

**Jochen Howind**

**Analyse des stochastischen Modells  
von GPS-Trägerphasenbeobachtungen**

**München 2005**

---

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**



Analyse des stochastischen Modells  
von GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
von der Fakultät für  
Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)  
genehmigte  
Dissertation

von

Dipl.-Ing. Jochen Howind

aus Hockenheim

München 2005

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

**Deutsche Geodätische Kommission**

Marstallplatz 8 • D – 80 539 München

Telefon +49 - (0)89 - 23 031 -0 / -1113 • Telefax +49 - (0)89 - 23 031 -1283 / -1100

E-mail [hornik@dgfi.badw.de](mailto:hornik@dgfi.badw.de) • <http://dgk.badw.de>

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Bernhard Heck

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Hansjörg Kutterer

Tag der mündlichen Prüfung: 9.12.2004

---

© 2005 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,  
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

## **Kurzfassung**

Die am häufigsten verwendeten Verfahren zur Auswertung geodätischer Beobachtungen basieren auf der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dieser Algorithmus liefert jedoch nur dann zuverlässige Schätzwerte für die unbekannt Parameter und deren Genauigkeiten, wenn sowohl das funktionale als auch das stochastische Modell zutreffend definiert werden. Im Fall des Global Positioning Systems (GPS) sind Verzerrungen bei den Ergebnissen der Parameterschätzung nicht auszuschließen, da das stochastische Modell - herkömmlich repräsentiert durch eine skalierte Einheitsmatrix als Kovarianzmatrix der GPS-Trägerphasenbeobachtungen - die Realität nur unzureichend reflektiert. Insbesondere die damit implizierte konstante Genauigkeit sowie die Unkorreliertheit aller GPS-Beobachtungen muss in diesem Zusammenhang in Frage gestellt werden.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Analyseverfahren bietet die Möglichkeit der Untersuchung der Varianz- bzw. Kovarianzstruktur von GPS-Beobachtungen und deren zutreffender Modellierung im Rahmen der Kovarianzmatrix. Es basiert auf der Analyse von Residuen nach der Auswertung doppeltdifferenzierter GPS-Trägerphasenbeobachtungen und besteht im Wesentlichen aus zwei Schritten. Neben der Bestimmung von für jede Residuenzeitreihe individuellen Varianzfunktionen in Abhängigkeit von der Satellitenelevation werden in einem zweiten Verfahrensschritt zeitliche Korrelationen auf der Basis empirischer Autokorrelationsfunktionen ermittelt. Während mit den geschätzten Varianzfunktionen die Hauptdiagonale der Kovarianzmatrix der GPS-Doppeldifferenzbeobachtungen modifiziert wird, dienen die ermittelten Korrelationsfunktionen zur Erweiterung der Kovarianzmatrix außerhalb der Hauptdiagonale. Besonderer Wert wird auf die Überprüfung aller Verfahrensschritte durch geeignete statistische Tests gelegt.

Das präsentierte Verfahren wird auf umfangreiches Datenmaterial angewendet, und die Ergebnisse werden unter Berücksichtigung der verschiedenen Modellierungsstufen der Kovarianzmatrix der GPS-Doppeldifferenzbeobachtungen diskutiert. Dabei zeigt sich, dass die geschätzten Stationskoordinaten kurzer Basislinien kaum von der unterschiedlichen stochastischen Modellierung beeinflusst werden, während auf langen Basislinien signifikante Änderungen insbesondere bei der ellipsoidischen Höhe festzustellen sind. Die Genauigkeiten aller geschätzten Stationskoordinaten verändern sich unter Berücksichtigung der elevationsabhängigen Varianzmodellierung kaum. Die Einführung zeitlicher Korrelationen führt jedoch unabhängig von der Basislinienlänge bei allen Koordinatenkomponenten zu deutlich realistischeren Genauigkeitsangaben.

## **Abstract**

Geodetic observations are usually processed by means of the Least Squares Method. However, this algorithm delivers reliable valuations of unknown parameters and associated accuracy measures only if the functional and stochastic models are appropriate. Observations using the Global Positioning System (GPS) are affected by various influences, e.g. by the atmosphere. Hence, it seems to be a reasonable conclusion that the commonly used stochastic model of GPS-observations with a scaled identity matrix with homoscedastic (i.e. equal variance) and uncorrelated errors is not adequate.

The knowledge of the stochastic behaviour of GPS-observations can be improved by analyzing time series of residuals originating from Least Squares evaluation. Based on this analysis a procedure for modifying the covariance matrix of double-differenced GPS carrier-phase observations is presented. Essentially, it consists of two steps. At first individual variance functions for all double-difference observations depending on the satellite elevation for modifying the main diagonal of its covariance matrix are estimated. Secondly, temporal correlations are determined to adapt the other parts of the covariance matrix. All steps are verified by suitable statistical tests.

The procedure is applied to extensive data sets with different characteristics. The results of the evaluation process, taking into account all realizations of the stochastic model mentioned above, are presented. It is shown that modifying the main diagonal of the covariance matrix with elevation-dependent variance functions leads to significant changes in the estimated ellipsoidal height of GPS-stations only for long baselines. The accuracy measures are not affected by this modification. In contrast to these results, considering temporal correlations in the covariance matrix of GPS-double-difference observations causes distinct changes in the accuracy measures of all coordinate components independently of the baseline length.

## Abkürzungen

AR	Autoregression
ARMA	Autoregressive Moving Average
ARIMA	Autoregressive Integrated Moving Average
BLUE	Best Linear Unbiased Estimator
BS	Bernese GPS-Software
BUE	Best Unbiased Estimator
DD	Double Difference
DFG	Deutsche Forschungsgemeinschaft
GPS	Global Positioning System
IGS	International GPS Service
IID	Independently and Identically Distributed
LS	Least Squares
MA	Moving Average
PCV	Phase Center Variations
PRN	Pseudo Random Noise
RINEX	Receiver Independent Exchange Format
SA	Selective Availability
SCAR	Scientific Committee on Antarctic Research
SD	Single Difference
SNR	Signal-to-Noise Ratio
UMP	Uniformly Most Powerful
WN	White Noise
ZD	Zero Difference

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung.....</b>	<b>7</b>
1.1 Motivation.....	7
1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit.....	8
<b>2 Mathematische Grundlagen .....</b>	<b>9</b>
2.1 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen .....	9
2.2 Zeitreihenanalyse .....	10
2.2.1 Komponentenmodell.....	11
2.2.2 Stochastische Prozesse.....	12
2.3 Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktionen.....	14
2.4 Statistische Tests.....	15
2.4.1 Tests auf Homogenität der Varianz einer Zeitreihe .....	16
2.4.2 Test auf Unabhängigkeit bzw. Unkorreliertheit einer Zeitreihe .....	17
<b>3 Modellierung und Auswertung von GPS-Trägerphasenbeobachtungen.....</b>	<b>18</b>
3.1 Das funktionale Modell bei der Auswertung von GPS-Trägerphasenbeobachtungen .....	18
3.1.1 Beobachtungsgleichungen originärer GPS-Trägerphasenbeobachtungen .....	19
3.1.2 Fehlerquellen bei originären GPS-Trägerphasenbeobachtungen.....	20
3.1.3 Beobachtungsgleichungen abgeleiteter GPS-Trägerphasenbeobachtungen .....	22
3.1.4 Struktur des Beobachtungsvektors originärer sowie abgeleiteter GPS-Trägerphasenbeobachtungen.....	25
3.2 Das stochastische Modell der GPS-Trägerphasenbeobachtungen.....	26
3.2.1 Modellierung der Kovarianzmatrix originärer Trägerphasenbeobachtungen .....	27
3.2.2 Struktur der Kovarianzmatrix abgeleiteter Trägerphasenbeobachtungen.....	28
3.3 Methoden und Kriterien zur Analyse des stochastischen Modells der GPS-Trägerphasenbeobachtungen .....	30
3.3.1 Varianz der GPS-Trägerphasenbeobachtungen .....	31
3.3.2 Mathematische und physikalische Korrelationen .....	34
<b>4 Verfahren zur Analyse und Erweiterung des stochastischen Modells der     GPS-Trägerphasenbeobachtungen.....</b>	<b>36</b>
4.1 Ausgangsdaten und Kriterien zur Analyse des stochastischen Modells von GPS-Trägerphasenbeobachtungen .....	37
4.1.1 Residuen .....	37
4.1.2 Elevation.....	42
4.2 Varianz der GPS-Residuen .....	44
4.2.1 Trend .....	44
4.2.2 Test auf Homo- bzw. Heteroskedastizität.....	45
4.2.3 Regression .....	48
4.3 Berücksichtigung von Varianzfunktionen im stochastischen Modell der GPS-Trägerphasenbeobachtungen .....	53
4.4 Korrelationen bei GPS-Residuen .....	54
4.4.1 Bestimmung von Autokorrelationsfunktionen.....	55
4.4.2 Schätzung analytischer Funktionen zur Repräsentation der empirischen Autokorrelationsfunktionen.....	57
4.5 Berücksichtigung von Autokorrelationsfunktionen im stochastischen Modell der GPS-Trägerphasenbeobachtungen .....	59

<b>5 Anwendungsbeispiele .....</b>	<b>62</b>
5.1 Datenmaterial.....	62
5.2 Auswertestrategie.....	63
5.3 Ergebnisse der Varianzhomogenisierung.....	65
5.3.1 Bestimmung der Varianzfunktion.....	66
5.3.2 Test auf Homoskedastizität.....	70
5.3.3 Auswirkung der Berücksichtigung der Varianzfunktion auf die Ausgleichungsergebnisse .....	80
5.4 Ergebnisse der Untersuchungen zur Korrelationsstruktur.....	86
5.4.1 Bestimmung der Autokorrelationsfunktion .....	86
5.4.2 Auswirkung von Autokorrelationsfunktionen auf die Ausgleichungsergebnisse .....	91
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>96</b>
6.1 Zusammenfassung.....	96
6.2 Ausblick.....	98
<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>100</b>

# 1 Einführung

## 1.1 Motivation

Das Global Positioning System (GPS) erfährt seit dem Start der ersten GPS-Satelliten im Jahr 1978 eine fortwährende Leistungssteigerung sowohl in der Satelliten- und Empfängertechnologie als auch im Bereich der Auswertemodelle. In gleichem Maße wuchsen im Verlauf dieser Zeit die Ansprüche der Nutzer an die Genauigkeit und Zuverlässigkeit des Systems. Höchste Genauigkeitsanforderungen werden heutzutage u.a. in Projekten zur Überwachung von Bauwerken oder Teilen der Erdoberfläche gestellt. Insbesondere bei der Untersuchung geodynamischer Fragestellungen wie dem Nachweis rezenter Krustenbewegungen im Kontext der globalen Plattentektonik z.B. im Rahmen des „Geodetic Antarctic Project“ (GAP) (Dietrich, 2000) ist es erforderlich, die Koordinaten der Beobachtungsstationen mit Genauigkeiten von wenigen Millimetern festzulegen. Dies wird jedoch nur durch eine der GPS-Messung nachgelagerte Auswertung (Post-Processing) von GPS-Trägerphasenbeobachtungen erreicht – bei Echtzeit-Anwendungen bzw. bei der Verwendung von Code-Beobachtungen sind deutlich geringere Genauigkeiten bei reduzierter Zuverlässigkeit zu erzielen. Um das volle Genauigkeitspotential von GPS-Trägerphasenbeobachtungen auszuschöpfen, müssen alle Eigenschaften der Satellitensignale sowie die auf sie einwirkenden Einflussfaktoren, von der Entstehung im GPS-Satelliten über den Signalweg durch die Atmosphäre bis zum Empfang auf der Beobachtungsstation, bekannt sein, oder es müssen zumindest deren Auswirkungen im Rahmen der GPS-Auswertung zutreffend modelliert werden. Es ist jedoch seit langem bekannt, dass die von GPS-Auswerteprogrammen gelieferten Genauigkeitsangaben aufgrund von Unzulänglichkeiten im Auswertemodell zu optimistisch sind (vgl. u.a. Ananga et al., 1994 oder Han und Rizos, 1995).

Während die funktionale Modellbildung im Rahmen der GPS-Auswertung seit Beginn der operationellen Phase des GPS intensiv untersucht und verfeinert wurde, wurde dem stochastischen Modell der GPS-Beobachtungen weitaus weniger Aufmerksamkeit geschenkt, da einerseits die physikalischen Vorgänge in der Atmosphäre nicht hinreichend genau bekannt sind und andererseits eine vollständige stochastische Modellierung der GPS-Beobachtungen einen immensen Aufwand bei der Verarbeitung der resultierenden Kovarianzmatrizen der GPS-Beobachtungen erfordert. Daher wird auch heutzutage noch oft eine einfache, skalierte Einheitsmatrix als Kovarianzmatrix der GPS-Trägerphasenbeobachtungen in die Auswertung eingeführt. Es ist jedoch naheliegend, die damit implizierte konstante Varianz (Homoskedastizität) sowie Unkorreliertheit aller GPS-Beobachtungen in Frage zu stellen (vgl. Tiberius et al., 1999), zumal Bischoff et al. (2005a) anhand von Beispieldaten nachweisen konnten, dass die Varianz von GPS-Beobachtungen mit abnehmender Satellitenelevation in der Regel ansteigt.

Ansätze zur Analyse des stochastischen Modells von GPS-Beobachtungen und zur Modellierung verschiedener Einflüsse auf die GPS-Signale sind seit Beginn der Nutzung des GPS vorhanden. Es existieren eine Vielzahl von Untersuchungen zu speziellen Aspekten des stochastischen Modells. So widmen sich u.a. Jin und de Jong (1996) der Bestimmung von Varianzfunktionen in Abhängigkeit von der Satellitenelevation, während Wieser und Brunner (2000) das Signal-Rausch-Verhältnis als Abhängigkeitsmaß zur Modellierung der Varianzfunktion heranziehen. Diese Ansätze führen allerdings oft zu einer starken Herabgewichtung von Beobachtungen in niedrigen Elevationen, sodass ihr Einfluss bei der GPS-Auswertung nur noch sehr gering ist. Insbesondere bei kritischen Beobachtungskonfigurationen, wie z.B. bei starken Abschattungen oder bei Messungen in hohen geographischen Breiten, wo Beobachtungen in niedrigen Elevationen zur Stabilisierung der Parameterschätzung unerlässlich sind, kann auf diese Beobachtungen und damit auf eine sinnvolle Gewichtung nicht verzichtet werden. Deshalb sind diese Ansätze kritisch zu beleuchten. Abgesehen von der Bestimmung geeigneter Varianzfunktionen ist die Modellierung von Korrelationen zwischen unterschiedlichen GPS-Beobachtungen ein wichtiger Aspekt bei der GPS-Auswertung. In diesem Zusammenhang sind beispielhaft El-Rabbany (1994) und Tiberius (2001) zu nennen, die Korrelationen zwischen GPS-Beobachtungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten (zeitliche Korrelationen) durch die Bestimmung von Autokorrelationsfunktionen bzw. auf der Basis stochastischer Prozesse analysieren. Alle diese Untersuchungen münden jedoch nicht in ein geschlossenes Konzept zur Modellierung der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen. Erst in jüngster Zeit schlagen Wang et al. (2002) ein iteratives Verfahren zur Besetzung der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen auf der Basis einer Varianzkomponentenschätzung vor und untersuchen deren Auswirkung auf die Ergebnisse der Parameterschätzung.

Wirft man den Blick auf andere geodätische Beobachtungsverfahren, so wird deutlich, dass die Problematik des ungenügend bestimmten stochastischen Modells der Beobachtungsgrößen auch dort ein aktuelles Forschungsthema darstellt. So untersucht Tesmer (2004) das stochastische Modell bei der Auswertung von VLBI-Beobachtungen und stellt dabei insbesondere Abhängigkeiten der Varianz der VLBI-Beobachtungen von der Elevation der empfangenen Signale fest.

Es wird somit deutlich, dass die stochastische Modellbildung insbesondere bei der Auswertung von GPS-Beobachtungen die Realität nur unzureichend widerspiegelt. Diese Erkenntnis kann als Motivation für die Durchführung der dargestellten Untersuchungen dienen. Die Ziele sowie der Aufbau dieser Arbeit werden in Abschnitt 1.2 vorgestellt.

## 1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist die These, dass das stochastische Modell der GPS-Beobachtungen die Realität nur unzureichend repräsentiert und somit die Schätzung der unbekannt Parameter der Kleinste-Quadrate-Ausgleichung sowie deren Genauigkeitsmaße verfälscht werden kann. Daher ist es das Ziel dieser Arbeit, ein Verfahren zur erweiterten, realistischeren Modellierung der Kovarianzmatrix der GPS-Trägerphasenbeobachtungen zur Verfügung zu stellen, um die Auswertqualität zu verbessern.

In Kapitel 2 sollen zunächst die für diese Arbeit relevanten mathematischen Grundlagen vorgestellt werden. Dabei wird neben der Beschreibung des im geodätischen Bereich am häufigsten verwendeten Ausgleichsverfahrens – der Methode der kleinsten Quadrate – in die Konzepte und Methoden der Zeitreihenanalyse eingeführt. Den Abschluss dieses Kapitels bildet ein Überblick über die in dieser Arbeit verwendeten statistischen Tests. Als Grundlage für die weiteren Untersuchungen folgt in Kapitel 3 die Beschreibung des als Ausgangspunkt dienenden herkömmlichen funktionalen und stochastischen Modells bei der Auswertung der GPS-Trägerphasenbeobachtungen. Ein Überblick über Ansätze und Kriterien zur Analyse des stochastischen Modells und deren kritische Diskussion runden dieses Kapitel ab.

Kernstück der Arbeit ist die Beschreibung eines Verfahrens zur Analyse von Residuenzeitreihen nach der Auswertung doppelt differenzierter GPS-Trägerphasenbeobachtungen. Es besteht im Wesentlichen aus den in Kapitel 4 dargestellten Schritten:

- Schätzung von Varianzfunktionen der GPS-Beobachtungen in Abhängigkeit von der Satellitenelevation und deren Integration in die Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen.
- Schätzung von zeitlichen Korrelationen und Integration in die Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen.

Alle diese Schritte sollen dabei u.a. durch statistische Tests überprüft werden. Den Abschluss der Arbeit bildet in Kapitel 5 die Anwendung des vorgestellten Verfahrens auf Datenmaterial unterschiedlicher Charakteristik (geographische Verteilung, Basislinienlänge und Beobachtungsdauer) sowie ein Vergleich der dabei geschätzten Parameter und Genauigkeiten unter Berücksichtigung der verschiedenen Stufen der stochastischen Modellierung.

## 2 Mathematische Grundlagen

In der Praxis der GPS-Auswertung ist die am häufigsten angewendete Methode zur Bestimmung der unbekannt Parameter, wie z.B. der Stationskoordinaten, die vermittelnde Ausgleichung. Daher soll im folgenden Abschnitt 2.1 zunächst ein Überblick über die grundlegenden Zusammenhänge und die verwendeten Bezeichnungen im Modell der vermittelnden Ausgleichung gegeben werden. Danach werden mathematische Methoden zur Untersuchung und gegebenenfalls zur Verbesserung der im einführenden Abschnitt dargestellten Defizite, insbesondere des stochastischen Modells der vermittelnden Ausgleichung, vorgestellt. Neben den Verfahren der Zeitreihenanalyse in Abschnitt 2.2 spielt dabei besonders die Bestimmung von Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktionen in Abschnitt 2.3 eine wichtige Rolle. Den Überblick über die mathematischen Grundlagen rundet in Abschnitt 2.4 die Darstellung und Diskussion der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten statistischen Tests ab.

### 2.1 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

Ein Ziel der Ausgleichungsrechnung ist die approximative Beschreibung der Realität durch mathematische Modelle mit Hilfe der Schätzung unbekannter Parameter. Das **funktionale Modell**

$$E(L) = F(X) \tag{2.1}$$

definiert dementsprechend den Zusammenhang zwischen dem Erwartungswert des Vektors der durch die Beobachtungen  $L$  realisierten Zufallsvariablen, und dem unbekannt Parametervektor  $X$ . Ist dieser Zusammenhang nichtlinear, was in der Praxis sehr häufig vorkommt, so muss (2.1) durch eine Taylorreihenentwicklung an einer geeigneten, vorgegebenen Stelle  $X_0$  unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter und höherer Ordnung linearisiert werden:

$$E(L) = F(X_0) + \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right) (X - X_0) + \dots \tag{2.2}$$

Unter Verwendung des verkürzten Beobachtungsvektors  $l = L - F(X_0)$ , der Designmatrix  $A = \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)$  und des Vektors der Zuschläge zu den unbekannt Parametern  $x = (X - X_0)$  ergibt sich dann

$$E(l) = Ax \tag{2.3}$$

Führt man Beobachtungen als Realisierungen des Zufallsvektors  $l$  ein, so entstehen zufällige Fehler (z.B. Messfehler), die durch einen normalverteilten stochastischen Anteil  $\varepsilon$  beschrieben werden, wodurch sich das linearisierte funktionale Modell des **Gauß-Markov-Modells**

$$l = Ax + \varepsilon \tag{2.4}$$

ergibt. Das zugehörige **stochastische Modell**, in dem die statistischen Eigenschaften der Beobachtungen beschrieben werden, kann durch

$$D(\varepsilon) = C_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_0^2 Q_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_0^2 P^{-1} \quad \text{mit} \quad E(\varepsilon) = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma_0^2 Q_{\varepsilon\varepsilon}) \tag{2.5}$$

dargestellt werden, wobei

$D(\varepsilon)$	die Dispersion bzw. Streuung der zufälligen Fehler,
$C_{\varepsilon\varepsilon}$	die Kovarianzmatrix von $\varepsilon$ ,
$Q_{\varepsilon\varepsilon}$	die Kofaktormatrix von $\varepsilon$ ,
$P = Q_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}$	die Gewichtsmatrix und
$\sigma_0^2$	den a priori Varianzfaktor

bezeichnet. Der stochastische Anteil  $\varepsilon$  wird im geodätischen Bereich – auch im Rahmen dieser Arbeit – oft als Größe zur Beseitigung der im überbestimmten Fall auftretenden Inkonsistenz des Modells (2.3) interpretiert und dann als Verbesserung  $-v$  eingeführt, wodurch (2.4) in

$$l = Ax - v \quad (2.6)$$

und das stochastische Modell in

$$D(l) = D(\varepsilon) = C_u = \sigma_0^2 Q_u = \sigma_0^2 P^{-1} \quad \text{mit} \quad E(l) = Ax \Rightarrow l \sim N(Ax, \sigma_0^2 Q_u) \quad (2.7)$$

übergeht. Unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungen normalverteilt sind besitzt der Beobachtungsvektor  $l=(l_1, l_2, \dots, l_n)^T$  eine  $n$ -dimensionale Normalverteilung, die durch die Momente erster und zweiter Ordnung aus (2.7) vollständig festgelegt ist. Mit Hilfe der **Methode der kleinsten Quadrate** erhält man die Schätzung von  $x$ , den Vektor  $\hat{x}$ , über die Minimierung der gewichteten Summe der quadrierten Verbesserungen (Verbesserungsquadratsumme  $\Omega = v^T P v$ ) bezüglich  $x$ :

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l. \quad (2.8)$$

Mit Hilfe des Varianzfortpflanzungsgesetzes berechnet sich dann die Kovarianzmatrix von  $\hat{x}$  zu

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = (A^T C_u^{-1} A)^{-1} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1}. \quad (2.9)$$

Dementsprechend ergeben sich der Vektor der geschätzten Verbesserungen  $v$  mit Erwartungswert  $E(v)=0$  und dessen Kovarianzmatrix, die im weiteren Verlauf der Arbeit von Bedeutung sind, zu

$$v = A\hat{x} - l = A(A^T P A)^{-1} A^T P l - l = [A(A^T P A)^{-1} A^T - P^{-1}] P l \quad \text{bzw.} \quad (2.10)$$

$$C_{vv} = \sigma_0^2 (P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} A^T). \quad (2.11)$$

Auf einige Eigenschaften der Schätzung nach kleinsten Quadraten und deren Anwendung soll im Folgenden kurz eingegangen werden.

Falls der Erwartungswert der Verbesserungen  $E(v)=0$  und die Varianz  $\sigma^2$  gegeben sind, handelt es sich beim Kleinst-Quadrat-Schätzer um einen besten linearen unverzerrten Schätzer (BLUE - best linear unbiased estimator, vgl. Grafarend und Schaffrin, 1993). Bei diesem Verfahren sind keine Annahmen über die statistische Verteilung der Beobachtungen notwendig, insbesondere nicht die Annahme einer Normalverteilung (Mikhail (1976), Kapitel 5.2). Notwendig ist diese Annahme oder deren Überprüfung (Tiberius und Borre, 1999) jedoch für diverse statistische Tests, die u.a. im Bereich der Geodäsie und auch im Rahmen dieser Arbeit angewendet werden. Zudem ist der Kleinst-Quadrat-Schätzer unter Annahme der Normalverteilung der Beobachtungen auch gleichzeitig der Maximum-Likelihood-Schätzer und der beste unverzerrte Schätzer (BUE - best unbiased estimator).

Im Bereich des stochastischen Modells wird vorausgesetzt, dass die oben angegebenen Inversen existieren. Falls dies nicht der Fall sein sollte, z.B. wegen Datumsdefekten in geodätischen Netzen, gibt es Verfahren zur Lösung dieser Problematik (vgl. Dinter, 2002), die jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein sollen. An die verwendeten Kovarianz- bzw. Kofaktormatrizen wird im Folgenden die Forderung nach positiver Definitheit gestellt, woraus die reguläre Invertierbarkeit folgt.

Im Rahmen dieser Darstellung wurde nur ein kurzer Abriss der Parameterschätzung auf Basis der Methode der kleinsten Quadrate gegeben. Zur Vertiefung dieser Thematik existiert ein immenser Fundus an Grundlagenliteratur. Stellvertretend sei dazu auf die Darstellungen in Caspary und Wichmann (1994) oder Koch (1997), Kapitel 3 verwiesen.

## 2.2 Zeitreihenanalyse

Die kontinuierliche Messwerterfassung bei GPS-Empfängern führt aufgrund hoher zeitlicher Auflösung über einen langen Zeitraum zu sehr großen Datenmengen. Bei solch umfangreichem Datenmaterial liegt es nahe, Methoden der Zeitreihenanalyse zur Untersuchung der GPS-Beobachtungen bzw. der Residuen aus der GPS-Auswertung heranzuziehen. Diese Untersuchungen können im Zeitbereich auf der Basis des klassischen Komponentenmodells der Zeitreihenanalyse oder auf der Basis stochastischer Prozesse erfolgen. Ansätze zur Analyse im Frequenzbereich, die besonders die

Aufdeckung zyklischer Effekte vereinfacht, sollen im Rahmen dieser Arbeit nicht verfolgt werden. Moderne Entwicklungen im Bereich der Wavelet-Theorie, mit der Informationen über Frequenz-Komponenten in Abhängigkeit eines Zeitparameters darstellt werden können, sollen ebenso wenig behandelt werden. Detaillierte Ausführungen zu Grundlagen und Methoden der Zeitreihenanalyse sind u.a. Schlittgen und Streitberg (2001) oder Brockwell und Davis (2000) zu entnehmen.

### 2.2.1 Komponentenmodell

Eine Zeitreihe ist allgemein definiert als eine (zeitlich) geordnete Folge von Messwerten  $\{Y_t, t=1, \dots, n\}$ . In vielen Fällen sind die Parameter  $t$  äquidistant, d.h., sie besitzen einen konstanten zeitlichen Abstand zwischen aufeinander folgenden Beobachtungen. Zahlreiche, auch in der vorliegenden Arbeit verwendete Verfahren sind jedoch auch auf den Fall übertragbar, dass die Zeitreihenwerte zu unregelmäßigen Zeitpunkten erhoben wurden. Bei Bedarf wird in den folgenden Darstellungen auf Einschränkungen hinsichtlich der Ausprägung der Parameter  $t$  hingewiesen.

Allgemein kann eine Zeitreihe in Anlehnung an die Darstellung in Hartung et al. (2002) aus den systematischen Komponenten  $G_t$  und  $S_t$  und eine zufällige Restkomponente  $R_t$  (Rauschen) additiv zusammengesetzt werden:

$$Y_t = G_t + S_t + R_t \quad (2.12)$$

Die glatte Komponente  $G_t$  setzt sich aus einem Trendanteil, der langfristige systematische Veränderungen im Niveau der Zeitreihe, z.B. ein lineares oder exponentielles Anwachsen, beschreibt, und einem langsam veränderlichen Konjunkturanteil zusammen. Die saisonale Komponente  $S_t$  umfasst periodische zeitabhängige Schwankungen wie z.B. den Einfluss der Jahreszeiten auf eine Zeitreihe. Schließlich umfasst die zufällige Restkomponente alle verbleibenden, sich unregelmäßig verändernden Störeffekte. Sie sollte im Vergleich zu den anderen Komponenten der Zeitreihe klein sein und zufällig um Null schwanken. Solche additiven Modelle sind jedoch nicht immer zur Beschreibung einer Zeitreihe geeignet. Ändert sich z.B. mit der glatten Komponente die Streuung der Werte, so beschreibt ein multiplikatives Modell der Form

$$Y_t = G_t \cdot S_t \cdot R_t \quad (2.13)$$

die Zeitreihe zutreffender. Dieses kann jedoch durch Logarithmierung auf ein additives Modell zurückgeführt werden:

$$\ln Y_t = \ln (G_t \cdot S_t \cdot R_t) = \ln G_t + \ln S_t + \ln R_t \quad (2.14)$$

Voraussetzungen für die weiteren Ausführungen sind einige Annahmen über die zufällige Restkomponente. Sofern  $R_t$  unabhängig normalverteilt mit Erwartungswert  $E(R_t)=0$  bzw.  $E(\ln R_t)=0$  und konstanter Varianz  $\sigma^2$  (Homoskedastizität) ist, handelt es sich bei den Schätzern nach der Methode der kleinsten Quadrate um beste unverzerrte Schätzer (BUE). Sie sind damit optimal im Sinne der kleinsten Varianz in der Klasse der linearen erwartungstreuen Schätzer. Sind diese Annahmen nicht erfüllt, so besitzen die Kleinste-Quadrate-Schätzer nur eingeschränkte Optimalitätseigenschaften. Daher muss die Gültigkeit der getroffenen Annahmen bzgl. Erwartungswert, Varianz und Unabhängigkeit sorgfältig überprüft und bewertet werden.

Die Bestimmung der Trendkomponente ist im Hinblick auf verschiedene Fragestellungen relevant. Für die Analyse der Ursachen des Trends ist die langfristige Entwicklung und dessen Beschreibung interessant. Für weitergehende Untersuchungen bzgl. der Abhängigkeiten zwischen Werten der Zeitreihe zu unterschiedlichen Zeitpunkten wie z.B. bei der Bestimmung der Autokorrelationsfunktion ist die Trendkomponente mit oder ohne Kenntnis der Ursachen gegebenenfalls zu eliminieren.

Unterschiedliche Modelle zur Beschreibung des Trends sind möglich. Globale Trendmodelle beschreiben die gesamte Zeitreihe mit Hilfe einer linearen, polynomialen oder auch exponentiellen Trendfunktion, deren Parameter aus den Daten z.B. mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden. Bietet sich keine globale funktionale Beschreibung für den Trendverlauf an, so kann die Zeitreihe unter Ausschaltung der zufälligen Restkomponente geglättet und somit der Trendverlauf herausgearbeitet werden, was der Bestimmung lokaler Trendfunktionen zur Berücksichtigung zeitlich variabler Effekte entspricht. Die einfachste Möglichkeit besteht in der Bestimmung eines gleitenden Mittelwertes

$$g_t = \frac{1}{2q+1} (Y_{t-q} + \dots + Y_t + \dots + Y_{t+q}), \quad t = q+1, \dots, n-q \quad (2.15)$$

mit Fensterbreite  $2q+1$ , die einer lokalen Regression im betrachteten Fenster entspricht. Durch Anwendung des gleitenden Mittelwertes werden somit die hochfrequenten Anteile der Zeitreihe herausgefiltert und die Zeitreihe wird geglättet. Der Grad der Glättung und damit die Beschreibung des Trends hängt dabei entscheidend von der individuellen Wahl der Fensterbreite ab. Zudem muss das Verfahren für die Zeitpunkte  $t \leq q$  und  $t > n-q$  (Anfangs- und Endstück der Zeitreihe) mit Hilfe gewichteter gleitender Durchschnitte modifiziert werden.

Eine weitere Variante zur Eliminierung eines Trends ist die Differenzenmethode. Dabei werden durch Bildung der ersten Differenzen aufeinanderfolgender Werte

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} \quad t = 2, \dots, n \quad (2.16)$$

lineare Trends eliminiert. Durch Bildung von Differenzen höherer Ordnung können dementsprechende polynomiale Trends beseitigt werden. Eventuell in der Zeitreihe vorhandene konjunkturelle Effekte können mit der Trendbestimmung bzw. -elimination, zusammengefasst in der glatten Komponente, bearbeitet werden. Zyklische Schwankungen der Zeitreihe werden meist im Frequenzbereich analysiert und sollen, wie bereits erwähnt, nicht Gegenstand dieser Darstellung sein.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Wahl des Verfahrens zur Analyse der Trend- bzw. Konjunkturkomponente entscheidend von den Ursachen des Verhaltens einer Zeitreihe beeinflusst wird. Sind diese Ursachen bzw. Modelle bekannt, so können die Parameter einer evtl. globalen Trendfunktion geschätzt werden. Sind sie hingegen unbekannt, muss durch den Einsatz von Filtern (Mittelwert- oder Differenzfilter) das Rauschen (zufällige Komponente) soweit reduziert werden, dass der Trend- bzw. Konjunkturanteil verbleibt. Sowohl die Wahl der Trendfunktion als auch die Wahl der Fensterbreite bzw. der Ordnung der Differenzbildung beeinflusst entscheidend den Verlauf des Trends bzw. der Konjunkturkomponente, wodurch eine Quantifizierung ohne physikalische Begründung sehr schwierig ist.

### 2.2.2 Stochastische Prozesse

In der klassischen Zeitreihenanalyse wird eine Zeitreihe meist als feste Folge von Zahlen betrachtet. Dabei spielt die zufällige Komponente (vgl. Abschnitt 2.2.1) nur eine untergeordnete Rolle. Aufgrund der dort getroffenen Annahmen bzgl. Normalverteilung und Erwartungswert wird in diesem Modell davon ausgegangen, dass der Verlauf der betrachteten Zeitreihe unabhängig von der zufälligen Komponente ist. Ein anderes Konzept ist die Betrachtung der Zeitreihen als Realisierungen stochastischer Prozesse, d.h. als dynamische Vorgänge mit Zufallscharakter. Die in Abschnitt 2.2.1 getroffene Unabhängigkeitsannahme ist in diesem Fall nicht mehr erforderlich bzw. sinnvoll, da die dabei ausgeschlossenen Abhängigkeiten gerade den Informationsgehalt der Zeitreihe repräsentieren. Grundlage der Definition stochastischer Prozesse ist die Zufallsvariable. Eine **Zufallsvariable** ist eine Abbildung, die den Ergebnissen eines Zufallsexperiments reelle Zahlen zuordnet. Darauf aufbauend kann ein **stochastischer Prozess**  $Y_t$  mit dem Zeitparameter  $t$  ( $t \in \mathbb{R}$  für stetige und  $t \in \mathbb{N}$  bzw.  $t \in \mathbb{Z}$  für diskrete Zeitparameter) als eine Familie von Zufallsvariablen definiert werden. Für ein festes  $t$  ist  $Y_t$  eine Zufallsvariable. Eine Realisierung eines stochastischen Prozesses nennt man Pfad im stetigen und Zeitreihe im diskreten Fall. Somit kann ein solcher stochastischer Prozess auf zwei Arten interpretiert werden:

- a) als Folge von Zufallsvariablen, wobei jedem Zeitpunkt  $t$  eine Zufallsvariable  $Y_t$  zugeordnet ist oder
- b) als Ensemble von Zeitreihen (Pfad), von denen eine durch das Zufallsexperiment ausgewählt wird.

Bei der Analyse stochastischer Prozesse stehen jedoch meist nur wenige, zudem beschränkte Realisierungen des stochastischen Prozesses zur Verfügung. Daher ist zunächst sicherzustellen, dass bereits eine einzelne Realisierung des stochastischen Prozesses alle statistischen Eigenschaften des Prozesses enthält. Ist dies gewährleistet, so bezeichnet man den stochastischen Prozess als **ergodisch**. Detaillierte Ausführungen zum Nachweis dieser Eigenschaft sind u.a. Koch und Schmidt (1994, Abschnitt 331) zu entnehmen. Zudem wäre zur Beschreibung des stochastischen Prozesses, z.B. mit Erwartungswert und Varianz, zu jedem Zeitpunkt eine Schätzung dieser  $2n$  Größen ( $n$ =Dimension der Zeitreihe) notwendig. Zur Reduktion der Anzahl dieser zu schätzenden Parameter werden daher Restriktionen getroffen, unter denen die Analyse des stochastischen Prozesses vereinfacht wird. Setzt man z.B. Konstanz bei Erwartungswert und Varianz voraus, verbleiben von  $2n$  nur noch zwei zu schätzende Parameter. Diese Überlegungen führen dann zum Beg-

riff der in zwei Ausprägungen vorkommenden Stationarität, die bei vielen Methoden der Zeitreihenanalyse vorausgesetzt wird (vgl. Brockwell und Davis, 2000).

Ein stochastischer Prozess  $Y_t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ) heißt dabei **streng stationär**, wenn die gemeinsame Verteilungsfunktion von  $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_m})$  und  $(Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \dots, Y_{t_m+h})$  identisch ist ( $h \in \mathbb{Z}$ : zeitliche Verschiebung). Dies entspricht der Annahme, dass sämtliche stochastischen Charakteristika invariant gegen Zeitverschiebungen sind. Schwächere Forderungen beinhaltet die Eigenschaft der schwachen Stationarität, bei der nur gewisse stochastische Charakteristika, nämlich die ersten beiden Momente des stochastischen Prozesses, im Zeitverlauf invariant bleiben müssen. Ein stochastischer Prozess  $Y_t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ) heißt demgemäss **schwach stationär**, wenn

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & E(Y_t) = \mu && \text{für alle } t, \\ \text{(ii)} \quad & E(Y_t - E(Y_t))^2 = \text{Var}(Y_t) = \sigma^2 && \text{für alle } t, \\ \text{(iii)} \quad & E(Y_r - E(Y_r))(Y_s - E(Y_s)) = \text{Cov}(Y_r, Y_s) = \text{Cov}(Y_{r+t}, Y_{s+t}) && \text{für alle } r, s \text{ und } t \end{aligned}$$

mit der **theoretischen Autokovarianzfunktion**  $\gamma(\tau) = \gamma(s-r) = \gamma(r,s) = \text{Cov}(Y_r, Y_s)$  bzw. der **theoretischen Autokorrelationsfunktion**

$$\rho(\tau) = \rho(s-r) = \rho(r,s) = \frac{\gamma(r,s)}{\gamma(r,r)} = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}. \quad (2.17)$$

Schwach stationäre stochastische Prozesse besitzen somit einen konstanten Erwartungswert (i), konstante Varianz (Homoskedastizität) (ii) und Kovarianzen zwischen jeweils zwei Zeitpunkten, die nur von deren Abstand, nicht jedoch vom Zeitpunkt selbst abhängen (iii). In der praktischen Anwendung der Zeitreihenanalyse interessieren vorwiegend die Momente erster und zweiter Ordnung, die aus einer Realisierung des stochastischen Prozesses (Zeitreihe) bestimmt werden. Daher ist es üblich, sich mit der Annahme der schwachen Stationarität zu begnügen, die auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit im Vordergrund stehen soll und kurz als Stationarität bezeichnet werden wird. Sind diese Voraussetzungen jedoch nicht erfüllt, etwa durch Beeinflussung der Zeitreihe durch Trends oder Schwankungen der Varianz (Heteroskedastizität), müssen die Einflüsse zunächst eliminiert werden. Auf die danach idealerweise trendbereinigte homoskedastische Zeitreihe können dann die für stationäre Zeitreihen entwickelten Analysemethoden angewendet werden.

Eine besonders einfache und flexible Modellierung stochastischer Prozesse ist mit den in Box und Jenkins (1976) dargestellten Methoden möglich. Sie basieren auf den Ideen von Yule (1927), der Zeitreihen als Serie unabhängiger, i.d.R. normalverteilter „Schocks“ mit verschwindendem Erwartungswert und Varianz  $\sigma^2$  darstellt. Ein solcher **White Noise Prozess** (Weißes Rauschen)  $Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$  ist damit gekennzeichnet durch

$$E(Z_t) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Cov}(Z_t, Z_s) = \begin{cases} 0, & s \neq t \\ \sigma^2, & s = t \end{cases}. \quad (2.18)$$

Stochastische Prozesse können nun als Linearkombinationen des stochastischen Prozesses selbst bzw. eines White Noise Prozesses beschrieben werden. Daraus ergeben sich zwei Arten der Darstellung eines stochastischen Prozesses  $Y_t$ . Zunächst ist eine Darstellung als Linearkombination eines White Noise Prozesses möglich, wodurch ein **Moving Average Prozess** (MA( $q$ )) der Ordnung  $q \geq 0$  entsteht:

$$Y_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \quad Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2). \quad (2.19)$$

Der stochastische Prozess zum Zeitpunkt  $t$  kann somit als gewichtetes gleitendes Mittel aktueller und vorangegangener Werte des White Noise Prozesses interpretiert werden, wobei die unbekannt Parameter  $\theta_q$  aus den Daten geschätzt werden müssen. Eine weitere Variante ist die Darstellung als **Autoregressiver Prozess** (AR( $p$ )) der Ordnung  $p \geq 0$ . Dabei wird der stochastische Prozess zum Zeitpunkt  $t$  als Linearkombination der vorherigen Zeitreihenwerte und eines White Noise Prozesses dargestellt:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + Z_t, \quad Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2). \quad (2.20)$$

Die unbekannt Parameter  $\phi_p$  müssen auch hierbei aus den Daten geschätzt werden. Es liegt nun nahe, die beiden Modelle (2.19) und (2.20) zu kombinieren, wodurch ein sogenannter **Autoregressiver Moving Average Prozess** (ARMA( $p,q$ )) der Ordnung ( $p,q$ ) entsteht:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \quad Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2). \quad (2.21)$$

Die Anpassung eines solchen Prozesses an eine Zeitreihe kommt dabei meist mit einer geringeren Anzahl an Parametern  $p$  und  $q$  aus als ein reines MA- oder AR-Modell.

Es sei darauf hingewiesen, dass alle in (2.19) bis (2.21) definierten stochastischen Prozesse nicht vorgreifende bzw. kausale Prozesse sind, d.h., sie hängen von aktuellen bzw. zeitlich vergangenen Werten der Zeitreihe bzw. eines White Noise Prozesses ab, sind jedoch unabhängig von zukünftigen Werten.

Die bisher beschriebenen Modelle setzen Stationarität der betrachteten Zeitreihe voraus. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt und ist die Zeitreihe z.B. durch einen Trend beeinflusst, so muss sie vorher beispielsweise durch die in Abschnitt 2.2.1 beschriebenen Maßnahmen davon befreit oder durch **Autoregressive Integrierte Moving Average Prozesse** (ARIMA( $p,d,q$ )) der Ordnung ( $p,d,q$ ) approximiert werden. ARIMA-Modelle sind konzeptionell nichts anderes als ARMA( $p,q$ )-Modelle, die auf  $d$ -te Differenzen der Werte der Zeitreihe angewandt werden. Sie stellen somit eine Verallgemeinerung der bisher beschriebenen Modelle für trendbehaftete Zeitreihen dar. Genauso sind weitere Verallgemeinerungen für Zeitreihen mit saisonalen Parametern möglich, die jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt werden sollen. Ausführungen hierzu sind u.a. Box und Jenkins (1976) zu entnehmen.

Entscheidend für die Qualität der Approximation einer Zeitreihe ist die Wahl eines geeigneten Modells. Die Vielzahl der Identifikationsmethoden kann dabei in zwei Klassen eingeteilt werden. Die subjektiven Methoden basieren auf statistischen Tests oder auf der individuellen visuellen Beurteilung von Graphiken und Tabellen (vgl. Caspary und Chen, 1995a). Die Ergebnisse dieser Verfahren hängen u.a. vom verwendeten Testverfahren und von der Erfahrung des Bearbeiters ab. Bei objektiven Methoden wird dagegen ein Entscheidungskriterium festgelegt, das zur Auswahl des die Zeitreihe am besten approximierenden Modells herangezogen wird. Die Entscheidung selbst ist dabei zwar ein objektiver Vorgang, die Auswahl eines geeigneten Identifikationskriteriums jedoch wiederum subjektiv. Mögliche Identifikationskriterien sind u.a. in Caspary und Chen (1995b) zusammengefasst.

Grundsätzlich ist jedoch zu beachten, dass alle, sowohl subjektive als auch objektive Verfahren, zu Fehlidentifikationen führen können, da die Identifikationskriterien aufgrund der Tatsache, dass viele Zeitreihen durch unterschiedliche Modelle nahezu gleich gut approximierbar sind, nicht immer eindeutige Aussagen ermöglichen. Es ist jedoch grundsätzlich festzuhalten, dass die Identifikation eines geeigneten Modells umso schwieriger wird, je kürzer die Zeitreihe ist und desto mehr sie sich von der Idealform eines stationären stochastischen Prozesses entfernt. Ausreißer im Verlauf der Zeitreihe, ein nicht verschwindender Erwartungswert oder Schwankungen der Varianz der Zeitreihe können dabei zu erheblichen Problemen bei der Bestimmung eines geeigneten Modells und der unbekannt Modellparameter führen.

### 2.3 Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktionen

Eine zentrale Stellung bei der Untersuchung bzw. Beschreibung von Zeitreihen nimmt die Frage nach den Abhängigkeiten zwischen den Zeitreihenwerten ein. Maßzahlen, die diese Abhängigkeiten beschreiben, werden stark von evtl. Abweichungen von den in Abschnitt 2.2.2 dargestellten Stationaritätseigenschaften beeinflusst. Insbesondere im Datenmaterial verbliebene Trends führen zu erheblichen Störungen. Daher muss ein solcher Trend vor der Bestimmung dieser Abhängigkeiten untersucht und gegebenenfalls eliminiert werden. Da Trends oftmals schwer von Korrelationen einer Zeitreihe zu trennen sind, sollten sie nach Bendat und Piersol (1986) jedoch nur dann eliminiert werden, wenn sie entweder deutlich im Datenmaterial erkennbar sind oder aber physikalisch erklärt werden können. Ist dies nicht der Fall, sollten sie in den Daten verbleiben.

Ein Maß zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Daten einer Zeitreihe  $Y_t$  zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t=1, \dots, n$  ist die Autokovarianzfunktion. Unter der Voraussetzung der Ergodizität (vgl. Abschnitt 2.2.2) kann aus einer Realisierung eines stochastischen Prozesses die empirische Autokovarianzfunktion

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+\tau} - \bar{Y}) \quad \text{mit} \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad (2.22)$$

und dem Zeitabstand  $\tau$  zwischen zwei Werten der Zeitreihe als Repräsentation der theoretischen Autokovarianzfunktion bestimmt werden (vgl. Moritz, 1980). Normiert man diese Funktion mit der Varianz der Zeitreihe ( $\tau=0$ ), so ergibt sich die empirische Autokorrelationsfunktion

$$R_{xx}(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)}. \quad (2.23)$$

Mit Hilfe dieser Funktion können dann auch die Korrelationsstrukturen verschiedener Zeitreihen miteinander verglichen werden. Zur Beschreibung der Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Zeitreihen  $Y1_t$  und  $Y2_t$  kann die empirische Kreuzkovarianzfunktion

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-\tau} (Y1_i - \bar{Y1})(Y2_{i+\tau} - \bar{Y2}) \quad \text{mit } \bar{Y1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y1_i \quad \text{und} \quad \bar{Y2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y2_i \quad (2.24)$$

bzw. die empirische Kreuzkorrelationsfunktion

$$R_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{C_{xx}(0) \cdot C_{yy}(0)} \quad (2.25)$$

berechnet werden.

Die Bestimmung der Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktionen kann auf der Grundlage des Konzepts der stochastischen Prozesse erfolgen. Gelingt die Anpassung eines stochastischen Prozesses an die untersuchten Zeitreihen nicht zuverlässig oder ist sie aus rechentechnischen Gründen nicht erwünscht, können die Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktionen direkt nach den Formeln (2.22) bis (2.25) aus den Zeitreihenwerten bestimmt werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die berechnete Kovarianzfunktion sehr stark von der Anzahl der Zeitreihenwerte und damit der Länge der Zeitreihe beeinflusst wird, da mit wachsendem Zeitabstand  $\tau$  die Zahl der Datenpaare, die zur Bestimmung von  $C(\tau)$  verwendet wird, und damit die Zuverlässigkeit der Bestimmung der Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktion abnimmt. Dieses Problem kann umgangen werden, indem für die Weiterverarbeitung nur der Teil der Kovarianzfunktion berücksichtigt wird, bei dem aufgrund einer ausreichenden Datenmenge eine zuverlässige Bestimmung möglich ist. Die Empfehlungen in der Literatur reichen dabei von der Berücksichtigung von maximal 10% der gesamten Datenmenge in Otens und Enochson (1978) oder Niemeier (2002) bis zu 25% bei Box und Jenkins (1976). Zudem empfehlen Box und Jenkins, Kovarianzfunktionen nur für Zeitreihen mit mindestens 50 Zeitreihenwerten zu bestimmen, während Niemeier (2002) eine Mindestlänge von 100 Zeitreihenwerten fordert.

## 2.4 Statistische Tests

In den vorherigen Abschnitten wurde deutlich, dass für viele Verfahren der Zeitreihenanalyse bestimmte Annahmen wie z.B. Homoskedastizität zu treffen sind bzw. das Vorliegen dieser Annahmen überprüft werden muss. Für diese Überprüfungen existieren eine Reihe statistischer Tests. Aus dieser Fülle sollen im Folgenden die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Testverfahren erläutert und alternative Tests diskutiert werden. Ausführliche Untersuchungen dazu sind u.a. Teusch (2004) zu entnehmen, wo zudem weitere Testverfahren zusammengefasst sind.

Für Testentscheidungen wird in der Geodäsie im Allgemeinen das Niveau  $\alpha$  eines Tests, d.h. die maximale Wahrscheinlichkeit, mit der unter Vorliegen der Nullhypothese irrtümlich die Alternative erkannt wird (Irrtumswahrscheinlichkeit), fest vorgegeben. Oftmals, z.B. für Vergleiche unterschiedlicher Datensätze, ist es jedoch sinnvoll, den  $p$ -Wert des Tests zu betrachten. Er gibt das bestmögliche Niveau an, zu dem der Test gerade noch verworfen wird. Überschreitet der  $p$ -Wert das vorgegebene Niveau  $\alpha$ , wird die Nullhypothese nicht verworfen, ist er kleiner oder gleich, wird sie dagegen verworfen (Hartung et al., 2002). Der  $p$ -Wert ermöglicht somit neben der einfachen Testentscheidung einen detaillierten Vergleich unterschiedlicher Testergebnisse. Der Vergleich unterschiedlicher Testverfahren geschieht u.a. über die Güte des Tests  $\beta$ , die Wahrscheinlichkeit, mit der unter Vorliegen einer bestimmten Alternativhypothese die richtige Entscheidung getroffen, d.h. die Nullhypothese verworfen wird. Den Test für ein bestimmtes Problem, dessen

Güte für alle Alternativhypothesen mindestens so hoch ist wie die Güte aller anderen Tests, nennt man den gleichmäßig besten (UMP - uniformly most powerful) Test dieser Menge (Lehmann, 1959).

#### 2.4.1 Tests auf Homogenität der Varianz einer Zeitreihe

Die Bedeutung der Stationarität für die Approximation von Zeitreihen durch stochastische Prozesse wurde in Abschnitt 2.2.2 deutlich. Stationarität beinhaltet u.a. die Forderung nach einer konstanten Varianzfunktion (Homoskedastizität). Es ist daher sinnvoll, vor der Datenanalyse diese Eigenschaft mit Hilfe eines statistischen Tests zu überprüfen, um gegebenenfalls vorhandene Schwankungen der Varianz z.B. durch Gewichtung der Daten zu beseitigen und zuverlässige Analyseergebnisse zu erhalten. Dabei lassen sich die im Rahmen dieser Arbeit angewendeten Testverfahren einteilen in

- **Zwei-Stichproben-Tests**, bei denen die zu testende Zeitreihe in  $k = 2$  Stichproben unterteilt wird und in
- **multiple Tests**, bei denen eine Unterteilung in  $k > 2$  Teilbereiche vorgenommen wird.

Beide Testgruppen setzen normalverteilte Stichproben mit homogenen Varianzen und konstante Stichprobenmittel innerhalb der Teilbereiche voraus. Verzichtet man z.B. auf die Annahme der Normalverteilung oder wird vorausgesetzt, dass den Daten ein bekanntes lineares Modell zugrunde liegt, so bieten sich zusätzlich nichtparametrische Tests sowie Tests auf Homoskedastizität in linearen Modellen an. Problematisch dabei ist jedoch, dass nur mit relativ großen Stichprobenumfängen gute Testergebnisse erzielt werden oder die Kenntnis der Designmatrix bzw. des linearen Modells erforderlich ist. Bei den Zwei-Stichproben-Tests kommen, ausgehend von den unabhängigen Stichproben 1 und 2 mit normalverteilten Stichprobenwerten, der klassische F-Test und der klassische  $\beta$ -Test in Frage. Die Testgröße des **F-Tests** ergibt sich dabei für die Stichproben  $Y_{11}, \dots, Y_{1n_1}$  und  $Y_{21}, \dots, Y_{2n_2}$  zu

$$T := \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1} \quad \text{mit} \quad s_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ji} - \bar{Y}_j)^2 \quad (2.26)$$

und

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji} \quad , \quad j = 1, 2.$$

Bei **einseitiger** Fragestellung wird die Nullhypothese  $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$  gegen die Alternativhypothese  $H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$  getestet und  $H_0$  verworfen, wenn  $T > F_{n_1-1, n_2-1; 1-\alpha}$ . Bei **zweiseitiger** Fragestellung mit der Nullhypothese  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  und der Alternativhypothese  $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  wird dagegen  $H_0$  verworfen, wenn  $T < F_{n_1-1, n_2-1; \alpha/2}$  oder  $T > F_{n_1-1, n_2-1; 1-\alpha/2}$ . Dabei entspricht  $F_{n, m, 1-\alpha}$  dem  $(1-\alpha)$ -Quantil der  $F$ -Verteilung mit  $n$  und  $m$  Freiheitsgraden.

Die Testgröße des  **$\beta$ -Tests** ergibt sich für die Stichproben  $Y_{11}, \dots, Y_{1n_1}$  und  $Y_{21}, \dots, Y_{2n_2}$  zu

$$T := \frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2} \sim \beta_{\frac{n_1-1, n_2-1}{2}, \frac{n_2-1}{2}} \quad \text{mit} \quad s_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ji} - \bar{Y}_j)^2 \quad (2.27)$$

und

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji} \quad , \quad j = 1, 2.$$

Bei **einseitiger** Fragestellung mit der Nullhypothese  $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$  und der Alternativhypothese  $H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$  wird  $H_0$  verworfen, wenn  $T > \beta_{\frac{n_1-1, n_2-1}{2}, \frac{n_2-1}{2}; 1-\alpha}$ , während bei **zweiseitiger** Fragestellung mit der Nullhypothese  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  und der Alternativhypothese  $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$   $H_0$  verworfen wird, wenn  $T < \beta_{\frac{n_1-1, n_2-1}{2}, \frac{n_2-1}{2}; \alpha/2}$  oder  $T > \beta_{\frac{n_1-1, n_2-1}{2}, \frac{n_2-1}{2}; 1-\alpha/2} \cdot \beta_{p, q, 1-\alpha}$  bezeichnet dabei das  $(1-\alpha)$ -Quantil der  $\beta$ -Verteilung mit den Parametern  $p$  und  $q$ .

Bei Vorliegen der Annahmen bzgl. Unabhängigkeit und Normalverteilung ist der F-Test unter den einseitigen Zwei-Stichproben-Tests gleichmäßig optimal zum Niveau  $\alpha$ , während unter den zweiseitigen Zwei-Stichproben-Tests der  $\beta$ -Test gleichmäßig bester Test zum Niveau  $\alpha$  ist (vgl. Lehmann, 1959). Unter den multiplen Tests existiert kein gleich-

mäßig bester Test. Aufgrund von Gütevergleichen empfehlen jedoch Teusch (2004) bzw. Hartley (1950) den Bartlett-Test (Bartlett, 1937) für  $k$  voneinander unabhängige Stichproben  $Y_j = Y_{j1}, \dots, Y_{jn_j}$  mit  $j = 1, \dots, k$  und  $n_j \geq 5$ . Aus der

Varianz der  $j$ -ten Stichprobe: 
$$s_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ji} - \bar{Y}_j)^2 \quad \text{mit} \quad \bar{Y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji} \quad \text{und der}$$

Gesamtvarianz aller Stichproben: 
$$s^2 = \frac{1}{n - k} \sum_{j=1}^k (n_j - 1) s_j^2 \quad \text{mit} \quad n = \sum_{j=1}^k n_j$$

ergibt sich dann die Testgröße des **Bartlett-Tests** zu

$$T := \frac{M_B}{C} \sim \chi_{k-1}^2 \quad \text{mit} \quad M_B = (n - k) \ln s^2 - \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \ln s_j^2 \quad (2.28)$$

und 
$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j - 1} - \frac{1}{n - k} \right),$$

wobei die Nullhypothese  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$  verworfen wird, wenn  $T > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2$ . Dabei entspricht  $\chi_{k-1, 1-\alpha}^2$  dem  $(1-\alpha)$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $k$  Freiheitsgraden.

#### 2.4.2 Test auf Unabhängigkeit bzw. Unkorreliertheit einer Zeitreihe

Zur Untersuchung der Korrelationen von Zeitreihen existieren eine Reihe von Testverfahren. Oft wird dabei getestet, ob die Zeitreihe unabhängig und identisch verteilt ist (IID - independent and identically distributed). Die Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$  sind dabei (stochastisch) unabhängig, wenn die gemeinsame Verteilungsfunktion  $F$  für alle Zeitparameter  $t_1, \dots, t_n$  durch unabhängige Kopplung der Verteilungen  $F_i$  der einzelnen Zufallsvariablen gewonnen werden kann:

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) = F_1(t_1) \cdot \dots \cdot F_n(t_n). \quad (2.29)$$

Aus dem Vorliegen der Unabhängigkeit ergibt sich die Unkorreliertheit der Zeitreihe; der Umkehrschluss ist jedoch, abgesehen von normalverteilten Zufallsvariablen, nicht zulässig. Besitzen alle Zufallsvariablen dieselbe Verteilung, so sind sie identisch verteilt. Eine unabhängig und identisch verteilte Zeitreihe  $Y_t$  mit  $E(Y_t) = \mu$  und  $\text{Var}(Y_t) = \sigma^2$  bezeichnet man dann als:  $Y_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$ .

Ob eine Zeitreihe unabhängig und identisch verteilt und damit unkorreliert ist, kann u.a. mit Hilfe eines **Kolmogorov-Smirnov-Tests** geprüft werden. Für die Stichprobe  $Y_1, \dots, Y_n$  und die Verschiebung  $\tau = 0, 1, \dots, n-1$  ist dessen Testgröße definiert als

$$T := \max_{u \in [0,1]} \left| \frac{\sqrt{2n}}{\pi} \cdot \sum_{\tau=1}^{n-1} R_{xx}(\tau) \frac{\sin(\pi \cdot u \cdot \tau)}{\tau} \right| \sim K. \quad (2.30)$$

Dabei entspricht  $R_{xx}(\tau)$  der empirischen Autokorrelationsfunktion (2.23). Die Nullhypothese  $H_0: Y_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$  wird dann verworfen, wenn  $T > K_{1-\alpha}$ , wobei  $K_{1-\alpha}$  das  $(1-\alpha)$ -Quantil der in Tabelle 2.1 auszugsweise dargestellten Kolmogorov-Verteilung bezeichnet (vgl. auch Bronstein et al., 2001). Eine detaillierte Beschreibung dieses Tests inklusive Herleitung kann Teusch (2004, Kapitel 6) entnommen werden. Ebenso sind dort Untersuchungen zur Güte im Vergleich mit anderen Tests zur Prüfung der Unkorreliertheit zu finden.

$\alpha$	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
$K_{1-\alpha}$	1.3581	1.4802	1.6276	1.7308	1.9495

Tab. 2.1:  $(1-\alpha)$ -Quantile der Kolmogorov-Verteilung (vgl. Teusch, 2004)

### 3 Modellierung und Auswertung von GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Nach der Darstellung der für diese Arbeit relevanten mathematischen Methoden in Kapitel 2, insbesondere der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, sollen nun das funktionale und das stochastische Modell der Ausgleichung von GPS-Trägerphasenbeobachtungen beschrieben und diskutiert werden.

Das GPS hat in den letzten Jahren Einzug in viele Bereiche der wissenschaftlichen Forschung, des beruflichen sowie des privaten Alltags gehalten. In den jeweiligen Bereichen gibt es eine Fülle an Literatur zu Grundlagen und spezifischen Anwendungen. Daher werden die Grundlagen des GPS im Folgenden nur in dem Maße erläutert, wie es für das Verständnis der Arbeit bzw. der darin verwendeten Begriffe und Bezeichnungen notwendig ist. Vertiefende Ausführungen zu speziellen Themen können der im Folgenden charakterisierten Standardliteratur entnommen werden. Alle vorgestellten Veröffentlichungen bieten einen ausführlichen Überblick über die Grundlagen des GPS. Xu (2003) legt dabei besonderes Augenmerk auf die Theorie der Auswertung von GPS-Beobachtungen, wohingegen Hofmann-Wellenhopf et al. (2001) den Schwerpunkt mehr auf die praktische Anwendung des GPS von der Planung über die Durchführung der Messung bis hin zur Auswertung der gewonnenen Daten legen. Eine ausführliche Analyse der Signale des GPS, von der Entstehung im Satelliten über den Weg durch die Atmosphäre bis zur Verarbeitung im GPS-Empfänger, beinhaltet der erste Band von Parkinson und Spilker (1996a), während im zweiten Band (Parkinson und Spilker, 1996b) die vielseitigen Anwendungsbereiche des GPS beschrieben werden. Als Ergänzung dazu kann die Darstellung der für die Auswertung der GPS-Beobachtungen wichtigen Theorie der Ausgleichungsrechnung in Leick (1995) angesehen werden.

Die Positionsbestimmung durch GPS beruht primär auf der Bestimmung der Raumstrecken zwischen Satelliten (Raumsegment) und GPS-Empfängern am Boden (Nutzersegment). GPS-Satelliten sind aktive Satelliten, die Signale im Bereich des L-Bandes (1-2 GHz) aussenden. Aus einer Fundamentalfrequenz von 10.23 MHz werden durch Multiplikation mit den Faktoren 154 bzw. 120 die Signale  $L_1$  ( $f_1=1575.42$  MHz) und  $L_2$  ( $f_2=1227.60$  MHz) abgeleitet. Die Messung der Raumstrecke kann dann entweder über eine Laufzeitmessung mit Hilfe der den Trägersignalen aufmodulierten Codes (C/A- bzw. P-Code) oder über die Messung der Phasenlage des Trägersignals im Empfänger realisiert werden. In dieser Arbeit wird ausschließlich die der hochpräzisen Punktbestimmung dienende Trägerphasenmessung behandelt. Die Anwendungsmöglichkeiten der verwendeten Methoden erstrecken sich jedoch prinzipiell auch auf die Codemessung.

Hauptziel bei der Auswertung von GPS-Beobachtungen ist die Bestimmung der Stationskoordinaten des Referenzpunktes der Empfangsantenne. Im Zuge der Auswertung werden jedoch auch weitere unbekannte Parameter wie z.B. Troposphärenparameter zur Modellierung verschiedener Einflussfaktoren auf die GPS-Signale geschätzt. Das am häufigsten angewendete Verfahren zur Schätzung der unbekannt Parameter ist die in Abschnitt 2.1 theoretisch eingeführte Methode der kleinsten Quadrate. Aus dieser Darstellung kann gefolgert werden, dass das beschriebene Verfahren nur dann zuverlässige Ergebnisse liefert, wenn sowohl das funktionale als auch das stochastische Modell korrekt definiert sind. Daher widmen sich die Abschnitte 3.1 und 3.2 dem speziellen Formelapparat bei der Auswertung von GPS-Beobachtungen und der Darstellung der Struktur der dabei auftretenden Vektoren und Matrizen. Dabei wird den bereits im einführenden Kapitel 1 erläuterten Defiziten des Ausgleichungsmodells, speziell den vergleichsweise unzureichend modellierten stochastischen Eigenschaften der GPS-Beobachtungen, besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Bisher veröffentlichte Ansätze zur Analyse des stochastischen Modells werden im Anschluss daran in Abschnitt 3.3 dargestellt und beurteilt und dienen als Grundlage für das in Abschnitt 4 vorgestellte Analyseverfahren.

#### 3.1 Das funktionale Modell bei der Auswertung von GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Originäre GPS-Trägerphasenbeobachtungen werden durch eine Fülle teilweise systematischer Effekte beeinflusst, deren Ursachen z.B. in der Bestimmung der Satellitenbahnen, der Uhrparameter oder des Einflusses der Atmosphäre zu finden sind. Diese Einflüsse können sowohl im funktionalen als auch im stochastischen Modell berücksichtigt werden.

- Das Messrauschen bzw. die Varianzen und Kovarianzen der Beobachtungen und deren Variation aufgrund äußerer Einflüsse kann im stochastischen Modell berücksichtigt werden.
- Sind die Parameter eines Modells zur Beschreibung eines spezifischen Einflusses bekannt, so können die Beobachtungen direkt korrigiert werden.
- Sind diese nicht bekannt, können sie im Zuge der Auswertung mit den anderen unbekannt Parameter wie z.B. Koordinatenunbekannt geschätzt und an den Beobachtungen angebracht werden.
- Eine weitere Möglichkeit ist die Reduktion des Einflusses auf die Auswertung durch mathematische Operationen (Differenzbildung, Bildung von Linearkombinationen, ...), wodurch die zugehörigen Parameter eliminiert werden.

Zur Beurteilung der Einflussgrößen auf die GPS-Beobachtungen und der Verfahren zu ihrer Reduktion soll daher zunächst das funktionale Modell für originäre Trägerphasenbeobachtungen (ZD – zero difference) und daraus abgeleitete Modelle aufgestellt und erläutert werden.

### 3.1.1 Beobachtungsgleichungen originärer GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Beobachtungen der Signale eines einzelnen Satelliten  $S$  auf einer Station  $R$  werden als originäre bzw. undifferenzierte Trägerphasenbeobachtungen (ZD) bezeichnet. Die Beobachtung an sich ist die Differenz der auf der Station empfangenen und der im Empfänger nachgebildeten Trägerphase zum Empfangszeitpunkt  $t$ . Der Abstand zwischen Satellit und Empfänger kann damit aus der im Empfänger messbaren Phasendifferenz bzw. der nicht messbaren Anzahl der ganzen Wellenlängen zwischen Satellit und Empfänger (Ambiguity) abgeleitet werden. Diese Zusammenhänge sowie weitere Herleitungen und vertiefende Diskussionen sind Leick (1995), Kapitel 8 zu entnehmen. Ausgehend von dieser Darstellung sind die in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen in den folgenden Gleichungen spezifiziert. Die Beobachtungsgleichung der Trägerphasenbeobachtung auf einer Frequenz  $f_i$ ,  $i=1,2$  in **Phasenzyklen** lautet demnach:

$$\begin{aligned} \varphi_{R,i}^S(t) = & \frac{f_i}{c} \cdot \rho_R^S(t) - f_i \cdot dt_R + f_i \cdot dt^S + N_{R,i}^S(1) + k_{i,\varphi} \cdot I_{R,i,\varphi}^S(t) + T_{R,\varphi}^S(t) \\ & + d_{R,i,\varphi}^S(t) + d_{i,\varphi}^S(t) + d_{R,i,\varphi}^S(t) + \varepsilon_{i,\varphi}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$t$	GPS-Zeit beim Eintreffen des Signals im Empfänger
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum [m/s]
$\varphi_{R,i}^S(t)$	Trägerphasenbeobachtung der Frequenz $i$ zwischen Satellit $S$ und Station $R$ zum Zeitpunkt $t$ in Phasenzyklen
$\rho_R^S(t)$	topozentrische Entfernung zwischen den Phasenzentren des Satelliten $S$ und der Empfangsantenne $R$ [m]
$dt_R$	Empfängeruhrfehler [s]
$dt^S$	Satellitenuhrfehler [s]
$N_{R,i}^S(1)$	ganzzahlige Phasemehrdeutigkeit in Phasenzyklen (Ambiguity)
$I_{R,i,\varphi}^S(t)$	Einfluss der Ionosphäre in Phasenzyklen mit $k_{1,\varphi} = \frac{f_1}{c}$ und $k_{2,\varphi} = \frac{f_1^2}{c \cdot f_2}$
$T_{R,\varphi}^S(t)$	Einfluss der Troposphäre in Phasenzyklen
$d_{R,i,\varphi}^S(t)$	Fehler durch Empfänger-Hardware in Phasenzyklen (inkl. Empfänger-Phasenzentrumsvariationen, vgl. Abschnitt 3.1.2)
$d_{i,\varphi}^S(t)$	Fehler durch Satelliten-Hardware in Phasenzyklen (inkl. Satelliten-Phasenzentrumsvariationen, vgl. Abschnitt 3.1.2)
$d_{R,i,\varphi}^S(t)$	Mehrwegeeffekte in Phasenzyklen
$\varepsilon_{i,\varphi}$	zufällige Restfehler in Phasenzyklen

Durch Multiplikation mit der entsprechenden Wellenlänge  $\lambda_i$  entsteht die Trägerphasenbeobachtung auf der Frequenz  $i$  zwischen Satellit  $S$  und Station  $R$  zum Zeitpunkt  $t$  in **Längeneinheiten**:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{R,i}^S(t) &= \lambda_i \cdot \varphi_{R,i}^S(t) = \frac{c}{f_i} \cdot \varphi_{R,i}^S(t) \\
 &= \rho_R^S(t) - c \cdot dt_R + c \cdot dt^S + \frac{c}{f_i} \cdot N_{R,i}^S(1) + k_{i,\Phi} \cdot I_{R,i,\Phi}^S(t) + T_{R,\Phi}^S(t) \\
 &\quad + d_{R,i,\Phi}^S(t) + d_{i,\Phi}^S(t) + d_{R,i,\Phi}^S(t) + \varepsilon_{i,\Phi}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit  $k_{1,\Phi} = 1$  und  $k_{2,\Phi} = \frac{f_1^2}{f_2^2}$ .

Die Bezeichnungen sind analog zu (3.1) gewählt, wobei die Indizes  $\varphi$  und  $\Phi$  die Unterscheidung zwischen der Angabe in Phasenzyklen bzw. in Längeneinheiten gewährleisten. In Abschnitt 3.1.2 werden die wichtigsten in den Gleichungen (3.1) und (3.2) auftretenden Einflussfaktoren bei GPS-Beobachtungen kurz diskutiert und deren Einfluss auf die GPS-Beobachtungen abgeschätzt.

### 3.1.2 Fehlerquellen bei originären GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Eine Vielzahl von Fehlerquellen beeinflussen GPS-Trägerphasenbeobachtungen. Die Wichtigsten in Anlehnung an Parkinson (1996) sind:

- Satellitenbahnfehler
- Satelliten- und Empfängeruhrfehler
- ionosphärischer Einfluss
- troposphärischer Einfluss
- Mehrwegeeffekte
- Antennen-Phasenzentrumsvariationen
- Satelliten- und Empfängerhardware.

Die topozentrische Entfernung zwischen Satellit und Empfänger entspricht der Strecke, die die GPS-Signale zwischen dem Zeitpunkt der Aussendung im Satelliten und dem Zeitpunkt des Eintreffens im Empfänger, jeweils bezogen auf das Antennenphasenzentrum, zurücklegen. Dieser Abstand kann iterativ aus der Satellitenposition zum Aussendezeitpunkt und den genäherten Stationskoordinaten zum Empfangszeitpunkt  $t$  bestimmt werden. Für die Positionen der Satelliten werden dabei im Falle hochgenauer GPS-Auswertungen im Postprocessing-Verfahren präzise **Bahndaten** des International GPS Service (IGS) verwendet. Sie weisen eine Genauigkeit von 3-5cm (Kouba, 2003) auf, wodurch die Auswirkung auf die Koordinaten der GPS-Stationen in Abhängigkeit von der Basislinienlänge maximal 1-2mm beträgt.

Die **Satelliten- bzw. Empfängeruhrfehler** bewegen sich in der Größenordnung von  $\leq 10$ ns bzw.  $\leq 1$ ms (Zumberge und Bertiger, 1996). Sie werden i.d.R. durch die Bildung abgeleiteter Beobachtungen (siehe Abschnitt 3.1.3) eliminiert bzw. stark reduziert. Der Einfluss des Selective Availability (SA), mit dem u.a. die Uhren der GPS-Satelliten verfälscht wurden, ist seit der Abschaltung des SA am 1. Mai 2000 nicht mehr relevant.

Die **Ionosphäre**, der Teil der Atmosphäre mit ausreichender Ionisierung, um elektromagnetische Wellen zu beeinflussen, umfasst den Höhenbereich von 50-1000km mit maximaler Elektronendichte in ca. 250-500km Höhe. Für elektromagnetische Wellen im Frequenzbereich zwischen 30MHz und mit abnehmendem Einfluss bis zu 100GHz, insbesondere jedoch im Bereich der GPS-Signale, ist die Ionosphäre dispersiv, d.h. die Wechselwirkung mit GPS-Signalen ist frequenzabhängig. Zudem hängt der Einfluss der Ionosphäre u.a. von der Sonnenaktivität, der geomagnetischen Breite der Station und der Tageszeit ab. Die dadurch auftretende Beschleunigung der Trägerphasenwellen führt zu einer rechnerischen Verkürzung der Strecke zwischen Satellit und Empfänger (negativer ionosphärischer Einfluss), die in Zenitrichtung Größenordnungen von bis zu 50m erreicht. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Einfluss der Ionosphäre primär durch Kombination der GPS-Messungen auf zwei Frequenzen (Abschnitt 3.1.3) eliminiert. Detaillierte Ausführungen, insbesondere zu weiteren Möglichkeiten der Berücksichtigung der Ionosphäre bei der GPS-Auswertung, sind in Waninger (1994) oder Klobuchar (1996) zu finden.

Die **Troposphäre**, die unterste elektrisch neutrale Schicht der Atmosphäre, wird i.A. in die eigentliche Troposphäre (Höhenbereich: 0-10km) und die Stratosphäre (Höhenbereich bis 50km) gegliedert. Zudem kann eine Unterteilung in einen feuchten und einen trockenen Anteil vorgenommen werden. Der trockene oder hydrostatische Anteil macht ca.

90% der gesamten troposphärischen Laufzeitverzögerung aus, wird primär vom Luftdruck und von der Temperatur bestimmt und ist relativ leicht modellierbar. Der Einfluss auf GPS-Beobachtungen beträgt 2.3m in Zenitrichtung und ist mit einer Variation von 2cm in 12 Stunden vergleichsweise konstant. In niedrigen Elevationen wächst die Laufzeitverzögerung bis auf 25m in Horizontnähe an. Die feuchte Komponente mit einem Anteil von 10% des Gesamteffekts ist dagegen primär vom Wasserdampfgehalt abhängig und aufgrund schneller zeitlicher und örtlicher Variationen schwer erfassbar. Ihr Einfluss auf GPS-Beobachtungen in Zenitrichtung beträgt ca. 40cm und variiert drei- bis viermal so stark wie der trockene Anteil. Betrachtet man die idealisierte Vorstellung einer horizontal geschichteten Atmosphäre, so erhält man unter Vernachlässigung der Erdkrümmung die Abbildungsfunktion

$$\frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{\sin(e)} \quad (3.3)$$

mit der Zenitdistanz  $z$  bzw. der Elevation  $e$  des betrachteten Satelliten, mit der der zenitale Troposphäreneinfluss in Richtung des Signalweges projiziert wird. Die Troposphäre ist für GPS-Signale nicht dispersiv, weshalb ihr Einfluss im Gegensatz zu dem der Ionosphäre nicht durch Zweifrequenzmessungen eliminiert werden kann. Daher stellen Troposphärenmodelle (Saastamoinen, Hopfield, ...) einen Zusammenhang zwischen der troposphärischen Laufzeitverzögerung in unterschiedlichen Satellitenelevationen und den physikalischen Einflussgrößen (Temperatur, Luftdruck, Wasserdampfgehalt, ...) her. Sie beruhen i.A. auf der Modellvorstellung einer sphärisch geschichteten Atmosphäre und werden aus meteorologischen Messungen in unterschiedlicher Dichte bzw. unterschiedlicher zeitlicher und geographischer Verteilung ermittelt (Spilker, 1996). Zudem können Mapping-Funktionen (Niell, Davis,...) eingeführt werden, die die Zenitkorrektur in Abhängigkeit von der Elevation der Satelliten und den meteorologischen Einflüssen faktorisieren (vgl. Mendes und Langley, 1994 bzw. Santerre et al., 1995). Die einfachste und damit grundlegende Form für solche Mapping-Funktionen beschreibt die Funktion (3.3) in Anlehnung an das Modell von Black und Eisner (1984). Im Allgemeinen ergibt sich damit die troposphärische Laufzeitkorrektur als Produkt der Korrektur in Zenitrichtung und einem mit Hilfe der gewählten Mapping-Funktion bestimmten elevationsabhängigen Faktor. Beide Komponenten werden i.d.R. in einen trockenen und einen feuchten Anteil aufgespalten. Zur Berücksichtigung der räumlichen bzw. zeitlichen Variation der Troposphäre können zudem stationsspezifische Troposphärenparameter bzw. Parameter für bestimmte Zeitintervalle eingeführt werden (Mayer et al., 2000a). Anzumerken ist, dass sich die Troposphäre primär auf die Höhenkomponente der Stationskoordinaten auswirkt, was u.a. bei großen Höhenunterschieden zwischen den Stationen zu Problemen führen kann (vgl. Mayer, 2004) und bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden muss.

Gelangt das GPS-Signal nicht auf direktem Weg vom Satelliten zum Empfänger, sondern durch Reflexion oder Beugung auf indirektem Weg, so spricht man von **Mehrwegeausbreitung** bzw. Multipath (Braasch, 1996). Die Überlagerung des direkten und des indirekten Signals ist besonders kritisch bei Trägerphasenbeobachtungen in niedrigen Elevationen und bei kurzen Beobachtungszeiträumen. Der Einfluss auf die Trägerphasenbeobachtungen beträgt bis zu 5cm mit typischen Periodenlängen von bis zu 30 Minuten (vgl. u.a. Heister et al., 1997). Mehrwegeeffekte können jedoch nur schwer erfasst bzw. modelliert werden. Sie können primär bei der Vorbereitung der Messung durch Verwendung geeigneter Antennen (Grundplatte, Choke-Ring,...), eine geeignete Stationsauswahl sowie ausreichend lange Beobachtungszeiträume vermindert werden. Aufgrund der nach einem Sterntag wiederkehrenden Satellitenkonstellation wiederholen sich auch die Mehrwegeeffekte, falls die GPS-Antenne bzw. deren Umgebung nicht verändert wurde. Diese können dann u.U. durch Differenzbildung der Beobachtungen von mehreren Tagen unter Berücksichtigung der Länge eines Sterntages identifiziert werden. Einen ersten Ansatz zur Identifikation und Berücksichtigung von Mehrwegeeffekten im Rahmen eines Analyseverfahrens präsentieren Wanninger und May (2000).

Ein weiterer Einflussfaktor bei GPS-Beobachtungen ist die Empfängerhardware und dabei insbesondere die GPS-Antenne. Durch die elektromagnetischen Eigenschaften der GPS-Antennen unterscheidet sich das elektrische vom mechanischen Phasenzentrum um einen konstanten Wert (Offset) und variiert in Abhängigkeit von der Elevation und dem Azimut der einfallenden Signale. Zudem unterscheiden sich die Phasenzentren verschiedener Antennentypen und sogar von Antennen gleichen Typs aufgrund unterschiedlicher Bauweise bzw. ungleicher Fertigung der GPS-Antennen teilweise erheblich. Der Einfluss dieser Fehler kann im Rahmen präziser GPS-Messungen nicht vernachlässigt werden, sondern muss durch eine geeignete Antennenauswahl bzw. -ausrichtung reduziert werden. Zudem kann durch eine Kalibrierung der GPS-Antennen die Position des Antennenphasenzentrums durch Offsets zum mittleren Phasenzentrum und zusätzlichen elevations- und/oder azimutabhängigen **Phasenzentrumsvariationen** (PCV) angegeben werden (vgl. u.a. Böder, 2002 und Menge, 2003). Relative Kalibrierungen zu einer Referenzantenne (Dorne Margolin T) sind ausreichend für kurze Basislinien bzw. kleinräumige Netze und werden im Regelfall heute schon verwendet. Im Gegensatz dazu sollten auf langen Basislinien absolut kalibrierte Antennen verwendet werden (Mader, 1999). Aufgrund unmodellierter systematischer Effekte in den GPS-Auswertergebnissen auf langen Basislinien bei Verwendung absolut kalibrierter Antennen, die der Nichtberücksichtigung der Antennenphasenzentren der GPS-Satelliten zugeschrieben werden

können, werden absolute Antenneninformationen heutzutage jedoch noch nicht standardmäßig verwendet. Die Bestimmung dieser PCV der GPS-Satellitenantennen befindet sich momentan noch in der Testphase, deren Berücksichtigung ist aber in Zukunft für die präzise Auswertung von GPS-Beobachtungen unerlässlich (Schmid und Rothacher, 2003). Grundsätzlich ist zu beachten, dass die Verwendung falscher Offsets bzw. PCV oder sogar deren Vernachlässigung in der GPS-Auswertung zu Maximalfehlern der Stationskoordinaten, insbesondere in der Höhenkomponente, von 10cm bzw. zu einem Maßstabsfehler von 0.015 ppm führen kann (Menge und Seeber, 1999).

**Satelliten- bzw. Empfängerhardware** induzieren außerdem frequenzabhängige systematische Fehler (Parkinson und Spilker, 1996a). Durch Anwendung abgeleiteter Beobachtungen (vgl. folgenden Abschnitt 3.1.3) können die Einflüsse der Satellitenhardware eliminiert werden. Die durch die GPS-Empfänger entstehenden Fehler hängen jedoch zusätzlich noch von der zufälligen, nicht zu beeinflussenden Auswahl der Empfangskanäle ab, wodurch eine vollständige Elimination nicht gewährleistet ist. Die verbleibenden Restfehler sind jedoch so gering, dass sie vernachlässigt werden können bzw. im Beobachtungsrauschen  $\varepsilon$  aufgehen (vgl. Schüler, 2001, Abschnitt 2.2.2.5).

### 3.1.3 Beobachtungsgleichungen abgeleiteter GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Um systematische Fehlereinflüsse zu eliminieren bzw. zu reduzieren, werden in vielen GPS-Auswerteprogrammen abgeleitete Beobachtungsgrößen anstatt der originären Trägerphasenbeobachtungen verwendet. Durch Anwendung dieser aus mehreren originären Beobachtungen kombinierten Beobachtungsgrößen kann die Anzahl der Parameter im funktionalen Modell und somit deren Einfluss auf die Auswertung reduziert werden. Die im Rahmen dieser Arbeit wichtigen Kombinationen werden im Folgenden kurz erläutert.

#### Einfachdifferenzen

Werden die Beobachtungen (3.2) zweier Empfänger  $R1$  und  $R2$  zu einem Satelliten  $S1$  zu einem Empfangszeitpunkt  $t$  kombiniert, so entsteht die sog. Empfänger-Einfachdifferenz (SD – single difference):

$$\begin{aligned} \Phi_{R1/R2,i}^{S1}(t) &= \Phi_{R1,i}^{S1}(t) - \Phi_{R2,i}^{S1}(t) \\ &= \left( \rho_{R1}^{S1}(t) - \rho_{R2}^{S1}(t) \right) - c \cdot (d_{tR1} - d_{tR2}) \\ &\quad + \frac{c}{f_i} \cdot N_{R1/R2,i}^{S1}(1) + k_{i,\Phi} \cdot I_{R1/R2,i,\Phi}^{S1}(t) + T_{R1/R2,\Phi}^{S1}(t) \\ &\quad + d_{R1/R2,i,\Phi}(t) + d_{R1/R2,i,\Phi}^{S1}(t) + \varepsilon_{R1/R2,i,\Phi}^{S1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{mit } N_{R1/R2,i}^{S1}(1) = N_{R1,i}^{S1}(1) - N_{R2,i}^{S1}(1).$$

Analog dazu gelten die entsprechenden Bezeichnungen für die weiteren nicht verschwindenden Terme:

$$I_{R1/R2,\Phi}^{S1}(t), T_{R1/R2,\Phi}^{S1}(t), d_{R1/R2,i,\Phi}(t), d_{R1/R2,i,\Phi}^{S1}(t) \text{ und } \varepsilon_{R1/R2,i,\Phi}^{S1}$$

Durch diese Differenzbildung entfallen die auf beide Einzelbeobachtungen identisch wirkenden Einflüsse der Satellitenuhr  $dt^s$  bzw. generell der Hardware des GPS-Satelliten  $d_{i,\phi}^s(t)$ . Somit werden die hauptsächlichen Fehleranteile der Satelliten eliminiert. Verbleibende Restfehler, z.B. Differenzen der Zeitpunkte der Signalausendung im Satelliten aufgrund des unterschiedlichen Abstandes des Satelliten von den beiden Empfängern, können aufgrund ihrer geringen Größe vernachlässigt werden. Alternativ zu der beschriebenen Einfachdifferenz ist auch die Differenz der Beobachtungen zwischen zwei Satelliten und einem Empfänger möglich (Satelliten-Einfachdifferenz), bei der dann die Einflüsse des gemeinsamen Empfängers eliminiert werden. Für die folgende Darstellung soll diese Variante jedoch nicht berücksichtigt werden.

## Doppeldifferenzen

Durch die Kombination zweier Einfachdifferenzen entstehen Doppeldifferenzen (DD), die in vielen GPS-Auswerteprogrammen als grundlegende Beobachtungsgrößen verwendet werden:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{R1/R2,i}^{S1/S2}(t) &= \Phi_{R1/R2,i}^{S1}(t) - \Phi_{R1/R2,i}^{S2}(t) \\
 &= \left( \rho_{R1}^{S1}(t) - \rho_{R2}^{S1}(t) \right) - \left( \rho_{R1}^{S2}(t) - \rho_{R2}^{S2}(t) \right) \\
 &\quad + \frac{c}{f_i} \cdot N_{R1/R2,i}^{S1/S2}(1) + k_{i,\Phi} \cdot I_{R1/R2,i,\Phi}^{S1/S2}(t) + T_{R1/R2,\Phi}^{S1/S2}(t) \\
 &\quad + d_{R1/R2,i,\Phi}^{S1/S2}(t) + \varepsilon_{R1/R2,i,\Phi}^{S1/S2}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\text{mit } N_{R1/R2,i}^{S1/S2}(1) = N_{R1/R2,i}^{S1}(1) - N_{R1/R2,i}^{S2}(1).$$

Analog dazu gelten wie auch bei den Einfachdifferenzen die entsprechenden Bezeichnungen für die weiteren nicht verschwindenden Terme:  $I_{R1/R2,\Phi}^{S1/S2}(t)$ ,  $T_{R1/R2,\Phi}^{S1/S2}(t)$ ,  $d_{R1/R2,i,\Phi}^{S1/S2}(t)$  und  $\varepsilon_{R1/R2,i,\Phi}^{S1/S2}$ .

Durch die zweimalige Differenzbildung werden zusätzlich zu den satellitenspezifischen Termen die empfängerspezifischen Terme fast vollständig eliminiert, sodass der Einfluss der Empfängeruhr  $dt_r$  und der Hardware der beiden Empfänger  $d_{R,i,\Phi}(t)$  verschwindet. Da sich zusätzlich zur Elimination der Satelliten- und Empfängeruhrfehler die Einflüsse der Atmosphäre aufgrund ähnlicher Signalwege reduzieren, werden Doppeldifferenzen in vielen GPS-Auswerteprogrammen als grundlegende abgeleitete Beobachtungstypen verwendet.

Für Aufgaben wie die Detektion von Phasensprüngen werden oftmals Dreifachdifferenzen gebildet. Diese Aufgaben fallen jedoch in den Bereich der Vorverarbeitung der GPS-Beobachtungen und sind nicht Gegenstand dieser Arbeit.

## Linearkombinationen

Auf längeren Basislinien erschweren u.a. ionosphärische Einflüsse und unmodellierete Satellitenbahnfehler die präzise Bestimmung der Stationskoordinaten. Zur Reduktion solcher Fehlereinflüsse und zur einfacheren Bestimmung der Mehrdeutigkeitsparameter können Linearkombinationen der Signale auf beiden GPS-Frequenzen verwendet werden. Aus der allgemeinen Form einer Linearkombination der originären Trägerphasenmessungen  $\Phi_{R,1}^S$  und  $\Phi_{R,2}^S$

$$\Phi_{R,i}^S(t) = \kappa_{i1} \cdot \Phi_{R,1}^S(t) + \kappa_{i2} \cdot \Phi_{R,2}^S(t), \quad (i = 1, \dots, 5) \tag{3.6}$$

können u.a. die **Wide-Lane Linearkombination**  $L_5$  bzw.  $\Phi_5$  mit  $\kappa_{51} = \frac{f_1}{f_1 - f_2}$  und  $\kappa_{52} = \frac{-f_2}{f_1 - f_2}$

$$\Phi_{R,5}^S(t) = \kappa_{51} \cdot \Phi_{R,1}^S(t) + \kappa_{52} \cdot \Phi_{R,2}^S(t) = \frac{f_1}{f_1 - f_2} \cdot \Phi_{R,1}^S(t) - \frac{f_2}{f_1 - f_2} \cdot \Phi_{R,2}^S(t) \tag{3.7}$$

und die **ionosphärenfreie Linearkombination**  $L_3$  bzw.  $\Phi_3$  mit  $\kappa_{31} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}$  und  $\kappa_{32} = \frac{-f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}$

$$\Phi_{R,3}^S(t) = \kappa_{31} \cdot \Phi_{R,1}^S(t) + \kappa_{32} \cdot \Phi_{R,2}^S(t) = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \Phi_{R,1}^S(t) - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \Phi_{R,2}^S(t) \quad (3.8)$$

abgeleitet werden.

Die Wide-Lane Linearkombination wird aufgrund der resultierenden Wellenlänge von ca. 86cm primär zur zuverlässigen Bestimmung der  $L_5$ -Mehrdeutigkeitsparameter verwendet. Dieser Schritt wird im weiteren Verlauf der Arbeit als Vorverarbeitungsschritt betrachtet und nicht weiter behandelt. Das Hauptziel der GPS-Auswertung, die präzise Schätzung der Koordinatenunbekannten, ist damit aufgrund des im Vergleich zu den originären Trägerphasenmessungen um den Faktor 5 größeren Messrauschens nicht möglich. Sollen im letzten Auswerteschritt die Koordinatenunbekannten geschätzt werden, kann dies dann entweder mit den originären Trägerphasenbeobachtungen oder bei Basislinien ab ca. 10km Länge mit der ionosphärenfreien Linearkombination  $L_3$  geschehen, bei der nach Einsetzen von (3.2) in (2.19) die ionosphärischen Terme  $I_{R,i}^S$  und damit deren Einflüsse entfallen.

Obwohl sie im Rahmen dieser Arbeit nicht verwendet wird sei noch die geometriefreie Linearkombination  $L_4$  erwähnt. Sie ist von Größen, die identisch auf beide Frequenzen wirken, wie z.B. Satellitenbahn- und Uhrfehlern unbeeinflusst, weist jedoch ein gegenüber den originären Trägerphasenbeobachtungen um den Faktor 1.4 erhöhtes Messrauschen auf. Sie eignet sich damit u.a. für die Suche nach Phasensprüngen oder zur Schätzung von Ionosphärenparametern.

Eine Zusammenstellung der Parameter und Eigenschaften dieser im Rahmen der GPS-Auswertung wichtigsten Linearkombinationen ist Tabelle 3.1 zu entnehmen.

Signal	Wellenlänge $\lambda$ [cm]	$\kappa_{i1}$	$\kappa_{i2}$	Messrauschen
$L_1$	19.0	1	0	1
$L_2$	24.4	0	1	1
$L_3$	-	2.55	-1.55	2.98
$L_4$	-	1	-1	1.41
$L_5$	86.2	4.53	-3.53	5.74

Tab. 3.1: Zusammenfassung der wichtigsten Linearkombinationen

In dieser Arbeit wird aufgrund der verwendeten GPS-Auswertesoftware und des untersuchten Datenmaterials ausschließlich die doppelt differenzierte ionosphärenfreie Linearkombination

$$\begin{aligned} \Phi_{R1/R2,3}^{S1/S2}(t) &= \left( \Phi_{R1,3}^{S1}(t) - \Phi_{R2,3}^{S1}(t) \right) - \left( \Phi_{R1,3}^{S2}(t) - \Phi_{R2,3}^{S2}(t) \right) \\ &= \left( \kappa_{31} \cdot \Phi_{R1,1}^{S1}(t) + \kappa_{32} \cdot \Phi_{R1,2}^{S1}(t) \right) - \left( \kappa_{31} \cdot \Phi_{R2,1}^{S1}(t) + \kappa_{32} \cdot \Phi_{R2,2}^{S1}(t) \right) \\ &\quad - \left( \kappa_{31} \cdot \Phi_{R1,1}^{S2}(t) + \kappa_{32} \cdot \Phi_{R1,2}^{S2}(t) \right) + \left( \kappa_{31} \cdot \Phi_{R2,1}^{S2}(t) + \kappa_{32} \cdot \Phi_{R2,2}^{S2}(t) \right) \\ &= \kappa_{31} \cdot \left( \rho_{R1}^{S1}(t) + \frac{c}{f_i} N_{R1,1}^{S1}(1) + T_{R1,\Phi}^{S1}(t) + d_{R1,1,\Phi}^{S1}(t) + \varepsilon_{1,\Phi} \right) \\ &\quad + \kappa_{32} \cdot (\dots) - \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

verwendet. Die Bildung dieser abgeleiteten Beobachtungen ist kommutativ, d.h. die Reihenfolge der auszuführenden Operationen (Differenzierung bzw. Bildung der Linearkombination) ist austauschbar:

$$\Delta\nabla\Phi = a \cdot \Phi = L_3(DD(\Phi)) = DD(L_3(\Phi)). \tag{3.10}$$

- $\Delta\nabla$  Differenzoperator für Doppeldifferenzen
- $\Phi$  Vektor der originären Trägerphasenbeobachtungen (3.2)
- $a$  Koeffizientenmatrix zur Bildung der Doppeldifferenzen
- $L_3$  Operator zur Bildung der  $L_3$ -Linearkombination
- $DD$  Operator zur Bildung der Doppeldifferenzen

Da sich auf diese abgeleiteten Beobachtungen alle weiteren Ausführungen beziehen, sollen sie der Einfachheit halber im Folgenden kurz als Beobachtungen bezeichnet werden.

### 3.1.4 Struktur des Beobachtungsvektors originärer sowie abgeleiteter GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Die in Abschnitt 3.2 vorgestellte Struktur der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen (ZD bzw. DD,  $L_3$ ) ergibt sich aufgrund der Kovarianzfortpflanzung aus der Struktur des Beobachtungsvektors (ZD,  $L_3$ ). Daher ist für Untersuchungen bzgl. des Aufbaus der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen die Kenntnis der Struktur des Beobachtungsvektors unumgänglich, da sie stark u.a. von der verwendeten Auswertesoftware abhängt. Im Rahmen dieser Arbeit wird zur Auswertung der GPS-Beobachtungen die Berner GPS-Software (Hugentobler et al., 2001) verwendet. Eine ausführliche Darstellung dieser Auswertesoftware und der angewendeten Auswertestrategie kann Abschnitt 5.2 entnommen werden. Betrachtet man nun GPS-Trägerphasenbeobachtungen auf zwei Stationen (eine Basislinie), so wird der Vektor der zweifach differenzierten Trägerphasenbeobachtungen in Anlehnung an die Verarbeitung in der Berner GPS-Software folgendermaßen dargestellt:

$$l = \begin{bmatrix} \Delta\nabla_1\Phi \\ \Delta\nabla_2\Phi \\ \vdots \\ \Delta\nabla_{ep}\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot \Phi \\ a_2 \cdot \Phi \\ \vdots \\ a_{ep} \cdot \Phi \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Die Dimension von  $l$  beträgt  $(dd \times 1)$  mit  $i=1, \dots, ep$  Epochen der Dimension  $(dd_i \times 1)$ , sodass  $dd = \sum_{i=1}^{ep} dd_i$ . Der einer

Epoche  $i$  zugeordnete Teilvektor  $\Delta\nabla_i\Phi$  wird dabei mit Hilfe der Koeffizientenmatrix  $a_i$  zur Bildung der Doppeldifferenzen aus dem kompletten Beobachtungsvektor  $\Phi$  ausgeschnitten. In Abbildung 3.1 ist der Aufbau des Vektors  $\Phi$  bzw. die Anordnung der darin zusammengefassten originären Trägerphasenbeobachtungen dargestellt.

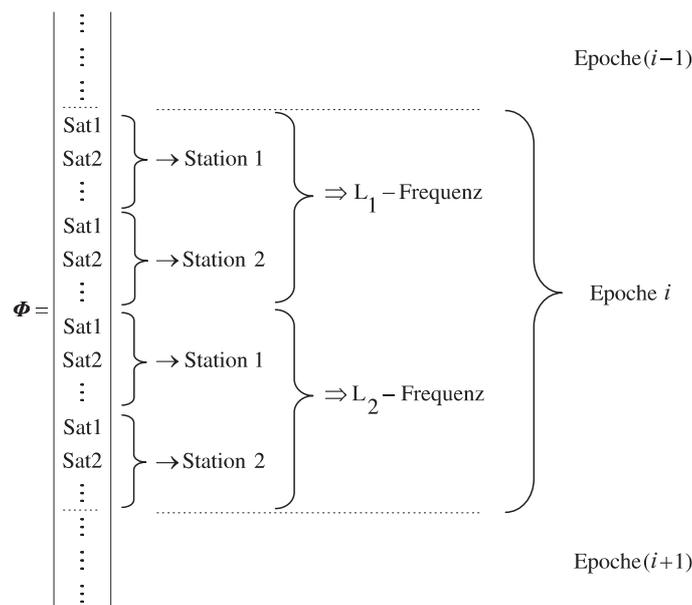


Abb. 3.1: Besetzungsstruktur des Vektors der originären Trägerphasenbeobachtungen  $\Phi$

Innerhalb einer Epoche sind die Beobachtungen in Abhängigkeit von der Frequenz gegliedert. Eine weitere Unterteilung findet innerhalb des einer Frequenz zugeordneten Bereichs in Abhängigkeit von der Beobachtungsstation statt. Es ist festzuhalten, dass ein solches Segment (Beobachtungen zu einer Epoche auf einer Station bzw. Frequenz) nicht nur die tatsächlich zu einer bestimmten Epoche, sondern alle in der gesamten Session beobachteten Satelliten beinhaltet. Dadurch ist eine identische Anordnung der beobachteten Satelliten in jedem Segment von  $\Phi$  gewährleistet. Allen in einer Epoche nicht beobachteten Satelliten wird der Wert 0 zugeordnet. Daraus folgt die Dimension von  $\Phi$  zu  $(zd \times 1)$  mit  $i=1, \dots, ep$  Epochen der Dimension  $(zd_i \times 1)$ , wobei  $zd_i$  die Anzahl der in der gesamten Session beobachteten Satelliten bezeichnet und damit konstant ist ( $\Rightarrow zd=ep \cdot zd_i$ ).

Die Matrix  $a_i$  der Dimension  $(dd_i \times zd)$  enthält in jeder Zeile, die einer Beobachtung von  $l$  zugeordnet ist, die zur Bildung der Differenzen bzw. Linearkombinationen der Epoche  $i$  notwendigen Koeffizienten.

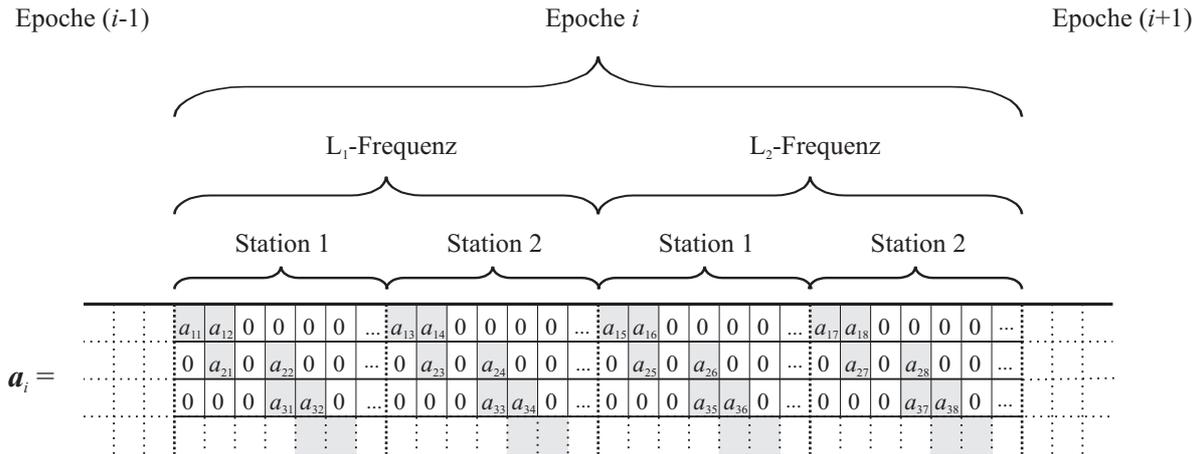


Abb. 3.2: Besetzungsstruktur der Koeffizientenmatrix zur Bildung der Doppeldifferenzen  $a_i$  der Epoche  $i$   
 $a_{p1} = a_{p4} = +\kappa_{31}$ ;  $a_{p2} = a_{p3} = -\kappa_{31}$ ;  $a_{p5} = a_{p8} = +\kappa_{32}$ ;  $a_{p6} = a_{p7} = -\kappa_{32}$  mit  $p=1, \dots, dd_i$

In Abbildung 3.2 ist beispielhaft ein Ausschnitt einer Matrix  $a_i$  für die zweifach differenzierten  $L_3$ -Linearkombinationen aus (2.20) dargestellt. Eine Zeile enthält neben den Nullelementen, welche die an dieser Doppeldifferenzbeobachtung nicht beteiligten Satelliten repräsentieren, jeweils vier Koeffizienten im Bereich der  $L_1$ - bzw.  $L_2$ -Beobachtungen mit den Werten  $\pm\kappa_{31}$  und  $\pm\kappa_{32}$  aus (2.19) bzw. (2.20). Die Aufteilung in Segmente in Abhängigkeit von der Epoche, Frequenz und Station entspricht dabei der in Abbildung 3.1 gezeigten Besetzungsstruktur des Vektors der originären Trägerphasenbeobachtungen  $\Phi$ .

Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich die Verarbeitung einer einzelnen Basislinie betrachtet. Die Struktur bzw. Untergliederung der entsprechenden Vektoren und Matrizen bei gemeinsamer Verarbeitung mehrerer Basislinien kann Howind et al. (1997) entnommen werden.

### 3.2 Das stochastische Modell der GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Die das stochastische Modell repräsentierende positiv definite Kovarianzmatrix der Beobachtungen (2.7) beschreibt die statistischen Eigenschaften der Beobachtungen bzw. die zufällige Abweichung von ihrem Erwartungswert:

$$C_{ll} = \sigma_0^2 \cdot Q_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \dots & \dots & q_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Die Hauptdiagonalen sind mit den Varianzen  $\sigma_i^2$  bzw. den Kofaktoren  $q_{ii}$  besetzt, während auf den Nebendiagonalen die Kovarianzen  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  bzw. die Kofaktoren  $q_{ij} = q_{ji}$  ( $i=1, \dots, n$  und  $j=1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ) zu finden sind. Varianzen und Kovarianzen hängen über den Korrelationskoeffizienten

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \quad (3.13)$$

zusammen. Ausgehend von den Ausführungen in Abschnitt 3.1.4 soll nun die Struktur der Kovarianzmatrizen originärer sowie abgeleiteter GPS-Trägerphasenbeobachtungen beschrieben werden.

### 3.2.1 Modellierung der Kovarianzmatrix originärer Trägerphasenbeobachtungen

Die Kenntnis des funktionalen Modells der GPS-Trägerphasenbeobachtungen ist weit fortgeschritten und durch viele Veröffentlichungen belegt (vgl. Abschnitt 3.1). Demgegenüber ist das stochastische Modell vergleichsweise wenig untersucht (Tiberius und Kenselaar, 2000). Die Kovarianzmatrix originärer Trägerphasenbeobachtungen ist wie schon erwähnt analog zum Beobachtungsvektor aufgebaut und geordnet (vgl. Abbildung 3.1), woraus die in Abbildung 3.3 dargestellte Blockstruktur folgt.

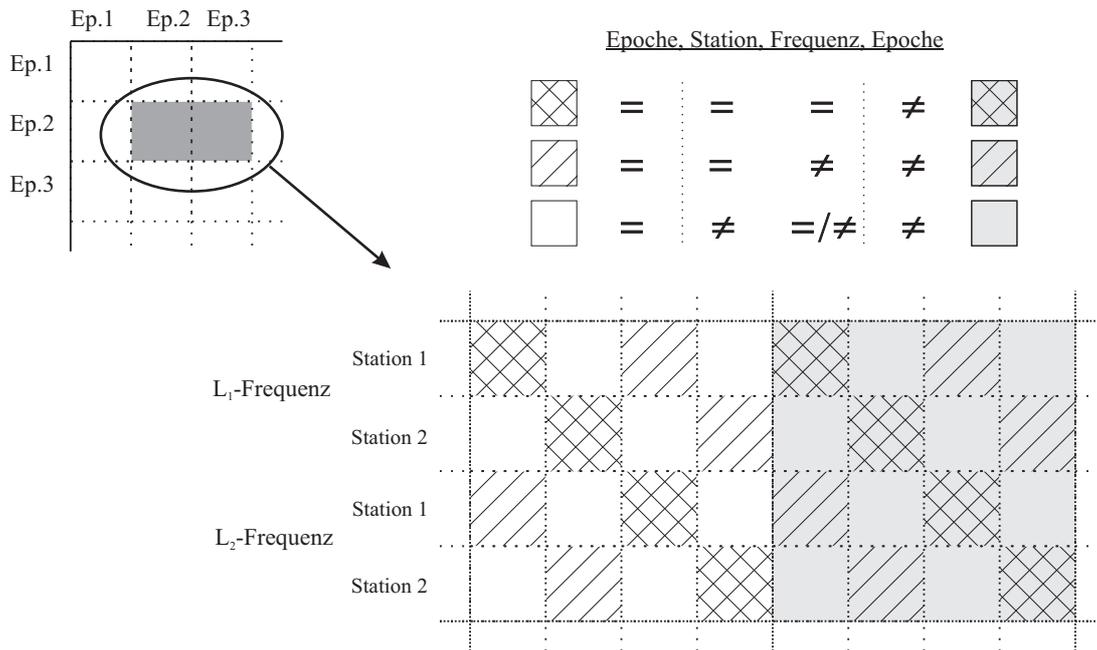


Abb. 3.3: Struktur der Kovarianzmatrix originärer Trägerphasenbeobachtungen  $C_{\phi\phi}$

Die Hauptdiagonalenblöcke im dargestellten Ausschnitt der Kovarianzmatrix der originären Trägerphasenbeobachtungen enthalten die Varianzen bzw. Kovarianzen der Beobachtungen auf einer gemeinsamen Station, Frequenz und zu einer Epoche. Sie sind in der begleitenden Legende durch Gleichheitszeichen in den zugehörigen Spalten dargestellt. Sind die Merkmale eines jeweiligen Beobachtungsblocks nicht identisch, z.B. wegen unterschiedlicher Epochen wie bei den grau unterlegten Blöcken abseits der Hauptdiagonalenblöcke, so ist dies durch Ungleichheitszeichen gekennzeichnet. Die Elemente auf der Hauptdiagonalen, die Varianzen, beschreiben die Genauigkeit der Beobachtungen. Sie setzen sich u.a. aus den in Abschnitt 3.1.2 beschriebenen Einflüssen auf die GPS-Signale zusammen. Das Wissen über diese Faktoren, z.B. über die Vorgänge in der Atmosphäre, ist beschränkt, weshalb eine zuverlässige Modellierung dieser Einflüsse schwierig ist. Aus diesem Grund wird auch heute noch in vielen Fällen ein sehr einfaches Modell mit identischen Varianzen für alle Beobachtungen, d.h. mit konstanten Werten auf der Hauptdiagonalen in  $C_{\phi\phi}$ , verwendet. Aufgrund unterschiedlicher Entstehungs- bzw. Empfangsbedingungen und unterschiedlichen Wegen durch die Atmosphäre besitzt jede Beobachtung jedoch ein eigenes Genauigkeitsniveau, was durch ein solch vereinfachtes Modell nicht repräsentiert werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit werden u.a. Möglichkeiten zur Berücksichtigung dieser Unterschiede vorgestellt und deren Auswirkungen auf die Parameter und deren Genauigkeit untersucht.

Die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen beschreiben den Zusammenhang zwischen Beobachtungen von unterschiedlichen Satelliten bzw. auf unterschiedlichen Stationen, Frequenzen bzw. zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Wie in Abbildung 3.4 anschaulich dargestellt, können solche physikalischen Korrelationen u.a. in zeitliche und räumliche Korrelationen unterteilt werden (vgl. El-Rabbany, 1994).

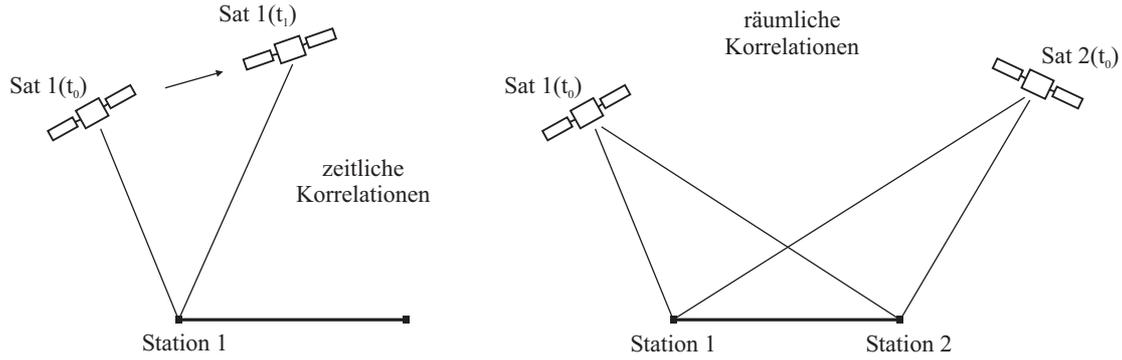


Abb. 3.4: Physikalische Korrelationen bei originären Trägerphasenbeobachtungen

Zeitliche Korrelationen, in Abbildung 3.3 grau unterlegt, treten zwischen Beobachtungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten bzw. Epochen auf. Ursache dafür sind z.B. langsam veränderliche Einflüsse der Atmosphäre oder Mehrwegeeffekte. Räumliche Korrelationen treten dagegen zwischen Beobachtungen auf einer Station zu unterschiedlichen Satelliten bzw. zwischen Beobachtungen zweier Stationen zu einem Satelliten auf. Beispielsweise können konstante atmosphärische Verhältnisse zu Korrelationen sogar auf sehr langen Basislinien ( $\rightarrow 1000\text{km}$ ) führen, wenn sie auch i. d. R. auf kurzen Basislinien stärker präsent sind. Wild und Beutler (1991) beschreiben in diesem Zusammenhang die räumliche Dekorrelation der Ionosphäre mit Hilfe einer einfachen Funktion. Die dabei abgeleitete Dekorrelationslänge ist die kürzeste Basislinienlänge, bei der die ionosphärische Korrelation zwischen Signalen von einem Satelliten zu den Stationen der Basislinie verschwindet. Wild und Beutler stellen aufgrund der Variabilität der Ionosphäre jedoch starke Schwankungen der Dekorrelationslänge an aufeinander folgenden Tagen mit Werten zwischen 30km und 1000km fest. Demgegenüber stehen mit zunehmender Basislinienlänge größer werdende unmodellierbare Restfehler, die durch die schlechter werdende Reduktion atmosphärischer Effekte bei der Bildung der Doppeldifferenzen entstehen und der räumlichen Dekorrelation entgegenwirken. Räumliche Korrelationen findet man neben weiteren Korrelationsklassen wie z.B. frequenzabhängigen Korrelationen, die u.a. durch die Satelliten- bzw. Empfängerhardware entstehen, in der gesamten Kovarianzmatrix der originären Trägerphasenbeobachtungen. Zeitliche und räumliche Korrelationen sind aufgrund ihrer Entstehung schwer voneinander und von anderen Korrelationen trennbar und u.a. dadurch schwer modellierbar. Daher schlägt Landau (1988, Abschnitt B9) z.B. die Überführung räumlicher ionosphärischer Korrelationen in zeitliche Korrelationen vor. Trotz solcher Ansätze ist es bis heute auch in wissenschaftlichen Untersuchungen üblich die physikalischen Korrelationen zu vernachlässigen.

Fasst man diese Erkenntnisse zusammen, so kann festgestellt werden, dass die Kovarianzmatrix der originären Trägerphasenbeobachtungen prinzipiell vollbesetzt ist, aus Gründen der Vereinfachung bzw. aus mangelndem Wissen um die physikalischen Zusammenhänge jedoch oft eine skalierte Einheitsmatrix verwendet wird:

$$\mathbf{C}_{\phi\phi} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\phi\phi} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{I} . \quad (3.14)$$

### 3.2.2 Struktur der Kovarianzmatrix abgeleiteter Trägerphasenbeobachtungen

Abgeleitete GPS-Beobachtungen werden, wie schon erwähnt, häufig zur Reduktion des Einflusses systematischer Fehler auf die Auswertung originärer Trägerphasenbeobachtungen verwendet und stellen dadurch bei einer Vielzahl von Auswerteprogrammen die grundlegenden Beobachtungsgrößen dar. Die allgemeine Form der Kovarianzmatrix abgeleiteter Trägerphasenbeobachtungen über  $n$  Epochen ergibt sich unter Anwendung des Kovarianzfortpflanzungsgesetzes auf (3.11) zu

$$\mathbf{C}_{ll} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_1^T & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_2^T & \dots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_n^T \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_1^T & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_2^T & \dots & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_n^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_1^T & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_2^T & \dots & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

und unter zusätzlicher Berücksichtigung von (3.14) zu

$$\mathbf{C}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_1^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_2^T & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_n \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Die verbleibenden Hauptdiagonalenblöcke enthalten dann nur noch die durch die Bildung von Differenzen sowie Linearkombinationen entstehenden neuen, sogenannten mathematischen (algebraischen) Korrelationen (Santos et al., 1997). Die Nebendiagonalenblöcke entfallen durch die Vernachlässigung der physikalischen Korrelationen in (3.14). Betrachtet man die Struktur eines Epochenblocks  $\mathbf{M}_i$  sowie die daraus folgende Korrelationsmatrix  $\mathbf{R}_i$  genauer, so wird der tridiagonale Aufbau deutlich, der sich für den Fall der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten zweifach differenzierten  $L_3$ -Linearkombinationen zu

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{C}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{a}_i^T = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} 35.48 & -17.74 & 0 & 0 \\ -17.74 & 35.48 & -17.74 & 0 \\ 0 & -17.74 & 35.48 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ergibt. Die Zahlenwerte in (3.17) entstammen der Bildung der Doppeldifferenzen und Linearkombinationen  $L_3$ . Unter Berücksichtigung von (3.14), der Struktur der Matrix  $\mathbf{a}_i$  sowie der Werte für  $\kappa_{11}$  und  $\kappa_{12}$  aus Tabelle 3.1 ergeben sich die Werte auf der Hauptdiagonalen von (3.17) zu

$$M_i(j, j) = \sigma_0^2 \cdot \left( 4 \cdot (\kappa_{31})^2 + 4 \cdot (\kappa_{32})^2 \right) \quad (3.18)$$

und die Werte der jeweils ersten Nebendiagonale, aufgrund von nur einem gemeinsamen Satelliten, bei aufeinanderfolgenden Doppeldifferenzen zu

$$M_i(j, j-1) = M_i(j-1, j) = \sigma_0^2 \cdot \left( 2 \cdot (\kappa_{31})^2 + 2 \cdot (\kappa_{32})^2 \right) \quad (3.19)$$

mit  $j=1, \dots, \dim(\mathbf{M}_i)$ , wobei  $\dim(\mathbf{M}_i)$  der Anzahl der Doppeldifferenzen zur Epoche  $i$  entspricht. Diese Varianzen und Kovarianzen hängen ausschließlich von der Art der Rechenoperation ab ( $L_5$ -,  $L_3$ -, Doppeldifferenzbildung, ...), sind somit genau bekannt und können im Auswerteprozess korrekt berücksichtigt werden.

Folglich kann festgestellt werden, dass neben der bereits diskutierten Kovarianzmatrix der originären Beobachtungen auch die Kovarianzmatrix der abgeleiteten Beobachtungen theoretisch vollbesetzt sein sollte (Abbildung 3.5, linke Spalte). Aufgrund fehlender Modellbildung und rechentechnischer Probleme bei der Verarbeitung von Matrizen mit der Dimension der Anzahl der Beobachtungen werden ebenso wie bei den originären Beobachtungen meist nur stark vereinfachte Kovarianzmatrizen in die GPS-Auswertung eingeführt (Abbildung 3.5, rechte Spalte). Für die Kovarianzmatrix der originären Trägerphasenbeobachtungen wird i.d.R. eine skalierte Einheitsmatrix verwendet (Abbildung 3.5, rechts oben), was bei Berücksichtigung mathematischer Korrelationen zu der in Abbildung 3.5 (rechts unten) dargestellten Kovarianzmatrix der abgeleiteten GPS-Beobachtungen führt.

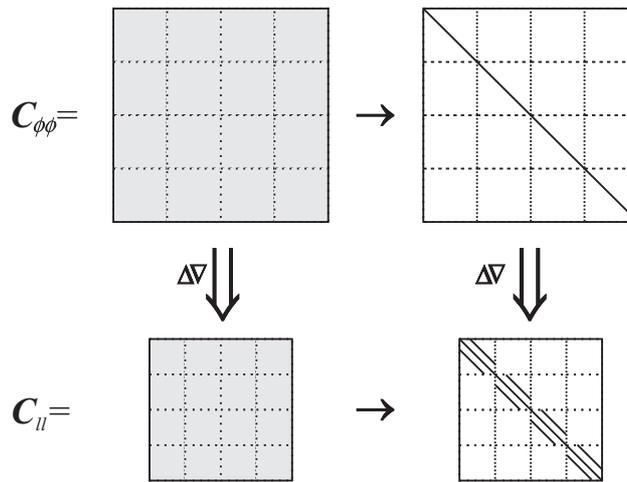


Abb. 3.5: Theoretische sowie allgemein übliche, realisierte Struktur der Kovarianzmatrix der originären und der abgeleiteten (DD) GPS-Trägerphasenbeobachtungen (vollbesetzte Bereiche sind grau hinterlegt)

Die Vernachlässigung der Varianzen und Kovarianzen hat erheblichen Einfluss auf die Ergebnisse der GPS-Auswertung. Jäger (1994) weist dabei u.a. auf unrealistische Genauigkeitsangaben und verfälschte Hypothesentests hin, während Howind et. al (1999) potentielle Auswirkungen von vernachlässigten Korrelationen auf die Genauigkeitssituation und die Ergebnisse der Parameterschätzung aufzeigen. In jüngster Zeit gibt es einige Ansätze zur Modellierung vernachlässigter Komponenten des stochastischen Modells bzw. Untersuchungen zu den Auswirkungen auf die Ergebnisse der GPS-Auswertung. Im folgenden Abschnitt 3.3 sollen nun einige dieser Ansätze vorgestellt und diskutiert werden.

### 3.3 Methoden und Kriterien zur Analyse des stochastischen Modells der GPS-Trägerphasenbeobachtungen

In Abschnitt 2 wurden das funktionale und das stochastische Modell der GPS-Trägerphasenbeobachtungen im Rahmen der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate erläutert. Wie dabei erwähnt liefert die Auswertung mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate nur dann korrekte Ergebnisse, wenn das funktionale und das stochastische Modell zutreffen. Die beschriebenen Defizite insbesondere im stochastischen Modell sowohl bei den Varianzen auf der Hauptdiagonalen als auch bei den Kovarianzen bzw. Korrelationen auf den Nebendiagonalen der Kovarianzmatrix führen dementsprechend zu Verzerrungen bei der Parameterschätzung. Barnes et al. (1998) und Wang et al. (1998) untersuchen daher u.a. den Einfluss unterschiedlicher stochastischer Modelle auf die Ergebnisse der GPS-Auswertung und stellen umso signifikantere Verbesserungen bei der Bestimmung der unbekannt Parameter fest, je realistischer das gewählte stochastische Modell ist. Dabei stellen sie drei Realisierungsgrade der stochastischen Modellbildung einander gegenüber:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{I:} & & \text{II:} & & \text{III:} \\
 C_{\phi\phi} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & & 0 \\ & \sigma^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma^2 \end{pmatrix} & C_{\phi\phi} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} & C_{\phi\phi} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} . & (3.20)
 \end{array}$$

Die skalierte Einheitsmatrix mit konstanter Varianz für alle Beobachtungen in Modell I repräsentiert dabei das einfachste und am weitesten verbreitete Modell für die Kovarianzmatrix originärer GPS-Beobachtungen. In Modell II werden den GPS-Beobachtungen zwar unterschiedliche Varianzen zugeordnet, sie werden jedoch noch immer als stochastisch unabhängig betrachtet. Dieses Modell hat in der letzten Zeit Eingang in diverse GPS-Auswerteprogramme gefunden, wobei die Verfahren zur Berechnung der Varianzen sehr variieren. Das Modell III in (3.20), eine vollbesetzte Kovarianzmatrix, stellt die realistischste, aber zugleich auch aufwändigste Art der Modellbildung dar.

Trotz der immensen rechentechnischen Probleme gibt es in jüngster Zeit Ansätze zur Besetzung und Verarbeitung vollbesetzter Kovarianzmatrizen. Bereits bestehende Lösungsansätze bezüglich der Bestimmung der Varianzen und Kovarianzen für die Modelle I bzw. II sollen daher im folgenden Abschnitt im Überblick vorgestellt werden.

### 3.3.1 Varianz der GPS-Trägerphasenbeobachtungen

In jüngster Zeit wird die Tatsache, dass sich die Varianzen von GPS-Beobachtungen aufgrund äußerer Einflüsse voneinander unterscheiden, im wissenschaftlichen Umfeld mehr und mehr anerkannt. Die Vernachlässigung dieses Sachverhalts führt sowohl zu Verzerrungen in den geschätzten Parametern und deren Genauigkeiten als auch zu Störungen in den Residuen bzw. Verbesserungen (2.10). Daher werden Residuen häufig als Qualitätskriterium für die verwendeten Modelle betrachtet und analysiert. Die in Abbildung 3.6 dargestellte Residuenzeitreihe einer Doppeldifferenzbeobachtung über einen Zeitraum von ca. 5 Stunden weist dementsprechend, durch Unzulänglichkeiten in der funktionalen bzw. stochastischen Modellbildung, stark variierende Varianzen auf.

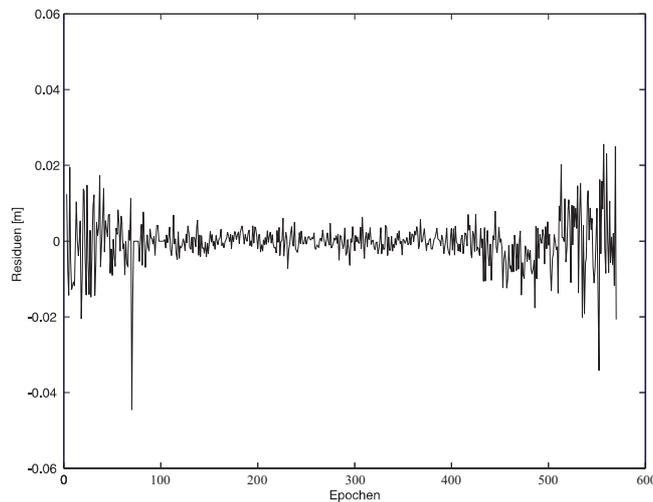


Abb. 3.6: Residuen einer Doppeldifferenzbeobachtung (Datenrate: 30s)

Am Anfang sowie am Ende der Residuenzeitreihe ist dabei eine deutliche Erhöhung der Varianz erkennbar, während sie im mittleren Bereich (Epochen 100-400) relativ konstant bleibt. Zur Analyse und Modellierung dieses Effekts ist es nun notwendig, ein Maß zu finden, in dessen Abhängigkeit die Schwankung der Varianz bestimmt und wenn möglich physikalisch erklärt werden kann. In den letzten Jahren wurden insbesondere zwei Kriterien zur Beurteilung der Qualität der GPS-Beobachtungen in verschiedenen Untersuchungen analysiert und empfohlen:

- Signal-Rausch-Verhältnis (SNR)
- Satellitenelevation.

Im Folgenden sollen diese kurz erläutert sowie grundlegende Untersuchungen dargestellt werden.

#### Signal-Rausch-Verhältnis

Zur Einordnung der Ausführungen zum Signal-Rausch-Verhältnis sollen zu Beginn einige Erläuterungen zur Definition bzw. Entstehung dieses Kriteriums im Bereich des GPS gegeben werden. Eine ausführliche Darstellung ist u.a. in Butsch (2001) und Langley (1997) zu finden.

In der Signaltheorie wird die Stärke eines Signals u.a. über die Leistung definiert. Dabei unterscheidet man zwischen der Leistung des unmodulierten Trägersignals  $C$  und der des modulierten Signals  $S$ . Die Unterschiede zwischen  $S$  und  $C$  sind sehr gering und entstehen aufgrund der Unterdrückung von Rausch- und Störsignalen aus Nachbarfrequenzen. Eine weitere wichtige Größe ist die Rauschleistung  $N$ , die sowohl durch interne Einflüsse der Hardware als auch durch externe Beeinflussung durch Objekte aus der Umgebung hervorgerufen wird. Beim GPS bezieht sich  $C$  i.d.R. auf die Antenne, während  $S$  nach Verstärkung des GPS-Signals am Ausgang des Korrelators im Empfänger definiert ist. Als Signal-Rausch-Verhältnis bezeichnet man dann die Quotienten

$$\frac{C}{N} \cong \frac{S}{N} = SNR \quad (3.21)$$

mit theoretisch ebenso differierender Rauschleistung in der Antenne und am Korrelatorausgang, die trotz ihrer Unterschiede synonym verwendet werden. Eine weitere Möglichkeit ist die Angabe eines Signal-Rauschdichte-Verhältnisses

$$\frac{C}{N_0} \cong \frac{S}{N_0}, \quad (3.22)$$

das durch Normierung mit der Bandbreite der Regelschleife im Korrelator des GPS-Empfängers entsteht.

Die Realisierungen dieser Maße schwanken in Abhängigkeit vom speziellen GPS-Empfänger immens. Oft werden Schätzwerte für das Signal-Rausch-Verhältnis, falsch normierte Schätzwerte für das Signal-Rauschdichte-Verhältnis oder sogar Werte ohne Offenlegung des Berechnungsverfahrens und Angabe der physikalischen Einheiten angegeben. Können jedoch physikalisch korrekte Schätzwerte erzeugt werden, ist es möglich, diese als Kriterium für die Qualität der GPS-Signale zu verwenden. Butsch und Kipka (2004) belegen dementsprechend den Zusammenhang zwischen der Varianz der GPS-Beobachtungen und dem Signal-Rausch-Verhältnis anhand von Beispielen unterschiedlicher GPS-Empfänger. Demgegenüber verwenden Wieser (2001) sowie Brunner et al. (1999) das Signal-Rausch-Verhältnis zur Detektion und Bereinigung von Signalverzerrungen und erzielen bei der Auswertung kurzer Basislinien gute Erfolge. Alle diese Untersuchungen basieren auf einem eher praxisorientierten, empirischen Ansatz, bei dem die aus den Beobachtungen abgeleiteten Signal-Rausch-Verhältnisse ohne Berücksichtigung der Art ihrer Berechnung im späteren Auswerteprozess als unabhängige und damit unkorrelierte Größen eingeführt werden. Trotzdem hat sich das Signal-Rausch-Verhältnis als geeignetes praxisorientiertes Hilfsmittel zur Verbesserung der GPS-Auswertung mittels einer Bereinigung von Signalverzerrungen und Anpassung der Varianz der GPS-Beobachtungen besonders auf kurzen Basislinien erwiesen.

### Berücksichtigung der Satellitenelevation

Der Weg der GPS-Signale durch die Atmosphäre und damit deren Beeinflussung z.B. durch atmosphärische Effekte ist u.a. abhängig von der Elevation, unter der die beteiligten Satelliten beobachtet werden. GPS-Signale von Satelliten in niedrigen Elevationen legen dabei einen längeren Weg durch die Atmosphäre, insbesondere die unteren Atmosphärenschichten, zurück und werden dadurch stärker gestört als Signale von Satelliten in höherer Elevation. Diese Störungen können mit Hilfe elementarer funktionaler und stochastischer Modelle nur unvollkommen modelliert werden, wodurch ihr Einfluss im Auswerteprozess nicht berücksichtigt wird, sondern sich in den Residuen widerspiegelt. Folglich hängt die Varianz der GPS-Beobachtungen bzw. der Residuen u.a. von der Elevation der beteiligten Satelliten ab, die somit ebenfalls als Maß für die Beeinflussung von GPS-Beobachtungen verwendet werden kann. Zur Illustration dieses Zusammenhangs sind in den Abbildungen 3.7 bzw. 3.8 Residuen nach undifferenzierter GPS-Auswertung bzw. einer Doppeldifferenzbeobachtung und jeweils die Elevationen der beteiligten Satelliten dargestellt.

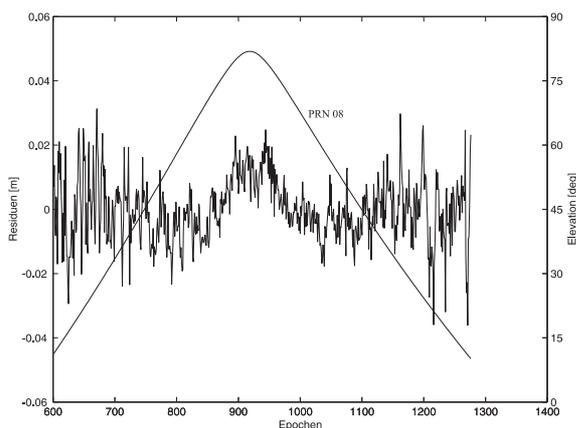


Abb. 3.7: Residuen und Elevation eines Satelliten nach undifferenzierter Auswertung; PRN 08; Datenrate: 30s

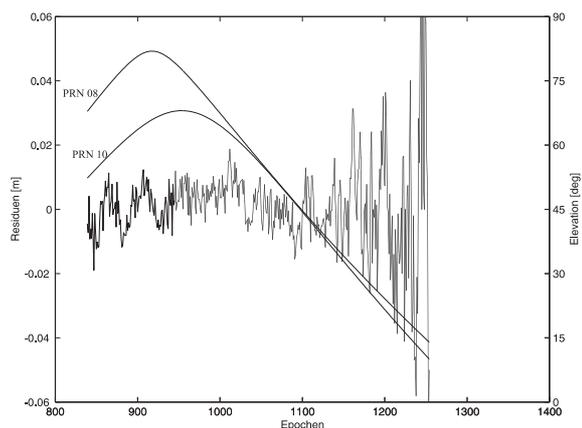


Abb. 3.8: Residuen und Elevationen einer Doppeldifferenzbeobachtung bzw. der beteiligten Satelliten (PRN 08 und 10; Datenrate: 30s)

In beiden Abbildungen ist die beschriebene Varianzerhöhung der Zeitreihen im Bereich niedriger Satellitenelevationen offensichtlich, wenn auch dieser Effekt im undifferenzierten Beispiel (Abbildung 3.7) deutlich geringer ausfällt und stärker von Störungen überlagert ist. Aufgrund der deutlichen Schwankung der Varianz kann auf eine starke Korrelation

zwischen Satellitenelevation und der Varianz der Residuen bzw. Beobachtungen geschlossen werden. Aus der Analyse von undifferenzierten GPS-Beobachtungen schließen Euler und Goad (1991) auf eine Exponentialfunktion

$$\sigma^2 = \left[ x_0 + x_1 \cdot \exp\left(\frac{-e}{e_0}\right) \right]^2 \quad (3.23)$$

zur Beschreibung dieser Abhängigkeit. Dabei ergibt sich die Varianz  $\sigma^2$  aus der Elevation  $e$  des beteiligten Satelliten und der empirisch bestimmten Elevationsparameter  $e_0$  bzw. Funktionsparameter  $x_0$  und  $x_1$ . Es sei darauf hingewiesen, dass bei der Anwendung in der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen (2.5) die Funktion (3.23) als zusätzliche Skalierungsfunktion zum a priori Varianzfaktor eingeführt wird. Jin (1995) und Jin und de Jong (1996) wenden (3.23) auf Code- und Phasenbeobachtungen an und bestätigen ihre prinzipielle Gültigkeit. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen untersucht Han (1997), wie sich eine solche elevationsabhängige Varianzfunktion auf die Parameterschätzung auswirkt, und stellt signifikante Verbesserungen bei der Mehrdeutigkeitslösung fest. Alle diese Untersuchungen beruhen jedoch meist auf kurzen Basislinien (<15km) mit kurzer Beobachtungsdauer oder auf simulierten Daten. Dabei werden die Parameter der vorgegebenen einheitlichen Varianzfunktion für einen kompletten Datensatz bestimmt. Dazu werden die Beobachtungen in Elevations- oder Zeitintervalle unterteilt, innerhalb derer nahezu konstante Verhältnisse angenommen werden können, da sich die Satellitenkonstellation und die atmosphärischen Verhältnisse nur langsam ändern. Für diese Datengruppen werden dann repräsentative Varianzen berechnet, auf deren Grundlage die gesuchten Parameter der Varianzfunktion bestimmt werden können. Diesen Ansatz entwickeln Tiberius und Kenselaar (2000) weiter, indem sie die Varianzen der verschiedenen Datengruppen ohne Vorgabe einer Varianzfunktion mit Hilfe einer Varianzkomponentenschätzung (Rao, 1971) bestimmen.

Eine weitere Variante, die Einzug insbesondere in die praktische Auswertung gefunden hat, ist die Berücksichtigung einer empirisch bestimmten, festen Funktion zur Skalierung der Varianz der GPS-Beobachtungen in der Kovarianzmatrix (2.5)

$$\sigma^2 = \frac{1}{\cos^2(z)} = \frac{1}{\sin^2(e)} \quad (3.24)$$

mit der Zenitdistanz  $z$  bzw. der Elevation  $e$  des beteiligten Satelliten (Rothacher et al., 1997). Sie ist unabhängig vom prozessierten Datenmaterial und kann in Analogie zum troposphärischen Einfluss (3.3) interpretiert werden, i.d.R. dem kritischsten qualitätsmindernden Einflussfaktor in den GPS-Signalen.

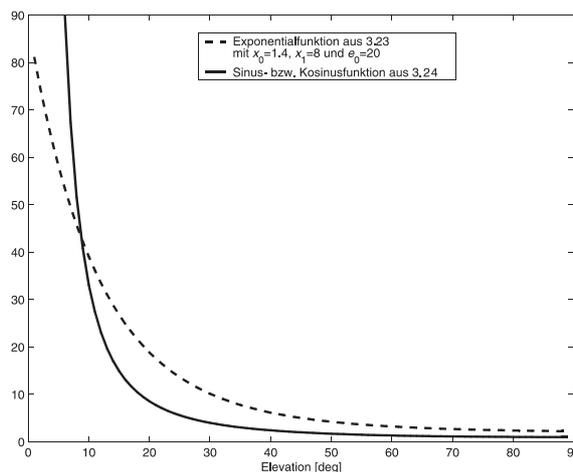


Abb. 3.9: Varianzfunktionen zur Gewichtung von GPS-Beobachtungen

Vergleicht man die in Abbildung 3.9 dargestellten Varianzfunktionen, so fällt auf, dass bei der Sinus- bzw. Kosinusfunktion aus (3.24) bis zu Elevationen von ca 30° nur eine sehr geringe Varianzerhöhung feststellbar ist. In niedrigeren Elevationsbereichen steigt die Varianz dagegen sehr stark an und ist bei  $e=0^\circ$  nicht definiert. Die Exponentialfunktion aus (3.23) mit beispielhaften Parametern aus Euler und Goad (1991) weist hingegen einen wesentlich flacheren Verlauf auf und ist über den gesamten Elevationsbereich definiert.

Es ist festzuhalten, dass die Berücksichtigung variierender Varianzen im stochastischen Modell der GPS-Beobachtungen zu signifikanten Verbesserungen bei der Bestimmung der Parameter und deren Genauigkeit im Rahmen der GPS-Auswertung führt. Die dazu notwendigen Kriterien, das Signal-Rausch-Verhältnis und die Satellitenelevation, sind wie bereits ausgeführt korreliert, wenn auch grundlegende Unterschiede bezüglich ihrer Entstehung und Interpretation bestehen. Das Signal-Rausch-Verhältnis ist ein hervorragendes Maß zur Beschreibung des aktuellen Zustands des Satellitensignals. Es beinhaltet Störungen sowohl durch äußere, z.B. atmosphärische Einflüsse als auch durch Fehler der Sende- bzw. Empfangssysteme. Durch die Gesamtheit dieser Einflussfaktoren variiert das Signal-Rausch-Verhältnis sehr stark. Außerdem ist es anfällig für kurzzeitige Störungen, was zu Problemen bei der Auswertung führen kann. Ein gravierender Nachteil ist die fehlende Normung. Daraus resultiert eine starke Abhängigkeit von Fabrikat und Empfängertyp, was einen Vergleich erschwert. Demgegenüber steht das physikalische Maß der Satellitenelevation. Es ist ein natürlicher Modellwert, der nicht durch äußere Einflüsse beeinträchtigt wird und somit für die Modellierung physikalischer Vorgänge verwendet werden kann. Die Satellitenelevation hängt ausschließlich von der Bewegung der Satelliten ab und kann daher durch eine einfache glatte Funktion beschrieben werden. Sie beinhaltet allerdings keine Information über den tatsächlichen Zustand des GPS-Signals.

Trotz dieser grundlegenden Unterschiede führen beide Maße zu ähnlichen Ergebnissen, wie vergleichende Studien von Collins und Langley (1999) sowie Satirapod und Wang (2000) zeigen. Daher hängt die Auswahl eines der beiden Maße vom beabsichtigten Verwendungszweck ab. Ist der aktuelle Zustand des GPS-Signals mit allen Störeinflüssen gesucht oder beeinflussen stationsspezifische Verhältnisse wie z.B. Mehrwegeeffekte die GPS-Beobachtungen, so wird das Signal-Rausch-Verhältnis erste Wahl sein. Ist jedoch ein physikalischer Parameter zur Modellierung einzelner, z.B. atmosphärischer Verhältnisse gesucht, stellt die Satellitenelevation aufgrund der fehlenden Störungen ein weitaus einfacher beherrschbares Merkmal dar.

### 3.3.2 Mathematische und physikalische Korrelationen

Mathematische (algebraische) Korrelationen entstehen, wie in Abschnitt 3.2.2 erläutert, durch die Bildung abgeleiteter GPS-Beobachtungen. Dieser Prozess ist exakt bekannt und wird i.d.R. bei der Auswertung im stochastischen Modell berücksichtigt. Demgegenüber sind physikalische Korrelationen nur schwer modellierbar, da das Wissen über ihre Entstehung und ihre Auswirkungen auf die GPS-Beobachtungen beschränkt ist (vgl. Abschnitt 3.2.1). Daher gibt es bisher nur wenige Ansätze zur Berücksichtigung physikalischer Korrelationen bei der GPS-Auswertung, die sich meist auf zeitliche Korrelationen oder auf einzelne Einflussfaktoren in den GPS-Beobachtungen beschränken. So analysiert z.B. Delikaraoglou (1989) zeitliche Korrelationen aufgrund der Ionosphäre und beschreibt sie durch stochastische Prozesse, während Radovanovic et al. (2000) u.a. durch Mehrwegeeffekte hervorgerufene zeitliche Korrelationen untersuchen. Unabhängig von der konkreten Ursache der physikalischen Korrelationen bestimmt u.a. El-Rabbany (1994) Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen bei der Auswertung von Doppeldifferenzbeobachtungen. Um eine allgemeingültige empirische Autokovarianzfunktion zu erhalten, wählt er aus verschiedenen empirischen Funktionen die Exponentialfunktion

$$f(\tau) = \exp\left(\frac{-|\tau|}{T}\right) \quad (3.25)$$

mit der Zeitverschiebung  $\tau$  und der empirisch bestimmten Korrelationszeit  $T$  als beste Approximation für die Autokovarianzfunktion der Phasenmessungen aus. Seine Untersuchungen zeigen zudem, dass die Kreuzkovarianzfunktion der DD-Beobachtungen aus der Autokovarianzfunktion abgeleitet werden kann. Bezüglich der Auswirkungen dieser Kovarianzfunktion auf die Parameterschätzung stellt El-Rabbany außer einer realistischeren Genauigkeitssituation keine signifikanten Änderungen fest, wohingegen Howind et. al (1999) zusätzlich signifikante Änderungen bei den Stationskoordinaten, insbesondere in der Höhenkomponente, aufzeigen. Starke Variationen der bei originären Code- und Phasenbeobachtungen bestimmten Autokorrelationsfunktionen in Abhängigkeit vom Beobachtungstyp und von der benutzten GPS-Ausrüstung zeigt Bona (2000). Borre und Tiberius (2001) bestätigen diese starken Variationen und vergleichen die von ihnen ermittelten Kovarianzfunktionen mit stochastischen Prozessen. Sie stellen jedoch fest, dass eine Anpassung stochastischer Prozesse aufgrund der untersuchten heterogenen Daten sehr schwierig bzw. oft sogar unmöglich ist. Tiberius (2001) untersucht darauf aufbauend, wie sich die Berücksichtigung solcher stochastischer Prozesse auf die geschätzten Parameter der GPS-Auswertung auswirkt. Alle diese Untersuchungen beziehen sich primär auf zeitliche Korrelationen. Wang et al. (2002) präsentieren dagegen ein Verfahren, mit dem die gesamte Kovarianzmatrix von Doppeldifferenzbeobachtungen, inklusive der Varianzen und der Kovarianzen aufgrund physikalischer Korrelationen, unabhängig von den physikalischen Ursachen geschätzt werden kann. Zeitliche Korrelationen werden mit Hilfe von stochastischen Prozessen modelliert und darauf aufbauend die Varianz- und Kovarianzkomponenten mit Hilfe einer Varianzkomponentenschätzung bestimmt. Die Notwendigkeit der korrekten Berücksichtigung physikalischer Korrelationen

konnte dabei beispielhaft durch den Vergleich der folgenden vier Stufen der Modellierung physikalischer Korrelationen gezeigt werden.

- a) Vernachlässigung physikalischer Korrelationen
- b) Modellierung zeitlicher Korrelationen innerhalb eines Satellitenpaares aufgrund einer festen, für alle Satellitenpaare identischen Exponentialfunktion (vgl. El-Rabbany und Kleusberg, 1993)
- c) Modellierung zeitlicher Korrelationen innerhalb eines Satellitenpaares aufgrund individueller stochastischer Prozesse für jedes Satellitenpaar
- d) Korrelationen innerhalb eines Satellitenpaares (zeitliche Korrelationen) und zwischen verschiedenen Satellitenpaaren (zeitliche und räumliche Korrelationen) werden mit Hilfe individueller stochastischer Prozesse modelliert

Es wurde dabei deutlich, dass trotz relativ inhomogener Ergebnisse die Berücksichtigung der aufwändigeren Modelle c) und d) tendenziell zuverlässigere Ergebnisse bei der Schätzung der Mehrdeutigkeitsparameter und Stationskoordinaten liefert. Die einfacheren Modelle a) und b) zeigen demgegenüber deutliche systematische Resteffekte in den Residuen nach der GPS-Auswertung, die einer unvollkommenen Korrelationsmodellierung zuzuordnen sind und teilweise starke Abweichungen in den Stationskoordinaten, insbesondere in der Höhenkomponente, hervorrufen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass im Bereich der physikalischen Korrelationen einige Einzeluntersuchungen unter Anwendung verschiedener mathematischer Methoden durchgeführt wurden. Ein Ansatz für ein geschlossenes Verfahren, mit dem alle Elemente der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen bestimmt werden können, wurde vorgestellt. Aufgrund der unterschiedlichen Fokussierung, unterschiedlicher mathematischer Methoden und stark unterschiedlichem Datenmaterials variieren die Ergebnisse allerdings sehr stark bzw. widersprechen sich sogar teilweise. Beispielhaft seien hier zeitliche Korrelationen genannt, bei denen der ermittelte Zeitraum, in dem Korrelationen wirksam sind, je nach Untersuchung von wenigen Sekunden bis zu einigen Minuten schwankt. Aufgrund von rechentechnischen Problemen beim Umgang mit umfangreichem Datenmaterial müssen diese Methoden zudem noch für die praktische Anwendung angepasst und die Übertragbarkeit bzw. Repräsentativität der Ergebnisse überprüft werden.

In der vorliegenden Arbeit wird nun aufbauend auf diesen Einzeluntersuchungen ein geschlossenes, auf den Methoden der Zeitreihenanalyse basierendes Verfahren zur Analyse und Erweiterung bzw. Verbesserung des kompletten stochastischen Modells (Varianzen und Kovarianzen) vorgestellt. Geeignete statistische Tests ermöglichen die Überprüfung des verwendeten Modells und der erzielten Ergebnisse in den verschiedenen Verfahrensschritten. Eine praktische Realisierung mit allgemein verfügbarer Standardsoftware sowie umfangreiche Untersuchungen anhand von Daten unterschiedlicher Charakteristik belegen die praktische Verwendbarkeit.

## 4 Verfahren zur Analyse und Erweiterung des stochastischen Modells der GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Im Folgenden werden aufbauend auf den in den vorhergehenden Kapiteln beschriebenen Grundlagen zunächst Ausgangsdaten und Kriterien zur Analyse des stochastischen Modells von GPS-Trägerphasenbeobachtungen dargestellt. Ausgehend davon werden Möglichkeiten zur Verbesserung des stochastischen Modells sowie auftretende Probleme diskutiert.

In Kapitel 2 wurden Verfahren der Zeitreihenanalyse beschrieben. Dabei wurden u.a. Methoden zur Bestimmung von Varianz-, Trend- und Korrelationsfunktionen diskutiert. Um diese Verfahren anzuwenden bzw. die Interpretierbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, müssen Störungen in den Zeitreihen gegebenenfalls beseitigt werden. So kann z.B. die Schätzung einer Varianzfunktion nur dann zuverlässige Ergebnisse liefern, wenn die Zeitreihe trendbereinigt ist, da ein potentiell vorhandener Trend die geschätzte Varianzfunktion verfälscht. Daher wurde ein mehrstufiges Verfahren entwickelt (vgl. Abbildung 4.1), das es ermöglicht, Varianz- und Korrelationsfunktionen zu schätzen und diese Schätzung durch statistische Tests zu überprüfen. Die Tests tragen zudem zur Beurteilung und Auswahl der verschiedenen Analyseverfahren bei. Wird eine effiziente, praktische Anwendung dieses Verfahrens angestrebt, können diese Testverfahren übergangen und ausschließlich die Datenanalyse durchgeführt werden.

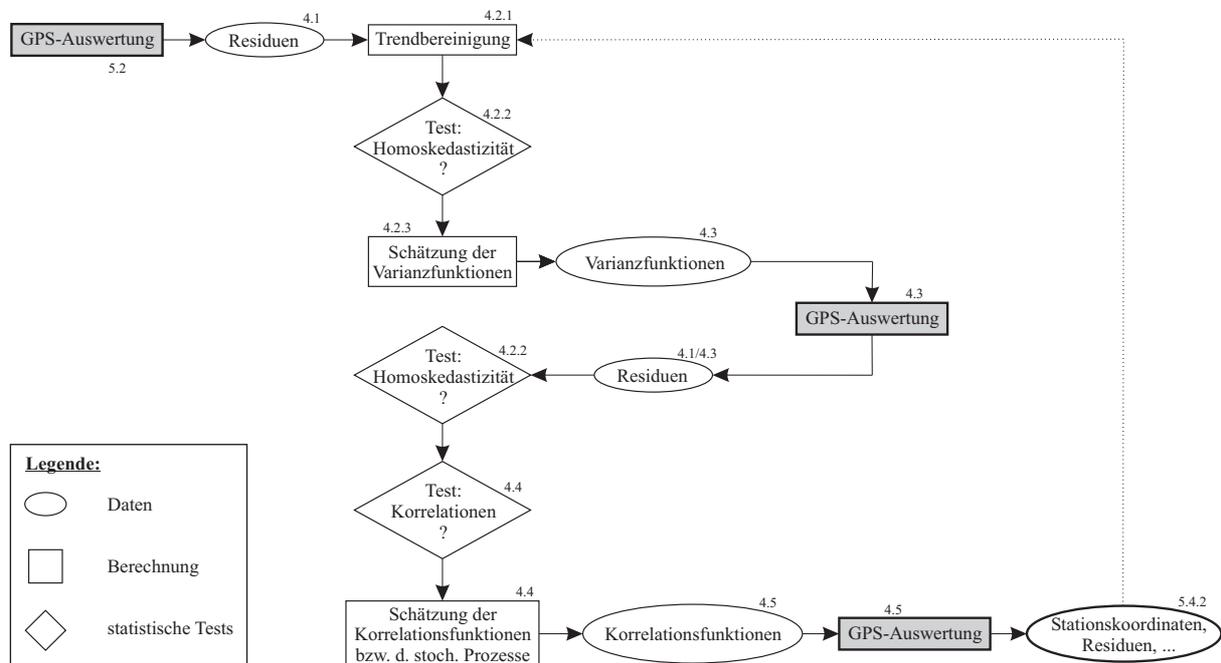


Abb. 4.1: Ablaufplan zur Analyse des stochastischen Modells von GPS-Trägerphasenbeobachtungen inklusive Verweise zu deren Erläuterung im Text (Kapitelnummern der einzelnen Verfahrensschritte)

In Abbildung 4.1 sind die einzelnen Schritte zur Analyse des stochastischen Modells der GPS-Trägerphasenbeobachtungen sowie Verweise zu Erläuterungen in den weiteren Abschnitten dieser Arbeit dargestellt. In der zentralen Spalte sind die eigentlichen Analyse- und Testverfahren angeordnet, während Daten und GPS-Auswertung außerhalb davon zu finden sind. Vor der detaillierten Beschreibung sollen zunächst die einzelnen Module des vorgestellten Analyseverfahrens im Zusammenhang erläutert werden.

Ausgangspunkt der Analyse sind Residuen nach der Auswertung von GPS-Beobachtungen mit Hilfe wissenschaftlicher Standardsoftware unter Berücksichtigung des herkömmlichen Modells für die Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen (Modell I aus (3.20)). Im Rahmen dieser Arbeit wird die auf Doppeldifferenzen basierende Version 4.2 der Berner GPS-Software (Hugentobler et al., 2001) verwendet. Ausführliche Erläuterungen zur GPS-Auswertung, insbesondere zu den verwendeten Verfahren und Einstellparametern, sind Abschnitt 5.2 dieser Arbeit zu entnehmen.

Das eigentliche Analyseverfahren besteht dann primär aus den Modulen der mittleren Spalte in Abbildung 4.1, mit eingeschobener GPS-Auswertung nach der Bestimmung geeigneter Varianzfunktionen aus den in Abschnitt 4.1 disku-

tierten Residuen. Dazu müssen zunächst deterministische Trends bzw. Störungen in den Residuen identifiziert und gegebenenfalls eliminiert werden, um eine zuverlässige Varianzschätzung zu gewährleisten. Geeignete Verfahren zur Trendelimination wurden bereits in Abschnitt 2.2.1 beschrieben. Mögliche Anwendungen dieser Methoden im Rahmen der Analyse des stochastischen Modells der GPS-Beobachtungen werden in Abschnitt 4.2.1 diskutiert. Vor der Schätzung von Varianzfunktionen aus den trendbereinigten Daten können diese mit Hilfe von statistischen Tests auf Homoskedastizität geprüft werden. Dazu wurden in Abschnitt 2.4.1 einige Testverfahren vorgestellt. Erläuterungen zur Anwendung auf die hier vorliegende Problemstellung sind Abschnitt 4.2.2 zu entnehmen. Das eigentliche Verfahren zur Schätzung der Varianzfunktionen wird im Anschluss daran in Abschnitt 4.2.3 erläutert. Um eine zuverlässige Schätzung zu ermöglichen, ist es notwendig, die studentisierten Residuen in geeigneter Weise zu transformieren. Die Varianzfunktionen können dann als Erwartungswertfunktionen dieser Daten mit Hilfe einer linearen Regression geschätzt werden.

Die geschätzten Varianzfunktionen können gemäß den Erläuterungen in Abschnitt 4.3 in die Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen integriert werden. Die aus der erneuten Auswertung der GPS-Beobachtungen mit Hilfe der Berner GPS-Software unter Berücksichtigung der erweiterten Kovarianzmatrix (Modell II aus (3.20)) resultierenden Residuen dienen nun als Ausgangsdaten zur Analyse der Korrelationsstruktur der GPS-Beobachtungen. Zunächst werden die Residuen jedoch einem erneuten Test auf Homoskedastizität unterzogen. Durch den Vergleich mit den Testergebnissen vor der Schätzung und Berücksichtigung der Varianzfunktionen kann einerseits die Wirkung des Analyseverfahrens geprüft und andererseits sichergestellt werden, dass weitgehend homoskedastische Residuenzeitreihen für die weiteren Schritte der Analyse zur Verfügung stehen. In diesem Stadium des Analyseverfahrens ist es unerlässlich, die Residuen erneut bzgl. vorhandener Trends zu überprüfen. Indes erscheint eine Beseitigung der Trendeffekte nicht notwendig bzw. praktikabel (vgl. Abschnitt 4.4.1). Sinnvoll ist allerdings ein statistischer Test zur Klärung der Frage, ob die Residuen IID-verteilt und damit unkorreliert sind (vgl. Abschnitt 2.4.2 bzw. 4.4). Wird die Nullhypothese dieses Tests verworfen, ist es erforderlich, die Daten bzgl. vorhandener Korrelationsfunktionen zu analysieren. Die Bestimmung der Autokorrelationsfunktionen der untersuchten Residuenzeitreihen bzw. die Anpassung einer analytischen Funktion an die empirisch bestimmten Autokorrelationsfunktionen erfolgt gemäß den Ausführungen in Abschnitt 4.4. Mit Hilfe dieser Funktionen kann dann die Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen vervollständigt werden.

Die Ergebnisse der endgültigen Auswertung der GPS-Daten auf der Grundlage des so verbesserten stochastischen Modells (Modell III aus (3.20)) werden dann u.a. in Abschnitt 5.4.2 diskutiert. Ist eine erneute Analyse notwendig bzw. erwünscht, so können die Residuen dieses Auswerteschrittes als Eingangsdaten für einen erneuten Durchlauf des Verfahrens verwendet werden, wobei dann die bereits erfolgte Aufdatierung des stochastischen Modells der GPS-Beobachtungen entsprechend im Verlauf des Verfahrens berücksichtigt werden muss. Es sei darauf hingewiesen, dass sich die in der zentralen Spalte dargestellten (Test-)verfahren ausschließlich auf einzelne Zeitreihen (Doppeldifferenzresiduen, jeweils ein Satellitenpaar) beziehen, während bei der GPS-Auswertung alle Zeitreihen bzw. Daten der gesamten Session zusammen verarbeitet werden.

## 4.1 Ausgangsdaten und Kriterien zur Analyse des stochastischen Modells von GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Zunächst werden Eigenschaften der im beschriebenen Analyseverfahren verwendeten Ausgangsdaten sowie Kriterien zur Modellierung der sie beeinflussenden Störungen erläutert. Zudem werden Alternativen aufgezeigt und diskutiert.

### 4.1.1 Residuen

Residuen bzw. Verbesserungen enthalten wertvolle Informationen über die Qualität der Modellierung physikalischer Prozesse. Störungen bzw. die i.d.R. als normalverteilt angenommenen Fehler in den Beobachtungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (4.1)$$

sind jedoch nicht direkt beobachtbar. Daher werden in vielen Bereichen Residuen zur Aufdeckung von Unstimmigkeiten zwischen beobachteten Daten und der vorgesehenen funktionalen Modellierung eingesetzt. Bei Vorliegen der Voraussetzungen für die zufälligen Fehler  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sind die Verbesserungen bzw. Residuen aus der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten ebenfalls normalverteilt mit der Kovarianzmatrix (2.11):

$$\mathbf{v} \sim N(\mathbf{0}, \hat{\sigma}^2 \mathbf{Q}_{vv}) . \quad (4.2)$$

Störungen bzw. ein unzutreffendes funktionales Modell führen zu Änderungen in der statistischen Verteilung der nicht beobachtbaren Fehler  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und somit der Residuen  $\boldsymbol{v}$ . Das Ziel der Untersuchungen muss nun sein, durch die Analyse der Residuen die unzutreffenden Annahmen bzgl.  $\boldsymbol{\varepsilon}$  zu erkennen. Ausgehend von der herkömmlichen Definition der Residuen im Kleinste-Quadrate-Verfahren existieren eine Reihe von Varianten zur Definition der Residuen, die im Folgenden diskutiert werden sollen. Zur Illustration ist in den Abbildungen 4.2 bis 4.4 jeweils eine Variante der Residuenbestimmung für einen identischen Datensatz (ein Satellitenpaar) dargestellt.

### Kleinste-Quadrate-Residuen

Im geodätischen Bereich werden Residuen bzw. im Sprachgebrauch der Ausgleichsrechnung die Verbesserungen  $\boldsymbol{v}$  gemäß (2.10) definiert. Sie entstammen der Kleinste-Quadrate-Ausgleichung und werden daher im Folgenden als Least Squares Residuen (LS-Residuen) bezeichnet. Sie werden von Ausgleichs- bzw. GPS-Auswerteprogrammen standardmäßig aus dem gesamten vorliegenden Datenmaterial berechnet und ausgegeben und erfordern damit keinen zusätzlichen Berechnungsaufwand.

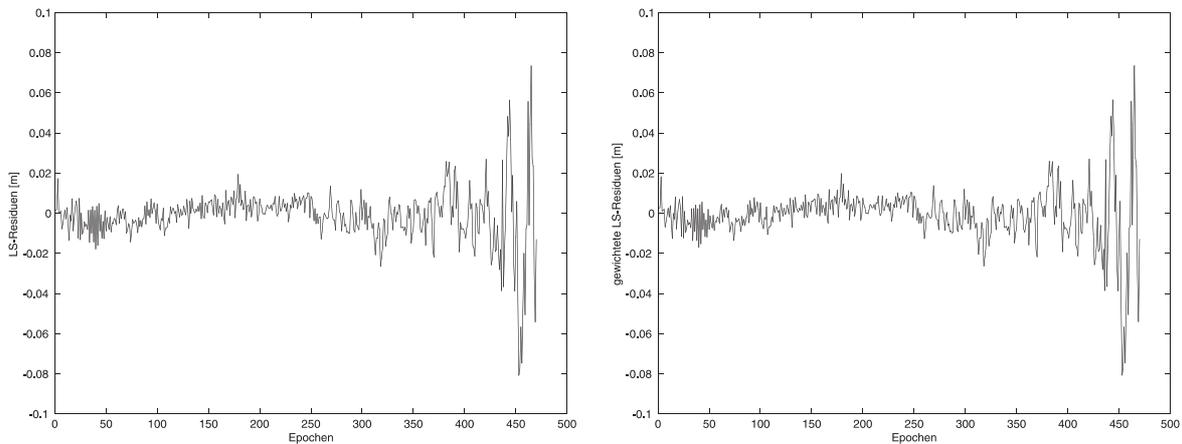


Abb. 4.2: LS-Residuen ( $L_3$ ) einer Doppeldifferenz: 14km-Basislinie, PRN 08-10, Datenrate: 30s  
 a) Kovarianzmatrix: Modell I aus (3.20)      b) Kovarianzmatrix: Modell II aus (3.20)  
 (mit geeigneter Varianzfunktion der Beobachtungen)

In Abbildung 4.2a wird eine starke Schwankung der Varianz deutlich. Berücksichtigt man im Auswerteprozess eine geeignete Funktion zur Gewichtung der Beobachtungen (hier die mit Hilfe des in Abschnitt 4.2.3 vorgestellten Verfahrens geschätzte Funktion), so hat dies, wie in Abbildung 4.2b deutlich wird, kaum Einfluss auf die LS-Residuen, d.h. die Gewichtung wirkt sich primär auf die Kovarianzmatrix der Residuen aus, kaum jedoch auf die Residuen selbst.

In Abschnitt 2 wurde u.a. festgestellt, dass der Kleinste-Quadrate-Schätzer in der Klasse der linearen erwartungstreuen Schätzer die kleinste Varianz besitzt (BLUE). Die resultierenden Residuen sind jedoch durch den Ausgleichsprozess auch bei Vorliegen der Voraussetzungen für  $\boldsymbol{\varepsilon}$  korreliert und - wie schon in Abbildung 4.2 deutlich wurde - heteroskedastisch. Statistische Analyse- und Testverfahren werden durch diese Eigenschaften erschwert. Deshalb schlagen Cook und Weisberg (1982) verschiedene Transformationen zur geeigneten Berücksichtigung dieser Probleme vor.

### Normierte Residuen

Eine Möglichkeit zur Transformation der herkömmlichen Residuen bzw. Verbesserungen besteht in der Normierung mit der Standardabweichung  $\sigma_i$  der Residuen:

$$r(i) = \frac{v_i}{\sigma_i} = \frac{v_i}{\sigma_0 \sqrt{q_{vv}(i,i)}} \quad , \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

wobei  $q_{vv}(i,i)$  das  $i$ -te Diagonalelement der Kofaktormatrix der Verbesserungen bezeichnet. Normiert man mit der geschätzten Standardabweichung, so erhält man nach Cook und Weisberg (1982) die sog. **studentisierten Residuen**

$$r_s(i) = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_i} = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{vv}(i,i)}} \quad , \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Werden sie vom verwendeten Ausgleichungs- bzw. GPS-Auswerteprogramm standardmäßig aus dem gesamten vorliegenden Datenmaterial berechnet, so sind sie analog zu den LS-Residuen mit geringem Aufwand zu verarbeiten. Falls der Modellansatz mit unabhängig und identisch verteilten Fehlern (4.1) zutreffend ist, so besitzen die studentisierten Residuen die konstante Varianz  $\sigma^2(r_s(i)) = 1$  und sind damit homoskedastisch. Die Nebendiagonalelemente von  $\mathbf{Q}_{vv}$ , die die Korrelationsstruktur der Residuen repräsentieren, bleiben davon unberührt, wodurch auch die studentisierten Residuen untereinander korreliert sind. Somit erschweren auch diese Residuen die Durchführung statistischer Tests. Heteroskedastizität in den studentisierten Residuen, wie sie in Abbildung 4.3a deutlich wird, kann als ein Indiz für vorhandene Modellfehler betrachtet werden.

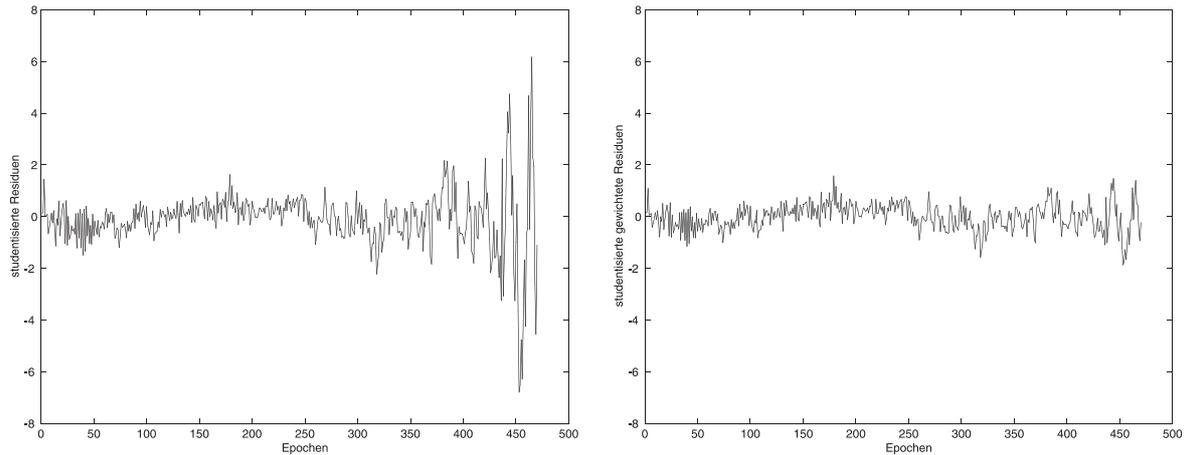


Abb. 4.3: Studentisierte Residuen ( $L_3$ ) einer Doppeldifferenz: 14km-Basislinie, PRN 08-10, Datenrate: 30s  
 a) Kovarianzmatrix: Modell I aus (3.20)                      b) Kovarianzmatrix: Modell II aus (3.20)  
 (mit geeigneter Varianzfunktion der Beobachtungen)

Eine geeignete Gewichtung der Beobachtungen und somit eine zutreffende stochastische Modellierung kann zu einer weitgehenden Homogenisierung der Varianz studentisierter Residuen führen (Abbildung 4.3b). Verbleibende Schwankungen der Varianz deuten auf eine unvollkommene Gewichtungsfunktion bzw. nicht berücksichtigte Korrelationen hin.

### Unkorrelierte Residuen

Analog zur Bereinigung der Varianzstruktur der Residuen durch Normierung existieren Verfahren zur Änderung bzw. Bereinigung der Korrelationsstruktur der Residuen. Cook und Weisberg (1982) schlagen dazu u.a. die Berechnung **rekursiver Residuen** vor. Unter Voraussetzung von (4.1) sind rekursive Residuen  $r_r$  unkorreliert und homoskedastisch:

$$r_r \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (4.5)$$

und werden aus i. d. R. nach der Zeit geordneten Beobachtungen berechnet:

$$r_r(j) = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, p \quad (4.6)$$

$$r_r(j) = - \frac{l_{nj} - \mathbf{a}_j^T (\mathbf{A}_{j-1}^T \mathbf{A}_{j-1})^{-1} \mathbf{A}_{j-1}^T \mathbf{l}_{j-1}}{\sqrt{1 + \mathbf{a}_j^T (\mathbf{A}_{j-1}^T \mathbf{A}_{j-1})^{-1} \mathbf{a}_j}} \quad , \quad j = p+1, \dots, n$$

Dabei bezeichnet

- $p$  die Anzahl der unbekannt Parameter der Ausgleichung
- $\mathbf{l}_{j-1}$  die ersten  $j-1$  Elemente und
- $l_{nj}$  das  $j$ -te Element des Beobachtungsvektors  $\mathbf{l}$  der Dimension  $(n \times 1)$  sowie
- $\mathbf{a}_j^T$  die  $j$ -te Zeile und
- $\mathbf{A}_{j-1}$  die ersten  $j-1$  Zeilen der Designmatrix  $\mathbf{A}$ .

Es sei darauf hingewiesen, dass im Rahmen dieser Arbeit die rekursiven Residuen für jede Doppeldifferenz getrennt berechnet werden. Daher wird nur der Teil der Designmatrix zur Berechnung der rekursiven Residuen verwendet, der der gerade bearbeiteten Doppeldifferenz zugeordnet ist. Der Wert für  $p$  kann u.a. durch die Bestimmung des Ranges der Design- bzw. der Kofaktormatrix der Verbesserungen ( $p = \text{rg}(\mathbf{A}) = n - \text{rg}(\mathbf{Q}_{vv})$ ) der bearbeiteten Zeitreihe erfolgen. Dazu muss analog zur Berechnung der rekursiven Residuen der zugehörige Teil der Design- bzw. der Kofaktormatrix der Verbesserungen aus den Matrizen der gesamten GPS-Session extrahiert werden. Selbst bei großen Datenmengen bleibt daher die Dimension von  $p$  aufgrund der geringen Anzahl der Unbekannten (drei Stationskoordinaten und evtl. wenige Troposphärenparameter) sehr klein. Bei der Bestimmung der rekursiven Residuen werden die den ersten  $p$  Beobachtungen zugeordneten rekursiven Residuen vernachlässigt bzw. zu Null gesetzt. Diese Beobachtungen definieren zusammen mit dem entsprechenden Ausschnitt der Designmatrix  $\mathbf{A}$  ein linear unabhängiges Gleichungssystem, mit dem die Startwerte für die Berechnung der restlichen rekursiven Residuen bestimmt werden. Diese rekursiven Residuen (Epoche  $i$ ) werden dann auf der Basis von Residuen zurückliegender Epochen  $i-1, i-2, \dots$  berechnet. Bei diesem Verfahren ergeben sich somit Residuenvektoren mit reduzierter Dimension, wodurch die Interpretation der aus den Residuen abgeleiteten Funktionen erschwert wird. Bei langen Zeitreihen mit wenigen unbekanntem Parametern des funktionalen Modells tritt diese Einschränkung ebenso in den Hintergrund wie für spezielle Aufgaben, z.B. für das Testen bestimmter Eigenschaften (Homo- bzw. Heteroskedastizität, ...).

Die Berechnung rekursiver Residuen ist rechentechnisch aufwändig und zudem im vorliegenden Fall von GPS-Doppeldifferenzen numerisch extrem instabil. Bei Untersuchungen mit umfangreichem Datenmaterial zeigte sich, dass nur sehr kleine Datenmengen bei kurzen Basislinien mit relativ ungestörten Beobachtungen zuverlässig verarbeitet werden können.

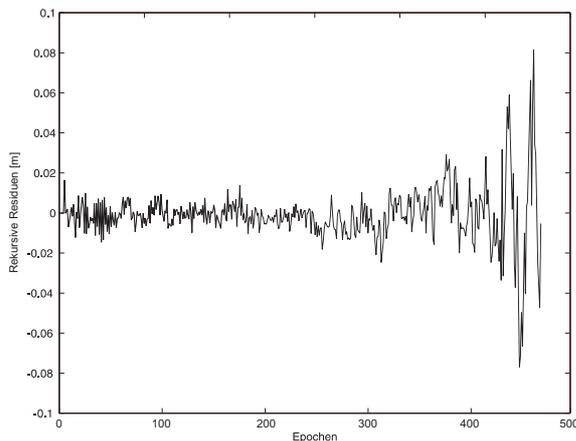


Abb. 4.4: Rekursive Residuen ( $L_3$ ) einer Doppeldifferenz: 14km-Basislinie, PRN 08-10, Datenrate: 30s

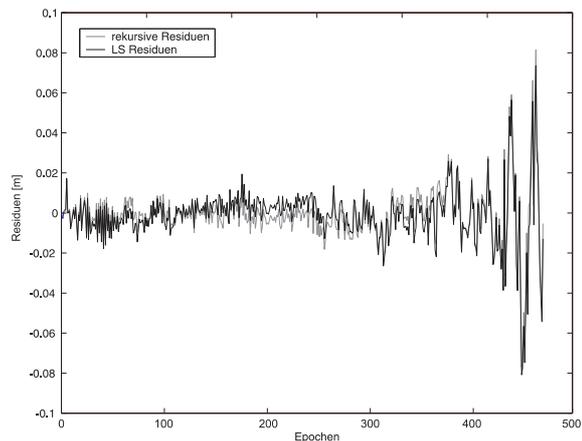


Abb. 4.5: LS-, rekursive Residuen ( $L_3$ ) einer Doppeldifferenz: 14km-Basislinie, PRN 08-10, Datenrate: 30s

Abbildung 4.4 zeigt die rekursiven Residuen des Doppeldifferenzpaares der Abbildungen 4.2 und 4.3 unter Annahme von (4.1). Bei der Berechnung dieser rekursiven Residuen ist keine Gewichtung der GPS-Beobachtungen wie in den Abbildungen 4.2b und 4.3b berücksichtigt, da eine Verallgemeinerung von (4.6) für den Fall gewichteter Beobachtungen nur durch ein iteratives Verfahren möglich ist, wodurch die rechentechnischen und numerischen Probleme bei der Berechnung der rekursiven Residuen noch verstärkt werden. Zudem ist zu berücksichtigen, dass rekursive Residuen für jede Doppeldifferenz getrennt berechnet werden, während LS- und studentisierte Residuen wie bereits erwähnt aus der Gesamtauswertung aller GPS-Beobachtungen der betrachteten Session mit Hilfe der GPS-Auswertesoftware resultieren. Ein Vergleich der unter Annahme von (4.1) berechneten Residuen in den Abbildungen 4.2, 4.3 und 4.4 zeigt trotz der grundsätzlichen Unterschiede bei der Berechnung der verschiedenen Residuenvarianten, abgesehen von der Skalierung der studentisierten Residuen, eine sehr gute Übereinstimmung. Diese in Abbildung 4.5 dargestellten augenscheinlich geringen Unterschiede können u.a. auf die unterschiedliche Art der Struktur der Kovarianzmatrix der Residuen und deren Berücksichtigung bei der Berechnung der Residuen zurückgeführt werden. Zur Illustration sind in Abbildung 4.6 repräsentative Ausschnitte einer Korrelationsmatrix der LS-Residuen von Doppeldifferenzbeobachtungen dargestellt. Dabei fällt insbesondere in Abbildung 4.6a die deutliche Blockstruktur (Epochenblöcke) analog zur in Kapitel 3 beschriebenen Struktur der GPS-Beobachtungsvektoren auf. Zudem wird die starke Diagonaldominanz von  $\mathbf{Q}_{vv}$  deutlich, die sich durch die Besetzung der Hauptdiagonalen mit 1 und der ersten Nebendiagonalen innerhalb der Epochenblöcke mit -0.5 (mathematische Korrelationen) auszeichnet. Alle weiteren Elemente dieser Korrelationsmatrix, die durch den Ausgleichungsprozess induzierten Korrelationen der Residuen, sind um einige Größenordnungen kleiner und nehmen

mit größer werdendem Abstand zur Hauptdiagonalen betragsmäßig immer mehr ab. Der Ausschnitt in Abbildung 4.6b stellt die Bereiche der Korrelationsmatrix der gesamten Session dar, die, analog zur Berechnung der rekursiven Residuen, einer einzelnen Doppeldifferenz (hier: PRN 08-10) zugeordnet sind. Dabei wird zunächst deutlich, dass durch die Extraktion einer Doppeldifferenz aus dem gesamten Datenmaterial die mathematischen Korrelationen eliminiert werden.

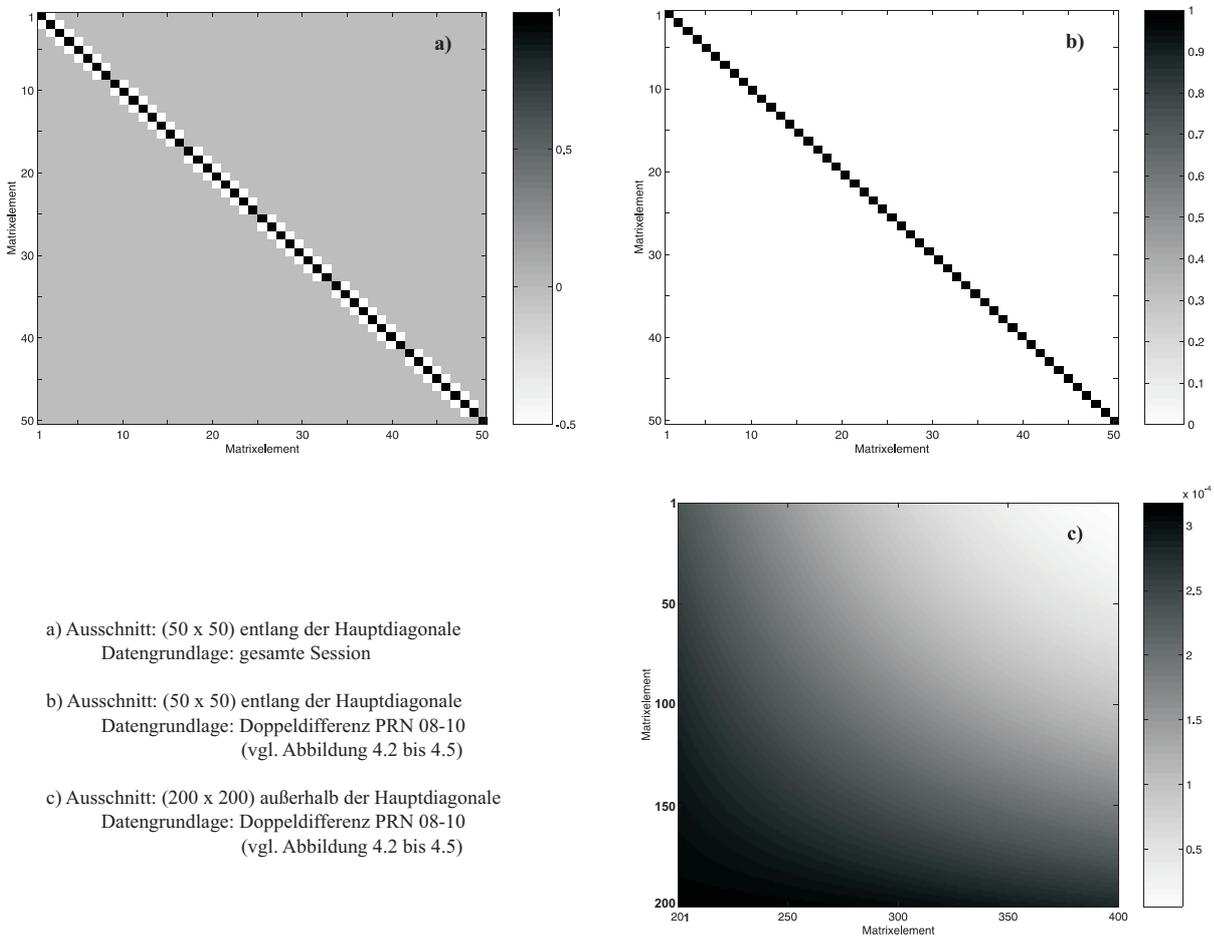


Abb. 4.6: Ausschnitte der Korrelationsmatrix der LS-Residuen  $\hat{Q}_{\text{LW}}$  einer 14km-Basislinie

Der Ausschnitt in Abbildung 4.6c bestätigt zudem, dass die in Abbildung 4.6b kaum noch darstellbaren Werte außerhalb der Hauptdiagonale mit größer werdendem Abstand zur Hauptdiagonale immer kleiner werden und sich in der Größenordnung von  $10^{-4}$  bewegen. Somit kann festgestellt werden, dass diese Korrelationen aufgrund ihrer geringen Größe nur einen geringen Einfluss auf die Berechnung der rekursiven Residuen haben und die geringen Unterschiede in Abbildung 4.5 sich primär durch die unterschiedliche Datengrundlage erklären lassen.

Rekapituliert und vergleicht man die Eigenschaften der verschiedenen Residuendefinitionen, so kann festgestellt werden, dass rekursive Residuen zwar unter Annahme von (4.1) unkorreliert und homoskedastisch sind und damit zur Analyse des stochastischen Modells bestens geeignet wären, aufgrund ihrer eingeschränkten Berechnen- bzw. Interpretierbarkeit allenfalls für Testverfahren zum Nachweis epochenunabhängiger Effekte (z.B. Homo-/Heteroskedastizität) bei geringen Datenmengen einsetzbar sind.

Zieht man demgegenüber LS-Residuen zum Vergleich heran, so fällt die gute Übereinstimmung der LS- mit den rekursiven Residuenzeitreihen (Abbildung 4.5) auf, was besonders durch die Tatsache deutlich wird, dass einzelne Störungen in den Residuen in beiden Residuenzeitreihen zum gleichen Zeitpunkt identifiziert werden können. Zieht man die unterschiedlichen Datengrundlagen bei der Berechnung der Residuen in Betracht, so rühren nur noch geringfügige Unterschiede von der unterschiedlichen Kovarianzstruktur bzw. ihrer Berücksichtigung bei der Berechnung der Residuen her. Somit ist festzuhalten, dass die Korrelationen bei LS- und studentisierten Residuen so gering sind, dass sie, insbesondere unter dem Gesichtspunkt der numerischen Probleme bei der Berechnung rekursiver Residuen, vernachlässigt werden können. Da sich jedoch neben der durch den Ausgleichsprozess hervorgerufenen Korreliertheit eine evtl. Gewich-

tung der GPS-Beobachtungen kaum in den LS-Residuen niederschlägt, ist es nicht sinnvoll, die rekursiven Residuen zur Analyse des stochastischen Modells zu verwenden.

Einen Kompromiss zu diesen beiden Residuendefinitionen stellen studentisierte Residuen dar. Sie unterscheiden sich unter Annahme von (4.1) nur geringfügig von den LS- bzw. rekursiven Residuen und führen in der Praxis zu nur geringen Unterschieden bei aus ihnen abgeleiteten Größen, wie in Bischoff et al. (2005b) am Beispiel der Schätzung von Varianzfunktionen deutlich wird. Sie sind zwar korreliert, aber aufgrund der vorgenommenen Normierung bei geeigneter Gewichtung der GPS-Beobachtungen homoskedastisch. Zudem spiegeln sich Änderungen der Gewichtung der GPS-Beobachtungen in den studentisierten Residuen wider. Daher sind sie zur Analyse des stochastischen Modells auch unter dem Gesichtspunkt der vergleichsweise einfachen Berechnung im Zuge der GPS-Auswertung sehr gut geeignet und werden in dieser Arbeit vorwiegend verwendet.

#### 4.1.2 Elevation

In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, dass die Varianz der Residuen aus der GPS-Auswertung von den Elevationen der beteiligten Satelliten abhängt. Zur Analyse der Elevationsabhängigkeit ist es daher sinnvoll, nicht das bisher verwendete natürliche Ordnungskriterium für die Residuen (die Zeit bzw. die Epochen) zu verwenden, sondern es bietet sich vielmehr die Elevation der Satelliten als ein der Fragestellung angepasstes Ordnungskriterium an. Daher soll nach der Diskussion und Auswahl geeigneter Residuen im vorangehenden Abschnitt 4.1.1 nun auf das Kriterium zur Beschreibung der Variation der Varianz eingegangen werden. Je nach Auswertestrategie und Charakteristik der GPS-Beobachtungen stehen unterschiedliche Informationen bzgl. der Elevation zur Verfügung. Im Falle der Auswertung originärer, undifferenzierter GPS-Beobachtungen ist nur ein Satellit an der Residuenzeitreihe beteiligt und somit nur ein Elevationsverlauf darstellbar (vgl. Abbildung 3.7). Betrachtet man hingegen Doppeldifferenzen wie im Rahmen der vorliegenden Darstellung, so sind grundsätzlich zwei Satelliten an der Beobachtung beteiligt. Auf beiden Stationen der Basislinie werden Daten beider Satelliten empfangen. Je nach Abstand der GPS-Stationen unterscheiden sich damit die Elevationen, unter denen Daten desselben Satelliten empfangen werden. Die Abbildungen 4.7a und 4.7b mit den studentisierten Doppeldifferenzresiduen jeweils einer 14km- und einer 375km-Basislinie verdeutlichen einerseits den Zusammenhang zwischen der Varianz der Residuen und der Satellitenelevation, wobei die Daten der langen Basislinie durch starke zyklische Schwankungen beeinflusst sind. Andererseits werden die bei langen Basislinien auftretenden Unterschiede zwischen den Elevationen auf den beiden beteiligten Stationen klar.

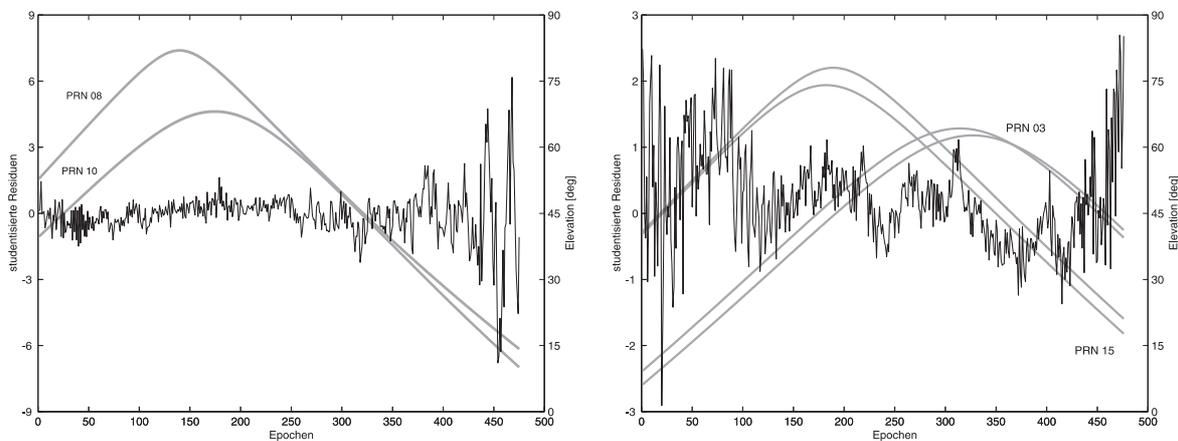


Abb. 4.7: Studentisierte Residuen ( $L_3$ ) einer Doppeldifferenz inkl. Elevation der beteiligten Satelliten (Datenrate: 30s)  
 a) Basislinienlänge: 14km, PRN 08-10      b) Basislinienlänge: 375km, PRN 15-03

Bei der kurzen Basislinie in Abbildung 4.7a liegen die Elevationskurven eines Satelliten für die beiden Stationen so dicht beieinander, dass sie graphisch nicht mehr aufgelöst werden können, wohingegen sich bei der langen Basislinie in Abbildung 4.7b die Elevationen eines Satelliten zeitweise um mehrere Grad unterscheiden. Da der Verlauf der Einzelelevationen der beiden Satelliten zudem sehr unterschiedlich sein kann (vgl. Abbildung 4.7b), reicht die Elevation eines Satelliten ebenso wenig zur Charakterisierung aller Elevationen aus wie die Elevation eines Satelliten von einer Station als Repräsentation beider Stationen. Daher ist es notwendig, eine Funktion mit allen vier Elevationen

$$ele_{4d} = f(ele_{11}, ele_{12}, ele_{21}, ele_{22}) \quad (4.7)$$

zu definieren, mit der die vier Elevationen  $ele_{ij}$ ,  $i=1,2$  und  $j=1,2$  auf die eindimensionale Größe  $ele_{4d}$  abgebildet werden können. Im Rahmen der Untersuchungen wurden verschiedene solcher Funktionen getestet und ihre Eignung anhand verschiedener Kriterien im Rahmen der Varianzhomogenisierung (Abschnitt 4.2) beurteilt. Es zeigte sich, dass einfache Funktionen wie das arithmetische Mittel der vier Satellitenelevationen recht unzuverlässig den Elevationsverlauf repräsentieren bzw. wie das Minimum der Satellitenelevationen oftmals über einen längeren Zeitraum nur den Verlauf der Elevation eines Satelliten, unbeeinflusst von der des zweiten Satelliten, widerspiegeln. Sehr aufwändige Elevationsfunktionen mit empirisch zu bestimmenden Funktionsparametern geben zwar sehr gut den Elevationsverlauf wieder, rechtfertigen allerdings nicht den hohen Aufwand zur Bestimmung der Parameter. Unter Berücksichtigung von Zuverlässigkeit und Repräsentativität der Elevationsfunktion sowie des notwendigen Rechenaufwands wurde daher die Norm

$$ele_{4d} = \cos \sqrt{\frac{1}{4} (z_{11}^2 + z_{12}^2 + z_{21}^2 + z_{22}^2)} \quad (4.8)$$

mit den Zenitdistanzen  $z_{ij}=90^\circ - ele_{ij}$ ,  $i=1,2$  und  $j=1,2$  als Elevationsfunktion zur Repräsentation des Elevationsverlaufs der beiden Satelliten gewählt. Mit Hilfe dieser Funktion werden die vier Elevationen  $ele_{ij} \in [0,90^\circ]$  auf das eindimensionale Intervall  $ele_{4d} \in [0,1]$  abgebildet. Untersuchungen ähnlicher Sinus- und Kosinusfunktionen sowohl unter multiplikativer als auch unter additiver Verknüpfung der Zenitdistanzen bzw. Elevationen oder unter Berücksichtigung der Azimute, unter denen die Satellitendaten registriert wurden, zeigten durchweg geringfügig bis deutlich schlechtere Ergebnisse. Es kann jedoch festgehalten werden, dass grundsätzlich viele verschiedene ähnliche Elevationsfunktionen denkbar sind und in Abhängigkeit von den Beurteilungskriterien i.A. unterschiedliche Ergebnisse liefern. Aufgrund dieser Überlegungen wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Elevationsfunktion (4.8) verwendet.

Betrachtet man die Elevationsfunktion  $ele_{4d}$  in Abbildung 4.8 bzw. ordnet man nun die studentisierten Residuen dort in Abhängigkeit von  $ele_{4d}$  an, so wird der Vorteil der eindimensionalen Elevationsfunktion deutlich.

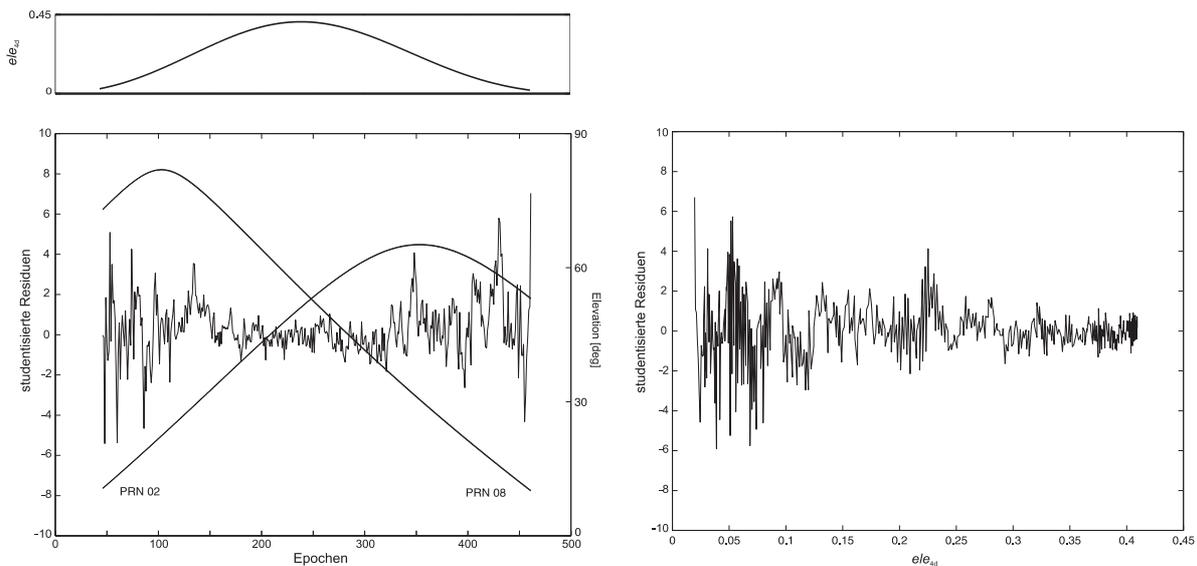


Abb. 4.8: Studentisierte Residuen ( $L_3$ ) einer Doppeldifferenz: 14km-Baseline, PRN 08-02, Datenrate: 30s  
 a) in Abhängigkeit von den Epochen mit Darstellung der Einzelelevationen und der Elevationsfunktion  $ele_{4d}$   
 b) in Abhängigkeit von der Elevationsfunktion  $ele_{4d}$

Die Anordnung der studentisierten Residuen in Abhängigkeit von der Elevationsfunktion  $ele_{4d}$  gibt auch dann noch ein zutreffendes Bild des Elevationsverlaufs wieder, wenn die Einzelelevationen sich gegenläufig verhalten. Bereiche niedriger Elevationsfunktion fallen dabei mit Bereichen erhöhter Varianz der studentisierten Residuen zusammen. Ordnet man die studentisierten Residuen in Abhängigkeit von  $ele_{4d}$ , so wird die Erhöhung der Varianz bei niedrigem  $ele_{4d}$  besonders deutlich. Eine solche Sortierung der Zeitreihe kann u.a. bei statistischen Tests zur Prüfung der Homoskedastizität bzw. zur Prüfung der Abhängigkeit der Varianz von den Satellitenelevationen sinnvoll eingesetzt werden.

## 4.2 Varianz der GPS-Residuen

In den bisherigen Abschnitten der Arbeit wurde die Notwendigkeit der Bestimmung und Homogenisierung der Varianzfunktion von Residuen nach der GPS-Auswertung als Beitrag zur Analyse und Verbesserung des stochastischen Modells sowie als Voraussetzung für die Bestimmung von Korrelations- bzw. Kovarianzfunktionen betont. Die Heteroskedastizität von Residuen nach der GPS-Auswertung, u.a. aufgrund von im funktionalen und stochastischen Modell der GPS-Auswertung vernachlässigten atmosphärischen Effekten, ist zwar wissenschaftlich anerkannt, war statistisch jedoch noch nicht streng nachgewiesen. In Bischoff et al. (2005a) wird nun ein Testverfahren zum Nachweis der Heteroskedastizität von GPS-Residuen und somit der ihnen zugrunde liegenden Beobachtungen vorgestellt. Ausgehend von (4.1) werden dabei rekursive Residuen in Abhängigkeit von einer Elevationsfunktion angeordnet und mit Hilfe eines F-Tests aus (2.26) und einer von Hsu (1977) vorgestellten Teststatistik geprüft. Anhand von Testdaten einer kurzen Basislinie (Basislinienlänge: 14km) an verschiedenen Tagen konnte gezeigt werden, dass in 85% aller Fälle von insgesamt ca. 250 Doppeldifferenzzeitreihen die Nullhypothese (homoskedastische rekursive Residuen) nicht akzeptiert werden kann und somit die Heterogenität der Varianzen der getesteten rekursiven Residuen statistisch hochsignifikant ist. Dieses Ergebnis bestätigt die bisher unbewiesene Annahme, dass das einfache stochastische Modell der GPS-Beobachtungen (Modell I aus (3.20)) unzutreffend bzw. unvollständig ist. Basierend auf diesem Ergebnis muss somit ein Verfahren zur Analyse und Verbesserung des stochastischen Modells der GPS-Beobachtungen entwickelt werden.

Wie in Abschnitt 4.1 dargestellt, spiegeln Störungen im Verlauf der Residuenzeitreihen (Heteroskedastizität, zyklische Störungen, ...) u.a. falsch modellierte Varianzen bzw. nicht modellierte Korrelationen der Beobachtungen wider. Daher können unter Annahme von (4.1) Varianzfunktionen von Residuenzeitreihen zur Beschreibung der Varianz von GPS-Beobachtungen und damit zur Erweiterung der Kovarianzmatrix verwendet werden. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen soll im Folgenden ein Verfahren zur Bestimmung der Varianzfunktion von GPS-Beobachtungen zur Integration in das bestehende stochastische Modell vorgestellt werden. Im Gegensatz zur eigentlichen Auswertung der GPS-Beobachtungen werden dabei Residuenzeitreihen jeweils eines Satellitenpaares isoliert von den restlichen Zeitreihen der Session betrachtet, wodurch diese Zeitreihen von mathematischen Korrelationen der Art (3.17) unbeeinflusst sind. Unter Vernachlässigung der durch den Ausgleichsprozess induzierten Korrelationen entsprechend Abbildung 4.6 stehen damit untereinander unkorrelierte Residuenzeitreihen zur Verfügung. Insbesondere vor dem Hintergrund individuell geschätzter Varianzfunktionen müssen die Ergebnisse der Varianzhomogenisierung jedoch sorgfältig interpretiert werden, da die GPS-Auswertung auf allen in der bearbeiteten Session vorhandenen Beobachtungen beruht.

### 4.2.1 Trend

Im Rahmen der Zeitreihenanalyse müssen zunächst in den Daten (Zeitreihen jeweils eines Satellitenpaares) vorhandene Trendfunktionen bestimmt bzw. beseitigt werden, da in den Daten verbleibende Trends zu Verzerrungen im weiteren Verlauf der Zeitreihenanalyse führen können. Sind Trends funktional beschreibbar bzw. physikalisch erklärbar, können sie im funktionalen bzw. stochastischen Modell der Ausgleichung korrekt berücksichtigt werden. Ist dies nicht der Fall, so müssen sie z.B. mit den Methoden aus Abschnitt 2.2.1 eliminiert werden, um ihren Einfluss auf die nachfolgenden Auswertungen bzw. statistischen Tests möglichst gering zu halten.

Die untersuchten studentisierten Residuenzeitreihen jeweils eines einzelnen Satellitenpaares aus der Auswertung doppelt differenzierter GPS-Beobachtungen weisen je nach Basislinienlänge, atmosphärischen Verhältnissen und weiteren Störeffekten meist erhebliche, i.d.R. nichtlineare Trendercheinungen auf, die nicht im funktionalen oder stochastischen Modell berücksichtigt werden. Sie unterscheiden sich von Zeitreihe zu Zeitreihe erheblich und sind funktional kaum modellierbar. Da zudem eine physikalische Beschreibung bzw. Erklärung aufgrund der stark variierenden kurzzeitigen Störungen nicht möglich ist, wurde im Rahmen dieser Arbeit auf eine Modellierung verzichtet. Solche Trendercheinungen beeinflussen jedoch die Schätzung der Varianzfunktion bzw. statistische Testverfahren, weshalb sie in einem Vorverarbeitungsschritt eliminiert werden müssen. Bei der späteren Schätzung von Korrelations- bzw. Kovarianzfunktionen müssen die dann idealerweise homoskedastischen Residuenzeitreihen erneut bzgl. vorhandener Trendercheinungen überprüft und es muss deren weitere Behandlung diskutiert werden.

Als geeignetes Verfahren zur Trendelimination bei Zeitreihen von GPS-Residuen wurde die in (2.16) formulierte Differenzenmethode mit Differenzen 1. Ordnung gewählt. Anhand von Beispieldaten kann gezeigt werden, dass diese einfache Differenzbildung ausreicht, um die in den GPS-Residuen enthaltenen Trendeffekte zu beseitigen bzw. zu reduzieren. Dabei werden neben der eigentlichen Elimination eines globalen linearen Trends der gesamten Zeitreihe zusätzlich lokale kurzzeitige Trends eliminiert.

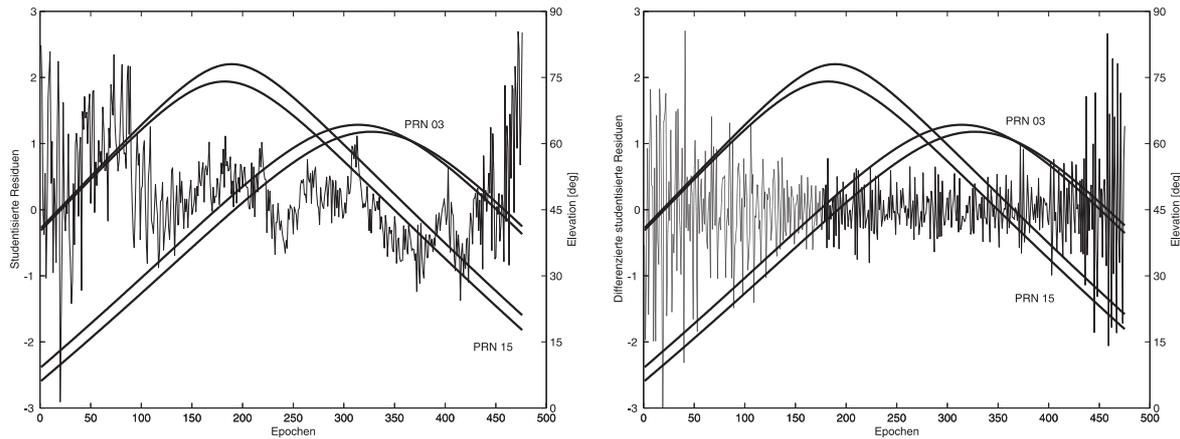


Abb. 4.9: Trendbehaftete und differenzierte Zeitreihe studentisierter Residuen (Epochendifferenzen 1. Ordnung)  $L_3$ -Doppeldifferenzen (375km-Basislinie, PRN 15-03, Datenrate: 30s)

Bei den in Abbildung 4.9 dargestellten Zeitreihen wird dies besonders dort deutlich, wo (trotz des Fehlens eines globalen linearen Trends) lokale lineare Trends zuverlässig eliminiert werden und eine trendbereinigte Zeitreihe verbleibt.

Problematisch ist die durch die Bildung der Differenzen von Residuen benachbarter Epochen fehlende eindeutige Zuordnung des differenzierten Residuums zu einem Zeitpunkt bzw. einer Epoche und den entsprechenden Satellitenelevationen bzw. -azimuten. Da der Epochenabstand mit 30s aber vergleichsweise gering ist und sich Elevation und Azimut in dieser Zeit nur wenig ändern, kann das neu entstandene differenzierte Residuum einer der beiden Epochen, im Rahmen dieser Arbeit der ersten Epoche, und den zu diesem Zeitpunkt geltenden Elevationen und Azimuten zugeordnet werden. Zudem wird diese Art der Trendbereinigung ausschließlich als Vorverarbeitungsschritt zur Schätzung der Varianzfunktion (vgl. Abschnitt 4.2.3), bei der die Unschärfe der Epochendefinition nur einen vernachlässigbaren Einfluss ausübt, betrachtet. Ein zusätzliches Problem bei der Weiterverarbeitung der differenzierten Residuen entsteht infolge der durch die Differenzbildung entstehenden Korrelationen. Da die Art der Differenzbildung jedoch bekannt ist, können die neu entstehenden Korrelationen im weiteren Verlauf der Analyse geeignet berücksichtigt werden. Entsprechende Hinweise sind im weiteren Verlauf der Arbeit zu finden. Alternative Methoden zur Berücksichtigung der neu entstehenden Korrelationen, wie z.B. eine Dekorrelation der Zeitreihe durch Auslassen jedes zweiten Zeitreihenwertes, beeinflussen die Ergebnisse der Zeitreihenanalyse sehr stark und werden deshalb nicht weiter verfolgt.

Es kann festgestellt werden, dass die vergleichsweise einfache Variante der Trendbereinigung durch Bildung von Differenzen 1.Ordnung hervorragende Ergebnisse, d.h. um globale und lokale Trends bereinigte Zeitreihen, zur Weiterverarbeitung liefert. Auftretende Probleme wie die nicht eindeutige Zuordnung der differenzierten Residuen zu einer Epoche und neu entstehende Korrelationen können vernachlässigt bzw. im weiteren Verlauf der Zeitreihenanalyse berücksichtigt werden.

#### 4.2.2 Test auf Homo- bzw. Heteroskedastizität

Nach der Beseitigung vorhandener Trends in den Residuenzeitreihen ist es zumindest im Rahmen der Entwicklung eines Verfahrens zur Varianzhomogenisierung sinnvoll, die Homo- bzw. Heteroskedastizität der Residuenzeitreihen mit Hilfe eines statistischen Tests zu beurteilen. Der Vergleich der Testergebnisse vor und nach der Varianzhomogenisierung (Modell I und II aus (3.20)) kann dabei Hinweise auf die Eignung verschiedener alternativer Schätzverfahren geben. Zudem kann eine Verbesserung der Varianzstruktur durch den Vergleich der Testergebnisse nachgewiesen und somit eine Erfolgskontrolle durchgeführt werden.

Alle in Abschnitt 2.4.1 vorgestellten statistischen Tests beruhen auf der Unterteilung der zu prüfenden Zeitreihe in voneinander unabhängige Teilzeitreihen, deren Varianz miteinander verglichen wird. Da die Zeitreihen wegen der Bildung von Epochendifferenzen zur Trendbereinigung algebraisch korreliert sind, müssen diese Korrelationen zwischen Residuen verschiedener Teilzeitreihen durch Streichung von Beobachtungen beseitigt werden (vgl. Bischoff et al., 2005b).

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Streichung des mittleren Stichprobenwertes}} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Beispielhaft sind in (4.9) sowohl Ausschnitte der Kofaktormatrix der zu prüfenden korrelierten Stichprobe dargestellt als auch Ausschnitte der Kofaktormatrix nach Streichung der mittleren Beobachtung, wodurch zwei voneinander unabhängige Teilstichproben entstehen. Dabei wird deutlich, dass zur Unterteilung einer Stichprobe in  $k$  Teile jeweils ein Stichprobenwert zwischen den Teilstichproben gestrichen werden muss, um unter Annahme der Normalverteilung unabhängige Teilstichproben zu erhalten. Der dadurch entstehende Verlust von insgesamt  $k-1$  Stichprobenwerten kann aufgrund der zumeist sehr langen Zeitreihen vernachlässigt werden.

Die Unterteilung der Stichprobe kann in Abhängigkeit von verschiedenen Maßen erfolgen. Neben dem natürlichen Parameter der Zeitreihen, der Zeit bzw. den Epochen, bietet sich im vorliegenden Fall der GPS-Residuen zudem die eindimensionale Elevationsfunktion  $ele_{4d}$  aus (4.8) an, da dies der entscheidende Parameter ist, in dessen Abhängigkeit sich die Varianz der Zeitreihenwerte ändert (vgl. Abschnitt 3.3.1). Daher ist es sinnvoll, die Zeitreihen in Abhängigkeit von  $ele_{4d}$  umzusortieren, wodurch sich im Idealfall eine monotone Varianzfunktion ergibt. Durch diese Umsortierung wird die Stichprobe in Abbildung 4.8 beim Maximum von  $ele_{4d}$  gefaltet, wodurch Stichprobenwerte vom Ende und vom Anfang der Zeitreihe gemischt werden. Die Korrelationen verschieben sich dadurch von der ersten auf die zweite Nebendiagonale und machen damit das Streichen von zwei Stichprobenwerten zur Trennung der Teilstichproben notwendig (vgl. die Darstellung der entsprechenden Kofaktormatrizen in (4.10)). Zur Unterteilung einer Stichprobe in  $k$  Teilstichproben sind somit also  $2 \cdot (k-1)$  Stichprobenwerte zu streichen. Diese Reduzierung der Stichprobenlänge bleibt jedoch, ebenso wie bei nach der Zeit geordneten Stichproben, aufgrund der zumeist sehr langen Zeitreihen ohne nennenswerte Auswirkung auf die Ergebnisse.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Streichung der beiden mittleren Stichprobenwerte}} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Durch Streichung der notwendigen Stichprobenwerte und der zugehörigen, die Korrelationen repräsentierenden Elemente der Kofaktormatrix gemäß (4.9) bzw. (4.10) stehen unter Annahme der Normalverteilung voneinander unabhängige Stichproben zur Verfügung. Sie können unter Berücksichtigung der innerhalb der Teilstichproben vorhandenen Korrelationen auf Homoskedastizität getestet werden. Da die verschiedenen statistischen Tests jeweils unterschiedliche Fragestellungen behandeln und somit schwer vergleichbar sind, werden alle in Abschnitt 2.4.1 dargestellten Tests auf die Daten angewendet. Der Vergleich der Testergebnisse, sowohl auf Basis der  $p$ -Werte als auch auf Basis der zu einem festen Niveau  $\alpha=1\%$  getroffenen Testentscheidungen, in Kombination mit der jeweiligen Testcharakteristik, liefert dann detailliertere Erkenntnisse bzgl. der Art der u.U. vorliegenden Heteroskedastizität. Aufgrund ihrer Optimalitätseigenschaften werden aus der Gruppe der Zwei-Stichproben-Tests der einseitige F-Test und der zweiseitige  $\beta$ -Test bevorzugt. Zur detaillierten Überprüfung wird außerdem der Bartlett-Test aus der Gruppe der multiplen Tests angewendet.

Die durch die Trendbereinigung entstehenden Korrelationen machen Veränderungen an den Testgrößen aus Abschnitt 2.4.1 unumgänglich. Daher werden im Folgenden die jeweiligen Testgrößen, basierend auf (2.26), (2.27) und (2.28), in der dem Problem angepassten Form dargestellt. Für die aus der Trennung der Gesamtstichprobe  $\mathbf{Y}$  resultierenden Teilstichproben  $\mathbf{Y}_1 = Y_{11}, \dots, Y_{1n_1}$  und  $\mathbf{Y}_2 = Y_{21}, \dots, Y_{2n_2}$  mit jeweils verschwindendem Mittelwert  $\bar{Y}_j, j=1,2$  und der Kofaktormatrix  $\mathbf{Q}_j$  aus (4.10) definiert

$$T := \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{n_1, n_2} \quad \text{mit} \quad s_j^2 = \frac{1}{n_j} (\mathbf{Y}_j^T \mathbf{Q}_j^{-1} \mathbf{Y}_j) \quad \text{und} \quad j=1,2. \quad (4.11)$$

die Testgröße des angepassten F-Tests. Bei einseitiger Fragestellung wird dann die Nullhypothese  $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$  ( $H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ) verworfen, wenn  $T > F_{n_1, n_2; 1-\alpha}$ .

Demgegenüber führt die Testgröße des angepassten  $\beta$ -Tests

$$T := \frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2} \sim \beta_{\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}} \quad \text{mit} \quad s_j^2 = \frac{1}{n_j} (\mathbf{Y}_j^T \mathbf{Q}_j^{-1} \mathbf{Y}_j) \quad \text{und} \quad j=1,2 \quad (4.12)$$

bei zweiseitiger Fragestellung zum Verwerfen der Nullhypothese  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ( $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ), wenn  $T < \beta_{\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}; \alpha/2}$  oder  $T > \beta_{\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}; 1-\alpha/2}$ .

Es sei darauf hingewiesen, dass durch die Reduktion des Mittelwerts bei beiden Tests jeweils ein Freiheitsgrad verloren geht. Im Gegensatz dazu bleibt beim Bartlett-Test auch bei jeweils verschwindenden Mittelwerten  $\bar{Y}_j, j=1, \dots, k$  der  $k$  Teilstichproben  $\mathbf{Y}_j = \mathbf{Y}_{j1}, \dots, \mathbf{Y}_{jn_j}, j=1, \dots, k$  die Anzahl der Freiheitsgrade gleich. Unter Berücksichtigung der in (4.10) dargestellten Kofaktormatrix der Teilstichproben  $\mathbf{Q}_j$  definiert dann

$$T := \frac{M_B}{C} \sim \chi_{k-1}^2 \quad \text{mit} \quad M_B = n \ln s^2 - \sum_{j=1}^k n_j \ln s_j^2 \quad (4.13)$$

und

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} - \frac{1}{n} \right)$$

die Testgröße des angepassten Bartlett-Tests, wobei

$$s_j^2 = \frac{1}{n_j} (\mathbf{y}_j^T \mathbf{Q}_j^{-1} \mathbf{y}_j) \quad \text{die Varianz der } j\text{-ten Teilstichprobe und}$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j s_j^2 \quad \text{mit} \quad n = \sum_{j=1}^k n_j \quad \text{die Gesamtvarianz aller Teilstichproben bezeichnet.}$$

Die Nullhypothese  $H_0 : \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2$  des angepassten Bartlett-Tests wird verworfen, wenn  $T > \chi_{k-1; 1-\alpha}^2$ .

Charakterisiert man die drei verschiedenen Tests bzgl. der mit ihnen nachweisbaren Alternativen, so fällt auf, dass mit dem F-Test ausschließlich fallende Alternativen, die aufgrund der Elevationsabhängigkeit der Varianzfunktion erwartet werden, erkannt werden können. Steigende Alternativen werden dagegen nicht aufgedeckt. Sie können mit Hilfe des zweiseitigen  $\beta$ -Tests erkannt werden, stehen jedoch im Gegensatz zum erwarteten physikalischen Modell der fallenden Varianz in höheren Elevationen. Weitere Sonderfälle können mit Hilfe des Bartlett-Tests aufgedeckt werden. In Abhängigkeit von der Anzahl der Teilstichproben können dabei symmetrische Alternativen oder Alternativen höherer Ordnung erkannt werden. Die Art des Tests (ein- bzw. zweiseitig) sowie die Anzahl der Teilstichproben hat somit erheblichen Einfluss auf die Fragestellung und die möglichen Testergebnisse. Bei einer geringen Anzahl an Unterteilungen kann nur eine beschränkte Zahl an Alternativen erkannt werden, während zu viele Unterteilungen aufgrund der stark verrauschten, mit Störungen überlagerten Daten im Fall des Bartlett-Tests zu einer zu großen Sensitivität gegenüber Schwankungen der Varianz führen. Somit stellt sich zusätzlich zur Auswahl bzw. geeigneten Interpretation des Tests die Frage nach der Anzahl und Lokalisierung der Unterteilungen der Gesamtstichprobe beim Bartlett-Test.

Betrachtet man die Lokalisierung der Unterteilungen, so kann generell zwischen einer globalen und einer lokalen Unterteilung unterschieden werden. Bei der globalen Unterteilung wird der gesamte Wertebereich von  $ele_{4d}$  (hier:  $ele_{4d} \in [0,1]$ ), unabhängig von der Länge und Lage des tatsächlichen Elevationsbereiches der untersuchten Zeitreihe, in gleich lange  $ele_{4d}$ -Intervalle unterteilt. Dieser eher theoretisch orientierte Ansatz basiert auf der Vorstellung eines für alle Zeitreihen vergleichbaren Varianzverlaufs, sodass die Intervallgrenzen mit allgemein gültigen Änderungen der

Varianz der Zeitreihe korrespondieren. Problematisch ist bei dieser Variante der Unterteilung, insbesondere bei im Vergleich zur Intervalllänge kurzen Zeitreihen, dass eine Zeitreihe ausschließlich in ein Intervall fallen und somit der Test nicht durchgeführt werden kann. Bei lokaler Unterteilung tritt dieses Problem definitionsgemäß nicht auf, da ausschließlich der tatsächliche Elevationsbereich der untersuchten Zeitreihe unterteilt wird. Aufgrund der dabei fest vorgegebenen Intervallanzahl variiert die Intervalllänge in Abhängigkeit des Elevationsbereichs der Zeitreihe. Dieser Ansatz ist eher datenorientiert und basiert auf der Annahme, dass die Elevation nur ein, wenn auch der dominierende, Faktor bei der Änderung der Varianz ist. Weitere individuelle Einflüsse führen zu einem für jede Zeitreihe individuellen Varianzverlauf. Im weiteren Verlauf der Zeitreihenanalyse kann dieser Ansatz untermauert werden, d.h. jede Doppeldifferenz weist tatsächlich einen individuellen Varianzverlauf auf, dem eine standardisierte Unterteilung nicht gerecht wird.

Zur Illustration der Problematik der nicht testbaren Zeitreihen sind in Abbildung 4.10 die Anzahl und die maximale Länge der nicht testbaren Zeitreihen einer Basislinie mit insgesamt 114 Zeitreihen über eine Beobachtungszeit von 24 Stunden dargestellt. Dabei kann festgestellt werden, dass bis zu 50% aller Zeitreihen bei globaler Unterteilung nicht getestet werden können. Je feiner diese Unterteilung ist, desto mehr Zeitreihen können getestet werden. Jedoch wird erst bei 40 Intervallen ein akzeptabler Wert erreicht, der sich in der Größenordnung dessen bewegt was sich bei lokaler Unterteilung ergibt. Der geringfügige Anstieg der Anzahl der nicht testbaren Zeitreihen bei lokaler Unterteilung und größerer Intervallanzahl kann durch die bei kurzen Zeitreihen zu geringe Stichprobenlänge in kürzer werdenden Intervallen erklärt werden. Die Analyse der maximalen Länge einer nicht testbaren Zeitreihe in Abbildung 4.10 bestätigt die Folgerungen aus der Anzahl der nicht testbaren Zeitreihen. Während bei geringer Intervallzahl sogar Zeitreihen mit über 300 Stichprobenwerten (Epochen mit 30s Datenrate) nicht getestet werden können, wird erst mit 40 Intervallen in etwa das Niveau der lokalen Unterteilung erreicht.

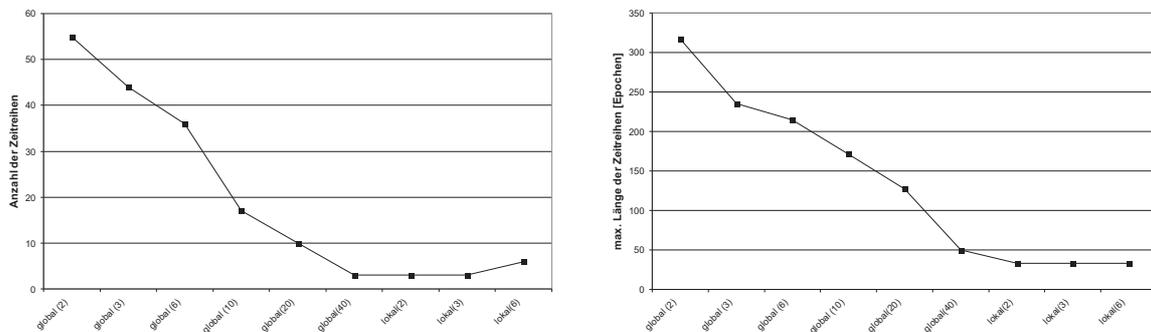


Abb. 4.10: Anzahl und maximale Länge nicht testbarer Zeitreihen aufgrund globaler und lokaler Intervalleinteilung mit unterschiedlicher Anzahl der Teilintervalle.  
Datengrundlage: 375km-Basislinie, Sessionlänge: 24 h => 114 DD-Zeitreihen, Datenrate: 30s

Fasst man diese Überlegungen zusammen, so wird deutlich, dass eine globale Unterteilung der Stichproben wegen der großen Anzahl nicht testbarer Zeitreihen allenfalls bei sehr kurzen Intervallen sinnvoll ist. Eine solch feine Unterteilung mit vergleichsweise großer Intervallzahl führt jedoch zu einer unerwünschten Sensitivität gegenüber Schwankungen der Varianz. Zudem können physikalisch motivierte, allgemeingültige Intervallschranken aufgrund der Individualität der Varianzfunktionen nicht gefunden werden. Dies führt auf das alternative Konzept einer lokalen Unterteilung.

Eine lokale Unterteilung ermöglicht, abgesehen von extrem kurzen Zeitreihen, das Testen aller Zeitreihen selbst bei sehr kleiner Intervallzahl. Da sich bei feineren Unterteilungen sowohl die Anzahl der nicht testbaren Zeitreihen als auch die Sensitivität wieder erhöht (vgl. Abbildung 4.10), sollte einer relativ groben Unterteilung, unter Berücksichtigung der vorliegenden, stark verrauschten Daten, der Vorzug gegeben werden. Die individuelle Länge der Intervalle durch die unterschiedliche Länge der Zeitreihe ermöglicht auch bei grober Unterteilung zuverlässige Testergebnisse für nahezu alle Zeitreihen. Ein Vergleich der Testergebnisse unterschiedlicher Zeitreihen ist damit allerdings nur sehr eingeschränkt möglich. Somit werden für die weiteren Untersuchungen lokale Unterteilungen der Stichprobe mit drei Intervallen gleicher Datenmenge verwendet. Für weitere Untersuchungen zur Bestätigung der gewählten Unterteilung mit Hilfe der dort beschriebenen Testergebnisse sei auf Abschnitt 5.3 verwiesen.

### 4.2.3 Regression

Aufgrund der großen Datenmenge und der Vielfalt an Einflussfaktoren ist eine exakte Beschreibung der Varianzfunktion der GPS-Beobachtungen nicht möglich. Ein Faktor, die Elevationsabhängigkeit der GPS-Beobachtungen, kann aber durch eine einfache mathematische Funktion näherungsweise beschrieben werden. Unter der Voraussetzung unabhängiger normalverteilter Beobachtungen mit Erwartungswert Null kann deren Varianzfunktion theoretisch als Erwartungs-

wertfunktion der quadrierten, trendbereinigten studentisierten Residuen  $\Delta r_s^2$  mit Hilfe einer linearen Regression (Chatterjee und Price, 1995) geschätzt werden. Auf der Grundlage umfangreicher Untersuchungen wurde in dieser Arbeit

$$f(ele_{4d}) = b_1 \cdot (ele_{4d})^{b_2} = b_1 \cdot \left( \cos \sqrt{\frac{1}{4} (z_{11}^2 + z_{12}^2 + z_{21}^2 + z_{22}^2)} \right)^{b_2} \quad (4.14)$$

mit  $ele_{4d}$  aus (4.8) und den zu schätzenden Parametern  $b_1$  und  $b_2$  als Regressionsfunktion gewählt. Es sei darauf hingewiesen, dass diese Funktion mit dem troposphärischen Einfluss aus (3.3) korrespondiert, der einen der Haupteinflussfaktoren auf die GPS-Beobachtungen darstellt. Der Ansatz

$$\Delta r_s^2 = (r_{s/i} - r_{s/i-1})^2 = b_1 \cdot (ele_{4d})^{b_2} \quad (4.15)$$

führt zu einer nichtlinearen Regression, die entweder iterativ numerisch lösbar ist (vgl. Schwetlick, 1979) oder mit Hilfe einer Logarithmus-Transformation der Daten und des funktionalen Modells linearisiert werden kann. Dies führt dann zum linearisierten Ansatz

$$\ln(\Delta r_s^2) = \ln(r_{s/i} - r_{s/i-1})^2 = \ln(b_1 \cdot (ele_{4d})^{b_2}) = \ln(b_1) + b_2 \cdot \ln(ele_{4d}), \quad (4.16)$$

der z.B. mit den bekannten Methoden des Kleinste-Quadrate-Verfahrens aus Abschnitt 2.1 bearbeitet werden kann.

Jede Abweichung der der Schätzung zugrunde liegenden Daten von der Normalverteilung kann zu unerwünschten Effekten bzw. zu einer unzuverlässigen Schätzung der Parameter der Regressionsfunktion führen. Es ist allerdings schwierig, die Normalverteilung von Residuen aus der GPS-Auswertung nachzuweisen. Schon Tiberius und Borre (1999) konnten die Hypothese der Normalverteilung von GPS-Beobachtungen allenfalls nicht widerlegen, jedoch auch nicht statistisch nachweisen. Eine visuelle Möglichkeit zur Beurteilung der Normalverteilungsannahme ist die Überprüfung mit Hilfe eines Normal-QQ-Plots. QQ-Plots werden gemäß Hartung et al. (2002) verwendet, um zu überprüfen, ob die untersuchten Daten einer bestimmten Verteilung - bei einem Normal-QQ-Plot der Normalverteilung - entstammen. Dabei werden die empirischen Quantile der Beobachtungsreihe über den theoretischen Quantilen aufgetragen. Bei einer Übereinstimmung mit einer Standardnormalverteilung  $N(0,1)$  liegen die Punkte auf einer Ursprungsgeraden mit Steigung eins. Abweichungen von der Geraden deuten auf ein Nichtzutreffen der Verteilung hin. Ist die Gerade keine Ursprungsgerade, so weisen die Daten einen von Null verschiedenen Erwartungswert auf, während eine Steigung ungleich eins auf Abweichungen in der Varianz der Daten hinweist. Einzelne Unregelmäßigkeiten an Anfang und Ende der Geraden nach links unten bzw. rechts oben können oft als Ausreißer gedeutet werden. Beispielhaft dazu ist in Abbildung 4.11 die Zeitreihe aus Abbildung 4.9 inklusive zugehörigem Normal-QQ-Plot dargestellt.

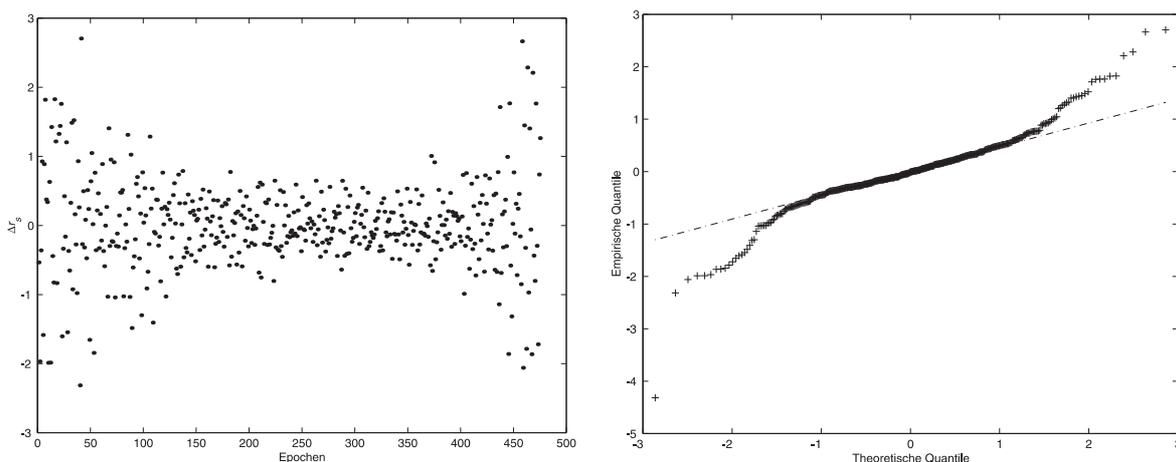


Abb. 4.11: Differenzierte studentisierte Residuen  $\Delta r_s$  inklusive zugehörigem Normal-QQ-Plot  
 Theoretische Verteilung: Standardnormalverteilung  $N(0,1)$   
 $L_3$ -Doppeldifferenzen aus Abbildung 4.9 (375km-Basislinie, PRN 15-03, Datenrate: 30s)

Im Großen und Ganzen kann bei den Daten aus Abbildung 4.11, trotz einer recht großen Zahl an Abweichungen, eine Normalverteilung (keine Standardnormalverteilung) nicht widerlegt werden. Betrachtet man die dort dargestellten Da-

ten, so können die Abweichungen am Anfang und am Ende des Normal-QQ-Plots nur in sehr geringem Maße als Ausreißer bezeichnet werden. Grundsätzlich ist die Annäherung an eine Gerade mit symmetrischer Abweichung und somit die Symmetrie der den Daten zugrunde liegenden Verteilung jedoch nicht zu widerlegen. Demgegenüber weisen die eigentlich zur Schätzung der Varianzfunktion verwendeten quadrierten Residuen aus (4.15) eine extrem asymmetrische Verteilung und damit keine Normalverteilung auf, wie in Abbildung 4.12 deutlich wird.

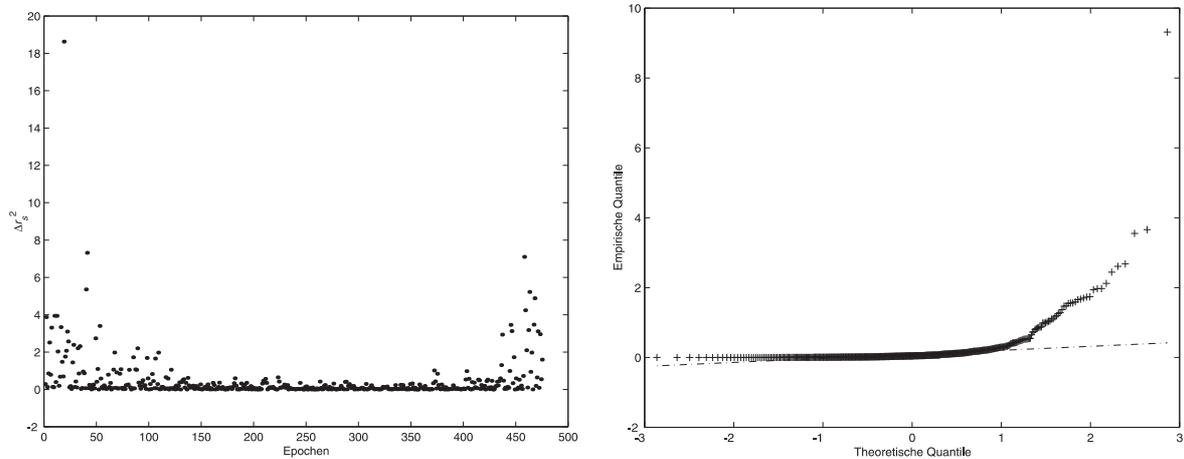


Abb. 4.12: Quadrierte Differenzen studentisierter Residuen  $\Delta r_s^2$  aus (4.15) inklusive zugehörigem Normal-QQ-Plot; Theoretische Verteilung: Standardnormalverteilung  $N(0,1)$   
 $L_3$ -Doppeldifferenzen aus Abbildung 4.9 (375km-Basislinie, PRN 15-03, Datenrate: 30s)

Neben sehr kleinen, nahe bei Null liegenden Werten der dargestellten Zeitreihen treten aufgrund der Quadrierung ausschließlich positive Werte auf, was der zugehörige Normal-QQ-Plot verdeutlicht. Aufgrund dieser stark asymmetrischen Verteilung ist eine zuverlässige Schätzung der Parameter der Regressionsfunktion nur schwer möglich. Daher müssen die Daten mit Hilfe einer geeigneten Transformation so verändert werden, dass sie zumindest annähernd symmetrisch normalverteilt sind. Diesen Zweck erfüllt die in (4.16) vorgestellte Logarithmus-Transformation der Daten vergleichsweise gut. Neben der Linearisierung der Regressionsfunktion ist mit dieser Transformation, die einen Spezialfall der Box-Cox-Transformation (Hartung et al., 2002) darstellt, eine Annäherung an eine Normalverteilung sowie eine Varianzstabilisierung zu erreichen.

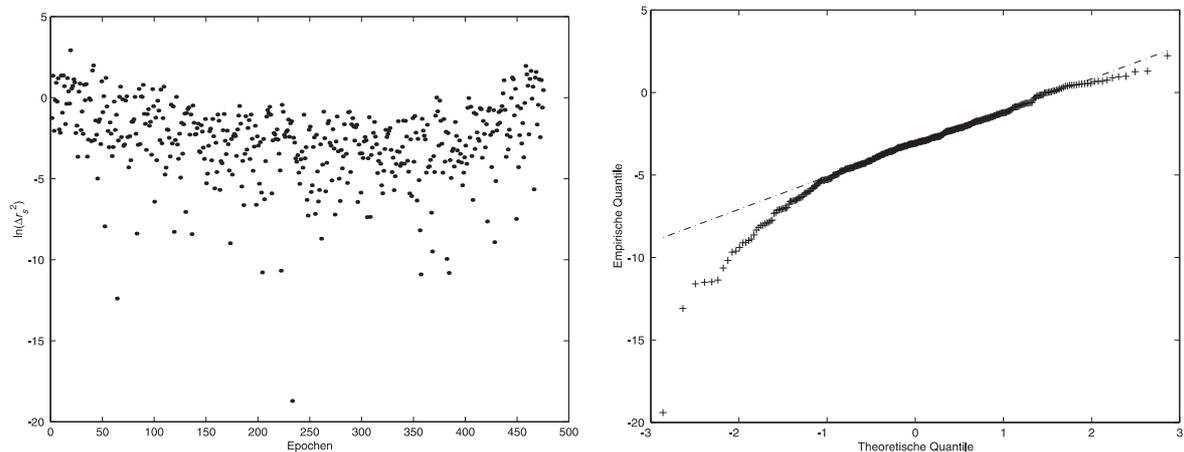


Abb. 4.13: Logarithmierte quadrierte Differenzen studentisierter Residuen  $\ln(\Delta r_s^2)$  aus (4.16) inklusive zugehörigem Normal-QQ-Plot; Theoretische Verteilung: Standardnormalverteilung  $N(0,1)$ ;  
 $L_3$ -Doppeldifferenzen aus Abbildung 4.9 (375km-Basislinie, PRN 15-03, Datenrate: 30s)

In Abbildung 4.13 wird deutlich, dass die beschriebene Logarithmus-Transformation im Vergleich zu Abbildung 4.12 zu einer deutlichen Verbesserung der Symmetrie der den untersuchten Daten zugrunde liegenden Verteilung führt. Problematisch ist dabei die vergleichsweise große Anzahl stark negativer Werte, die von den logarithmierten, nahe bei null liegenden Daten aus Abbildung 4.12 stammen. Diese Stichprobenwerte sind sowohl bei den dargestellten Residuen als auch am Anfang des Normal-QQ-Plots deutlich zu erkennen. Daher muss eine erweiterte Logarithmus-

Transformation gefunden werden, die zu einer annähernd symmetrisch um ihren Median verteilten, transformierten Stichprobe  $T(\Delta r_s^2)$  führt. Die Eigenschaft der Verteilungssymmetrie kann näherungsweise durch die Forderung

$$\text{Maximum}(T(\Delta r_s^2)) - \text{Median}(T(\Delta r_s^2)) \approx \text{Median}(T(\Delta r_s^2)) - \text{Minimum}(T(\Delta r_s^2)) \quad (4.17)$$

erreicht werden. Da die gesuchte Transformation die Form einer Logarithmus- bzw. Box-Cox-Transformation  $\Delta r_s^2 \rightarrow T(\Delta r_s^2) = \ln(\Delta r_s^2 + m)$  aufweisen soll, ergibt sich

$$\ln(\max(\Delta r_s^2) + m) - \ln(\text{med}(\Delta r_s^2) + m) \approx \ln(\text{med}(\Delta r_s^2) + m) - \ln(\min(\Delta r_s^2) + m) \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow \min(\Delta r_s^2) + m \approx \frac{(\text{med}(\Delta r_s^2) + m)^2}{\max(\Delta r_s^2) + m} \quad (4.19)$$

Unter Berücksichtigung von  $\min(\Delta r_s^2) \rightarrow 0$  und  $m \ll \text{med}(\Delta r_s^2)$  bzw.  $m \ll \max(\Delta r_s^2)$  gilt damit

$$m := \frac{(\text{med}(\Delta r_s^2))^2}{\max(\Delta r_s^2)} \quad (4.20)$$

und der endgültige Regressionsansatz

$$T(\Delta r_s^2) = \ln(\Delta r_s^2 + m) = \ln((r_{s/i} - r_{s/i-1})^2 + m) = \ln(b_1 \cdot (ele_{4d})^{b_2}) = \ln(b_1) + b_2 \cdot \ln(ele_{4d}). \quad (4.21)$$

Die dabei auftretende Größe  $m$  gewährleistet eine untere Schranke der transformierten Zeitreihenwerte und ist daher für jede bearbeitete Zeitreihe individuell zu berechnen. In Abbildung 4.14 sind die so transformierten Daten aus Abbildung 4.9 mit zugehörigem Normal-QQ-Plot dargestellt.

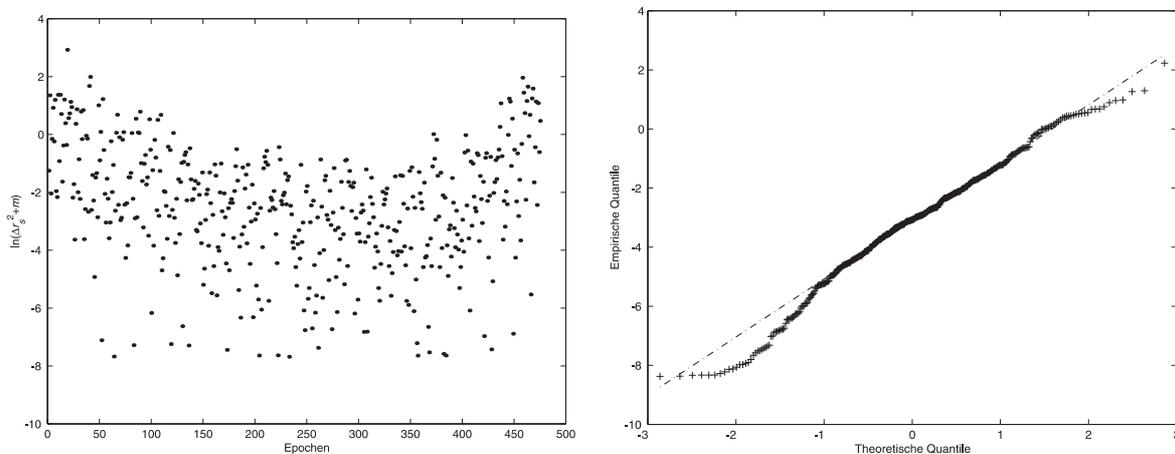


Abb. 4.14: Box-Cox-Transformierte quadrierte Differenzen studentisierter Residuen  $\ln(\Delta r_s^2 + m)$  aus (4.21) inklusive zugehörigem Normal-QQ-Plot; Theoretische Verteilung: Standardnormalverteilung  $N(0,1)$   
 $L_3$ -Doppeldifferenzen aus Abbildung 4.9 (375km-Basislinie, PRN 15-03, Datenrate: 30s)

Es zeigt sich, dass im Vergleich zu Abbildung 4.13 eine näherungsweise symmetrisch verteilte Stichprobe ohne stark abweichende Stichprobenwerte mit Hilfe der vorgestellten Transformation erzeugt werden kann. Die so transformierten Daten in Verbindung mit dem Regressionsansatz (4.21) erfüllen damit die Anforderungen für eine zuverlässige Schätzung der Parameter der Regressionsfunktion. Da diese transformierten Daten korreliert sind, ist es für die Parameterschätzung mit den bekannten Methoden des Kleinste-Quadrate-Verfahrens erforderlich, ihre Kovarianzmatrix in die Auswertung einzuführen. Aufgrund der durchgeführten Box-Cox-Transformation sind die Kovarianzen jedoch nicht geschlossen berechenbar, sondern können allenfalls simuliert werden. Daher wurden IID- bzw.  $N(0, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsdaten simuliert und unter Verwendung der erweiterten Logarithmus-Transformation transformiert. Aus der Analyse der daraus berechneten Kovarianzfunktionen ergibt sich die approximierte Kovarianzmatrix der transformierten Daten aus (4.21) zu

$$C_{rr} = \begin{bmatrix} 2.95 & 0.43 & 0 & 0 \\ 0.43 & 2.95 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0.43 \\ 0 & 0 & 0.43 & 2.95 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Sie ist unabhängig von der Varianz  $\sigma^2$  der ihr zugrunde liegenden Daten und damit gültig für alle IID- bzw.  $N(0, \sigma^2)$ -verteilten Zeitreihen mit beliebiger Varianz  $\sigma^2$  (vgl. Bischoff et al., 2005b).

Somit können die Parameter  $b_1$  und  $b_2$  der Regressionsfunktion aus (4.21) mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden. Aus

dem Vektor der  $i=1, \dots, n$  transformierten Residuen 
$$l = \begin{bmatrix} \ln(\Delta r_s^2(1) + m) \\ \vdots \\ \ln(\Delta r_s^2(n) + m) \end{bmatrix},$$

dem Vektor der unbekannt Parameter 
$$x = \begin{bmatrix} \ln(b_1) \\ b_2 \end{bmatrix},$$

der Designmatrix 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & \ln(ele_{4d}(1)) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln(ele_{4d}(n)) \end{bmatrix}$$

sowie  $C_l = C_{rr}$  aus (4.22) berechnen sich der geschätzte Parametervektor zu  $\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l$  und damit die gesuchte Varianzfunktion zu

$$\hat{\sigma}_{ri}^2(ele_{4d}(i)) = \hat{b}_1 \cdot (ele_{4d}(i))^{\hat{b}_2} - m = \hat{b}_1 \cdot \left( \cos \sqrt{\frac{1}{4} (z_{11}^2(i) + z_{12}^2(i) + z_{21}^2(i) + z_{22}^2(i))} \right)^{\hat{b}_2} - m. \quad (4.23)$$

Die geschätzte Funktion (4.23) kann theoretisch negative Werte annehmen. Durch die Wahl von  $ele_{4d}$  liegt sie jedoch i.d.R. im positiven Bereich, da der erste Summand in (4.23) immer positiv und der zweite Summand, die Größe  $m$ , aufgrund der Division des quadrierten Medians durch das Maximum der transformierten Daten, eine sehr kleine Größe ist. Die umfangreichen Untersuchungen dieser Arbeit mit Datenmaterial unterschiedlicher Charakteristik bestätigen diesen Sachverhalt. In Abbildung 4.15 sind beispielhaft die transformierten Daten aus (4.21) und die daraus geschätzte Erwartungswertfunktion dargestellt. Dabei wird die gute Anpassung der Erwartungswertfunktion an die zugrunde liegende Charakteristik der Daten deutlich.

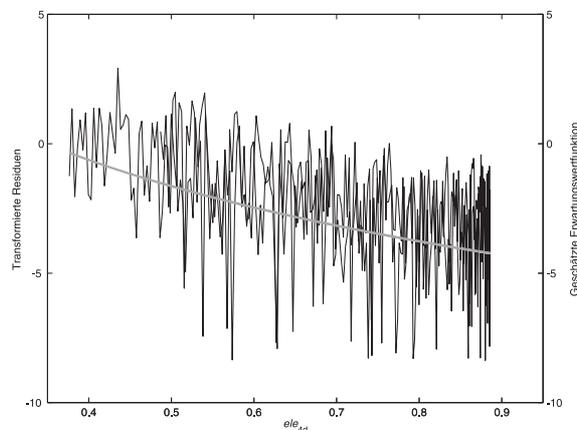


Abb. 4.15: Transformierte quadrierte Differenzen studentisierter Residuen  $\ln(\Delta r_s^2 + m)$  aus (4.21) und daraus geschätzte Erwartungswertfunktion  $\ln(b_1 \cdot ele_{4d}^{b_2})$ ;  $L_3$ -Doppeldifferenzen aus Abbildung 4.9 (375km-Basislinie, PRN 15-03, Datenrate: 30s)

Die geschätzten Parameter und somit die Anpassung der Regressionsfunktion an die transformierten Daten können mit Hilfe eines statistischen Tests überprüft werden. Als Alternative dazu sind Aussagen bzgl. der Anpassungsgüte der Regressionsfunktion an die transformierten Daten mit Hilfe des multiplen Bestimmtheitsmaßes  $B$  aufbauend auf der Darstellung in Niemeier (2002) möglich. Dazu spaltet man die Quadratsumme  $\Omega_l = l^T P l$  der zu untersuchenden Daten  $l$  mit  $P = Q_{ll}^{-1}$  in

$$\Omega_l = \Omega_M + \Omega_v \quad (4.24)$$

mit dem Modellanteil  $\Omega_M$  und der Verbesserungsquadratsumme  $\Omega_v$  auf und erhält damit das gesuchte Bestimmtheitsmaß

$$B = \frac{\Omega_l - \Omega_v}{\Omega_l} = \frac{\Omega_M}{\Omega_l} = \frac{\hat{x}^T A^T P l}{l^T P l}. \quad (4.25)$$

Je größer dabei der durch das Modell erklärte Anteil  $\Omega_M$  an der Gesamtvariation  $\Omega_l$  ist, desto besser ist die Anpassung des Modells an die vorliegenden Daten. Die Verbesserungsquadratsumme  $\Omega_v$  drückt dementsprechend die verbleibende, nicht durch das Modell beschriebene Variation der Daten aus. Im Idealfall ist  $B=1$ , was einem strengen funktionalen Zusammenhang zwischen den untersuchten Daten und dem angenommenen Modell entspricht. Im Fall  $B=0$  trägt dagegen das Regressionsmodell überhaupt nicht zur Beschreibung der Daten bei. Besteht jedoch keine lineare Beziehung, sondern liegt z.B. ausschließlich weißes Rauschen vor (White Noise Prozess), so liefert das multiple Bestimmtheitsmaß bei der vorgegebenen Regressionsfunktion nur sehr kleine Werte für  $B$  und erschwert damit die Beurteilung der Qualität der Regression (vgl. auch Abschnitt 3.4 in Chatterjee und Price, 1995). Im Beispiel aus Abbildung 4.15 beträgt  $B=0.39$ , was unter Berücksichtigung der stark verrauschten Daten einen vergleichsweise guten Wert und damit eine gute Anpassung darstellt.

Somit bietet das beschriebene Verfahren die Möglichkeit, individuelle Varianzfunktionen für jedes Doppeldifferenzpaar zuverlässig zu schätzen. Die erläuterten statistischen Tests bzw. Kenngrößen dienen primär dem Vergleich und der Beurteilung der Ergebnisse während der Entwicklung des Verfahrens. Bei der späteren Anwendung des Verfahrens haben die Ergebnisse der Homoskedastizitätstests oder die Anpassungsgüte der Regressionsfunktion allerdings keinen Einfluss auf die Verwendung der geschätzten Varianzfunktion. Sie wird direkt, wie im Schaubild aus Abbildung 4.1 außerhalb der mittleren Spalte dargestellt, in der schon zu Beginn verwendeten GPS-Auswertesoftware weiterverarbeitet (vgl. Abschnitt 4.3).

### 4.3 Berücksichtigung von Varianzfunktionen im stochastischen Modell der GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Die ursprüngliche Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen (3.16) setzt sich wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben aus den Hauptdiagonalenblöcken

$$M_i = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & & 0 \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & q_{n-1,n} \\ 0 & & q_{n,n-1} & q_{n,n} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

zusammen, wobei jedes  $q_{j,j}$ ,  $j=1,\dots,n$  einer Doppeldifferenzbeobachtung bzw. einem Satellitenpaar zugeordnet werden kann. Schätzt man die Varianzfunktionen der Doppeldifferenzresiduen aus der GPS-Auswertung wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben in Abhängigkeit von der Elevation der beteiligten Satelliten und wendet sie auf die ursprüngliche Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen (3.16) an, so ergeben sich die Hauptdiagonalenblöcke der neuen Kovarianzmatrix zu

$$\mathbf{M}'_i = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} q'_{1,1} & q'_{1,2} & & 0 \\ q'_{2,1} & q'_{2,2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & q'_{n-1,n} \\ 0 & & q'_{n,n-1} & q'_{n,n} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

mit  $q'_{j,j} = \hat{\sigma}_{rj}^2 \cdot q_{j,j}$  und  $q'_{j,j-1} = q'_{j-1,j} = \hat{\sigma}_{rj} \hat{\sigma}_{rj-1} \cdot q_{j,j-1}$  sowie  $\hat{\sigma}_{rj}$  bzw.  $\hat{\sigma}_{rj-1}$  aus (4.23).

Damit ist ausgehend von einer Anpassung der Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen der Übergang von Modell I zu Modell II aus (3.20) auf der Basis originärer GPS-Trägerphasenbeobachtungen erreicht. Nach erneuter Auswertung der GPS-Daten mit angepasster GPS-Software ergeben sich dann im Idealfall homoskedastische, jedoch immer noch von Trends beeinflusste Residuenzeitreihen. Beispielhaft sind in Abbildung 4.16 die studentisierten Residuen und deren Epochendifferenzen der im Abschnitt 4.2 vorgestellten Zeitreihe nach Integration geeigneter Varianzfunktionen in den GPS-Auswerteprozess dargestellt.

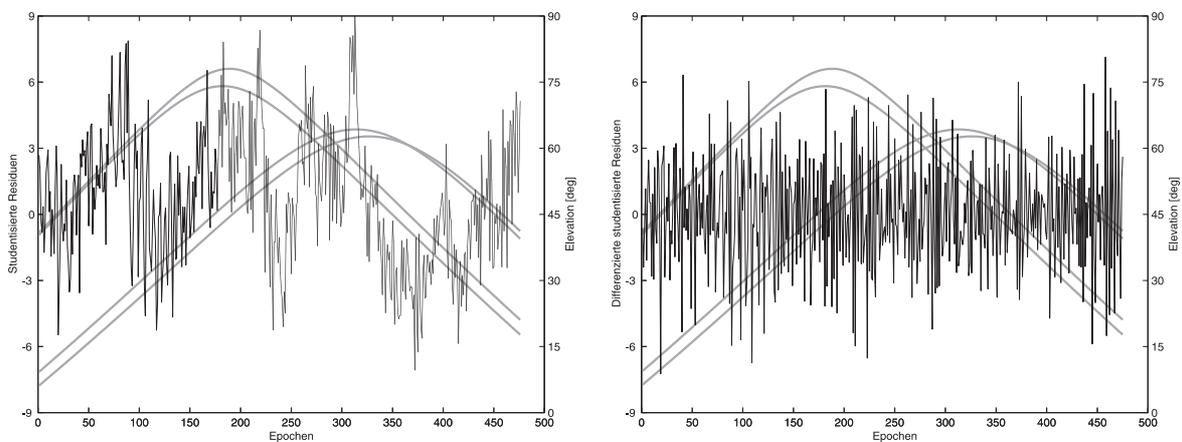


Abb. 4.16: Trendbehaftete sowie differenzierte Zeitreihe studentisierter Residuen nach Auswertung mit geeigneten Varianzfunktionen (Epochendifferenzen 1. Ordnung)  
L<sub>3</sub>-Doppeldifferenzen aus Abbildung 4.9 (375km-Basislinie, PRN 15-03, Datenrate: 30s)

Bei der Betrachtung der undifferenzierten Zeitreihe fallen analog zu Abbildung 4.9 die starken Störungen im Verlauf der Zeitreihe auf. Durch die Berücksichtigung von Varianzfunktionen für die GPS-Beobachtungen mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens können sie nicht beseitigt werden, da die Schätzung der Varianzfunktion auf differenzierten und damit trendbereinigten Daten basiert. Nach erfolgter Differenzbildung werden die Auswirkungen der veränderten Gewichtung der GPS-Beobachtungen jedoch deutlich. Trotz leichter Variationen der Streuung der differenzierten studentisierten Residuen kann von ausreichend homogener Varianz über den gesamten Verlauf der Zeitreihe gesprochen werden. Auffallend ist zudem, dass diese Residuen betragsmäßig deutlich größer als vor der Gewichtung in Abbildung 4.9 sind. Dieser Effekt kann u.a. durch die Schaffung einer realistischeren, auf die tatsächlich vorliegenden Daten abgestimmten Genauigkeitssituation durch die Berücksichtigung der geschätzten Varianzfunktion erklärt werden. Die verbleibenden Variationen in den Daten rühren z.B. von nicht berücksichtigten Korrelationen zwischen den Beobachtungen her, die im folgenden Abschnitt 4.4 analysiert werden sollen.

#### 4.4 Korrelationen bei GPS-Residuen

Nach der Schätzung der Varianzfunktionen der GPS-Beobachtungen und der Integration in die GPS-Auswertung mit Hilfe des in den Abschnitten 4.2 und 4.3 vorgestellten Verfahrens steht eine erweiterte Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen (Modell II aus (3.20)) zur Verfügung. Die Residuen aus der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten unter Berücksichtigung dieses Modells sind dann aufgrund der zutreffenden Modellierung der Varianzstruktur potentiell homoskedastisch. Diese Eigenschaft kann mit Hilfe der Homoskedastizitätstests (4.11) bis (4.13) überprüft werden.

Im Folgenden werden die studentisierten Residuen der einzelnen Doppeldifferenzzeitreihen bzgl. vorhandener Korrelationen untersucht. Dazu ist es sinnvoll, zunächst die Existenz von Korrelationen bzw. die Abweichung der Daten von

der Eigenschaft der IID-Verteilung mit Hilfe eines statistischen Tests, realisiert durch den Kolmogorov-Smirnov-Test aus (2.30), nachzuweisen.

Die eigentliche Untersuchung der Daten auf Korrelationen ist einerseits mit Hilfe des in Abschnitt 2.2.2 vorgestellten Konzepts der stochastischen Prozesse und andererseits durch direkte Bestimmung empirischer Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktionen (vgl. Abschnitt 2.3) möglich. Die Anpassung stochastischer Prozesse an die zu untersuchenden Zeitreihen erweist sich bei den Daten aus Abschnitt 5.1 jedoch als sehr schwierig bzw. aufwändig (vgl. Bischoff et al., 2005c). Neben der Bestimmung der Parameter muss für jede Zeitreihe die Ordnung des stochastischen Prozesses individuell festgelegt werden. Eine Automatisierung dieses Verfahrens ist zwar, wie in Abschnitt 2.2.2 angedeutet, möglich, die dabei anzuwendenden Verfahren sind jedoch sehr sensitiv gegenüber im Datenmaterial verbliebenen Störungen (z.B. Trendeffekten) und führen leicht zu Fehlidentifikationen des stochastischen Prozesses bzw. zu großen Streuungen der erzielten Ergebnisse. Daher wird das Konzept der stochastischen Prozesse hier nicht weiter verfolgt. Die zur Untersuchung und Beurteilung der Korrelationsstruktur der GPS-Beobachtungen notwendigen Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktionen werden dementsprechend direkt aus den Zeitreihen bestimmt. Dazu soll in Abschnitt 4.4.1 zunächst ein Verfahren zur Bestimmung von Korrelationsfunktionen erläutert werden, während in Abschnitt 4.4.2 ein Verfahren zur Anpassung einer im Rahmen der GPS-Auswertung verwendbaren empirischen Funktion an die zu diskreten Zeitpunkten bestimmte Autokorrelationsfunktion erläutert wird.

#### 4.4.1 Bestimmung von Autokorrelationsfunktionen

In dieser Arbeit soll ausschließlich der Zusammenhang zwischen Daten einer Zeitreihe zu unterschiedlichen Zeitpunkten bzw. Beobachtungsepochen, d.h. zeitliche Korrelationen bzw. Autokorrelationen (vgl. Abschnitt 2.3), analysiert werden. Die aus zeitlichen und räumlichen Korrelationen zusammengesetzten Kreuzkorrelationen (2.25) zwischen Doppeldifferenzen ohne oder mit nur einem gemeinsamen Satelliten werden nicht gesondert betrachtet. Die Berechnung und Weiterverarbeitung von Korrelationsfunktionen im Gegensatz zu Kovarianzfunktionen ermöglicht den Vergleich unterschiedlicher Zeitreihen und eine effiziente Integration in die Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen.

Vor der Bestimmung der Autokorrelationsfunktionen müssen die zu untersuchenden Daten analog zu den in Abschnitt 2.3 dargestellten Überlegungen auf Trends untersucht werden. Betrachtet man beispielsweise die in Abbildung 4.16 dargestellte Zeitreihe, bei der nach der Auswertung mit einer geeigneten Varianzfunktion keine Heteroskedastizität mehr festzustellen ist, so fallen deutliche zyklische Schwankungen im Verlauf der dargestellten studentisierten Residuen auf. Diese zyklischen Trendeffekte deuten zunächst, trotz einer vergleichsweise langen Periodendauer von ca. 100 Epochen (= 50 Minuten), auf den Einfluss von Mehrwegeeffekten hin. Mehrwegeeffekte sind jedoch, wie in Abschnitt 3.1.2 erläutert, schwer erfass- bzw. modellierbar. Allenfalls die Tatsache, dass sich diese Effekte bei unveränderter Umgebung der Beobachtungsstation nach Ablauf eines Sterntages wiederholen, kann zu einer Identifikation der Mehrwegeeffekte beitragen. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts sind in Abbildung 4.17 beispielhaft die Zeitreihen der Doppeldifferenz PRN 15-03 aus Abbildung 4.16 über 13 Beobachtungstage unter Berücksichtigung der Länge eines Sterntages (Verschiebung der Zeitreihen aufeinanderfolgender Tage um jeweils 8 Epochen (= 4 Minuten)) dargestellt.

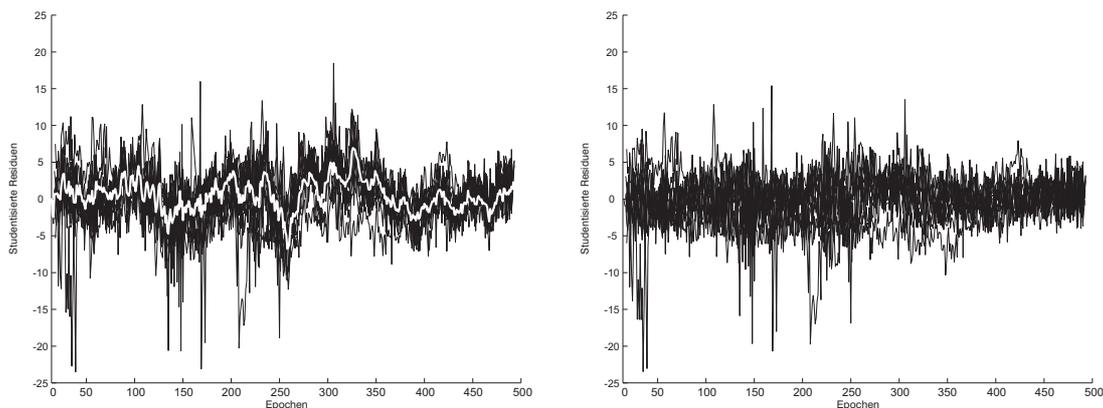


Abb. 4.17: Studentisierte Residuen über 13 Beobachtungstage unter Berücksichtigung der Länge eines Sterntages.

L3-Doppeldifferenzen (375km-Basislinie, PRN 15-03, Datenrate: 30s)

- a) trendbehaftete Zeitreihen inkl. gekennzeichnetem Epochenmittelwert      b) Zeitreihen mit subtrahiertem Epochenmittelwert

In Abbildung 4.17a ist neben den Zeitreihen aller 13 Beobachtungstage jeweils der arithmetische Mittelwert über alle Beobachtungen zu dieser Epoche dargestellt. Dieses Epochenmittel schwankt stark, weist jedoch nur wenige, potentiell von Mehrwegeeffekten beeinflusste Zyklen auf. Die deutlichen Zyklen in den Daten aus Abbildung 4.16a können zwar auch hier identifiziert werden, sind aber, da sie nicht an allen Beobachtungstagen in gleicher Weise die Daten beeinflussen, weniger offensichtlich. Zieht man das Epochenmittel aus Abbildung 4.17a jeweils von den Zeitreihen der einzelnen Beobachtungstage ab und beseitigt bzw. verringert somit den Einfluss der Trendeffekte, so erhält man die Daten aus Abbildung 4.17b, deren Epochenmittel verschwindet. Diese Daten sind nahezu homoskedastisch und trendbereinigt, wodurch eine zuverlässigere Bestimmung evtl. vorhandener Korrelationen möglich wäre. Betrachtet man die nach (2.23) aus den Zeitreihen aus 4.17a und 4.17b berechneten Autokorrelationsfunktionen in den Abbildungen 4.18a und 4.18b, so werden Änderungen aufgrund der Elimination des zyklischen Trends durch Subtraktion des Epochenmittels zwar deutlich, eine grundlegend unterschiedliche Korrelationsstruktur ist jedoch nicht festzustellen.

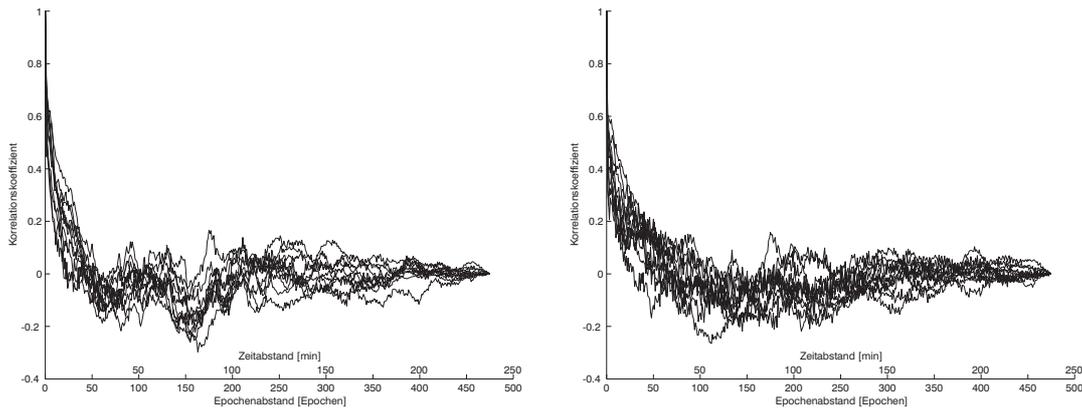


Abb. 4.18: Autokorrelationsfunktionen der Zeitreihen aus Abbildung 4.17 (13 Beobachtungstage der 375km-Basislinie, PRN 15-03, Datenrate: 30s) auf der Basis  
 a) trendbehafteter Zeitreihen  
 b) von Zeitreihen mit subtrahiertem Epochenmittelwert (→ Trendbereinigung)

Die Unterschiede sind neben einer größeren Variation der Autokorrelationsfunktionen bei kleinen Zeitabständen in Abbildung 4.18b in den im Vergleich zu den trendbehafteten Daten etwas größeren Korrelationskoeffizienten der trendbereinigten Zeitreihen in dieser Abbildung zu finden. Es sei in diesem Zusammenhang jedoch darauf hingewiesen, dass erfahrungsgemäß der umgekehrte Fall, nämlich geringfügig kleinere Korrelationskoeffizienten bei trendbereinigten Daten, die Regel ist.

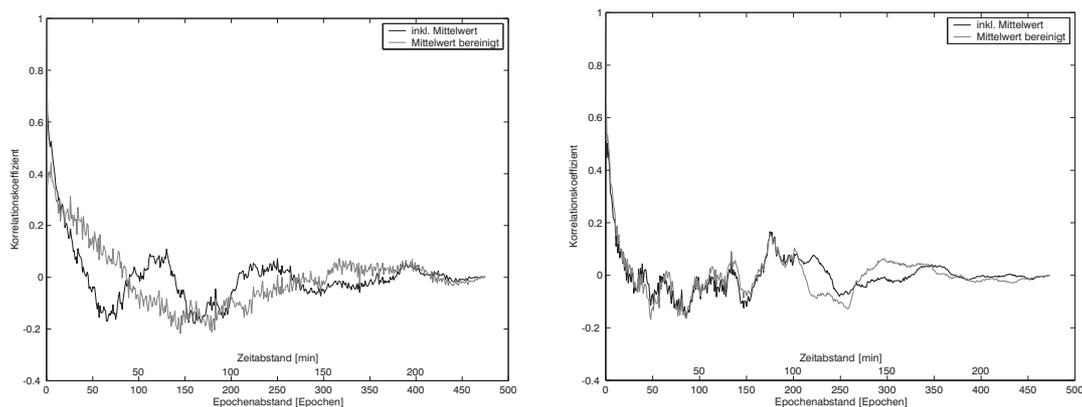


Abb. 4.19: Autokorrelationsfunktionen trendbehafteter Zeitreihen sowie von Zeitreihen mit subtrahiertem Epochenmittelwert (→ Trendbereinigung) (Daten aus Abbildung 4.17)  
 a) PRN 15-03 (Beobachtungstag 29)  
 b) PRN 15-03 (Beobachtungstag 04)

Um die Unterschiede zwischen trendbehafteten und potentiell trendbereinigten Daten deutlich zu machen, sind in Abbildung 4.19a die Autokorrelationsfunktionen eines Beobachtungstages der Doppeldifferenz aus den Abbildungen 4.17 dargestellt. Dabei wird deutlich, dass eine Trendbereinigung zu einer deutlichen Veränderung der Korrelationsstruktur führen kann, jedoch nicht zwangsläufig zu geringeren Korrelationskoeffizienten führen muss. In Abbildung 4.19b sind

demgegenüber die Autokorrelationen der gleichen Doppeldifferenzbeobachtung an einem anderen Beobachtungstag dargestellt, wobei insbesondere bis zu einem Abstand von ca. 200 Epochen (=100 Minuten) eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der trendbereinigten und der trendbehafteten Autokorrelationsfunktion besteht. Die Trendbereinigung durch Subtraktion des Epochenmittelwertes führt somit also nicht zwangsläufig zu einer Änderung der Korrelationsstruktur, vielmehr treten nur in Einzelfällen deutliche Änderungen auf, während die meisten Zeitreihen von der Trendbereinigung unbeeinflusst sind.

Somit kann festgestellt werden, dass das Epochenmittel zwar geeignet ist, Trends in den Daten zu beseitigen, dass jedoch aufgrund der heterogenen Störungen an den verschiedenen Beobachtungstagen nicht bei jeder Zeitreihe eine gleichmäßig gute Trendbereinigung erfolgt. Zudem deuten Störeffekte, die an verschiedenen Beobachtungstagen nicht in gleicher Weise die Daten beeinflussen, nicht auf Mehrwegeeffekte, sondern eher auf unvollständig modellierte atmosphärische Effekte hin. Da somit eine zuverlässige Identifikation der Mehrwegeeffekte in den untersuchten Daten nicht möglich ist, ist weder eine Elimination der Trendeffekte noch eine physikalische Modellierung im Rahmen der GPS-Auswertung sinnvoll. Zudem ist das beschriebene Verfahren zur Berechnung der Epochenmittelwerte nur sehr eingeschränkt anwendbar, da nicht an allen Beobachtungstagen die gleichen Doppeldifferenzen gebildet werden und somit nur wenige Doppeldifferenzen über eine ausreichende Anzahl an Beobachtungstagen vorliegen, um ein zuverlässiges Epochenmittel zu bestimmen. Berücksichtigt man zusätzlich noch die geringen Unterschiede bei den Autokorrelationsfunktionen der trendbereinigten und der trendbehafteten Zeitreihen, so lässt sich schlussfolgern, dass die Verwendung der trendbehafteten Daten für die Korrelationsuntersuchungen der Verwendung der trendbereinigten Daten vorzuziehen ist. Steht im Rahmen einer verfeinerten GPS-Auswertung eine verbesserte funktionale Modellierung bzw. eine verbesserte Datenbereinigung bei der Vorverarbeitung zur Verfügung, so werden dementsprechend die verbleibenden Trendeffekte in den Daten geringer und die Bestimmung der Autokorrelationsfunktionen noch zuverlässiger.

Die Berechnung der Autokorrelationsfunktionen aus den trendbehafteten studentisierten Residuen kann nun gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2.3 auf der Basis von (2.22) bzw. (2.23) erfolgen. Dabei werden die Autokorrelationsfunktionen für alle Zeitreihen ab einer Länge von 50 Zeitreihenwerten auf Basis aller Zeitreihenwerte berechnet. Im Gegensatz dazu werden für die weiteren Untersuchungen bzw. Verarbeitungsschritte in Abschnitt 4.4.2 gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2.3 jeweils nur 25% dieser Autokorrelationsfunktion verwendet.

#### 4.4.2 Schätzung analytischer Funktionen zur Repräsentation der empirischen Autokorrelationsfunktionen

Zur Weiterverarbeitung der Autokorrelationen in der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen ist es sinnvoll, an die an diskreten Stellen berechneten Autokorrelationsfunktionen analytische Funktionen mit Hilfe einer Regression anzupassen. Dazu ist es zunächst notwendig, eine geeignete Regressionsfunktion inklusive zu schätzender Parameter so auszuwählen, dass u.a. die positive Definitheit der resultierenden Kovarianzmatrix sichergestellt ist. Beschränkt man sich auf die Klasse der positiv definiten Funktionen, so ist diese Bedingung stets erfüllt. Eine breite Palette solcher Funktionen, die sich nach Niemeier (2002) in exponentielle, lineare und periodische Funktionen einteilen lassen, sind im Anhang zu Meier und Keller (1990) zu finden. Aufgrund der vergleichsweise homogenen Form der Autokorrelationsfunktionen über alle untersuchten Datensätze ist es im Rahmen dieser Arbeit möglich, eine einheitliche Korrelationsfunktion

$$R'(\tau) = \begin{cases} 1 & , \text{ für } \tau = 0 \\ 0.5 \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{ND_1}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot \tau}{ND_1 \cdot T}\right) & , \text{ für } \tau \geq 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

mit

$$ND_1 = \min\left(\tau_{(R_{xx}(\tau)=0)}\right) \rightarrow (1. \text{ Nullstelle von } R'(\tau)) \quad (4.29)$$

zu schätzen. Der exponentielle Anteil dieser Funktion modelliert dabei das starke Abklingen des Korrelationskoeffizienten bei geringen Zeit- bzw. Epochenabständen  $\tau$ , während der periodische Anteil die in nahezu allen Fällen auftretenden Schwingungen der empirischen Autokorrelationsfunktion steuert (vgl. Abbildung 4.20). Der Parameter  $ND_1$  bezeichnet den kleinsten Zeit- bzw. Epochenabstand  $\tau$ , bei dem die Autokorrelation verschwindet bzw. negativ wird (1. Nullstelle), und skaliert die Korrelationslänge (vgl. Niemeier, 2002). Er kann genauso wie der Abstand  $\tau$  alternativ in Abhängigkeit von der Zeit oder in Abhängigkeit von den Epochen angegeben werden. Aufgrund der im Rahmen dieser Arbeit üblichen Darstellung sollen diese Parameter im Folgenden als Epochenabstände angegeben werden. Da bei den

untersuchten Daten eine Epoche mit dem Zeitabstand 30s korrespondiert sind beide Angaben jedoch äquivalent. Der unbekannte Parameter  $T$  kann mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate aus (2.8) auf der Basis des zuverlässig bestimmten Teils der Autokorrelationsfunktion geschätzt werden und trägt zusammen mit  $ND_1$  zur Modellierung der Form der Korrelationsfunktion bei.  $T$  wird daher im weiteren als Schwingungsdauer bezeichnet. Die explizite Zuweisung des Korrelationskoeffizienten zum Zeit- bzw. Epochenabstand  $\tau=0$  ist notwendig, da die eigentliche analytische Korrelationsfunktion bei  $\tau=0$  lediglich den Wert 0.5 liefert, der Korrelationskoeffizient für die Autokorrelation einer Beobachtung mit sich selbst definitionsgemäß jedoch immer 1 ist. Der Faktor von 0.5 wurde empirisch ermittelt und ist für das gesamte untersuchte Datenmaterial, sowohl für kurze als auch für lange Basislinien gültig. Die Frage nach der Allgemeingültigkeit muss im Rahmen von weiteren Untersuchungen geklärt werden, was jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit ist. Die Multiplikation der Korrelationsfunktion mit diesem Faktor dient der Trennung zweier überlagerter Prozesse. Dem im Rahmen der Modellierung der Korrelationsfunktion relevanten stochastischen Signal (farbiges Rauschen) ist dabei ein unkorrelierter Rauschanteil (weißes Rauschen) überlagert. Dieser Rauschanteil zum Zeit- bzw. Epochenabstand  $\tau=0$  beeinflusst dadurch die Schätzung von  $T$  bzw. die Anpassung der analytischen Korrelationsfunktion nicht und ermöglicht somit eine zuverlässige Approximation des relevanten Signals. Die Approximationsgüte kann nach der Schätzung durch Vergleich des multiplen Bestimmtheitsmaßes (4.25) beurteilt werden. Zur Beurteilung und zum Vergleich der empirischen Autokorrelationen bzw. der analytischen Korrelationsfunktionen der verschiedenen Datensätze ist es üblich, die Halbwertsbreite (Korrelationskoeffizient=0.5) zu bestimmen. Aufgrund der Eigenschaften der Funktion (4.28) wird dieser Korrelationskoeffizient allerdings schon bei einem Epochenabstand von  $\tau = 1$  unterschritten, wodurch die Halbwertsbreite nur eine vergleichsweise geringe Aussagekraft besitzt. Daher wird im Folgenden der Parameter  $ND_1$  zum Vergleich herangezogen werden (in Abbildung 4.20:  $ND_1=6$  Epochen).

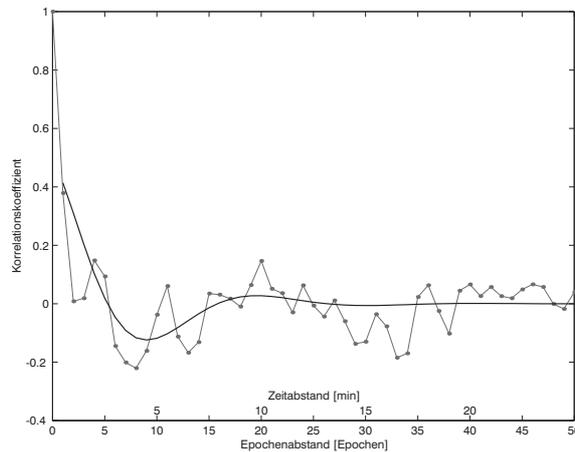


Abb. 4.20: Empirische Autokorrelationsfunktion (Länge des gesamten Datensatzes: 50 Epochen) mit approximierender analytischer Korrelationsfunktion (4.28) (Schätzung auf der Basis von 16 Epochen); Datenrate: 30s

In Abbildung 4.20 ist beispielhaft die gute Approximation der empirischen Autokorrelationsfunktion durch die analytische Korrelationsfunktion, insbesondere beim Epochenabstand  $\tau = 1$  dargestellt. Diese Anpassung gelingt durch die bei der Schätzung durchgeführte Trennung des Rauschanteils vom Signalanteil. Die Trennung wird durch die zusammengesetzte Funktion (4.28) realisiert, wodurch allerdings an der Stelle  $\tau = 0$  ein Sprung bzw. eine Unstetigkeitsstelle in der Korrelationsfunktion entsteht (vgl. auch die Korrelationsfunktion in Abbildung 4.20 mit den Korrelationskoeffizienten  $r_{\tau=0} = 1$  bzw.  $r_{\tau=1} = 0.42$ ). Eine Erklärung für die offensichtlich gute Anpassung im vorderen Bereich der analytischen Korrelationsfunktion ist u.a. in der Tatsache zu finden, dass die Schätzung des Parameters  $T$  mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, wie bereits in Abschnitt 4.4.1 ausgeführt, ausschließlich auf Basis der ersten 25% aller Werte (16 Epochen) der empirischen Autokorrelationsfunktion beruht.

Die analytische Funktion (4.28) basiert auf einer in El-Rabbany (1994) in vergleichsweise einfacher Form verwendeten, dort jedoch als ungeeignet verworfenen Funktion. Eine Weiterentwicklung der in der Arbeit von El-Rabbany angewendeten Funktion ist Howind et al. (2000) zu entnehmen. Sie approximieren bei der Untersuchung von Residuen aus der GPS-Auswertung jedoch die gesamte Autokorrelationsfunktion inklusive der weniger zuverlässig geschätzten Korrelationskoeffizienten und benötigen daher, aufgrund der stärker variierenden Datensätze, weitere alternative Funktionen. Eine nächste Entwicklungsstufe stellt nun die in dieser Arbeit präsentierte Funktion dar, mit der u.a. durch die Beschränkung der Schätzung auf die zuverlässig bestimmbar Bereiche der Autokorrelationsfunktion eine zutreffende

Approximation aller in Abschnitt 5.1 vorgestellten Datensätze möglich ist. Das Regressionsverfahren basiert dabei auf trendbehafteten studentisierten Residuen. Untersuchungen zeigen gleichwohl, dass ebenso empirische Autokorrelationsfunktionen trendbereinigter Daten mit der vorgestellten analytischen Funktion approximiert werden können.

#### 4.5 Berücksichtigung von Autokorrelationsfunktionen im stochastischen Modell der GPS-Trägerphasenbeobachtungen

Im Verlauf der Arbeit wurden verschiedene Realisierungen der in (3.15) dargestellten, grundlegenden Struktur der Kovarianzmatrix von GPS-Beobachtungen diskutiert. Die einfachste herkömmliche Modellierung in (3.16) bzw. (3.17) (Modell I aus (3.20)) konnte mit Hilfe der in Abschnitt 4.2.3 geschätzten Varianzfunktionen erweitert werden, woraus die modifizierte Kovarianzmatrix (4.27) (Modell II aus (3.20)) resultiert. Nun sollen die in Abschnitt 4.4.2 auf der Basis von Doppeldifferenzbeobachtungen geschätzten analytischen Korrelationsfunktionen in diese modifizierte Kovarianzmatrix integriert werden. Dazu wird die nur mit den Hauptdiagonalenblöcken  $M'_i$  besetzte Kovarianzmatrix (3.16) erweitert, woraus die modifizierte Kovarianzmatrix der GPS-Doppeldifferenzbeobachtungen

$$C_{II} = \begin{bmatrix} M'_1 & K_{1,2} & \cdots & \cdots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & M'_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & M'_{n-1} & K_{n-1,n} \\ K_{n,1} & \cdots & \cdots & K_{n,n-1} & M'_n \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

resultiert. Die Nebendiagonalenblöcke  $K_{ep1,ep2} = K_{ep2,ep1}$  enthalten die zeitlichen Korrelationen der Epochen  $ep1$  und  $ep2$  (Epochenabstand  $\tau = ep1 - ep2$ ). Sie ergeben sich u.a. aus den Korrelationskoeffizienten der für jede Doppeldifferenz individuell bestimmten analytischen Korrelationsfunktionen (4.28). Da im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich zeitliche Korrelationen behandelt werden, entstehen keine vollbesetzten Blockmatrizen, sondern aufgrund der Anordnung der Doppeldifferenzbeobachtungen in der Berner GPS-Software i.d.R. nur diagonal besetzte, jedoch nicht notwendigerweise quadratische Blöcke

$$K_{ep1,ep2} = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} q_1^{ep1,ep2} & & & 0 \\ & q_2^{ep1,ep2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q_p^{ep1,ep2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

mit  $p$  Doppeldifferenzen, die jeweils den beiden zu korrelierenden Epochen  $ep1$  und  $ep2$  gemein sind. Die Kofaktoren dieser Blockmatrizen ergeben sich aus den Kofaktoren  $q'_{i,i}$  aus (4.27) mit der betrachteten Epoche  $i$  und den Korrelationskoeffizienten  $r_\tau$  aus den Korrelationsfunktionen  $R'(\tau)$  (4.28) zu

$$q_k^{ep1,ep2} = r_\tau \cdot \sqrt{q'_{ep1,ep1} \cdot q'_{ep2,ep2}} \quad \text{mit } k = 1, \dots, p. \quad (4.32)$$

Der Hauptdiagonalenblock  $M'_i$  bleibt unverändert, da die Korrelationskoeffizienten  $r_\tau$  aufgrund des Epochenabstands  $\tau = 0$  gleich 1 sind.

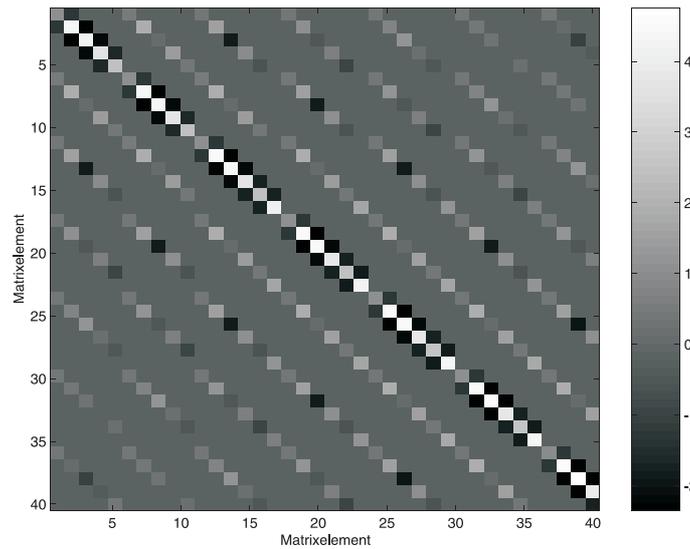


Abb. 4.21: Kofaktormatrix  $Q_{II}$  der Doppeldifferenzbeobachtungen unter Berücksichtigung zeitlicher Korrelationen (Matrixausschnitt: 40x40, Datengrundlage: 14km-Basislinie mit Datenrate 30s)

Somit ergibt sich die in Abbildung 4.21 ausschnittsweise dargestellte Kofaktormatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen  $Q_{II}$ . Dabei werden, neben den Varianzen auf der Hauptdiagonale und den mathematischen Korrelationen (negative Kofaktoren) auf der ersten Nebendiagonale, die den jeweiligen Epochenblöcken zugeordneten zeitlichen Korrelationen deutlich. Abhängigkeiten zwischen Beobachtungen ohne oder mit nur einem gemeinsamen Satelliten, die u.a. den räumlichen Korrelationen zuzuordnen sind, sind in dieser Matrix nicht berücksichtigt, wodurch die restlichen Elemente der Matrix mit 0 besetzt sind. Falls gewünscht, müssen diese Kreuzkorrelationen in zukünftigen Untersuchungen gesondert bestimmt und in die Matrix aus Abbildung 4.21 integriert werden, wodurch eine vollbesetzte Kofaktor- bzw. Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen entsteht. Neben der Struktur der Kofaktormatrix sind Abbildung 4.21 die Werte der Kofaktoren zu entnehmen. Die den Varianzen zugeordneten positive Werte auf der Hauptdiagonale schwanken dabei aufgrund der geschätzten und in diese Matrix integrierten Varianzfunktionen. Die mathematischen Korrelationen auf der ersten Nebendiagonale weisen demgegenüber stark negative Werte auf, während sich die Werte der restlichen Elemente der Matrix mit wachsendem Abstand von der Hauptdiagonale deutlich verringern und gegen null streben bzw. bei unkorrelierten Beobachtungen bei null verharren. Dieser Sachverhalt wird besonders bei der in Abbildung 4.22 dargestellten Zeile der Kofaktormatrix deutlich. Die Nullelemente dieser Zeile werden dabei von den Kofaktoren der zeitlich korrelierten Beobachtungen eines Satellitenpaares unterbrochen, die ab einem Epochenabstand von ca. 210 Epochen zu null gesetzt werden. In dieser Abbildung werden zudem der positive Kofaktor zum Epochenabstand null (Hauptdiagonale) und der negative Kofaktor zum Epochenabstand eins (erste Nebendiagonale – mathematische Korrelationen) deutlich (vgl. auch Abbildung 4.21 mit zugehöriger Erläuterung).

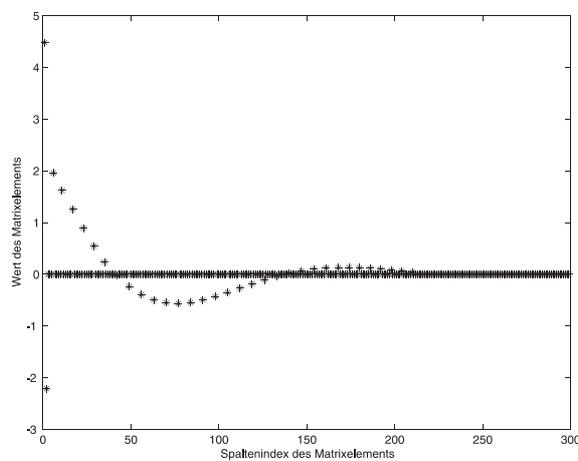


Abb. 4.22: Ausschnitt einer Zeile der Kofaktormatrix  $Q_{II}$  der Doppeldifferenzbeobachtungen unter Berücksichtigung zeitlicher Korrelationen (2.Zeile mit Spaltenindizes 2 bis 300; Datengrundlage: 14km-Basislinie mit Datenrate 30s aus Abbildung 4.21)

Die restlichen, von 0 verschiedenen Kofaktoren reflektieren, aufgrund von (4.32) neben der Korrelationsfunktion der dieser Zeile zugeordneten Doppeldifferenzen, zusätzlich den Einfluss der in Abschnitt 4.2.3 geschätzten Varianzfunktion für dieses Satellitenpaar. Dabei gewährleistet die Korrelationsfunktion (4.28) die positive Definitheit der Kovarianz- bzw. Kofaktormatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen und ermöglicht die Weiterverarbeitung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Es sei in diesem Zusammenhang erneut darauf hingewiesen, dass in den Abbildungen 4.21 und 4.22 die kompletten Korrelationsfunktionen über alle verfügbaren Epochenabstände dargestellt sind. Zur Bestimmung dieser Korrelationsfunktion werden aber nur 25% der gesamten empirischen Autokorrelationen verwendet.

Die Weiterverarbeitung der Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen erfolgt in der Berner GPS-Software prinzipiell unter Vernachlässigung der physikalischen Korrelationen. Dies führt zu der in (3.16) dargestellten Struktur dieser Kovarianzmatrix, wodurch die Inverse der gesamten Matrix sehr effizient durch Inversion der einzelnen Hauptdiagonalenblöcke  $M_i$  für jede Beobachtungsepoche getrennt bestimmt werden kann. Die Weiterverarbeitung der Kovarianzmatrix (4.30) unter Berücksichtigung der ermittelten zeitlichen Korrelationen gestaltet sich deutlich schwieriger, da keine Aufteilung der Gesamtmatrix in unabhängig zu verarbeitende Teilmatrizen erfolgen kann. Somit muss die komplette Kovarianzmatrix invertiert werden, deren Dimension jedoch von der Anzahl der Doppeldifferenzbeobachtungen des gesamten Datensatzes abhängt. So resultieren aus einer einzelnen prozessierten Basislinie bei einer Beobachtungsdauer von 24 Stunden und einer Datenrate von 30 Sekunden Datensätze mit über 20000 Doppeldifferenzbeobachtungen. Bei der Prozessierung umfangreicher GPS-Netze vergrößert sich diese Dimension auf ein Vielfaches in Abhängigkeit von der Anzahl der Beobachtungsstationen. In dieser Arbeit steht jedoch die Methodik zur Analyse des stochastischen Modells im Vordergrund, weshalb sich die Untersuchungen auf den vergleichsweise einfach beherrschbaren Fall einer einzelnen Basislinie beschränken. Selbst solch große Matrizen einer einzelnen Basislinie waren in der Vergangenheit nur mit Hilfe von Großrechenanlagen zu verarbeiten. Heutzutage ist dies mit konventionellen Computersystemen möglich, wenn auch dabei sehr lange Rechenzeiten von bis zu mehreren Wochen in Kauf genommen werden müssen. Eine Zusammenstellung geeigneter Verfahren zur Inversion der Kovarianzmatrix ist z.B. Caspary und Wichmann (1994) zu entnehmen. Steht keine ausreichende Rechnerkapazität zur Verfügung oder stehen kürzere Rechenzeiten im Vordergrund, so müssen Berechnungsverfahren unter Umgehung der expliziten Inversion der Kovarianzmatrix, unter Ausnutzung der besonderen Matrixstruktur oder Näherungsverfahren angewendet werden. Als Beispiel für die Berechnung einer genäherten Inversen sei hierzu auf das in Howind et al. (1999) angewendete Verfahren verwiesen. Dabei kann die Bandbreite der zu berechnenden Inversen frei gewählt werden - außerhalb dieses Bandes liegende Elemente werden zu null gesetzt. Die Untersuchungen zeigten, dass der Aufwand für die genäherte Inversion der Kovarianzmatrix auf unter 1% der Rechenzeit für die strenge Inversion reduziert werden kann. Der Einfluss des Approximationsfehlers der berechneten Inversen auf die Stationskoordinaten bleibt aufgrund der starken Diagonaldominanz der zu verarbeitenden Matrix vernachlässigbar.

Wie bereits deutlich wurde, ist die Matrix  $Q_{ll}$  aus Abbildung 4.21 abseits der Hauptdiagonalen dünn besetzt und aufgrund der Beschränkung der Untersuchungen auf zeitliche Korrelationen bandstrukturiert. Die Dimension dieses Bandes wird durch die maximale Anzahl der Doppeldifferenzbeobachtungen eines Satellitenpaares (im Rahmen dieser Arbeit ca. 500 Epochen) bestimmt. Daher ist es sinnvoll, auf Verfahren zur Berücksichtigung dieser besonderen Struktur (z.B. Speichertechniken für dünn besetzte oder bandstrukturierte Matrizen) zurückzugreifen. Eine Näherungslösung ist nicht erforderlich und wird hier nicht weiter verfolgt. Vielmehr wird einer strengen Weiterverarbeitung unter Berücksichtigung der beschriebenen Struktur der Kofaktormatrix der Vorzug gegeben. Sollen mehrere Basislinien gemeinsam prozessiert bzw. eine Gesamtlösung eines umfangreichen GPS-Netzes bestimmt werden, sind diese Standardverfahren nicht mehr einsetzbar. Zur Verarbeitung solcher Datensätze müssen auch heute noch Großrechenanlagen herangezogen werden.

## 5 Anwendungsbeispiele

Im Folgenden sollen das in Kapitel 4 vorgestellte Verfahren zur Analyse und Verbesserung des stochastischen Modells auf Realdaten angewendet und die erzielten Ergebnisse dargestellt und diskutiert werden. Dazu wird zunächst das verwendete Datenmaterial in Abschnitt 5.1 dokumentiert und die Vorverarbeitung bzw. die Auswerteschritte vor der Residuenanalyse mit Hilfe der verwendeten Berner GPS-Software in Abschnitt 5.2 erläutert. Daran schließt sich die Diskussion der erzielten Ergebnisse an, sowohl nach der Analyse der Varianzstruktur als auch nach der Analyse der Korrelationsstruktur der GPS-Trägerphasenbeobachtungen. Ein weiterer Aspekt wird die Beurteilung der Auswirkungen der unterschiedlichen stochastischen Modellierung auf die Ergebnisse der GPS-Auswertung sein.

### 5.1 Datenmaterial

Zur Überprüfung des entwickelten Analyseverfahrens wurde eine breite Datenbasis mit unterschiedlicher Charakteristik wie z.B. unterschiedlicher Basislinienlänge oder geographischer Verteilung angestrebt. Um eine gute Vergleichbarkeit der Ergebnisse des Analyseverfahrens zu gewährleisten, wurden alle Daten mit dem gleichen Empfänger- und Antennentyp, Trimble 4000SSi-Empfängern bzw. geodätischen  $L_1/L_2$ -Antennen mit Grundplatte, aufgezeichnet bzw. empfangen. In Tabelle 5.1 sind die Eckpunkte dieser Daten im Überblick dargestellt. Sie sollen im weiteren Verlauf dieses Abschnitts kurz erläutert werden.

	Basislinie	geographische Breite	Basislinienlänge	Beobachtungszeitraum	Sessionlänge	Datenrate	Mindestelevation
JOHL	H1JO	49° nördl. Breite	14km	4.-16.12.2000	je 4h	15s	5°
ANT	DAOH	62° - 63° südl. Breite	127km	24.1.- 8.2.2002	je 24h	5s	0°
	VEDA	62° - 65° südl. Breite	433km	24.1.- 8.2.2002	je 24h	5s	0°
	VEOH	63° - 65° südl. Breite	375km	24.1.- 8.2.2002	je 24h	5s	0°

Tab. 5.1: Übersicht über das verwendete Datenmaterial

#### Daten einer lokalen Basislinie im mitteleuropäischen Bereich (JOHL)

Daten kurzer Basislinien in mittleren geomagnetischen Breiten sind i.d.R. vergleichsweise gering von Störungen z.B. der Ionosphäre beeinflusst. Daher wurden im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Forschungsprojekts (He 1433/11-1/2) Testmessungen im Karlsruher Raum (Südwestdeutschland) mit dem Ziel durchgeführt, Datenmaterial mit möglichst geringen bzw. reproduzierbaren äußeren Einflüssen zur weiteren Analyse zu erzeugen. Die beiden besetzten GPS-Stationen H1 und JO wurden dabei u.a. im Hinblick auf eine geringe Beeinflussung durch Mehrwegeeffekte ausgewählt. Ihr Abstand und damit die Länge der bei der Auswertung mit Hilfe von Doppeldifferenzen zu bildenden Basislinie (H1JO) beträgt ca. 14km. Beide Stationen wurden an 13 aufeinanderfolgenden Tagen (4.-16.12.2000) jeweils 4 Stunden lang von 7-11h UTC besetzt, wobei die Taktrate bei der Registrierung 15s betrug, um hochauflösendes Datenmaterial für Detailanalysen zu erhalten. Die Mindestelevation, ab der Daten registriert werden, wurde bei der Messung auf 5° festgesetzt. Somit konnten insgesamt 13 Beobachtungssessions mit jeweils ca. 20 Doppeldifferenzen zur weiteren Analyse gewonnen werden (JOHL(4)-JOHL(16) bzw. H1JO04-H1JO16).

#### Daten eines regionalen GPS-Netzes im antarktischen Bereich (ANT)

Besonders hohe Genauigkeitsanforderungen an die Ergebnisse der GPS-Auswertung werden im Rahmen von Projekten zur Deformationsanalyse gestellt. Insbesondere bei regionalen Deformationsnetzen mit Basislinienlängen von über 100km ist es daher notwendig, die bisher verwendeten Modelle der GPS-Auswertung zu verfeinern. Daher wurden Daten eines ebenfalls von der DFG geförderten Forschungsprojekts (He 1433/12-1, Borch et al. (2003)) zur Anwendung auf das entwickelte Analyseverfahren ausgewählt. Das Ziel dieses Forschungsprojekts war die Untersuchung der troposphärischen Modellierung bei der GPS-Auswertung. Auf dieser Grundlage sollte eine optimale Strategie für die Auswertung von GPS-Beobachtungen als Beitrag zur zuverlässigeren Bestimmung tektonischer Bewegungen im Bereich der antarktischen Halbinsel erarbeitet werden. Es steht im Kontext der SCAR (Scientific Committee on Antarctic Research) GPS-Kampagnen der Jahre 1995-1998 zur Schaffung eines hochgenauen geodätischen Referenznetzes als Grundlage geotektonischer Forschung im antarktischen Bereich (Dietrich, 2000).

Im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit wurden Daten der in Abbildung 5.1 dargestellten GPS-Stationen Jubany-Dallmann (DA), O'Higgins (OH) und Vernadsky (VE) aus dem Bereich der antarktischen Halbinsel untersucht. Die Abstände dieser GPS-Stationen und damit die Längen der im Rahmen der Auswertung zu bildenden Basislinien liegen

zwischen 127km und 433km. Aus dem gesamten Beobachtungszeitraum vom 24.1. bis 11.2.2002 konnten 13 Tage zur Weiterverarbeitung herangezogen werden (Bezeichnung: ANT(24)-ANT(8)). Von jedem dieser Tage liegen 24h-Beobachtungen mit einer Mindestelevation von  $0^\circ$  und einer Datenrate von 5s vor, woraus 13 Beobachtungssessions mit jeweils ca. 100 Doppeldifferenzen resultieren.



Abb. 5.1: Antarktische Halbinsel mit den GPS-Stationen Jubany-Dallmann, O'Higgins und Vernadsky (vgl. Dietrich, 2000)

Neben den kleinräumigen Daten der lokalen Basislinie liegen somit zusätzlich Daten eines ausgedehnten GPS-Netzes in südlichen Breiten vor. Gemeinsam ist allen Daten, dass sie von den Auswirkungen des SA aufgrund dessen Abschaltung im Mai 2000 unbeeinflusst sind. Sie sind damit weniger stark gestört als Daten mit aktiviertem SA, was die Auswertung und Analyse und somit die Aufstellung eines verbesserten Auswertemodells vereinfacht. Im Gegensatz dazu sind vergleichsweise starke ionosphärische Störungen aufgrund der in beiden Beobachtungszeiträumen beträchtlichen Sonnenaktivität nicht auszuschließen, obwohl das Maximum des aktuellen Zyklus der Sonnenaktivität bereits Mitte des Jahres 2000 erreicht wurde. Zur Reduktion bzw. Bestimmung der Auswirkung von Mehrwegeeffekten wurden bei der lokalen Basislinie, wie schon erwähnt, geeignete, potentiell wenig beeinflusste Standorte für die GPS-Stationen ausgewählt. Beim regionalen Netz im antarktischen Bereich konnte eine detaillierte Stationsauswahl nicht getroffen werden. Bei Untersuchungen dieser Stationen im Rahmen der Dissertation von Mayer (2004) im Hinblick auf Mehrwegeeffekte konnten jedoch keine besonderen Auffälligkeiten festgestellt werden.

## 5.2 Auswertestrategie

Die Ergebnisse der GPS-Auswertung bzw. der Residuenanalyse hängen u.a. von der GPS-Auswertesoftware und der verwendeten Auswertestrategie ab. Da die GPS-Auswertung und die im Rahmen dieser Arbeit thematisierte Residuenanalyse z.B. in Bezug auf die Struktur des Beobachtungsvektors (Abschnitt 3.1.4) aufeinander abgestimmt sind, soll zunächst die klassische Auswertung der GPS-Beobachtungen, die als Vorverarbeitungsschritt für die weitere Analyse der Residuen betrachtet werden kann, dokumentiert werden.

Zur Auswertung der GPS-Beobachtungen wurde die am Astronomischen Institut der Universität Bern entwickelte, auf der Bildung von Doppeldifferenzen basierende Berner GPS-Software (BS) Version 4.2 (Hugentobler et al, 2001) verwendet. Aufgrund langjähriger Erfahrungen existieren für unterschiedliche Netz- bzw. Beobachtungskonfigurationen Standardeinstellparameter zur detaillierten Steuerung der GPS-Auswertung. Auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit sollen primär diese Standardparameter verwendet werden. Die Wahl einer bestimmten Auswertestrategie mit dementsprechenden Auswerteparametern hat jedoch prinzipiell keinen Einfluss auf das anschließende Verfahren der Residuenanalyse zur Verbesserung des stochastischen Modells. Stehen in der Zukunft verbesserte Auswertemodelle, -strategien bzw. -parameter zur Verfügung, kann das vorgestellte Analyseverfahren nahezu unverändert auf die neuen Residuen der GPS-Auswertung angewendet werden.

Bei der Auswertung von GPS-Beobachtungen variieren die Auswerteparameter u.a. in Abhängigkeit von der Basislinienlänge bzw. der Netzausdehnung. Daher wird auf Unterschiede bei den Einstellparametern für die unterschiedlichen Datensätze JOHL und ANT bei der Beschreibung der Auswerteschritte der BS hingewiesen. Bisher werden bei dem Verfahren zur Residuenanalyse nur Daten aus der Auswertung einzelner Basislinien unterstützt, da bei Netzlösungen einerseits eine andere Struktur des Beobachtungsvektors vorliegt und andererseits die Anzahl der Beobachtungen und damit die Dimensionen der zu verarbeitenden Matrizen mit wachsender Beobachtungsdauer immens ansteigen und kaum noch beherrschbar sind. In einem zukünftigen Entwicklungsschritt muss es allerdings das Ziel sein, das entwickelte Verfahren ebenso für komplette Netzlösungen auszubauen, was weniger ein verfahrenstechnisches Problem bei der auf einzelnen Doppeldifferenzen basierenden Residuenanalyse als vielmehr ein numerisches Problem bei der Verarbeitung vollbesetzter Kovarianzmatrizen im Rahmen der GPS-Auswertung darstellt. Im aktuellen Stadium und somit im weiteren Verlauf der Darstellung werden daher ausschließlich Einzelbasislinien verarbeitet. Die vorliegenden Daten werden dabei, abweichend von der Aufzeichnungsrate von 5 bzw. 15s, einheitlich mit einer Datenrate von 30s prozessiert, woraus sich der im weiteren Verlauf der Arbeit genannte Epochenabstand ergibt. Die Mindestelevation bei der Auswertung beträgt bei den Daten aus dem Karlsruher Bereich  $10^\circ$ , während bei den Daten aus dem antarktischen Bereich  $5^\circ$  gewählt wurden. Als externe Informationen müssen zusätzlich die elevationsabhängigen Phasenzentrumsvariationen der GPS-Antennen sowie die präzisen Bahninformationen des IGS eingeführt werden. Der Ablauf der GPS-Auswertung soll im Folgenden kurz zusammengefasst werden. Detaillierte Ausführungen sind dem Handbuch zur BS (Hugentobler et al., 2001) oder Veröffentlichungen zur Auswertung einzelner Projekte zu entnehmen. Als Beispiel für die Auswertung von großräumigen GPS-Netzen sei hier auf die Beschreibung der Auswertung der in Abschnitt 5.1 genannten SCAR GPS-Kampagnen verwiesen (Mayer et al., 2000b), an welche die im Rahmen der vorliegenden Arbeit angewendete Auswertestrategie angelehnt ist.

Das Verfahren der GPS-Auswertung mit der BS kann grob in eine Vorverarbeitung und die Schätzung der relevanten unbekannt Parameter eingeteilt werden. Bei der Vorverarbeitung werden zunächst die im empfängerunabhängigen RINEX-Format (Receiver Independent Exchange Format) gespeicherten GPS-Beobachtungen in ein von der BS verarbeitbares Format konvertiert. Nach der Elimination der Empfängeruhrfehler auf der Grundlage der originären Codebeobachtungen unter Berücksichtigung präziser Bahninformationen und ausreichend genauer Näherungskordinaten der GPS-Stationen werden aus den Trägerphasenbeobachtungen Ionosphärenmodelle zur späteren Verwendung geschätzt. Im nächsten Vorverarbeitungsschritt werden aus diesen originären Trägerphasenbeobachtungen der Einzelstationen Differenzen gebildet und somit Basislinien definiert. Diese Einfachdifferenzen werden dann auf das Vorhandensein von Phasensprüngen untersucht, welche ggf. im Datenmaterial eliminiert werden.

Die Weiterverarbeitung und Schätzung relevanter Parameter auf der Basis von Doppeldifferenzen geschieht dann im Modul GPSEST der BS, in dem aus den Einfachdifferenzen Doppeldifferenzen gebildet werden. Sie kann in drei grundlegende Schritte unterteilt werden.

Der erste Durchlauf auf der Basis der  $L_5$ -Linearkombination der GPS-Beobachtungen aus (3.7) dient der Lösung der ganzzahligen  $L_5$ -Mehrdeutigkeitsparameter, wobei der Einfluss der Ionosphäre durch die im Rahmen der Vorverarbeitung aus den Daten bestimmten lokalen Ionosphärenmodelle berücksichtigt wird. Diese gelösten Mehrdeutigkeitsparameter werden dann im zweiten GPSEST-Durchlauf als bekannte Größen eingeführt, wodurch die Bestimmung der  $L_1$ - bzw.  $L_2$ -Mehrdeutigkeitsparameter erleichtert wird. Sowohl dieser GPSEST-Durchlauf als auch der folgende Durchlauf werden auf der Basis der  $L_3$ -Linearkombination der GPS-Beobachtungen (3.8) bzw. (3.9) durchgeführt, um den ionosphärischen Einfluss in diesen Auswerteschritten zu eliminieren. Beim letzten Schritt der GPS-Auswertung, der Schätzung der unbekannt Parameter wie z.B. der Stationskoordinaten, werden die im vorherigen Schritt gelösten  $L_1$ - bzw.  $L_2$ -Mehrdeutigkeitsparameter wiederum als bekannte Größen eingeführt. Somit kann die Schätzung der unbekannt Parameter getrennt und damit unabhängig von der Lösung der Mehrdeutigkeitsparameter erfolgen. In diesem Schritt können dann auch die für die Residuenanalyse benötigten Daten (Beobachtungsvektor, Designmatrix, Kovarianzmatrizen,...) zur Weiterverarbeitung extrahiert werden. Bei der Modellierung der Troposphäre muss zwischen den beiden Datensätzen JOHL und ANT unterschieden werden. Bietet sich bei der kurzen Basislinie aus JOHL noch das Standardverfahren, die Verwendung des Saastamoinen-Troposphärenmodells ohne stationsspezifische Troposphärenparameter, an, so muss bei den großräumigen Daten aus ANT eine verfeinerte Troposphärenmodellierung angewendet werden. Dabei wird gemäß der Empfehlung in Hugentobler et al. (2001) der gesamte troposphärische Einfluss ausschließlich durch die Schätzung stationsspezifischer Troposphärenparameter auf beiden Stationen der prozessierten Basislinie mit Hilfe des trockenen Anteils der Mapping-Funktion nach Niell (1996) modelliert. Untersuchungen von Mayer et al. (2000) legen dabei nahe, für jeweils 2 Stunden einen solchen stationsspezifischen Troposphärenparameter je Beobachtungsstation zu schätzen, woraus sich bei den prozessierten 24h-Beobachtungen einer Basislinie 24 stationsspezifische Troposphärenparameter pro Tag ergeben.

Für das stochastische Modell wird in dieser Phase der GPS-Auswertung mit der BS zunächst das einfache Standardmodell I der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen aus (3.20) verwendet. Danach werden die Residuen mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens analysiert. Für die weiteren GPSEST-Durchläufe mit ansonsten unveränderten Einstellparametern werden dann die jeweils verbesserten Kovarianzmatrizen II und III aus (3.20) bzw. die daraus ableitbaren Kovarianzmatrizen der Doppeldifferenzen in die Auswertung eingeführt. Um einen Vergleich mit anderen Konzepten zur Modellierung der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen zu ermöglichen, wird alternativ die in der BS vorhandene Option der Gewichtung der originären GPS-Trägerphasenbeobachtungen in Abhängigkeit von der Zenitdistanz  $z$  bzw. der Elevation  $e$  des betrachteten Satelliten angewendet. Die dabei verwendete Gewichtsfunktion

$$w(z) = \cos^2(z) = \sin^2(e) \quad (5.1)$$

bzw. die daraus ableitbare Varianzfunktion (3.24) wurde empirisch am Astronomischen Institut der Universität Bern ermittelt und korrespondiert mit der in (3.3) dargestellten Abbildungsfunktion des troposphärischen Einflusses, was den Schluss nahe legt, dass ein großer Teil der Varianzerhöhung von GPS-Beobachtungen in niedrigen Elevationen dem Einfluss der Troposphäre zuzuordnen ist. Im weiteren Verlauf der Untersuchungen werden dementsprechend die Ergebnisse der GPS-Auswertung unter Berücksichtigung verschiedener Varianten der Modellierung der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen verglichen:

- (1) Herkömmliche Kovarianzmatrix mit skalierten Einheitsmatrix
- (2) Berücksichtigung der durch das Verfahren zur Residuenanalyse bestimmten individuellen Varianzfunktionen
- (3) Berücksichtigung der für alle GPS-Beobachtungen festen Gewichts- bzw. daraus ableitbaren Varianzfunktion der Berner GPS-Software

Somit kann festgestellt werden, dass für die Auswertung der vorliegenden Daten ein den besonderen Anforderungen angemessenes Standard-Auswerteverfahren verwendet wird. Verbesserte Auswertemethoden bzw. Variationen bei den gewählten Einstellungen z.B. bezüglich der Troposphäre beeinflussen die Funktionalität des darauf aufbauenden Verfahrens zur Residuenanalyse nur unwesentlich bzw. erfordern primär Anpassungen im Bereich der Schnittstellenformierung zwischen beiden Programmen. Es ist daher möglich und auch anzustreben, in weiterführenden Untersuchungen das entwickelte Verfahren zu überprüfen und dabei Eingangsdaten in die Analyse einzuführen, die aus unterschiedlichen Beobachtungskonfigurationen stammen bzw. mit unterschiedlichen Strategien ausgewertet wurden.

### 5.3 Ergebnisse der Varianzhomogenisierung

Im Folgenden werden die in Abschnitt 5.1 vorgestellten Daten auf das entwickelte Verfahren zur Schätzung der Varianzfunktion der GPS-Trägerphasenbeobachtungen angewendet. Im Rahmen der Entwicklung des Verfahrens dienten die Ergebnisse der verschiedenen Verfahrensschritte u.a. zur Auswahl geeigneter Methoden und Auswerteparameter (z.B. Elevations- oder Regressionsfunktion). Daher werden im folgenden Abschnitt zunächst einzelne Schritte des Schätzverfahrens analysiert und relevante Aspekte für die Qualität der Schätzung der Varianzfunktion diskutiert. Zudem werden die Ergebnisse der Homoskedastizitätstests dargestellt und verglichen sowie die Eignung der verschiedenen Tests beurteilt. Zur Überprüfung der Auswirkung der in die Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen integrierten Varianzfunktionen auf die Ergebnisse der GPS-Auswertung werden danach u.a. die geschätzten Koordinaten und deren Genauigkeiten analysiert.

Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, dass die Beurteilung bzw. Auswahl der verschiedenen konkurrierenden Methoden im Rahmen der Entwicklung des Analyseverfahrens ausschließlich auf den Daten jeweils dreier Beobachtungstage der Kampagnen ANT und JOHL beruht. Im Gegensatz dazu wird zur Beurteilung und Analyse der Ergebnisse des Analyseverfahrens jedoch das gesamte Datenmaterial herangezogen. Somit ist die Entwicklung des Analyseverfahrens weitgehend unabhängig von der anschließenden Analyse und Beurteilung der Ergebnisse. Neben Gesamtdarstellungen der Daten aller Beobachtungstage beziehen sich die Darstellungen der Detailanalysen aufgrund des umfangreichen Datenmaterials primär auf einzelne repräsentative Beobachtungstage bzw. Basislinien. Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse und der daraus gezogenen Schlussfolgerungen zu gewährleisten, wurden daher aus der Kampagne JOHL die Daten vom 8.12.2000 (Bezeichnung der Basislinie: H1JO08) und aus der Antarktis-Kampagne ANT die Daten der 375km-Basislinie zwischen Vernadsky und Jubany-Dallmann am 30.1.2002 (Bezeichnung der Basislinie: VEOH30) ausgewählt.

### 5.3.1 Bestimmung der Varianzfunktion

Im Rahmen des Analyseverfahrens zur Verbesserung des stochastischen Modells der GPS-Beobachtungen werden zunächst für alle Doppeldifferenzreihen individuelle Varianzfunktionen geschätzt (vgl. Abschnitt 4.2.3). Die Qualität der Schätzung mit Hilfe einer linearen Regression hängt dabei u.a. von der Wahl der Elevations- bzw. der Regressionsfunktion ab. Durch die Wahl ungeeigneter (z.B. des Minimums der Satellitenelevationen, vgl. Abschnitt 4.1.2) oder schlecht auf das Datenmaterial angepasster Regressionsfunktionen (vgl. Abschnitt 4.2.3) kann die Schätzung der Varianzfunktion allerdings verfälscht werden und somit unzuverlässige Ergebnisse liefern. Vor der Weiterverarbeitung dieser geschätzten Varianzfunktionen in der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen ist es daher insbesondere bei der Entwicklung des hier vorgestellten Verfahrens unerlässlich, Maße zur Beurteilung der Anpassungsgüte der Regressionsfunktion an die Daten zur Verfügung zu stellen. In Abschnitt 4.2.3 wurde dazu das multiple Bestimmtheitsmaß  $B$  vorgestellt. Es dient einerseits zur Kontrolle bzw. Analyse der Regressionsergebnisse, andererseits jedoch auch als Entscheidungshilfe für alternative Methoden im Rahmen der Entwicklung des Regressionsverfahrens. In den folgenden Abbildungen 5.2 sind daher exemplarisch die Bestimmtheitsmaße jeweils eines Beobachtungstages für die Basislinien H1JO und VEOH in Abhängigkeit von der Anzahl der Beobachtungen unter Berücksichtigung einer skalierten Einheitsmatrix als Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen (Modell I in (3.20)) dargestellt. Zur weiterführenden Analyse sind den Graphiken zudem die Ergebnisse der Homoskedastizitätstests (4.11) zu entnehmen, auf die im Detail jedoch erst in Abschnitt 5.3.2 eingegangen wird.

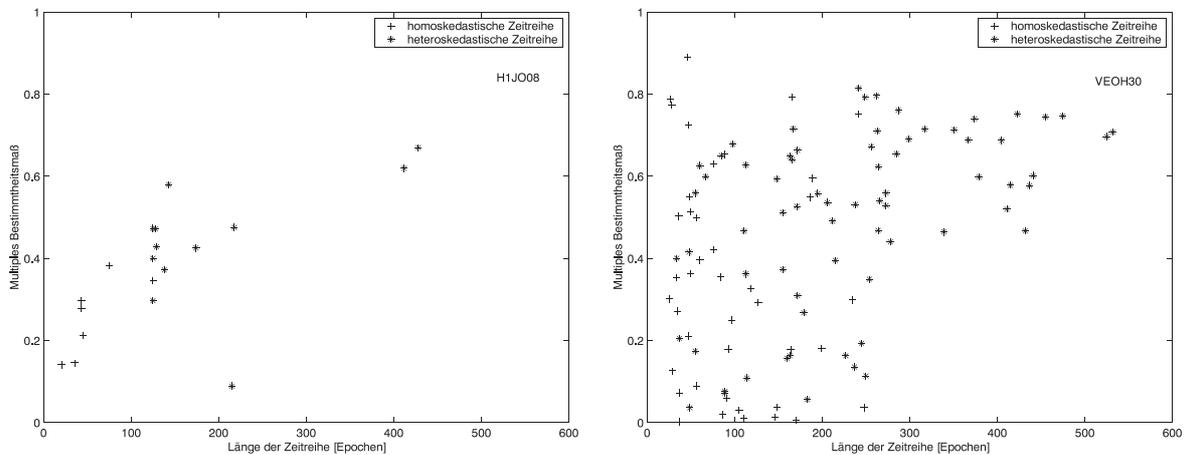


Abb. 5.2: Multiples Bestimmtheitsmaß der Regression der Doppeldifferenzen jeweils einer Basislinie bzw. Beobachtungssession (links: H1JO08, rechts: VEOH30) in Abhängigkeit von der jeweiligen Doppeldifferenzzeitreihe (Datenrate: 30s) sowie die Ergebnisse des Homoskedastizitätstests (4.11). Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen: Modell I aus (3.20)

Betrachtet man zunächst den Wertebereich, den das Bestimmtheitsmaß in den Abbildungen 5.2 annimmt, so fällt die große Schwankungsbreite zwischen 0.8 und sehr kleinen Werten nahe null auf. Ebenfalls wird die starke Abhängigkeit des Bestimmtheitsmaßes von der Länge der betrachteten Zeitreihe deutlich. So sind die Werte für  $B$  bei Zeitreihen mit mehr als 300 Beobachtungen bzw. Epochen grundsätzlich größer als 0.4, während  $B$  bei kürzeren Zeitreihen über den gesamten Wertebereich streut. Analysiert man die Zeitreihen mit sehr kleinen Werten von  $B$  genauer, so bestätigen die Ergebnisse der durchgeführten Homoskedastizitätstests, dass die Varianz dieser Daten über den Verlauf der Zeitreihe weitgehend homogen ist („+“ in den Abbildungen 5.2). Nahezu homoskedastische Zeitreihen ohne Trend lassen sich jedoch primär mit Hilfe eines Rauschanteils und nur zu einem geringen Anteil funktional modellieren. Die Anpassungsgüte der glatten Regressionsfunktion an den dominanten Rauschanteil ist aber naturgemäß sehr gering. Daher ist bei solchen Zeitreihen in Kombination mit dem gewählten Regressionsansatz eine eher schlechte Modellierung der Variation der Daten und damit sind sehr kleine Werte für  $B$  zu erwarten (vgl. die Diskussion in Abschnitt 4.2.3).

Die in Abbildung 5.3 dargestellten Werte für das multiple Bestimmtheitsmaß unter Berücksichtigung geeigneter, mit Hilfe des Verfahrens zur Residuenanalyse bestimmter Varianzfunktionen unterstreichen diesen Sachverhalt. Es wird deutlich, dass abgesehen von einer kurzen homoskedastischen Zeitreihe fast ausschließlich sehr kleine Werte für das multiple Bestimmtheitsmaß auftreten, obwohl nahezu alle Zeitreihen eine homoskedastische Struktur aufweisen. Der heteroskedastische Anteil mit weniger als 10% aller Zeitreihen deutet auf Zeitreihen hin, für die mit Hilfe des Regressionsverfahrens keine geeignete Varianzfunktion für die Besetzung der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen gefunden werden konnte.

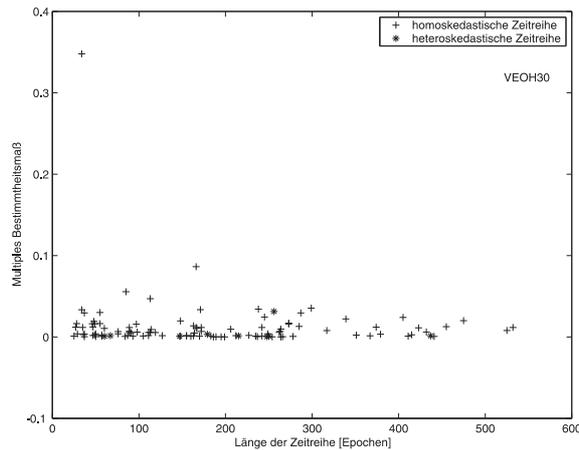


Abb. 5.3: Multiples Bestimmtheitsmaß der Regression der Doppeldifferenzen der Basislinie bzw. Beobachtungssession VEOH30 in Abhängigkeit von der jeweiligen Doppeldifferenzzeitreihe (Datenrate: 30s) sowie die Ergebnisse des Homoskedastizitätstests (4.11). Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen: Modell II aus (3.20)

Kleine Bestimmtheitsmaße sind somit entweder auf eine schlechte Anpassung der Regressionsfunktion an heteroskedastische Zeitreihen (10% aller Zeitreihen in den Abbildungen 5.2 und 5.3) oder auf eine schlechte Anpassung an homoskedastische Zeitreihen (90% in Abbildung 5.3) ohne funktionalen Zusammenhang bzw. mit dominantem Rauschanteil zurückzuführen. Eine verbesserte Anpassung der Regressionsfunktion an ohnehin schon nahezu homoskedastische Zeitreihen ist jedoch nicht erforderlich.

Vergleicht man sowohl die Bestimmtheitsmaße aller Beobachtungstage einer Basislinie als auch die Ergebnisse der verschiedenen Basislinien untereinander, so bietet der arithmetische Mittelwert aller Doppeldifferenzen einer Basislinie jeweils eines Beobachtungstages die Möglichkeit, die heterogene Verteilung der Bestimmtheitsmaße innerhalb einer Beobachtungssession zusammenzufassen. Die Mittelwerte bewegen sich dabei, wie in Abbildung 5.4 dargestellt, in Abhängigkeit von der Basislinie zwischen 0.3 und 0.6. Betrachtet man die Variation der Bestimmtheitsmaße in Abhängigkeit von den Beobachtungstagen sowohl bei den drei Basislinien der ANT-Kampagne als auch bei der Basislinie HIJO so können nahezu konstante Werte mit i.d.R. geringen Abweichungen festgestellt werden. Größere Abweichungen treten allenfalls bei den Basislinien der ANT-Kampagne am 5.2.2002 (ANT(5)) auf. Sie können u.a. durch starke atmosphärische Effekte erklärt werden, die zu kurzfristigen Störungen in den Daten führen. Hinweise darauf liefert Mayer (2004), der bei der Untersuchung der Daten aus dem antarktischen Bereich im Hinblick auf atmosphärische Einflüsse eine deutlich erhöhte ionosphärische Aktivität insbesondere am fraglichen Beobachtungstag feststellt. Zudem zeigt die Analyse der Signal-Rausch-Verhältnisse Störungen in den Daten der Station Vernadsky (VER) am 24.1.2002, die sich insbesondere auf die in Abschnitt 5.3.3 dargestellten Ausgleichsergebnisse (Stationskoordinaten und deren Genauigkeit) auswirken. Solche Störungen im Datenmaterial können i.d.R. nicht vollständig im Rahmen der GPS-Auswertung berücksichtigt werden. Sie verbleiben in den Residuen nach der GPS-Auswertung und erschweren die Anpassung der Regressionsfunktion an die Daten. Weitere Inhomogenitäten, insbesondere in den Daten der JOHL-Kampagne in Abbildung 5.4, können wegen fehlender atmosphärischer Informationen nicht physikalisch erklärt werden.

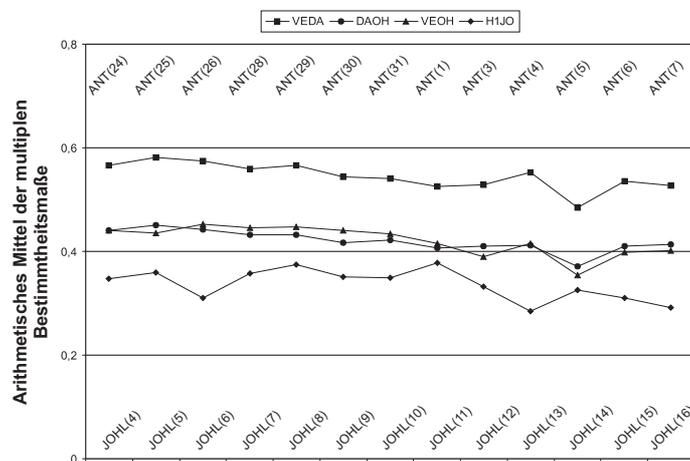


Abb. 5.4: Arithmetische Mittelwerte der Bestimmtheitsmaße der Basislinien bzw. Beobachtungstage

Zusätzlich zur Homogenität der mittleren Bestimmtheitsmaße fallen in Abbildung 5.4 besonders die deutlichen Unterschiede im Niveau der verschiedenen Basislinien auf. Aus den Daten der Basislinie H1JO mit einer gesamten Beobachtungsdauer von 4h pro Tag resultieren im Vergleich zu den 24h-Daten aus dem antarktischen Bereich (ANT) meist kurze Zeitreihen (vgl. auch Abbildung 5.2). Die Schätzung der Varianzfunktion dieser Daten gelingt daher aufgrund der zuvor diskutierten Abhängigkeit der Anpassungsgüte und damit des Bestimmtheitsmaßes von der Datenmenge weniger gut als bei den 24h-Beobachtungen der Basislinien der ANT-Kampagne. Die Unterschiede zwischen den drei Basislinien aus dem antarktischen Bereich lassen sich demgegenüber mit einer generell besseren Qualität der Daten der Basislinie VEDA gegenüber den Daten der Basislinien DAOH bzw. VEOH erklären, auf die auch im weiteren Verlauf der Diskussion bei Bedarf hingewiesen wird.

Neben der Kontrolle bzw. Analyse der Regressionsergebnisse kann das multiple Bestimmtheitsmaß  $B$ , wie bereits erwähnt, auch als ein zusätzliches Entscheidungskriterium bei der Auswahl der angewendeten Methoden dienen. Beispielfhaft soll dies an einigen Fragestellungen bei Entwicklung des Analyseverfahrens erläutert werden.

Die Schätzung der Varianzfunktionen beruht auf der Regression symmetrisch verteilter Daten. Die zugrunde liegenden Daten weisen dagegen keine solche Verteilung auf. Daher wurden in Abschnitt 4.2.3 verschiedene Transformationen zur Erzeugung symmetrisch verteilter Daten vorgestellt und aufgrund der Analyse der Verteilung der transformierten Daten die Box-Cox-Transformation (4.21) ausgewählt. Mit Hilfe des multiplen Bestimmtheitsmaßes steht nun zusätzlich noch ein weiteres Kriterium zur Auswahl einer geeigneten Transformation zur Verfügung. Vergleicht man die arithmetischen Mittel des multiplen Bestimmtheitsmaßes aller Doppeldifferenzen einer Basislinie, so ergeben sich bei Verwendung der Box-Cox-Transformation Werte für  $B$ , die bis zu 10% größer sind als bei Verwendung der Alternative, der Logarithmus-Transformation (4.16). Beispielfhaft seien hierzu die Ergebnisse der Basislinie VEOH30 genannt mit Werten für das mittlere Bestimmtheitsmaß von 0.454 auf der Grundlage der Box-Cox-Transformation im Vergleich zu 0.407 auf der Grundlage der Logarithmus-Transformation.

Ein weiterer wichtiger Parameter bei der Entwicklung des Verfahrens zur Varianzschätzung ist die Elevationsfunktion des Satellitenpaares der untersuchten Doppeldifferenz (vgl. Abschnitt 4.1.2). Unter den verschiedenen alternativen Elevationsfunktionen können dabei geeignete Funktionen bestimmt bzw. ungeeignete aufgrund des Bestimmtheitsmaßes aussortiert werden. So erwies sich die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Elevationsfunktion aus (4.8) z.B. bei der Beobachtungssession VEOH30 mit einem mittleren Bestimmtheitsmaß von 0.454 als zuverlässigste Elevationsfunktion. Die nächstbeste untersuchte Elevationsfunktion

$$ele_{\text{alt}} = \frac{1}{\sin(e_{11}) \cdot \sin(e_{21})} + \frac{1}{\sin(e_{12}) \cdot \sin(e_{22})} + \frac{1}{\sin(e_{11}) \cdot \sin(e_{12})} + \frac{1}{\sin(e_{21}) \cdot \sin(e_{22})} \quad (5.2)$$

mit den Elevationen  $e_{ij}$  der von den Stationen  $i$  beobachteten Satelliten  $j$  weist demgegenüber ein mittleres Bestimmtheitsmaß von 0.439 auf. Aufgrund dieses geringen Unterschieds müssen zur Auswahl der Elevationsfunktion weitere Kriterien, wie z.B. der Erfolg der Varianzhomogenisierung, herangezogen werden (vgl. Abschnitt 5.3.2).

Die Beurteilung der Anpassungsgüte erweist sich somit als nützliches Instrument zum Vergleich verschiedener Auswertemethoden bzw. -parameter. Bei der späteren Anwendung auf Daten zur endgültigen Auswertung der GPS-Beobachtungen wird dieses Kriterium zwar berechnet und liefert bei Bedarf wichtige Informationen zur Anpassungsgüte, es wird jedoch keine alternative Berechnung in Abhängigkeit der Werte von  $B$  durchgeführt (z.B. Nichtberücksichtigung von Varianzfunktionen aufgrund eines niedrigen Bestimmtheitsmaßes).

Nach der Diskussion des entwickelten Schätzverfahrens sollen nun die so geschätzten Varianzfunktionen dargestellt und im Vergleich zu den in Abschnitt 3.3.1 vorgestellten Varianzfunktionen diskutiert werden. Der herkömmliche, in der Vergangenheit meist verfolgte Ansatz ist die Modellierung der Varianzfunktion der GPS-Beobachtungen mit Hilfe einer für alle Daten gültigen Varianzfunktion mit festen Parametern. Es zeigt sich allerdings, dass solch einfache Modelle die Realität nur unzureichend repräsentieren, weshalb dieses Konzept nicht weiterverfolgt wurde.

Vergleicht man die geschätzten Parameter der Varianzfunktion (4.23), so sind zwar recht homogene Parameter einer Doppeldifferenz über die verschiedenen Beobachtungstage festzustellen, jedoch treten erhebliche Abweichungen zwischen den Parametern unterschiedlicher Satellitenpaare auf. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts sind in Abbildung 5.5 exemplarisch die geschätzten Varianzfunktionen zweier Satellitenpaare der Basislinie H1JO über alle Beobachtungstage im tatsächlich beobachteten Elevationsintervall dargestellt.

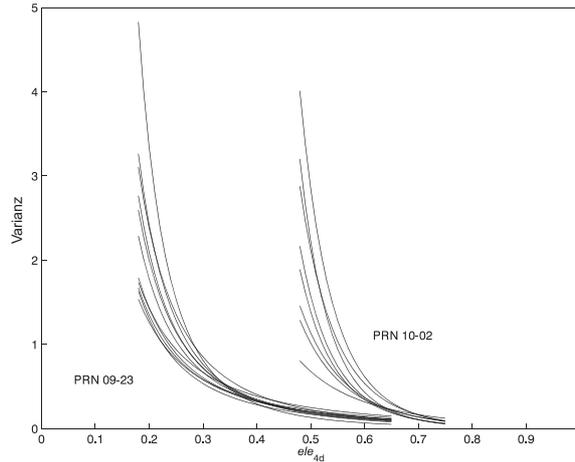


Abb. 5.5: Geschätzte Varianzfunktionen zweier Doppeldifferenzen (PRN 09-23 und PRN 10-02) an den verschiedenen Beobachtungstagen (Basislinie: HIJO)

Die Varianzfunktionen eines Satellitenpaares an verschiedenen Beobachtungstagen zeigen ein vergleichsweise homogenes Verhalten. Die auftretende recht geringe Streuung kann dabei u.a. durch Variationen der Atmosphäre an den unterschiedlichen Beobachtungstagen erklärt werden, wobei keine Korrelation mit bestimmten Atmosphärenparametern festgestellt werden konnte. Eindeutige Trends, wie z.B. größer werdende Varianzfunktionen in Abhängigkeit von den Beobachtungstagen, sind ebenfalls nicht feststellbar. Es treten jedoch erhebliche Differenzen zwischen den verschiedenen Satellitenpaaren auf, wodurch die Festlegung einer gemeinsamen Varianzfunktion für verschiedene Satellitenpaare nicht sinnvoll erscheint. Neben der Abhängigkeit der Varianzfunktion von der Elevation der beteiligten Satelliten (hier:  $ele_{4d}$  aus (4.8)) liegt somit eine individuelle Varianzstruktur der verschiedenen Satellitenpaare vor. So kann nicht davon ausgegangen werden, dass Beobachtungen in hohen Elevationen eine homogene Varianzstruktur aufweisen. Vielmehr ist jeder Zeitreihe, auch wenn ausschließlich Beobachtungen in höheren Elevationen vorliegen, eine individuelle Varianzfunktion mit steigender Varianz und individuellem Varianzniveau zuzuordnen. Vergleicht man diese Erkenntnisse mit den aktuell verwendeten Varianzfunktionen aus Abschnitt 3.3.1, so ist festzustellen, dass die Varianz bei diesen Funktionen primär in sehr niedrigen Elevationen ab ca. 20-30°, dann allerdings sehr stark, ansteigt (vgl. Abbildung 3.9). Berücksichtigt man diese Varianzfunktionen im Rahmen der GPS-Auswertung, so werden Beobachtungen in höheren Elevationen mit nahezu konstanter Varianz und Beobachtungen in sehr niedrigen Elevationen mit solch hoher Varianz versehen, dass ihr Einfluss bei der GPS-Auswertung verloren geht. Das Konzept individueller Varianzfunktionen ermöglicht nun neben einer den Daten angemessenen Varianz in niedrigen Elevationen zusätzlich eine steigende Varianz in hohen Elevationen. Zu beachten ist dabei, dass dieses Konzept bzw. die verwendete Elevations- bzw. Regressionsfunktion die in der BS wählbare Varianzfunktion (3.24) in ähnlicher Form mit einschließt. Schätzungen für die Parameter der Varianzfunktion von  $\hat{b}_1 = 1$ ,  $\hat{b}_2 = -2$  und  $m=0$  führen dementsprechend zu einer mit (3.24) vergleichbaren Varianzfunktion auf Doppeldifferenzbasis:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\left( \cos \sqrt{\frac{1}{4}} \left( z_{11}^2(i) + z_{11}^2(i) + z_{11}^2(i) + z_{11}^2(i) \right) \right)^2}. \quad (5.3)$$

Betrachtet man die tatsächlich geschätzten Werte für die Parameter  $b_1$ ,  $b_2$  und  $m$ , so ergeben sich die arithmetischen Mittelwerte aller Beobachtungstage im Falle des Satellitenpaares PRN 09-23, dessen Varianzfunktionen aus Abbildung 5.5 vergleichsweise gut mit den in Abbildung 3.9 dargestellten Varianzfunktionen korrespondieren, zu  $\hat{b}_1 = 0.04$ ,  $\hat{b}_2 = -2.4$  und  $m=0.008$ . Dies bestätigt einerseits, dass  $m$ , wie in Abschnitt 4.2.3 angemerkt, sehr kleine positive Werte annimmt, sowie andererseits die Gültigkeit der annähernd quadratischen, auf der Kosinusfunktion basierenden Varianzfunktion. Das individuelle Varianzniveau wird dabei primär durch den Parameter  $b_1$  festgelegt.

Fasst man die aus den Ergebnissen der Varianzschätzung gewonnenen Erkenntnisse zusammen, so kann festgestellt werden, dass eine individuelle Schätzung der Varianzfunktionen der verschiedenen Doppeldifferenzen unerlässlich ist. Anhand der dargestellten Beispiele wird deutlich, dass eine für alle Daten gleichermaßen gültige Varianzfunktion mit festen Parametern nur unzureichend die Realität widerspiegelt. Besonders in niedrigen Elevationen weisen feste Funktionen Schwächen auf, die durch die Anpassung an die Daten zutreffender modelliert werden können. Zudem sind bisher

verwendete Modelle, die Beobachtungen in hohen Elevationen grundsätzlich mit konstanter Varianz modellieren, in Frage zu stellen, da die Untersuchungen zeigen, dass auch in hohen Elevationen deutliche Unterschiede im Varianzniveau der Doppeldifferenzen vorherrschen. Vielmehr muss es das Ziel sein, Funktionen zu bestimmen, die die Möglichkeit eröffnen, das Varianzniveau jeder Zeitreihe individuell festzulegen. Damit können GPS-Beobachtungen flexibel, entsprechend der tatsächlich vorhandenen und im Einzelfall evtl. deutlich erhöhten Varianz, gewichtet werden, auch wenn die betrachtete Zeitreihe bzw. Beobachtung einen Elevationsbereich abdeckt, dem nach herkömmlicher Betrachtung konstante Varianz zuzuweisen ist. Diese Möglichkeiten bieten allerdings nur individuell an die Daten angepasste Varianzfunktionen.

Des Weiteren konnte die Eignung des multiplen Bestimmtheitsmaßes als Kriterium zur Beurteilung alternativer Methoden im Rahmen der Entwicklung des Regressionsverfahrens gezeigt werden. Zusätzlich liefert es wichtige Informationen zur Analyse und Beurteilung der Ergebnisse der Varianzschätzung. So konnten z.B. Zusammenhänge zwischen der Anpassungsgüte der Regression und der vorhandenen Datenmenge verdeutlicht sowie Rückschlüsse auf die Datenqualität der verschiedenen Basislinien bzw. Beobachtungstage gezogen werden.

### 5.3.2 Test auf Homoskedastizität

Zum besseren Verständnis des folgenden Abschnitts sollen zunächst einige Erläuterungen zur Berechnung und Darstellung der Testergebnisse gegeben werden. Die Darstellungen beruhen sowohl auf der Analyse der zu einem bestimmten Niveau  $\alpha$  (im Rahmen dieser Arbeit:  $\alpha=1\%$ ) getroffenen Testentscheidungen als auch auf der Detailanalyse anhand der  $p$ -Werte der Homoskedastizitätstests (vgl. Abschnitt 2.4 bzw. 4.2.2). Die formalen Nullhypothesen der Tests (2.26) bis (2.28)  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  bzw.  $\sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2$  ( $k = \text{Anzahl der Teilstichproben}$ ) führen letztendlich zur Beurteilung der Homoskedastizität der getesteten Zeitreihen. Formal kann aufgrund der durchgeführten Tests jedoch nur festgestellt werden, ob  $H_0$  verworfen werden kann. Für den Fall, dass  $H_0$  nicht verworfen wird, ist die Annahme der Nullhypothese damit statistisch allerdings nicht gesichert. Trotzdem sollen der Einfachheit halber im weiteren Sprachgebrauch das Verwerfen der Nullhypothese als Heteroskedastizität sowie nicht verworfene Nullhypothesen als Homoskedastizität der geprüften Zeitreihe bezeichnet werden.

In den folgenden Darstellungen werden u.a. die Testergebnisse verschiedener Modellierungsstufen der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen miteinander verglichen. Dabei bezeichnet

- **M1** die Berücksichtigung des herkömmlichen Modells I aus (3.20) und somit einer skalierten Einheitsmatrix,
- **M2** die Berücksichtigung des erweiterten Modells II aus (3.20) mit den im Rahmen dieser Arbeit geschätzten Varianzfunktionen (4.23) und
- **BS** die Berücksichtigung des erweiterten Modells II aus (3.20) mit der Varianzfunktion der Berner GPS-Software (5.1).

Analog zum bereits diskutierten Bestimmtheitsmaß können die Ergebnisse der Homoskedastizitätstests als eine Komponente zur Beurteilung und Auswahl verschiedener Methoden des Analyseverfahrens herangezogen werden. Im Rahmen der Entwicklung des Regressionsverfahrens wurde diese Auswahl auf Basis dreier Beobachtungstage getroffen. Die spätere Analyse und Diskussion der Testergebnisse kann dann, wie bereits erwähnt, weitgehend unabhängig davon auf Basis des gesamten Datenmaterials erfolgen.

Zunächst sollen daher einzelne Aspekte der Entwicklung des Regressionsverfahrens analysiert werden. Im vorherigen Abschnitt 5.3.1 wurde u.a. die Auswahl geeigneter Elevationsfunktionen erörtert. Mit Hilfe des dort diskutierten multiplen Bestimmtheitsmaßes ist eine Entscheidung jedoch nur schwer möglich. Nun kann aufgrund der Ergebnisse der Homoskedastizitätstests diese Entscheidungsfindung ergänzt bzw. erleichtert werden. Dazu sind in Abbildung 5.6 beispielhaft die Anteile der homoskedastischen Zeitreihen ( $\rightarrow$  nicht widerlegte Nullhypothese des F-Tests (4.11)) einer Basislinie mit Varianzmodellierung M1 bzw. M2 unter Berücksichtigung der Elevationsfunktion  $ele_{4d}$  aus (4.8) bzw. der sich im Rahmen der Untersuchungen als zweitbeste Varianzfunktion herausgestellten alternativen Elevationsfunktion  $ele_{alt}$  (5.2) dargestellt.

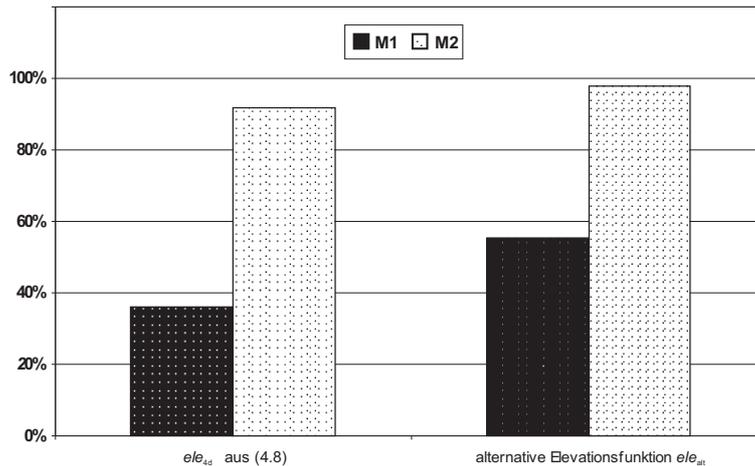


Abb. 5.6: Anteil der homoskedastischen Zeitreihen ( $\rightarrow$  nicht abgelehnte Nullhypothese des F-Tests (4.11)) der Beobachtungssession VEOH30 in Abhängigkeit von der Elevationsfunktion ( $ele_{4d}$  bzw.  $ele_{alt}$ ) und bei unterschiedlicher Varianzmodellierung (M1 bzw. M2)

Der Anteil homoskedastischer Zeitreihen aufgrund der Ergebnisse des F-Tests (4.11) wird deutlich größer, wenn eine erweiterte Varianzmodellierung berücksichtigt wird. Vergleicht man jedoch die Änderungen der Ergebnisse im Detail, so ergibt sich bei der Elevationsfunktion  $ele_{4d}$  (4.8) eine Steigerung um 56% (62 von 111 Zeitreihen), während mit der alternativen Elevationsfunktion  $ele_{alt}$  (5.2) nur eine Steigerung um 43% (48 von 111 Zeitreihen) gelingt. Zudem steigt das hier nicht dargestellte arithmetische Mittel der  $p$ -Werte des F-Tests bei der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Elevationsfunktion deutlich stärker als bei der alternativen Elevationsfunktion.

Ein weiterer, in Abschnitt 4.2.2 bereits diskutierter Aspekt ist die Unterteilung der zu testenden Zeitreihe beim Bartlett-Test. Dabei steht neben der Anzahl der Teilintervalle auch die Lokalisierung der Unterteilungen zur Diskussion. Die Entscheidung zu Gunsten einer lokalen Unterteilung mit drei Intervallen wurde dort u.a. mit der Anzahl der nicht testbaren Zeitreihen begründet. Dies kann durch die Ergebnisse der Homoskedastizitätstests bestätigt werden. In Abbildung 5.7 sind dazu die Testergebnisse des Bartlett-Tests (4.13) einer Beobachtungssession (VEOH30) exemplarisch dargestellt.

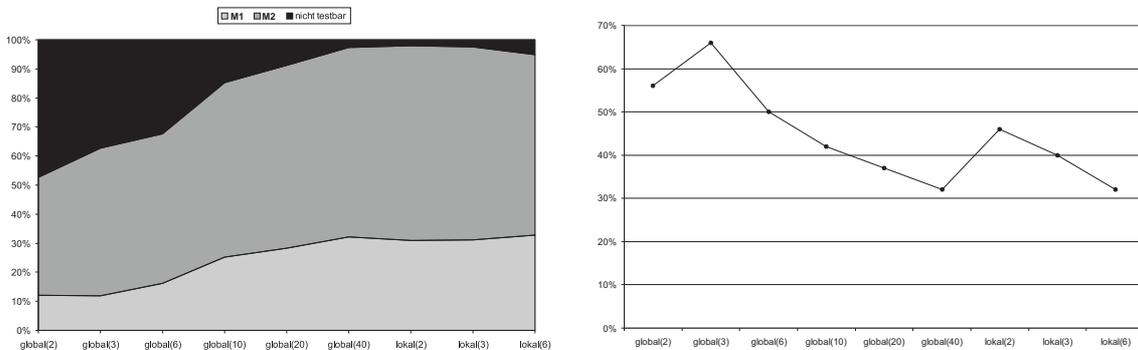


Abb. 5.7a: Anteil der homoskedastischen Zeitreihen unter Berücksichtigung der Varianzmodellierung M1 bzw. M2

b: Differenz zwischen dem Anteil homoskedastischer Zeitreihen unter Berücksichtigung der Varianzmodellierung M1 bzw. M2 ( $\rightarrow M2-M1$ ) (nicht testbare Zeitreihen sind in dieser Darstellung nicht enthalten)

Darstellung in Abhängigkeit von der Intervalleinteilung der Zeitreihe;  
Testverfahren: Bartlett-Test (4.13); Datengrundlage: VEOH30

Neben den bereits in Abbildung 4.10 dargestellten Ergebnissen bezüglich der Anzahl der nicht testbaren Zeitreihen ist aus Abbildung 5.7a der Anteil der homoskedastischen Zeitreihen (Nullhypothese konnte nicht widerlegt werden) in Abhängigkeit der verschiedenen Varianten der Unterteilung des Bartlett-Tests zu entnehmen. Aufgrund von den in dieser Graphik berücksichtigten, nicht testbaren Zeitreihen nimmt die Anzahl der homoskedastischen Zeitreihen bei beiden Varianten der Varianzmodellierung (M1 und M2) mit abnehmender Anzahl nicht testbarer Zeitreihen naturgemäß zu. Die Differenz der homoskedastischen Zeitreihen der beiden Varianten der Varianzmodellierung ohne Berücksichtigung nicht testbarer Zeitreihen in Abbildung 5.7a zeigt zudem deutlich, dass die besten Ergebnisse der Varianz-

homogenisierung mit einer sehr groben globalen Unterteilung in zwei Intervalle erzielt werden können. Diese Unterteilung scheidet aber aufgrund der großen Anzahl nicht testbarer Zeitreihen aus. Mit einer feineren Unterteilung nimmt dieser Homogenisierungserfolg ab und sinkt bei einer Intervallanzahl von 40 (ideal in Hinsicht auf die Anzahl der testbaren Zeitreihen) deutlich unter das Niveau bei einer groben lokalen Unterteilung. Berücksichtigt man die Ergebnisse der Diskussion in Abschnitt 4.2.2, wo die Forderung nach einer möglichst großen Anzahl testbarer Zeitreihen im Vordergrund steht, so kann ausschließlich die dort favorisierte lokale Unterteilung mit der globalen Unterteilung in 40 Intervalle (global(40)) verglichen werden. Bei diesem Vergleich erweist sich die lokale Unterteilung mit drei Intervallen (lokal(3)) den anderen Unterteilungen mit einem deutlich größeren Homogenisierungserfolg von bis zu 15% als deutlich überlegen. Somit kann festgestellt werden, dass die lokale Unterteilung in drei Intervalle beim Bartlett-Test nicht nur im Hinblick auf die in Abschnitt 4.2.2 diskutierten methodischen Aspekte die geeignetste Variante darstellt, sondern auch aufgrund der analysierten Testergebnisse am besten abschneidet.

Neben dem Bartlett-Test wurden in Abschnitt 4.2.2 der F-Test und der  $\beta$ -Test vorgestellt und bzgl. ihrer Eignung für das entwickelte Testverfahren analysiert. Da alle drei Tests voneinander abweichende Fragestellungen behandeln, ist ein Vergleich bzw. die Entscheidung für einen der Tests schwierig. Daher sollen im Folgenden die Ergebnisse aller Tests gleichberechtigt analysiert werden. An den verschiedenen Beobachtungstagen konnte eine sehr gute Übereinstimmung der Testergebnisse der jeweiligen Basislinie festgestellt werden. Aufgrund der vergleichsweise geringen Datenmenge der JOHL-Kampagne (ca. 20 Zeitreihen/Beobachtungssession) treten bei den Ergebnissen der einzelnen Beobachtungssessions deutlich größere Schwankungen auf als bei den Daten der ANT-Kampagne. Da zudem die Ergebnisse einer Basislinie der ANT-Kampagne repräsentativ für die anderen Basislinien sind, werden im Folgenden nur die Daten der Basislinie VEOH dargestellt.

Grundsätzlich kann dabei festgestellt werden, dass die dargestellten Testentscheidungen über die verschiedenen Beobachtungstage vergleichsweise homogen sind. Stärkere Abweichungen an einzelnen Tagen zeigen sich allenfalls in den Daten vom 26.1.2002 (VEOH26) und 5.2.2002 (VEOH05), wobei der 5.2.2002 sich, wie schon erwähnt, durch eine starke ionosphärische Aktivität auszeichnet.

Zur detaillierten Analyse soll zunächst in den Abbildungen 5.8 bis 5.10 ein Überblick über die Testentscheidungen der verschiedenen **Homoskedastizitätstests zum vorgegebenen Niveau  $\alpha=1\%$**  gegeben werden. In den Abbildungen 5.8 sind dazu die Anteile der zu diesem Niveau nicht abgelehnten Nullhypothesen ( $\rightarrow$  homoskedastische Zeitreihen) mit unterschiedlicher Varianzmodellierung (M1, M2 und BS) in Abhängigkeit von den einzelnen Beobachtungssessions dargestellt.

Zunächst fällt das deutlich niedrigere Niveau des Anteils homoskedastischer Zeitreihen im Falle der Berücksichtigung der Varianzmodellierung M1 in Abbildung 5.8a im Vergleich zu den anderen Modellen M2 und BS auf, wobei Homoskedastizität lediglich in maximal 45% aller getesteten Zeitreihen angenommen werden kann. Nach Berücksichtigung von Modell M2 gelingt jedoch eine deutliche Verbesserung (vgl. Abbildung 5.8b). Je nach betrachteter Testvariante weisen damit bis zu 95% aller Zeitreihen eine homogene Varianz auf. Die Berücksichtigung der Varianzfunktion (5.1) in Abbildung 5.8c zeigt ebenfalls eine deutliche Verbesserung des Anteils homoskedastischer Zeitreihen, erreicht aber nicht das Niveau von M2.

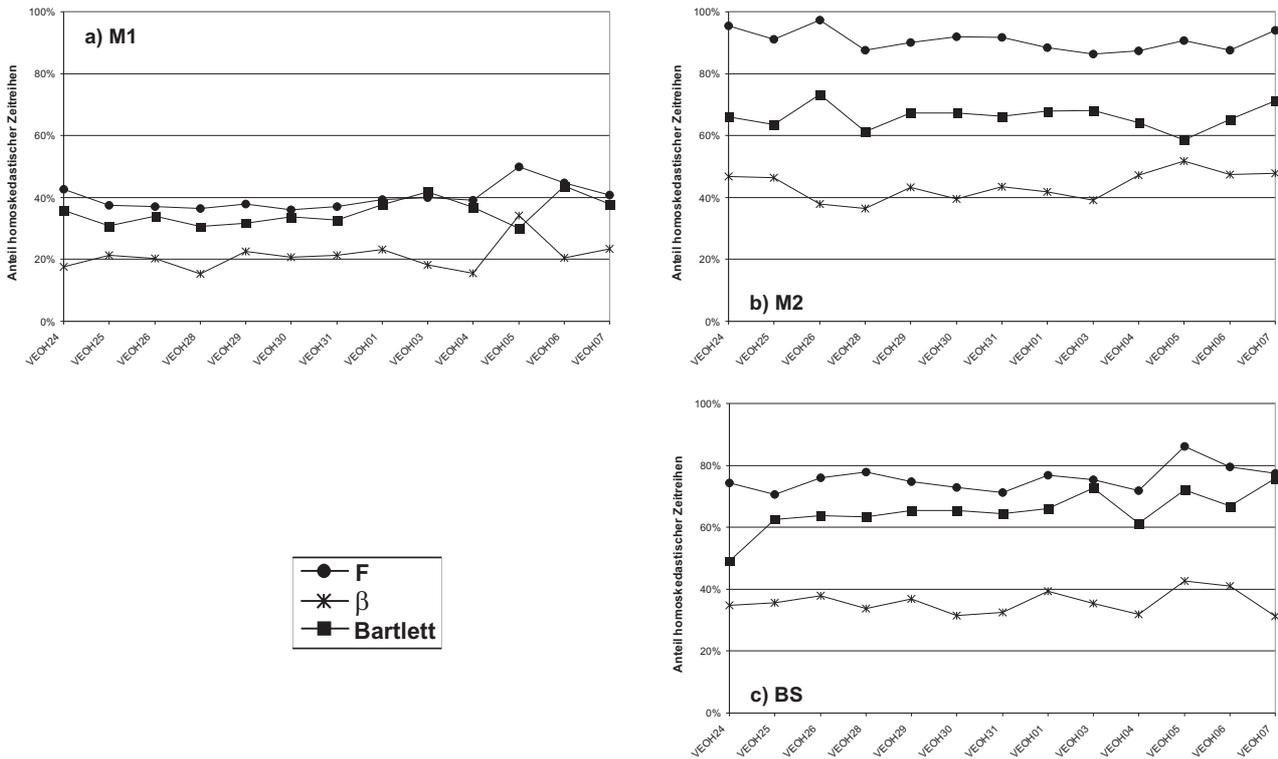


Abb. 5.8: Anteil homoskedastischer Zeitreihen aufgrund des F-Tests aus (4.11), des  $\beta$ -Tests aus (4.12) und des Bartlett-Tests aus (4.13) unter Berücksichtigung der Varianzmodellierungen M1, M2 und BS

Betrachtet man die Testergebnisse im Hinblick auf die Unterschiede der verschiedenen Testverfahren, so fällt die recht gute Übereinstimmung bei herkömmlicher Modellierung der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen in Abbildung 5.8a auf. Bei den anderen Varianten der stochastischen Modellierung sind insbesondere beim  $\beta$ -Test starke Abweichungen von den Ergebnissen des F- und des Bartlett-Tests festzustellen. Zwischen F- und Bartlett-Test sind die Unterschiede unter Berücksichtigung von M1 und BS relativ gering, wobei der Anteil der homoskedastischen Zeitreihen beim F-Test jedoch in nahezu allen Fällen über dem des Bartlett-Test liegt. Es wird somit deutlich, dass ohne erweiterte Varianzmodellierung alle Tests vergleichbare Ergebnisse liefern, was auf vergleichsweise eindeutige Testentscheidungen, bei den untersuchten Zeitreihen überwiegend zugunsten der Heteroskedastizität, schließen lässt. Unter Berücksichtigung einer erweiterten Varianzmodellierung werden die Schwankungen der Varianz innerhalb einer Zeitreihe geringer und der Rauschanteil der Zeitreihe dominiert. Bei solchen weder eindeutig homo- noch heteroskedastischen Zeitreihen liefern die unterschiedlichen Tests daher auch unterschiedliche Testergebnisse. Zur Verdeutlichung des Einflusses der unterschiedlichen Testverfahren sind in Abbildung 5.9 die Ergebnisse aus Abbildung 5.8 nun für die verschiedenen Testverfahren zusammengestellt. Vergleicht man die maximalen Anteile homoskedastischer Zeitreihen der verschiedenen Testvarianten, so scheint der F-Test in Abbildung 5.9a mit bis zu 95% deutlich überlegen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass schon bei herkömmlicher Varianzmodellierung (M1) ca. 40% aller Zeitreihen als homoskedastisch betrachtet werden können. Im Gegensatz dazu steigert sich der Anteil beim  $\beta$ -Test von ca. 20% auf nur 45%. Detaillierte Analysen bzgl. der Differenz der Anzahl homoskedastischer Zeitreihen bei unterschiedlicher Varianzmodellierung – und damit bzgl. des Homogenisierungserfolgs – werden im weiteren Verlauf dieses Abschnitts folgen.

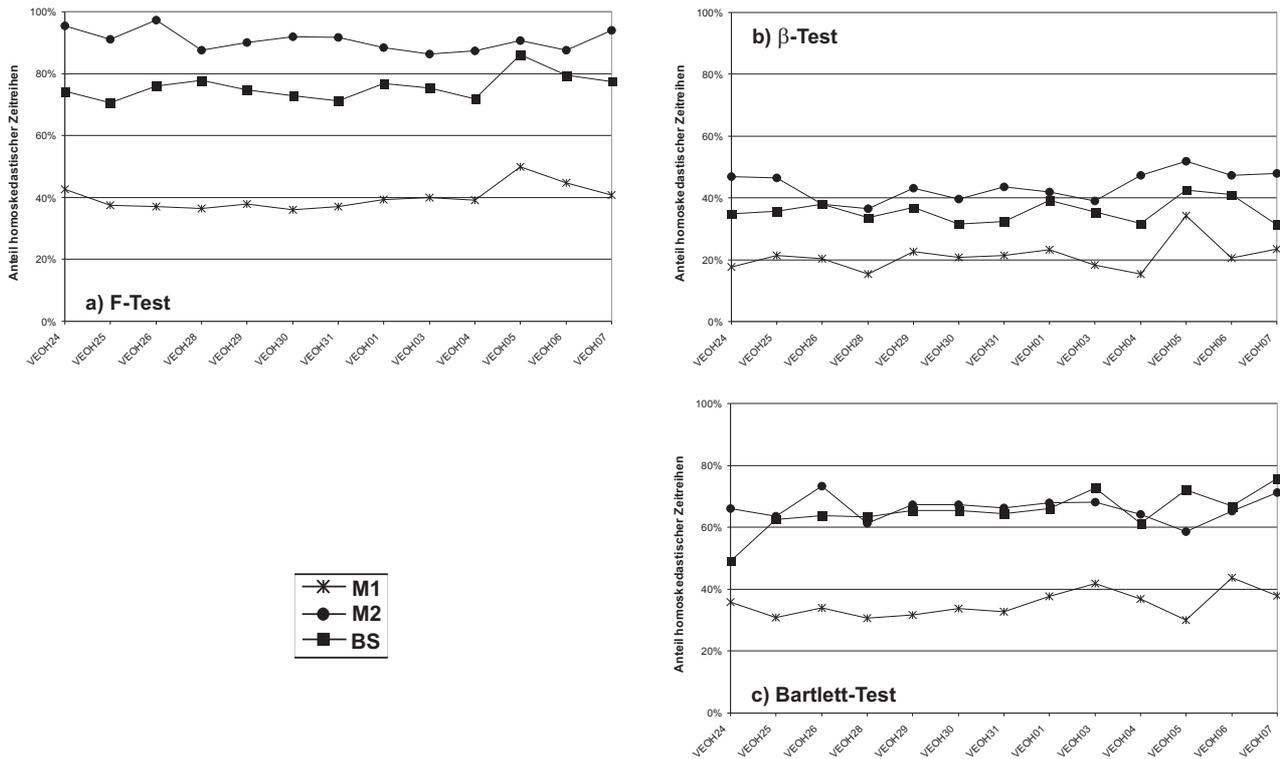


Abb. 5.9: Anteil homoskedastischer Zeitreihen aufgrund des F-Tests aus (4.11), des  $\beta$ -Tests aus (4.12) und des Bartlett-Tests aus (4.13) unter Berücksichtigung der Varianzmodellierungen M1, M2 und BS

Ein weiterer interessanter Aspekt in Abbildung 5.9 sind die vergleichsweise ähnlichen Ergebnisse bei den verschiedenen Varianten der Varianzmodellierung M2 und BS. Abgesehen vom F-Test, wo M2 um 10-20% besser abschneidet als BS, sind die Unterschiede sehr gering. Während beim  $\beta$ -Test i.d.R. noch ein um 5-10% größerer Anteil homoskedastischer Zeitreihen bei M2 gefunden werden kann, schwanken die Ergebnisse des Bartlett-Tests so stark, dass keine eindeutig zu bevorzugende Modellierung gefunden werden kann. Grundsätzlich ist jedoch festzuhalten, dass die herkömmliche Varianzmodellierung deutlich schlechter abschneidet als eine erweiterte Modellierung.

Zur Zusammenfassung der Ergebnisse der Homoskedastizitätstests zum festen Niveau  $\alpha$  sind in Abbildung 5.10 die absoluten Differenzen der Anzahl homoskedastischer Zeitreihen zwischen den verschiedenen Modellierungsalternativen M1, M2 und BS dargestellt. Es wird auch hierbei deutlich, dass die erweiterte Varianzmodellierung grundsätzlich eine größere Anzahl homoskedastischer Zeitreihen zur Folge hat, auch wenn beim  $\beta$ -Test, vor allem durch die generell geringe Anzahl homoskedastischer Zeitreihen, der Homogenisierungserfolg wesentlich geringer ausfällt als beim F- und beim Bartlett-Test. Vergleicht man die Differenzen M2-BS und versucht somit die bestmögliche Varianzmodellierung zu ermitteln, so erweist sich M2 i.d.R. als besser, was an den fast durchweg positiven Werten der dritten Säule in Abbildung 5.10 deutlich wird. Ausschließlich beim Bartlett-Test sind an den verschiedenen Beobachtungstagen stark differierende Werte für die Differenz M2-BS zu finden. Diese Werte werden teilweise sogar negativ und weisen somit auf eine bessere Modellierung der Varianzstruktur mit Hilfe des Modells BS hin. Insbesondere bei den starken ionosphärischen Störungen beim Datensatz VEOH05 gelingt nur eine vergleichsweise schlechte Schätzung der Varianzfunktion bzw. repräsentiert die individuell geschätzte Varianzfunktion das tatsächliche Verhalten der Daten weniger gut als eine fest vorgegebene, von äußeren Einflüssen freie Varianzfunktion.

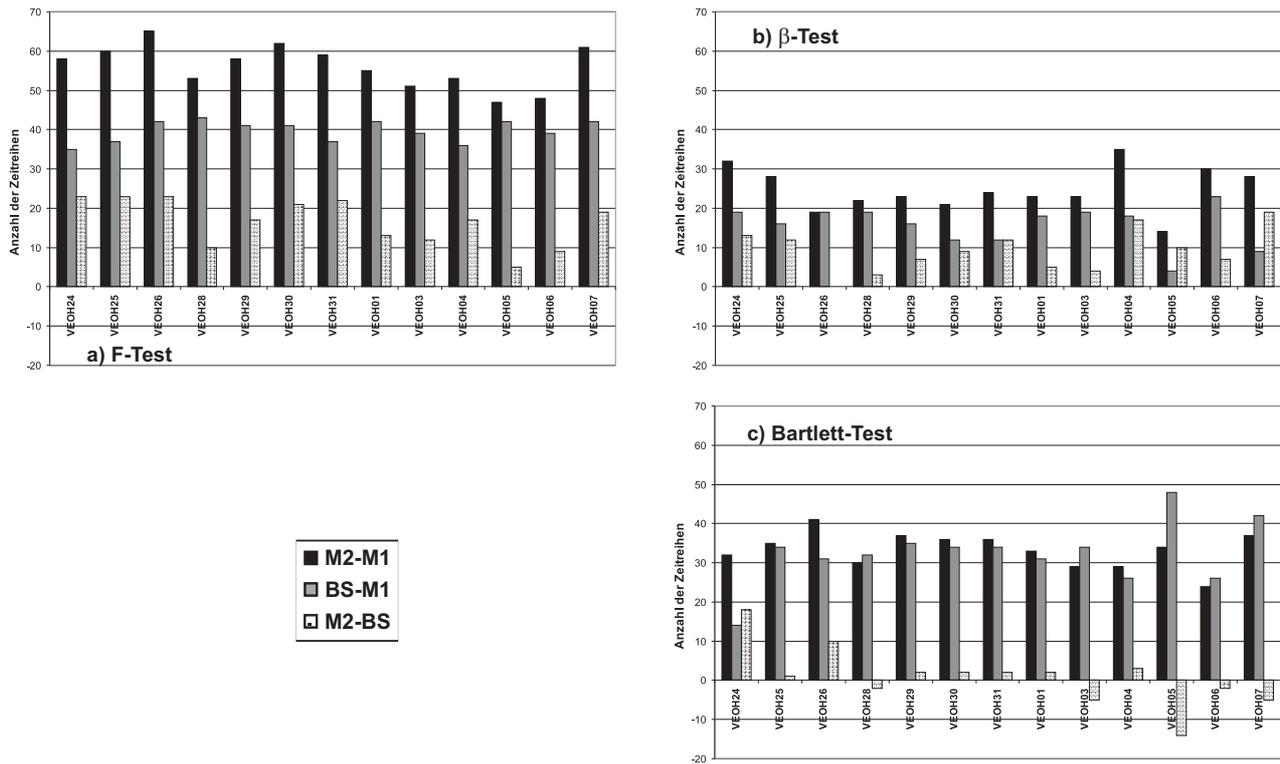


Abb. 5.10: Absolute Differenzen der Anzahl homoskedastischer Zeitreihen aufgrund des F-Tests aus (4.11), des  $\beta$ -Tests aus (4.12) und des Bartlett-Tests aus (4.13) zwischen den Varianten der Varianzmodellierung M1, M2 und BS

Es kann somit festgestellt werden, dass die Ergebnisse der Homoskedastizitätstests zum festen Niveau  $\alpha$  deutliche Hinweise auf die zu bevorzugende Varianzmodellierung M2 liefern. Insbesondere die Differenzen der verschiedenen Modellierungsvarianten machen die Vorteile von M2 deutlich, wobei die bereits erwähnten starken Störungen in den Daten die individuelle Schätzung der Varianzfunktion beeinträchtigen. Deutliche Unterschiede zeigen sich zudem bei der Analyse der Ergebnisse der verschiedenen Testverfahren. Aufgrund der unterschiedlichen Hypothesen bzw. Alternativen des F- und des Bartlett-Tests sind diese Ergebnisse jedoch nur eingeschränkt vergleichbar. Während aufgrund des F-Tests eindeutig M2 zu bevorzugen wäre, kann mit Hilfe des Bartlett-Tests keine eindeutig bessere Modellierung gefunden werden. Beim  $\beta$ -Test werden bei allen Varianten der Varianzmodellierung nur sehr wenige Zeitreihen zum Niveau  $\alpha=1\%$  als homoskedastisch erkannt, wodurch eine Entscheidung bzgl. der Auswahl einer geeigneten Varianzmodellierung ohne weitere Analysen nicht getroffen werden kann. Daher sollen im Folgenden die  **$p$ -Werte der Homoskedastizitätstests** Aufschluss über die restlichen, nicht als homoskedastisch erkannten Zeitreihen bei Anwendung des  $\beta$ -Tests geben. Dazu sind in den folgenden Abbildungen 5.11 und 5.12 die Differenzen der  $p$ -Werte ( $\Delta p$ ) aller Einzeltests zwischen den verschiedenen Varianten der Varianzmodellierung in drei Klassen eingeteilt und über die verschiedenen Beobachtungstage dargestellt. So weisen negative (positive) Differenzen ( $|\Delta p| \geq 0.001$ ) zwischen M2 und M1 in Abbildung 5.11 auf eine Verschlechterung (Verbesserung) der Varianzstruktur der analysierten Zeitreihe bei Berücksichtigung von M2 hin, während Werte der Differenz  $\Delta p \in (0.001, -0.001)$  auf keine bzw. nur sehr geringfügige Veränderungen in der Varianzstruktur hinweisen.

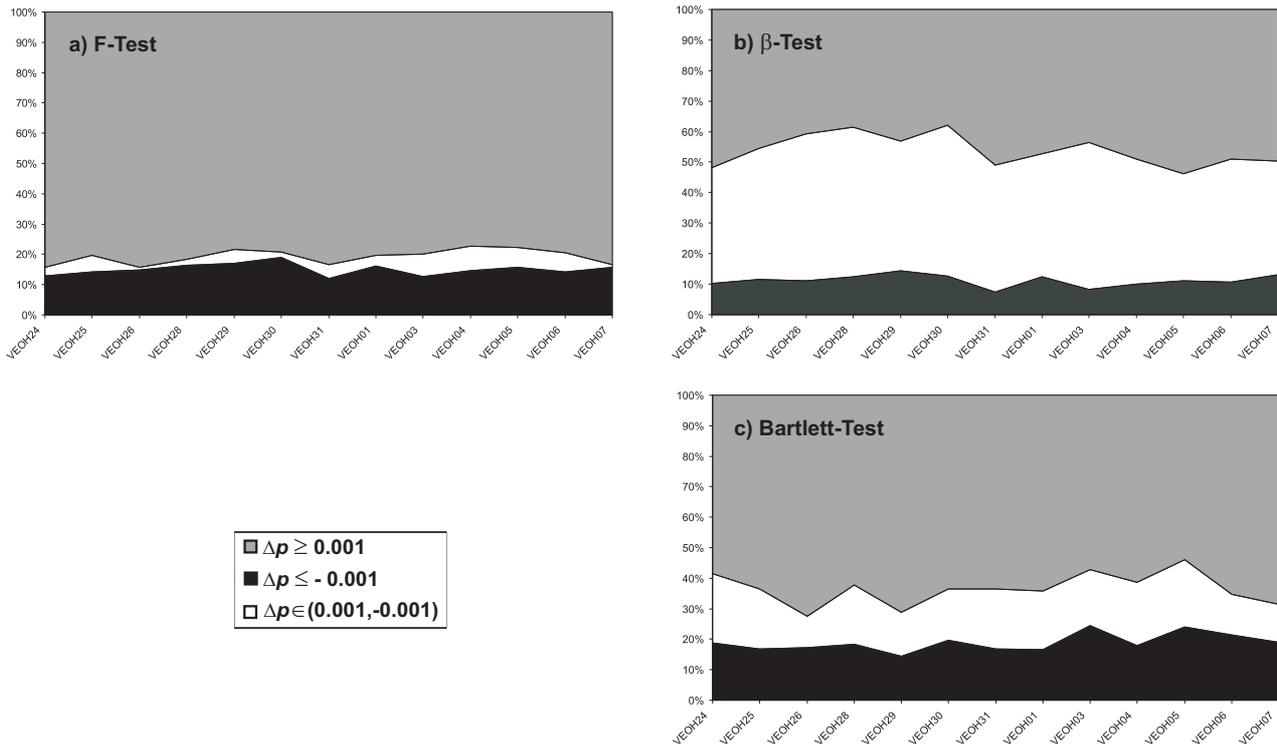


Abb. 5.11: Differenz der  $p$ -Werte der Varianzmodellierungen M2-M1 ( $\Delta p = p(M2) - p(M1)$ ) jeweils aller Einzeltests (F-Test aus (4.11),  $\beta$ -Test aus (4.12) und Bartlett-Test aus (4.13)) einer Beobachtungssession über alle Beobachtungstage

Zunächst ist auch bei der Darstellung der Anteile der  $p$ - bzw.  $\Delta p$ -Werte ein sehr homogener Verlauf über die verschiedenen Beobachtungstage feststellbar. Betrachtet man die  $\Delta p$ -Werte des F-Tests in Abbildung 5.11a, so ist eine deutliche Verbesserung bzw. Homogenisierung der Varianzstruktur der Zeitreihen zu erkennen. So kann bei mindestens 80% aller Zeitreihen eine Verbesserung des  $p$ -Wertes ( $\Delta p > 0.001$ ) durch Einführung der Varianzmodellierung M2 erreicht werden, während eine Verschlechterung nur in 10-15% aller Fälle eintritt. Zeitreihen mit annähernd unveränderter Varianzstruktur treten beim F-Test, im Gegensatz zum  $\beta$ -Test in Abbildung 5.11b, sehr selten auf. Ist der Anteil der Zeitreihen, bei denen eine Verschlechterung der Varianzstruktur festzustellen ist, beim  $\beta$ -Test noch in etwa genauso groß wie beim F-Test, so ist der Anteil der Zeitreihen mit gleichbleibenden  $p$ -Werten mit 40-50% um ein Vielfaches größer. Dieser Umstand erklärt die geringe Anzahl der homoskedastischen Zeitreihen bei den Darstellungen in den vorigen Abbildungen. Die Analyse der Anzahl der Zeitreihen mit negativem  $\Delta p$  zeigt jedoch, dass die Ergebnisse recht gut mit denen des F-Tests und sogar des Bartlett-Tests in Abbildung 5.11c korrespondieren. Die Ergebnisse der Differenz BS-M1 bestätigen diesen hohen Anteil unveränderter Zeitreihen sowie den über die verschiedenen Testverfahren nahezu konstanten Anteil der Zeitreihen mit negativem  $\Delta p$  (verschlechterte Varianzstruktur). Auf deren Darstellung soll daher an dieser Stelle verzichtet werden.

In den Abbildungen 5.9c und 5.10c wurde besonders deutlich, dass mit Hilfe des Bartlett-Tests keine eindeutige Entscheidung bzgl. der bestmöglichen Varianzmodellierung M2 bzw. BS getroffen werden kann. In Abbildung 5.12 sind daher die Anteile der Zeitreihen mit Differenzen der  $p$ -Werte M2-BS dargestellt. Neben dem wiederum vergleichsweise großen Anteil an Zeitreihen mit unverändertem  $\Delta p$  beim  $\beta$ -Test fallen die großen Anteile mit negativem  $\Delta p$  auf. Deuten die Ergebnisse des F-Tests, wo maximal 40% der Zeitreihen ein negatives  $\Delta p$  aufweisen, noch auf Vorteile für die Varianzmodellierung M2 hin, so schwanken diese Anteile beim Bartlett-Test zwischen 40% und 50%. Vernachlässigt man die Zeitreihen ohne deutliche Veränderung der Qualität der Varianzstruktur, so ist auf der Basis des Bartlett-Tests auch bei der Analyse der  $p$ -Werte keine eindeutige Entscheidung zu treffen.

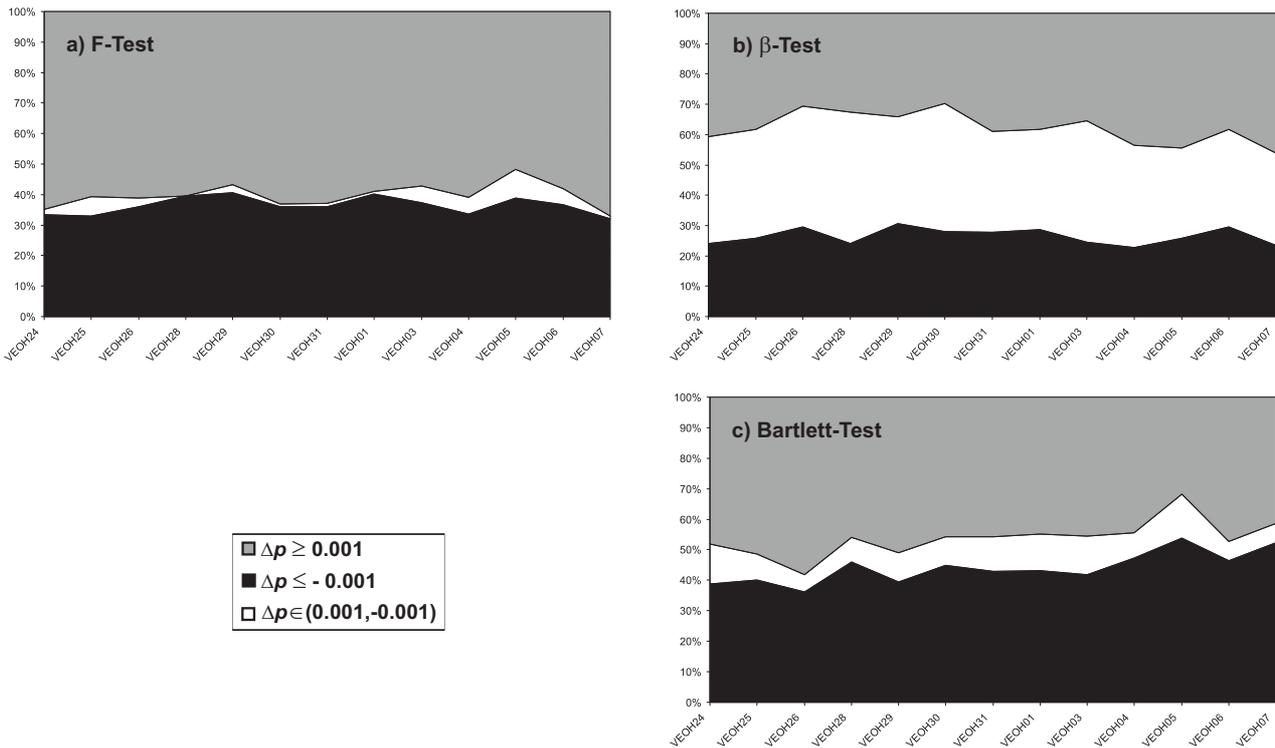


Abb. 5.12: Differenz der  $p$ -Werte der Varianzmodellierungen M2-BS ( $\Delta p = p(M2) - p(BS)$ ) jeweils aller Einzeltests (F-Test aus (4.11),  $\beta$ -Test aus (4.12) und Bartlett-Test aus (4.13)) einer Beobachtungssession über alle Beobachtungstage

Im Folgenden sollen die Ergebnisse der Homoskedastizitätstests eines Datensatzes aus dem antarktischen Bereich (VEOH30) im Detail analysiert werden. In den Abbildungen 5.13 bis 5.15 sind dazu die Testentscheidungen des F- und des Bartlett-Tests zum Niveau  $\alpha=1\%$  aller Doppeldifferenzen dieses Datensatzes in Abhängigkeit von der Länge der betrachteten Zeitreihe bzw. der Elevationsspanne ( $\max(ele_{4d}) - \min(ele_{4d})$ ) dargestellt. Der  $\beta$ -Test wird dabei nicht berücksichtigt, da die bisher diskutierten Ergebnisse i.d.R. zwischen den Extremwerten des F- und denen des Bartlett-Tests liegen und somit kaum neue Erkenntnisse liefern.

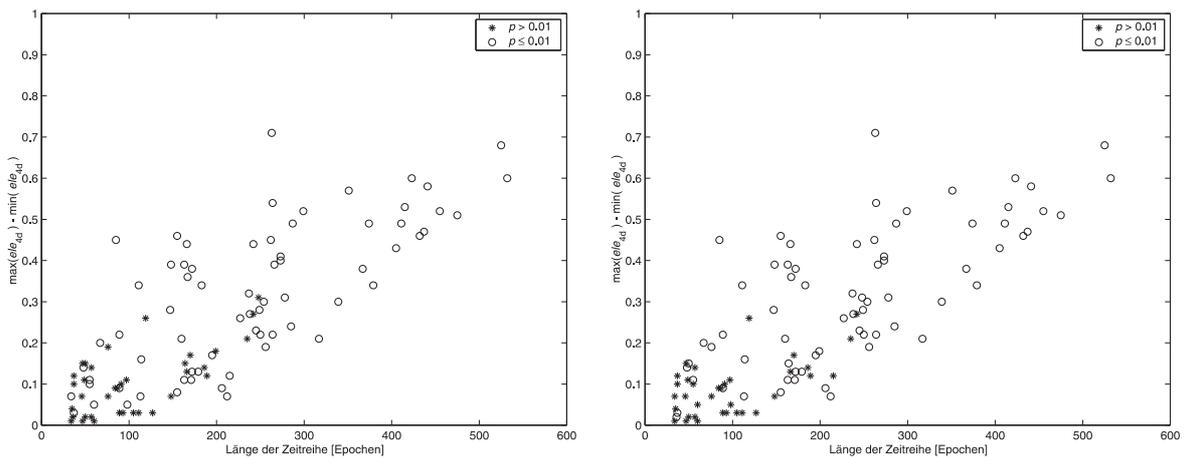


Abb. 5.13: Ergebnisse der Homoskedastizitätstests (4.11) und (4.13) zum Niveau  $\alpha=1\%$  über der Elevationsspanne ( $\max(ele_{4d}) - \min(ele_{4d})$ ) bzw. der Länge der Zeitreihen auf Basis der Varianzmodellierung M1 (Basislinie: VEOH30; Datenrate: 30s)  
 a) F-Test  
 b) Bartlett-Test

Allen folgenden Graphiken ist der deutliche Zusammenhang zwischen der Länge der Zeitreihen und der Elevationsdifferenz gemein. In Abbildung 5.13 wird zudem deutlich, dass ohne Berücksichtigung einer erweiterten Modellierung der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen (M1) vor allem kurze bis mittellange Zeitreihen unabhängig vom verwendeten Testverfahren als homoskedastisch ( $p > 0.01$ ) erkannt werden. Geringfügige Unterschiede sind allenfalls bei der

Verteilung der homoskedastischen Zeitreihen zu erkennen. So weisen einige sehr kurze Zeitreihen mit kleiner Elevationsspanne beim F-Test sehr kleine  $p$ -Werte auf, was zum Verwerfen der Nullhypothese führt ( $\rightarrow$  Heteroskedastizität), während diese beim Bartlett-Test als homoskedastisch erkannt werden.

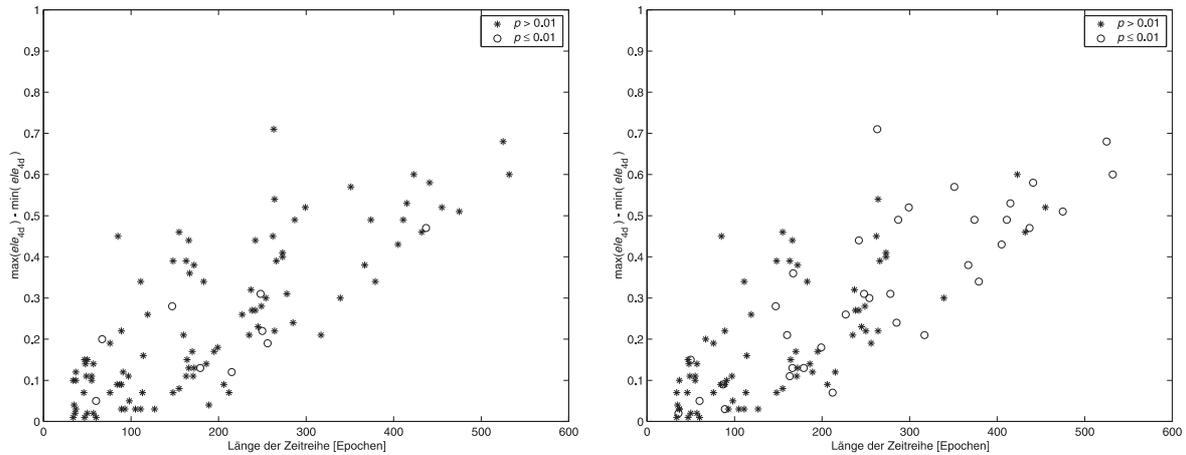


Abb. 5.14: Ergebnisse der Homoskedastizitätstests (4.11) und (4.13) zum Niveau  $\alpha=1\%$  über der Elevationsspanne ( $\max(ele_{4d}) - \min(ele_{4d})$ ) bzw. der Länge der Zeitreihen auf Basis der Varianzmodellierung M2 (Basislinie: VEOH30; Datenrate: 30s)  
 a) F-Test  
 b) Bartlett-Test

Betrachtet man nun jedoch die Ergebnisse mit der vorgeschlagenen Varianzmodellierung M2 in Abbildung 5.14, so erweisen sich beim F-Test nahezu alle Zeitreihen als homoskedastisch ( $p > 0.01$ ). Die wenigen Zeitreihen mit  $p \leq 0.01$  sind zufällig über den gesamten Datensatz verteilt. Im Gegensatz dazu erfahren aufgrund des Bartlett-Tests vergleichsweise wenige, primär kurze Zeitreihen eine Verbesserung der Varianzstruktur. Die Ergebnisse des Bartlett-Tests für Daten aus der Auswertung unter Berücksichtigung der BS-Varianzmodellierung in Abbildung 5.15b unterscheiden sich davon vergleichsweise wenig. Auch hier ergeben sich vor allem bei kurzen Zeitreihen  $p$ -Werte, die größer als 0.01 sind, während aus langen Zeitreihen meist kleine  $p$ -Werte resultieren, was zur Ablehnung der Nullhypothese des Bartlett-Tests (Homoskedastizität der Zeitreihe) führt.

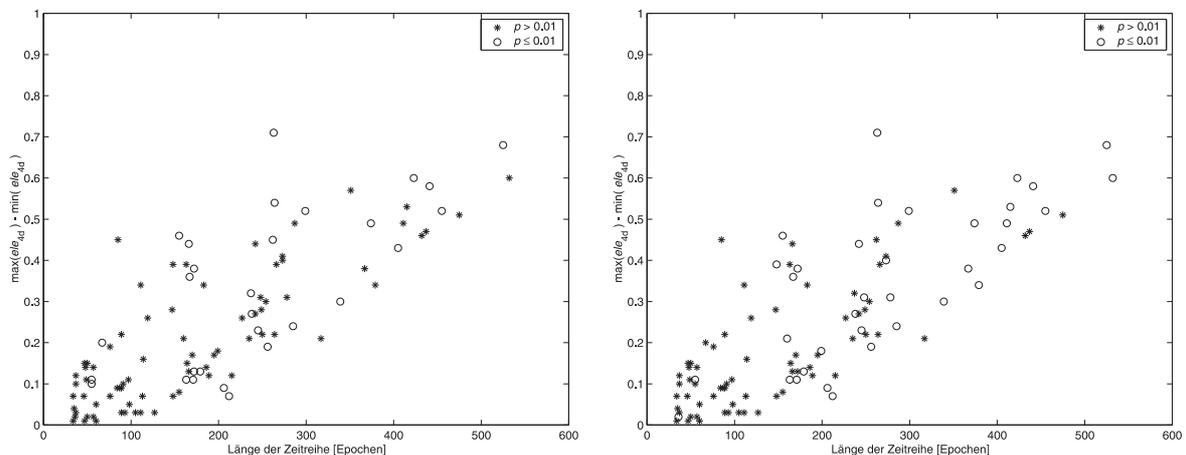


Abb. 5.15: Ergebnisse der Homoskedastizitätstests (4.11) und (4.13) zum Niveau  $\alpha=1\%$  über der Elevationsspanne ( $\max(ele_{4d}) - \min(ele_{4d})$ ) bzw. der Länge der Zeitreihen auf Basis der Varianzmodellierung BS (Basislinie: VEOH30; Datenrate: 30s)  
 a) F-Test  
 b) Bartlett-Test

Bei dieser Varianzmodellierung ist entgegen den bisherigen Ergebnissen, eine vergleichsweise gute Übereinstimmung zwischen den Resultaten des Bartlett- und denen des F-Tests festzustellen. So werden beim F-Test ebenso wie beim Bartlett-Test lange Zeitreihen eher als heteroskedastisch ausgewiesen. Die Detailanalyse der Abbildungen 5.13 bis 5.15 zeigt somit deutliche Unterschiede zwischen den verschiedenen Arten der Varianzmodellierung vor allem aufgrund des F-Tests. Beim Bartlett-Test kann demgegenüber hauptsächlich die Aussage getroffen werden, dass eine erweiterte Varianzmodellierung der herkömmlichen vorzuziehen ist.

Zur detaillierten Analyse soll ein Vergleich der Differenzen der  $p$ -Werte zwischen den Modellierungen M2 und M1 ( $\Delta p = p(M2) - p(M1)$ ) in den Abbildungen 5.16 und 5.17 dienen.

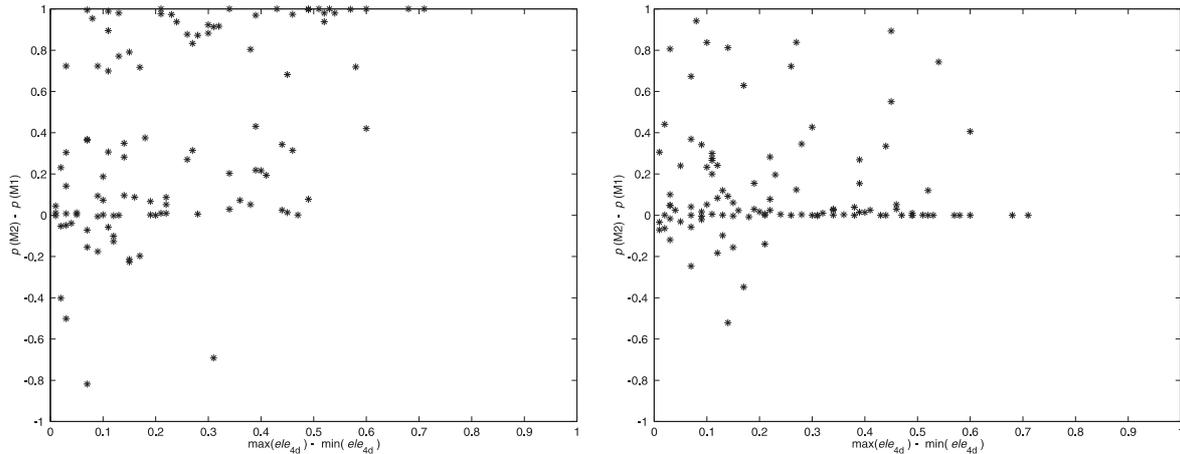


Abb. 5.16: Differenz der  $p$ -Werte des F- bzw. des Bartlett-Tests aufgrund unterschiedlicher Varianzmodellierung (M2 bzw. M1) in Abhängigkeit von der Elevationsspanne ( $\max(ele_{4d}) - \min(ele_{4d})$ ) (Datengrundlage: VEOH30)  
 a) F-Test  
 b) Bartlett-Test

In Abbildung 5.16 sind zunächst die Differenzen der  $p$ -Werte aufgrund des F- und des Bartlett-Tests über der Elevationsspanne aufgetragen. Dabei wird deutlich, dass beim F-Test sehr viele Differenzen zwischen 0.6 und 1 liegen, d.h. eine deutliche Verbesserung der Varianzstruktur angenommen werden kann. Annähernd unveränderte Zeitreihen sind analog zu Abbildung 5.17a nur in geringem Maße zu finden. Verschlechterungen der Varianzstruktur, d.h. negative Werte in Abbildung 5.16, treten ähnlich wie bei den Ergebnissen aufgrund des Bartlett-Tests nur in Einzelfällen auf. Die Ergebnisse des Bartlett-Tests zeichnen sich, im Gegensatz zu denen des F-Tests, durch eine deutliche Häufung im Bereich der Nulllinie aus, was einer unveränderten Beurteilung der Varianzstruktur dieser Zeitreihen entspricht. Abbildung 5.17b zeigt jedoch, dass bei einer vergleichsweise geringen Anzahl an Zeitreihen (Elevationsspanne größer als 0.3 in den Abbildungen 5.16b und 5.17b) tatsächlich keine Veränderung des  $p$ -Wertes auftritt ( $\Delta p \in (0.001, -0.001)$ ), sondern zumeist eine - wenn auch geringe - Erhöhung.

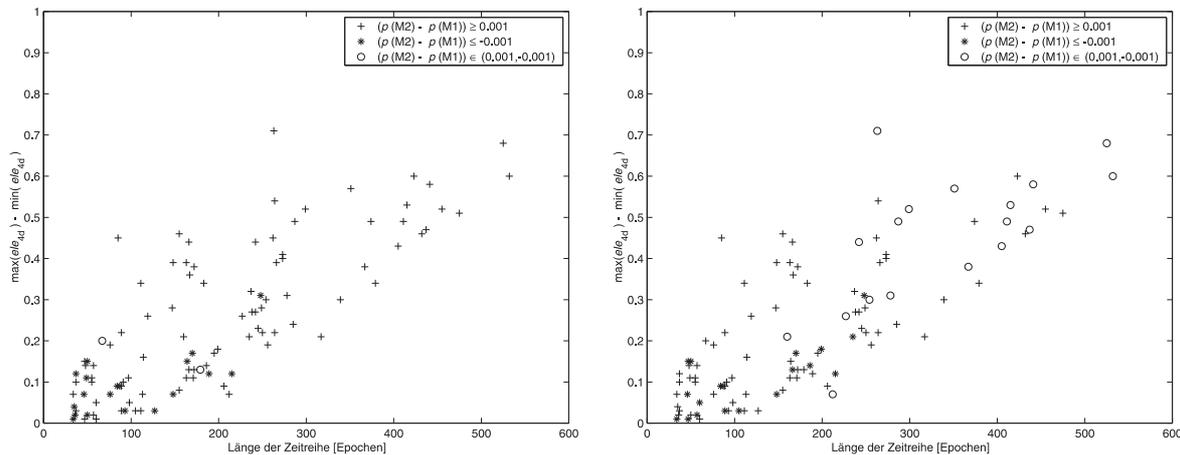


Abb. 5.17: Ergebnisse der Homoskedastizitätstests (4.11) und (4.13) über der Elevationsspanne ( $\max(ele_{4d}) - \min(ele_{4d})$ ) bzw. der Länge der Zeitreihe (Datengrundlage: VEOH30; Datenrate: 30s)  
 a) F-Test  
 b) Bartlett-Test

Vergleicht man die Abbildungen 5.17 und 5.13, so fällt auf, dass die Zeitreihen mit negativem  $\Delta p$  zuvor schon, unabhängig von der untersuchten Testvariante, als homoskedastisch erkannt wurden. Bezieht man Abbildung 5.14 in den Vergleich mit ein, so kann festgestellt werden, dass diese Zeitreihen unter Berücksichtigung der Varianzmodellierung M2 ebenfalls als homoskedastisch detektiert werden. Somit kann sowohl beim F-Test als auch beim Bartlett-Test festgestellt werden, dass die Varianzstruktur durch Anwendung des erweiterten Modells M2 i.d.R. deutlich verbessert werden kann. Verschlechterungen ( $\Delta p < 0$ ) treten meist bei Zeitreihen auf, die bei herkömmlicher Varianzmodellierung

(M1) schon homoskedastisch sind. Diese Verringerung des  $p$ -Wertes bleibt jedoch so gering, dass keine Zeitreihe, die bei herkömmlicher Modellierung Homoskedastizität aufweist, durch die Anwendung der erweiterten Modellierung als heteroskedastisch erkannt wird. Im Gegenzug kann aufgrund der Ergebnisse des F-Tests festgestellt werden, dass Zeitreihen, die bei herkömmlicher Modellierung heteroskedastisch sind, unter Berücksichtigung einer erweiterten Modellierung, homoskedastisch werden, während beim Bartlett-Test oftmals keinerlei Veränderung des  $p$ -Wertes erreicht wird. Diese Erkenntnisse können durch die Ergebnisse der Differenz M2-BS bestätigt werden. Einziger Unterschied ist dabei, dass bei Prüfung durch den Bartlett-Test die Zeitreihen aus M2-M1 mit unverändertem  $p$  nun zumeist ein negatives  $\Delta p$  aufweisen, was auf eine Verschlechterung der Varianzstruktur hindeutet.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die dargestellten Testergebnisse über die verschiedenen Tage hinweg sehr konstant sind und somit die Ergebnisse der Analyse eines einzelnen Tages, wie in den Abbildungen 5.13 bis 5.17 dargestellt, auf andere Tage übertragen werden können. Aufgrund der vergleichsweise geringen Anzahl an Zeitreihen pro Beobachtungssession sind bei der Basislinie H1JO stärkere Schwankungen in den Ergebnissen der verschiedenen Beobachtungstage festzustellen, die jedoch nicht zu Schlussfolgerungen führen, die von den bisherigen Erkenntnissen abweichen. Zudem zeigen die Ergebnisse der unterschiedlichen statistischen Testverfahren, dass trotz Unterschieden im Detail tendenziell vergleichbare Ergebnisse zu erzielen sind. Aufgrund der unterschiedlichen Unterteilungen der Zeitreihen bei den Zweistichprobentests bzw. dem multiplen Bartlett-Test und den damit einhergehenden unterschiedlichen Alternativhypothesen kann jedoch kein für diesen Zweck optimaler Test gefunden werden. Vielmehr ist es erforderlich, die Ergebnisse der verschiedenen Tests jeweils aufs Neue in Abhängigkeit von den aufgestellten Null- bzw. Alternativhypothesen zu analysieren und entsprechend der Fragestellung zu interpretieren.

Zur Diskussion der verschiedenen Varianten der Varianzmodellierung kann zunächst festgestellt werden, dass die erweiterte Varianzmodellierung in allen Fällen der ursprünglichen Modellierung (M1) überlegen ist. Auf der Basis des F-Tests (4.11) erweist sich das Modell M2 als eindeutig beste Variante, wobei neben hervorragenden Ergebnissen bei der Varianzhomogenisierung zudem sehr homogene Ergebnisse über alle Beobachtungstage erzielt wurden. Die Ergebnisse des  $\beta$ -Tests (4.12) bestätigen zwar aufgrund des leicht besseren Homogenisierungserfolgs die Eignung der Varianzmodellierung M2, durch den großen Anteil an Zeitreihen mit nahezu unverändertem  $p$ -Wert muss diese Aussage jedoch hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit hinterfragt werden. Auf der Grundlage des Bartlett-Tests (4.13) ist eine Entscheidung bzgl. einer Varianzmodellierung zwischen M2 und BS aufgrund vergleichsweise inhomogener, stark von den jeweiligen Beobachtungstagen abhängiger Testergebnisse nur schwer möglich. Bei stark gestörten Daten deuten sich allerdings Vorteile bei der festen Varianzmodellierung BS an, während an Tagen mit geringen Störungen M2 teilweise deutlich besser abschneidet. Dies kann mit Problemen bei der Anpassung einer glatten Regressionsfunktion an solch stark gestörte Daten erklärt werden. Somit kann für den Fall nur leicht gestörter oder auch im Rahmen der Vorverarbeitung bereinigter Daten die individuelle Varianzmodellierung M2 empfohlen werden, während bei starken Störungen in den Residuen, die auch durch eine geeignete Vorverarbeitung nicht zu bereinigen sind, die feste Varianzmodellierung BS vorzuziehen ist.

### 5.3.3 Auswirkung der Berücksichtigung der Varianzfunktion auf die Ausgleichungsergebnisse

In Abschnitt 5.3.2 wurde das Verfahren zur Schätzung einer geeigneten Varianzfunktion der GPS-Beobachtungen in Abhängigkeit von der Satellitenelevation im Detail analysiert. Dabei wurde das Hauptaugenmerk auf die Homogenisierung der Varianz der Residuenzeitreihen gelegt. Nach der Integration der geschätzten Varianzfunktionen in die Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen und erneuter Ausgleichung nach kleinsten Quadraten stehen, neben potentiell homoskedastischen Residuenzeitreihen zur Untersuchung der Korrelationsstruktur, die geschätzten Parameter der Ausgleichung zur weiteren Analyse zur Verfügung. Dieser Parametervektor bzw. die zugehörige Kovarianzmatrix weisen im Vergleich zur ursprünglichen Variante der Varianzmodellierung Abweichungen auf. Insbesondere die für die Weiterverarbeitung z.B. im Rahmen der Deformationsanalyse wichtigen Stationskoordinaten und deren Genauigkeiten sollen im folgenden Abschnitt dargestellt und diskutiert werden.

Dazu sind in Abbildung 5.18 zunächst die in der Berner GPS-Software als „Sigma“ bezeichneten Werte für die Standardabweichung der Gewichtseinheit für zwei Basislinien über jeweils 13 Beobachtungstage bzw. für die verschiedenen Varianten der Varianzmodellierung M1, M2 und BS dargestellt. Die Standardabweichung der Gewichtseinheit liefert ein Maß zum Vergleich der Residuen nach der Ausgleichung in Abhängigkeit von der Kovarianzmatrix der Beobachtungen. Mit dessen Hilfe kann z.B. im Rahmen eines Globaltests die Gültigkeit des Ausgleichungsmodells geprüft werden. Unter Berücksichtigung der verschiedenen stochastischen Modellierungsvarianten verändert sich dieses Maß teilweise erheblich, was, aufgrund der vergleichsweise geringen Unterschiede zwischen den resultierenden Residuen, primär der differierenden stochastischen Modellierung zuzuschreiben ist. Erst die Einbeziehung der Kovarianzmatrix liefert somit eine unterschiedliche Struktur der Residuen. Dies kann anschaulich durch den Vergleich der LS- mit den

studentisierten Residuen in Abschnitt 4.1.1 nachvollzogen werden. Auffällig sind in Abbildung 5.18 die geringen Unterschiede im Niveau zwischen den Ergebnissen der beiden dargestellten Basislinien H1JO und VEOH. Einzig die Ergebnisse der Basislinie VEOH unter Berücksichtigung des Modells M2 für die Modellierung der Varianzstruktur der GPS-Beobachtungen sind systematisch um ca. 1mm größer als die vergleichbaren Ergebnisse der Basislinie H1JO.

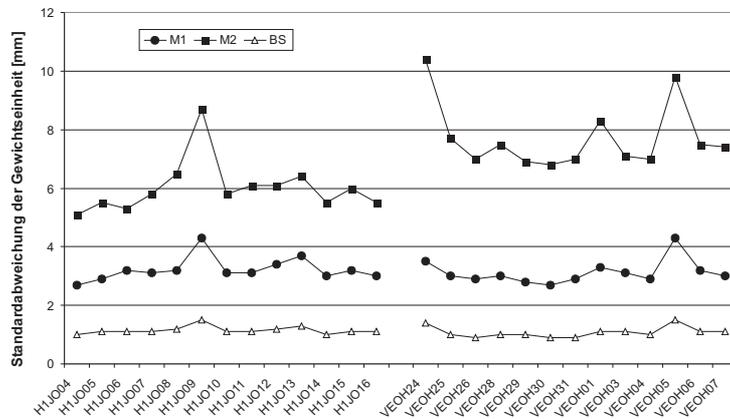


Abb. 5.18: Standardabweichung der Gewichtseinheit in Abhängigkeit von verschiedenen Varianten der Varianzmodellierung (M1, M2 und BS). Datengrundlage: H1JO und VEOH an jeweils 13 Beobachtungstagen.

In Abhängigkeit von der gewählten Variante der Varianzmodellierung unterscheiden sich die Werte in Abbildung 5.18 jedoch deutlich. Dabei wird bei der Modellierung mit dem Modell BS mit ca. 1mm der deutlich kleinste Wert und damit das beste Genauigkeitsniveau der Messungen bzw. die beste Güte des Ausgleichsmodells geschätzt, während die Modellierung mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verfahren M2 zu deutlich größeren Werten von ca. 6-7mm führt. Berücksichtigt man, dass die mit der herkömmlichen Variante M1 erzielten Sigma-Werte von ca. 3mm schon wesentlich optimistischer sind als das aufgrund von Erfahrungswerten tatsächlich bekannte Genauigkeitsniveau, so ist festzustellen, dass dieses sehr oft zur statistischen Analyse des Ausgleichsverfahrens verwendete Maß bei der Berücksichtigung der Varianzmodellierung BS ebenso als unbrauchbar eingestuft werden kann wie unter Berücksichtigung von M1. Wird die Varianzmodellierung M2 verwendet, so nähert sich die Standardabweichung der Gewichtseinheit einem realistischen Niveau an und ermöglicht somit zuverlässigere statistische Aussagen.

Betrachtet man die Sigma-Werte über die untersuchten Beobachtungstage hinweg, so kann, abgesehen von Störungen an einzelnen Tagen, ein sehr homogener Verlauf festgestellt werden. Bei den Daten aus dem Karlsruher Bereich weichen die Ergebnisse der Session H1JO09 deutlich von den anderen Tagen ab. Da bei diesen Daten keine Zusatzinformationen (Meteorologie, Signal-Rausch-Verhältnis, ...) vorliegen, können diese Abweichungen keiner Ursache eindeutig zugeordnet werden. Die Tatsache, dass sie bei allen Varianten der Varianzmodellierung gleichermaßen auftreten, deutet jedoch auf Störungen im Datenmaterial hin. Durch den in Abschnitt 5.3.1 diskutierten starken ionosphärischen Einfluss am 5.2.2002 (→ VEOH05) sowie durch die Störungen im Datenmaterial der Station Vernadsky am 24.1.2002 (→ VEOH24) können nahezu alle Abweichungen der Daten der Basislinie VEOH erklärt werden. Insbesondere im Datensatz VEOH24 wirken sich die Störeffekte unter Berücksichtigung der Varianzmodellierung M2 wesentlich stärker aus als unter Berücksichtigung der anderen Modelle M1 und BS. Dieser Sachverhalt wird bei der Diskussion der geschätzten Koordinaten in Abbildung 5.20 erneut aufgegriffen. Vergleichsweise geringe Inhomogenitäten wie z.B. beim Datensatz VEOH01 sind aufgrund lückenhafter meteorologischer Informationen an diesem Tag (vgl. Mayer, 2004) nicht zuverlässig zu begründen. Die angesprochenen Schwankungen der Sigma-Werte an den verschiedenen Beobachtungstagen fallen beim Modell M2 i.d.R. deutlich am größten aus. Unter Berücksichtigung des Varianzmodells BS sind sie demgegenüber kaum feststellbar. Rückschlüsse auf eine größere Zuverlässigkeit der Ergebnisse der BS-Variante sind dadurch nicht möglich, was besonders aus der Analyse der relativen Genauigkeiten deutlich wird. Vergleicht man z.B. die relativen Genauigkeiten der drei verschiedenen Varianten der Varianzmodellierung der Basislinie VEOH, so ergibt sich für das Modell M2 mit 0.12 sogar der beste Wert aller Varianten. Schlechter fallen dabei die Werte für M1 (0.13) bzw. BS (0.17) aus. Somit kann also festgestellt werden, dass unabhängig von der verwendeten Variante der Varianzmodellierung eine vergleichbare homogene Qualität der Ausgleichung bzw. der Residuen erreicht werden kann. Zudem führt das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell M2 zu einer wesentlich besseren Annäherung an das tatsächliche Genauigkeitsniveau als die Modelle M1 bzw. BS und ermöglicht damit, insbesondere bei der Beurteilung der Ausgleichungsergebnisse mit Hilfe statistischer Tests, zuverlässigere Aussagen.

Geht man von der Beurteilung der Residuen auf der Basis der Standardabweichung der Gewichtseinheit zur Beurteilung der Stationskoordinaten über, wobei die geographischen Breiten und geographischen Längen in metrische Nord-Süd- bzw. Ost-West-Koordinatenkomponenten umgerechnet werden ((B, L, H) → (NS, EW, H)), so kann zumindest bei den Daten der Basislinie H1JO eine große Stabilität der Ergebnisse über die Beobachtungstage hinweg festgestellt werden.

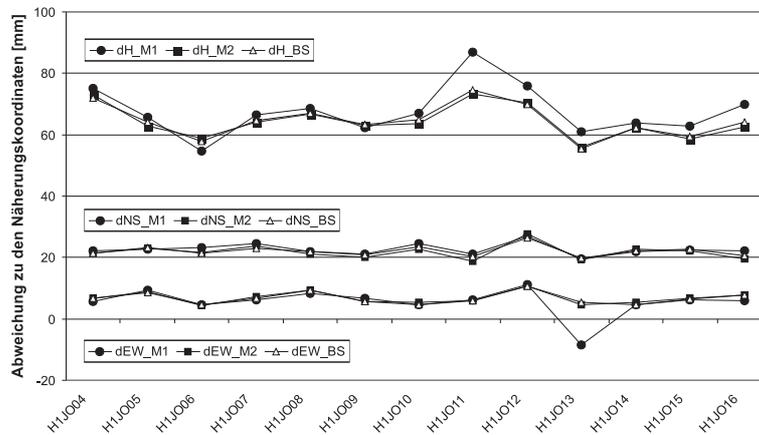


Abb. 5.19: Abweichungen der geschätzten Koordinaten (Nord-Süd-Komponente NS (→dNS), Ost-West-Komponente EW (→dEW) und ellipsoidische Höhe H (→dH) der Station JOHL (Basislinie H1JO) zu den Näherungskordinaten in Abhängigkeit von den Varianzmodellen M1, M2 und BS

Die Abweichungen der geschätzten Koordinaten der Station JOHL von den Näherungskordinaten in Abbildung 5.19 führen bei der Basislinie H1JO zu stark unterschiedlichen Werten für die einzelnen Koordinatenkomponenten. Dies rührt von der vergleichsweise schlechten, jedoch zum Zwecke der GPS-Auswertung ausreichenden Qualität der Näherungskordinaten der Station JOHL her, die im Rahmen der durchgeführten Messungen neu bestimmt wurden. Diese Unterschiede bleiben jedoch ohne Einfluss auf die Qualität der geschätzten Koordinaten. Aufgrund der geringeren Genauigkeit der ellipsoidischen Höhe schwanken diese Werte zwar deutlich stärker als die Nord-Süd- und Ost-West-Koordinatenkomponenten (NS- bzw. EW-Koordinatenkomponenten), bewegen sich aber im Rahmen der Erwartungen. Vergleicht man die Ergebnisse der verschiedenen Varianten der Varianzhomogenisierung, so fallen allenfalls Abweichungen in der ellipsoidischen Höhe unter Berücksichtigung des herkömmlichen Modells der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen M1 auf. Die Ergebnisse unter Berücksichtigung der erweiterten Modellierungen M2 und BS weisen demgegenüber nahezu identische und im Verlauf der Beobachtungstage wesentlich homogenere Ergebnisse auf.

Größere Unterschiede zwischen den Varianten der Varianzmodellierung können bei der Station O'Higgins der Basislinie VEOH in Abbildung 5.20 festgestellt werden.

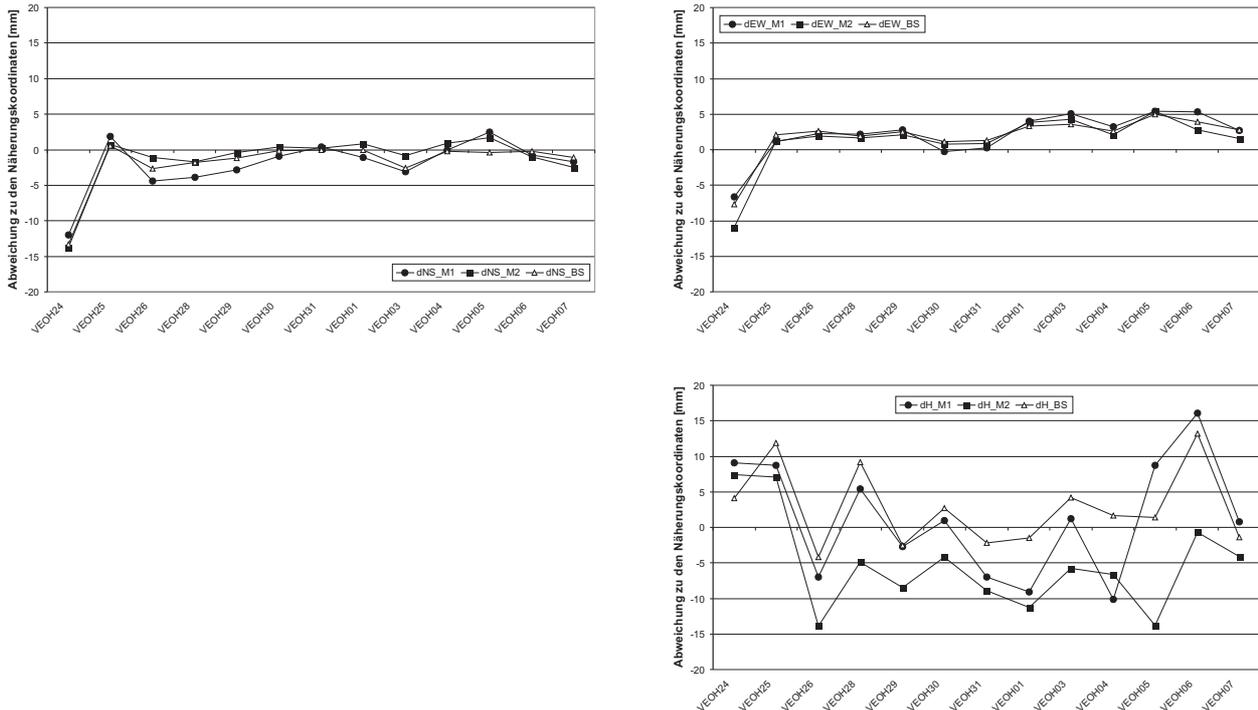


Abb. 5.20: Abweichungen der geschätzten Koordinaten (Nord-Süd-Komponente NS ( $\rightarrow$ dNS), Ost-West-Komponente EW ( $\rightarrow$ dEW) und ellipsoidische Höhe H ( $\rightarrow$ dH) der Station O'Higgins (Basislinie: VEOH) zu den Näherungskoodinaten in Abhängigkeit von den Varianzmodellen M1, M2 und BS

Die Abweichungen der geschätzten Horizontalkomponenten von den vorgegebenen Näherungskoodinaten variieren nur geringfügig in Abhängigkeit von der Varianzmodellierung. Auch in Abhängigkeit vom Beobachtungstag sind i.d.R. nur Abweichungen von maximal 5mm festzustellen. Eine Ausnahme stellt dabei die Session VEOH24 dar, bei der die geschätzten Abweichungen zu den Näherungskoodinaten unabhängig von der Variante der Varianzmodellierung bis zu dreimal so groß sind wie an den anderen Beobachtungstagen. Aufgrund der Homogenität der Ergebnisse an den restlichen Tagen können die aus dem Datensatz VEOH24 geschätzten Koordinaten jedoch als fehlerhaft eingestuft werden. Diese fehlerbehafteten Koordinaten resultieren aus den bereits diskutierten Störungen im Datenmaterial der Station Vernadsky an diesem Beobachtungstag.

Aufgrund der Größe der Abweichungen in den Koordinaten ist es unerlässlich, ein Maß zur Beurteilung der Qualität der GPS-Ergebnisse bereitzustellen. Neben der Genauigkeit der geschätzten Koordinaten (vgl. Abbildung 5.22) stellt dies i.d.R. die in Abbildung 5.18 dargestellte Standardabweichung der Gewichtseinheit dar. Diese Größe weist dementsprechend auch bei VEOH24 erhöhte Werte auf. Eine zutreffende, zuverlässige Aussage bzgl. der Qualität dieses Datensatzes kann allerdings nur beim Varianzmodell M2 getroffen werden. Bei den anderen Modellen M1 und BS unterscheiden sich diese Werte nur geringfügig von denen der anderen Datensätze (Beobachtungstage) und ermöglichen damit keine signifikanten Aussagen.

Stimmen die Abweichungen der geschätzten Horizontalkomponenten über die verschiedenen Beobachtungstage, abgesehen von VEOH24, noch vergleichsweise gut überein, so treten bei der ellipsoidischen Höhe starke Schwankungen sowohl in Abhängigkeit vom Beobachtungstag als auch vom angewendeten Varianzmodell auf. Vergleicht man die Streuung der ellipsoidischen Höhe über die verschiedenen Beobachtungstage, so weisen die Ergebnisse unter Berücksichtigung der Varianzmodellierungen M1 und BS mit Standardabweichungen von 8.2mm bzw. 6.7mm eine schlechtere Reproduzierbarkeit gegenüber den Ergebnissen des Modells M2 mit einer Standardabweichung von 5.6mm auf. Betrachtet man zusätzlich das arithmetische Mittel der ellipsoidischen Höhe über die verschiedenen Beobachtungstage, so unterscheiden sich die drei Varianten der Varianzmodellierung erheblich. Die Daten unter Berücksichtigung des Varianzmodells M1, mit einem arithmetischen Mittel von 1.2mm, stimmen dabei naturgemäß sehr gut mit den Näherungskoodinaten überein, da diese auf der Basis der herkömmlichen Varianzmodellierung M1 bestimmt wurden. Größere Abweichungen von den Näherungskoodinaten treten bei Verwendung des Modells BS mit einem arithmetischen Mittelwert von 2.8mm bzw. beim Modell M2 mit einem deutlich abweichenden Wert von -5.2mm auf. Aussagen bzgl. der korrekten Lösung und damit eine Beurteilung dieser Abweichungen sind zwar nicht zu treffen, es bleibt aber festzuhal-

ten, dass die geschätzte ellipsoidische Höhe unter Berücksichtigung der Varianzmodellierung M2 trotz der großen Abweichungen die besten Ergebnisse hinsichtlich der Reproduzierbarkeit über die Beobachtungstage hinweg aufweist.

Neben zuverlässigen Schätzungen für die Stationskoordinaten ist es unerlässlich, die Änderungen der Genauigkeitsstruktur in Abhängigkeit von den verschiedenen Varianten der Varianzmodellierung zu analysieren. Dazu sind in Abbildung 5.21 die geschätzten Standardabweichungen der NS-Koordinatenkomponente der Stationen JOHL und O'Higgins (Basislinien H1JO bzw. VEOH) in Abhängigkeit von den Varianzmodellen M1, M2 und BS dargestellt.

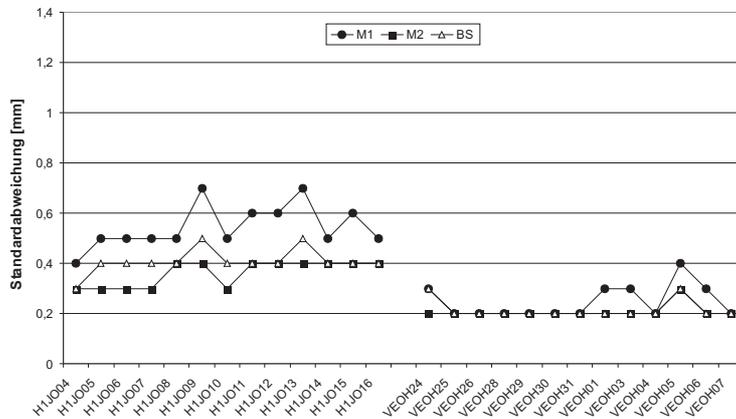


Abb. 5.21: Schätzwerte für die Standardabweichung der NS-Koordinatenkomponenten der Stationen JOHL (Basislinie: H1JO) und O'Higgins (Basislinie: VEOH) in Abhängigkeit von den Varianzmodellen M1, M2 und BS

Aufgrund der vergleichsweise geringen Datenmenge sind bei den 4h-Beobachtungen der Basislinie H1JO etwas größere Schätzwerte für die Standardabweichungen als bei den 24h-Beobachtungen der Basislinie VEOH festzustellen. Des Weiteren unterscheiden sich die Ergebnisse der Basislinie H1JO in Abhängigkeit von den unterschiedlichen Varianzmodellen von denen der Basislinie VEOH leicht. Insbesondere die Standardabweichungen unter Berücksichtigung der herkömmlichen Modellierung M1 sind dabei systematisch größer als bei den alternativen Modellierungen M2 und BS. Die Analyseergebnisse für die EW-Koordinatenkomponente unterscheiden sich nur geringfügig von den Ergebnissen der NS-Koordinatenkomponente, weshalb sie hier nicht gesondert dargestellt werden. Die ellipsoidische Höhe in Abbildung 5.22 weist dagegen im Vergleich zur NS-Koordinatenkomponente deutlich größere Schätzwerte für die Standardabweichung auf. Sie sind etwa zwei- bis dreimal so groß wie bei der NS- bzw. EW-Koordinatenkomponente und entsprechen damit der allgemeinen Erfahrung.

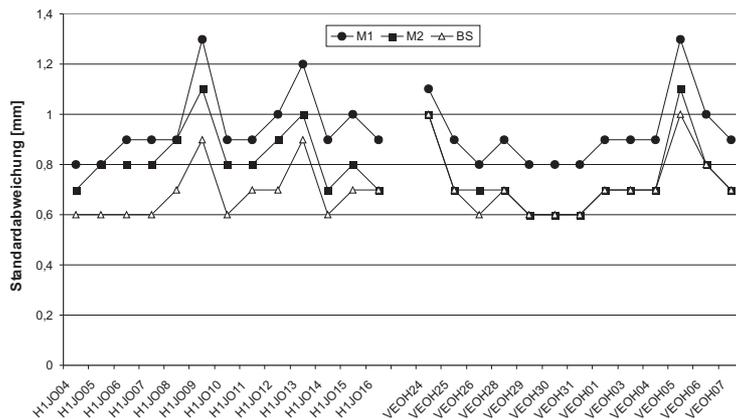


Abb. 5.22: Schätzwerte für die Standardabweichung der ellipsoidischen Höhen der Stationen JOHL (Basislinie: H1JO) und O'Higgins (Basislinie: VEOH) in Abhängigkeit von den Varianzmodellen M1, M2 und BS

Im Gegensatz zur NS-Koordinatenkomponente treten deutliche Unterschiede an den verschiedenen Beobachtungstagen sowie zwischen den verschiedenen Varianzmodellierungen auf. Die Störungen an den verschiedenen Beobachtungstagen korrespondieren mit den bereits bei der Analyse der Standardabweichung der Gewichtseinheit in Abbildung 5.18 bzw. der geschätzten Koordinaten in Abbildung 5.20 diskutierten Störungen und sollen daher nicht weiter analysiert werden. Die Ergebnisse in Abhängigkeit von den verschiedenen Varianzmodellen unterscheiden sich bei beiden darge-

stellten Basislinien. Dabei sind die Schätzwerte für die Standardabweichungen der ellipsoidischen Höhe unter Berücksichtigung des Varianzmodells M1 systematisch größer als unter Berücksichtigung der alternativen Varianzmodelle M2 und BS. Zudem sind bei der Station JOHL unter Berücksichtigung des Modells M2 systematisch erhöhte Schätzwerte der Standardabweichung gegenüber dem Modell BS festzustellen. Sie können u.a. durch die schon in Abschnitt 5.3.1 bei der Analyse der Anpassungsgüte auf der Basis des multiplen Bestimmtheitsmaßes diskutierte erschwerte Anpassung der Regressionsfunktion an die Daten vergleichsweise kurzer Zeitreihen und daraus folgend einer unzuverlässigeren Schätzung der unbekannt Parameter erklärt werden.

Somit kann zusammenfassend festgestellt werden, dass mit Hilfe der vorgestellten Varianzmodellierung deutlich realistischere Angaben zur Qualität der Ausgleichung bzw. zur Gültigkeit des Ausgleichungsmodells gegeben werden können, als dies mit der herkömmlichen bzw. mit der alternativen Modellierung der Berner GPS-Software möglich ist. Es konnte in diesem Zusammenhang gezeigt werden, dass Datensätze mit vergleichsweise schlechter Qualität, die zu falschen Ergebnissen bei der Schätzung der Stationskoordinaten führen, durch die realistischeren Genauigkeitsangaben identifiziert werden können, was mit den herkömmlichen Varianten der Varianzmodellierung nicht möglich bzw. vergleichsweise schwierig ist.

Die Analyse der Stationskoordinaten der Basislinie H1JO offenbarte nur geringe Unterschiede zwischen den verschiedenen Varianten der Varianzmodellierung. Dies trifft sowohl auf die NS- als auch auf die EW-Koordinatenkomponente der Basislinie VEOH zu, jedoch nicht auf die ellipsoidische Höhe. Bei ihr treten signifikante Unterschiede zwischen allen drei Varianten der Varianzmodellierung auf, wobei die größten Unterschiede mit einer mittleren Abweichung von den Näherungskordinaten von ca. 5mm unter Berücksichtigung der in dieser Arbeit vorgestellten Variante der Varianzmodellierung auftreten. Bemerkenswert ist zudem, dass trotz der großen Abweichung von den Näherungskordinaten die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse bei dieser Variante der Varianzmodellierung deutlich besser ist als bei den restlichen Varianten.

Neben den Stationskoordinaten wirken sich die Änderungen in der Modellierung der Varianzstruktur auch auf die Genauigkeiten der Stationskoordinaten aus. Bei den 24h-Beobachtungen der langen Basislinie VEOH treten Unterschiede im Gegensatz zur Basislinie H1JO fast ausschließlich bei der ellipsoidischen Höhe auf, während sich die Genauigkeitssituation der NS- und der EW-Koordinatenkomponente in Abhängigkeit vom Modell der Varianzmodellierung kaum verändert. Bei nahezu allen Beispielen sind die Standardabweichungen der Stationskoordinaten unter Berücksichtigung der herkömmlichen Modellierung der Varianzstruktur größer als die der erweiterten Modellierung M2 und BS, wobei die Genauigkeiten dieser beiden Varianten nahezu übereinstimmen. Eine Ausnahme stellen dabei die 4h-Beobachtungen der kurzen Basislinie H1JO dar, wo die Standardabweichungen der Varianzmodellierung M2 systematisch größer sind als die unter Berücksichtigung der alternativen Modellierung der Berner GPS-Software.

Eine erweiterte Modellierung der Varianzstruktur der GPS-Beobachtungen führt somit hauptsächlich bei langen Basislinien mit langer Beobachtungsdauer zu Änderungen in den Ergebnissen der Ausgleichung. Bei der kurzen Basislinie mit Beobachtungsintervallen von 4h treten allenfalls geringe Änderungen in der Genauigkeitsstruktur der Stationskoordinaten auf. Da bei diesen Daten zudem die Schätzung der individuellen Varianzfunktionen aufgrund der kurzen Zeitreihen störanfällig ist, kann eine Anwendung bei solchen Beobachtungskonfigurationen nicht empfohlen werden bzw. ist aufgrund des geringen Einflusses auf die Ergebnisse auch nicht notwendig. Bei langen Basislinien ist jedoch eine erweiterte Modellierung unerlässlich, da neben realistischeren Qualitätsangaben zur Gültigkeit des Ausgleichungsmodells signifikante Unterschiede, insbesondere in der ellipsoidischen Höhe, festzustellen sind.

Beobachtungen auf kurzen Basislinien werden in jüngster Zeit im Gegensatz zur nachträglichen Auswertung (Post-Processing) immer öfter in Echtzeit ausgewertet. Eine Übertragung der getroffenen Aussagen bzgl. der Beeinflussung der geschätzten Parameter auf diesen Anwendungsbereich ist problematisch. Die individuelle Schätzung der Varianzfunktionen gelingt umso besser, je mehr Zeitreihenwerte bzw. Stützstellen zur Verfügung stehen. Daher sind die geschätzten Varianzfunktionen besonders zu Beginn eines Beobachtungszeitraumes, wenn nur wenige Beobachtungen bzw. Residuen vorliegen, nicht vertrauenswürdig. Mit zunehmender Beobachtungsdauer verbessert sich diese Schätzung zwar; da bei diesem Beobachtungsverfahren jedoch keine längerfristige statische Besetzung einer Station vorgesehen ist, ist eine zufriedenstellende Schätzung nicht zu erwarten. Bei diesem Anwendungsbereich stellen daher fest vorgegebene Varianzfunktionen, wie beim Modell BS, die bessere Alternative dar. Allenfalls könnte eine Varianzanalyse in Echtzeit Hinweise auf ein realistisches Genauigkeitsniveau zur Skalierung der Genauigkeitsangaben liefern.

## 5.4 Ergebnisse der Untersuchungen zur Korrelationsstruktur

In Abschnitt 5.3 wurden die Ergebnisse des Verfahrens zur Schätzung der Varianz der GPS-Beobachtungen diskutiert. Nun soll die Korrelationsstruktur der GPS-Beobachtungen analysiert werden. Dazu werden zunächst gemäss den Ausführungen in Abschnitt 4.4.1 Autokorrelationsfunktionen geschätzt. Dieses Verfahren und die daraus resultierenden Ergebnisse werden in Abschnitt 5.4.1 diskutiert. Die Integration dieser Autokorrelationsfunktionen in die Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen und deren Auswirkung auf die Ausgleichungsergebnisse folgen dann in Abschnitt 5.4.2.

### 5.4.1 Bestimmung der Autokorrelationsfunktion

Grundlage der Bestimmung der Autokorrelationsfunktion sind die aufgrund der Auswertung mit geeigneten Varianzfunktionen weitgehend homoskedastischen studentisierten Residuenzeitreihen. Vor Untersuchung der Korrelationsstruktur der GPS-Beobachtungen bzw. der Residuen aus der GPS-Auswertung ist es sinnvoll, die Notwendigkeit dieser Untersuchungen mit Hilfe eines statistischen Tests nachzuweisen. Dazu wird der in Abschnitt 2.4.2 bzw. 4.4 vorgestellte Kolmogorov-Smirnov-Test mit einem festen Niveau  $\alpha=1\%$  verwendet. Die Ergebnisse zeigen mit einer Ablehnung der Nullhypothese ( $H_0: Y_t \sim (0, \sigma^2) \rightarrow$  IID-verteilte Zeitreihe) bei allen Zeitreihen des in Abschnitt 5.1 vorgestellten Datenmaterials eindeutig die Notwendigkeit der weiteren Untersuchung bzw. Bearbeitung des stochastischen Modells der GPS-Beobachtungen. Dabei ist jedoch zu bedenken, dass neben Korrelationen Schwankungen der Varianz sowie in den Daten verbliebene Trendeffekte zum Verwerfen der Nullhypothese führen können. Die Schwankungen der Varianz der studentisierten Residuen werden mit dem in Abschnitt 4.2 vorgestellten Verfahren beseitigt. Auf die Problematik der Beeinflussung durch Trendeffekte wurde in Abschnitt 4.4 mit dem Schluss eingegangen, dass die vorhandenen Trendeffekte physikalisch schwer erklär- bzw. modellierbar und daher nur zu eliminieren sind, wenn eine eindeutige Identifikation und Bereinigung möglich ist. Zudem führt die Bereinigung dieser Trendeffekte bei den untersuchten Beispielen nur zu vergleichsweise geringen Änderungen in den Ergebnissen der Korrelationsschätzung. Zur Illustration wurden dazu in den Abbildungen 4.17 bis 4.19 die Zeitreihen und Autokorrelationsfunktionen einer Doppeldifferenzzeitreihe (375km-Basislinie VEOH) an allen Beobachtungstagen dargestellt. Vergleichbare Ergebnisse sind auch bei Basislinien mit geringeren Stationsabständen festzustellen. Zum Vergleich sind daher in Abbildung 5.23a studentisierte Residuenzeitreihen einer Doppeldifferenz der 14km-Basislinie H1JO über alle 13 Beobachtungstage inkl. Trends und gekennzeichnetem Epochenmittel sowie in Abbildung 5.23b die Zeitreihen mit subtrahiertem Epochenmittel dargestellt.

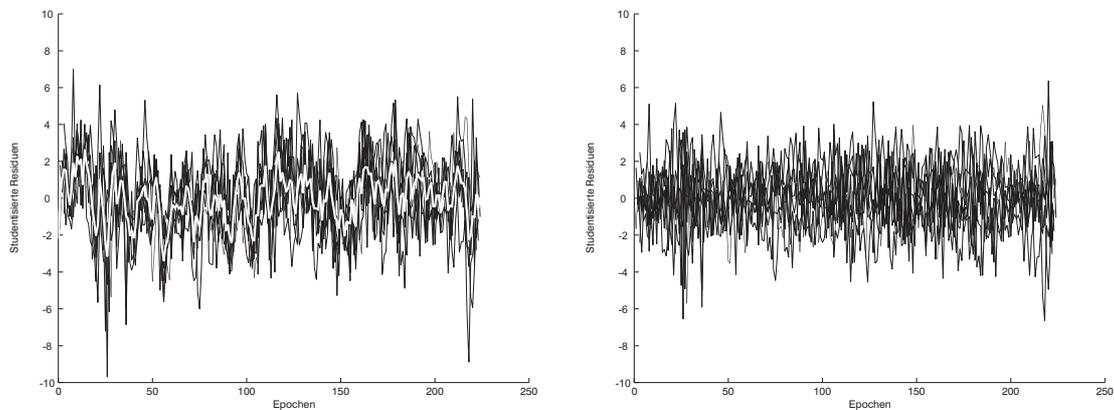


Abb. 5.23: Studentisierte Residuen über 13 Beobachtungstage unter Berücksichtigung der Länge eines Sterntages.

L3-Doppeldifferenzen (14km-Basislinie H1JO, PRN 27-02, Datenrate: 30s)

- a) trendbehaftete Zeitreihen inkl. gekennzeichnetem Epochenmittelwert      b) Zeitreihen, bei denen der Epochenmittelwert subtrahiert wurde

Zunächst werden die vergleichsweise geringen Trendeffekte bei dieser kurzen Basislinie deutlich. Da sie im Gegensatz zu den 24h-Beobachtungen der ANT-Kampagne nur über einen Zeitraum von 4h beobachtet wurde und sich die Mehrwegeeffekte dadurch nicht aus dem Datenmaterial herausmitteln können, sollten sich diese eigentlich stärker auf die Beobachtungen auswirken als bei Beobachtungen aus langen Beobachtungszeiträumen. Die Tatsache, dass dies nicht der Fall ist, deutet allerdings weniger auf die Beeinflussung durch Mehrwegeeffekte hin als vielmehr auf die Beeinflussung durch weitere physikalische Effekte, die im Rahmen der GPS-Vorverarbeitung nicht zuverlässig beseitigt werden konnten. Kurze Zyklen, die Mehrwegeeffekten zugeordnet werden können, sind zwar festzustellen, sie bewegen sich jedoch in einer Größenordnung, die im allgemeinen Beobachtungsrauschen untergeht. Die Elimination des Epochenmittels führt dementsprechend auch nur zu geringfügigen Änderungen bei den Residuenzeitreihen in Abbildung 5.23b. Daher ist es auch nicht verwunderlich, dass zwischen den Autokorrelationsfunktionen der Daten aus Abbildung 5.23a

und 5.23b in den Abbildungen 5.24a und 5.24b noch deutlich geringere Unterschiede als bei den Daten der Basislinie VEOH in Abbildung 4.18 festzustellen sind.

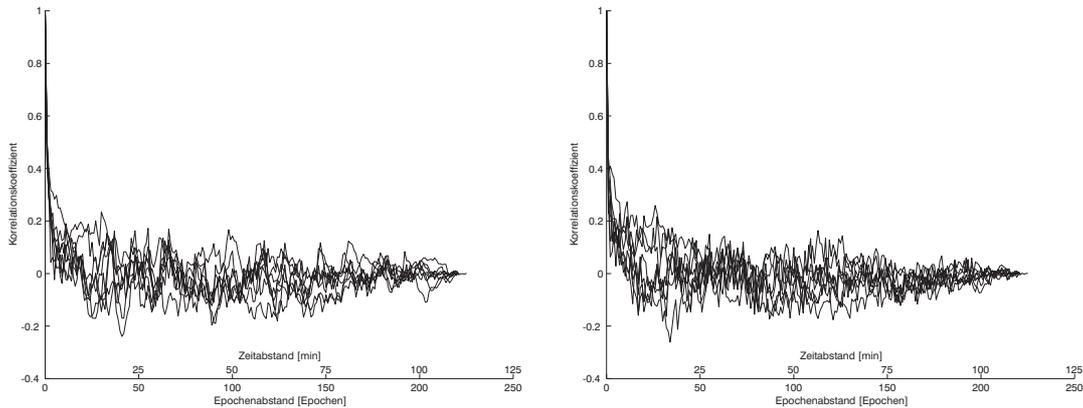


Abb. 5.24: Autokorrelationsfunktionen der Zeitreihen aus Abbildung 5.23 (13 Beobachtungstage der 14km-Basislinie H1JO, PRN 27-02, Datenrate: 30s) auf der Basis  
a) trendbehafteter Zeitreihen  
b) von Zeitreihen mit subtrahiertem Epochenmittelwert (→ Trendbereinigung)

Der Vergleich der Autokorrelationsfunktionen der Doppeldifferenz 27-02 eines Beobachtungstages mit unterschiedlicher Trendbearbeitung in Abbildung 5.25 verdeutlicht die hervorragende Übereinstimmung bei den Autokorrelationsfunktionen kurzer Basislinien. Wie aufgrund des geringen Einflusses durch die Elimination des Epochenmittels in Abbildung 5.23b zu erwarten ist, sind kaum Abweichungen im generellen Verlauf der Autokorrelationsfunktion festzustellen.

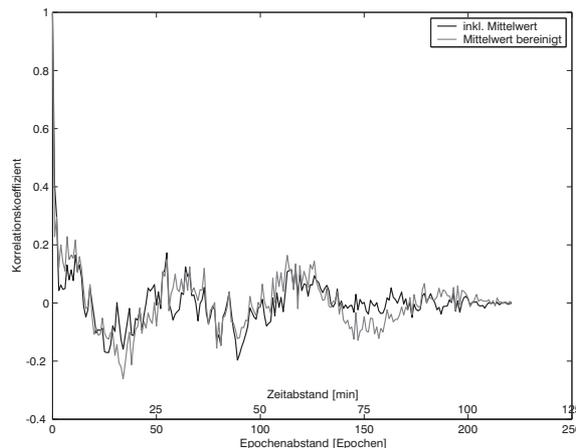


Abb. 5.25: Autokorrelationsfunktionen trendbehafteter Zeitreihen sowie von Zeitreihen mit subtrahiertem Epochenmittelwert (→ Trendbereinigung) (14km-Basislinie H1JO10, PRN 27-02, Datenrate: 30s)

Neben den geringen Unterschieden zwischen den Autokorrelationsfunktionen trendbehafteter und potentiell trendbereinigter Daten wird deutlich, dass bei der in diesem Beispiel dargestellten kurzen Basislinie grundsätzlich geringere Korrelationskoeffizienten als bei den langen Basislinien auftreten. Schon bei einem Zeitabstand von wenigen Epochen fällt bei diesem Beispiel der Korrelationskoeffizient auf 0.2 und steigt i.d.R. auch nicht mehr über diesen Wert.

Somit kann die in Abschnitt 4.4 postulierte Verwendung der potentiell trendbehafteten Residuen für die Schätzung von Korrelationsfunktionen auch für den Fall vergleichsweise kurzer Basislinien mit geringer Beobachtungsdauer bestätigt werden. Das vorgestellte Verfahren zur Korrelationsschätzung kann jedoch, falls in Zukunft eine geeignete Verarbeitung der Trendeffekte möglich ist, in unveränderter Form auf die dann vorliegenden Daten angewendet werden.

Die Anpassung der analytischen Funktion (4.28) an die empirischen Autokorrelationsfunktionen basiert auf den ersten 25% der Zeitabstände der gesamten Autokorrelationsfunktion. Daher gelingt die Approximation in diesem Bereich naturgemäß deutlich besser als im weiteren Verlauf. Dies wird in den Abbildungen 5.26 besonders deutlich, wo die



Die Qualität der Approximation der empirischen Autokorrelationsfunktion kann, wie in Abschnitt 4.4 angedeutet, zusätzlich anhand des multiplen Bestimmtheitsmaßes (4.25) beurteilt werden. Aufgrund der immensen Datenmenge wird dabei in Abbildung 5.28 jeweils das arithmetische Mittel für eine Basislinie an einem Beobachtungstag dargestellt.

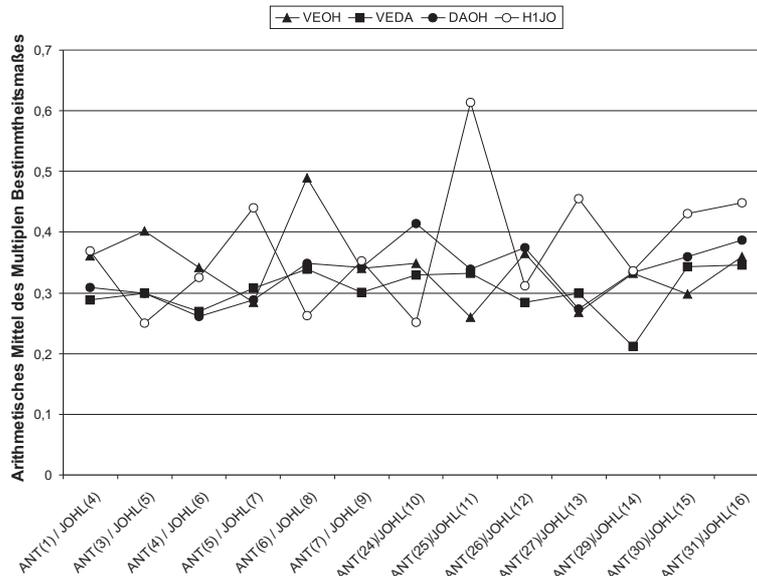


Abb. 5.28: Arithmetisches Mittel des multiplen Bestimmtheitsmaßes (4.25) der verschiedenen Datensätze aus Abschnitt 5.1

Abgesehen von einzelnen Beobachtungssessions ist ein recht homogener Verlauf sowohl über die verschiedenen Beobachtungstage als auch über die verschiedenen Basislinien festzustellen. Eine Abhängigkeit von der Länge der Basislinie oder der Beobachtungsdauer kann nicht festgestellt werden. Ebenso kann keine Abhängigkeit von der Länge der approximierten empirischen Autokorrelationsfunktion innerhalb einer Beobachtungssession gefunden werden, weshalb auf eine detaillierte Darstellung an dieser Stelle verzichtet werden soll. Die Werte des multiplen Bestimmtheitsmaßes bewegen sich i.d.R. zwischen 0.25 und 0.45 und damit in der in Abschnitt 5.3.1 bereits diskutierten Größenordnung. Folglich kann festgestellt werden, dass mit Hilfe der analytischen Funktion (4.28) eine über alle Daten gleichmäßig gute Approximation gewährleistet werden kann. Auf der Basis dieser Erkenntnis werden nun die Parameter dieser Funktion  $ND_1$  und  $T$  analysiert. Dazu ist in Abbildung 5.29 das arithmetische Mittel über jeweils eine Beobachtungssession des Funktionsparameters  $ND_1$ , dem kleinsten Zeit- bzw. Epochenabstand, bei dem die empirische Autokorrelation verschwindet bzw. negativ wird, dargestellt.

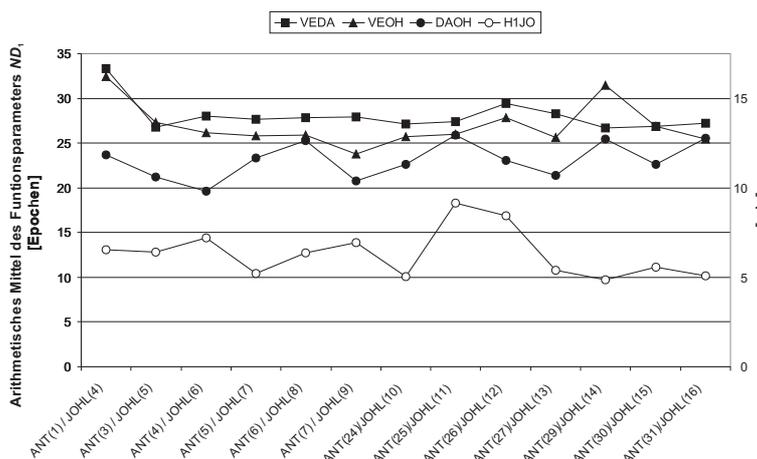


Abb. 5.29: Arithmetisches Mittel des Funktionsparameters  $ND_1$  der analytischen Korrelationsfunktion (4.28) über die verschiedenen Datensätze aus Abschnitt 5.1

$ND_1$ , ein Maß für das Abklingen des Korrelationskoeffizienten bei kleinen Zeitabständen  $\tau$ , wird nicht im Rahmen der Regression geschätzt, sondern ergibt sich aus der jeweils untersuchten empirischen Autokorrelationsfunktion direkt. Er dient vor allem der Skalierung der analytischen Korrelationsfunktion. Das arithmetische Mittel des Parameters  $ND_1$  weist über die verschiedenen Beobachtungstage einen recht homogenen Verlauf auf. Es bewegt sich zwischen 10-15

Epochen ( $\rightarrow$  ca. 5 Minuten) bei der Basislinie H1JO und 20-30 Epochen ( $\rightarrow$  10-15 Minuten) bei der langen Basislinie der ANT-Kampagne. In Abbildung 5.29 ist eine deutliche Abhängigkeit von der Länge der Basislinie zu erkennen, wobei aus kurzen Basislinien kleine Werte für  $ND_1$  resultieren. Die Detailanalyse einer Beobachtungssession in Abbildung 5.30 vermittelt zudem den Eindruck der Abhängigkeit von der Länge der untersuchten Zeitreihe.

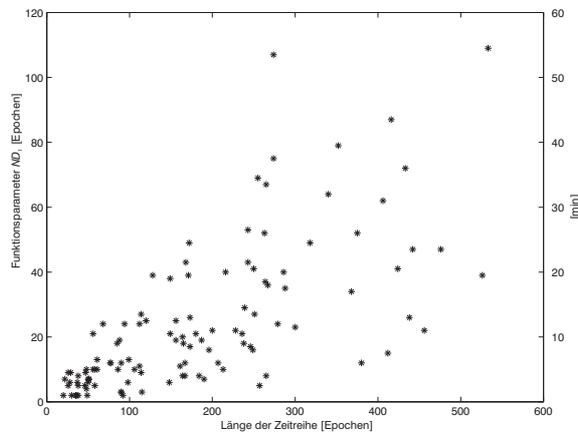


Abb. 5.30: Funktionsparameter  $ND_1$  der analytischen Korrelationsfunktion (4.28) in Abhängigkeit von der Länge der untersuchten Zeitreihen (Datengrundlage: VEOH30, Datenrate: 30s)

Dabei ist kein formaler Zusammenhang, sondern, abgesehen von einer abweichenden Zeitreihe, allenfalls eine Obergrenze für  $ND_1$  in Abhängigkeit von der Länge der Zeitreihe und damit eine maximale Skalierung der Autokorrelationsfunktion feststellbar. Dieses Ergebnis wird durch die Analyse der restlichen Datensätze aus Abschnitt 5.1, auch der kurzen Basislinie H1JO, bestätigt. Berücksichtigt man die unterschiedliche Skalierung der Achsen in Abbildung 5.30, so relativiert sich dieser potentielle Zusammenhang, zumal die Werte für  $ND_1$  unterhalb dieser Obergrenze breit streuen. Die im Zusammenhang mit Abbildung 5.29 beschriebene Abhängigkeit der Werte für  $ND_1$  von der Länge der verarbeiteten Basislinie kann durch dieses Ergebnis allerdings in Frage gestellt werden. Die geringeren Werte für die arithmetischen Mittel der 14km-Basislinie in Abbildung 5.29 können nun ebenso durch die vergleichsweise kurze Beobachtungsdauer von 4 Stunden, wodurch nur Doppeldifferenzzeitreihen von maximal 250 Epochen Länge und damit weitaus kürzere Zeitreihen als bei den 24h-Beobachtungen der ANT-Kampagne entstehen, erklärt werden. Fasst man alle Ergebnisse zusammen, so kann beim untersuchten Datenmaterial allenfalls eine Obergrenze für  $ND_1$  von ca. 100 Epochen festgestellt werden. Eine Abhängigkeit von der Länge der Basislinie oder von der Länge der untersuchten Zeitreihe ist unter Einbeziehung aller diskutierten Ergebnisse nicht zweifelsfrei nachweisbar. Dazu müssten umfangreichere Untersuchungen speziell zur Beeinflussung der Funktionsparameter durch die Beschaffenheit der Daten durchgeführt werden.

Im Gegensatz zu  $ND_1$  liefert die Analyse des im Rahmen der Regression geschätzten Parameters  $T$  in den Abbildungen 5.31 und 5.32 kaum Hinweise auf eine Abhängigkeit von der Länge der Basislinie oder anderen Einflussgrößen.

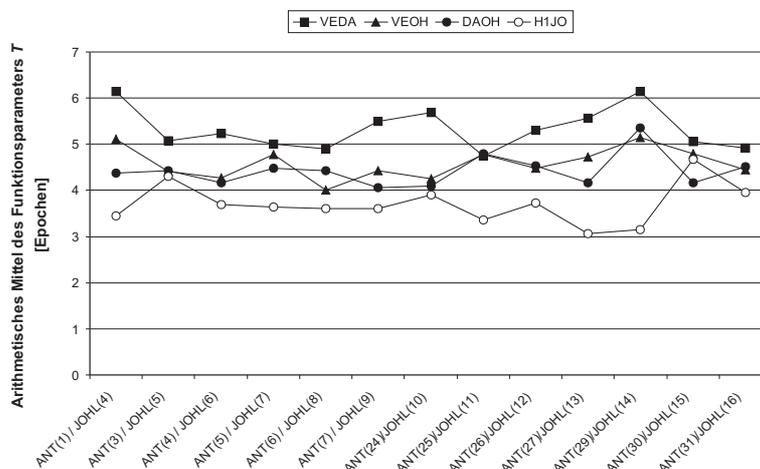


Abb. 5.31: Arithmetisches Mittel des Funktionsparameters  $T$  (Schwingungsdauer) der analytischen Korrelationsfunktion (4.28) über die verschiedenen Datensätze aus Abschnitt 5.1

Zwar liefert in Abbildung 5.31 die 14km-Basislinie H1JO meist das kleinste arithmetische Mittel für  $T$ , die Schätzungen aus den 127km bzw. 375km langen Basislinien DAOH bzw. VEOH liegen allerdings so nahe beieinander, dass von einer Abhängigkeit von der Basislinienlänge nicht gesprochen werden kann. Zudem macht die Detailanalyse der Schätzungen von  $T$  an einem Beobachtungstag der Basislinie VEOH in Abbildung 5.32 deutlich, dass keinerlei Abhängigkeit von der Länge der bearbeiteten Basislinie besteht. Viel eher zeigt sich eine relativ konstante Schätzung mit einem Mittelwert von 4 Epochen.

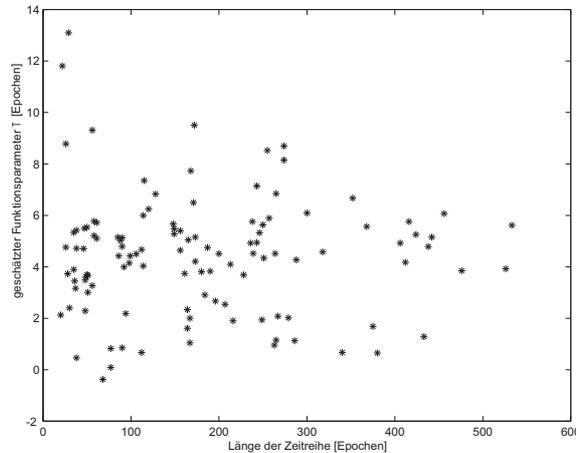


Abb. 5.32: Funktionsparameter  $T$  (Schwingungsdauer) der analytischen Korrelationsfunktion (4.28) in Abhängigkeit von der Länge der untersuchten Zeitreihen (Datengrundlage: VEOH30, Datenrate: 30s)

Somit kann zusammenfassend festgestellt werden, dass das in Abschnitt 4.4 vorgestellte Verfahren zur Bestimmung geeigneter analytischer Approximationen der empirischen Autokorrelationsfunktionen sehr gute Ergebnisse liefert. Unerlässlich ist dabei die Aufteilung der Approximationsfunktion in einen Rauschanteil (weißes Rauschen) und einen ab einem Zeitabstand von einer Epoche wirksamen Signalanteil (farbiges Rauschen). Die Parameter der analytischen Korrelationsfunktion können zum Teil, wie bei  $ND_1$ , direkt aus der Zeitreihe bestimmt werden. Der Parameter  $T$  muss jedoch auf der Basis der zuverlässig bestimmten Autokorrelationen (25% der gesamten Zeitreihe) geschätzt werden. Die Ergebnisse zeigen, dass der Teil der empirischen Autokorrelationsfunktionen, auf dessen Basis die Schätzung von  $T$  beruht (25% der Zeitreihe  $\rightarrow$  zuverlässig bestimmte Autokorrelationsfunktionen), sehr gut durch die analytische Korrelationsfunktion approximiert werden kann. Bei größeren Zeitabständen nähert sich die analytische Korrelationsfunktion schnell der Nulllinie. Da dieser Teil der empirischen Autokorrelationsfunktion leicht um Null schwankt und sich dabei nicht signifikant von unkorreliertem weißem Rauschen unterscheidet, kann jedoch auch hier von einer zutreffenden Repräsentation durch die analytische Korrelationsfunktion gesprochen werden.

Die Wirkungsdauer der zeitlichen Korrelationen kann, wie in Abschnitt 4.4.2 erläutert, anhand des Parameters  $ND_1$  beurteilt werden. Aus den dargestellten Ergebnissen resultieren dementsprechend mittlere Werte von  $ND_1$  für die Beobachtungstage zwischen 5 Minuten (=10 Epochen) bei kurzen Beobachtungssessions bzw. kurzen Basislinien und bis zu 15 Minuten (=30 Epochen) bei langen Basislinien mit 24h-Beobachtungen. Einzelwerte der Zeitreihen weichen davon naturgemäß ab und deuten auf maximale Korrelationslängen von bis zu 50 Minuten (=100 Epochen) hin.

#### 5.4.2 Auswirkung von Autokorrelationsfunktionen auf die Ausgleichungsergebnisse

In Abschnitt 5.4.1 wurden die Ergebnisse der Schätzung empirischer Autokorrelationsfunktionen bzw. daran angepasster analytischer Korrelationsfunktionen dargestellt und diskutiert. Diese Korrelationsfunktionen werden gemäß den Ausführungen in Abschnitt 4.5 in die Kovarianzmatrix der GPS-Doppeldifferenzbeobachtungen integriert ( $\rightarrow$  Modellbezeichnung: **M3**). Eine erneute Ausgleichung nach kleinsten Quadraten liefert dann neue Schätzungen für die unbekannten Parameter und deren Genauigkeiten. Im folgenden Abschnitt sollen diese Schätzungen in Analogie zu Abschnitt 5.3.3 dargestellt und im Vergleich zu den Schätzungen unter Berücksichtigung der Modelle M1, M2 und BS aus Abschnitt 5.3.2 für die Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen analysiert werden.

Zunächst ist in Abbildung 5.33 die Standardabweichung der Gewichtseinheit (vgl. Bemerkungen zu diesem Maß in Abschnitt 5.3.3) für die verschiedenen stochastischen Modellierungsvarianten dargestellt, wobei nur vergleichsweise geringe Abweichungen zwischen den Ergebnissen unter Verwendung von M2 und M3 auftreten. Ein deutlich unterschiedlicher Wert ist bei der Basislinie H1JO allenfalls beim Datensatz H1JO09 festzustellen, wo unter Berücksichtigung von M3 jedoch keine solch stark erhöhte Standardabweichung auftritt, wie dies bei den anderen Modellen M1, M2

und BS der Fall ist. Die Ergebnisse der Basislinie VEOH mit den Modellen M2 und M3 unterscheiden sich etwas stärker voneinander. Auch hier sind bei den stark gestörten Datensätzen VEOH24 und VEOH05 homogenere Ergebnisse mit Modell M3 als bei ausschließlicher Berücksichtigung der Varianzmodellierung mit dem Modell M2 festzustellen. Wird Modell M3 zur stochastischen Modellierung verwendet, so treten bei beiden Basislinien vergleichsweise geringe Schwankungen an den verschiedenen Beobachtungstagen auf. Dies deutet, insbesondere unter Berücksichtigung der Ergebnisse der stark gestörten Datensätze, auf eine zutreffende Modellierung der in diesen Daten vorhandenen Störungen durch Einbeziehen der zeitlichen Korrelationen und damit auf ein für alle untersuchten Datensätze gleichermaßen zuverlässiges Modell hin.

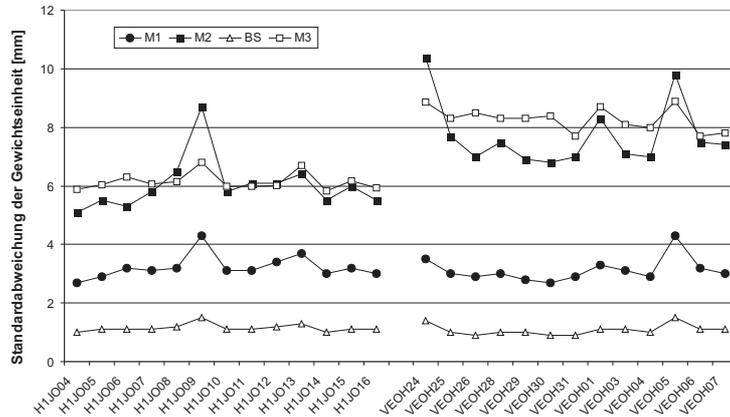


Abb. 5.33: Standardabweichung der Gewichtseinheit in Abhängigkeit von verschiedenen Varianten der Varianzmodellierung (M1, M2, BS und M3). Datengrundlage: H1JO und VEOH an jeweils 13 Beobachtungstagen.

Geht man zur Betrachtung der Stationskoordinaten bzw. der Abweichungen zu den Näherungskoordinaten in Abbildung 5.34 über, so können bei den Daten der Basislinie H1JO kaum Unterschiede zu den anderen Modellierungsvarianten festgestellt werden. Allenfalls bei der ellipsoidischen Höhe sind kleine, in der Regel nicht signifikante Abweichungen zu bemerken.

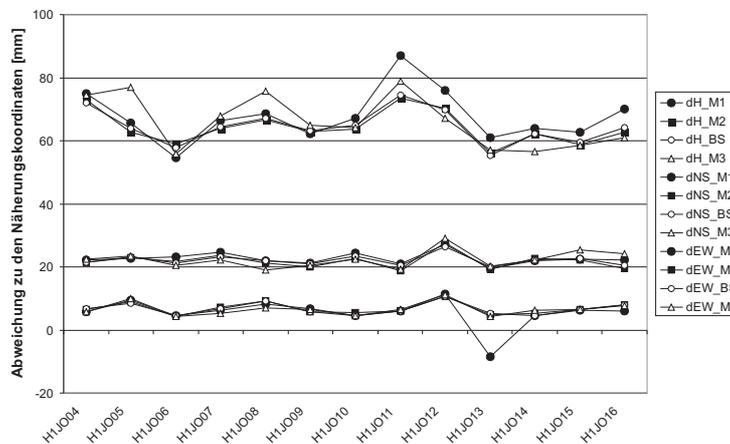


Abb. 5.34: Abweichungen der geschätzten Koordinaten (Nord-Süd-Komponente NS ( $\rightarrow$ dNS), Ost-West-Komponente EW ( $\rightarrow$ dEW) und ellipsoidische Höhe H ( $\rightarrow$ dH) der Station JOHL (Basislinie H1JO) zu den Näherungskoordinaten in Abhängigkeit von den Varianzmodellen M1, M2, BS und M3.

Diese Aussage trifft sowohl auf die NS-Koordinatenkomponente als auch auf die EW-Koordinatenkomponente der Basislinie VEOH zu (vgl. Abbildungen 5.35a und 5.35b). Betrachtet man die zugehörige ellipsoidische Höhe in Abbildung 5.35c, so treten allerdings, wie bereits in Abschnitt 5.3.3 erläutert, deutliche Unterschiede zwischen den verschiedenen stochastischen Modellierungen auf.

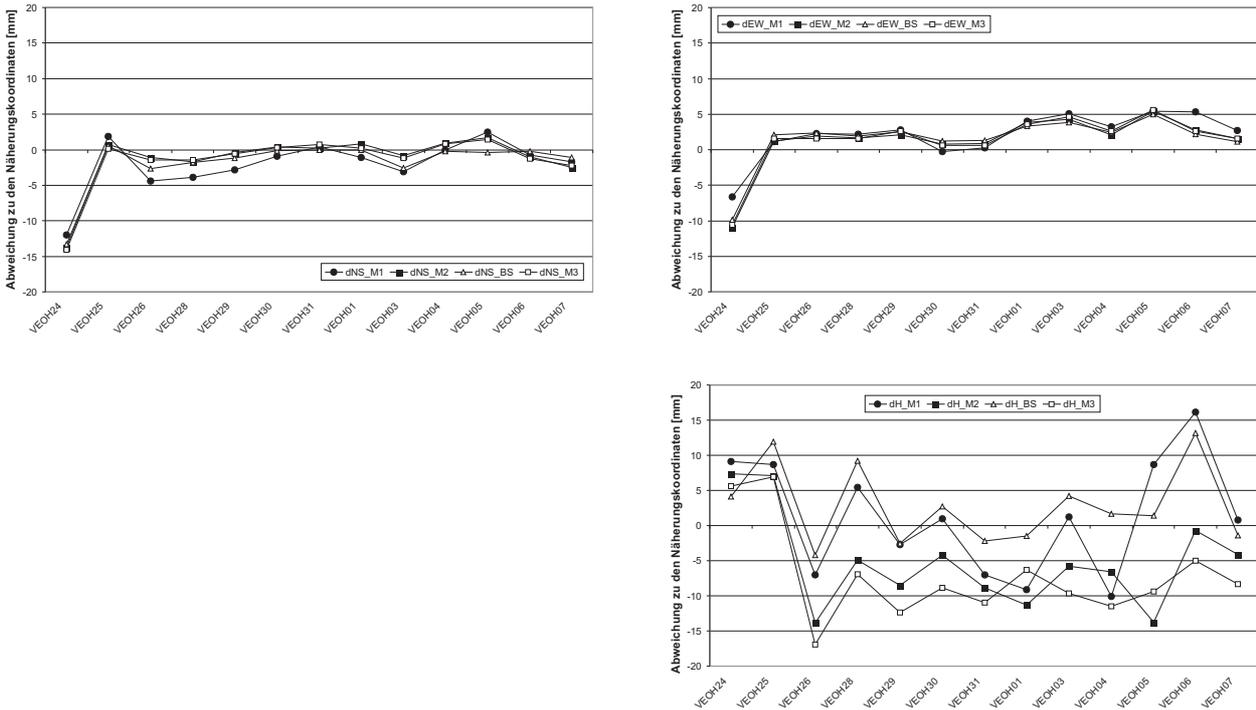


Abb. 5.35: Abweichungen der geschätzten Koordinaten (Nord-Süd-Komponente NS ( $\rightarrow$ dNS), Ost-West-Komponente EW ( $\rightarrow$ dEW) und ellipsoidische Höhe H ( $\rightarrow$ dH) der Station O'Higgins (Basislinie: VEOH) zu den Näherungskoodinaten in Abhängigkeit der Varianzmodelle M1, M2, BS und M3

Es zeigt sich, dass die Erweiterung der Kovarianzmatrix gemäß Modell M3 zu ähnlichen Ergebnissen wie unter Berücksichtigung von M2 führt. Hier weicht die ellipsoidische Höhe mit einem arithmetischen Mittel über die verschiedenen Beobachtungstage von  $-7.2\text{mm}$  (im Vergleich zu  $-5.2\text{mm}$  bei M2) noch deutlicher von den Näherungskoodinaten ab, als dies bei der Varianzmodellierung M2 der Fall ist. Außerdem sind im Vergleich zu Modell M2 etwas homogenere Ergebnisse über die Beobachtungstage hinweg festzustellen, was durch die relativ zu den anderen Modellierungsvarianten wesentlich geringere Standardabweichung über die verschiedenen Beobachtungstage von  $4.7\text{mm}$  verdeutlicht wird (vgl. Ergebnisse in Abschnitt 5.3.3  $\rightarrow$  M1:  $8.2\text{mm}$ , BS:  $6.7\text{mm}$ , M2:  $5.6\text{mm}$ ). Aufgrund der deutlich verbesserten Reproduzierbarkeit der Koordinatenkomponenten über die verschiedenen Beobachtungstage hinweg kann trotz der starken Abweichungen der ellipsoidischen Höhe sowohl im Vergleich zu den Näherungskoodinaten als auch zu den anderen stochastischen Modellierungsvarianten von einer zuverlässigen Schätzung ausgegangen werden.

Deutliche Systematiken sind ebenso bei den Genauigkeiten der Stationskoordinaten festzustellen. Aufgrund ähnlicher Ergebnisse bei der EW- und NS-Koordinatenkomponente ist in Abbildung 5.36 analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 5.3.3 nur die NS-Koordinatenkomponente dargestellt. Unter Berücksichtigung von M3 treten dabei an allen Beobachtungstagen deutlich größere Schätzwerte für die Standardabweichungen auf als bei den Modellen ohne Berücksichtigung zeitlicher Korrelationen. Im Vergleich zur herkömmlichen Modellierung M1 kann ein Vergrößerungsfaktor von 1.5 bis 2 bei der Basislinie H1JO und von bis zu 2.5 bei VEOH festgestellt werden. Ein interessanter Aspekt ist dabei, dass sich die Genauigkeit bei der Basislinie H1JO bei ausschließlicher Modellierung der Varianzstruktur (M2 und BS) verbessert, während sie sich unter Berücksichtigung der zeitlichen Korrelationen (M3) verschlechtert bzw. einem realistischen Niveau annähert. Dieser Effekt ist jedoch bei VEOH nicht festzustellen, da sich die Ergebnisse unter Berücksichtigung von M1, M2 und BS kaum unterscheiden. Über die verschiedenen Beobachtungstage bleibt bei Anwendung von Modell M3 jedoch, analog zu den anderen Varianten der stochastischen Modellierung, eine relativ konstante Genauigkeitssituation erhalten.

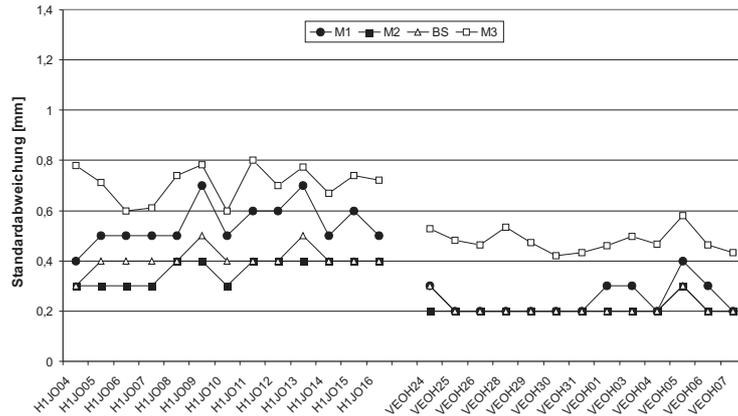


Abb. 5.36: Schätzwerte für die Standardabweichung der NS-Koordinatenkomponenten der Stationen JOHL (Basislinie: H1JO) und O'Higgins (Basislinie: VEOH) in Abhängigkeit von den Varianzmodellen M1, M2, BS und M3

Die geschätzten Standardabweichungen der ellipsoidischen Höhe in Abbildung 5.37 zeigen ein tendenziell ähnliches Bild. Aufgrund der prinzipiell größeren Schätzwerte für die Standardabweichung bei der ellipsoidischen Höhe im Vergleich zur NS-Koordinatenkomponente tritt die Änderung deutlich stärker hervor, obwohl ein ähnlicher Vergrößerungsfaktor (H1JO: ca. 1.5 bis 2, VEOH: bis zu 2.5 bei Berücksichtigung von M3 im Vergleich zu M1) wie bei der NS-Koordinatenkomponente ermittelt werden kann. Neben der Homogenität über die verschiedenen Beobachtungstage hinweg fallen zudem die potentiell stärker gestörten Datensätze H1JO09, VEOH24 und VEOH05 auf, wobei die geschätzten Standardabweichungen in den Daten der Basislinie VEOH sich nicht wesentlich von den anderen Beobachtungstagen unterscheiden. Dies lässt auf eine bessere Modellierung der Störungen in den Daten, unter Umständen durch die bei der Korrelationsschätzung mitgeführten Trendeffekte, durch die Berücksichtigung der zeitlichen Korrelationen schließen. Im Gegensatz zu den Ergebnissen aus Abbildung 5.33 sind in Abbildung 5.37 grundsätzlich stark vergrößerte Schätzwerte für die Standardabweichung unter Anwendung des Modells M3 im Vergleich zu den unkorrelierten Modellen M1, M2 und BS festzustellen. Über den Verlauf der Beobachtungstage hinweg kann jedoch eine mit der herkömmlichen bzw. alternativen stochastischen Modellierung (M1 bzw. M2 und BS) vergleichbare Homogenität der Standardabweichung und eine deutlich realistischere Einschätzung der Genauigkeitssituation erreicht werden.

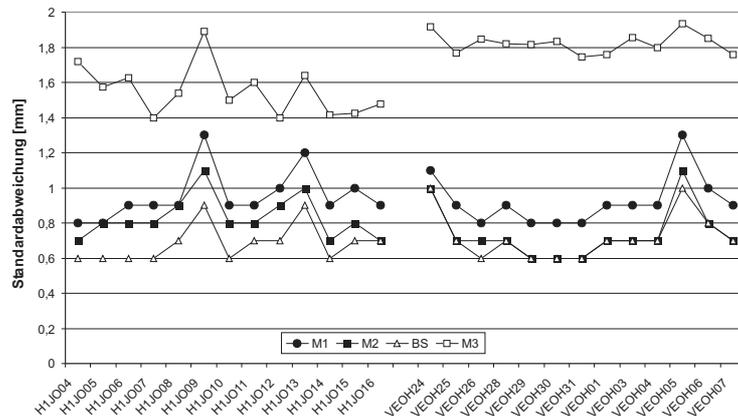


Abb. 5.37: Schätzwerte für die Standardabweichung der geschätzten ellipsoidischen Höhe der Stationen JOHL (Basislinie: H1JO) und O'Higgins (Basislinie: VEOH) in Abhängigkeit von den Varianzmodellen M1, M2, BS und M3

Somit kann zusammengefasst werden, dass das in den Abschnitten 4.4 und 4.5 vorgestellte Verfahren eine zuverlässige Bestimmung und Berücksichtigung zeitlicher Korrelationen im stochastischen Modell der Kleinste-Quadrate-Ausgleichung ermöglicht. Aufgrund der über die verschiedenen Beobachtungstage sehr homogenen Ergebnisse kann auf eine zutreffende stochastische Modellierung geschlossen werden. Es zeigt sich, dass die Koordinaten der Basislinie H1JO durch die Berücksichtigung zeitlicher Korrelationen kaum beeinflusst werden. Die Genauigkeitssituation der Stationskoordinaten ändert sich jedoch deutlich, wobei die Schätzwerte für die Standardabweichung der Koordinatenkomponenten auf das 1.5 bis 2-fache der herkömmlichen Modellierung ansteigen. Die modellierten zeitlichen Korrelationen beeinflussen zwar die NS- und die EW-Koordinatenkomponente der Basislinie VEOH ebenfalls nur geringfügig,

demgegenüber weist die ellipsoidische Höhe jedoch deutliche Unterschiede insbesondere zu den Modellierungsvarianten M1 und BS auf. Die deutlich bessere Reproduzierbarkeit sowie die homogenere Genauigkeitsstruktur deuten zudem auf eine wesentlich bessere Modellierung von Störeffekten im Datenmaterial hin. Der Genauigkeitsfaktor, mit dem sich die Standardabweichung gegenüber der einfachen Modellierung M1 vergrößert, wächst bei dieser Basislinie bis zu einem Wert von 2.5. Ob dabei eine Abhängigkeit von der Basislinienlänge vorliegt, wie sich dies andeutet, muss gegebenenfalls in weiteren Untersuchungen geklärt werden.

Diese Ergebnisse korrespondieren sehr gut mit den in Howind et al. (2000) dargestellten Ergebnissen der Parameterschätzung, wo trotz abweichender Varianz- und Korrelationsmodellierung u.a. Genauigkeitsfaktoren zwischen 1.6 und 2.3 ermittelt wurden. Aufgrund der im Vergleich zu M1 kleineren Standardabweichung bei M2 und BS, wo ausschließlich elevationsabhängige Varianzfunktionen und keine Korrelationen berücksichtigt werden, sind die Unterschiede der Koordinatengenauigkeiten zwischen dem Modell M3 und diesen alternativen Modellierungen M2 und BS deutlich größer. Insbesondere unter Berücksichtigung der Modellierungsvariante BS liefert die Kleinste-Quadrate-Ausgleichung deutlich unrealistischere Genauigkeitsangaben.

Die Anwendung individuell bestimmter, zeitlicher Korrelationen in Kombination mit individuell geschätzten Varianzfunktionen im Modell M3 führt somit bei kurzen Basislinien zwar nicht zu Änderungen der geschätzten Stationskoordinaten, aber zu deutlich realistischeren Genauigkeitsangaben als dies bei den vereinfachten stochastischen Modellierungen der Fall ist. Bei langen Basislinien kann neben einer realistischeren Genauigkeitsstruktur eine bessere Reproduzierbarkeit und eine geringere Beeinflussung der geschätzten Parameter durch Störungen im Datenmaterial festgestellt werden.

Damit werden auch bei kleinräumigen Netzen die Ergebnisse der auf diesen Genauigkeitsmaßen aufbauenden statistischen Tests beeinflusst. Insbesondere jedoch bei regionalen GPS-Projekten aus dem Bereich der Deformationsanalyse sind solche Testergebnisse kritisch zu beurteilen, da ein Nachweis von Punktverschiebungen auf dieser Basis unzutreffende Ergebnisse liefern kann und daraus resultierende Aussagen somit in Frage gestellt werden müssen.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

Die Auswertung von GPS-Trägerphasenbeobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert nur dann zuverlässige Ergebnisse, wenn sowohl das funktionale als auch das stochastische Modell die Realität zutreffend beschreibt. Dieser Gedanke war Ausgangspunkt für die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit. Nach der ausführlichen Dokumentation der herkömmlichen funktionalen und stochastischen Modellbildung im Kontext der Berner GPS-Software konnte im Rahmen der Diskussion dieser Modelle dargelegt werden, dass insbesondere das stochastische Modell der GPS-Trägerphasenbeobachtungen unvollständig ist bzw. die Realität nur unzureichend repräsentiert. Diese These wurde anhand vielfältiger Veröffentlichungen untermauert bzw. für Einzeldaten statistisch signifikant nachgewiesen. Vorschläge zur Verbesserung des stochastischen Modells enthalten diese Veröffentlichungen jedoch meist nur ansatzweise. Dieses Defizit diente als Motivation zur Entwicklung eines Verfahrens zur Analyse und Verbesserung des stochastischen Modells der GPS-Trägerphasenbeobachtungen bzw. zur Erweiterung der herkömmlich als skalierte Einheitsmatrix repräsentierten Kovarianzmatrix der GPS-Trägerphasenbeobachtungen bzw. der daraus ableitbaren Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen. Das in Kapitel 4 beschriebene Verfahren zur Analyse und Modifikation dieser Matrix gliedert sich im Wesentlichen in zwei Schritte:

- (1) Die Schätzung von Varianzfunktionen zur Modifikation der Hauptdiagonale der Kovarianzmatrix der GPS-Doppeldifferenzbeobachtungen.
- (2) Bestimmung von Autokorrelationsfunktionen zur Modellierung zeitlicher Korrelationen in der Kovarianzmatrix der GPS-Doppeldifferenzbeobachtungen.

Dabei wurden alle Verfahrensschritte mit Hilfe verschiedener Kenngrößen wie z.B. dem multiplen Bestimmtheitsmaß beurteilt und mit Hilfe statistischer Tests überprüft. Im Rahmen der Auswertung nach kleinsten Quadraten nicht hinreichend modellierte funktionale oder stochastische Effekte spiegeln sich in den Residuen nach der Ausgleichung wider. Diese Abweichungen von einem White Noise Prozess können dann u.a. mit Hilfe von Methoden der Zeitreihenanalyse untersucht werden und dienen als Grundlage der Varianz- bzw. Korrelationsschätzung.

Der erste Verfahrensschritt, die Schätzung von Varianzfunktionen, dient einerseits der zutreffenden Modellierung der Varianzstruktur der GPS-Beobachtungen bzw. der Modifikation der Hauptdiagonale der Kovarianzmatrix der GPS-Beobachtungen und damit der Verbesserung der Auswertequalität. Andererseits können dadurch auch Schwankungen der Varianz innerhalb einer Zeitreihe (Heteroskedastizität) beseitigt werden, wodurch stationäre Zeitreihen zur zuverlässigen Bestimmung zeitlicher Korrelationen zur Verfügung gestellt werden können. Die Varianzfunktionen wurden dabei in Abhängigkeit von der Elevation der an einer Doppeldifferenz beteiligten Satelliten bestimmt. Da die Bestimmung und Weiterverarbeitung dieser Funktionen auf der Basis von Doppeldifferenzen beruht, wurde dazu eine Funktion aller vier beteiligten Satellitenelevationen auf der Basis der in der Berner GPS-Software (BS) für jeweils einen Satelliten verwendeten Funktion entwickelt. Im Gegensatz zu dieser in der BS verwendeten einheitlichen bzw. allgemeingültigen Varianzfunktion, bei der den Signalen unterschiedlicher Satelliten in gleicher Elevation eine einheitliche Varianz zugeordnet wird, wurden im Rahmen dieser Arbeit für jede Doppeldifferenzzeitreihe individuelle Varianzfunktionen bestimmt. Die Untersuchungen zeigten, dass diese individuell bestimmten Varianzfunktionen eine weitaus zutreffendere Modellierung des tatsächlichen Genauigkeitsniveaus der GPS-Beobachtungen auch in niedrigen Elevationsbereichen erlauben. Dies kann u.a. dadurch erklärt werden, dass bei der Bestimmung der festen Varianzfunktionen sehr große Datenmengen verwendet wurden, wodurch der Einfluss von Beobachtungen in höheren Elevationen dominiert und die Beobachtungen in niedrigen Elevationen extrem herabgewichtet werden. Bei der individuellen Verarbeitung der Zeitreihen werden demgegenüber ausschließlich die Daten der tatsächlich bearbeiteten Zeitreihe zur Schätzung der Varianzfunktion verwendet, wodurch der Anteil der Beobachtungen in niedrigen Elevationen dem der tatsächlich zur Schätzung verwendeten Beobachtungen entspricht und somit der beherrschende Einfluss der Beobachtungen in höheren Elevationen entfällt. Daher wurde ein Verfahren auf der Basis einer linearen Regression entwickelt, mit dem eine zuverlässige Bestimmung individueller Varianzfunktionen möglich ist. In den Residuenzeitreihen vorhandene Trendeffekte, die die Schätzung der Varianzfunktionen beeinflussen können, werden dabei durch Bildung von Epochendifferenzen eliminiert. Nach Integration dieser Varianzfunktionen in die Kovarianzmatrix der GPS-Doppeldifferenzbeobachtungen und nachfolgender Auswertung mit dem erweiterten stochastischen Modell sind die resultierenden Residuenzeitreihen potentiell homoskedastisch und können bzgl. der in den Daten verbliebenen Korrelationen untersucht werden. Dabei treten die bei der Varianzschätzung durch Differenzbildung beseitigten Trendeffekte erneut in den Residuenzeitreihen auf. Da jedoch eine Trennung zwischen den Trendeffekten und den in den Daten vorhandenen Korrelationen schwierig ist, wurde in

diesem Schritt auf eine weitergehende Bearbeitung verzichtet. Die zeitlichen Korrelationen wurden durch Anpassung analytischer Funktionen an die empirischen Autokorrelationsfunktionen modelliert. Dabei konnte eine in vorherigen Untersuchungen gefundene analytische Funktion weiterentwickelt werden, die auf der Aufteilung der Korrelationsfunktion in ein stochastisches Signal (farbiges Rauschen) und einen unkorrelierten Rauschanteil (weißes Rauschen) basiert. Eine erneute Auswertung nach kleinsten Quadraten ermöglicht durch die Integration der analytischen Korrelationsfunktionen in die bereits auf der Hauptdiagonale mit den geschätzten Varianzfunktionen modifizierte Kovarianzmatrix der GPS-Doppeldifferenzbeobachtungen realistischere Aussagen bzgl. der unbekannt Parameter der Ausgleichung und dabei insbesondere der Stationskoordinaten und deren Genauigkeiten.

Dieses Verfahren wurde auf Datensätze unterschiedlicher Charakteristik angewendet. Neben einer kurzen Basislinie in mittleren Breiten wurden Daten auf vergleichsweise langen Basislinien aus dem antarktischen Bereich an jeweils 13 Beobachtungstagen untersucht. Dabei zeigte sich, dass der Modifikation der Varianzstruktur der GPS-Beobachtungen mit individuellen Varianzfunktionen insbesondere bei guter Datenqualität bzw. gut vorverarbeiteten Daten der Vorzug vor einer festen Varianzfunktion, wie sie in der BS propagiert wird, zu geben ist. Stark gestörte Daten bzw. sehr kurze Beobachtungszeiten erschweren die Schätzung der individuellen Varianzfunktion, weshalb in solchen Fällen die feste Varianzfunktion der BS zu bevorzugen ist. In allen Fällen ist jedoch die Verwendung einer elevationsabhängigen Varianzfunktion einem ungewichteten Modell vorzuziehen.

Die Auswertung mit der auf der Hauptdiagonalen modifizierten Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen führt i.d.R. nur zu geringen Änderungen in den horizontalen Komponenten der Stationskoordinaten. Jedoch treten bei den Schätzungen der ellipsoidischen Höhe der Stationen auf langen Basislinien mit systematischen Änderungen von bis zu fünf Millimetern erhebliche Abweichungen zu den Ergebnissen mit den vereinfachten stochastischen Modellierungsvarianten auf. Die Genauigkeitsstruktur der Stationskoordinaten wird durch die Modifikation der Varianzstruktur der Beobachtungen nur gering beeinflusst. Allenfalls deuten sich Verbesserungen in der Varianzstruktur der Doppeldifferenzresiduen und damit eine verbesserte Identifizierbarkeit von Datensätzen mit schlechter Beobachtungsqualität an.

Die Ergebnisse der Korrelationsuntersuchungen zeigen, dass zeitliche Korrelationen in unterschiedlicher Ausprägung in den Daten präsent sind. Treten bei den Daten der kurzen Basislinie Korrelationszeiten (Zeit bis zur ersten Nullstelle der Autokorrelationsfunktion) von ca. fünf Minuten auf, so sind bei den langen Basislinien Korrelationszeiten von 15 Minuten die Regel. In Einzelfällen wirken die zeitlichen Korrelationen sogar über einen Zeitraum von bis zu 50 Minuten. Diese unterschiedliche Ausprägung der zeitlichen Korrelationen in Abhängigkeit von der Basislinienlänge bzw. von der Beobachtungsdauer kann auch in den geschätzten Parametern der Ausgleichung identifiziert werden. Die Stationskoordinaten der kurzen Basislinie werden dabei aufgrund der schnell abklingenden zeitlichen Korrelationen kaum von der veränderten Modellbildung beeinflusst. Demgegenüber sind bei den langen Basislinien signifikante Änderungen von bis zu sieben Millimetern primär bei der ellipsoidischen Höhe festzustellen. Die Standardabweichungen der Stationskoordinaten weisen nur eine geringe Abhängigkeit von der Basislinienlänge bzw. von der Beobachtungsdauer auf. Sie verschlechtern sich gegenüber der herkömmlichen stochastischen Modellierung bei kurzen Basislinien homogen um den Faktor 1.5-2, bei langen Basislinien um den Faktor 2.5. Damit nähern sie sich den aus der Erfahrung bekannten realistischen Genauigkeitsangaben. Zudem sind die geschätzten Parameter weniger sensitiv gegenüber Störungen im Datenmaterial und ermöglichen dadurch eine bessere Reproduzierbarkeit der Stationskoordinaten über mehrere Beobachtungstage hinweg.

Die dargestellten Ergebnisse zeigen, dass neben der direkten Beeinflussung der Stationskoordinaten durch die erweiterte stochastische Modellbildung, die primär bei langen Basislinien zum Tragen kommt, insbesondere die Genauigkeitsstruktur erhebliche Änderungen erfährt. Im Zuge der statistischen Beurteilung der GPS-Beobachtungen, des Ausgleichungsmodells sowie der Ergebnisse der Parameterschätzung, insbesondere in Projekten zum statistisch gesicherten Nachweis von Punktbewegungen (wie bei den untersuchten Daten aus dem antarktischen Bereich) sind zuverlässige Genauigkeitsangaben unerlässlich. Daher kann bei großräumigen Netzen mit hohen Genauigkeitsanforderungen auf eine erweiterte stochastische Modellbildung nicht verzichtet werden, während bei GPS-Messungen bzw. -auswertungen mit untergeordneten Genauigkeitsanforderungen eine aufwändige stochastische Modellierung nicht zwingend notwendig ist.

Diese Arbeit liefert somit als wesentliches Ergebnis ein praxistaugliches Verfahren zur Analyse und Verbesserung des stochastischen Modells der GPS-Trägerphasenbeobachtungen, das die zuverlässige Bestimmung elevationsabhängiger Varianzfunktionen sowie zeitlicher Korrelationen auf der Basis von GPS-Doppeldifferenzbeobachtungen ermöglicht. Die Integration dieser geschätzten Funktionen in die Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen ermöglicht eine erweiterte, realistischere Modellbildung, als die herkömmlich verwendete Variante. Die Ergebnisse der Beispieldaten deuten darauf hin, dass zumindest für kurze Basislinien mit vergleichsweise kurzen Beobachtungszeiten trotz

einer deutlichen Verbesserung der Modellbildung der notwendige Aufwand zur Analyse und erneuten Auswertung die zumeist sehr geringen Unterschiede in den Ergebnissen der Ausgleichung nicht rechtfertigt. Die horizontalen Komponenten der Stationskoordinaten von langen Basislinien sind zwar ebenfalls kaum von der veränderten Modellbildung beeinflusst, die vertikale Komponente erfährt jedoch teilweise erhebliche Veränderungen. Zudem können deutlich realistischere Genauigkeiten aller Koordinatenkomponenten festgestellt werden. Im Zuge der Auswertung und Interpretation großräumiger Überwachungsnetze erscheint eine erweiterte stochastische Modellbildung, wie sie im Rahmen dieser Arbeit vorgeschlagen wird daher unerlässlich.

## 6.2 Ausblick

Durch die Anwendung des vorgestellten Verfahrens zur Analyse und Modifikation des stochastischen Modells von GPS-Doppeldifferenzbeobachtungen auf Datensätze unterschiedlicher Charakteristik konnte gezeigt werden, dass eine Erweiterung bzw. Verbesserung des stochastischen Modells mit vertretbarem Aufwand möglich ist. Dieses Verfahren kann im aktuellen Entwicklungsstadium unter den vorgegebenen Rahmenbedingungen ohne weitere Anpassung bei der GPS-Auswertung eingesetzt werden. Dennoch sind Verfeinerungen innerhalb des bestehenden Konzepts, Erweiterungen bzw. neue Anwendungsgebiete denkbar und damit hinreichend Raum bzw. Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen vorhanden.

Eine Frage, die bei der Diskussion des Analyseverfahrens aufgeworfen wurde, ist der Umgang mit den in den Residuenzeitreihen auftretenden **Trendeffekten**. Dabei ist einerseits an eine zuverlässige Beseitigung dieser Effekte im Rahmen der Vorverarbeitung zu denken oder alternativ an eine Modellierung bzw. Berücksichtigung im funktionalen Modell der GPS-Auswertung. Zur Steigerung der Zuverlässigkeit bzw. Repräsentativität der geschätzten Varianz- bzw. Korrelationsfunktionen sind zudem Untersuchungen zu Abhängigkeiten zwischen den jeweiligen **Funktionsparametern** und den Eigenschaften des Datenmaterials (Länge der Zeitreihe, Länge der Basislinie, ...) wünschenswert. Ein neuer Aspekt ist die **Behandlung von Ausreißern** in den Residuenzeitreihen. Durch die Homogenität der Ergebnisse infolge der erweiterten stochastischen Modellierung konnte gezeigt werden, dass evtl. vorhandene Ausreißer im Datenmaterial die Ergebnisse nicht signifikant beeinflussen. Zur Steigerung der Zuverlässigkeit der Ergebnisse ist es jedoch wünschenswert, geeignete Methoden zur Detektion und Berücksichtigung von Ausreißern, z.B. mit Hilfe robuster Verfahren zur Schätzung der Varianzfunktion, in das vorgestellte Analyseverfahren zu integrieren.

Neben diesen Verfeinerungen der Residuenanalyse sind zusätzliche Erweiterungen denkbar. Im Vordergrund steht dabei der im Rahmen dieser Arbeit verworfene Ansatz zur Modellierung von zeitlichen Korrelationen durch **Anpassung stochastischer Prozesse** an die Residuenzeitreihen. Neben einer verbesserten Vorverarbeitung der Residuenzeitreihen zur Minimierung von Fehlidentifikationen des relevanten stochastischen Prozesses müssen Verfahren zur automatisierten sowie rechentechnisch effizienten Bestimmung des stochastischen Prozesses gefunden bzw. entwickelt werden. Ansätze hierzu sind Bischoff et al. (2005c) zu entnehmen. Des Weiteren ist neben der Modellierung zeitlicher Korrelationen auch an die **Modellierung räumlicher Korrelationen** z.B. auf der Basis der Kreuzkorrelationen unterschiedlicher Residuenzeitreihen sowie von Kombinationen von zeitlichen und räumlichen Korrelationen zu denken. Die Berücksichtigung dieser Korrelationen in der Kovarianzmatrix der Doppeldifferenzbeobachtungen führt jedoch i.d.R. zu nahezu vollbesetzten Kovarianzmatrizen. In diesem Fall kann kein Verfahren zur Speicherung bzw. Verarbeitung dünn besetzter Matrizen, wie im Rahmen der vorliegenden Arbeit, angewendet werden. Daher müssen alternative, sowohl numerisch stabile als auch rechentechnisch effiziente Verfahren zur Schätzung der unbekannt Parameter der Ausgleichung gefunden werden. Geht man von der Verarbeitung einzelner Basislinien zur Prozessierung von GPS-Netzen mit einer großen Anzahl von Beobachtungsstationen über, so wird diese Problematik noch verschärft.

Diese Vorschläge zur Erweiterung des Analyseverfahrens können jeweils unabhängig voneinander realisiert werden. Die Auswirkung jeder Änderung sollte jedoch anhand umfangreichen Datenmaterials überprüft werden. Grundsätzlich ist eine breite Datengrundlage wünschenswert, um die Allgemeingültigkeit der in dieser Arbeit getroffenen Aussagen zu untermauern. Zudem müssen weitere Untersuchungen klären, ob die veränderte stochastische Modellbildung und die damit einhergehende Beeinflussung der geschätzten Parameter und deren Genauigkeiten Auswirkungen auf daraus abgeleitete Maße wie z.B. die **Signifikanz von Punktverschiebungen im Rahmen von Projekten zur Deformationsanalyse** haben. Sollte dies der Fall sein, so müssten in der Vergangenheit getroffene Aussagen kritisch hinterfragt werden.

Im aktuellen Entwicklungsstadium ist das vorgestellte Analyseverfahren als ein externes Modul mit Schnittstellen zur Berner GPS-Software realisiert. Eine vollständige **Integration in die BS** ist prinzipiell möglich, wodurch die Analyse der gegenseitigen Beeinflussung zwischen funktionalem und stochastischen Modell wesentlich erleichtert würde. Zu-

dem böte sich damit eine einfache Möglichkeit der Verknüpfung aktueller Entwicklungen im Bereich der funktionalen Modellbildung (z.B. troposphärische Modellierung) mit Verbesserungen beim stochastischen Modell und damit eine erhöhte Zuverlässigkeit der geschätzten Varianz- und Korrelationsfunktionen. Ein solches integriertes Verfahren eröffnet außerdem die Möglichkeit, die erweiterte Kovarianzstruktur der GPS-Beobachtungen auch auf andere Verarbeitungsschritte der GPS-Auswertung anzuwenden. Beispielhaft sei hier die **Lösung der Phasenmehrdeutigkeiten** genannt, deren Ergebnisse nach Teunissen (1997) und El-Rabbany (1994) kaum von der veränderten stochastischen Modellierung beeinflusst werden, während Wang et al. (2002) von geringfügig zuverlässigeren bzw. realistischeren Schätzungen mit erweiterter stochastischer Modellierung berichten.

Bei dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren werden Residuenzeitreihen aus der Auswertung doppelt differenzierter GPS-Trägerphasenbeobachtungen analysiert. Prinzipiell können die verwendeten Methoden aber auch auf Residuen aus der Auswertung originärer bzw. undifferenzierter GPS-Trägerphasenbeobachtungen angewendet werden. Gleichermassen ist an die Übertragung der vorgestellten Konzepte und Methoden auf den Bereich der Echtzeitanwendungen zu denken, wobei dann allerdings eingehende Untersuchungen zur Problematik der Schätzung von Varianz- bzw. Korrelationsfunktionen auf der Grundlage weniger Beobachtungen notwendig sind. Schlussendlich kann der Anwendungsbeereich auch über die GPS-Auswertung hinaus ausgedehnt werden und es können andere geodätische Zeitreihen z.B. GRACE- oder GOCE-Beobachtungen mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens analysiert werden.

## Dank

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. B. Heck für die Übernahme des Hauptreferats und den Rückhalt während der Anfertigung der Arbeit. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Kutterer bedanke ich mich sehr herzlich für viele interessante Anregungen zu verschiedenen Themen der Arbeit und die Bereitschaft zur Übernahme des Korreferats sowie für seine dauerhafte engagierte Unterstützung während meiner gesamten Zeit am Geodätischen Institut (GIK) der Universität Karlsruhe (TH).

Allen ehemaligen Kollegen am GIK gilt mein Dank für die fachliche Unterstützung sowie zahlreiche spannende Diskussionen auch abseits der Geodäsie. Frau Karin Faulhaber und Herrn Andy Brezing danke ich sehr herzlich für die Durchsicht und Korrektur des Manuskripts.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Nelly für ihre Geduld und Nachsicht sowie dafür, dass sie mir half auch während der Fertigstellung der Arbeit den Blick für das Wesentliche nicht zu verlieren.

Finanziell unterstützt wurde die vorliegende Arbeit von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des Forschungsprojekts „Geokinematische Analysen in einem regionalen GPS-Netz mit stochastischen Modellansätzen“. In diesem Zusammenhang sei den Projektpartnern vom Institut für Mathematische Stochastik der Universität Karlsruhe, Herrn Prof. Dr. Wolfgang Bischoff und Dipl.-Math. Annette Teusch herzlich für die fruchtbare Zusammenarbeit gedankt.

## Lebenslauf

- 3. Mai 1969 geboren in Hockenheim
- 1975-1979 Grundschule in Schwetzingen
- 1979-1985 Realschule in Schwetzingen
- 1985-1988 Technisches Gymnasium in Mannheim
- 1988 Praktikum beim Stadtvermessungsamt Mannheim
- 1989-1990 Grundwehrdienst
- 1990-1996 Studium des Vermessungswesens an der Universität Karlsruhe (TH)
- 1996-2004 wissenschaftlicher Angestellter am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe (TH)

## Literaturverzeichnis

- Ananga N, Coleman R, Rizos C (1994) *Variance-covariance estimation of GPS-networks*. Bulletin Geodesique 68: 77-87.
- Barnes B, Ackroyd N, Cross P (1998) *Stochastic modeling for very high precision real-time kinematic GPS in an engineering environment*. Proceedings FIG XXI international Conference, Brighton: 61-76.
- Bartlett M (1937) *Properties of sufficiency and statistical tests*. Proceedings of the Royal Society, Serie A, Nr.160: 268-282.
- Bendat J, Piersol A (1986) *Random data: Analysis and measurement procedures*. 2. Auflage, Wiley&Sons, New York.
- Bischoff W, Heck B, Howind J, Teusch A (2005a) *A procedure for testing the assumption of homoscedasticity in least squares residuals: a case study of GPS carrier-phase observations*. Journal of Geodesy 78: 397-404.
- Bischoff W, Heck B, Howind J, Teusch A (2005b) *A procedure for estimating the variance function of linear models and for checking the appropriateness of estimated variances. Case study: GPS carrier-phase observations*. Journal of Geodesy (in Review).
- Bischoff W, Heck B, Howind J, Teusch A (2005c) *Estimating the covariance function of time series: a case study of GPS carrier phase observations*. Journal of Geodesy (in Vorbereitung).
- Black H, Eisner A (1984) *Correcting satellite doppler data for tropospheric effects*. Journal of Geophysical Research, 89(D2): 2616-2626.
- Böder V (2002) *Zur hochpräzisen GPS-Positions- und Lagebestimmung unter besonderer Berücksichtigung mariner Anwendungen*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr.244.
- Bona P (2000) *Precision, cross correlation and time correlation of GPS phase and code observations*. GPS Solutions 4(2): 3-13.
- Borch R, Mayer M, Lindner K, Depenthal C, Heck B (2003) *The whole extent of the Antarctica*. German Research (25), 3/2003: 4-8.
- Borre K, Tiberius C (2001) *Time series analysis of GPS observables*. In: Proceedings of the 13th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, Salt Lake City: 1885-1894.
- Box G, Jenkins G (1976) *Time series analysis: Forecasting and control*. Holden-Day, San Francisco.
- Braasch M (1996) *Multipath effects*. In: Parkinson B, Spilker J (Herausgeber) *Global Positioning System. Theory and applications, Volume I*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington: 547-568.
- Brockwell P, Davis R (2000) *Time series: Theory and methods*. 2.Auflage, Springer, New York.
- Bronstein I, Semendjajew K, Musiol G, Mühlig H (2001) *Taschenbuch der Mathematik*. 5.Auflage, Deutsch, Thun.
- Brunner F, Hartinger H, Troyer L (1999) *GPS signal diffraction modelling: the stochastic SIGMA- $\Delta$  model*. Journal of Geodesy 73: 259-267.
- Butsch F (2001) *Untersuchungen zur elektromagnetischen Interferenz bei GPS*. Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik der Universität Stuttgart, Nr.2001.1.
- Butsch F, Kipka A (2004) *Die Bedeutung des Signal- zu Rauschverhältnisses und verwandter Parameter für die Messgenauigkeit bei GPS*. AVN 2/2004: 46-55.
- Caspary W, Chen G (1995a) *Identifikation stochastischer Prozesse bei Vorhandensein grober Messfehler – Teil I: AR(p)- und MA(q)-Modelle –*. ZfV 120(10): 479-488.
- Caspary W, Chen G (1995b) *Identifikation stochastischer Prozesse bei Vorhandensein grober Messfehler – Teil II: ARMA(p,q)-Modelle –*. ZfV 120(11): 556-565.
- Caspary W, Wichmann K (1994) *Lineare Modelle*. Oldenbourg, München.
- Chatterjee S, Price B. (1995) *Praxis der Regressionsanalyse*. 2. Auflage, Oldenbourg, München.
- Collins J, Langley R (1999) *Possible weighting schemes for GPS carrier phase observations in the presence of multipath*. Report TCN 98151, Geodetic Research Laboratory, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick.
- Cook R, Weisberg S (1982) *Residuals and influence in regression*. Chapman and Hall, New York.

- Delikaraoglou D (1989) *On the stochastic modelling of GPS ionospheric delays*. manuscripta geodaetica 14: 100-109.
- Dietrich R (Herausgeber) (2000) *Deutsche Beiträge zu GPS-Kampagnen des Scientific Committee on Antarctic Research (SCAR) 1995-1998*. DGK München, Reihe B, Nr.310.
- Dinter G (2002) *Generalisierte Orthogonalzerlegungen in der Ausgleichsrechnung*. DGK München, Reihe C, Nr.559.
- El-Rabbany A (1994) *The effect of physical correlations on the ambiguity resolution and accuracy estimation in GPS differential positioning*. Technical Report 170, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick.
- El-Rabbany A, Kleusberg A (1993) *Modelling temporal correlations in GPS differential positioning*. European Geophysical Society XVIII General Assembly, Wiesbaden.
- Euler H, Goad C (1991) *On optimal filtering of GPS dual frequency observations without using orbit information*. Bulletin Geodesique 65: 130-143.
- Grafarend E, Schaffrin B (1993) *Ausgleichsrechnung in linearen Modellen*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- Han S (1997) *Quality-control issues relating to instantaneous ambiguity resolution for real-time GPS kinematic positioning*. Journal of Geodesy 71: 351-361.
- Han S, Rizos C (1995) *Standardization of the variance-covariance matrix for GPS rapid static positioning*. Geomatics Research Australasia 62: 37-54.
- Hartley H (1950) *Maximum F-ratio as a short-cut test for heterogeneity of variance*. Biometrika, Nr.37: 308-312.
- Hartung J, Elpelt B, Klösener K (2002) *Statistik : Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. 13.Auflage, Oldenbourg, München.
- Heister H, Hollmann R, Lang M (1997) *Multipath-Einfluß bei GPS-Phasennmessungen: Auswirkungen und Konsequenzen für praktische Messungen*. AVN 5/1997: 166-177.
- Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Collins J (2001) *Global Positioning System. Theory and practice*. 5. Auflage Springer, Berlin.
- Howind, J, Böhringer M, Mayer M, Kutterer H, Lindner K, Heck B (2000) *Korrelationsstudien bei GPS-Phasenbeobachtungen*. In: Dietrich R (Herausgeber) *Deutsche Beiträge zu GPS-Kampagnen des Scientific Committee on Antarctic Research (SCAR) 1995-1998*. DGK München, Reihe B, Nr.310: 201-206.
- Howind J, Kutterer H, Heck B (1997) *Untersuchung der Auswirkung vernachlässigter atmosphärisch bedingter Korrelationen auf GPS-Messungen*. Interner Bericht, Geodätisches Institut der Universität Karlsruhe, unveröffentlicht.
- Howind J, Kutterer H, Heck B (1999) *Impact of temporal correlations on GPS-derived relative point positions*. Journal of Geodesy 73: 246-258.
- Hsu D (1977) *Tests for variance shift at an unknown time point*. Applied Statistics 26(3): 279-284.
- Hugentobler U, Schaer S, Fridez P (Herausgeber) (2001) *Bernese GPS Software Version 4.2*. Astronomisches Institut, Universität Bern.
- Jäger R (1994) *Statistische Grundlagen für die Weiterverarbeitung von GPS-Ergebnissen*. In: Heck B, Illner M (Herausgeber) *GPS-Leistungsbilanz'94*. Schriftenreihe des DVW, Nr. 18, Konrad Witwer, Stuttgart: 302-319.
- Jin X (1995): *A recursive procedure for computation and quality control of GPS differential corrections*. Faculty of Geodetic Engineering, Delft.
- Jin X , de Jong C (1996): *Relationship between satellite elevation and precision of GPS code observations*. The Journal of Navigation, 49(2): 253-265.
- Klobuchar J (1996) *Ionospheric effects on GPS*. In: Parkinson B, Spilker J (Herausgeber) *Global Positioning System. Theory and applications, Volume I*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington: 485-515.
- Koch K (1997) *Parameterschätzung und Hypothesentests*. 3. Auflage, Dümmler, Bonn.
- Koch K, Schmidt M (1994) *Deterministische und stochastische Signale*. Dümmler, Bonn.
- Kouba J (2003) *A Guide to using International GPS Service (IGS) Products*. <http://igsceb.jpl.nasa.gov/overview/pubs.html>.
- Landau H (1988) *Zur Nutzung des Global Positioning Systems in Geodäsie und Geodynamik: Modellbildung, Software-Entwicklung und Analyse*. Schriften-

- reihe des Studiengangs Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr, München, Nr.36.
- Langley R (1997) *GPS receiver system noise*. GPS World 8(6): 40-45.
- Lehmann E (1959) *Testing statistical hypotheses*. Wiley&Sons, New York.
- Leick A (1995) *GPS satellite surveying*. 2. Auflage, Wiley&Sons, New York.
- Mader G (1999) *GPS antenna calibration at the National Geodetic Survey*. GPS Solutions 3(1): 50-58.
- Mayer M, Kutterer H, Kargoll B, Heck B (2000a): *The impact of troposphere models on GPS-derived point positions in Antarctica*. IAG International Symposium on Gravity, Geoid and Geodynamics, Banff.
- Mayer M, Lindner K, Kutterer H, Heck B (2000b) *Eine Strategie zur Ermittlung hochgenauer Koordinaten und Bewegungsraten im ITRF96 unter Verwendung der Berner GPS-Software Version 4.0*. In: Dietrich R (Herausgeber) *Deutsche Beiträge zu GPS-Kampagnen des Scientific Committee on Antarctic Research (SCAR) 1995-1998*. DGK München, Reihe B, Nr.310: 59-68.
- Mayer M (2004) *Optimierte GPS-Modellbildung für den Bereich der Antarktischen Halbinsel*. Dissertation am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe.
- Meier S, Keller W (1990) *Geostatistik: Einführung in die Theorie der Zufallsprozesse*. Springer, Wien.
- Mendes V, Langley R (1994) *A comprehensive analysis of mapping functions used in modelling tropospheric propagation delay in space geodetic data*. Proceedings of the International Symposium on Kinematic Systems in Geodesy, Geomatics and Navigation KIS94, Banff: 87-98.
- Menge F, Seeber G (1999) *Untersuchungen und Beiträge zur Problematik der Phasenzentrumsvariationen von GPS-Antennen*. In: Dietrich R (Herausgeber) *Deutsche Beiträge zu GPS-Kampagnen des Scientific Committee on Antarctic Research (SCAR) 1995-1998*. DGK München, Reihe B, Nr.310: 181-194.
- Menge F (2003) *Zur Kalibrierung der Phasenzentrumsvariationen von GPS-Antennen für die hochpräzise Positionsbestimmung*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr.247.
- Mikhail E (1976) *Observations and least squares*. Dun-Donnelley, New York.
- Moritz H (1980) *Advanced physical geodesy*. Wichmann, Karlsruhe.
- Niell A (1996) *Global mapping functions for the atmosphere delay at radio wavelengths*. Journal of Geophysical Research, 101(B2): 3227-3246.
- Niemeier W (2002) *Ausgleichsrechnung*. De Gruyter, Berlin.
- Otens R, Enochson L (1978) *Applied time series analysis*. Wiley&Sons, New York.
- Parkinson B (1996) *GPS error analysis*. In: Parkinson B, Spilker J (Herausgeber) *Global Positioning System. Theory and applications, Volume I*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington: 469-483.
- Parkinson B, Spilker J (Herausgeber) (1996a) *Global Positioning System. Theory and applications, Volume I*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington.
- Parkinson B, Spilker J (Herausgeber) (1996b) *Global Positioning System. Theory and applications, Volume II*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington.
- Radovanovic R, Teskey W, El-Sheimy N (2000) *Development of a precision GPS monitoring system, Volume III, correlation of GPS observations, noise and multipath*. Department of Geomatics Engineering, University of New Brunswick.
- Rao C (1971): *Estimation of variance and covariance components - MINQUE*. Journal of Multivariate Analysis 1: 257-275.
- Rothacher M, Springer T, Schaer S, Beutler G (1997) *Processing strategies for regional GPS networks*. In: Brunner F (Herausgeber) *Advances in positioning and reference frames*. IAG Scientific Assembly, Rio de Janeiro: 93-100.
- Santerre R, Forgues I, Mendes B, Langley R (1995) *Comparison of tropospheric mapping functions: Their effects on Station Coordinates*. IUGG XXI General Assembly, Boulder.
- Santos M, Vanicek P, Langley R (1997) *Effects of mathematical correlation on GPS network computation*. Journal of Surveying Engineering 123(3): 101-111.
- Satirapod C, Wang J (2000) *Comparing the quality indicators of GPS carrier phase observations*. Geomatics Research Australasia 73: 75-92.

- Schlittgen R, Streitberg B (2001) *Zeitreihenanalyse*. 9. Auflage, Oldenbourg, München.
- Schmid R, Rothacher M (2003) *Estimation of elevation-dependent satellite antenna phase center variations of GPS satellites*. Journal of Geodesy 77: 440-446.
- Schüler T (2001) *On ground-based GPS tropospheric delay estimation*. Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformation der Universität der Bundeswehr, München, Nr.73.
- Schwetlick H. (1979) *Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen*. Oldenbourg, München.
- Spilker J (1996) *Tropospheric effects on GPS*. In: Parkinson B, Spilker J (Herausgeber) *Global Positioning System. Theory and applications, Volume I*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington: 517-546.
- Tesmer V (2004) *Das stochastische Modell bei der VLBI-Auswertung*. DGK München, Reihe C, Nr.573.
- Teunissen P (1997) *On the sensitivity of the location, size and shape of the GPS ambiguity search space to certain changes in the stochastic model*. Journal of Geodesy 71: 541-551.
- Teusch A (2004) *Einführung in die Spektral- und Zeitreihenanalyse*. DGK München, Reihe A (in Vorbereitung).
- Tiberius C (2001) *A univariate analysis of the impact of time correlation*. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini 60(1): 33-48.
- Tiberius C, Borre K (1999) *Probability distribution of GPS code and phase data*. ZfV 124(8): 264-273.
- Tiberius C, Jonkman N, Kenselaar F (1999) *The stochasticity of GPS observables*. GPS World 10(2): 49-54.
- Tiberius C, Kenselaar F (2000) *Estimation of the stochastic model for GPS code and phase observables*. Survey Review 35: 441-454.
- Wang J, Satirapod C, Rizos C (2002) *Stochastic assessment of GPS carrier phase measurements for precise static relative positioning*. Journal of Geodesy 76: 95-104.
- Wang J, Stewart M, Tsakiri M (1998): *Stochastic modelling for static GPS baseline data processing*. Journal of Surveying Engineering 124(4): 171-181.
- Wanninger L (1994) *Der Einfluss der Ionosphäre auf die Positionierung mit GPS*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr.201.
- Wanninger L, May M (2000) *Carrier phase multipath calibration of GPS reference stations*. Proceedings ION GPS 2000, Salt Lake City: 132-144.
- Wieser A (2001) *Robust and fuzzy techniques for parameter estimation and quality assessment in GPS*. Dissertation Technische Universität Graz, Shaker-Verlag, Aachen.
- Wieser A, Brunner K (2000) *An extended weight model for GPS phase observations*. Earth, Planets, Space 52: 777-782.
- Wild U, Beutler G (1991) *Deterministische und stochastische Ionosphärenmodelle*. Mensuration, Photogrammetrie, Genie rural 6/91: 298-302.
- Xu G (2003) *GPS theory, algorithms and applications*. Springer, Berlin.
- Yule G (1927) *On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wölfer's sunspot numbers*. Philosophical transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 226: 267-298.
- Zumberge J, Bertiger W (1996) *Ephemeris and clock navigation message accuracy*. In: Parkinson B, Spilker J (Herausgeber) *Global Positioning System. Theory and applications, Volume I*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington: 585-599.

## Abkürzungen

AVN	Allgemeine Vermessungs-Nachrichten
DGK	Deutsche Geodätische Kommission
DVW	Deutscher Verein für Vermessungswesen
ZfV	Zeitschrift für Vermessungswesen seit 2002: Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement





