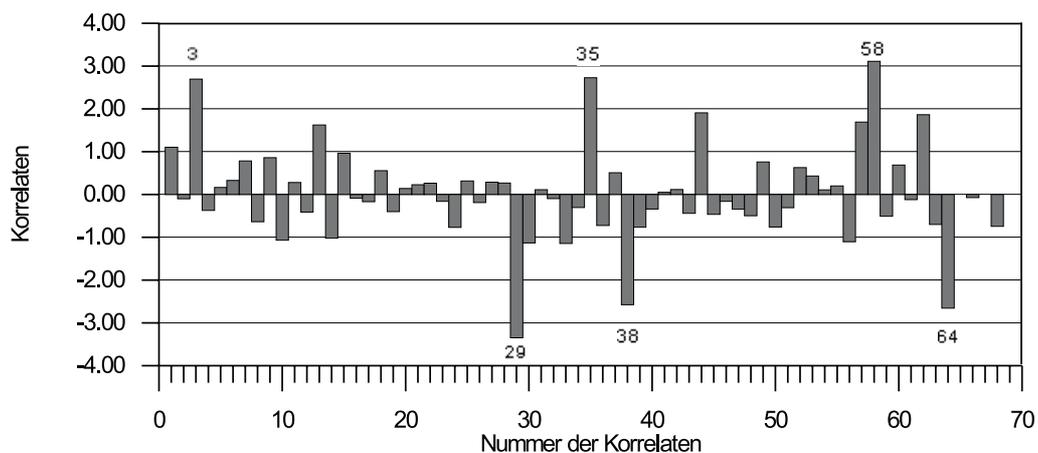


Abb. 3.10: Korrelaten der Ausgleichung 5

Die Abbildung 3.10 stellt die Lagrangschen Faktoren der nun akzeptierten Mehrdeutigkeits-Paare 1-64, 66 und 68 dar. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler a posteriori, der aus der Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den

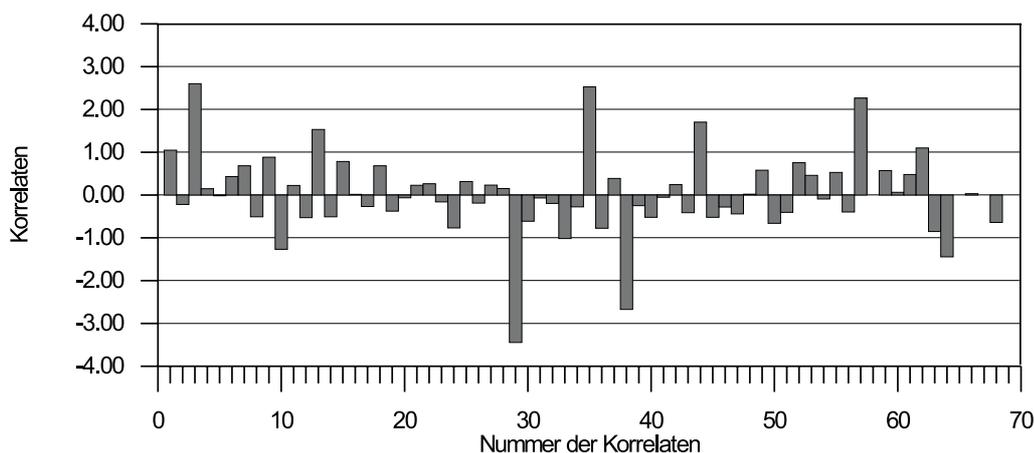


Abb. 3.11: Korrelaten der Ausgleichung 6

Unbekannten hervorgeht, beträgt 0.021 cycle. Die Faktoren $\lambda_3, \lambda_{29}, \lambda_{35}, \lambda_{38}, \lambda_{58}$ und λ_{64} heben sich durch ihre hohen Beträge von den anderen Korrelaten deutlich ab. Da dies ein Hinweis auf falsche Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten sein kann, werden die dazugehörigen Bedingungsgleichungen näher untersucht. Aus den Tabellen G.3 und G.4 ist ersichtlich, dass die Faktoren aus Bedingungsgleichungen mit Mehrdeutigkeits-Paaren resultieren, die sich auf die Satelliten $s = 3, 14$ und $s = 31$ beziehen. Um zu überprüfen, welche der Bedingungsgleichungen falsch ist, werden die Gleichungen der Reihe nach eliminiert. Die Ausgleichung 6 wird deshalb ohne die Bedingungsgleichung 58 ($s = 14$) durchgeführt, da diese die Korrelate mit dem größten Betrag erzeugt. Die Beträge aller Korrelaten, die sich auf den Satelliten $s = 14$ beziehen, verkleinern sich damit erheblich und σ_0 a posteriori geht auf 0.019 cycle zurück. Der Wert für $I_{1_{1096}}^{14a}$ und/oder $I_{2_{1096}}^{14a}$ ist demnach nicht korrekt. Bevor die Suche nach den richtigen Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten beginnt, werden aber noch die anderen kritischen Bedingungsgleichungen überprüft.

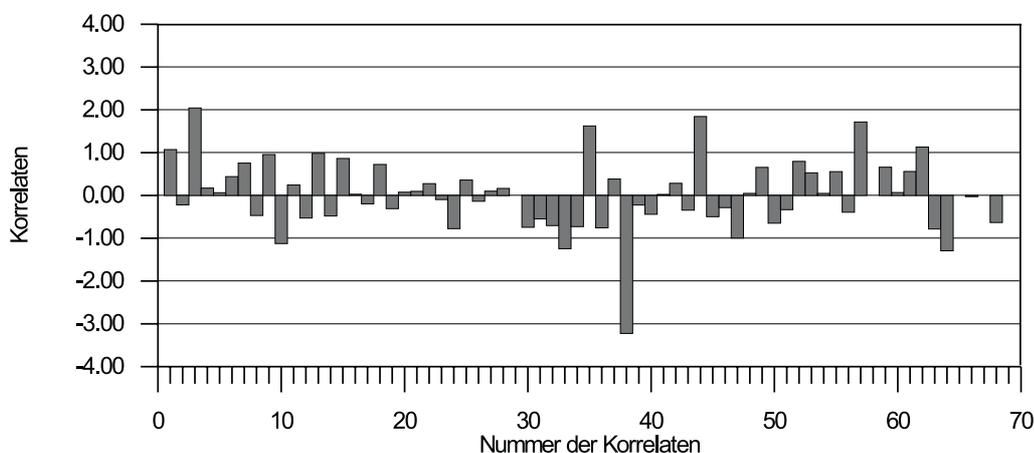


Abb. 3.12: Korrelaten der Ausgleichung 7

Die Ausgleichung 7 wird ohne die Bedingungsgleichungen 58 und 29 gerechnet. Unter diesen Voraussetzungen gehen die Beträge der Korrelaten noch weiter zurück. Auch die Faktoren, die sich auf den Satelliten $s = 31$ beziehen, nehmen Beträge an, die unter 2 liegen. σ_0 a posteriori von 0.019 cycle bleibt erhalten. Korrelate 38 hebt sich weiterhin mit einem Wert von -3.227 (Tabelle G.4 Anhang G) von den anderen ab, so dass sie in der Ausgleichung 8 zusätzlich zu den Gleichungen 29 und 58 eliminiert wird. Dadurch ergeben sich neue Korrelaten, die den Betrag 2 nicht überschreiten.

Zur Überprüfung, wie sich die Elimination der Bedingungsgleichungen 29, 38 und 58 in den Ausgleichungen 6-8 im Vergleich zur Ausgleichung 5 auf die Koordinaten der Stationen auswirkt, werden diese mittels einer Helmerttransformation auf die BRAREF/BREF-Koordinaten abgebildet. Die Restklaffungen der jeweiligen Transformationen sind in den Abbildungen 3.14 - 3.17 dargestellt. Die Elimination der Gleichungen 58 hat einen wesentlich größeren Einfluss auf die Koordinaten als die Elimination der Gleichung 29 und 38. Letzteres

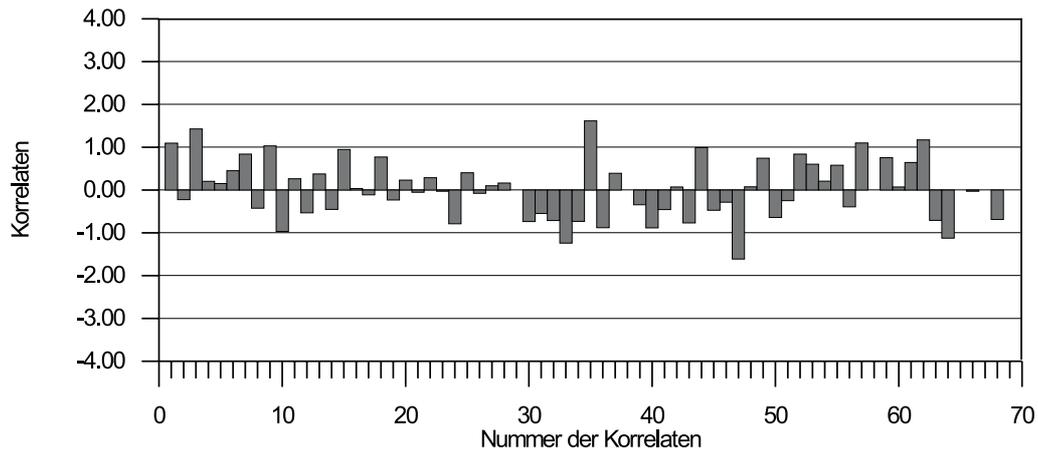


Abb. 3.13: Korrelaten der Ausgleichung 8

führt eher zu einer Verschlechterung, was sich aus dem Vergleich der Abbildungen 3.15 einerseits und den Abbildungen 3.16 und 3.17 zeigt. Berechnet man sich aus den neuen F_r^s -Werten der jeweiligen Ausgleichungen die Doppeldifferenzen, so erhält man folgende Werte:

lfd. Nr.	F_{rb}^{sa}	Ausgl. 6	Ausgl. 7	Ausgl. 8
29	F_{48b}^{3a}	17043.01	17042.98	17042.97
38	F_{49b}^{3a}	-836548.23	-836548.23	-836548.26
58	F_{109b}^{14a}	5875452.69	5875452.69	5875452.69

Tabelle 3.4: F_{rb}^{sa} -Doppeldifferenzen

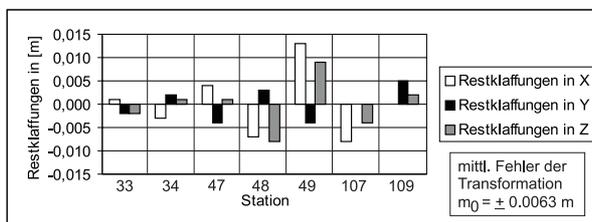


Abb. 3.14: Restklaffungen (Ausgl. 5)

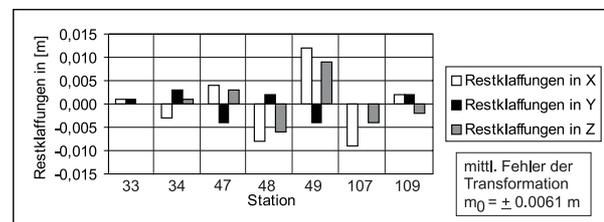


Abb. 3.15: Restklaffungen (Ausgl. 6)

Der Wert der Bedingungsgleichung 58 lautet im Gegensatz zur Doppeldifferenz in der Tabelle G.2 5875452.55 cycle. Die Gleichungen 29 und 38 weichen hingegen kaum von den Tabellenwerten ab. Nach einer Erhöhung der Sicherheitswahrscheinlichkeit auf 99.9% können aus den F_r^s - und H_r^s -Werten der jeweiligen Ausgleichungen nur für das Mehrdeutigkeits-Paar 58 neue Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten festgesetzt werden (Tabelle 3.5). Für die Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten der Paare 29 und 38 ergeben sich wieder exakt die gleichen Werte wie am Anfang. Nach einem Vergleich der drei möglichen Mehrdeutigkeits-Paare mit der berechneten Doppeldifferenz F_{109b}^{14a} , liegt die Vermutung nahe, dass es sich bei den Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten der Zeile b um die gesuchten ganzen Zahlen handelt. Für die Bedingungsgleichungen a und b werden zur Kontrolle in zwei Ausgleichungen neuen Korrelaten berechnet. Die Ergebnisse (Spalte 7 der Tabelle 3.5) bestätigen die Vermutung, da λ_b den kleinsten Betrag der ausgewiesenen Werte annimmt.

Die gesamte Überprüfung der Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten anhand der Korrelaten für die Messung 2481 führt zu folgendem Ergebnis: Die Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten der Gleichungen 1 - 57 und 59 - 64 können bestätigt werden. Berichtigt werden die Werte der Gleichung 58. Zusätzlich können die ganzen Zahlen der Gleichungen 66 und 68 fixiert werden. Die Abbildungen 3.18 und 3.19 zeigen die Korrelaten und Restklaffungen, die sich aus den Berechnungen mit diesen Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten ergeben (Ausgleichung 5b).

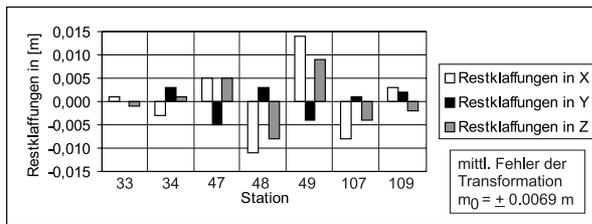


Abb. 3.16: Restklaffungen (Ausgl. 7)

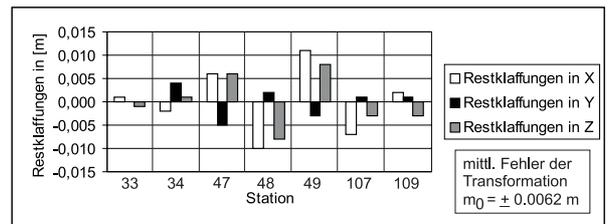


Abb. 3.17: Restklaffungen (Ausgl. 8)

	Satellit s	Station r	I_{1rb}^{sa} [cycle]	I_{2rb}^{sa} [cycle]	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]	Korrelate
a	14	109	15856634	12809183	5875452.44	5.615
b	14	109	15856635	12809184	5875452.66	0.608
c	14	109	15856638	12809188	5875452.55	3.111

Tabelle 3.5: Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten der Ausgleichungen 6-8 und resultierende Korrelaten

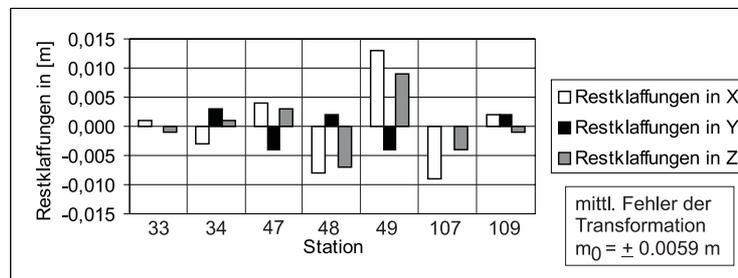


Abb. 3.18: Endgültige Restklaffungen

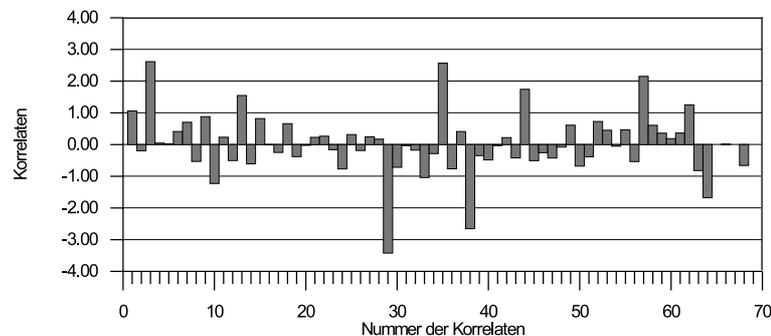


Abb. 3.19: Endgültige Korrelaten

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	I_{1rb}^{sa} [cycle]	I_{2rb}^{sa} [cycle]	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]
58	14	109	15856638	12809188	5875452.66

Tabelle 3.6: Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten für die Station 109 aus Sollkoordinaten

Zur Kontrolle dieses Ergebnisses wird eine float-Lösung für die Messung 2481 berechnet, wobei diesmal die Sollkoordinaten aller Stationen verwendet und festgehalten werden. Aus den daraus folgenden H_r^s - und F_r^s -Werten werden Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten berechnet, die zum Vergleich mit den bisherigen Werten dienen. Übereinstimmungen ergeben sich für die Werte der Gleichungen 1-57, 59-64, 66 und 68. Für das Mehrdeutigkeits-Paar 58 gelten die Werte aus der Tabelle 3.6, wodurch die Korrektur im Rahmen der Untersuchung der Korrelaten gerechtfertigt wird.

Die Ergebnisse für die Basislinien, die aus den endgültig festgesetzten ganzen Zahlen hervorgehen, sind der Tabelle 3.7 zu entnehmen.

Stationen	ΔX [m]	ΔY [m]	ΔZ [m]	Distanz [m]
932-33	29932.158	1908.598	-22615.895	37564.019
932-34	32734.888	-17311.279	-21331.222	42734.931
932-47	6315.612	-15590.130	-1920.916	16930.122
932-48	7628.109	-33995.146	399.600	34842.756
932-49	22214.290	-38007.058	-9796.407	45099.676
932-107	31240.031	-30097.127	-17971.302	46954.705
932-109	15983.275	580.382	-11985.400	19986.289
33-34	2802.731	-19219.878	1284.672	19465.595
33-47	-23616.545	-17498.728	20694.979	35947.585
33-48	-22304.049	-35903.744	23015.495	48127.564
33-49	-7717.868	-39915.657	12819.488	42628.212
33-107	1307.873	-32005.726	4644.593	32367.410
33-109	-13948.882	-1328.216	10630.495	17588.147
34-47	-26419.276	1721.149	19410.307	32828.349
34-48	-25106.780	-16683.866	21730.823	37160.872
34-49	-10520.599	-20695.779	11534.816	25923.932
34-107	-1494.858	-12785.848	3359.920	13304.194
34-109	-16751.613	17891.661	9345.823	26231.136
47-48	1312.496	-18405.016	2320.516	18597.098
47-49	15898.677	-22416.929	-7875.491	28588.634
47-107	24924.418	-14506.997	-16050.386	33004.462
47-109	9667.663	16170.512	-10064.484	21359.846
48-49	14586.181	-4011.913	-10196.007	18243.099
48-107	23611.922	3898.018	-18370.902	30169.645
48-109	8355.167	34575.528	-12385.000	37665.158
49-107	9025.741	7909.931	-8174.896	14521.017
49-109	-6231.014	38587.441	-2188.993	39148.535
107-109	-15256.755	30677.509	5985.902	34780.874

Tabelle 3.7: Ergebnisse für die Basislinien und Distanzen zwischen den Stationen

Ein Festsetzen der Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten ist für diesen Datensatz bei einer Beobachtungszeit von 4 h möglich. Für fast alle dieser Werte ergeben sich eindeutige ganze Zahlen. Jeweils zwei ganze Zahlen liegen für die Mehrdeutigkeiten zum Satelliten mit der PRN-Nummer 2 und die Stationen 34,48,49,107 und 109 im Vertrauensbereich, wobei durch die Berechnung der Korrelaten eine Auswahl der exakten Werte vorgenommen werden kann. Verwendet man kürzere Zeiträume, liegen für alle Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten mehrere ganze Zahlen in einem Konfidenzintervall. Die damit verbundenen L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paare unterscheiden sich teilweise nur um 0.01 cycle, wodurch auch die Beträge der Korrelaten keine signifikanten Unterschiede aufweisen. Ein Heraussuchen der richtigen ganzen Zahlen ist demnach nicht möglich.

Zusammenfassung

Die Separation der Ionosphäre nach der Methode der langen Basislinien kann in diesem Testdatensatz erfolgreich angewendet werden. 128 L_1 - und L_2 -Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten werden in einer iterativen Mehrdeutigkeitsbestimmung ermittelt. Zusätzlich dazu werden durch die Untersuchung der Korrelaten vier noch fehlende Mehrdeutigkeiten aus mehreren möglichen ganzen Zahlen ausgewählt und zwei falsche Mehrdeutigkeiten identifiziert. Für diese Berechnungen werden 300 Beobachtungsepochen bei einem Messintervall von 60 sec verwendet, wobei ein Festsetzen der Mehrdeutigkeiten auch bei 240 Epochen möglich ist.

3.2. SAPOS-Referenzstationen in Berlin

Die Referenzstationen des Satellitenpositionierungsdienstes (SAPOS) zeichnen permanent GPS-Beobachtungsdaten auf, die dann an den Nutzer zur weiteren Auswertung weitergegeben werden. Zum Testen des beschriebenen Auswerteverfahrens stellte der Satellitenpositionierungsdienst der deutschen Landesvermessung in Berlin die Daten der drei Berliner Referenzstationen verschiedener Tage zur Verfügung. Damit liegen Beobachtungen mit einer Basislinienlänge von maximal 27.3 km vor (Abbildung 3.20). Die Stationen waren zur Beobachtungszeit mit folgendem technischen Equipment ausgestattet:

- Station 1 : Zweifrequenzempfänger der Firma Ashtec, Chokering Antenne der Firma Ashtec
bzw. Chokering Antenne der Firma Topcon
- Station 2 : Zweifrequenzempfänger TRIMBLE SSI, Chokering Antenne der Firma TRIMBLE
- Station 3 : Zweifrequenzempfänger der Firma Ashtec, Geodätische Antenne von TRIMBLE

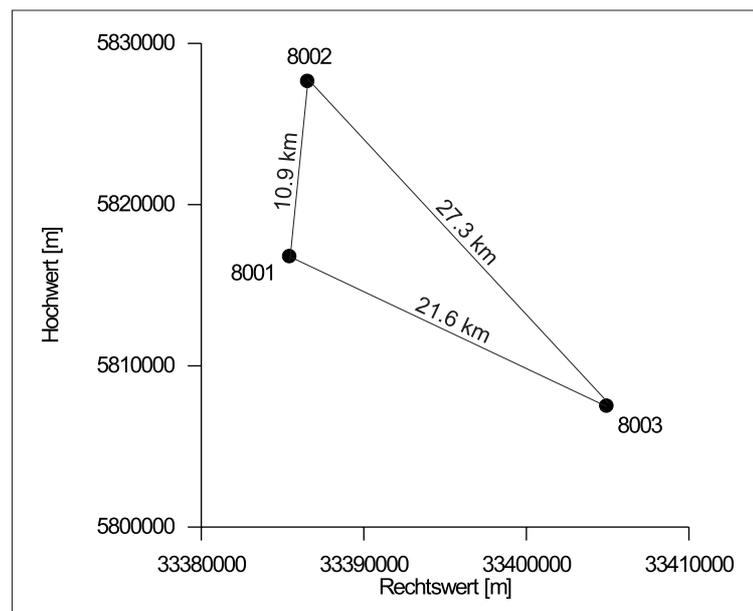


Abb. 3.20: SAPOS-Referenzstationen (UTM Koordinaten)

Um zu untersuchen, wie sich unterschiedlich genaue Bahndaten auf die Parameter der Beobachtungsgleichungen wie Oszillatordifferenzen, Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten, Koordinaten und Korrelaten auswirken, werden die Daten der Messung 2231 (Tabelle 3.8) erst mit broadcast-Ephemeriden und dann mit präzisen IGS-Bahnen ausgewertet. Station 8001 dient als Basisstation. Ihre Koordinaten werden in beiden Auswertungen festgehalten. Während der Vorverarbeitung wird auf der Station 8002 ein Phasensprung identifiziert (Tabelle F.5).

Messung	Datum	beteiligte Stationen	Messdauer [sec]	Messintervall [sec]
2231	10.08.2000	8001, 8002, 8003	23400.0 - 35985.0	15

Tabelle 3.8: Messung 2231

Die Abbildungen 3.21, 3.22, 3.23 und 3.24 geben die Kurvenverläufe von allen Empfängeruhrdifferenzen $R_r(t)$ und zwei ausgewählten Satellitenuhrdifferenzen $S^s(t)$ bezüglich der Basisstation 8001 wieder. Subtrahiert man die Uhrparameter, die mit präzisen IGS-Ephemeriden berechnet wurden, von den dazugehörigen Werten, die sich aus broadcast-Bahnen ergeben, werden die Unterschiede wesentlich deutlicher (Abbildungen 3.25 und 3.26). In den H_r^s -Werten (Abbildungen 3.27 - 3.30) macht sich die Verwendung der unterschiedlichen Bahnparameter durch ein konstantes Offset in $Q_{2,r}^s$ bemerkbar. Der gleiche Effekt lässt sich auch in den Differenzen zwischen den F_r^s -Werten der broadcast-Bahn-Lösung und den entsprechenden Größen der Lösung mit präzisen Ephemeriden (Abbildung 3.31) erkennen. In beiden Fällen kommt es auf Grund der verschiedenen Bahndaten zu Additionskonstanten in den Mehrdeutigkeiten.

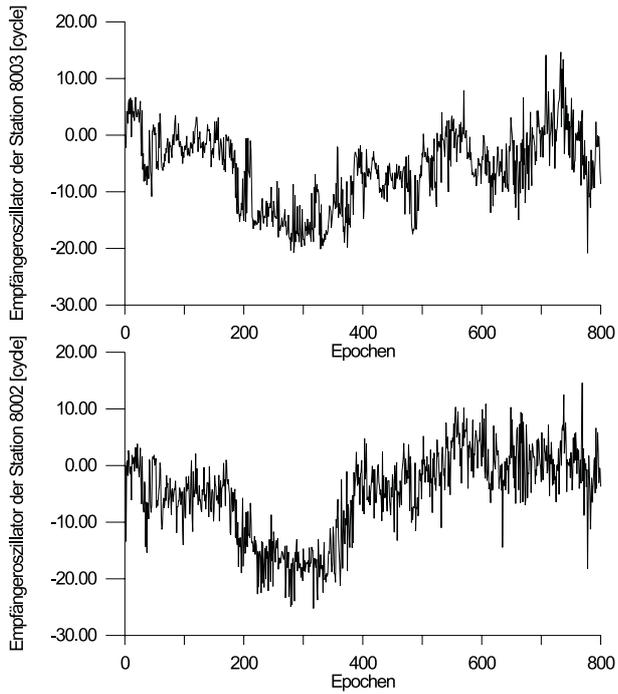


Abb. 3.21: $R_r(t)$ aus broadcast-Bahnen

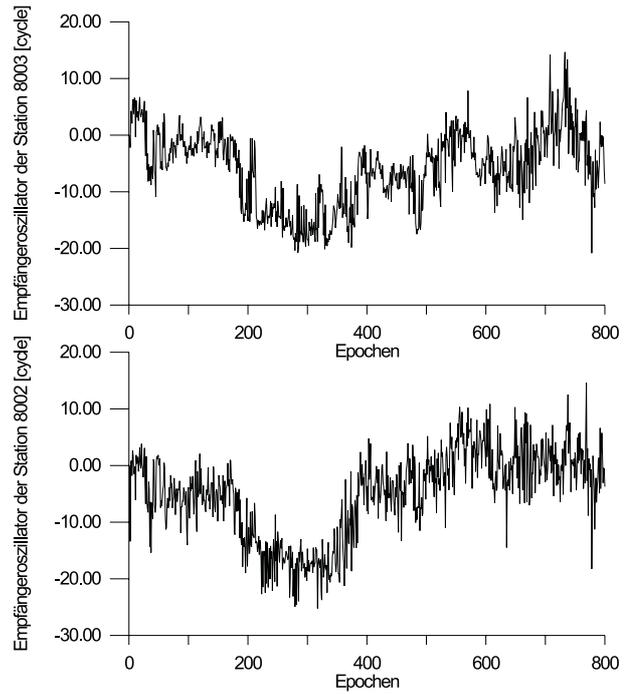


Abb. 3.22: $R_r(t)$ mit präzisen IGS Bahnen

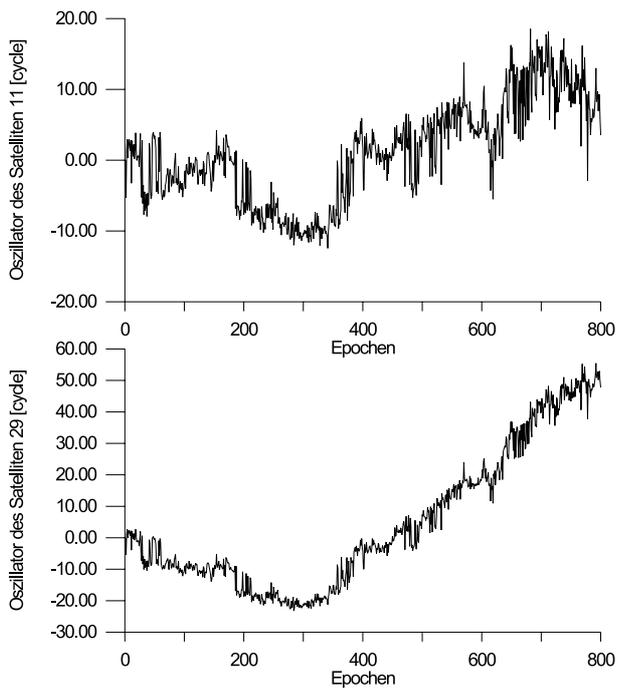


Abb. 3.23: $S^s(t)$ aus broadcast-Bahnen

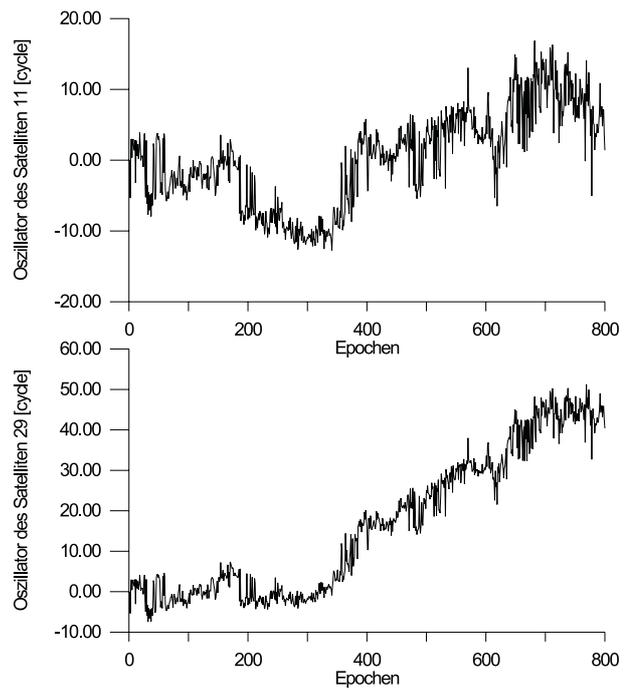


Abb. 3.24: $S^s(t)$ mit präzisen IGS Bahnen

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler σ_0 a posteriori der float-Lösung [cycle]			
ohne Bedingungen		mit Bedingungen	
broadcast-Bahnen	präzise IGS Bahnen	broadcast-Bahnen	präzise IGS Bahnen
0.020	0.019	0.022	0.021

Tabelle 3.9: Mittlerer Gewichtseinheitsfehler σ_0 a posteriori der float-Lösungen

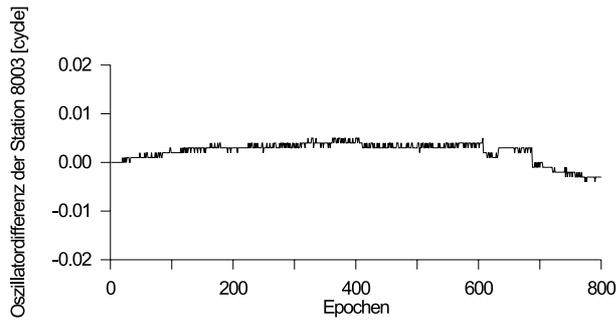


Abb. 3.25: $R_r(t)$ -Differenzen

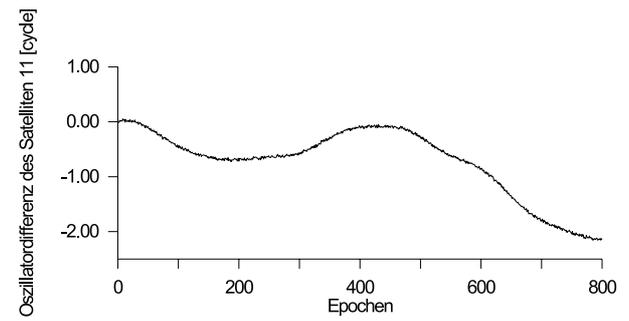


Abb. 3.26: $S^s(t)$ -Differenzen

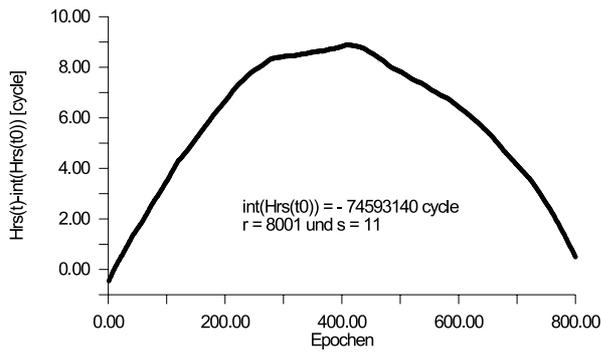
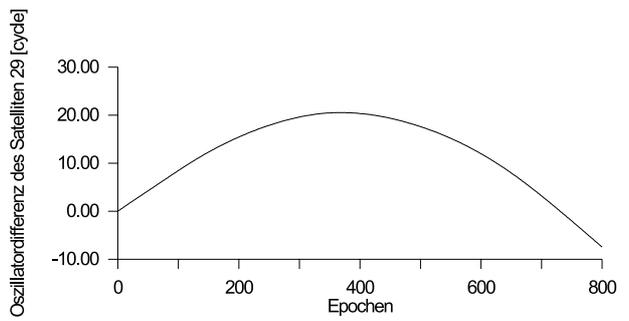
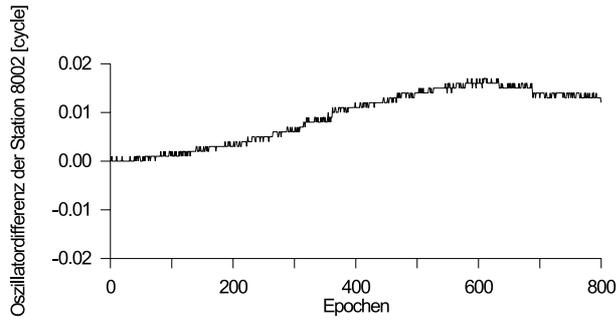


Abb. 3.27: $H_r^s(t)$ mit broadcast-Bahnen

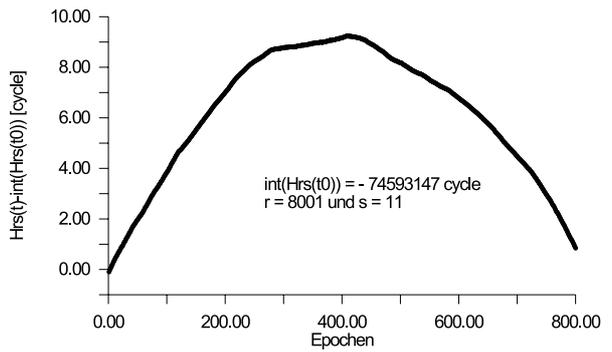


Abb. 3.28: $H_r^s(t)$ mit präzisen IGS Bahnen

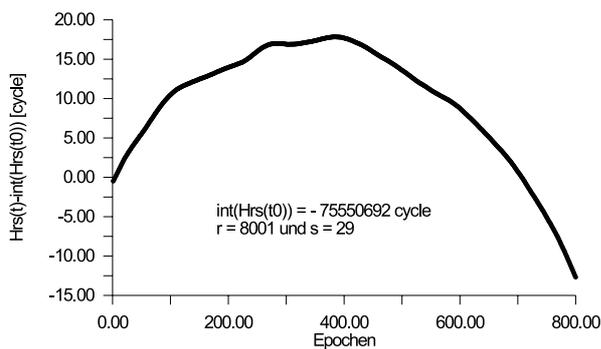


Abb. 3.29: $H_r^s(t)$ mit broadcast-Bahnen

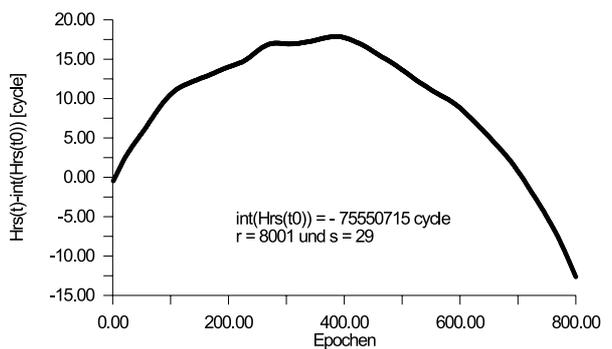


Abb. 3.30: $H_r^s(t)$ mit präzisen IGS Bahnen

Bezogen auf den Referenzsatellit mit der PRN-Nummer 31 können unabhängig von den verwendeten Bahnen bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% alle 22 L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paare aufgelöst werden. Unterschiede in den ganzen Zahlen in Abhängigkeit von den Bahndaten treten nicht auf (Tabelle G.5). Aus den mittleren Gewichtseinheitsfehlern a posteriori (Tabelle 3.9), den Ergebnissen, die mit den BREF-Koordinaten berechnet wurden und den Beträgen der Korrelaten (Tabellen G.6-G.7) ist ersichtlich, dass keine falsche ganze Zahl ermittelt wurde. Beim Vergleich der Werte (Abbildungen 3.32 und 3.33) fällt auf, dass der Zwang, den die Bedingungen auf das System ausüben, bei den genauen IGS-Bahndaten geringer ausfällt.

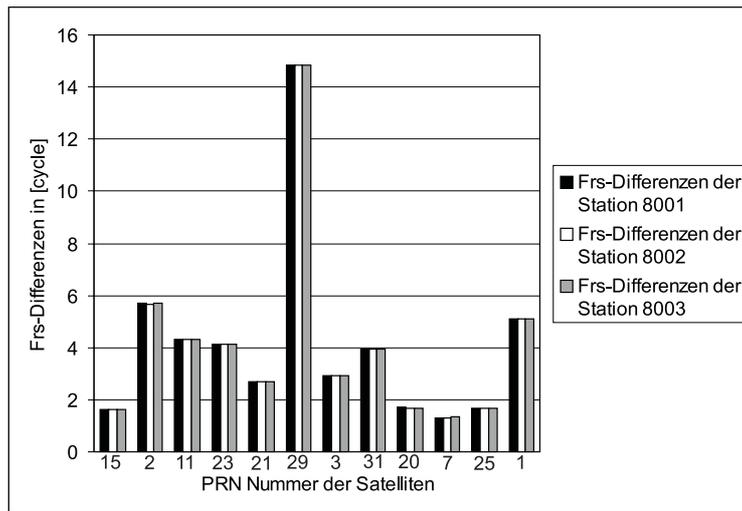


Abb. 3.31: Differenzen der F_r^s -Werte

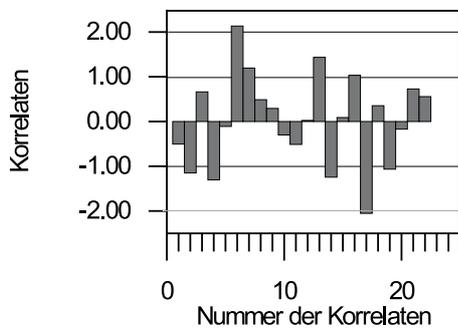


Abb. 3.32: λ_1 - λ_{22} aus broadcast-Bahnen

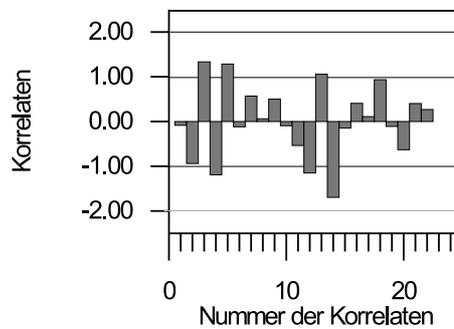


Abb. 3.33: λ_1 - λ_{22} aus präzisen Bahnen

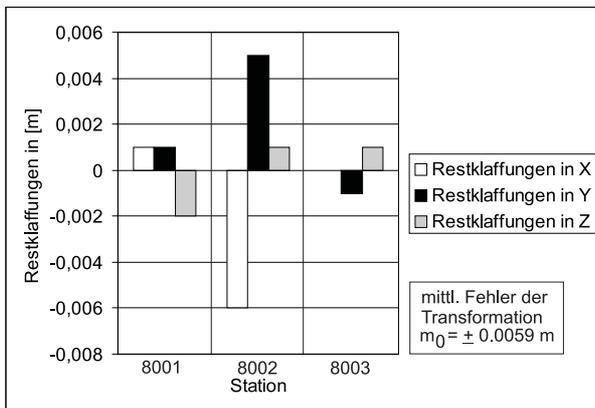


Abb. 3.34: Restklaffg. mit broadcast-Bahnen

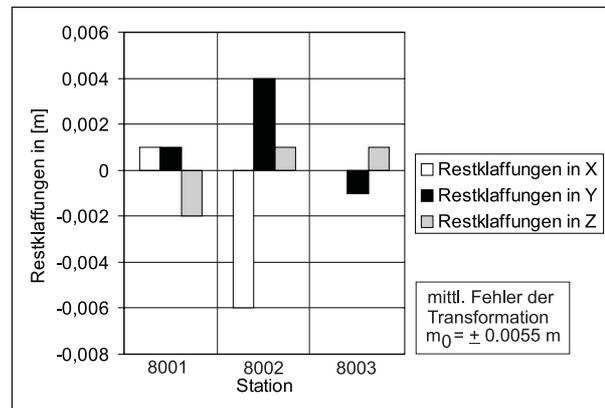


Abb. 3.35: Restklaffg. mit präzisen IGS Bahnen

Zur Beurteilung der Koordinaten werden die Punkte aus beiden Lösungen durch eine Helmerttransformation auf die BREF-Koordinaten abgebildet. Die Restklaffungen weisen nur geringe Unterschiede auf. Das gleiche Ergebnis spiegelt sich auch in den einfachen Koordinatendifferenzen wieder.

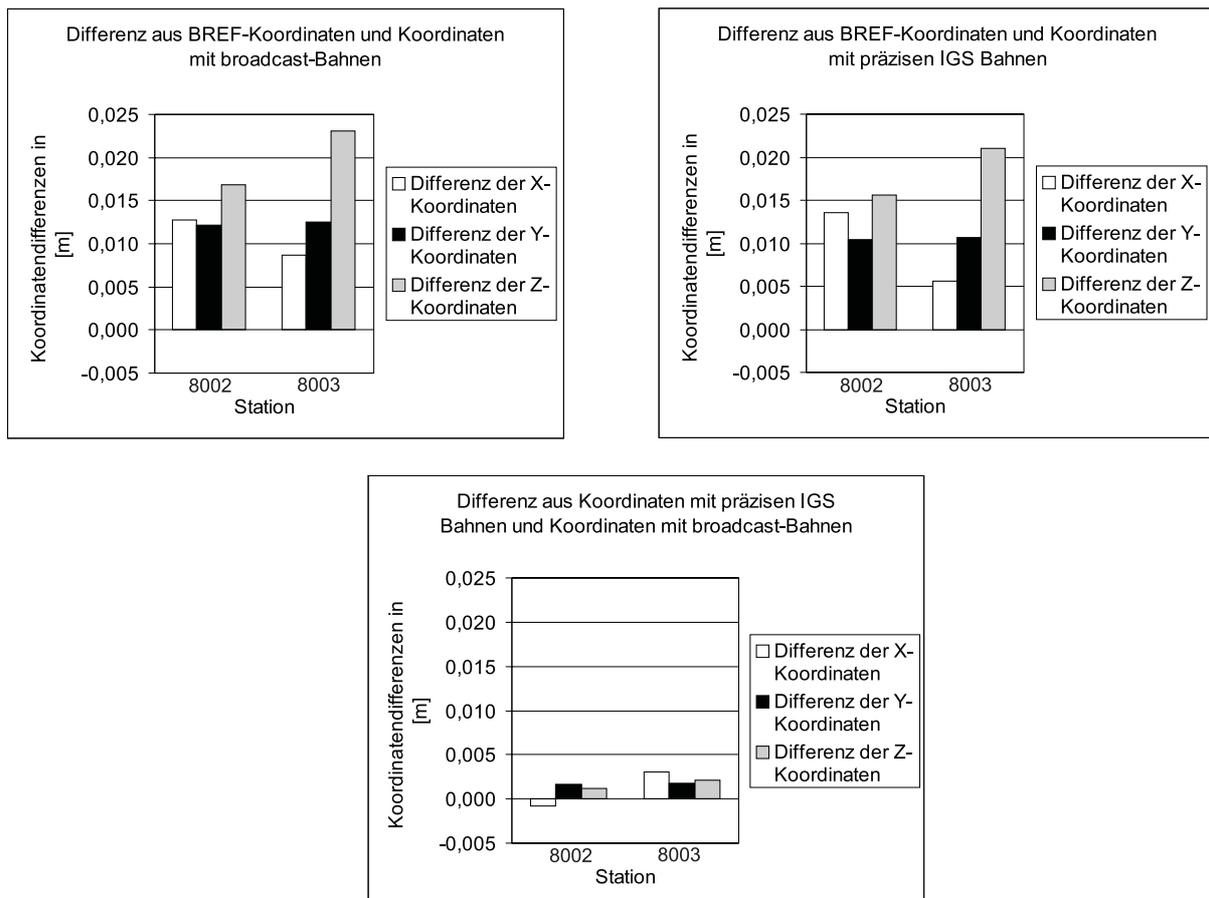


Abb. 3.36: Koordinatendifferenzen

In den Tabellen 3.10 und 3.11 sind die Basislinien und Distanzen zwischen den Stationen aufgelistet, die sich aus den jeweiligen fixed-Lösungen ergeben.

Stationen	ΔX [m]	ΔY [m]	ΔZ [m]	Distanz [m]
8001-8002	8606.093	1151.022	-6631.773	10925.663
8001-8003	-2239.651	-20811.158	5402.553	21617.305
8002-8003	-10845.744	-21962.180	12034.326	27290.887

Tabelle 3.10: Ergebnisse der fixed-Lösung für die Basislinien und Distanzen mit broadcast-Bahnen

Stationen	ΔX [m]	ΔY [m]	ΔZ [m]	Distanz [m]
8001-8002	8606.094	1151.020	-6631.774	10925.664
8001-8003	-2239.654	-20811.159	5402.551	21617.307
8002-8003	-10845.748	-21962.180	12034.325	27290.888

Tabelle 3.11: Ergebnisse der fixed-Lösung für die Basislinien und Distanzen mit präzisen Bahnen

Ab einer Messdauer von zwei Stunden können für alle beobachteten Satelliten auf der Station 8002 alle Mehrdeutigkeiten gelöst werden. Nur für den Satelliten mit der PRN-Nummer 15 ergeben sich jeweils zwei mögliche ganze Zahlen. Im Gegensatz dazu werden für die Station 8003 nur Werte der Satelliten mit den PRN-Nummern 3,20 und 11 festgesetzt. Für alle anderen muss aus jeweils zwei möglichen Kombinationen von ganzen Zahlen der richtige Wert ausgewählt werden. Vergrößert man die Beobachtungszeit auf 2.5 Stunden, ergeben sich auch für die Station 8003 mehrere eindeutige ganze Zahlen.

Zusammenfassung

Anhand der Untersuchung der einzelnen Ergebnisse zeigt sich, dass die Stationsuhren $R_r(t)$, die Koordinaten und die Doppeldifferenzmehrdigkeiten bei diesen Basislinienlängen kaum durch die Bahndaten beeinflusst werden. Änderungen machen sich vor allem in den Anfangszählerständen $I_{f_r}^s$ ($f = 1, 2$) und den Satellitenuhren $S^s(t)$ bemerkbar. Für beide Bahndatensätze können mit der Methode für lange Basislinien alle Doppeldifferenzmehrdigkeiten ermittelt werden, wobei sich die ganze Zahlen nicht voneinander unterscheiden. Ein Festsetzen der Mehrdeutigkeiten ist in beiden Fällen ab Beobachtungszeiten von 2 - 2.5 h möglich, so dass mit mindestens 480 Epochen gearbeitet werden muss.

3.3. Referenzstationsnetz im Burgenland (Österreich)

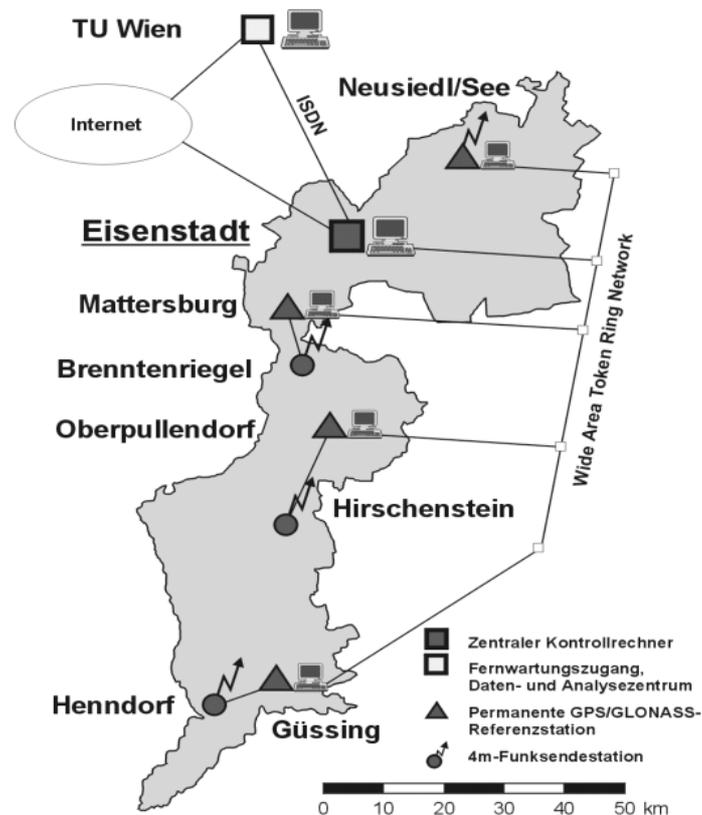


Abb. 3.37: Das SATVB GPS/GLONASS Referenzstationsnetzwerk der BEWAG im Burgenland [Titz, 1999]

Bei diesem Testdatensatz handelt es sich um Beobachtungen der österreichischen Permanentstationen in Güssing, Neusiedl, Mattersburg und Oberpullendorf des SATVB (Satellitenvermessung Burgenland) GPS/GLONASS Referenzstationsnetzwerk der BEWAG (Burgenländische Elektrizitäts-wirtschafts-Aktiengesellschaft). Alle vier Stationen führten Beobachtungen mit JPS Legacy Empfängern und Topcon Regant2-GGD Antennen durch. Für die Stationen in Güssing, Mattersburg und Neusiedl liegen für den 29.12. 2000 GPS-Daten von 0 - 24 Uhr UTC vor, während die Aufzeichnung in Oberpullendorf gegen 7.30 Uhr UTC abbrach. Vorgestellt wird deshalb an dieser Stelle die Auswertung der sich daraus ergebenden Messung 3641.

Messung	Datum	Stationen	Messdauer [sec]	Messintervall [sec]
3641	29.12.2000	Neus-01, Matt-02, Ober-03, Guess-04	0.0 - 29670.0	30

Tabelle 3.12: Messung 3641

Die Längen der Basislinien liegen zwischen 26 und 106 km. Dementsprechend werden präzise Ephemeriden und die Berechnungsmethode für Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten auf langen Basislinien verwendet. Die Station in Güssing fungiert auf Grund ihrer zahlreichen und durchgehenden Beobachtungen als Basisstation. Referenzsatellit ist der Satellit mit der PRN-Nummer 1.

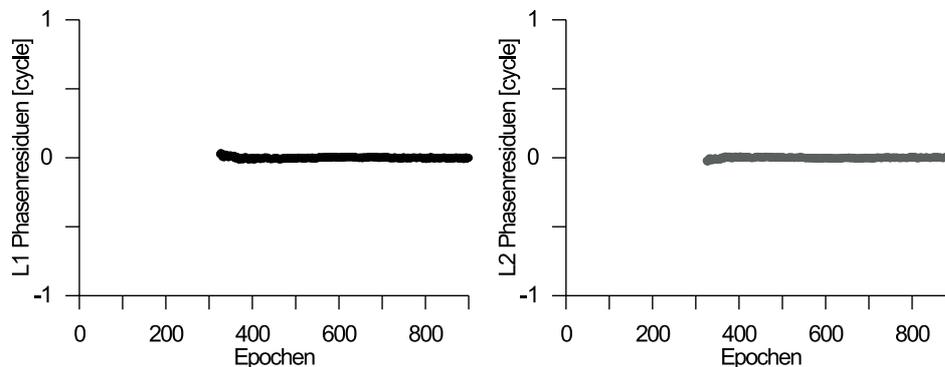


Abb. 3.38: Phasenresiduen auf der Referenzstation Gues-04 zum Satelliten PRN-Nr. 27

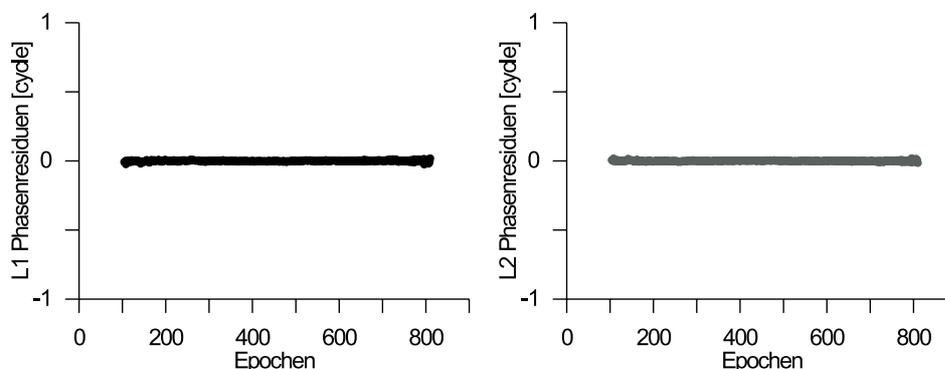


Abb. 3.39: Phasenresiduen auf der Station Ober-03 zum Satelliten PRN-Nr. 13

Nur die Daten der Basisstation sind zu einer Epoche mit Phasensprüngen behaftet (Tabelle F.4). Die Residuenplots der gesäuberten Daten bestätigen dieses Ergebnis, da sich alle Kurven wie in den Abbildungen 3.38 und 3.39 verhalten.

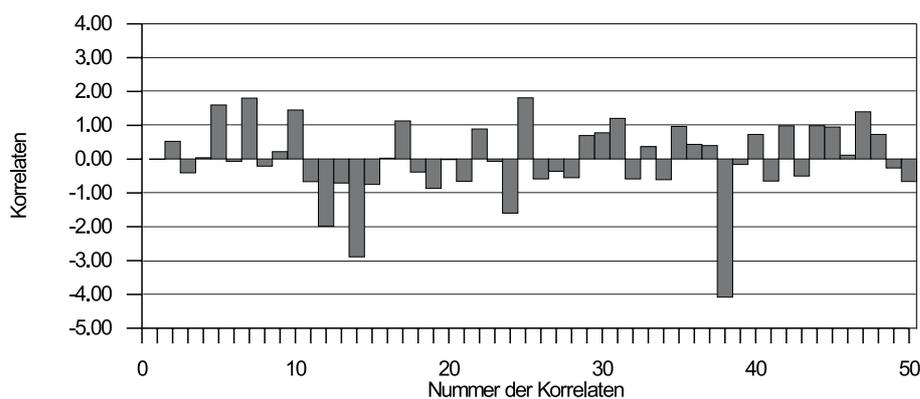


Abb. 3.40: Korrelaten (Ausgleich 1)

Alle 100 Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten können mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99.9% aufgelöst werden (Tabellen G.8 und G.9). Der Ausgleich 1 bringt mit den daraus gebildeten 50 Bedingungsgleichungen die entsprechenden Korrelaten (Tabellen G.10 und G.11) hervor, die in der Abbildung 3.40 dargestellt sind. Durch die Transformation der Ergebniskoordinaten in das ITRF mittels Sollkoordinaten ergeben sich Restklaffungen mit Beträgen von maximal 13 mm (Abbildung 3.41).

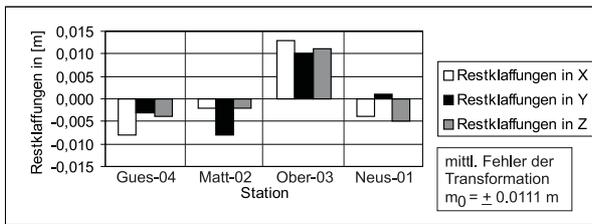


Abb. 3.41: Restklaffungen (Ausgleich 1)

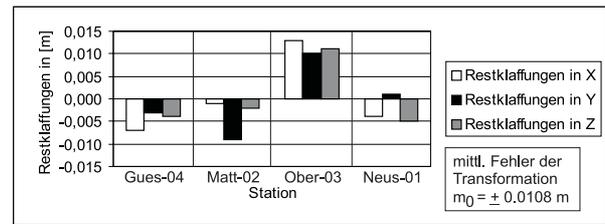


Abb. 3.42: Restklaffungen (Ausgleich 2)

Den Verdacht, hervorgerufen durch den Betrag von λ_{38} , dass die Bedingungsgleichung 38 falsche Mehrdeutigkeiten enthält, können weitere Untersuchungen widerlegen. Nach der Elimination der Gleichung 38 ergibt sich aus dem Ausgleich 2 für σ_0 a posteriori der gleiche Wert von 0.019 cycle wie mit allen 50 Bedingungen. Die Faktoren $\lambda_1 - \lambda_{37}$ und $\lambda_{39} - \lambda_{50}$ (Abbildung 3.43) nehmen nur geringfügig andere Werte an und die Helmerttransformation ergibt für die Restklaffungen fast die gleichen Werte wie mit den Koordinaten des Ausgleichs 2.

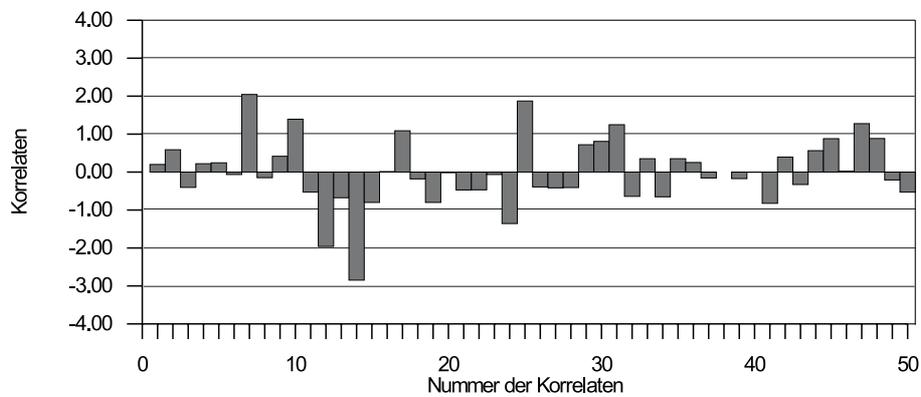


Abb. 3.43: Korrelaten ohne Bedingungsgleichung 38 (Ausgleich 2)

Berechnet man die Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten aus Sollkoordinaten, ergeben sich für alle ganzen Zahlen exakt die Werte, die für den Ausgleich 1 verwendet wurden.

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	I_{1rb}^{sa} [cycle]	I_{2rb}^{sa} [cycle]	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]
18	25	Ober-03	254453	198274	99953.78

Tabelle 3.13: Geänderte Doppeldifferenzmehrdeutigkeit I_{1rb}^{25a} mit $r = \text{Ober-03}$

Um zu testen, wie sich eine falsche Bedingungsgleichung auf die Korrelaten und Koordinaten bei diesem Datensatz auswirkt, wird der Wert der Doppeldifferenzmehrdeutigkeit I_{1rb}^{25a} mit $r = \text{Ober-03}$ um einen Zyklus ($I_{1rb}^{25a} - 1$ cycle: Tabelle 3.13) verändert. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler der bedingten Ausgleichung steigt auf 0.032 cycle an. Für die Korrelaten ergeben sich höhere Beträge, wobei λ_{18} mit einem Wert von 21.238 deutlich hervortritt (Abbildung 3.44). Auch an den Restklaffungen ist zu erkennen, dass sich die Koordinaten durch die verfälschte Mehrdeutigkeit geändert haben.

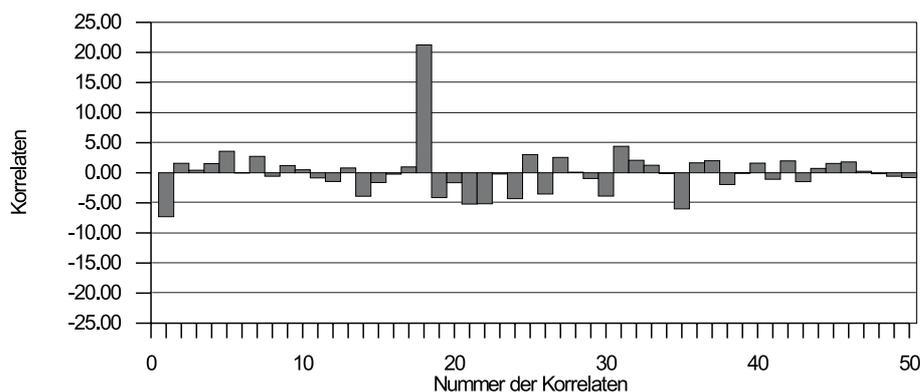


Abb. 3.44: Korrelaten aus Ausgleichung mit falscher Bedingungsgleichung 18 (Ausgleich 3)

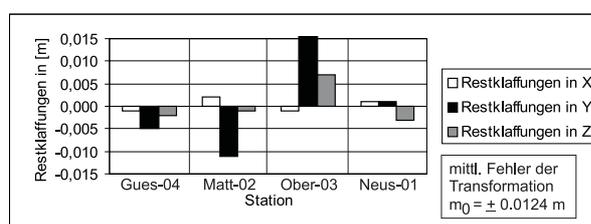


Abb. 3.45: Restklaffungen der Helmerttransformation mit falscher Bedingungsgleichung 18 (Ausgleich 3)

Die mit den akzeptierten 100 Doppeldifferenzmehrdedeutigkeit ermittelten Basislinien lauten:

Stationen	ΔX [m]	ΔY [m]	ΔZ [m]	Distanz [m]
1-2	53925.321	9135.586	-49950.663	74070.695
1-3	37816.060	-3524.463	-32601.933	50053.594
1-4	80818.330	-16605.947	-66517.937	105981.111
2-3	-16109.261	-12660.049	17348.730	26847.040
2-4	26893.009	-25741.533	-16567.274	40747.209
3-4	43002.270	-13081.484	-33916.004	56308.221

Tabelle 3.14: Ergebnisse für die Basislinien und Distanzen zwischen den Stationen

Die Untersuchung der notwendigen Beobachtungszeiten zeigt, dass eine Messung von einer Stunde im Intervall von 30 sec für alle Doppeldifferenzmehrdedeutigkeit jeweils zwei L_1/L_2 -Mehrdedeutigkeits-Paare hervorbringt, die die notwendigen Bedingungen erfüllen. Wählt man eine Messdauer von 2 Stunden können auf allen Stationen bis auf den Satelliten mit der PRN-Nummer 19 alle Mehrdeutigkeiten eindeutig gelöst werden. Mit Hilfe der Korrelaten gelingt es, auch für diesen Satelliten die richtigen ganzen Zahlen aus den zwei möglichen auszuwählen.

Zusammenfassung

Die Mehrdeutigkeitsbestimmung für Netze mit Basislinienlängen bis ca. 100 km ergibt sehr gute Ergebnisse. Alle Mehrdeutigkeiten können bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99.9% gelöst und mit Hilfe der Korrelaten bestätigt werden. Schon bei einer Beobachtungsdauer von zwei Stunden ist die Festsetzung der Mehrdeutigkeiten möglich.

3.4. IGS-Stationsdaten

Welche Qualität bezüglich der Koordinaten und Doppeldifferenzmehrdreutigkeiten kann mit der TUB-Methode bei großräumigen Netzen mit Basislinienlängen bis zu 2000 km erzielt werden? Zur Beantwortung dieser Frage werden die Ergebnisse der Messung 2451 (Tabelle 3.15), die sich aus Beobachtungsdaten von fünf IGS-Stationen (Abbildung 3.46) zusammensetzt, vorgestellt. Die genauen Bezeichnungen und das jeweilige Equipment der Stationen sind der Tabelle 3.16 zu entnehmen.

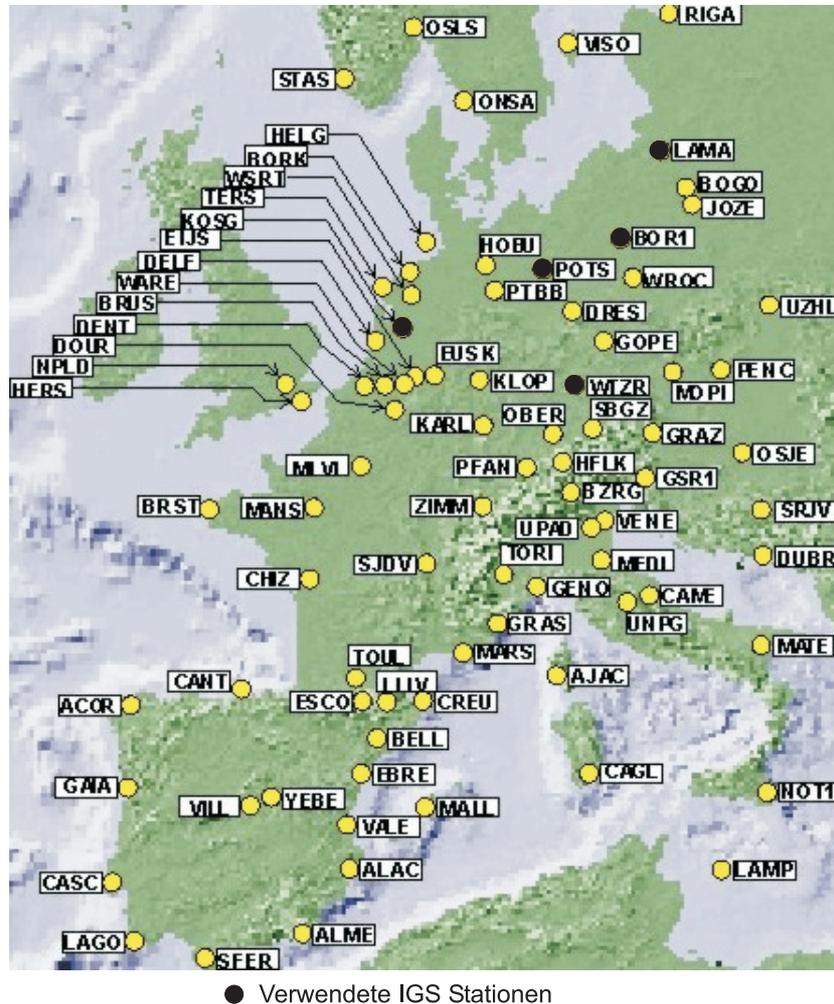


Abb. 3.46: EUREF-Stationen

Messung	Datum	Stationen	erste Epoche - letzte Epoche [sec]
2451	01.09.2000	BOR1, LAMA, WTZR, POTS	1500.0 - 25200.0

Tabelle 3.15: Messung 2451

Während der gesamten Auswertung dient die Station WTZR als Basisstation. Die Länge der Basislinien reicht damit von 360 - 745 km. Für die Berechnung der Doppeldifferenzmehrdreutigkeiten wird der Satellit mit der PRN-Nummer 21 als Referenzsatellit verwendet. Die Daten der gewählten Messung sind nicht mit Phasensprüngen behaftet. Anhand der Residuenplots, die auszugsweise durch die Abbildungen 3.47 und 3.48 gegeben sind, ist dies nachzuvollziehen.

Abkürzung	Stationsname	Land	Empfängertyp	Antennentyp
BOR1	Borowiec	Polen	ROGUE SNR-8000	AOAD/M_T ¹
KOSG	Kootwijk	Niederlande	ROGUE SNR-12 RM	AOAD/M_B ²
LAMA	Lamkowko	Polen	ASHTECH Z-XII3	AOAD/M_T
POTS	Potsdam	Deutschland	TurboRogue (AOA SNR-8000 ACT)	AOAD/M_T
WTZR	Wetzell	Deutschland	TurboRogue (AOA SNR-8000 ACT)	AOAD/M_T

Tabelle 3.16: Verwendete IGS-Stationen und ihre Ausrüstung

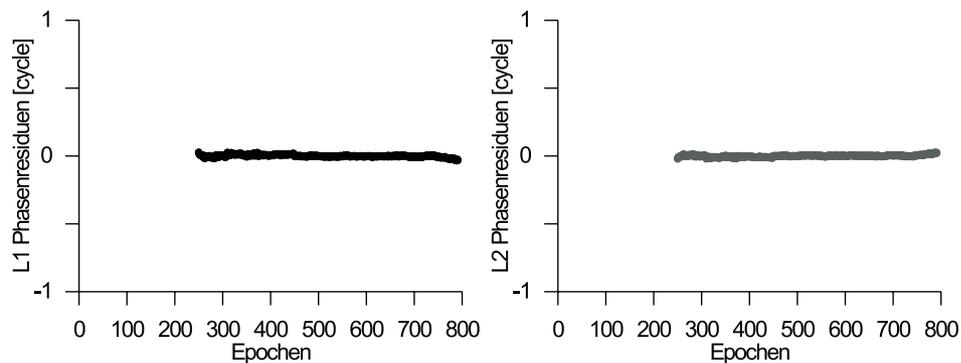


Abb. 3.47: Residuen auf der Station WTZR zum Satelliten PRN-Nr. 21

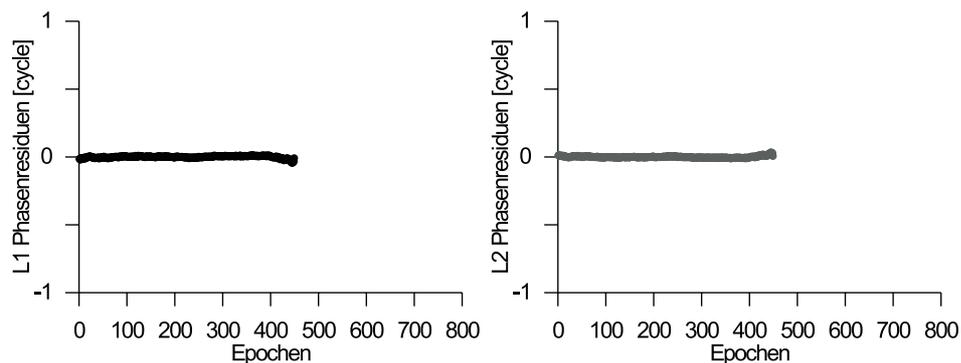


Abb. 3.48: Residuen auf der Station LAMA zum Satelliten PRN-Nr. 22

7-Stunden-Lösung b=WTZR a=21

Insgesamt können 30 der 39 L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paare bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 98% ermittelt werden (Tabelle G.12). Führt man alle 30 Paare in Form von Bedingungsgleichungen in die Ausgleichung ein, ergibt sich ein mittlerer Gewichtseinheitsfehler a posteriori von 0.030 cycle, während er bei der float-Lösung 0.023 cycle beträgt. Die Korrelaten (Abbildung 3.49) fallen dementsprechend relativ hoch aus. Beide Tatsachen deuten darauf hin, dass einige der ganzen Zahlen nicht korrekt sind.

In den weiteren Ausgleichungen werden jeweils die Bedingungsgleichungen mit den betragsmäßig höchsten Proportionalitätsfaktoren entfernt. Damit verbleiben noch die Bedingungen 1-17, 19, 21-30, deren Multiplikatoren zum Teil Beträge der Größenordnung 4 aufweisen (Abbildung 3.50 und Tabelle G.13). Da der mittlere Fehler a posteriori der Ausgleichung mit den 28 Bedingungsgleichungen aber schon auf 0.026 cycle gesenkt werden konnte, ist nicht mehr zu vermuten, dass falsche ganze Zahlen vorhanden sind. Die nun vorliegenden Koordinaten der Punkte WTZR, POTS, KOSG, LAMA und BOR1 werden mittels einer Helmerttransformation auf die Koordinaten der Wochenlösung (Euref1077.snx) abgebildet (Abbildung 3.51).

¹Allen Osborne Associates Dorne Margolin Model T

²Allen Osborne Associates Dorne Margolin Model B

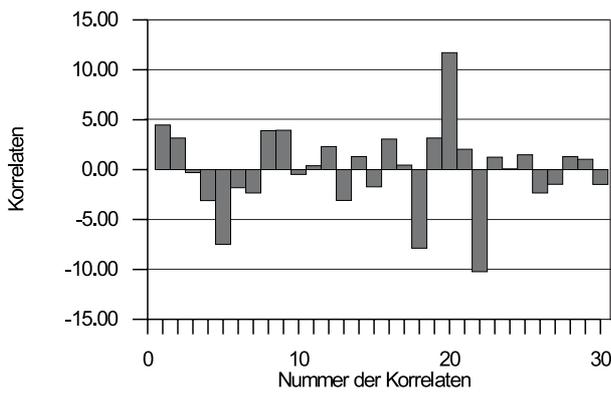


Abb. 3.49: Korrelaten $\lambda_1 - \lambda_{30}$

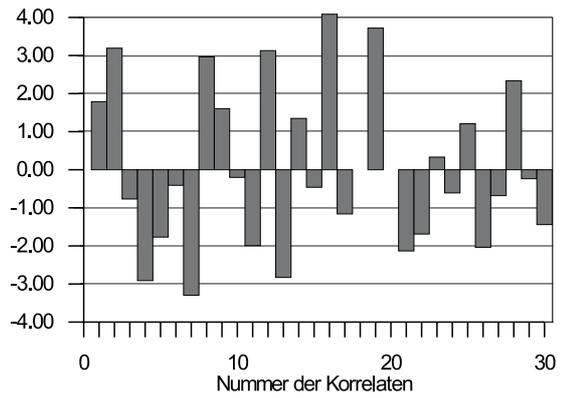


Abb. 3.50: Korrelaten $\lambda_1 - \lambda_{17}, \lambda_{19}, \lambda_{21} - \lambda_{30}$

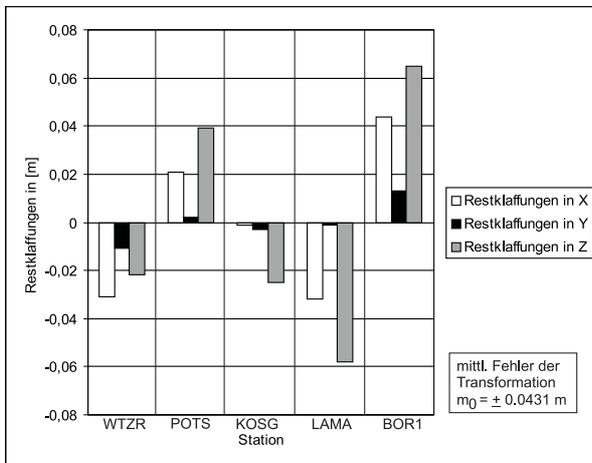


Abb. 3.51: Restklaffungen bei 28 Bedingungsgleichungen

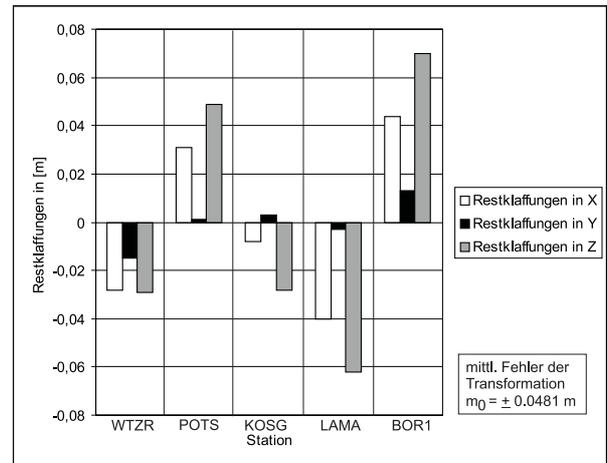


Abb. 3.52: Restklaffungen der neuen float-Lsg.

Große Restklaffungen liegen bereits bei der float-Lösung vor, so dass falsche Mehrdeutigkeitsdifferenzen als Ursache auszuschließen sind. Um zu ergründen, wie es dennoch zu Klaffungen bis zu 6.5 cm kommt, wird eine neue float-Lösung gerechnet. Diesmal werden keine Koordinaten der Stationen festgehalten, um zu verhindern, dass mögliche Spannungen zwischen Punktkoordinaten und Satellitenpositionen das Gleichungssystem beeinflussen. Bildet man das Ergebnis dieser float-Lösung wiederum auf die Wochenlösung mittels einer Helmerttransformation ab, ergeben sich kaum spürbare Änderungen in den Restklaffungen (Abbildung 3.52). Eine Helmerttransformation, in die nur die Koordinaten der Punkte POTS, KOSG, LAMA und BOR1 eingehen, ergibt allerdings sehr kleine Restklaffungen (Abbildung 3.53). Diese vier Stationen passen damit sehr gut zur Wochenlösung.

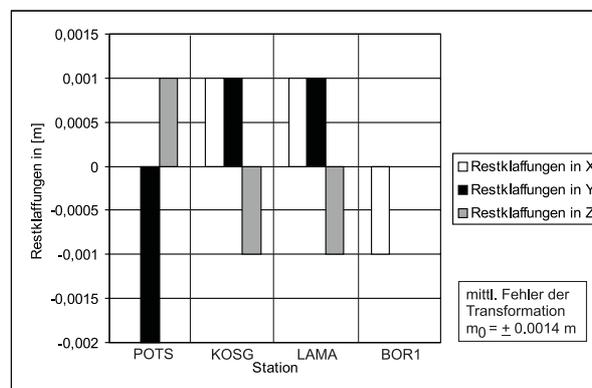


Abb. 3.53: Restklaffungen aus Ergebnis mit 28 Bedingungsgleichungen und 4 Stationen

Die Ergebnisse für die Basislinien, die sich unter Verwendung der 28 Mehrdeutigkeits-Paare ergeben, sind in den Tabelle 3.17 aufgelistet.

Stationen	ΔX [m]	ΔY [m]	ΔZ [m]	Distanz [m]
WTZR-POTS	274890.748	49776.361	-227223.397	360101.488
WTZR-KOSG	176355.259	535121.811	-213510.496	602530.714
WTZR-LAMA	551057.471	-397839.893	-328278.357	754789.770
WTZR-BOR1	337221.923	-216319.961	-220247.848	457189.311
POTS-KOSG	-98535.489	485345.450	13712.901	495436.668
POTS-LAMA	276166.724	-447616.254	-101054.960	535574.901
POTS-BOR1	62331.175	-266096.322	6975.549	273388.160
KOSG-LAMA	374702.213	-932961.704	-114767.861	1011924.380
KOSG-BOR1	160866.665	-751441.772	-6737.352	768497.373
LAMA-BOR1	-213835.548	181519.932	108030.509	300575.645

Tabelle 3.17: Ergebnisse für die Basislinien und Distanzen zwischen den Stationen

In weiteren Testrechnungen werden jeweils die Stationen POTS, KOSG, LAMA und BOR1 als Basisstationen verwendet, deren Koordinaten festgehalten und float-Lösungen berechnet. In allen Fällen ergeben sich durch die Abbildung der neu erzeugten Koordinaten auf die Wochenlösung Restklaffungen bis zu 6.6 cm, wobei diese erheblich zurückgehen, sobald die Station WTZR aus der Transformation herausgenommen wird. Die Ursache der großen Restklaffungen kann demzufolge nur darin bestehen, dass die Koordinaten der Station WTZR, die aus den Beobachtungen der Messung 2451 erzeugt werden, nicht zu den Ergebnissen der Wochenlösung passen. Setzt man für alle fünf Stationen die Koordinaten der Wochenlösung ein und hält diese fest, ergibt sich bei der float-Lösung ein mittlerer Fehler a posteriori von 0.046 cycle. Auch dies deutet darauf hin, dass Spannungen zwischen den Stationskoordinaten und den Beobachtungen existieren.

Hält man nur die Sollkoordinaten der Stationen POTS, KOSG, LAMA und BOR1 fest, werden die Ergebnisse der Mehrdeutigkeitsberechnung insofern bestätigt, als für das L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paar 20 keine und für alle anderen die gleichen ganzen Zahlen vorliegen.

4-Stunden-Lösung $b=WTZR$ $a=21$

Eine Untersuchung der benötigten Beobachtungszeiten zeigt, dass bei dem hier verwendeten Messintervall von 30 sec nach vier Stunden eine Auflösung der Mehrdeutigkeiten bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 98% möglich ist. Keine ganzen Zahlen können zu diesem Zeitpunkt für den Satelliten mit der PRN-Nummer 29 festgesetzt werden. Für die Station-Satelliten-Kombination LAMA-31 und BOR1-31 mit $b=WTZR$ und $a=21$ liegen jeweils zwei ganze Zahlen im Vertrauensintervall. Im Vergleich zur 7-Stunden-Lösung ergeben sich neue und veränderte L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paare, die in der Tabelle 3.18 aufgelistet sind. Alle anderen Werte stimmen mit denen der 7-Stunden-Lösung überein.

Satellit s	Station r	$I_{1,rb}^{sa}$ [cycle]	$I_{2,rb}^{sa}$ [cycle]	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]	Korrelate
10	KOSG	452243	352393	177651.05	7.891
22	KOSG	5146884	4010557	2021774.65	0.944
15	KOSG	944311	735826	370940.09	1.243
25	LAMA	-10588684	-8250916	-4159398.81	6.155
22	LAMA	-9199456	-7168402	-3613688.21	-1.252

Tabelle 3.18: Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten nach 4 Stundenlösung

An den Korrelaten ist zu sehen, dass die ganzen Zahlen für die Kombinationen KOSG-10 und LAMA-25 größeren Zwang auf das System ausüben als die anderen. In diesem Fall sind die entsprechenden Werte der 7-Stunden-Lösung zu bevorzugen. Der veränderte Wert der Bedingungsgleichung 20 (LAMA-22) ergibt eine niedrige Korrelate, so dass ihre vorherige Elimination gerechtfertigt wird. Eine Überprüfung der Mehrdeutigkeiten, indem mit Daten verschiedener Stunden-Lösungen gearbeitet wird, erweist sich als sehr sinnvoll. Auf diese Art können unmodellerte Fehler wie z. B. Störungen in der Ionosphäre umgangen werden.

7-Stunden-Lösung $b=KOSGR$ $a=21$

Im Folgenden werden die Ergebnisse präsentiert, die aus der Verwendung der Station KOSG als Basisstation resultieren. In diesem Fall müssen Basislinien zwischen 495 und 1011 km gelöst werden. Der Satellit mit der PRN-Nummer 21 dient weiterhin als Referenzsatellit.

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler a posteriori der float-Lösung beträgt 0.033 cycle. Es können 17 von 39 Mehrdeutigkeits-Paaren bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 98% eindeutig festgesetzt werden (Tabelle G.14). Für drei Mehrdeutigkeits-Paare liegen jeweils zwei ganze Zahlen im Vertrauensintervall (Tabelle 3.19). In der vermittelnden Ausgleichung (Ausgleichung 1) mit den 17 Bedingungsgleichungen erhöht sich σ_0 a posteriori auf 0.046 cycle. Abbildung 3.54 zeigt die Korrelaten der 17 Bedingungen, deren Beträge teilweise sehr hoch ausfallen.

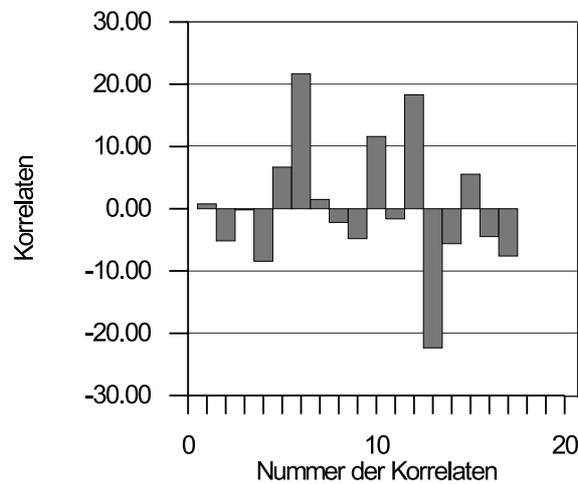


Abb. 3.54: Korrelaten der Ausgleichung 1

	Satellit s	Station r	I_{1rb}^{sa} [cycle]	I_{2rb}^{sa} [cycle]	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]	Korrelate
18	3	POTS	-623626	3	-623628.34	5.793
19	3	POTS	-623625	4	-623628.12	-7.887
20	10	BOR1	3212637	2503355	1261970.77	0.429
21	10	BOR1	3212640	2503359	1261970.65	2.980
22	15	BOR1	98206	76524	38576.91	9.401
23	15	BOR1	98207	76525	38576.13	-8.994

Tabelle 3.19: Mehrdeutigkeits-Paare 18 - 23

Auf Grund der hohen Beträge von λ_i mit $i = 6, 10, 12, 13$ werden die dazugehörigen Bedingungsgleichungen für die weiteren Untersuchungen eliminiert. Danach kann jede der Gleichungen 18 - 23 als einzelne Bedingung ins Normalgleichungssystem eingegeben werden. Die Werte für die ganzen Zahlen sowie die Korrelaten sind der Tabelle 3.19 zu entnehmen.

Da die Multiplikatoren λ_i mit $i=18, 20, 23$ die geringsten Beträge aufweisen, werden die entsprechenden Bedingungen zusammen mit den Gleichungen 1-5, 7-9, 11, 14-17 ins System eingeführt (Ausgleichung 2). Die Korrelate λ_{18} (Abbildung 3.55) und der mittlere Fehler σ_0 a posteriori ($\sigma_0 = 0.040$ cycle) fallen noch immer sehr hoch aus, so dass in der Ausgleichung 3 die Bedingungen um die Gleichung 18 reduziert werden (Abbildung 3.56). Mit den verbleibenden L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paaren 1-5, 7-9, 11, 14-17, 20 ergibt sich ein Fehler σ_0 a posteriori von 0.036 cycle.

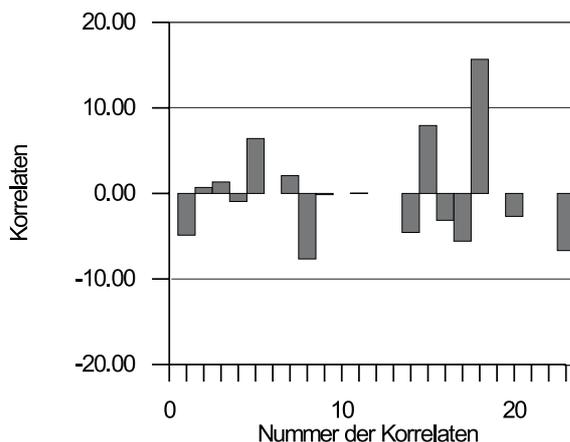


Abb. 3.55: Korrelaten der Ausgleichung 2

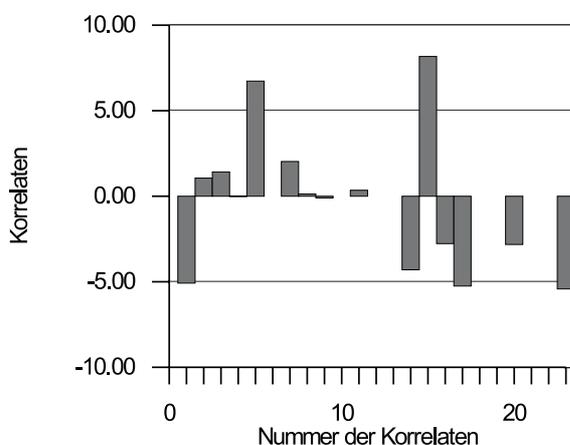


Abb. 3.56: Korrelaten der Ausgleichung 3

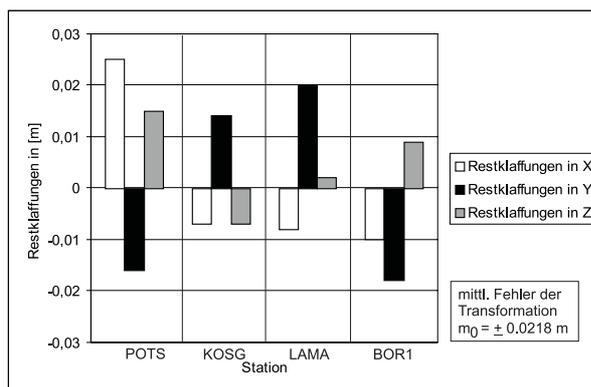


Abb. 3.57: Restklaffungen

Die Restklaffungen aus der Helmerttransformation der so erzeugten Koordinaten auf die Koordinaten der Wochenlösung betragen maximal 2.5 cm, wobei die Sollkoordinaten der Station WTZR nicht mit einbezogen wurden. (Abbildung 3.57).

Die Tabelle 3.20 enthält die Differenzen aus den Distanzen zwischen den IGS-Stationen $d_{b=WTZR}$ der fixed-Lösung mit der Basisstation WTZR und den Distanzen $d_{b=KOSG}$ der fixed-Lösung mit der Basisstation KOSG.

$$\Delta d = d_{b=WTZR} - d_{b=KOSG} \tag{3.1}$$

Stationen	Δd [m]
WTZR-POTS	0.015
WTZR-KOSG	0.020
WTZR-LAMA	0.003
WTZR-BOR1	0.020
POTS-KOSG	0.045
POTS-LAMA	-0.030
POTS-BOR1	0.003
KOSG-LAMA	0.019
KOSG-BOR1	0.051
LAMA-BOR1	-0.019

Tabelle 3.20: Differenzen der Distanzen

Für die Überprüfung der Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten wird eine float-Lösung mit den gefixten Koordinaten der Wochenlösung für die Stationen POTS, KOSG, LAMA und BOR1 erzeugt, deren mittlere Fehler 0.034 cycle beträgt. Aus den daraus resultierenden Parametern ergeben sich die gleichen Werte wie für die Gleichungen 1-5, 9-14 und 16-17. Die anderen Werte können nicht zur Bestätigung der obigen Ergebnisse herangezogen werden. Entweder liegen mehrdeutige Lösungen vor oder es handelt sich um eindeutige ganze Zahlen von Station-Satelliten-Kombinationen, die vorher nicht berechnet wurden.

4.5-Stunden-Lösung $b=KOSG$ $a=21$

Die Mehrdeutigkeiten können bei dieser Konfiguration nach 4.5 Stunden mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 98% festgesetzt werden. Es ergeben sich einige Änderungen im Vergleich zur dazugehörigen 7-Stunden-Lösung. Insgesamt werden 26 von 39 L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paaren eindeutig gelöst. Zusätzlich liegen für sechs Mehrdeutigkeits-Paare jeweils zwei Lösungen vor. Für die in der 7-Stunden-Lösung eliminierten Problemgleichungen 12 und 13 ergeben sich andere ganze Zahlen. Es liegt kein Wert für die Bedingung 6 vor und für die Gleichung 10 erfüllen jeweils zwei Mehrdeutigkeits-Paare die Bedingungen. Darunter sind auch die Werte der 7-Stunden-Lösung. Die Ergebnisse, die sich von denen der 7-Lösung unterscheiden, sind den Tabellen ?? und G.17 zu entnehmen. Eine Analyse der Korrelaten ermöglicht auch in diesem Beispiel eine endgültige Festsetzung der Mehrdeutigkeiten, so dass 82.05% der Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten bestimmt werden können.

Testrechnungen mit Daten von IGS-Stationen mit Entfernungen bis zu 2000 km zeigen, dass die TUB-Methode zur Modellierung der Einflüsse bei solchen Basislinienlängen noch nicht genügt. Durch die relativ hohen mittleren Fehler der float-Lösungen wird der Suchbereich für die ganzen Zahlen der Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten zu groß. Es liegen entweder keine oder zu viele ganze Zahlen in den Vertrauensintervallen. Es kann daher nur eine float-Lösung erzeugt werden.

Zusammenfassung

Eine Auflösung der Mehrdeutigkeiten ist bis zu 1000 km möglich. Bei Netzen mit diesen Basislinienlängen kommt es jedoch eher dazu, dass zum Teil keine oder zu viele ganze Zahlen in den Vertrauensintervallen liegen. Letzteres Problem kann aber unter Zuhilfenahme der Korrelaten beseitigt werden. Wie sich gezeigt hat, muss man mit Beobachtungszeiten von mindestens 4 - 4.5 Stunden arbeiten, um zuverlässige und genaue Ergebnisse zu erhalten. Sinnvoll ist es, Bestimmungen der Mehrdeutigkeiten mit verschiedenen langen Messungen durchzuführen und miteinander zu vergleichen. Mitunter können mit den Daten kürzerer Beobachtungszeiträume ganze Zahlen festgelegt werden, die sich aus langen Messungen nicht oder nur falsch berechnen lassen. Ursache dafür sind Fehler wie z. B. nicht modellierte Refraktionserscheinungen, Bahnungenauigkeiten und punktabhängige Veränderungen, die erst nach einer bestimmten Zeit auftreten und damit nur Teile der Daten beeinflussen.

Werden die Entfernungen zwischen den Stationen noch größer als 1000 km, nehmen die Schwierigkeiten für die Bestimmung der Mehrdeutigkeiten zu. Für Basislinien von 2000 km Länge können momentan noch keine Mehrdeutigkeiten mit dieser Methode bestimmt werden.

4. Diskussion

Die TUB-Methode erweist sich als stabiles und genaues Auswerteverfahren für großräumige Netze mit Ausdehnungen bis zu 1000 km. Da weder Differenzen noch Linearkombinationen der Originalmessungen gebildet werden, bleibt der Noise-Level niedrig. Die Konfidenzintervalle werden damit nicht künstlich vergrößert.

- Bei der Auswertung des Berliner Netzes mit Punktabständen bis zu 48 km werden 96,97% aller L_1 - und L_2 -Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten in einer iterativen Mehrdeutigkeitsbestimmung ermittelt. Zusätzlich dazu können durch die Untersuchung der Korrelaten vier noch fehlende Mehrdeutigkeiten aus mehreren möglichen ganzen Zahlen ausgewählt und zwei falsche Mehrdeutigkeiten identifiziert werden. Eine Auflösung der Mehrdeutigkeiten ist damit zu 100% möglich. Benötigt werden hierfür ca. 240 Epochen bei einem Beobachtungsintervall von 60 sec.
- Die Auswertungen der Daten der drei Berliner SAPOS-Referenzstationen, die 10.9 km bzw. 27 km voneinander entfernt liegen, zeigen, dass die Stationsuhren $R_r(t)$, die Koordinaten und die Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten bei diesen Basislinienlängen kaum durch die Unterschiede zwischen broadcast- und präzisen Bahnen beeinflusst werden. Änderungen machen sich vor allem in den Anfangszählerständen I_f^s ($f = 1, 2$) und den Satellitenuhren $S^s(t)$ bemerkbar. Für beide Bahndatensätze können mit der Methode für lange Basislinien alle Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten ermittelt werden, wobei sich die ganzen Zahlen nicht voneinander unterscheiden. Ein Festsetzen der Mehrdeutigkeiten ist in beiden Fällen ab Beobachtungszeiten von 2 - 2.5 h möglich, so dass bei Messintervallen von 15 sec mit mindestens 480 Epochen gearbeitet werden muss.
- Die Mehrdeutigkeitsbestimmung für Netze mit Basislinienlängen bis zu 106 km, wie sie bei den Permanentstationen der BEWAG im Burgenland vorliegen, ergibt sehr gute Ergebnisse. Alle Mehrdeutigkeiten können gelöst und mit Hilfe der Korrelaten bestätigt werden. Schon bei einer Beobachtungsdauer von 2 h und einem Messintervall von 30 sec werden die ganzen Zahlen festgesetzt.
- Mit der TUB-Methode ist eine Auflösung der Mehrdeutigkeiten bis zu 1000 km möglich. Allerdings treten bei Netzen mit diesen Basislinienlängen Probleme dergestalt auf, dass zum Teil keine oder zu viele ganze Zahlen in den Vertrauensintervallen liegen. Durch die Untersuchung der Korrelaten kann Letzteres beseitigt werden. Um eine Bestimmung der Mehrdeutigkeiten durchführen zu können, muss man mit Beobachtungszeiten von mindestens 4 Stunden arbeiten. Werden die Entfernungen zwischen den Stationen noch größer als 1000 km, nehmen die Schwierigkeiten für die Bestimmung der Mehrdeutigkeiten zu. Für Basislinien von 2000 km Länge können momentan noch keine Mehrdeutigkeiten bestimmt werden.

Bei Datensätzen mit Basislinien bis zu 100 km können alle Mehrdeutigkeiten festgesetzt werden. Erst bei Punktabständen im Bereich von 700-1000 km kommt es zu Modellungenauigkeiten, so dass die Mehrdeutigkeiten nicht mehr zu 100% gelöst werden konnten. In allen Fällen ergeben sich zuverlässige Ergebnisse für die Basislinienkomponenten Δx , Δy und Δz . Aus den Helmerttransformationen der Ergebniskoordinaten auf die jeweiligen Sollkoordinaten der einzelnen Datensätze gehen bei Punktabständen bis zu 100 km maximale Restklaffungen von ± 1.3 cm hervor und bei Entfernungen bis zu 1000 km liegen die Klaffungen bei maximal ± 2.5 cm. Als besonders erfolgsversprechend zeigt sich der Ansatz, Mehrdeutigkeiten zu testen, indem sie in Form von Bedingungsgleichungen ins Normalgleichungssystem eingeführt werden. Durch die Untersuchung der Lagrangschen Faktoren werden Fehler in den ganzen Zahlen aufgedeckt, die z.B. durch die Verwendung von broadcast-Ephemeriden hervorgerufen werden. Liegen mehrere ganze Zahlen in den Konfidenzintervallen, fungieren die Korrelaten als Entscheidungshilfen. Wichtig ist dabei, die Korrelaten datensatzspezifisch untereinander zu vergleichen, da ihre Beträge in Abhängigkeit von der Basislinienlänge und den verwendeten Bahnen insgesamt höher oder niedriger ausfallen. Als sinnvoll erweist sich, die Bestimmung der Mehrdeutigkeiten eines Datensatzes mit verschiedenen langen Beobachtungszeiten durchzuführen, da somit eine zusätzliche Überprüfung der Ergebnisse möglich ist.

Eine Mehrdeutigkeitsbestimmung ist nicht mehr möglich, wenn keine ganzen Zahlen im Konfidenzintervall liegen oder für alle Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten mehrere ganze Zahlen die notwendigen Bedingungen so erfüllen, dass sich die jeweiligen L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paare zu wenig voneinander unterscheiden. Die Ursachen dafür sind generell in Bahnfehlern, instrumentellen Fehlern oder Störungen in der Ionosphäre zu finden. Schlechte Ergebnisse bei langen Basislinien (1000-2000 km) sind darauf zurückzuführen, dass der Ansatz zur

Separation der Ionosphäre nicht greift, da simultane Beobachtungen hinsichtlich desselben Satelliten zu gering ausfallen.

Liegen die GPS-Phasenmessdaten in sehr guter Qualität vor, d.h. es existieren

- wenig Phasensprünge,
- nur kurze Unterbrechungen der Messungen,
- keine ionosphärische Störungen
- und genaue Bahndaten,

läuft das Programmsystem TUBGPS bis zur Erzeugung der fixed-Lösung automatisch ab. Die Untersuchung der Korrelaten wird momentan noch interaktiv gesteuert, kann aber ebenfalls automatisiert werden.

Zur Untersuchung der TUB-Methode hinsichtlich der Auflösung von Mehrdeutigkeiten bei großräumigen Netzen mit Basislinien bis zu 2000 km sind weitere Arbeiten notwendig. Die Verwendung der Korrelaten als Indikatoren für fehlerhafte Parameter kann so ausgeweitet werden, dass auch andere Unbekannte wie z.B. Zenitrefraktionen getestet werden. Denkbar ist auch eine Überprüfung der Mehrdeutigkeiten durch Korrelaten im Rahmen von Echtzeitlösungen.

A. Grundlagen der GPS-Phasenmessung

In der folgenden Formel werden elektromagnetische Wellen mit Hilfe eines Wellentyps, der harmonischen Welle, mathematisch beschrieben [Gerthsen, 1960]:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi_{01}) = A \cdot \cos(\omega t + \phi_{02}) \quad (\text{A.1})$$

- $x(t)$: Größe und Richtung des elektromagnetischen Feldes
- A : Amplitude
- ω : Kreisfrequenz
- t : Zeit
- ϕ_{01}, ϕ_{02} : Nullphasenwinkel

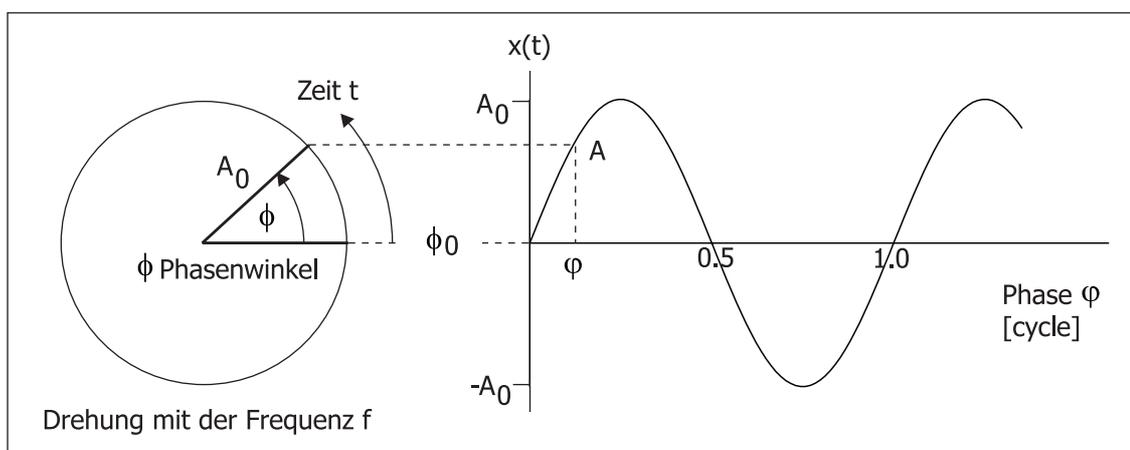


Abb. A.1: Darstellung von Phase, Phasenwinkel und Amplitude

Die Nullphasenwinkel ϕ_{01} und ϕ_{02} geben die Verschiebung gegenüber einer Vergleichsschwingung mit dem Nullphasenwinkel $\phi_0 = 0$ an. Sie dienen zur Beschreibung der Phasenwinkel ϕ_1 und ϕ_2 , die den augenblicklichen Zustand der Schwingung, die Phase φ_1 bzw. φ_2 , angeben.

$$\phi_1 = \omega t + \phi_{01} \quad (\text{A.2})$$

$$\phi_2 = \omega t + \phi_{02} \quad (\text{A.3})$$

$$\omega = 2\pi f \quad (\text{A.4})$$

$$f = 1/T = n/t \quad (\text{A.5})$$

$$T = 2\pi/\omega \quad (\text{A.6})$$

- f : Frequenz
- ϕ_1, ϕ_2 : Phasenwinkel
- T : Schwingungsdauer
- n : Anzahl der Schwingungen

Zwischen Phasenwinkel ϕ und Phase φ besteht der Zusammenhang:

$$\varphi = \frac{\phi}{2\pi} \quad (\text{A.7})$$

Schwebung

Aus zwei sich überlagernden harmonischen Schwingungen unterschiedlicher Kreisfrequenzen entsteht eine nicht-harmonische Schwingung. Formel (A.8) zeigt dies anhand zweier Schwingungen gleicher Amplitude A und gleicher Nullphasenwinkel $\phi_{01} = \phi_{02} = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot \cos(\omega_1 t) + A \cdot \cos(\omega_2 t) \\ &= 2A \cos\left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) t\right) \cos\left(\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) t\right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Liegen die beiden Kreisfrequenzen dicht beieinander $\omega_1 \approx \omega_2$, so gilt:

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2 \quad (\text{A.9})$$

In diesem Fall wird die resultierende Schwingung Schwebung genannt, deren Amplitude $A(t)$ wiederum harmonisch schwingt.

$$x(t) = A(t) \cdot \cos\left(\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) t\right) \quad (\text{A.10})$$

$$A(t) = 2A \cos\left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) t\right) \quad (\text{A.11})$$

Die Amplitude $A(t)$ einer Schwebung ändert sich im Vergleich zu ihrer Grundschwingung nur langsam. Es gelten folgende Zusammenhänge:

Schwingungsdauer T der Amplitudenschwingung $A(t)$:

$$T = \frac{4\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \quad (\text{A.12})$$

Schwebungsperiode T_{SCH} von $x(t)$

$$T_{SCH} = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \quad (\text{A.13})$$

Schwebungsfrequenz f_{SCH} :

$$f_{SCH} = \frac{1}{T_{SCH}} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\pi} = |f_1 - f_2| \quad (\text{A.14})$$

Frequenzmischung bei GPS

Im Empfänger wird ein hochfrequentes Referenzsignal $x_r(t)$ mit der gleichen Frequenz wie im Satelliten erzeugt.

$$x_r(t) = A \sin(2\pi f_r t + \phi_r) \quad (\text{A.15})$$

Auf Grund der Dopplerverschiebung unterscheidet sich die Frequenz f^{ds} des empfangenen Satellitensignals $x^s(t)$ von der im Satelliten erzeugten Frequenz f^s .

$$x^s(t) = A \sin(2\pi f^{ds} t + \phi^s) \quad (\text{A.16})$$

$$\phi^s = -2\pi f^{ds} \frac{r_r^s}{\nu} + \phi_0 \quad (\text{A.17})$$

ν : Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

Mischt man nun die Signale $x_r(t)$ und $x^s(t)$ (Differenzbildung), ergibt sich ein zur Phasenmessung geeignetes Mischsignal $x_m(t)$ [Bauer, 1997].

$$x_m(t) = x_r(t) - x^s(t) \quad (\text{A.18})$$

$$x_m(t) = 2A \cos\left(2\pi t \frac{f_r + f^{ds}}{2} + \frac{\phi_r + \phi^s}{2}\right) \sin\left(2\pi t \frac{f_r - f^{ds}}{2} + \frac{\phi_r - \phi^s}{2}\right) \quad (\text{A.19})$$

Da die Frequenzen der Eingangssignale nur leicht voneinander abweichen $f_r \approx f^{ds}$, entsteht ein Hochfrequenzsignal mit periodischen Amplitudenschwankungen (Schwebung).

Amplitudenschwingung $A(t)$:

$$A(t) = 2a \sin \left(2\pi t \frac{f_r - f^{ds}}{2} + \frac{\phi_r - \phi^s}{2} \right) \quad (\text{A.20})$$

Frequenz f_A der Amplitudenschwingung:

$$f_A = \frac{f_r - f^{ds}}{2} \quad (\text{A.21})$$

Frequenz f_{SCH} der Schwebung:

$$f_{SCH} = f_r - f^{ds} \quad (\text{A.22})$$

Die Amplitude $A(t)$ schwingt im niederfrequenten Bereich (Gleichung A.21) und eignet sich damit zur Phasemessung. Aus dem Phasenwinkel des niederfrequenten Signals $(\phi_r - \phi^s)/2$ erhält man durch Multiplikation mit $1/\pi$ die Phasendifferenz der Hochfrequenzsignale $\varphi_r^s = \varphi_r - \varphi^s$.

B. TUBGPS - Die GPS-Auswertungssoftware der TU Berlin

Grundlage der Software TUBGPS bilden die Quellcodes, die beim NGS (National Geodetic Survey) von C. Goad bis 1986 erstellt wurden. U. Gehlich veränderte die Auswertalgorithmen im Rahmen der Forschungsaufgaben des Fachgebietes Astronomische und Physikalische Geodäsie der Technischen Universität Berlin bis 1997. Im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit wurden die GPS-Programme überarbeitet, erweitert und getestet. Die gesamte GPS-Auswertungssoftware TUBGPS besteht jetzt aus acht Programmen, deren Modulnamen wie folgt lauten: SPCS (Single Point Code Solution), TDS (Triple Difference Solution), FCS (Find Cycle Slips), MCDF (Make Clean Data Files), APO (Adjustment of Phase Observations), SBAMB (Short Baseline Ambiguities), MBAMB (Middle Baseline Ambiguities), LBAMB (Long Baseline Ambiguities), COC (Computation of Correlates).

Die Software TUBGPS lässt sich in zwei größere Teile zerlegen. Die Module SPCS, TDS, FCS und MCDF gehören zum ersten Abschnitt, in dem die Vorverarbeitung und Aufbereitung der Daten abläuft. Hier werden Uhrfehler berechnet, Phasensprünge und grobe Fehler identifiziert und Näherungskordinaten der beteiligten Stationen bestimmt, so dass die gesäuberten Daten inklusive der Koordinaten der ionosphärischen Punkte in ein neues Datenfile übertragen werden können. Während des zweiten Programmabschnittes, der Hauptverarbeitung der Daten, erzeugt APO im Rahmen einer float-Lösung neue Stationskoordinaten, Bahnverbesserungen und Werte für die Größen $R_r(t)$, $S^s(t)$, F_r^s und $H_r^s(t)$. Die beiden letzten Parameter bilden die Grundlage zum Lösen der Mehrdeutigkeiten, was in Abhängigkeit von der Basislinienlänge entweder von SBAMB, MBAMB oder LBAMB durchgeführt werden kann. Anschließend wird die fixed-Lösung berechnet, indem die F_r^s -Werte als bekannte Parameter eingeführt werden, für die die Mehrdeutigkeiten gelöst werden konnten. Andererseits kann auch eine zweite float-Lösung bestimmt werden, wobei jetzt in das Programm APO zusätzliche Bedingungen zwischen den Unbekannten bezogen auf die Lösung der Mehrdeutigkeiten eingeführt werden können. Anhand der Korrelaten, die in COC ermittelt werden, können Aussagen über die Qualität der Mehrdeutigkeiten getroffen werden.

Die Abbildung B.1 zeigt ein Strukturdiagramm, welches die Reihenfolge der zu startenden Programme wiedergibt. Die Funktionsweise sowie die grundlegenden Gleichungen jedes einzelnen Programmes werden in den weiteren Kapiteln erläutert.

B.1. Einzelpunkt-Code-Lösung und Bestimmung der Uhrfehler

SPCS (Single Point Code Solution)

Für die Einzel-Punkt-Code-Lösung benötigt das Programm die GPS-Beobachtungsdaten einer Station und die broadcast-Ephemeriden der beobachteten Satelliten im RINEX-Format. Falls keine Sollkoordinaten für die Station vorliegen, werden aus den C/A-Code- und P-Codemessungen auf L_1 und L_2 sowie den neu zu formenden Codebeobachtungen auf L_3 bessere Näherungskordinaten ermittelt. Die Codebeobachtung der ionosphärenfreien Linearkombination ergibt sich dabei aus (Anhang C.1):

$$P_3 = \frac{1}{1 - \alpha^2} (P_1 - \alpha^2 P_2) \quad (\text{B.1})$$

P_1 : Codebeobachtung auf L_1 in [m]

P_2 : Codebeobachtung auf L_2 in [m]

Für jeden Messzeitpunkt werden aus den Codemessungen die Uhrkorrekturen zwischen Empfängeruhr und GPS-Zeit Δt_{r_GPS} bestimmt und in einem Datenfile abgespeichert. Dazu werden die Uhrfehler Δt_{r_GPS} und die Empfängerkoordinaten $x_r(t_r)$, $y_r(t_r)$ und $z_r(t_r)$, falls diese noch nicht als Sollwerte vorliegen, als unbekannte Parameter in das folgende Gleichungssystem eingeführt.

$$P_f(t_r) = \sqrt{(x_r(t_r) - x^s(t^s))^2 + (y_r(t_r) - y^s(t^s))^2 + (z_r(t_r) - z^s(t^s))^2} + c\Delta t \quad \text{mit } f = 1, 2, 3 \quad (\text{B.2})$$

Die Größe $c\Delta t$ ist abhängig von den Wegverzögerungen durch die Refraktion, dem relativistischen Effekt, dem Unterschied zwischen Satelliten- und GPS-Zeit und dem Uhrfehler der Empfängeruhr bezüglich GPS-Zeit.

$$\begin{aligned} c\Delta t &= \Delta r_{trop} + \Delta r_{ion} + c\Delta t_{rel} + c\Delta t_{r_GPS} + c\Delta t_{GPS}^s \\ f = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad \Delta r_{3ion} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

TUBGPS - GPS Postprocessing Software

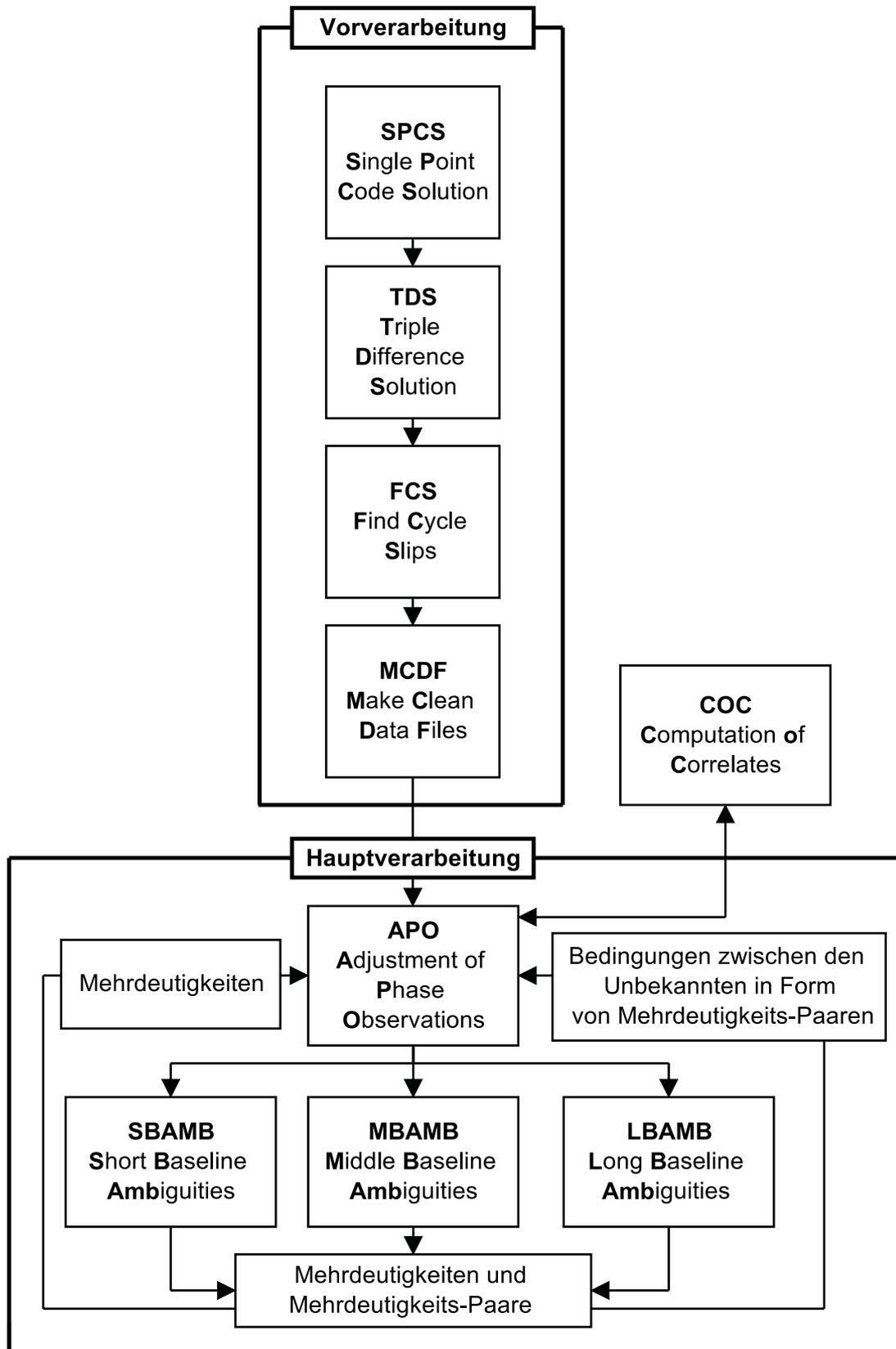


Abb. B.1: Strukturdiagramm TUBGPS

Δt_{r_GPS} : Uhrunterschied zwischen Empfängeruhr und GPS-Zeit
 Δt_{rel} : relativistischer Effekt
 Δt_{GPS}^s : Uhrkorrektur für Satellitenzeit zu GPS-Zeit

Die Zeitkorrektur auf Grund relativistischer Effekte wird mit der Formel

$$\Delta t_{rel} = 2\{x^s(t^s) \cdot v_x^s(t^s) + y^s(t^s) \cdot v_y^s(t^s) + z^s(t^s) \cdot v_z^s(t^s)\} \quad (B.4)$$

berechnet. Die Refraktion in der Troposphäre wird als Produkt der Zenitrefraktion und einer Mappingfunktion modelliert. Für die meteorologischen Daten werden Standardwerte für den Druck P , den Partialdruck des Wasserdampfes e und die Temperatur T in Stationshöhe verwendet. Die Zenitkorrektur wird nach dem Modell von Saastamoinen berechnet.

$$\Delta r_z = 0.002282P + \left(0.000529 + \frac{2.902}{T}\right) e \quad (B.5)$$

Als Mappingfunktion wird die CfA-2.2 Mappingfunktion nach Davis eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 S(E_r^s) &= \frac{1}{\sin E_r^s + \frac{A}{\tan E_r^s + \frac{B}{\sin E_r^s + C}}} \\
 A &= 2.723 \cdot 10^{-4}(1 + 2.64 \cdot 10^{-4}P - 6.4 \cdot 10^{-4}e + 1.337 \cdot 10^{-2}T - 0.727) \\
 B &= 4.703 \cdot 10^{-4}(1 + 2.832 \cdot 10^{-5}P + 6.799 \cdot 10^{-4} * e + 7.563 \cdot 10^{-3}T - 0.731) \\
 C &= -0.009
 \end{aligned} \quad (B.6)$$

Bei der Ausgleichung der Codemessungen P_1 oder P_2 wird die ionosphärische Wegverzögerung durch eine JPL-Mappingfunktion [Sardon, E. et al. (1994) mit Verweis auf [Sovers,O.J., 1991]] (Gleichung (B.7)) und einen einfachen Ansatz bezüglich des vertikalen Elektronengehaltes (Gleichung (B.8)) modelliert. Die Mappingfunktion ist gültig für eine sphärische Erde mit dem Radius r_r , welcher dem Abstand zur Station entspricht.

$$S(E_r^s) = \frac{1}{H_2 - H_1} \left\{ \left(\sqrt{(r_r \sin(E_r^s))^2 + 2r_r H_2 + H_2^2} - \sqrt{(r_r \sin(E_r^s))^2 + 2r_r H_1 + H_1^2} \right) \right\} \quad (B.7)$$

$$VEC_r^s = \frac{K}{f^2} E \quad (B.8)$$

H_1 entspricht der unteren und H_2 der oberen Ecke der Ionosphäre. Allerdings hängt die Mappingfunktion hauptsächlich von der mittleren Höhe H_m der Ionosphäre ab, die hier mit dem Wert $H_m=365$ km berücksichtigt wird. Die Zahl der freien Elektronen E variiert in Abhängigkeit von dem elfjährigen Sonnenzyklus und der Ortszeit zwischen $1 \cdot 10^{17} m^{-2}$ und $4 \cdot 10^{17} m^{-2}$.

B.2. Dreifachdifferenzlösung

TRP (Triple Difference Solution)

Hier werden die GPS-Beobachtungsdaten von mindestens zwei simultan beobachteten Stationen, die broadcast-Bahnen der Satelliten und die Uhrkorrekturen, die mittels SPCS berechnet wurden, verwendet, um Dreifachdifferenzen der Phasenmessungen (Kapitel C.2) auf L_1 , L_2 oder L_3 zu bilden. Die Dreifachdifferenzen sind als Funktionen der Koordinatendifferenzen zur Basisstation $r = b$ darstellbar (Gleichung (B.9)), so dass in einer Ausgleichung verbesserte Koordinaten der Stationen bezogen auf die Basisstation berechnet werden können.

$$\begin{aligned}
 L_1 : \varphi_{1_{kb}}^{ij}(t_{m+1/m}) &= \frac{f_1}{c} \left\{ r_{kb}^{ij}(t_{m+1/m}) + \Delta r_{trop_{kb}}^{ij}(t_{m+1/m}) \right\} + ION_{kb}^{ij}(t_{m+1/m}) \\
 L_2 : \varphi_{2_{kb}}^{ij}(t_{m+1/m}) &= \frac{f_2}{c} \left\{ r_{kb}^{ij}(t_{m+1/m}) + \Delta r_{trop_{kb}}^{ij}(t_{m+1/m}) \right\} + \frac{1}{\alpha} ION_{kb}^{ij}(t_{m+1/m}) \\
 L_3 : \varphi_{3_{kb}}^{ij}(t_{m+1/m}) &= \frac{f_3}{c} \left\{ r_{kb}^{ij}(t_{m+1/m}) + \Delta r_{trop_{kb}}^{ij}(t_{m+1/m}) \right\} \\
 \text{mit} \quad r_{kb}^{ij}(t_{m+1/m}) &= f(\Delta x_{kb}, \Delta y_{kb}, \Delta z_{kb})
 \end{aligned} \quad (B.9)$$

Die Strecken müssen noch um die Refraktionsanteile und die Parameter des L_1 - bzw. L_2 -Antennen-phasenzentrums korrigiert werden. Die Troposphärenrefraktion wird mittels des a priori Modells (Kapitel B.7) berechnet.

$$\Delta r_{trop} = 0.2277 \cdot 10^{-3}P + e \left(0.00053 + \frac{2.985}{T}\right) S(E_r^s(t)) \quad (B.10)$$

$$\begin{aligned}
S(E_r^s(t)) &= \left\{ \sin^2(E_r^s(t)) + \frac{2}{R} \left(A + \frac{B}{\sin(E_r^s(t))} + \frac{C}{\sin^2(E_r^s(t))} \right) \cos^2(E_r^s(t)) \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
\text{mit } A &= 7.968 + 0.022(T[^\circ C] - 15^\circ C) \\
B &= -0.054 - 1.5 \cdot 10^{-4}(T[^\circ C] - 15^\circ C) \\
C &= -B^2 \\
R &= \text{Stationsradius}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Eine Korrektur der Ionosphäre erfolgt über eine JPL-Funktion, die aus einer Taylorreihenentwicklung der Standardfunktion des Single-Layer-Modells hervorgeht (Gleichung 2.61). Der vertikale Elektronengehalt wird mit dem einfachen Ansatz der Gleichung (B.8) berechnet.

$$S(E_r^s(t)) = \left\{ \sin^2(E_r^s(t)) + \frac{2 \cdot 350 \text{ km}}{r_r} (1 - \sin^2 E_r^s(t)) \right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{B.12}$$

Während des Ausgleichsprozesses analysiert TRP die Dreifachdifferenzen, wobei zwischen groben Fehlern und Phasensprüngen unterschieden wird. Ein grober Fehler, der in der Doppeldifferenz der Epoche $m + 1$ enthalten ist, tritt in den Dreifachdifferenzen in der Differenzepoche $m + 1/m$ und zusätzlich mit umgekehrten Vorzeichen in der Differenzepoche $m + 2/m + 1$ auf. Ein Phasensprung in einer Doppeldifferenz aus der Epoche $m + 1$ transformiert sich durch die Epochendifferenzbildung nur in einen groben Fehler der Dreifachdifferenz zur Epoche $m + 1/m$.

Nach der Ausgleichung werden die Originalphasendifferenzen um den geometrischen Anteil reduziert, so dass Residuen $\hat{\varphi}_{f_r}^s(t)$ ($f = 1, 2$) vorliegen, die nur noch als Funktionen der Satelliten- und Empfängeruhren, der ionosphärischen Refraktion, der Phasenlagen $\varphi_r(t_0)$ und $\varphi_s(t_0)$ und der Mehrdeutigkeiten aufgefasst werden können.

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{1_r}^s(t_m) &= \varphi_{1_r}^s(t_m) - \frac{f_1}{c} \{ r_r^s(t_m) + \Delta r_{trop_r^s}(t_m) \} \\
&= \varphi_r(t_0) - \varphi^s(t_0) + ION_r^s(t_m) + R_r(t_m) - S^s(t_m) + I_{1_r}^s
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{2_r}^s(t_m) &= \varphi_{2_r}^s(t_m) - \frac{f_2}{c} \{ r_r^s(t_m) + \Delta r_{trop_r^s}(t_m) \} \\
&= \alpha(\varphi_r(t_0) - \varphi^s(t_0)) + \frac{1}{\alpha} ION_r^s(t_m) + \alpha(R_r(t_m) - S^s(t_m)) + I_{2_r}^s
\end{aligned} \tag{B.14}$$

B.3. Phasensprungsuche

FCS (Find Cycle Slips)

Zur Aufdeckung von Phasensprüngen untersucht FCS die Residuen $\hat{\varphi}_{f_r}^s(t)$ ($f = 1, 2$) der Dreifachdifferenzlösung. Bildet man aus diesen Werten Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Epochen, kommt es zur Elimination der Mehrdeutigkeiten und der Phasenlagen der Uhren. Es entstehen Größen, die nur noch von den Epochendifferenzen der Parameter R_r , S^s , ION_r^s und eventuell vorhandener Phasensprünge $C_{f_r}^s$ ($f = 1, 2$) abhängen.

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{1_r}^s(t_{m+1/m}) &= \hat{\varphi}_{1_r}^s(t_{m+1}) - \hat{\varphi}_{1_r}^s(t_m) \\
&= ION_r^s(t_{m+1/m}) + R_r(t_{m+1/m}) - S^s(t_{m+1/m}) + C_{1_r}^s(t_{m+1/m})
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{2_r}^s(t_{m+1/m}) &= \hat{\varphi}_{2_r}^s(t_{m+1}) - \hat{\varphi}_{2_r}^s(t_m) \\
&= \frac{1}{\alpha} ION_r^s(t_{m+1/m}) + \alpha R_r(t_{m+1/m}) - \alpha S^s(t_{m+1/m}) + C_{2_r}^s(t_{m+1/m})
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Für die Ermittlung von Näherungswerten großer Phasensprünge, sucht FCS Epochendifferenzen $\hat{\varphi}_{f_r}^s(t_{m+1/m})$ ($f = 1, 2$) heraus, deren Größe den Wert von 1000 cycle überschreitet. Die Phasensprünge ergeben sich dann näherungsweise zu:

$$|\hat{\varphi}_{f_r}^s(t_{m+1/m})| > 1000 \text{ cycle} : \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
C_{1_r}^s(t_{m+1/m}) &= \frac{1}{\alpha} \hat{\varphi}_{2_r}^s(t_{m+1/m}) - \hat{\varphi}_{1_r}^s(t_{m+1/m}) \\
C_{2_r}^s(t_{m+1/m}) &= \alpha \hat{\varphi}_{1_r}^s(t_{m+1/m}) - \hat{\varphi}_{2_r}^s(t_{m+1/m})
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Zusätzlich zu den gebildeten Epochendifferenzen werden alle Phasensprünge $C_{f_r}^s(t_{m+1/m})$ ($f = 1, 2$) als Beobachtungen eingeführt. Ihr Wert entspricht entweder dem oben ermittelten Näherungswert oder wird auf Null

gesetzt. Aus einer Ausgleichung ergeben sich alle Parameter der Beobachtungsgleichungen (B.15) und (B.16), wobei schlechte Beobachtungen basislinienorientiert identifiziert und eliminiert werden. Als Ergebnis liegt eine Datei mit Phasensprüngen und eliminierten Beobachtungen vor. Das Programm FCS bietet dem Nutzer neben dieser automatisch ablaufenden Phasensprungsuche auch die Möglichkeit, zusätzliche Analysen der Daten interaktiv zu starten. So können Untersuchungen der Linearkombinationen L_3 und L_4 durchgeführt und jegliche andere Differenzen der Beobachtungen gebildet werden, was sich besonders bei kritischen Datensätzen anbietet.

MCDF (Make Clean Data Files)

MCDF liest für jede einzelne Station die Originalphasenmessungen, die broadcast-Ephemeriden und die Ergebnisdatei aus FCS ein. Der ganzzahlige Anteil der Phasendifferenz jeder ersten Messung zu einem Satelliten wird von allen weiteren Messungen abgezogen, um damit den Anfangszählerstand auf Null zurückzusetzen. Anschließend werden die Beobachtungen um die Phasensprünge korrigiert und in einem neuen File abgespeichert.

$$\varphi_{f_r^s}(t_i) = \varphi_{f_r^s}(t_0) - INT \{ \varphi_{f_r^s}(t_0) \} + \sum_{j=0}^i C_{f_r^s}(t_j) \quad f = 1, 2 \quad (\text{B.19})$$

Für jede Messung berechnet MCDF Elevation und Azimut des Satelliten sowie magnetische Breite und Winkeldistanz zur Sonne des ionosphärischen Punktes und überträgt diese Werte ins gesäuberte Datenfile.

Azimutberechnung

Das Azimut α des ionosphärischen Punktes lässt sich aus seinen lokalen Koordinaten berechnen, die als Funktionen der Strecke r_r^s , dem ellipsoidischen Zenitwinkel ζ und des ellipsoidischen Azimutes α darstellbar sind.

$$\begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{bmatrix}^T [\vec{e}_i]_{lok.Sys} = r_r^s \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \zeta \\ \sin \alpha \sin \zeta \\ \cos \zeta \end{bmatrix}^T [\vec{e}_i]_{lok.Sys} \quad (\text{B.20})$$

Die Koordinatenunterschiede zwischen Empfänger und Satellit bezüglich des globalen Systems müssen ins lokale, ellipsoidische System überführt werden.

$$\vec{r}_r^s = \vec{r}_r - \vec{r}^s = \begin{bmatrix} \Delta x_r^s \\ \Delta y_r^s \\ \Delta z_r^s \end{bmatrix}^T [\vec{e}_i]_{gl.Sys} \quad (\text{B.21})$$

Die Transformationsformel für den Übergang vom globalen ins lokale, ellipsoidische System lautet:

$$[\vec{e}_i]_{lok.Sys} = \begin{bmatrix} 1 \\ S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ R(90^\circ - \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ R(\lambda) \end{bmatrix} [\vec{e}_i]_{gl.Sys} \quad (\text{B.22})$$

Die lokalen Komponenten x_l, y_l, z_l lassen sich demzufolge aus

$$\begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \lambda \sin \phi & -\sin \lambda & \cos \phi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \lambda & \sin \lambda \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_r^s \\ \Delta y_r^s \\ \Delta z_r^s \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

berechnen.

Elevationsberechnung

Der ellipsoidische Zenitwinkel ζ entspricht dem Winkel zwischen der Ellipsoidnormalen \vec{n}_e im Punkt r und dem Differenzvektor \vec{r}_r^s , so dass die Elevation durch Bildung des Skalarproduktes berechnet werden kann.

$$\sin E_r^s = \cos \zeta = \vec{n}_e \cdot \frac{1}{r_r^s} \vec{r}_r^s = \begin{bmatrix} \cos \phi_r \cos \lambda_r \\ \cos \phi_r \sin \lambda_r \\ \sin \phi_r \end{bmatrix}^T [\vec{e}_i]_{gl.Sys} \cdot \frac{1}{r_r^s} \begin{bmatrix} \Delta x_r^s \\ \Delta y_r^s \\ \Delta z_r^s \end{bmatrix}^T [\vec{e}_i]_{gl.Sys} \quad (\text{B.24})$$

Berechnung der globalen Koordinaten des ionosphärischen Punktes IP

$$\vec{r}_{IP} = \begin{bmatrix} x_{IP} \\ y_{IP} \\ z_{IP} \end{bmatrix}^T [\vec{e}_i]_{glob.Sys.} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}^T [\vec{e}_i]_{glob.Sys.} + \frac{r_{IP}^s}{r_r^s} \begin{bmatrix} \Delta x_r^s \\ \Delta y_r^s \\ \Delta z_r^s \end{bmatrix}^T [\vec{e}_i]_{glob.Sys.} \quad (\text{B.25})$$

Berechnung der Winkeldistanz zur Sonne

Die Winkeldistanz Λ_r^s ergibt sich aus dem Skalarprodukt zwischen dem Vektor zur Sonne und dem Positionsvektor des ionosphärischen Punktes.

$$\cos \Lambda_r^s = \frac{1}{r_{Sonne}} \vec{r}_{Sonne} \bullet \frac{1}{r_{IP}} \vec{r}_{IP} \quad (\text{B.26})$$

Berechnung der magnetischen Breite

Die magnetische Breite des ionosphärischen Punktes kann über den Seitenkosinussatz im sphärischen Dreieck ermittelt werden.

$$\sin \phi_m = \sin \phi_{Sonne} \sin \phi_{IP} + \cos \phi_{Sonne} \cos \phi_{IP} \cos(\lambda_{IP} - \lambda_{Sonne}) \quad (\text{B.27})$$

B.4. Float- und Fixed-Lösung

APO (Adjustment of Phase Observations)

Das Hauptprogramm APO gleicht die sauberen Daten von mindestens zwei Stationen auf Grundlage der parametrisierten Beobachtungsgleichungen (B.28) und (B.29) aus.

$$L_1: \quad \varphi_{1r}^s(t) = \frac{f_1}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} + H_r^s(t) + R_r(t) - S^s(t) + F_r^s \quad (\text{B.28})$$

$$L_2: \quad \varphi_{2r}^s(t) = \frac{f_2}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} + \frac{H_r^s(t)}{\alpha} + \alpha R_r(t) - \alpha S^s(t) \quad (\text{B.29})$$

Ergebnis der Berechnungen sind Stationskoordinaten und/oder Bahnverbesserungen Ω , u und i für broadcast-Ephemeriden, Uhrdifferenzen $S^s(t)$ und $R_r(t)$, Zenitrefractionen Δr_{z_r} sowie Werte für die Hilfsunbekannten $H_r^s(t)$ und F_r^s . Somit liegen die Ergebnisse einer mehrdeutigkeitsfreien Lösung vor (float-Lösung). Eine fixed-Lösung kann erst erzeugt werden, wenn aus den Werten $H_r^s(t)$ und F_r^s Doppeldifferenzen der Mehrdeutigkeiten bestimmt wurden. In diesem Fall werden alle F_r^s Werte festgehalten, für die die Mehrdeutigkeiten gelöst werden konnten, um die restlichen Parameter in einer neuen Ausgleichung erneut zu berechnen.

Aufbau des Normalgleichungssystems

Durch die große Anzahl der zeitabhängigen Unbekannten, die nur in einer Epoche auftreten, ist die vollständige Normalgleichungsmatrix nur schwach besetzt. Die grauen Bereiche der Abbildung B.2 geben die von Null verschiedenen Elemente der Normalgleichungsmatrix wieder.

Bei der Lösung des Normalgleichungssystems

$$A^T P A x = A^T P l \quad (\text{B.30})$$

kann mit der QR-Faktorisierung gearbeitet werden, wobei Q eine orthonormale Matrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist. Geht man davon aus, dass die Gewichtsmatrix P gleich der Einheitsmatrix E ist, ergibt sich aus

$$A^T A x = A^T l \quad \text{und} \quad A_{l \times u} = Q_{u \times u} \begin{pmatrix} R_{l \times l} \\ 0_{(l-u) \times u} \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

das neue Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R_{l \times l} \\ 0_{(l-u) \times u} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_{l \times l} \\ 0_{(l-u) \times u} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} R_{l \times l} \\ 0_{(l-u) \times u} \end{pmatrix}^T Q^T l \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{pmatrix} R_{l \times l} \\ 0_{(l-u) \times u} \end{pmatrix} x = Q^T l \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{pmatrix} R_{l \times l} \\ 0_{(l-u) \times u} \end{pmatrix} x = d \quad (\text{B.34})$$

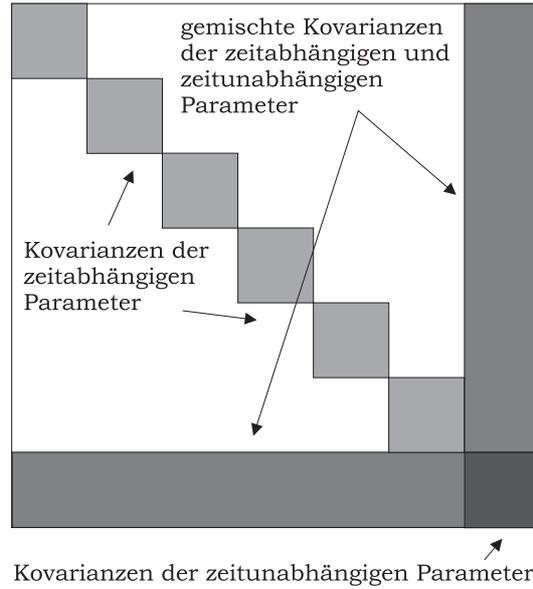


Abb. B.2: Normalgleichungsmatrix

Die QR-Zerlegung wird in der Software mittels der Givenstransformation [Montenbruck, 2000] durchgeführt. Ein Vorteil, den dieses Vorgehen mit sich bringt, ist die Einsparung von Speicherplatz und die Verringerung von Rechenzeiten, da die Normalgleichungsmatrix selbst nicht benötigt wird. Dadurch dass dieses Verfahren auf einer Transformation Zeile für Zeile basiert, muss nicht die gesamte Matrix A aufgestellt, sondern nur die Zeile, in denen die Ableitungen der Unbekannten nach der aktuellen Beobachtung stehen, erzeugt werden. Die Dimension der Matrix R kann verkleinert werden, da die zeitabhängigen Parameter nur in einer Epoche auftauchen. Die dazugehörigen, transformierten Elemente der Matrix R werden in einer Datei gespeichert, aber nicht mehr für die Bildung weiterer Elemente von R benötigt. Wurden alle Beobachtungen zu allen Epochen verarbeitet, werden zunächst die zeitunabhängigen Parameter durch Rücksubstitution bestimmt. Erst danach werden die Elemente für die zeitabhängigen Parameter eingelesen, so dass epochenweise die Empfänger- und Satellitenuhren sowie die Werte $H_r^s(t)$ berechnet werden können.

B.5. Bestimmung der Mehrdeutigkeiten

SBAMB (Short Baseline Ambiguity), MBAMB (Middle Baseline Ambiguity) und LBAMB (Long Baseline Ambiguity)

Diese Softwaremodule berechnen aus den $H_r^s(t)$ - und F_r^s - Werten Doppeldifferenzen der Mehrdeutigkeiten. Je nach Länge der Basislinien kommen unterschiedliche Algorithmen zur Modellierung der Ionosphäre zum Einsatz, um aus den $H_r^s(t)$ - Werten die Hilfsunbekannten Q_{1r}^s und Q_{2r}^s zu extrahieren (Kapitel 2.5.1).

Algorithmus bei kurzen Basislinien (SBAMB)

$$\begin{aligned} \alpha R_{2rb}^{sa} &= (H_r^s(t_k) - H_b^s(t_k)) - (H_r^a(t_k) - H_b^a(t_k)) \\ &= \alpha Q_{2rb}^s - \alpha Q_{2rb}^a \end{aligned}$$

Algorithmus bei mittleren Basislinien (MBAMB)

$$\begin{aligned} \alpha R_{2rb}^{sa} &= (H_r^s(t_k) - H_b^s(t_j)) - (H_r^a(t_l) - H_b^a(t_m)) \\ &= \alpha Q_{2rb}^s - \alpha Q_{2rb}^a \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Algorithmus bei langen Basislinien (LBAMB)

$$\begin{aligned} \frac{H_r^s(t_l)}{S(E_r^s(t_l))} - \frac{H_b^s(t_k)}{S(E_b^s(t_k))} &= \alpha \left(\left(\frac{1}{S(E_r^s(t_l))} - \frac{1}{S(E_b^s(t_k))} \right) Q_{2b}^s + \frac{Q_{2rb}^s}{S(E_r^s(t_k))} \right) \\ &\quad + \beta \left\{ VEC(\phi_{m_r}^s, \lambda_r^s, t) - VEC(\phi_{m_b}^s, \lambda_b^s, t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Neben den obigen Gleichungen liefern auch die Doppeldifferenzen der F_r^s -Werte Informationen über die Mehrdeutigkeiten:

$$\begin{aligned} (F_r^s - F_b^s) - (F_r^a - F_b^a) &= Q_{1_{rb}}^{sa} - \alpha Q_{2_{rb}}^{sa} \\ &= R_{1_{rs}}^{sa} - \alpha R_{2_{rb}}^{sa} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Aus den reellen Zahlen $R_{1_{rs}}^{sa}$ und $R_{2_{rb}}^{sa}$ werden ganzzahlige Werte $I_{1_{rs}}^{sa}$ und $I_{2_{rb}}^{sa}$ gebildet, sobald diese in den vorgeschriebenen Konfidenzintervallen liegen (Kapitel 2.5.2). Ergebnisse der Programme sind die Mehrdeutigkeiten sowie L_1/L_2 -Mehrdeutigkeits-Paare.

B.6. Bestimmung der Korrelaten

COC (Computation of Correlates)

Die unbekannt Parameter der Beobachtungsgleichungen Δx gehen in APO aus einer vermittelnden Ausgleichung mit zusätzlichen Beobachtungsgleichungen, die aus den Bedingungsgleichungen resultieren, hervor. Zur Berechnung der Korrelaten dient das folgende Gleichungssystem, welches die Grundlage des Programmes COC bildet.

$$B\lambda = A^T P l - A^T P A \Delta x = b \quad (\text{B.38})$$

APO stellt B so auf, als ob Bedingungsgleichungen vorliegen würden, und übergibt die resultierenden Nicht-nullmatrixelemente mit ihren Positionen an COC. Zur Berechnung der Spaltenmatrix b werden nur Teile der Matrix $A^T P A$ benötigt, die ebenfalls aus APO übernommen werden. Das Gleichungssystem (B.38) wird in COC nach dem Eliminationsverfahren von Gauss zerlegt und gelöst.

B.7. Refraktion in der Troposphäre

In der Troposphäre, die sich als unterer Bereich der Atmosphäre von der Erdoberfläche bis zu einer Höhe von etwa 15 km erstreckt, vollzieht sich das Wettergeschehen. Durch ihre Schichtung bewirkt sie bei der Wellenausbreitung eine Brechung der Welle. Frequenzen oberhalb von 10 GHz erfahren zusätzlich eine atmosphärische Dämpfung. Die Temperatur nimmt mit zunehmender Höhe ab und erreicht an der Obergrenze der Troposphäre, der Tropopause, abrupt einen Zustand statischer Stabilität. Die Troposphäre ist Teil der neutralen Atmosphäre, d.h. es erfolgt keine Ionisation der Gase in der Luft. Sie ist für die bei den Satellitenortungssystemen verwendeten Frequenzbereiche von etwa 300 MHz bis zu etwa 15 GHz ein nichtdispersives Medium, so dass $\Delta r_{trop_r^s}(t)$ für beide GPS-Frequenzen gleich ist. Bis in eine Höhe von ca. 50 km schließt sich die Stratosphäre an, die durch eine allmähliche Temperaturzunahme auf Grund der Absorption der UV-Strahlung charakterisiert wird. An ihrer Grenze, der Stratopause, herrschen Temperaturen von ca. 0 °C.

Die Wegverzögerung $\Delta r_{trop_r^s}(t)$

Um die durch die Brechung hervorgerufene Wegverzögerung $\Delta r_{trop_r^s}(t)$ zu bestimmen, muss man zunächst den Brechungsindex n_{trop} modellieren.

$$N_{trop} = 10^6 \cdot (n_{trop} - 1) \quad (\text{B.39})$$

In Bodennähe kann die Brechzahl N_{trop} als Funktion meteorologischer Parameter mittels der empirischen Formel (B.40) beschrieben werden.

$$N_{trop} = K_1 \frac{P}{T} + K_2 \frac{e}{T} + K_3 \frac{e}{T^2}, \quad (\text{B.40})$$

- P : Luftdruck in mbar
 e : Partialdruck des Wasserdampfes in mbar
 T : Temperatur in Kelvin

Die Tabelle B.1 gibt einen Überblick über die Werte für die Konstanten K_1 , K_2 und K_3 . Separiert man den trockenen (d für (engl.) dry) vom feuchten Anteil (w für (engl.) wet), erhält man

$$N_{trop_d} = K_1 \frac{P}{T} \quad \text{und} \quad N_{trop_w} = K_2 \frac{e}{T} + K_3 \frac{e}{T^2}, \quad (\text{B.41})$$

Modell	Jahr	$K_1 \left[\frac{K}{mbar} \right]$	$K_2 \left[\frac{K}{mbar} \right]$	$K_3 \left[\frac{K^2}{mbar} \right]$
Essen und Froome	1951	77.640	64.68	$3.718 \cdot 10^5$
Smith und Weintraub	1953	77.600	72.00	$3.750 \cdot 10^5$
Bean und Dutton	1966	77.607	71.63	$3.747 \cdot 10^5$
Thayer	1976	77.604	64.79	$3.776 \cdot 10^5$

Tabelle B.1: Modellkonstanten K_1, K_2 und K_3

wobei über 90 % der troposphärischen Refraktion durch den trockenen Anteil hervorgerufen werden. Die Wegverzögerung in der Troposphäre $\Delta r_{trop_r^s}(t)$ ergibt sich damit laut Gleichung (2.28) zu:

$$\Delta r_{trop_r^s}(t) = 10^{-6} \int_R^{h_d} N_{trop_d} dr + 10^{-6} \int_R^{h_w} N_{trop_w} dr. \quad (B.42)$$

h_d und h_w : Höhen für den trockenen bzw. feuchten Anteil
 R : mittlerer Erdradius

Um die Elevationsabhängigkeit der troposphärischen Refraktion zu zeigen, zerlegt man $\Delta r_{trop_r^s}(t)$ in die Mappingfunktion $S(E_r^s(t))$ und den Anteil bezogen auf die Zenitrichtung $\Delta r_z(t)$.

$$\Delta r_{trop_r^s}(t) = S(E_r^s(t)) \Delta r_z(t). \quad (B.43)$$

Nach [Rothacher, 1992] sollte man für den trockenen und den feuchten Anteil jeweils unterschiedliche Mappingfunktionen verwenden, insofern man mit Elevationen $< 20^\circ$ arbeitet.

$$\Delta r_{trop_r^s}(t) = S_d(E_r^s(t)) \Delta r_{zd}(t) + S_w(E_r^s(t)) \Delta r_{zw}(t) \quad (B.44)$$

Für die Berechnung von $\Delta r_{trop_r^s}(t)$ bei der Einzelpunkt-Code-Lösung wird in der Software TUBGPS auf das Modell nach Saastamoinen mit der CfA-2.2 Mappingfunktion [Davis et al., 1985] zurückgegriffen (Anhang B.1). Bei der Hauptverarbeitung besteht die Möglichkeit, mit verschiedenen Troposphärenmodellen zu arbeiten: Modell nach Cui und Baby [Ullner, 2001] (Berechnung des trockenen Anteils nach [Cui, 2000], Ermittlung des feuchten Anteils nach [Baby et al., 1988] und Verwendung der einfachsten Mappingfunktion $S(E_r^s(t)) = 1/\sin(E_r^s(t))$), Modell nach Saastamoinen [Saastamoinen, 1973], vereinfachtes Modell nach Hopfield [Hopfield, 1971], modifiziertes Hopfield-Modell nach Goad und Goodman [Goad und Goodman, 1974]).

A Priori Modell zur Berechnung der troposphärischen Refraktion

Verwendet man keines der oben genannten Troposphärenmodelle, so kann mit Hilfe von meteorologischen Daten und einem a priori Modell die Zenitrefraktion modelliert und als Unbekannte in die Ausgleichung eingeführt werden. Das in der Software TUBGPS zum Einsatz kommende a priori Modell soll an dieser Stelle näher erläutert werden.

Die Konstanten von Smith und Weintraub bilden die Grundlage für die Berechnung der Brechzahlen N_{trop_d} und N_{trop_w} :

$$N_{trop_d} = 77.6 \left[\frac{K}{mbar} \right] \cdot \frac{P}{T} \quad \text{und} \quad N_{trop_w} = 72.0 \left[\frac{K}{mbar} \right] \frac{e}{T} + 3.75 \cdot 10^5 \left[\frac{K^2}{mbar} \right] \frac{e}{T^2} \quad (B.45)$$

Zur Extrapolation der gemessenen, meteorologischen Bodendaten dient das Polytropenmodell mit seinen Koeffizienten α, β und γ . Nach Ausführung der Integration (Gleichung (B.42)) ergibt sich somit $\Delta r_{trop_r^s}(t)$ aus dem Produkt der Mappingfunktion (Gleichung B.47) und der Summe des trockenen Anteils Δr_{zd} (Gleichung B.48) und des feuchten Anteils Δr_{zw} (Gleichung B.49).

$$\Delta r_{trop_r^s}(t) = \{\Delta r_{zd} + \Delta r_{zw}\} S(E_r^s(t)) \quad (B.46)$$

Der Mappingfunktion liegt eine Reihenentwicklung der Formel (2.61), angewendet auf die Troposphäre, zu Grunde.

$$S(E_r^s(t)) = \left\{ \sin^2(E_r^s(t)) + \frac{2}{R} \left(A + \frac{B}{\sin(E_r^s(t))} + \frac{C}{\sin^2(E_r^s(t))} \right) \cos^2(E_r^s(t)) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 7.968 + 0.022(T[^\circ C] - 15^\circ C) \\ B &= -0.054 - 1.5 \cdot 10^{-4}(T[^\circ C] - 15^\circ C) \\ C &= -B^2 \\ R &= \text{Stationsradius} \end{aligned} \quad (B.47)$$

Die Berechnung des trockenen Anteils der Zenitrefraktion erfolgt über die Formel

$$\Delta r_{zd} = 10^{-6} \cdot \frac{77.6}{\alpha\beta} \left[\frac{K}{mbar} \right] = 0.2277 \left[\frac{cm}{mbar} \right] \cdot P \quad (\text{B.48})$$

und der feuchte Anteil ist eine Funktion des aktuellen Partialdruckes des Wasserdampfes und der Temperatur.

$$\Delta r_{zw} = 10^{-6} \cdot e \left(\frac{72.0}{\alpha\gamma} \left[\frac{K}{mbar} \right] + \frac{3.75 \cdot 10^5}{\alpha(\gamma-1)} \left[\frac{K^2}{mbar} \right] \cdot \frac{1}{T} \right) \quad (\text{B.49})$$

$$= e \left(0.053 \left[\frac{cm}{mbar} \right] + 298.516 \left[\frac{Kcm}{mbar} \right] \cdot \frac{1}{T} \right) \quad (\text{B.50})$$

- α : Temperaturgradient des Polytropenmodells mit $\alpha = 6.8K/km$
- β : Exponent im Polytropenmodell bezüglich des Verhältnisses zwischen Luftdruck und Temperatur mit $\beta = 5.012$
- γ : Exponent im Polytropenmodell bezüglich des Verhältnisses zwischen Luftdruck und Partialdruck des Wasserdampfes $\gamma = 4 \cdot \beta$

C. Linearkombinationen und Differenzbildungen

C.1. Linearkombinationen der Phasenbeobachtungen

Die Phasenmessungen auf L_1 und L_2 und/oder die Codemessungen P_1 (Codemessung auf L_1) und P_2 (Codemessung auf L_2) können in unterschiedlicher Art und Weise miteinander kombiniert werden. Die dadurch entstehenden Pseudosignale besitzen besondere Eigenschaften, die die Auswertung der Phasenmessungen bzw. die Datenanalyse vereinfachen:

- Sie sind entweder von Uhrfehlern, der ionosphärischen Refraktion oder der Entfernung unabhängig.
- Sie weisen entweder geringeres Messrauschen oder größere Wellenlänge auf.

Folgende Notationen werden verwendet, um die Produkte aus Phasenmessungen und dazugehörigen Wellenlängen zu kennzeichnen:

$$\psi_1 = \varphi_1 \cdot \lambda_1 \quad \text{bzw.} \quad \psi_2 = \varphi_2 \cdot \lambda_2 \quad (\text{C.1})$$

Vernachlässigt man sämtliche Fehleranteile, so wären ψ_1 bzw. ψ_2 Funktionen der Entfernung und des Produktes aus der Wellenlänge und der Mehrdeutigkeit.

$$\psi_1 = r + \lambda_1 I_1 \quad \text{bzw.} \quad \psi_2 = r + \lambda_2 I_2 \quad (\text{C.2})$$

Generell können folgende Linearkombination gebildet werden, wobei die Werte der Variablen a_1 , a_2 , c_1 und c_2 dem jeweiligen Zweck entsprechen müssen:

$$\psi_{LK} = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 \quad (\text{C.3})$$

$$P_{LK} = c_1 P_1 + c_2 P_2 \quad (\text{C.4})$$

$$W_{LK} = \psi_{LK} - P_{LK} \quad (\text{C.5})$$

Für die Berechnung der Phasen der Linearkombinationen gilt:

$$\varphi_{LK} = b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 \quad \text{mit} \quad b_1, b_2 = f(a_1, a_2) \quad (\text{C.6})$$

Die gleichen mathematischen Zusammenhänge gelten auch für die Frequenzen der Linearkombinationen [Seeber, 1993]:

$$f_{LK} = b_1 f_1 + b_2 f_2 \quad (\text{C.7})$$

Im Weiteren werden nur die Linearkombinationen vorgestellt, die in der Software TUBGPS verwendet und die zur Erläuterung des QIF-Verfahrens (Kapitel H) benötigt werden. Grundlage dafür bilden die in Kapitel 2.3.1 hergeleiteten Beobachtungsgleichungen der Phasenmessungen.

$$L_1 : \quad \varphi_{1r}^s(t) = \varphi_r(t_0) - \varphi^s(t_0) + \frac{f_1}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} + ION_r^s(t) + I_{1r}^s + R_r(t) - S^s(t) \quad (\text{C.8})$$

$$L_2 : \quad \varphi_{2r}^s(t) = \alpha \varphi_r(t_0) - \alpha \varphi^s(t_0) + \frac{f_2}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} + \frac{ION_r^s(t)}{\alpha} + I_{2r}^s + \alpha R_r(t) - \alpha S^s(t) \quad (\text{C.9})$$

Die Ionosphärenfreie Linearkombination

$$\psi_3 = \frac{1}{(f_1^2 - f_2^2)} (f_1^2 \psi_1 - f_2^2 \psi_2) = \frac{1}{1 - \alpha^2} \{\psi_1 - \alpha^2 \psi_2\} \quad (\text{C.10})$$

Angewendet auf die Phasen ergeben sich die künstlichen Beobachtungen auf L_3 somit aus

$$\varphi_{3r}^s = \varphi_{1r}^s - \alpha \cdot \varphi_{2r}^s. \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \varphi_{3r}^s(t) = & (1 - \alpha^2) \varphi_r(t_0) - (1 - \alpha^2) \varphi^s(t_0) + (1 - \alpha^2) R_r(t) - (1 - \alpha^2) S^s(t) \\ & + I_{1r}^s - \alpha I_{2r}^s + \frac{f_1}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} - \alpha \frac{f_2}{c} \{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} \\ & + ION_r^s(t) - ION_r^s(t) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Bei der Bildung der Linearkombination ψ_3 fällt damit die Verzögerung in der Ionosphäre heraus und die endgültige Beobachtungsgleichung $\varphi_{3r}^s(t)$ lautet:

$$\begin{aligned}\varphi_{3r}^s(t) &= (1 - \alpha^2)\varphi_r(t_0) - (1 - \alpha^2)\varphi^s(t_0) + (1 - \alpha^2)R_r(t) - (1 - \alpha^2)S^s(t) + I_{1r}^s - \alpha I_{2r}^s \\ &\quad + \frac{1}{c}(f_1 - \alpha f_2)\{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\}\end{aligned}\quad (C.13)$$

$$\begin{aligned}\text{Frequenz der Linearkombination } \psi_3: & \quad f_3 = f_1 - \alpha f_2 \\ \text{Wellenlänge der Linearkombination } \psi_3: & \quad \lambda_3 = \frac{c}{f_1 - \alpha f_2} \approx 0.48 \text{ m}\end{aligned}$$

Diese Linearkombination wird in einigen Verfahren zur Mehrdeutigkeitslösung eingesetzt. Zuerst bestimmt man die Wide-Lane-Mehrdeutigkeit I_{5r}^s (Kapitel C.1) und berechnet dann mittels ψ_3 den Wert für I_{1r}^s , so dass auch die Mehrdeutigkeit für L_2 gelöst werden kann. Dazu muss eine neue Zerlegung der Mehrdeutigkeit der ψ_3 Linearkombination vorgenommen werden. Unter Vernachlässigung sämtlicher Fehleranteile kann die Linearkombination in der Form

$$\psi_3 = r_r^s(t) + \lambda_3 \{I_{1r}^s - \alpha I_{2r}^s\} = r_r^s(t) + B_3 \quad (C.14)$$

ausgedrückt werden. B_3 stellt sich damit als Funktion der Wide-Lane-Mehrdeutigkeit I_{5r}^s und der L_1 -Mehrdeutigkeit dar. Ordnet man die Terme um, ergibt sich:

$$\begin{aligned}B_3 &= \frac{c}{f_1 - \alpha f_2} \{I_{1r}^s - \alpha I_{2r}^s\} \\ &= c \frac{f_2}{f_1^2 - f_2^2} I_{5r}^s + \frac{c}{f_1 + f_2} I_{1r}^s\end{aligned}\quad (C.15)$$

Der Term, der dabei mit der Mehrdeutigkeit I_{1r}^s multipliziert wird, ergibt die Wellenlänge λ_N .

$$\lambda_N = \frac{c}{f_1 + f_2} \approx 0.11 \text{ m} \quad (C.16)$$

Da λ_N sehr klein ist, bezeichnet man I_{1r}^s auch oft als Narrow-Lane-Mehrdeutigkeit.

Die geometriefreie Linearkombination

$$\psi_4 = \psi_1 - \psi_2 \quad (C.17)$$

Analog zu Gleichung (C.17) bildet man die Phasenbeobachtungen für ψ_4 mittels $\varphi_4 = \varphi_1 - \frac{1}{\alpha}\varphi_2$.

$$\begin{aligned}\varphi_{4r}^s(t) &= \varphi_r(t_0) - \frac{\alpha}{\alpha}\varphi_r(t_0) - \varphi^s(t_0) + \frac{\alpha}{\alpha}\varphi^s(t_0) + R_r(t) - \frac{\alpha}{\alpha}R_r(t) - S^s(t) + \frac{\alpha}{\alpha}S^s(t) \\ &\quad + I_{1r}^s - \frac{1}{\alpha}I_{2r}^s + \frac{f_1}{c}\{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} - \frac{\alpha f_1}{\alpha c}\{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} \\ &\quad + ION_r^s(t) - \frac{1}{\alpha^2}ION_r^s(t)\end{aligned}\quad (C.18)$$

Die endgültige Beobachtungsgleichung für die Phasendifferenz $\varphi_{4r}^s(t)$ ist damit unabhängig von der Entfernung r_r^s und der Refraktion in der Troposphäre.

$$\varphi_{4r}^s(t) = I_{1r}^s - \frac{1}{\alpha}I_{2r}^s + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)ION_r^s(t) \quad (C.19)$$

$$\begin{aligned}\text{Frequenz der Linearkombination } \psi_4: & \quad f_4 = f_1 - \frac{1}{\alpha}f_2 \\ \text{Wellenlänge der Linearkombination } \psi_4: & \quad \lambda_4 = \frac{c}{f_1 - \frac{1}{\alpha}f_2} = \infty\end{aligned}$$

Die Wide-Lane-Linearkombination

$$\psi_5 = \frac{1}{(f_1 - f_2)}(f_1\psi_1 - f_2\psi_2) = \frac{1}{1 - \alpha}\{\psi_1 - \alpha\psi_2\} \quad (C.20)$$

Die Phasenmessungen auf L_1 und L_2 werden durch einfache Differenzbildung $\varphi_5 = \varphi_1 - \varphi_2$ miteinander kombiniert. Die Beobachtungsgleichung für Phasenmessungen der Linearkombination ψ_5 ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\varphi_{5r}^s(t) &= (1 - \alpha)\varphi_r(t_0) - (1 - \alpha)\varphi^s(t_0) + (1 - \alpha)R_r(t) - (1 - \alpha)S^s(t) + I_{1r}^s - I_{2r}^s \\ &\quad + \frac{f_1 - f_2}{c}\{r_r^s(t) + \Delta r_{trop_r^s}(t)\} + (1 - \frac{1}{\alpha})ION_r^s(t)\end{aligned}\quad (C.21)$$

Die Mehrdeutigkeit $I_{5r}^s = I_{1r}^s - I_{2r}^s$ dieser Linearkombination wird als Wide-Lane-Mehrdeutigkeit bezeichnet und ergibt wieder einen ganzzahligen Wert.

$$\begin{aligned} \text{Frequenz der Linearkombination } \psi_5: & \quad f_5 = f_1 - f_2 \\ \text{Wellenlänge der Linearkombination } \psi_5: & \quad \lambda_5 = \frac{c}{f_1 - f_2} \approx 0.86 \text{ m} \end{aligned}$$

C.2. Differenzbildungen

Die Beobachtungsgleichungen enthalten neben den unbekanntem Koordinaten des Empfängers viele weitere Parameter, deren Anzahl durch Differenzbildung zwischen den Beobachtungen reduziert werden kann. Fehleinflüsse, die in gleicher Weise auf die Phasenbeobachtungen wirken, heben sich somit gegenseitig auf. Auf diese Weise vereinfacht sich die Analyse und Auswertung des Datenmaterials. Ausgehend von den Beobachtungsgleichungen des Kapitels 2.3.1 werden am Beispiel für die Phasenmessungen auf dem L_1 -Signal für die Stationen $r = k$ und $r = l$ und die Satelliten $s = i$ und $s = j$ nachfolgend die Differenzen gebildet, die in den Vorverarbeitungsprogrammen der Software TUBGPS benötigt werden. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird generell auf Differenzzeichen verzichtet. Allein die Anzahl der Indizes gibt wieder, um welche Art der Differenzen es sich handelt.

Typ 1: Differenzbildung zwischen Daten zweier Empfänger ($r = k$ und $r = l$) zu einem Satelliten ($s = i$) - Elimination der Satellitenphasen und Satellitenuhren

$$\begin{aligned} \varphi_{1k}^i(t_m) - \varphi_{1l}^i(t_m) &= \varphi_k(t_0) - \varphi_l(t_0) + \frac{f_1}{c} \{r_k^i(t_m) - r_l^i(t_m) + \Delta r_{tropk}^i(t_m) - \Delta r_{tropl}^i(t_m)\} \\ &\quad + R_k(t_m) - R_l(t_m) + I_{1k}^i - I_{1l}^i + ION_k^i(t_m) - ION_l^i(t_m) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

In der vereinfachten Schreibweise verkürzt sich die Formel zu:

$$\varphi_{1kl}^i(t_m) = \varphi_{kl}(t_0) + \frac{f_1}{c} \{r_{kl}^i(t_m) + \Delta r_{tropkl}^i(t_m)\} + R_{kl}(t_m) + I_{1kl}^i + ION_{kl}^i(t_m) \quad (\text{C.23})$$

Typ 2: Differenzbildung zwischen Daten eines Empfängers ($r = k$) zu zwei Satelliten ($s = i$ und $s = j$) - Elimination der Empfängerphasen und Empfängeruhren

$$\begin{aligned} \varphi_{1k}^i(t_m) - \varphi_{1k}^j(t_m) &= \varphi^i(t_0) - \varphi^j(t_0) + \frac{f_1}{c} \{r_k^i(t_m) - r_k^j(t_m) + \Delta r_{tropk}^i(t_m) - \Delta r_{tropk}^j(t_m)\} \\ &\quad - S^i(t_m) + S^j(t_m) + I_{1k}^i - I_{1k}^j + ION_k^i(t_m) - ION_k^j(t_m) \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

In der vereinfachten Schreibweise verkürzt sich die Formel zu:

$$\varphi_{1k}^{ij}(t_m) = \varphi^{ij}(t_0) + \frac{f_1}{c} \{r_k^{ij}(t_m) + \Delta r_{tropk}^{ij}(t_m)\} - S^{ij}(t_m) + I_{1k}^{ij} + ION_k^{ij}(t_m) \quad (\text{C.25})$$

Typ 3: Differenzbildung zwischen Daten eines Empfängers ($r = k$) zu einem Satelliten ($s = i$) zu zwei aufeinanderfolgenden Epochen (t_m und t_{m+1}) - Elimination der Mehrdeutigkeiten, und der Satelliten- und Empfängerphasen

$$\begin{aligned} \varphi_{1k}^i(t_{m+1/m}) &= \varphi_{1k}^i(t_{m+1}) - \varphi_{1k}^i(t_m) \\ &= \frac{f_1}{c} \{r_k^i(t_{m+1/m}) + \Delta r_{tropk}^i(t_{m+1/m})\} + R_k(t_{m+1/m}) - S^i(t_{m+1/m}) \\ &\quad + ION_k^i(t_{m+1/m}) \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Die Differenzen vom Typ 1, Typ 2 und Typ 3 sind die Grundlagen für die Bildung der Einzel-, Doppel- und Dreifachdifferenzen. Die Einzeldifferenz entspricht dem Typ 1. Die anderen ergeben sich aus nacheinanderfolgender Bildung der Typen 1, 2 bzw 3.

Doppeldifferenz: Differenz der Einzeldifferenz der Stationen $r = k$ und $r = l$ zum Satelliten $s = i$ und der Einzeldifferenz der Stationen $r = k$ und $r = l$ zum Satelliten $s = j$ - Elimination der Empfängerphasen, der Empfängeruhren, der Satellitenphasen und der Satellitenuhren

$$\begin{aligned}
\varphi_{1_{kl}}^{ij}(t_m) &= \varphi_{1_{kl}}^i(t_m) - \varphi_{1_{kl}}^j(t_m) \\
&= \frac{f_1}{c} \left\{ r_{kl}^{ij}(t_m) + \Delta r_{trop_{kl}}^{ij}(t_m) \right\} + I_{1_{kl}}^{ij} + ION_{kl}^{ij}(t_m)
\end{aligned} \tag{C.27}$$

Dreifachdifferenz: Differenz der Doppeldifferenz zur Epoche t_{m+1} und der Doppeldifferenz zur Epoche t_m - Elimination der Mehrdeutigkeiten

$$\begin{aligned}
\varphi_{1_{kl}}^{ij}(t_{m+1/m}) &= \varphi_{1_{kl}}^i(t_{m+1}) - \varphi_{1_{kl}}^j(t_m) \\
&= \frac{f_1}{c} \left\{ r_{kl}^{ij}(t_{m+1/m}) + \Delta r_{trop_{kl}}^{ij}(t_{m+1/m}) \right\} + ION_{kl}^{ij}(t_{m+1/m})
\end{aligned} \tag{C.28}$$

D. Simulationsbeispiel zur Untersuchung der Korrelaten

Sollkoordinaten der Punkte A, B, C und D: [LE] = Längeneinheiten

Punktnummer	x [LE]	y [LE]	z [LE]
A	0.00	0.00	0.00
B	4.00	0.00	0.00
C	0.00	4.00	0.00
D	4.00	4.00	0.00

Tabelle D.1: Sollkoordinaten der Neupunkte

Koordinaten der Festpunkte:

Punktnummer	x [LE]	y [LE]	z [LE]
1	-2.00	-2.00	10.00
2	-2.00	2.00	8.00
3	-2.00	6.00	10.00
4	2.00	-2.00	8.00
5	2.00	2.00	10.00
6	2.00	6.00	8.00
7	6.00	-2.00	10.00
8	6.00	2.00	8.00
9	6.00	6.00	10.00

Tabelle D.2: Koordinaten der Festpunkte

Bedingungsgleichungen:

$$g_1 = \sqrt{\Delta x_{BA}^2 + \Delta y_{BA}^2 + \Delta z_{BA}^2} - 4 = 0 \quad / \cdot 2\lambda_1 \quad (\text{D.1})$$

$$g_2 = \sqrt{\Delta x_{CA}^2 + \Delta y_{CA}^2 + \Delta z_{CA}^2} - 4 = 0 \quad / \cdot 2\lambda_2 \quad (\text{D.2})$$

$$g_3 = \sqrt{\Delta x_{DB}^2 + \Delta y_{DB}^2 + \Delta z_{DB}^2} - 4 = 0 \quad / \cdot 2\lambda_3 \quad (\text{D.3})$$

$$g_4 = \sqrt{\Delta x_{DC}^2 + \Delta y_{DC}^2 + \Delta z_{DC}^2} - 4 = 0 \quad / \cdot 2\lambda_4 \quad (\text{D.4})$$

$$g_5 = \sqrt{\Delta x_{CB}^2 + \Delta y_{CB}^2 + \Delta z_{CB}^2} - \sqrt{32} = 0 \quad / \cdot 2\lambda_5 \quad (\text{D.5})$$

$$g_6 = \sqrt{\Delta x_{DA}^2 + \Delta y_{DA}^2 + \Delta z_{DA}^2} - \sqrt{32} = 0 \quad / \cdot 2\lambda_6 \quad (\text{D.6})$$

Simulierte Streckenbeobachtungen:

Pkt.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	10.3888	8.4942	11.8479	8.4742	10.3920	10.1869	11.8397	10.2030	13.1097
B	11.8266	10.1905	13.1241	8.4828	10.3908	10.1855	10.3954	8.5122	11.8351
C	11.8179	8.4877	10.3779	10.1995	10.3754	8.4925	13.1263	10.2136	11.8460
D	13.1073	10.2025	11.8413	10.1873	10.3943	8.4929	11.8193	8.4758	10.4001

Tabelle D.3: Strecken mit zufälligen Fehlern in [LE] zwischen Fest- und Neupunkten

Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A^T P A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T P l \\ -w \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad P = E \quad (\text{D.7})$$

Arten der Ausgleichungen

	verwendete Bedingungsgleichungen	veränderte Bedingungsgleichungen
Ausgleich 1	g_1	/
Ausgleich 2	g_1-g_2	/
Ausgleich 3	g_1-g_3	/
Ausgleich 4	g_1-g_4	/
Ausgleich 5	g_1-g_5	/
Ausgleich 6	g_1-g_6	/
Ausgleich 7	g_1-g_4	$g_1 = \sqrt{\Delta x_{BA}^2 + \Delta y_{BA}^2 + \Delta z_{BA}^2} - 5.5$ $g_2 = \sqrt{\Delta x_{CA}^2 + \Delta y_{CA}^2 + \Delta z_{CA}^2} - 6.0$
Ausgleich 8	g_1-g_4	$g_1 = \sqrt{\Delta x_{BA}^2 + \Delta y_{BA}^2 + \Delta z_{BA}^2} - 5.5$ $g_2 = \sqrt{\Delta x_{CA}^2 + \Delta y_{CA}^2 + \Delta z_{CA}^2} - 6.0$ $g_3 = \sqrt{\Delta x_{DB}^2 + \Delta y_{DB}^2 + \Delta z_{DB}^2} - 6.0$
Ausgleich 9	g_1-g_4	$g_1 = \sqrt{\Delta x_{BA}^2 + \Delta y_{BA}^2 + \Delta z_{BA}^2} - 5.5$ $g_2 = \sqrt{\Delta x_{CA}^2 + \Delta y_{CA}^2 + \Delta z_{CA}^2} - 6.0$ $g_3 = \sqrt{\Delta x_{DB}^2 + \Delta y_{DB}^2 + \Delta z_{DB}^2} - 6.0$ $g_4 = \sqrt{\Delta x_{DC}^2 + \Delta y_{DC}^2 + \Delta z_{DC}^2} - 1.0$

Tabelle D.4: Vermittelnde Ausgleichungen mit verschiedenen Bedingungsgleichungen

Ausgegliche Koordinaten

Punktnummer	A			B		
	Koordinaten [LE]	x	y	z	x	y
Ausgleich 1	-0.0064	-0.0037	0.0011	3.9936	-0.0016	-0.0029
Ausgleich 2	-0.0064	-0.0032	0.0010	3.9936	-0.0016	-0.0029
Ausgleich 3	-0.0065	-0.0032	0.0010	3.9935	-0.0134	-0.0007
Ausgleich 4	-0.0064	-0.0032	0.0010	3.9935	-0.0133	-0.0007
Ausgleich 5	-0.0099	-0.0066	0.0023	3.9901	-0.0099	-0.0020
Ausgleich 6	-0.0099	-0.0066	-0.0012	3.9901	-0.0099	0.0015
Ausgleich 7	-0.7592	-1.0427	0.4120	4.6164	0.0799	0.1076
Ausgleich 8	-0.7446	-0.9815	0.3856	4.7554	-0.9926	0.3911
Ausgleich 9	-0.7168	-0.6836	0.3005	4.8002	-0.9163	0.3824

Tabelle D.5: Ausgegliche Koordinaten der Neupunkte A und B

Punktnummer	C			D		
	Koordinaten [LE]	x	y	z	x	y
Ausgleich 1	-0.0294	3.9973	0.0048	4.0096	3.9749	-0.0019
Ausgleich 2	-0.0294	3.9967	0.0047	4.0096	3.9749	-0.0019
Ausgleich 3	-0.0294	3.9968	0.0047	4.0095	3.9866	0.0002
Ausgleich 4	-0.0100	3.9968	0.0011	3.9900	3.9867	-0.0033
Ausgleich 5	-0.0065	3.9934	-0.0001	3.9935	3.9901	-0.0021
Ausgleich 6	-0.0065	3.9934	0.0033	3.9935	3.9901	-0.0055
Ausgleich 7	0.1028	4.8903	0.1729	4.0062	4.0319	0.0076
Ausgleich 8	-0.0212	4.9725	0.2183	3.9788	4.9541	0.2053
Ausgleich 9	1.3760	4.9380	0.0317	2.4944	4.6081	-0.0775

Tabelle D.6: Ausgegliche Koordinaten der Neupunkte C und D

E. Testdaten der SAPOS-Stationen vom 14.02.2001

Sollkoordinaten der SAPOS-Referenzstationen im ETRS89:

Punktnummer	x [m]	y [m]	z [m]
8001	3787401.84	896152.92	5036226.57
8002	3778795.76	895001.91	5042858.36
8003	3789641.50	916964.09	5030824.04

Tabelle E.1: Sollkoordinaten der SAPOS-Stationen ETRS89

Testdaten vom 14.02.2001: Anzahl der beobachteten Satelliten: 11
 Anzahl der Stationen: 3
 Anzahl der Epochen: 701
 Erste Epoche [mod. jul. Datum, sec]: 51954 0.0
 Letzte Epoche [mod. jul. Datum, sec]: 51954 10500.0
 Beobachtungsintervall [sec]: 15.0
 Nummer der Basisstation: 1

Ergebnisse der float-Lösung:

Station	ϕ [°',"]			$\sigma(\phi)$ [m]	λ [°',"]			$\sigma(\lambda)$ [m]	h [m]	$\sigma(h)$
8001	52	29	21.52443	0.0000	13	18	43.79126	0.0000	108.4990	0.0000
8002	52	35	13.87708	0.0010	13	19	29.55125	0.0031	117.5668	0.0014
8003	52	24	34.91406	0.0008	13	36	7.88345	0.0024	104.5044	0.0013

Tabelle E.2: Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe

Punktnummer	x [m]	y [m]	z [m]
8001	3787401.8400	896152.9200	5036226.5700
8002	3778795.7583	895001.9090	5042858.3621
8003	3789641.5014	916964.0859	5030824.0327

Tabelle E.3: Kartesische Koordinaten

Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen:

$$g_i(x) = c_i \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, 19 \quad (\text{E.1})$$

$$(F_r^s - F_b^s) - (F_r^a - F_b^a) = I_{1rb}^{sa} - \alpha I_{2rb}^{sa} \quad (\text{E.2})$$

Ergebnisse der Ausgleichung mit allen fehlerfreien Bedingungsgleichungen

Station	ϕ [°',"]			$\sigma(\phi)$ [m]	λ [°',"]			$\sigma(\lambda)$ [m]	h [m]	$\sigma(h)$
8001	52	29	21.52443	0.0000	13	18	43.79126	0.0000	108.4990	0.0000
8002	52	35	13.87713	0.0004	13	19	29.55106	0.0005	117.5641	0.0014
8003	52	24	34.91409	0.0004	13	36	7.88318	0.0005	104.5031	0.0008

Tabelle E.4: Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe

Punktnummer	x [m]	y [m]	z [m]
8001	3787401.8400	896152.9200	5036226.5700
8002	3778795.7563	895001.9049	5042858.3609
8003	3789641.5011	916964.0807	5030824.0323

Tabelle E.5: Kartesische Koordinaten

Nr.	Basissatellit a	Basisstation b	Satellit s	Station r	c_i cycle
g_1	19	8001	1	8002	18389.58
g_2	19	8001	13	8002	12084.30
g_3	19	8001	4	8002	13627.88
g_4	19	8001	24	8002	26950.86
g_5	19	8001	22	8002	22812.04
g_6	19	8001	27	8002	-5787.99
g_7	19	8001	20	8002	9690.38
g_8	19	8001	8	8002	16582.87
g_9	19	8001	10	8002	1742968.62
g_{10}	19	8001	1	8003	-10541.94
g_{11}	19	8001	13	8003	-26369.74
g_{12}	19	8001	4	8003	-43574.94
g_{13}	19	8001	24	8003	-58337.45
g_{14}	19	8001	22	8003	11803.10
g_{15}	19	8001	27	8003	-6248.12
g_{16}	19	8001	20	8003	13440.31
g_{17}	19	8001	28	8003	-249978.64
g_{18}	19	8001	8	8003	-14193.70
g_{19}	19	8001	10	8003	17610.27

Tabelle E.6: Bedingungsgleichungen

Ergebnisse der Ausgleichung mit allen Bedingungsgleichungen

Verfälschung von g_1 mit $c_1 = 18390.58$ (Fehler von 1 cycle in $I_{1,r}^s$)

Station	ϕ [°',"]			$\sigma(\phi)$ [m]	λ [°',"]			$\sigma(\lambda)$ [m]	h [m]	$\sigma(h)$
8001	52	29	21.52443	0.0000	13	18	43.79126	0.0000	108.4990	0.0000
8002	52	35	13.87903	0.0050	13	19	29.55600	0.0063	117.5379	0.0097
8003	52	24	34.91409	0.0049	13	36	7.88318	0.0060	104.5031	0.0092

Tabelle E.7: Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe

Punktnummer	x [m]	y [m]	z [m]
8001	3787401.8400	896152.9200	5036226.5700
8002	3778795.6741	895001.9810	5042858.3756
8003	3789641.5011	916964.0808	5030824.0323

Tabelle E.8: Kartesische Koordinaten

Ergebnisse der Ausgleichung mit allen Bedingungsgleichungen

Verfälschung von g_1 mit $c_1 = 18388.80$ (Fehler von 1 cycle in $I_{2,r}^s$)

Station	ϕ [°',"]			$\sigma(\phi)$ [m]	λ [°',"]			$\sigma(\lambda)$ [m]	h [m]	$\sigma(h)$
8001	52	29	21.52443	0.0000	13	18	43.79126	0.0000	108.4990	0.0000
8002	52	35	13.87566	0.0040	13	19	29.54721	0.0050	117.5846	0.0077
8003	52	24	34.91409	0.0038	13	36	7.88318	0.0047	104.5031	0.0073

Tabelle E.9: Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe

Punktnummer	x [m]	y [m]	z [m]
8001	3787401.8400	896152.9200	5036226.5700
8002	3778795.8204	895001.8455	5042858.3494
8003	3789641.5012	916964.0807	5030824.0323

Tabelle E.10: Kartesische Koordinaten

Ergebnisse der Ausgleichung mit einer Bedingungsgleichung $g_1 = 18389.58$

Station	ϕ [° , ' , '']			$\sigma(\phi)$ [m]	λ [° , ' , '']			$\sigma(\lambda)$ [m]	h [m]	$\sigma(h)$
8001	52	29	21.52443	0.0000	13	18	43.79126	0.0000	108.4990	0.0000
8002	52	35	13.87708	0.0009	13	19	29.55124	0.0028	117.5668	0.0014
8003	52	24	34.91406	0.0008	13	36	7.88344	0.0023	104.5044	0.0013

Tabelle E.11: Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe

Punktnummer	x [m]	y [m]	z [m]
8001	3787401.8400	896152.9200	5036226.5700
8002	3778795.7584	895001.9089	5042858.3621
8003	3789641.5015	916964.0859	5030824.0327

Tabelle E.12: Kartesische Koordinaten**Ergebnisse der Ausgleichung mit einer Bedingungsgleichung**Verfälschung von g_1 mit $c_1 = 18390.58$ (Fehler von 1 cycle in I_1^s)

Station	ϕ [° , ' , '']			$\sigma(\phi)$ [m]	λ [° , ' , '']			$\sigma(\lambda)$ [m]	h [m]	$\sigma(h)$
8001	52	29	21.52443	0.0000	13	18	43.79126	0.0000	108.4990	0.0000
8002	52	35	13.87921	0.0072	13	19	29.57142	0.0215	117.4679	0.0108
8003	52	24	34.91592	0.0062	13	36	7.89009	0.0176	104.4259	0.0099

Tabelle E.13: Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe

Punktnummer	x [m]	y [m]	z [m]
8001	3787401.8400	896152.9200	5036226.5700
8002	3778795.5614	895002.2527	5042858.3236
8003	3789641.3810	916964.1860	5030824.0057

Tabelle E.14: Kartesische Koordinaten**Ergebnisse der Ausgleichung mit einer Bedingungsgleichung**Verfälschung von g_1 mit $c_1 = 18388.80$ (Fehler von 1 cycle in I_2^s)

Station	ϕ [° , ' , '']			$\sigma(\phi)$ [m]	λ [° , ' , '']			$\sigma(\lambda)$ [m]	h [m]	$\sigma(h)$
8001	52	29	21.52443	0.0000	13	18	43.79126	0.0000	108.4990	0.0000
8002	52	35	13.87542	0.0056	13	19	29.53551	0.0169	117.6439	0.0084
8003	52	24	34.91260	0.0049	13	36	7.87826	0.0138	104.5657	0.0078

Tabelle E.15: Mittlere Fehler und Werte für ellipsoidische Länge, Breite und Höhe

Punktnummer	x [m]	y [m]	z [m]
8001	3787401.8400	896152.9200	5036226.5700
8002	3778795.9120	895001.6408	5042858.3921
8003	3789641.5955	916964.0078	5030824.0538

Tabelle E.16: Kartesische Koordinaten

F. Phasensprünge der Testdatensätze

Berliner Messkampagne - 1996 Messung 2481

Epoche [sec]	Satellit PRN Nr.	Phasensprung L_1 [cycle]	Phasensprung L_2 [cycle]
34140.0	1	17978337.0	-
34920.0	1	2444650.0	-
35260.0	1	792128.0	16378135.0
35720.0	1	1197608.0	918074.0
37900.0	1	3587003.0	-
34920.0	2	1656659.0	-
35720.0	2	1774270.0	2643769.0
36100.0	2	820317.0	-
37980.0	2	2254527.0	2356183.0
38860.0	2	327590.0	231085.0
34920.0	3	24248213.0	-
35720.0	3	-1724960.0	18798390.0
37900.0	14	9298745.0	-
31100.0	15	1532160.0	1286178.0
34140.0	15	13674232.0	-
34920.0	15	3075333.0	-
35260.0	15	1067566.0	13756931.0
35720.0	15	1698443.0	1307153.0
37900.0	15	6782375.0	-
22800.0	21	4106784.0	3089502.0
23020.0	21	1293265.0	935120.0
23120.0	21	599680.0	461989.0
34920.0	21	29756810.0	-
35240.0	21	-288500.0	22752718.0

Tabelle F.1: Phasensprünge auf der Station 34

Epoche [sec]	Satellit PRN Nr.	Phasensprung L_1 [cycle]	Phasensprung L_2 [cycle]
35720.0	21	-557092.0	-443335.0
37900.0	21	-3702384.0	-
29760.0	22	-2863838.0	-1527685.0
35240.0	31	41707644.0	28762220.0
35720.0	31	-160522.0	-134341.0
37900.0	31	-2541602.0	-

Tabelle F.2: Phasensprünge auf der Station 34

Epoche [sec]	Station	Satellit PRN Nr.	Frequenz	Phasensprung [cycle]
27360.0	932	17	2	18362573.0
39140.0	33	21	2	61184077.0
39160.0	48	21	2	25886340.0
30860.0	49	15	1	345730.0
30860.0	49	15	2	273524.0
31400.0	49	15	1	1629077.0
31400.0	49	15	2	1262249.0
22780.0	49	21	1	3552495.0
22780.0	49	21	2	2767490.0
31360.0	49	28	1	-19415265.0
31360.0	49	28	2	-15128769.0
39120.0	107	21	2	15552487.0
39160.0	109	21	2	39517068.0

Tabelle F.3: Phasensprünge auf den Stationen 932, 33, 48, 49, 107 und 109

Referenzstationen der BEWAG - 2000 Messung 3641

Epoche	sec	Satellit PRN Nr.	Phasensprung L_1	cycle	Phasensprung L_2	cycle
10080.0		27		1.0		1.0

Tabelle F.4: Phasensprünge auf der Station Gues-04

SAPOS-Referenzstationen in Berlin - 2000 Messung 2231

Epoche	sec	Satellit PRN Nr.	Phasensprung L_1	cycle	Phasensprung L_2	cycle
28440.0		21		-		2.0

Tabelle F.5: Phasensprünge auf der Station 8002

SAPOS-Referenzstationen in Berlin - Daten vom 14.02.2001

Epoche	sec	Station	Satellit PRN Nr.	Frequenz	Phasensprung	cycle
7005.0		8002	10	2		-2.0
10395.0		8003	8	1		-91.0
10395.0		8003	8	2		-72.0
10410.0		8003	8	1		-2.0
10410.0		8003	8	2		-1.0
10425.0		8003	8	1		6.0
10425.0		8003	8	2		4.0
10440.0		8003	8	1		-4.0
10440.0		8003	8	2		-3.0

Tabelle F.6: Phasensprünge auf den Stationen 8002 und 8003

G. Doppeldifferenzmehrdigkeiten und Korrelaten der Testdatensätze

G.1. Berliner Messkampagne 1996

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	I_{1rb}^{sa} [cycle]	I_{2rb}^{sa} [cycle]	Mehrdigkeiten-Paar [cycle]
1	1	33	24252816	19716749	8889115.48
2	2	33	26838939	21113887	10386559.52
3	3	33	810921	830511	163769.57
4	14	33	36445426	28937912	13896403.66
5	15	33	21059628	16788915	7977356.57
6	17	33	821994	839140	168118.68
7	22	33	760776	791437	144071.84
8	23	33	695148	740298	118292.42
9	28	33	811629	831062	164048.22
10	31	33	-1185984	3629034	-4013802.70
11	1	34	3740606	3272395	1190687.82
12	2	34	11318655	8347294	4814270.06
13	3	34	-1517792	-1355336	-461686.03
14	14	34	7788975	5385144	3592758.90
15	15	34	8296199	6208127	3458697.44
16	17	34	-1392063	-1257366	-412297.29
17	22	34	-1526105	-1361814	-464951.23
18	23	34	-1487367	-1331628	-449734.79
19	28	34	-1437425	-1292713	-430116.17
20	31	34	-6457389	-1708765	-5125883.81
21	3	47	-925052	-558246	-490055.12
22	17	47	-829098	-483477	-452362.68
23	22	47	-897296	-536618	-479152.10
24	23	47	-819855	-476275	-448731.62
25	28	47	-859341	-507043	-464242.56
26	31	47	-6150262	-4686729	-2498265.38
27	1	48	4785496	4436625	1328385.61
28	2	48	3245610	2575246	1238924.81
29	3	48	437396	539453	17043.01
30	14	48	3182751	2820154	985228.40
31	15	48	2909433	1559863	1693955.34
32	22	48	507224	593865	44472.05
33	23	48	687411	734270	115252.56
34	28	48	578850	649677	72608.18
35	31	48	-739765	300110	-973616.95
36	1	49	-9206708	-6533876	-4115376.05
37	2	49	-13436595	-11988639	-4094798.38
38	3	49	-1704202	-1113489	-836548.23
39	14	49	-17328448	-13586413	-6741632.68
40	15	49	-7746918	-5957236	-3104915.92
41	22	49	-1646946	-1068875	-814056.39
42	23	49	-1470761	-931588	-744848.27
43	28	49	-1542086	-987166	-772865.74
44	31	49	-6993472	-5091711	-3025904.99
45	1	107	-4021806	-2394280	-2156133.27
46	2	107	-7004291	-5491881	-2724903.21
47	3	107	607588	672070	83897.09
48	14	107	-8350315	-6189271	-3527506.43
49	15	107	-6635577	-4788411	-2904347.65
50	17	107	807056	827500	162250.81
51	22	107	632186	691236	93560.55
52	23	107	746536	780341	138478.08
53	28	107	739946	775205	135890.16

Tabelle G.1: Doppeldifferenzmehrdigkeiten $b=932$ und $a=21$

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	I_{rb}^{sa} cycle	I_{rb}^{sa} cycle	Mehrdeutigkeits-Paar cycle
54	31	107	-5060036	-2356582	-3223738.34
55	1	109	13787879	12378031	4142660.04
56	2	109	13496207	10615715	5224221.29
57	3	109	717146	757440	126933.01
58	14	109	15856638	12809188	5875452.55
59	15	109	10177917	8248835	3750253.36
60	17	109	725618	764041	130261.38
61	22	109	691420	737394	116827.27
62	23	109	658905	712057	104055.39
63	28	109	719311	759126	127784.25
64	31	109	1960874	1867392	505763.35

Tabelle G.2: Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten $b=932$ und $a=21$

lfd. Nr.	Sat. s	Stat. r	Korrelaten der Ausgleichungen Nr.									
			1	2	3	4	5	6	7	8	5b	
1	1	33	1.224	1.117	1.210	1.103	1.102	1.047	1.069	1.093	1.057	
2	2	33	-0.064	-0.097	-0.070	-0.101	-0.102	-0.220	-0.223	-0.226	-0.197	
3	3	33	2.727	2.697	2.723	2.693	2.693	2.597	2.043	1.425	2.615	
4	14	33	-0.473	-0.385	-0.462	-0.374	-0.373	0.146	0.172	0.202	0.045	
5	15	33	0.041	0.149	0.058	0.163	0.164	-0.017	0.062	0.149	0.018	
6	17	33	-0.585	0.211	-0.479	0.316	0.327	-0.430	0.439	0.449	0.410	
7	22	33	0.854	0.790	0.845	0.782	0.781	0.681	0.754	0.837	0.701	
8	23	33	-0.211	-0.584	-0.260	-0.633	-0.637	-0.510	-0.469	-0.424	-0.535	
9	28	33	1.071	0.886	1.046	0.861	0.859	0.884	0.953	1.029	0.879	
10	31	33	-1.154	-1.078	-1.145	-1.068	-1.068	-1.268	-1.127	-0.969	-1.229	
11	1	34	0.399	0.293	0.384	0.279	0.278	0.221	0.241	0.264	0.232	
12	2	34	-0.378	-0.409	-0.383	-0.413	-0.413	-0.529	-0.531	-0.532	-0.506	
13	3	34	1.658	1.627	1.654	1.623	1.622	1.529	0.983	0.373	1.547	
14	14	34	-1.124	-1.036	-1.113	-1.024	-1.023	-0.508	-0.482	-0.454	-0.608	
15	15	34	0.843	0.948	0.859	0.961	0.962	0.784	0.861	0.945	0.819	
16	17	34	-0.997	-0.204	-0.893	-0.099	-0.088	0.016	0.026	0.036	-0.004	
17	22	34	-0.095	-0.159	-0.103	-0.167	-0.168	-0.271	-0.197	-0.115	-0.251	
18	23	34	0.984	0.609	0.934	0.560	0.555	0.683	0.723	0.769	0.657	
19	28	34	-0.190	-0.376	-0.215	-0.400	-0.403	-0.378	-0.310	-0.233	-0.383	
20	31	34	0.055	0.129	0.064	0.139	0.140	-0.064	0.075	0.230	-0.024	
21	3	47	0.269	0.232	0.264	0.227	0.226	0.228	0.095	-0.053	0.228	
22	17	47	-0.140	0.209	-0.094	0.256	0.262	0.263	0.273	0.286	0.263	
23	22	47	-0.385	-0.188	-0.359	-0.163	-0.161	-0.161	-0.098	-0.028	-0.161	
24	23	47	-0.442	-0.728	-0.479	-0.765	-0.769	-0.768	-0.779	-0.791	-0.768	
25	28	47	0.529	0.343	0.504	0.319	0.316	0.316	0.358	0.404	0.316	
26	31	47	-0.106	-0.180	-0.116	-0.190	-0.191	-0.191	-0.137	-0.078	-0.191	
27	1	48	-0.238	0.301	0.283	0.276	0.285	0.230	0.097	0.098	0.241	
28	2	48	0.108	0.273	0.265	0.264	0.268	0.149	0.161	0.161	0.172	
29	3	48	-3.528	-3.344	-3.356	-3.353	-3.348	-3.444			-3.425	
30	14	48	-0.702	-1.146	-1.135	-1.130	-1.134	-0.614	-0.744	-0.739	-0.716	
31	15	48	0.640	0.096	0.112	0.116	0.111	-0.070	-0.551	-0.550	-0.035	
32	22	48	-0.238	-0.087	-0.070	-0.100	-0.096	-0.196	-0.704	-0.712	-0.176	
33	23	48	-3.230	-1.091	-1.191	-1.174	-1.145	-1.018	-1.245	-1.241	-1.043	
34	28	48	-1.376	-0.278	-0.334	-0.320	-0.305	-0.279	-0.730	-0.734	-0.284	
35	31	48	3.031	2.716	2.713	2.730	2.727	2.527	1.621	1.615	2.565	
36	1	49	-0.809	-0.816	-1.260	-0.722	-0.724	-0.778	-0.756	-0.881	-0.767	
37	2	49	0.479	0.477	0.349	0.506	0.506	0.387	0.384	0.392	0.411	
38	3	49	-2.613	-2.610	-2.760	-2.576	-2.577	-2.673	-3.227		-2.655	
39	14	49	-0.699	-0.694	-0.321	-0.768	-0.767	-0.250	-0.224	-0.346	-0.351	
40	15	49	-0.263	-0.256	0.183	-0.344	-0.343	-0.520	-0.443	-0.885	-0.485	
41	22	49	0.050	0.020	-0.102	0.050	0.049	-0.052	0.021	-0.457	-0.032	
42	23	49	-0.262	-0.245	-2.016	0.120	0.116	0.243	0.284	0.070	0.218	
43	28	49	-0.640	-0.626	-1.535	-0.437	-0.440	-0.414	-0.346	-0.771	-0.420	
44	31	49	1.944	1.960	2.228	1.904	1.905	1.701	1.842	0.992	1.741	

Tabelle G.3: Korrelaten der Ausgleichungen 1 - 8, 5b

lfd. Nr.	Sat. s	Stat. r	Korrelaten der Ausgleichungen Nr.								
			1	2	3	4	5	6	7	8	5b
45	1	107	-0.343	-0.450	-0.358	-0.464	-0.466	-0.521	-0.499	-0.475	-0.510
46	2	107	-0.123	-0.156	-0.129	-0.160	-0.161	-0.280	-0.284	-0.287	-0.257
47	3	107	-0.313	-0.343	-0.317	-0.347	-0.347	-0.443	-0.996	-1.615	-0.424
48	14	107	-0.599	-0.511	-0.588	-0.500	-0.499	0.020	0.047	0.076	-0.081
49	15	107	0.634	0.743	0.651	0.756	0.757	0.577	0.656	0.743	0.612
50	17	107	-1.674	-0.879	-1.569	-0.774	-0.763	-0.660	-0.651	-0.641	-0.680
51	22	107	-0.235	-0.298	-0.243	-0.307	-0.308	-0.407	-0.333	-0.251	-0.387
52	23	107	1.054	0.680	1.004	0.631	0.627	0.753	0.794	0.839	0.728
53	28	107	0.643	0.458	0.619	0.434	0.431	0.457	0.525	0.601	0.452
54	31	107	0.021	0.096	0.030	0.106	0.107	-0.094	0.047	0.205	-0.055
55	1	109	0.320	0.213	0.306	0.199	0.198	0.528	0.553	0.580	0.464
56	2	109	-1.069	-1.102	-1.074	-1.106	-1.107	-0.397	-0.395	-0.392	-0.536
57	3	109	1.725	1.695	1.721	1.691	1.691	2.262	1.713	1.100	2.151
58	14	109	3.011	3.099	3.023	3.110	3.111				0.608
59	15	109	-0.630	-0.522	-0.614	-0.509	-0.508	0.570	0.658	0.755	0.359
60	17	109	-0.223	0.572	-0.118	0.677	0.688	0.063	0.067	0.071	0.186
61	22	109	-0.048	-0.112	-0.056	-0.120	-0.121	0.479	0.557	0.644	0.361
62	23	109	2.289	1.916	2.240	1.867	1.862	1.098	1.132	1.170	1.249
63	28	109	-0.489	-0.674	-0.513	-0.698	-0.700	-0.852	-0.786	-0.711	-0.822
64	31	109	-2.742	-2.667	-2.734	-2.656	-2.656	-1.445	-1.294	-1.125	-1.679
65	17	48	4.139								
66	17	48		-0.188			-0.072	0.031	-0.029	-0.029	0.011
67	17	49			3.568						
68	17	49				-0.758	-0.747	-0.643	-0.634	-0.690	-0.663

Tabelle G.4: Korrelaten der Ausgleichungen 1 - 8, 5b

G.2. SAPOS-Referenzstationen in Berlin

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	I_{1rb}^{sa} [cycle]	I_{2rb}^{sa} [cycle]	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]
1	15	8002	4459	3474	1751.99
2	2	8002	395183	307907	155255.47
3	11	8002	-9495	-7400	-3728.77
4	23	8002	31636	24651	12427.43
5	21	8002	-6642	-5176	-2608.75
6	29	8002	-29510	-22996	-11591.04
7	3	8002	-25324	-19734	-9946.86
8	20	8002	-882673	-687792	-346731.18
9	7	8002	2218275	1728528	871370.06
10	25	8002	1066856	831304	419086.65
11	1	8002	2307713	1798214	906507.29
12	15	8003	47939	37355	18831.21
13	2	8003	418018	325701	164225.01
14	11	8003	-49580	-38634	-19475.58
15	23	8003	85721	66797	33671.39
16	21	8003	80738	62913	31714.88
17	29	8003	145078	113048	56988.65
18	3	8003	77734	60572	30535.04
19	20	8003	-561141	-437248	-220428.27
20	7	8003	2273118	1771264	892912.29
21	25	8003	1115206	868985	438074.83
22	1	8003	1442100	1123706	566484.94

Tabelle G.5: Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten mit broadcast- und präzisen Bahnen $b=8001$ und $a=31$

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	Korrelaten aus den Ausgleichungen	
			mit broadcast-Bahnen	mit präzisen Bahnen
1	6	8002	-0.506	-0.087
2	17	8002	-1.151	-0.941
3	25	8002	0.661	1.331
4	10	8002	-1.308	-1.193
5	22	8002	-0.111	1.282
6	23	8002	2.131	-0.120
7	3	8002	1.194	0.566

Tabelle G.6: Korrelaten der Ausgleichungen mit broadcast- und präzisen Bahnen

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	Korrelaten aus den Ausgleichungen	
			mit broadcast-Bahnen	mit präzisen Bahnen
8	15	8002	0.486	0.059
9	31	8002	0.289	0.496
10	29	8002	-0.301	-0.095
11	6	8002	-0.514	-0.540
12	17	8003	0.023	-1.154
13	25	8003	1.434	1.056
14	10	8003	-1.246	-1.699
15	23	8003	0.086	-0.148
16	3	8003	1.032	0.404
17	31	8003	-2.053	0.106
18	6	8003	0.352	0.932
19	25	8003	-1.066	-0.111
20	22	8003	-0.174	-0.633
21	23	8003	0.727	0.402
22	31	8003	0.554	0.266

Tabelle G.7: Korrelaten der Ausgleichungen mit broadcast- und präzisen Bahnen

G.3. Referenzstationsnetz im Burgenland (Österreich)

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	$I_{1_{rb}}^{sa}$ cycle	$I_{2_{rb}}^{sa}$ cycle	Mehrdreutigkeits-Paar cycle
1	25	Matt-02	293021	228328	115103.08
2	7	Matt-02	574354	447548	225615.30
3	29	Matt-02	617132	480882	242418.75
4	11	Matt-02	292630	228023	114949.74
5	20	Matt-02	322517	251312	126689.47
6	31	Matt-02	-14402	-11222	-5657.58
7	13	Matt-02	2836247	9182478	-4318930.66
8	4	Matt-02	560255	-6099972	5313479.94
9	19	Matt-02	3108508	3348244	499486.70
10	24	Matt-02	-461736	15981662	-12914979.12
11	27	Matt-02	2629533	-6339625	7569500.53
12	22	Matt-02	764749	595851	300449.52
13	28	Matt-02	529233	-241440	717368.06
14	8	Matt-02	4496448	6281855	-398503.95
15	10	Matt-02	629013	-6046563	5340620.53
16	2	Matt-02	4185478	10669612	-4128505.38
17	26	Matt-02	3646698	2841626	1432443.97
18	25	Ober-03	254454	198275	99954.00
19	7	Ober-03	356080	277464	139874.29
20	29	Ober-03	453081	353049	177977.88
21	11	Ober-03	214826	167396	84387.56
22	20	Ober-03	196220	152899	77077.92
23	31	Ober-03	2946	2295	1157.69
24	13	Ober-03	696023	6425326	-4310724.53

Tabelle G.8: Doppeldifferenzmehrdreutigkeiten $b=Gues-04$ und $a=1$

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	I_{1rb}^{sa} [cycle]	I_{2rb}^{sa} [cycle]	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]
25	4	Ober-03	6249588	1601555	5001623.06
26	19	Ober-03	64082	322412	-187148.13
27	24	Ober-03	203668	6695315	-5013460.57
28	27	Ober-03	-1074506	-20392555	14815796.60
29	22	Ober-03	2124851	9227287	-5065242.77
30	28	Ober-03	156540	-531707	570857.14
31	8	Ober-03	1023183	7333922	-4691561.42
32	10	Ober-03	2066029	-5090168	6032393.68
33	2	Ober-03	1708715	405574	1392683.31
34	26	Ober-03	4153744	-6023433	8847328.16
35	25	Neus-01	585524	456251	230003.74
36	7	Neus-01	712358	555084	279825.01
37	11	Neus-01	462281	360217	181592.43
38	20	Neus-01	386617	301259	151869.73
38	20	Neus-01	386617	301259	151869.73
39	31	Neus-01	18428	14359	7239.17
40	13	Neus-01	2672488	8619114	-4043704.73
41	4	Neus-01	1564815	-2974875	3882899.42
42	19	Neus-01	518864	676845	-8547.69
43	24	Neus-01	548257	3695576	-2331412.61
44	27	Neus-01	867979	-12887069	10909850.95
45	22	Neus-01	3485104	3369287	859685.56
46	28	Neus-01	1276098	3336607	-1323855.51
47	8	Neus-01	3116112	1938014	1605971.22
48	10	Neus-01	-58518	-5656256	4348954.21
49	2	Neus-01	2799341	4305746	-555785.75
50	26	Neus-01	2421879	1887379	951194.06

Tabelle G.9: Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten der Station Neus-01

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	Korrelaten der Ausgleichungen		
			mit allen Bedingungsgleichungen	ohne Gleichung 38	mit falscher Gleichung 18
1	25	Ober-02	-0.006	0.199	-7.317
2	7	Ober-02	0.524	0.586	1.559
3	29	Ober-02	-0.407	-0.407	0.412
4	11	Ober-02	0.036	0.220	1.508
5	20	Ober-02	1.601	0.243	3.559
6	31	Ober-02	-0.068	-0.064	-0.030
7	13	Ober-02	1.800	2.043	2.713
8	4	Ober-02	-0.210	-0.151	-0.587
9	19	Ober-02	0.218	0.414	1.200
10	24	Ober-02	1.449	1.391	0.487
11	27	Ober-02	-0.669	-0.528	-0.853
12	22	Ober-02	-1.984	-1.961	-1.457
13	28	Ober-02	-0.709	-0.678	0.790
14	8	Ober-02	-2.891	-2.850	-3.900
15	10	Ober-02	-0.751	-0.803	-1.629
16	2	Ober-02	0.026	0.009	-0.246
17	26	Ober-02	1.129	1.085	0.968
18	25	Matt-03	-0.384	-0.180	21.238
19	7	Matt-03	-0.865	-0.803	-4.142
20	29	Matt-03	-0.018	-0.018	-1.657
21	11	Matt-03	-0.660	-0.475	-5.201
22	20	Matt-03	0.887	-0.471	-5.170
23	31	Matt-03	-0.069	-0.065	-0.216
24	13	Matt-03	-1.598	-1.356	-4.305
25	4	Matt-03	1.813	1.871	3.004
26	19	Matt-03	-0.589	-0.393	-3.541
27	24	Matt-03	-0.361	-0.419	2.548
28	27	Matt-03	-0.551	-0.410	0.098
29	22	Matt-03	0.696	0.719	-0.953

Tabelle G.10: Korrelaten der Ausgleichungen

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	Korrelaten der Ausgleichungen		
			mit allen Bedingungsgleichungen	ohne Gleichung 38	mit falscher Gleichung 18
30	28	Matt-03	0.775	0.806	-3.895
31	8	Matt-03	1.204	1.246	4.378
32	10	Matt-03	-0.589	-0.641	2.061
33	2	Matt-03	0.368	0.351	1.240
34	26	Matt-03	-0.609	-0.653	-0.146
35	25	Neus-01	0.965	0.350	-6.003
36	7	Neus-01	0.435	0.250	1.635
37	11	Neus-01	0.399	-0.156	1.990
38	20	Neus-01	-4.085		-1.960
39	31	Neus-01	-0.162	-0.175	-0.092
40	13	Neus-01	0.725	-0.005	1.597
41	4	Neus-01	-0.650	-0.826	-1.085
42	19	Neus-01	0.983	0.394	1.965
43	24	Neus-01	-0.502	-0.328	-1.482
44	27	Neus-01	0.986	0.561	0.710
45	22	Neus-01	0.946	0.878	1.539
46	28	Neus-01	0.116	0.023	1.779
47	8	Neus-01	1.398	1.273	0.250
48	10	Neus-01	0.728	0.883	-0.164
49	2	Neus-01	-0.262	-0.210	-0.589
50	26	Neus-01	-0.662	-0.531	-0.805

Tabelle G.11: Korrelaten der Ausgleichungen

G.4. IGS-Stationsdaten

7-Stunden-Lösung $b=WTZR$ und $a=1$

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	$I_{1_{rb}}^{sa}$ [cycle]	$I_{2_{rb}}^{sa}$ [cycle]	Mehrdutigkeits-Paar [cycle]
1	6	POTS	2921885	2276791	1147762.14
2	17	POTS	1286529	1002488	505369.52
3	25	POTS	2630750	2049932	1033400.39
4	10	POTS	3414514	2660657	1341274.78
5	22	POTS	3592036	2798987	1411007.17
6	23	POTS	1795514	1399099	705306.99
7	3	POTS	2228658	1736615	875451.51
8	15	POTS	3241513	2525849	1273318.97
9	31	POTS	2019190	1573393	793169.48
10	29	POTS	2123384	1654585	834096.99
11	6	KOSG	1945247	1515775	764123.62
12	17	KOSG	367613	286450	144405.21
13	25	KOSG	3744162	2917526	1470765.12
14	10	KOSG	452246	352397	177650.94
15	23	KOSG	1143396	890957	449143.79
16	3	KOSG	3816247	2973698	1499079.73
17	31	KOSG	2604504	2029483	1023088.68
18	6	LAMA	-8128465	-6333862	-3192988.12
19	25	LAMA	-10588685	-8250917	-4159399.03
20	22	LAMA	-9199457	-7168403	-3613688.43
21	23	LAMA	4859010	3786238	1908694.68
22	31	LAMA	2676865	2085870	1051511.75
23	29	LAMA	5147479	4011021	2022008.09
24	17	BOR1	381966	297636	150041.84
25	10	BOR1	3664886	2855756	1439621.58
26	23	BOR1	877921	684094	344860.74
27	3	BOR1	1097438	855146	431090.47
28	15	BOR1	1042514	812346	409517.12
29	31	BOR1	870420	678249	341914.29
30	29	BOR1	7718730	6014594	3032033.38

Tabelle G.12: Doppeldifferenzmehrdutigkeiten

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	Korrelaten der Ausgleichungen		
			mit allen Bedingungsgleichungen	ohne Gleichung 20	ohne Gleichung 20 und 18
1	6	POTS	4.459	3.740	1.785
2	17	POTS	3.153	2.823	3.191
3	25	POTS	-0.303	-1.228	-0.768
4	10	POTS	-3.112	-3.023	-2.912
5	22	POTS	-7.486	-1.712	-1.770
6	23	POTS	-1.816	-1.963	-0.410
7	3	POTS	-2.354	-3.274	-3.296
8	15	POTS	3.889	3.152	2.963
9	31	POTS	3.939	2.408	1.603
10	29	POTS	-0.494	-0.381	-0.200
11	6	KOSG	0.376	0.014	-1.995
12	17	KOSG	2.310	2.850	3.125
13	25	KOSG	-3.091	-3.353	-2.830
14	10	KOSG	1.293	1.302	1.345
15	23	KOSG	-1.738	-1.976	-0.463
16	3	KOSG	3.054	4.072	4.082
17	31	KOSG	0.442	-0.046	-1.163
18	6	LAMA	-7.887	-6.012	
19	25	LAMA	3.154	5.226	3.717
20	22	LAMA	11.707		
21	23	LAMA	2.026	3.065	-2.134
22	31	LAMA	-10.244	-5.388	-1.691
23	29	LAMA	1.231	1.236	0.332
24	17	BOR1	0.065	0.266	-0.609
25	10	BOR1	1.472	1.386	1.208
26	23	BOR1	-2.348	-2.722	-2.038
27	3	BOR1	-1.477	-0.809	-0.680
28	15	BOR1	1.303	2.231	2.335
29	31	BOR1	1.032	0.303	-0.239
30	29	BOR1	-1.498	-1.722	-1.441

Tabelle G.13: Korrelaten der Ausgleichungen

7-Stunden-Lösung $b=KOSG$ und $a=1$

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	I_{1rb}^{sa} [cycle]	I_{2rb}^{sa} [cycle]	Mehrdeutigkeits-Paar [cycle]
1	6	WTZR	-171121	761020	-764123.60
2	17	WTZR	413548	716040	-144405.25
3	25	WTZR	-2146810	-867591	-1470765.06
4	22	WTZR	-2965852	-1211566	-2021774.60
5	23	WTZR	-53189	508142	-449143.81
6	15	WTZR	1023886	1790027	-370940.23
7	10	POTS	1163626	3	1163623.66
8	31	POTS	-229916	4	-229919.12
9	6	LAMA	-10073709	-7849633	-3957111.86
10	17	LAMA	-10764372	-8387814	-4228413.04
11	23	LAMA	3715614	2895281	1459550.88
12	3	LAMA	-1427683	-1112479	-560816.25
13	15	LAMA	2465208	1920938	968373.19
14	29	LAMA	2737201	2132881	1075215.81
15	6	BOR1	52916	41236	20784.05
16	22	BOR1	-3805842	-2965588	-1494994.21
17	23	BOR1	-265475	-206863	-104283.05

Tabelle G.14: Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten für die Stationen WTZR, POTS, LAMA und BOR1

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	Korrelaten aus den Ausgleichungen		
			1	2	3
1	6	WTZR	0.779	-4.888	-5.083
2	17	WTZR	-5.186	0.696	1.051
3	25	WTZR	-0.202	1.340	1.413
4	22	WTZR	-8.441	-0.952	-0.014
5	23	WTZR	6.668	6.411	6.722
6	3	WTZR	21.685		
7	10	POTS	1.473	2.072	2.028
8	31	POTS	-2.216	-7.669	0.128
9	6	LAMA	-4.802	-0.141	-0.108
10	17	LAMA	11.609		
11	23	LAMA	-1.636	0.032	0.347
12	3	LAMA	18.282		

Tabelle G.15: Korrelaten aus den Ausgleichungen 1, 2 und 3

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	Korrelaten aus den Ausgleichungen		
			1	2	3
12	3	LAMA	18.282		
13	15	LAMA	-22.350		
14	29	LAMA	-5.625	-4.578	-4.302
15	6	BOR1	5.533	7.939	8.170
16	22	BOR1	-4.491	-3.143	-2.772
17	23	BOR1	-7.617	-5.592	-5.251
18	3	POTS		15.663	
20	10	BOR1		-2.685	-2.823
23	15	BOR1		-6.694	-5.427

Tabelle G.16: Korrelaten aus den Ausgleichungen 1, 2 und 3

4.5-Stunden-Lösung $b=KOSG$ und $a=1$

lfd. Nr.	Satellit s	Station r	$I_{1_{rb}}^{sa}$ [cycle]	$I_{2_{rb}}^{sa}$ [cycle]	Mehrdutigkeits-Paar [cycle]
	10	1	1620994	2308261	-177650.94
	31	1	-1378479	-456084	-1023088.87
	31	1	-1378478	-456083	-1023088.65
	6	2	383640	2	383638.44
	17	2	360965	1	360964.22
	17	2	360966	2	360964.44
	22	2	-610765	3	-610767.34
	3	2	-623625	4	-623628.12
	15	2	902385	8	902378.77
10a	17	4	-10764372	-8387814	-4228413.04
10b	17	4	-10764371	-8387813	-4228412.82
	25	4	-14332846	-11168442	-5630163.92
	10	4	70807560	90869702	0.00
	22	4	-14346337	-11178955	-5635462.97
12	3	4	-1427682	-1112478	-560816.03
13	15	4	2465211	1920942	968373.08
	31	4	72364	56391	28422.96
	31	4	72365	56392	28423.18
	6	5	52916	41236	20784.05
	6	5	52917	41237	20784.27
	17	5	14356	11190	5636.52
	10	5	3212636	2503354	1261970.55
	10	5	3212637	2503355	1261970.77
	3	5	-2718805	-2118547	-1067989.16
23	15	5	98207	76525	38577.13
	31	5	-1734081	-1351230	-681174.51

Tabelle G.17: Neue Doppeldifferenzmehrdutigkeiten der 4.5-Stunden-Lösung

H. QIF-Verfahren (Quasi-Ionosphere-Free)

Bestimmung der Mehrdeutigkeiten

Um Mehrdeutigkeiten auf langen Basislinien (max. 2000 km) lösen zu können, wurde das QIF-Verfahren entwickelt und in die Berner Software implementiert ([Mervart, 1995] und [Rothacher, 1996]). Im Gegensatz zu einigen anderen Verfahren wie z.B. die Wide-Lane- und die Narrow-Lane-Mehrdeutigkeits-Lösung werden die Codemessungen hier nur zur Ermittlung der Näherungskordinaten und Uhrkorrekturen verwendet. Die Doppeldifferenzen der Phasenmessungen (Anhang C.2) bilden die Grundlage für die Mehrdeutigkeitsberechnung im QIF-Verfahren. [Mervart et al., 1994] gehen dabei von folgenden Grundgleichungen für die Doppeldifferenzen aus, wobei die Schreibweise wie im Anhang C.2 vorgenommen wird:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot \varphi_{1kl}^{ij} &= r_{kl}^{ij} + ION_{kl}^{ij} + \lambda_1 I_{1kl}^{ij} \\ \lambda_2 \cdot \varphi_{2kl}^{ij} &= r_{kl}^{ij} + \frac{1}{\alpha} ION_{kl}^{ij} + \lambda_2 I_{2kl}^{ij}\end{aligned}\quad (\text{H.1})$$

Der Einfluss der Troposphäre wird vernachlässigt. Die unten stehenden Indizes k und l bezeichnen die zwei Empfänger und die oben stehenden Indizes i und j die Satelliten. Eine Ausgleichung der Doppeldifferenzen bringt zunächst die reellen Werte b_{fkl}^{ij} mit $f = 1, 2$ an Stelle der Mehrdeutigkeiten I_{fkl}^{ij} hervor.

$$b_{fkl}^{ij} = (b_{fk}^i - b_{fl}^i) - (b_{fk}^j - b_{fl}^j) \Rightarrow I_{fkl}^{ij} \quad f = 1, 2 \quad (\text{H.2})$$

A priori wird ein Einzeldifferenzwert b_{fkl}^j als Referenzwert festgesetzt, so dass entweder Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten

$$b_{fkl}^{ij} = b_{fkl}^i - b_{fkl}^j \Rightarrow I_{fkl}^{ij} \quad (\text{H.3})$$

direkt aus den Doppeldifferenzbeobachtungen gewonnen werden oder aber aus Differenzen zwei solcher Doppeldifferenzmehrdeutigkeiten entstehen.

$$b_{fkl}^{ij} = b_{fkl}^{jm} - b_{fkl}^{im} \Rightarrow I_{fkl}^{ij} \quad (\text{H.4})$$

Zur Umwandlung der reellen Werte b_{fkl}^{ij} in die ganzen Zahlen I_{fkl}^{ij} bedient man sich der Zusammenhänge, die sich aus der Doppeldifferenzbildung der Linearkombination L_3 (Anhang C.1) ergeben:

$$\lambda_3 \cdot \varphi_{3kl}^{ij} = r_{kl}^{ij} + \lambda_3 (I_{1kl}^{ij} - \alpha I_{2kl}^{ij}) \quad (\text{H.5})$$

In [Mervart, 1995] wird in die obige Gleichung (H.5) die Formel für die Berechnung der Frequenz f_3 (Anhang C.1) eingesetzt:

$$\begin{aligned}\lambda_3 \cdot \varphi_{3kl}^{ij} &= r_{kl}^{ij} + c \frac{f_1}{f_1^2 - f_2^2} (I_{1kl}^{ij} - \alpha I_{2kl}^{ij}) \\ &= r_{kl}^{ij} + \frac{c}{f_1^2 - f_2^2} (f_1 I_{1kl}^{ij} - f_2 I_{2kl}^{ij}) \\ &= r_{kl}^{ij} + B\end{aligned}\quad (\text{H.6})$$

Da zunächst nur reelle Zahlen b_{fkl}^{ij} existieren, erhält man für den ionosphärenfreien Wert B den entsprechende Wert \hat{B} .

$$\hat{B} = \frac{c}{f_1^2 - f_2^2} (f_1 b_{1kl}^{ij} - f_2 b_{2kl}^{ij}) \quad (\text{H.7})$$

Durch Multiplikation mit der reziproken Wellenlänge $\lambda_N = \frac{c}{f_1 + f_2} \approx 11$ cm (Anhang C.1) lässt sich dieser Wert in Form von ganzen Narrow-Lane-Zyklen ausdrücken.

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \frac{\hat{B}}{\lambda_N} = \hat{B} \frac{f_1 + f_2}{c} \\ &= \frac{f_1}{f_1 - f_2} b_{1kl}^{ij} - \frac{f_2}{f_1 - f_2} b_{2kl}^{ij} \\ &= \beta_1 b_{1kl}^{ij} + \beta_2 b_{2kl}^{ij}\end{aligned}\quad (\text{H.8})$$

Aus den reellen Werten $b_{f_{kl}}^{ij}$ ergeben sich mehrere mögliche ganze Zahlen für $I_{f_{kl}}^{ij}$. Aus ihnen lassen sich analog zu (H.8) die Werte \tilde{b} bilden.

$$\tilde{b} = \beta_1 I_{1_{kl}}^{ij} + \beta_2 I_{2_{kl}}^{ij} \quad (\text{H.9})$$

Die Differenz aus \hat{b} und \tilde{b} dient als Kriterium für die Auswahl des "besten" Paares ganzer Zahlen.

$$d = |\hat{b} - \tilde{b}| \quad (\text{H.10})$$

Für viele Paare $I_{1_{kl}}^{ij}$, $I_{2_{kl}}^{ij}$ ergeben sich Differenzen d der gleichen Größenordnung. Eine Lösung lässt sich nur finden, wenn der Suchbereich eingeschränkt werden kann. Überprüft werden dabei entweder die Paare $b_{1_{kl}}^{ij}$, $b_{2_{kl}}^{ij}$ oder die Differenzpaare $(b_{1_{kl}}^{im} - b_{1_{kl}}^{jm})$, $(b_{2_{kl}}^{im} - b_{2_{kl}}^{jm})$. Für jeden Wert \hat{b} (Gleichung (H.11)), der aus diesen Paaren gebildet werden kann, wird die Standardabweichung $\sigma(\hat{b})$ aus den Elementen der Varianz-Kovarianz-Matrix des vorangegangenen Ausgleichs berechnet.

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \beta_1 b_{1_{kl}}^{ij} + \beta_2 b_{2_{kl}}^{ij} \\ &\text{oder} \\ \hat{b} &= \beta_1 (b_{1_{kl}}^{im} - b_{1_{kl}}^{jm}) + \beta_2 (b_{2_{kl}}^{im} - b_{2_{kl}}^{jm}) \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

Für das Paar $b_{1_{kl}}^{ij}$, $b_{2_{kl}}^{ij}$ bzw. $(b_{1_{kl}}^{im} - b_{1_{kl}}^{jm})$, $(b_{2_{kl}}^{im} - b_{2_{kl}}^{jm})$, welches das kleinste $\sigma(\hat{b})$ vorweist, wird der Suchbereich für die Mehrdeutigkeit auf L_1 durch

$$I_{1_{kl}}^{ij} = \text{nint}(b_{1_{kl}}^{ij}) \pm n, \quad n = 0, 1, \dots, n_{max} \quad (\text{H.12})$$

und für die Wide-Lane-Mehrdeutigkeit (Anhang C.1) durch

$$I_{5_{kl}}^{ij} = \text{nint}(b_{1_{kl}}^{ij} - b_{2_{kl}}^{ij}) \pm m = \text{nint}(b_{5_{kl}}^{ij}) \pm m, \quad m = 0, 1, \dots, m_{max} \quad (\text{H.13})$$

definiert. Die Größe von n_{max} und m_{max} ergibt sich aus den getroffenen a priori Informationen über die Ionosphäre bzw. durch die Vorgabe eines Wide-Lane-Suchraumes (meist 0.5 - 1.5 I_5 cycles). Die Differenz der gefundenen ganzen Zahlen ergibt eine L_2 -Mehrdeutigkeit.

$$I_{2_{kl}}^{ij} = I_{1_{kl}}^{ij} - I_{5_{kl}}^{ij} \quad (\text{H.14})$$

Alle gefundenen ganzen Zahlenpaare $I_{1_{kl}}^{ij}$, $I_{2_{kl}}^{ij}$ werden mit der Gleichung (H.15) getestet.

$$d = |\beta_1 (b_{1_{kl}}^{ij} - I_{1_{kl}}^{ij}) + \beta_2 (b_{2_{kl}}^{ij} - I_{2_{kl}}^{ij})| \quad (\text{H.15})$$

Das Paar, für welches der kleinste Testwert d berechnet werden kann, wird als Lösung akzeptiert, wobei ein benutzerdefinierter Grenzwert d_{max} (0.1 - 0.2) nicht überschritten werden darf. Wenn kein Paar gefunden wird, startet die gleiche Untersuchung des Wertepaares mit dem nächstkleineren $\sigma(\hat{b})$. Sobald ein ganzzahliges Paar akzeptiert wurde, wiederholt sich die gesamte Ausgleichung unter Einführung der gefundenen Mehrdeutigkeiten und die Suche weiterer Mehrdeutigkeiten beginnt von vorne. Damit können die Mehrdeutigkeiten in einem iterativen Prozess gelöst werden. Mit dem QIF-Verfahren ist auch die Lösung einer Teilmenge von Mehrdeutigkeiten möglich, während bei dem Verfahren FARA entweder alle oder keine Mehrdeutigkeiten gelöst werden können.

Bestimmung der Ionosphäre

Durch die ionosphärische Refraktion ergeben Messungen auf längeren Basislinien (>10 km) bei einer separaten Auswertung der Signale L_1 und L_2 keine günstigen Ausgangswerte für $b_{f_{kl}}^{ij}$. Im Rahmen des QIF-Verfahrens verwendet man deshalb zwei Ionosphärenmodelle, um den Einfluss der Ionosphäre zu reduzieren.

Satelliten- und epochspezifische Bestimmung der Ionosphäre

Berechnet wird eine Ionosphärenkorrektur $\Delta_{kl}^i(t_j)$ für jeden Satelliten i , jedes Empfängerpaar kl zu jeder Epoche t_j . Die Bestimmung dieser Parameter ohne jegliche a priori Bedingungen wäre equivalent zum Prozessieren der L_3 Linearkombination. Zur Ermittlung von ganzzahligen Werten für die Mehrdeutigkeiten ist es sinnvoll, die Modellierung dieser Parameter so vorzunehmen, dass sie Werte innerhalb weniger Dezimeter annehmen. Dazu führt man für jede Epoche eine zusätzliche Beobachtung mit einer a priori Gewichtung ein:

$$\Delta_{kl}^i(t_j) - \Delta_{kl,apr}^i(t_j) = 0 \quad (\text{H.16})$$

Die Werte $\Delta_{kl,apr}^i(t_j)$ erhält man aus einem Ionosphärenmodell. Meistens - besonders bei kurzen Basislinien - reicht die Annahme aus, dass $\Delta_{kl,apr}^i(t_j)$ den Wert Null annimmt. Nachdem die Epoche t_j prozessiert wurde, werden alle Parameter $\Delta_{kl,apr}^i(t_j)$ für jeden einzelnen Satelliten eliminiert. Andernfalls ist die Anzahl der Parameter, die im Normalgleichungssystem zu verarbeiten sind, zu groß.

Deterministisches Modell

Bei Basislinien die größer als 400 km sind, wird beim QIF-Verfahren das Single-Layer-Modell verwendet, das die Anzahl der Elektronen bezogen auf eine Schicht mit infinitesimaler Dicke in einer Höhe von 350 km über der Erdoberfläche modelliert. Der Gesamtelektroneninhalt $TEC_r^s(t)$ wird dabei in eine Reihe mit harmonischen Koeffizienten in Abhängigkeit von der Breite und des Stundenwinkels der Sonne sowie der Breite und Länge des ionosphärischen Punktes entwickelt.

Literaturverzeichnis

- Baby, H. B., Gole', P., and Lavergnat, J. (1988)*, A model for the tropospheric excess path length of radio waves from surface meteorological measurements, *Radio Science*, Vol. 23, Nr. 6, 1023-1038.
- Bauer, M. (1997)*, Vermessung und Ortung mit Satelliten, 4. völlig überarbeitete Auflage, Verlag Wichmann, Hüthig GmbH, Heidelberg, 1997.
- Baueršima, I. (1982)*, NAVSTAR/Global Positioning System (GPS) I., Mitteilungen der Satelliten-Beobachtungsstation Zimmerwald, Nr. 7, Astronomical Institute, University of Bern.
- Baueršima, I. (1983)*, NAVSTAR/Global Positioning System (GPS) II., Mitteilungen der Satelliten-Beobachtungsstation Zimmerwald, Nr. 10, Astronomical Institute, University of Bern.
- Cui, C. (2000)*, Über die Modellbildung der atmosphärischen Refraktion und Anwendung zur Satellitengeodäsie, Technische Universität Berlin, Interner Bericht.
- Davis, J.L., Herring, T.A., Shapiro, I.I., Rogers, A.E. and Elgered, G. (1985)*, Geodesy by radio interferometry: Effects of atmospheric modeling errors on estimates baseline length, *Radio Science*, Vol. 20, Nr. 6, 1593-1607.
- Engeln-Müllges, G. and Uhlig, F. (1996)*, Numerical Algorithms with C, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Gehlich, U. (1993)*, A Crossover-Technique for Ionospheric TEC Determination from GPS-Phasemeasurements and for L1, L2 Ambiguity Fixing, Proceedings of the Workshop: Modelling the Ionosphere for GPS Applications, Sept. 29-30, 1993.
- Gehlich, U., Angermann, D. und Lelgemann, D. (1988)*, Zur Modellierung des Phasenmeßprozesses geodätischer GPS-Empfänger, Festschrift Rudolf Sigl zum 60. Geburtstag, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft 287.
- Gehlich, U. und Lelgemann, D. (1995)*, Zur Modellbildung bei der Auswertung von GPS-Phasenmeßdaten, Technische Universität Berlin, Interner Bericht.
- Gehlich, U. und Lelgemann, D. (1997)*, Zur Parametrisierung von GPS-Phasenmessungen, Zeitschrift für Vermessungswesen, Nr. 6., 262-270.
- Gellert, W., Küstner, H., Hellwich, M. und Kästner, H., Hrsg. (1965)*, Kleine Enzyklopädie Mathematik, VEB Bibliographisches Institut Leipzig.
- Georgiadou, Y. and Kleusberg, A. (1986)*, Ionospheric Delay in GPS Observations, American Geophysical Union Fall Meeting, Dec. 7-12, 1986, San Francisco.
- Gerthsen, C. (1960)*, Physik, 6. Auflage, Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- Goad, C. (1985)*, Precise Relative Position Determination Using Global Positioning System Carrier Phase Measurements in a Nondifference Mode, Proceedings First International Symposium Precise Positioning with the Global Positioning System, Rockville, Maryland.
- Großmann, W. (1969)*, Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, 3. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Goad, C. and Goodman, L. (1974)*, A Modified Hopfield Tropospheric Refraction Correction Model, Proceedings of the Fall Annual meeting of the American Geophysical Union, San Francisco.
- Hartmann, G.K. and Leitinger, R. (1984)*, Range Errors due to ionospheric and tropospheric effects for signal frequencies above 100 MHz, Bulletin Géodésique, Nr. 58, 109-136.
- Heisterkamp, M. (1991)*, Fortran 90, Wissenschaftsverlag Mannheim Wien Zürich.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H. and Collins, J. (1997)*, GPS in Theorie and Practice, 4. Auflage, Springer - Verlag, Wien, New York.
- Hopfield, H.S. (1969)*, Two Quartic Tropospheric Refractivity Profile for Correcting Satellite Data, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 74, 4487-4499.
- Hopfield, H.S. (1971)*, Tropospheric effect on electromagnetically measured range: Prediction from surface weather data, *Radio Science*, Vol. 6, Nr. 3, 357-367.
- Hopfield, H.S. (1979)*, Improvements in the tropospheric refraction correction for range measurements, *Phil. Trans. Royal Society London, A* 294, 341-352.

- Hugentobler, U., Schaer, S. and Fridez, P. (2001)*, Bernese GPS Software Version 4.2, Documentation of the Bernese GPS Software Version 4.2, Astronomical Institute, University of Bern.
- King, R.W., Masters, E.G., Rizos, C., Stolz, A. and Collins, J. (1985)*, Surveying with GPS, 1. Auflage, Dümmler-Bonn, Bonn.
- Klotz, J. (2000)*, Geodätische Untersuchungen zur Deformation aktiver Kontinentalränder, Habilitationsschrift, TU Berlin.
- Lohmar, F. (1984)*, Zur Berechnung ionosphärischer Refraktionskorrekturen für VLBI-Beobachtungen aus simultanen Dopplermessungen nach Satelliten, Universität Bonn.
- Mansfeld, W. (1998)*, Satellitenortung und Navigation, 4. völlig überarbeitete Auflage, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig / Wiesbaden.
- Mervart, L. (1995)*, Ambiguity Resolution Techniques in Geodetic and Geodynamic Applications of the Global Positioning System, Schweizerische Geodätische Kommission, Vol. 53.
- Mervart, L., Beutler, G., Rothacher, M. and Wild, U. (1994)*, Ambiguity resolution strategies using the results of International GPS Geodynamics Service (IGS), Bulletin Géodésique, Vol. 68.
- Montenbruck, O. and Gill, E. (2000)*, Satellite Orbits Models, Methods, and Applications, 1. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Niell, I.E. (1996)*, Global mapping functions for the atmosphere delay at radio wavelength, Journal of Geophysical Research, Vol. 101, Nr. B2, 3227-3246.
- Reich, A. (2000)*, Bestimmung von Ambiguity-Paaren bei der Auswertung von GPS-Phasennmessungen auf langen Basislinien, Technische Universität Berlin, Diplomarbeit (unveröffentlicht).
- Reinking, J. (1987)*, Koordinatenbestimmung mittels Phasennmessungen im Global Positioning System, Technische Universität Berlin, Diplomarbeit (unveröffentlicht).
- Reissmann, G. (1980)*, Die Ausgleichsrechnung, 5. Auflage, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.
- Rothacher, M. (1992)*, Orbits of satellite Systems in Space Geodesy, Schweizerische Geodätische Kommission, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Eidg. Technische Hochschule Zürich, Zürich.
- Rothacher, M. and Mervart, L. (1996)*, Bernese GPS Software Version 4.0, Documentation of the Bernese GPS Software Version 4.0, Astronomical Institute, University of Bern.
- Saastamoinen, J. (1973)*, Contributions to the theory of atmospheric refraction, Bulletin Géodésique, Nr. 107, 13-34.
- Saler, H. (1995)*, Erweiterte Modellbildung zur Netzausgleichung für die Deformationsanalyse dargestellt am Beispiel der Geotraverse Venezolanische Anden, Deutsche Geodätische Kommission, Heft 447, Dissertation, Reihe C.
- Sardon, E., Rius, A. and Zarrao, N. (1994)* Ionospheric calibration of single frequency VLBI and GPS observations using dual GPS data, Bulletin Géodésique, Vol. 68, 230-235.
- Schwarz, H. R. (1993)*, Numerische Mathematik, 3. Auflage, B.G. Teubner Stuttgart.
- Seeber, G. (1993)*, Satellitengeodäsie, 2. Auflage, Walter de Gruyter Verlag, Berlin.
- Sovers, O.J. (1991)*, Observation model and parameter partials for the JPL VLBI parameter estimation software "MODEST-1991", JPL Publication 83-39, Rev. 4.
- Stoer, J. (1999)*, Numerische Mathematik 1, 8. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Titz, H. (1999)*, Regionale GPS/GLONASS-Echtzeitsysteme in Österreich, Geowissenschaftliche Mitteilungen der TU-Wien, Heft 50, 11-20.
- Teunissen, P.J.G. and Kleusberg, A. (1998)*, GPS for geodesy, Berlin, New York: Springer, 2nd Edition.
- Ullner, M. (2001)*, Untersuchungen verschiedener Modelle für die troposphärische Refraktion und Anwendungen zur GPS-Datenverarbeitung, Technische Universität Berlin, Diplomarbeit (unveröffentlicht).
- Werner, W. (1999)*, Entwicklung eines Hochpräzisen DGPS-DGLONASS Navigationssystems unter besonderer Berücksichtigung von Pseudolites, Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, Heft 64.
- Wild, U., Beutler, G., Gurtner, W. and Rothacher, M. (1989)*, Estimating the ionosphere using one or dual frequency GPS receivers, Proceedings of the Fifth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, Las Cruces, New Mexico.
- Wziontek, H., Wienholz, K. and Lelgemann, D. (2001)*, On the Interpretation of the Lagrange's Multipliers as a measure of Constraint in Adjustment Problems, Fourth International Symposium "Turkish-German Joint Geodetic Days", 777-783.
- Van Dierendonck, A.J., Russell, S.S., Kopitzke, E.R. and Birnbaum, M. (1978)*, The GPS Navigation Message, Journal of The Institute of Navigation, Vol. 25, Nr. 2, 55-73.

Danksagung

Bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Lelgemann, der den Anstoß für die vorliegende Forschungsarbeit gab. Durch die Unterstützung und den Freiraum, den er mir seit Beginn meiner Tätigkeit als Wissenschaftliche Mitarbeiterin an der TU Berlin gewährte, konnte ich einerseits durch die Teilnahme an Konferenzen und Workshops wichtige Aspekte dazulernen und andererseits nötige Kontakte knüpfen. Er war zu jeder Zeit und zu jeder Frage ansprechbar und trug durch seine Ratschläge wesentlich zur Entstehung der Arbeit bei.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Harald Schuh danke ich für seine Unterstützung und Beratung insbesondere während eines längeren Aufenthaltes an der Technischen Universität Wien, wodurch die Entwicklung der Arbeit entscheidend vorangetrieben wurde. Er verfolgte von Beginn an die Forschungsarbeiten zu dem vorliegenden Thema und erzeugte auf Grund seiner Nachfragen den notwendigen Druck sowie die entsprechende Motivation.

Mein Dank geht auch an Dr.-Ing. habil Jürgen Klotz. Er lieferte entscheidende Hinweise zur Zielstellung und Strukturierung der Arbeit.

Danken möchte ich meinem Kollegen Dipl.-Ing. Andreas Rietdorf und unserem ehemaligen Oberingenieur Dr.-Ing. habil Svetovar Petrovic, die stets zu Diskussionen zur Verfügung standen, allen Studenten, die im Rahmen von Diplom- und Seminararbeiten zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben, und Prof. Dr.-Ing. Otto Hirsch für seine Hilfe bei der Beschaffung von Literatur.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinem Lebensgefährten, der mir beim Korrekturlesen half und den Weg bis zur Abgabe dieser Arbeit mit seinem Optimismus und Humor begradigte. Auf keinen Fall darf ich an dieser Stelle meine Eltern und die gesamte Familie vergessen, ohne die ich ein solches Ziel wohl nie erreicht hätte. Der Abschlusssatz und der damit verbundene Dank ist meinen Freunden gewidmet, die sich über jeden Fortschritt der Arbeit freuten und mir mit Rat und Tat zur Seite standen.