

**Andreas Eichhorn**

**Ein Beitrag zur Identifikation  
von dynamischen Strukturmodellen  
mit Methoden der adaptiven KALMAN-Filterung**

**München 2005**

---

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**



Ein Beitrag zur Identifikation  
von dynamischen Strukturmodellen  
mit Methoden der adaptiven KALMAN-Filterung

Von der Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Andreas Eichhorn

aus Bad Hersfeld

D93

München 2005

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

**Deutsche Geodätische Kommission**

Marstallplatz 8 • D – 80 539 München

Telefon +49 - (0)89 - 23 031 -0 / -1113 • Telefax +49 - (0)89 - 23 031 -1283 / -1100

E-mail [hornik@dgfi.badw.de](mailto:hornik@dgfi.badw.de) • <http://dgk.badw.de>

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. W. Möhlenbrink

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. A. Kleusberg

Prof. Dr.-Ing. O. Heunecke

Tag der mündlichen Prüfung: 21.7.2004

---

© 2005 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,  
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit entstand am „Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen“ (IAGB) der Universität Stuttgart im Rahmen des Forschungsschwerpunkts „Identifikation dynamischer Systeme“. Es werden zwei Aufgabenstellungen behandelt. Die erste Aufgabenstellung kommt aus dem Bereich der Deformationsanalyse und beinhaltet die Entwicklung eines Temperaturdeformationsmodells zur realitätsnahen Prädiktion bzw. Simulation der Auswirkung von einseitigen dynamischen Temperaturbelastungen auf balkenförmige Körper. Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist im Maschinenbau durch die indirekten Kompensationsverfahren zur Minimierung von thermischen Effekten auf hochpräzise Werkzeugmaschinen gegeben. Im Bauwesen ist die Analyse der thermischen Biegung von schlanken Baukonstruktionen unter dem Einfluss der Sonneneinstrahlung von Interesse.

Den Kern des Modells bildet eine Finite Elemente Topologie auf der Grundlage von partiellen Differenzialgleichungen zur Quantifizierung der instationären Temperaturverteilung. Die parametrische Identifikation des dynamischen Strukturmodells („White box“-Modell) erfolgt mittels adaptiver KALMAN-Filterung. In Labortests mit einer Aluminiumsäule gelingt die Schätzung der Temperaturleitfähigkeit des Materials mit einer Abweichung von nur 0,2% des Sollwertes. Durch unabhängige Temperaturmessungen wird gezeigt, dass eine Prognose der instationären Temperaturgradienten entlang des Mantels der Säule mit Restabweichungen erfolgen kann, die innerhalb des Bereichs der dreifachen Standardabweichung der verwendeten Temperaturmesssensoren ( $\sigma_T \approx 0,4$  K) liegen. Das Modell ist damit zur realitätsnahen Berechnung der Temperaturverteilung unter einem variablen Spektrum von dynamischen Belastungen geeignet. Die Verknüpfung mit einem Deformationsmodul (thermische Biegung) ermöglicht dann die Prognose von Säulenbiegungen mit einer mittleren Abweichung von ca. 3% der experimentell erzeugten maximalen Amplitude, was den Anforderungen für indirekte Kompensationsverfahren genügt.

Die zweite Aufgabenstellung beinhaltet die parametrische Identifikation einer Fahrzeugbewegung. Im Auftrag der DaimlerChrysler AG wird ein Modul zur kartenunabhängigen Fahrzeugortung entwickelt. Kern des Moduls ist ein KALMAN-Filter mit einem kausal modifizierten kinematischen Bewegungsmodell des Fahrzeugs. Das Modell berücksichtigt explizit die gemessenen Orientierungsänderungen. Hierdurch wird die übliche Trägheit von kinematischen Bewegungsgleichungen entscheidend reduziert. Bei Stadt- und Landstrassenfahrten werden mit dem Ortungsmodul Positionsschätzungen mit mittleren Genauigkeiten von  $s_p \approx 2...3$  m erzielt.

## Summary

Within the field of research ‘Identification of Dynamic Systems’ this dissertation was created at the ‘Institute for Applications of Geodesy to Engineering’ (University of Stuttgart) and is investigating two different tasks. The first task is related to deformation analysis and contains the development of a temperature deformation model for the close-to-reality prediction / simulation of the effect of one-sided dynamic thermal loads on bar-shaped bodies. This topic is motivated by mechanical engineering searching new methods for the indirect compensation of thermal influences on highly precise machine tools (i.e. robot arms, etc.). In civil engineering the analysis of the thermal bend of slim constructions like towers or pillars under sun exposure is of great interest.

The central part of the deformation model is represented by a finite element topology quantifying the non-stationary temperature distribution inside the body. The topology is realized by a system of partial differential equations which base on FOURIERS law of heat flow. The parametric identification of the structural model (‘white box’-model) is carried out by means of adaptive KALMAN-filtering. In lab tests with an aluminium column the estimation of thermal diffusivity succeeds with a deviation of only 0,2% of the theoretical value. The calibrated model is verified by independent temperature measurements. It is shown that the deviations between the calculated and the measured temperature distribution are within the  $3\sigma$ -range of the thermocouples ( $\sigma_T \approx 0,4$  K). Consequently the model is suitable for close-to-reality calculations considering a variable spectrum of dynamic thermal loads. The combination with a deformation module enables the prognosis of the columns thermal bend with a relative error of only 3% related to the maximum deformation amplitude. The result fulfills the requirements for indirect compensation methods in industrial manufacturing.

The second task contains the parametric identification of a vehicle movement. On behalf of the DaimlerChrysler AG a module for map-independent positioning is developed. The central element of the module is represented by a KALMAN-filter with causative modified kinematic motion equations. The system equations explicitly consider measured changes in orientation whereby the usual inertia of kinematic models is significantly reduced. Testing the positioning module in different scenarios on highways, country roads and in city centres accuracies within a range of  $s_p \approx 2...3$  m are achieved.



## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2 Grundlagen zu dynamischen Strukturmodellen</b>	<b>11</b>
2.1 Grundlegende Begriffsbildungen .....	11
2.1.1 Die Ein/Ausgangs-Beziehung eines Systems .....	11
2.1.2 Elementare Systemeigenschaften .....	12
2.2 Struktur- und Verhaltensmodelle im Umfeld ingenieurgeodätischer Anwendungen .....	14
2.2.1 Einteilung der Auswertemodelle zur Analyse von Deformationen .....	14
2.2.2 Identifikation von dynamischen Deformationsprozessen .....	15
2.2.3 Ingenieurgeodätische Anwendungen .....	17
2.2.4 Strukturmodelle zur Analyse von thermischen Deformationen .....	19
2.3 Das kausal modifizierte kinematische Modell als Sonderfall eines dynamischen Strukturmodells .....	20
<b>3 Identifikation dynamischer Strukturmodelle mittels adaptiver KALMAN-Filterung</b>	<b>22</b>
3.1 Die Grundgleichungen des diskreten KALMAN-Filters .....	23
3.2 Integration von linearen dynamischen Strukturmodellen in die Systemgleichungen des KALMAN-Filters .....	24
3.2.1 Die Zustandsraummethodik .....	24
3.2.2 Berechnung der Transitionsmatrix .....	26
3.3 Erweiterung zum adaptiven KALMAN-Filter .....	27
3.4 Ermittelbarkeit und Identifizierbarkeit als Struktureigenschaften des adaptiven KALMAN-Filters .....	29
<b>4 Entwicklung einer Filterstrategie anhand der parametrischen Identifikation   eines Masse-Feder-Dämpfungs-Systems</b>	<b>30</b>
4.1 Vorbemerkungen .....	30
4.2 Modellierung von Bauwerksschwingungen im Zeitbereich .....	30
4.3 Erstellung der Systemgleichungen für das Masse-Feder-Dämpfungs-System im diskreten KALMAN-Filter .....	31
4.4 Erweiterung zum adaptiven KALMAN-Filter .....	33
4.4.1 Einführung einer adaptiven Filterpartition .....	33
4.4.2 Formulierung der Messgleichungen .....	35
4.4.3 Erstellung des stochastischen Modells des Filters .....	35
4.5 Identifikation der Parameter des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems .....	36
4.5.1 Simulation von freien und erzwungenen Schwingungen .....	36
4.5.2 Entwicklung der Filterstrategie zur Parameteridentifikation .....	37
4.5.3 Identifikation der physikalischen Parameter .....	40
4.6 Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse .....	45
<b>5 Parametrische Identifikation des dynamischen Temperaturmodells einer   Aluminiumsäule auf der Grundlage partieller Differentialgleichungen</b>	<b>46</b>
5.1 Beschreibung der Aufgabenstellung .....	46
5.1.1 Untersuchung von Temperatureinflüssen .....	46
5.1.2 Bedeutung der instationären Temperaturverteilung .....	46
5.1.3 Beschreibung des Experiments .....	48
5.2 Physikalische Modellbildung des Temperaturprozesses .....	49
5.2.1 Qualitative Annahmen bezüglich des Wärmestroms .....	49
5.2.2 Quantifizierung des Modells .....	51
5.3 Integration des quantifizierten Temperaturmodells in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters .....	52

5.3.1 Integrationsansatz nach dem Verfahren der „Ortsdiskretisierung“ .....	52
5.3.2 Integrationsansatz mittels Approximation der Anfangstemperaturverteilung .....	54
5.3.3 Modellierung der Störeinflüsse .....	60
5.3.3.1 Modellbildung mittels einer Störquellenfunktion .....	61
5.3.3.2 Modellansatz mittels einer Störtemperaturverteilung .....	61
5.4 Aufbau des adaptiven KALMAN-Filters zur parametrischen Identifikation des Temperaturmodells .....	62
5.4.1 Adaptive Erweiterung der Systemgleichungen des Filters .....	62
5.4.2 Formulierung der Messgleichungen .....	63
5.4.3 Erstellung des stochastischen Modells des Filters .....	64
5.5 Parametrische Identifikation des Temperaturmodells der Aluminiumsäule .....	64
5.5.1 Identifikation des Modells im einzelnen Mantelsegment .....	66
5.5.1.1 Simulation zur Ermittlung von geeigneten experimentellen Rahmenbedingungen .....	66
5.5.1.2 Identifikation und Verifikation des Modells .....	70
5.5.2 Verifikation des identifizierten Modells auf der Aluminiumsäule .....	78
5.6 Erweiterung des Temperaturmodells zum Temperaturdeformationsmodell .....	82
5.6.1 Quantifizierung des Deformationsmodells .....	82
5.6.2 Prognose des Deformationsverhaltens der Aluminiumsäule .....	85
5.7 Bewertung der Ergebnisse und Möglichkeit zur Modellübertragung .....	88
<b>6 Parametrische Identifikation einer Fahrzeugbewegung unter Verwendung eines kausal modifizierten Ansatzes</b> .....	<b>90</b>
6.1 Aufgabenstellung und Anforderungen .....	90
6.2 Aufbau des diskreten KALMAN-Filters zur Schätzung der Fahrzeugbewegung .....	91
6.2.1 Modellierung der Fahrzeugbewegung und Integration in das Filter .....	91
6.2.2 Bestimmung der gestörten Systemgleichungen .....	94
6.2.3 Bestimmung der Messgleichungen des Filters .....	95
6.2.4 Ermittlung des stochastischen Modells .....	96
6.2.4.1 Genauigkeitsanalyse der Messsensoren .....	96
6.2.4.2 Besetzung des stochastischen Modells des Filters .....	98
6.3 Integration des KALMAN-Filters in ein Modul zur Fahrzeugortung .....	100
6.4 Parametrische Identifikation der Fahrzeugbewegung .....	104
6.5 Zusammenfassung der Ergebnisse und Aufzeigen des Verbesserungspotenzials .....	108
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b> .....	<b>110</b>
<b>Literatur</b> .....	<b>112</b>
<b>A Bestimmung der partiellen Ableitungen der Matrix <math>T_{p, k+1, k}</math> der adaptiv erweiterten Systemgleichungen des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems</b> .....	<b>117</b>
<b>B Integration des Temperaturmodells in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters</b> .....	<b>119</b>
B.1 LAPLACE-Transformation des ungestörten Temperaturmodells .....	119
B.2 Rücktransformation der LAPLACE-transformierten Lösung des ungestörten Temperaturmodells .....	119
B.3 Bestimmung der partiellen Ableitungen der Matrix $T_{p, k+1, k}$ der adaptiv erweiterten Systemgleichungen des Temperaturmodells .....	121
<b>C Integration des Fahrzeugbewegungsmodells in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters</b> .....	<b>123</b>
C.1 Linearisierung der ungestörten Systemgleichungen .....	123
C.2 Bestimmung der Störmatrix $S_{k+1, k}$ .....	124

## 1 Einleitung

Die Untersuchung und Beschreibung der Verformungen bzw. (Starrkörper-)Bewegungen von Ingenieurbauwerken und des Bewegungsverhaltens von Land-, Luft- und Seefahrzeugen repräsentiert zwei wichtige Schwerpunkte im Spektrum ingenieurgeodätischer Aufgabenstellungen. Ihre Gemeinsamkeit liegt in der Tatsache begründet, dass à priori eine Modellbildung hinsichtlich des Objektverhaltens erfolgen muss, welche dann durch Messungen zu überprüfen und gegebenenfalls zu verbessern ist. Seit Ende der 70er Jahre hat sich die Herangehensweise des Ingenieurgeodäten an diese Aufgabe grundlegend gewandelt. Der sukzessive Übergang von einer phänomenologisch geprägten, d.h. deskriptiven Betrachtungsweise hin zur Frage nach den Ursachen für die Bewegungen und Verformungen, musste zwangsläufig in der Erstellung von Modellen münden, welche die Kausalkette zwischen Ursachen und Wirkungen beschreiben (s. Abbildung 1-1).

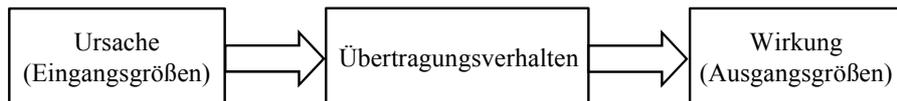


Abbildung 1-1: Kausalkette eines Deformationsprozesses (nach WELSCH 1981)

Hierbei ist vor allem die Deformationsanalyse als treibende Kraft zu sehen, welche mit ihrem Streben nach einer möglichst umfassenden Interpretation der Deformationsvorgänge die Einbindung der aus Mechanik und Bauwesen bekannten physikalischen Modellvorstellungen stetig weiterentwickelt hat. Hiermit unmittelbar verknüpft ist die Bearbeitung der nachfolgenden Problemstellungen:

1. Quantifizierung des Zusammenhangs zwischen einer oder mehrerer Eingangsgrößen wie Sonneneinstrahlung bzw. Wind und dem Deformationsverhalten eines Objekts (z.B. eines Bauwerks).
2. Trennung der Auswirkung der interessierenden Eingangsgrößen, wodurch der Anteil des einzelnen Einflusses an der Gesamtdeformation ersichtlich wird. Ermittlung der dominierenden Einflüsse.
3. Trennung des interessierenden Ausgangsverhaltens von überlagernden stochastischen Störeinflüssen. Die Trennung kann zum Beispiel mittels der KALMAN-Filterung herbeigeführt werden.
4. Prädiktion / Prognose des Objektverhaltens unter Vorgabe der Eingangsgrößen. Die Vorgabe kann bspw. mittels der beobachteten Größen oder auch als (dann hypothesenbehaftete) Extrapolation von deren bisherigen Verlauf erfolgen.
5. Simulation der Objektreaktion, wobei interessierende Belastungsszenarien definiert und zur Berechnung herangezogen werden. Diese Vorgehensweise bietet den Vorteil, dass zeitaufwändige und kostenintensive Messungen am Objekt selbst nur für eine Anpassung des Modells durchgeführt werden müssen. Die Berechnung der nicht realisierten bzw. möglicherweise gar nicht realisierbaren Versuche kann anschließend im Computer mittels des kalibrierten dynamischen Systemmodells erfolgen (s.a. NATKE 1983).
6. Untersuchung der Stoffeigenschaften, welche das Übertragungsverhalten des Objekts beeinflussen. Hierbei können relevante Materialparameter wie Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl oder Temperaturleitfähigkeit im Rahmen der Systemanalyse ermittelt werden.
7. Berechnung der inneren Spannungs- und Verzerrungszustände des Objekts (Stress- und Strainanalyse)
8. Gezielte Einflussnahme auf den Systemeingang, so dass eine gewünschte Reaktion erfolgt, bzw. eine unerwünschte Reaktion verhindert wird. Letzteres ist dann als präventive Maßnahme aufzufassen. Die als „Inverse Problemstellung“ (Begriff nach NATKE 1983) oder auch als „Inverse Dynamik“ (Begriff nach UNBEHAUEN 1998) zu bezeichnende Anwendung ist ein zentrales Element der Steuerungs- und Regelungstechnik (u.a. EYKHOFF 1974, FÖLLINGER 1980).

Zur Beschreibung der Kausalkette von zeitabhängigen Deformationsvorgängen sind in heutiger Zeit die Verhaltensmodelle weit verbreitet. Diese berücksichtigen das Ursache/Wirkungs-Prinzip, aber nicht die für das Übertragungsverhalten verantwortliche innere Struktur des untersuchten Objekts. Im Zeitbereich handelt es sich um Regressions- oder Korrelationsbeziehungen. Typische Beispiele hierfür sind Gewichtsfunktionen (PELZER 1988, PFEUFER 1994) und ARMA-Modelle (ELLMER 1987), welche zur Beschreibung von vielfältigen Deformationsvorgängen genutzt werden. Das Pendant im Frequenzbereich ist durch die Untersuchung der FOURIER-transformierten Signale von Einfluss- und Deformationsgrößen und die Ermittlung der Durchlasscharakteristik des Bauwerks gegeben (s. KUHLMANN 1996).

Ein wesentlicher Grund für die verbreitete Nutzung von Verhaltensmodellen ist in der einfachen und standardisierten Modellbildung zu sehen. Für ihre Erstellung ist zunächst nicht das Expertenwissen von anderen Fachdisziplinen

erforderlich. In Programme implementierte Algorithmen können auf eine Vielzahl von unterschiedlichen Problemstellungen angewendet werden. Verhaltensmodelle sind mit verhältnismäßig geringem Aufwand zu erstellen und somit sehr wirtschaftlich einzusetzen. Nach WERNSTEDT (1989) sind den Vorteilen aber auch erhebliche Nachteile gegenüberzustellen:

- Die im Verhaltensmodell quantifizierten Zusammenhänge zwischen Ein- und Ausgangssignalen widerspiegeln nicht die Struktur des Deformationsprozesses. Es besteht im Allgemeinen kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen den Modellparametern und konstruktiven bzw. technologischen Parametern. Hieraus folgt, dass Interpretation und Verständnis der Deformationsvorgänge nur stark eingeschränkt möglich sind.
- Die Gültigkeit des identifizierten Verhaltensmodells bleibt auf den durch Messungen untersuchten Deformationsprozess (bzw. auf einen engen Bereich um diesen Prozess) beschränkt. Gerade bei Bauwerken ist das Frequenzspektrum der messtechnisch erfassbaren Erregungen oftmals zu schmal, um einen repräsentativen Frequenzgang ableiten zu können. Die Simulation des Objektverhaltens zur Ergänzung nicht durchgeführter bzw. nicht durchführbarer Versuche ist somit kaum möglich
- Das Modell kann erst aufgrund von realen Messungen am Objekt selbst erstellt werden. Eine theoretische Systemanalyse, bei der bspw. die erforderliche Gedächtnislänge auf der Grundlage von physikalischen Gesetzmäßigkeiten festgelegt werden kann, erfolgt nicht.

Parallel zu den Verhaltensmodellen erfolgte innerhalb der letzten zwei Jahrzehnte auch eine zunehmende Nutzung von Strukturmodellen, welche aufgrund der interdisziplinären Zusammenarbeit zwischen der Geodäsie und benachbarten Fachdisziplinen wie dem Bauingenieurwesen quantifiziert werden konnten. Im Gegensatz zu den Verhaltensmodellen basieren Strukturmodelle auf konkreten physikalischen Modellvorstellungen hinsichtlich der für das Übertragungsverhalten verantwortlichen inneren Struktur des untersuchten Objekts, welche i.a. in Form von Differenzialgleichungen zu quantifizieren sind.

Aus den Nachteilen der Verhaltensmodelle können unmittelbar die Vorteile von Strukturmodellen abgeleitet werden:

- Die im Strukturmodell quantifizierten Zusammenhänge repräsentieren die Struktur des Deformationsprozesses. Die Modellparameter sind physikalisch interpretierbar und ihre Identifikation erlaubt eine Beurteilung der stofflichen Eigenschaften des untersuchten Objekts. Veränderungen in den Materialparametern lassen dann Rückschlüsse auf eine mögliche Alterung bzw. Materialermüdung zu und erlauben einen frühzeitigen Eingriff durch konstruktiv sichernde Maßnahmen.
- Das Strukturmodell ist auch außerhalb des Bereichs des durch Messungen untersuchten Deformationsprozesses gültig. Berechnungen unter Vorgabe variierender Eingangsgrößen erlauben eine realistische Beurteilung des Objektverhaltens. Ein Großteil der Untersuchungen kann damit ohne Messungen, d.h. als Simulation durchgeführt werden.
- Das Modell kann zunächst theoretisch, d.h. ohne Messungen quantifiziert werden. Durch die Analyse der physikalischen Zusammenhänge ist à priori die Festlegung eines zur Identifikation geeigneten experimentellen Umfelds und die optimale Wahl von Messstellen und Abtastrate möglich.

Die zur Untersuchung von Bauwerksdeformationen verwendeten Strukturmodelle lassen i.d.R. die Zeit unberücksichtigt, d.h. sie gehen von statischen Lastfällen aus. Diese statischen Modelle werden mittels der im Bauwesen üblichen (statischen) Finite-Elemente-Methode (u.a. ZIENKIEWICZ 1971, GALLAGHER 1976) quantifiziert. Im Bereich der Ingenieurgeodäsie entwickelte sich diese Vorgehensweise aus dem Bereich der Bodenmechanik (BOLJEN 1983) hin zur allgemeinen Beschreibung von Ingenieurbauten wie Türme, Brücken und Staudämme. Die Bestimmung der in den Modellen enthaltenen Übertragungsparameter (Materialparameter, z.B. Elastizitätsmodul und Temperaturausdehnungskoeffizient) ist hierbei als eine wesentliche Aufgabenstellung der parametrischen Identifikation anzusehen, d.h. der Anpassung des theoretisch quantifizierten Strukturmodells an die Realität unter Ausnutzung von geodätischen Beobachtungen.

Die aktuelle Entwicklung in der Deformationsanalyse tendiert in Richtung der Quantifizierung und Identifikation von dynamischen Strukturmodellen. Gemäß den (ebenfalls dynamischen) Verhaltensmodellen beinhalten diese die Zeit in expliziter Weise und sind somit in der Lage, auch Anpassungs- und Ausgleichsvorgänge zwischen statischen Zuständen zu beschreiben. Sie beinhalten damit besonders realitätsnahe mathematische Modelle der untersuchten Deformationsvorgänge und bieten die umfangreichsten Interpretationsmöglichkeiten. Dynamische Strukturmodelle ermöglichen die Bearbeitung des gesamten Spektrums der eingangs genannten Problemstellungen.

Erste Beispiele aus dem Bereich der Bodenmechanik liegen hierzu bereits bei BOLJEN (1983) vor. Ansätze zur Untersuchung von Bauwerksschwingungen werden bei MÖHLENBRINK / KRZYTEK (1984) diskutiert. In HEUNECKE et al. (1993) erfolgt die Identifikation eines Setzungsmodells (KELVIN-Modell) mittels adaptiver KALMAN-Filterung.

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Aufgabenstellungen behandelt, welche im Rahmen des Forschungsschwerpunkts „Identifikation dynamischer Systeme“ Gegenstand der aktuellen Aktivitäten der Arbeitsgruppe „Geodätische Messtechnik“ am „Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen“ (IAGB) sind.

1. Wesentlicher Schwerpunkt der Arbeit ist die Quantifizierung und parametrische Identifikation von dynamischen Strukturmodellen zur Analyse von Deformationen aufgrund mechanischer und thermischer Belastungen.

Die zugrunde liegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten werden sowohl durch gewöhnliche als auch durch partielle Differenzialgleichungen repräsentiert. Die adaptive KALMAN-Filterung dient als Identifikationsverfahren.

Zielsetzung ist die realitätsnahe Simulation von Deformationsprozessen. Hierzu müssen standardisierte Methoden zur Integration von Strukturmodellen in die Systemgleichungen des KALMAN-Filters entwickelt werden. Die Nutzung von partiellen Differenzialgleichungen ist im Bereich der Deformationsanalyse bislang noch nicht erfolgt.

Zur experimentellen Bestimmung der in den Modellen enthaltenen Materialparameter muss eine Identifikationsstrategie entwickelt werden, welche die optimale Ausnutzung der am Deformationsprozess durchgeführten geodätischen Beobachtungen erlaubt.

Schließlich ist das Potenzial von identifizierten Strukturmodellen hinsichtlich der Interpretation und Simulation von Deformationsvorgängen aufzuzeigen.

2. Die Nutzung von dynamischen Strukturmodellen im Umfeld von Ortungsaufgaben.

Hierbei soll die konsequente Übertragung der in Abbildung 1-1 dargestellten Kausalkette auf weitere Bereiche der Ingenieurgeodäsie erfolgen. Kernaufgabe ist die Zusammenführung von hybriden Positionssensoren mittels KALMAN-Filterung (Multisensorintegration).

Der hierzu am IAGB entwickelte „kausal modifizierte kinematische Ansatz“ ist als Ergänzung zu den in HUEP (1986) und STERNBERG (2000) diskutierten Fahrzeugbewegungsmodellen zu verstehen, wobei der Ansatz einen besonders einfachen und eleganten Übergang von einer kinematischen Betrachtungsweise zur Berücksichtigung von Stellgrößen beinhaltet.

Wie in Abbildung 1-2 dargestellt ist, werden die o.g. Aufgabenstellungen anhand von drei praktischen Beispielen bearbeitet. Im ersten Beispiel erfolgt die Modellierung von Bauwerksschwingungen auf der Grundlage von Schwingungsdifferenzialgleichungen (im Bauwesen: „Zeitverlaufsmethode“). Hierdurch kann das linear elastische Bauwerksverhalten unter dynamischen Belastungsszenarien repräsentativ dargestellt werden. Das Beispiel berücksichtigt speziell die Einwirkung von äußeren mechanischen Belastungen (z.B. Wind). Die Modellbildung deckt die zur Nutzung des KALMAN-Filters erforderlichen Lösungsverfahren für lineare gewöhnliche Differenzialgleichungen vollständig ab.

Die Identifikation eines Einmassenschwingers ermöglicht die Entwicklung einer Filterstrategie zur Ermittlung von Materialparametern mittels geodätischer Beobachtungen. Die Diskussion der im KALMAN-Filter auftretenden Korrelationen kann zur Ableitung von Regeln zur Schaffung eines optimalen Umfelds für die experimentelle Systemanalyse genutzt werden. Das Beispiel ist als methodische Vorbereitung für die Erstellung des nachfolgenden Temperaturdeformationsmodells zu verstehen, wobei die erarbeiteten Erkenntnisse die Voraussetzung für die Schaffung eines geeigneten experimentellen Umfelds und Filterdesigns bilden.

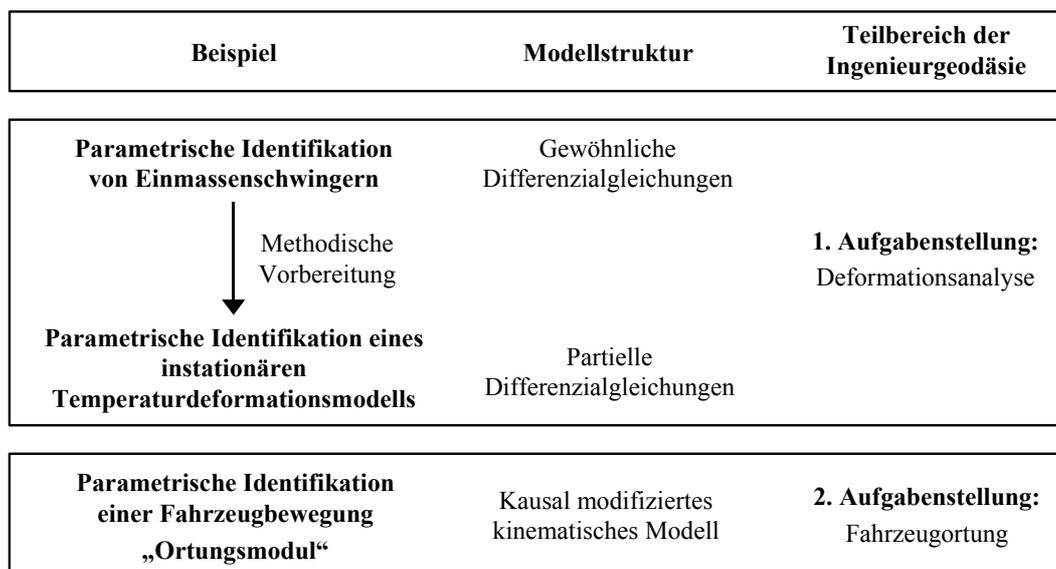


Abbildung 1-2: *Aufbau der vorliegenden Arbeit*

Aufbauend auf die bei der Identifikation des Einmassenschwingers gewonnenen Erkenntnisse, kann im zweiten Beispiel ein dynamisches Temperaturdeformationsmodell entwickelt und durch Messungen identifiziert bzw. verifiziert werden. In Ergänzung zu den mechanischen Belastungen zeigt das Beispiel die Einwirkung von Temperatureinflüssen (thermische Belastungen) auf schlanke Konstruktionen. Das Modell beschreibt speziell die thermische Biegung der im Bauwesen und im Maschinenbau häufig auftretenden Klasse von balkenförmigen Körpern. Es repräsentiert den eigentlichen Kern der vorliegenden Arbeit.

Die Grundlage des Deformationsmodells bildet die Modellierung der instationären Temperaturverteilung im Inneren des Körpers, womit eine grundlegende Erweiterung der in bisherigen Deformationsmodellen enthaltenen stationären Temperaturannahmen erfolgt. Hiermit unmittelbar verknüpft ist die Quantifizierung des realen nichtlinearen Temperaturgradienten, wodurch den häufig auftretenden Problemen einer repräsentativen Erfassung entgegengewirkt werden kann. Die Modellbildung erfolgt mittels linearer partieller Differenzialgleichungen. Damit wird auch die Nutzung dieser wichtigen Klasse von mathematischen Modellen in den Systemgleichungen des KALMAN-Filters vorgestellt.

Im dritten Beispiel erfolgt die Entwicklung eines kausal modifizierten kinematischen Modells zur Identifikation einer Fahrzeugbewegung. Das im Rahmen dieser Arbeit beschriebene „Ortungsmodul“ basiert auf einem in Kooperation mit der DaimlerChrysler AG durchgeführten Projekt zur kartenunabhängigen Fahrzeugortung. Die wesentliche Neuerung liegt in der Nutzung von kinematischen Zustandsgrößen als Stellgrößen, was eine Reduktion der Trägheit des Bewegungsmodells speziell bei Kurvenfahrten erzeugt.

## 2 Grundlagen zu dynamischen Strukturmodellen

### 2.1 Grundlegende Begriffsbildungen

Unter dem Begriff des „Systems“ ist nach DIN 66201 und ISERMANN (1974) eine abgegrenzte Anordnung von aufeinander einwirkenden Gebilden zu verstehen. Die Interpretation der Gebilde als Prozesse führt dann zu den in der Systemtheorie üblichen Begriffsbildungen. Mit „Prozess“ wird allgemein die Umformung und/oder der Transport von Materie, Energie bzw. Informationen bezeichnet. Dies kann bspw. die Verschiebung von materiellen Punkten eines Bauwerks, die Übertragung von Wärme durch eine Wand, aber auch die Änderung der geometrischen Eigenschaften der Trajektorie einer Fahrzeugbewegung sein.

Die Spezifizierung bzw. Abgrenzung eines Systems ist letztendlich eine Frage der individuellen Betrachtungsweise. Sie ergibt sich in vielen Fällen aus der Aufgabenstellung heraus, die Beziehung zwischen interessierenden Ein- und Ausgangsgrößen zu untersuchen (s.a. Abbildung 2-1). Die in dieser Arbeit durchgeführten Betrachtungen sind auf Systeme begrenzt, deren Prozesse auf physikalischen Gesetzmäßigkeiten beruhen.

#### 2.1.1 Die Ein/Ausgangs-Beziehung eines Systems

In Abbildung 2-1 ist die Ursache/Wirkungs-Beziehung eines Systems aus systemtheoretischer Sicht dargestellt. Bei ISERMANN (1974) werden die Eingangsgrößen (Ursachen) des Systems in interessierende Eingangssignale  $u(t)$  und Störsignale  $w(t)$  unterteilt. Die Ausgangsgrößen (Wirkungen)  $y(t)$  setzen sich aus den interessierenden Nutzsignalen  $y_u(t)$  infolge  $u(t)$  und den unerwünschten, von  $w(t)$  verursachten Störsignalen  $y_w(t)$  zusammen. Die Trennung von Nutz- und Störsignalen wird als eine zentrale Problemstellung bei der experimentellen Ermittlung von Modellen für das Systemverhalten bezeichnet.

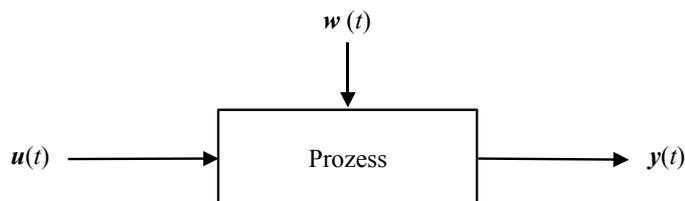


Abbildung 2-1: Ein/Ausgangs-Beziehung eines Systems (nach ISERMANN 1974)

Im Vorgriff auf die Untersuchung von Systemen mittels KALMAN-Filterung kann an dieser Stelle ausgesagt werden, dass in den Störgrößen  $w(t)$  auch die Modellabweichungen aufgenommen werden, welche bei der Approximation des Übertragungsverhaltens gegenüber der Realität entstehen (SCHRICK 1977, HEUNECKE 1995). Die mit der Behandlung dieser Störgrößen verknüpfte Problemstellung unterscheidet sich von ISERMANN (1974) in der Weise, dass nicht deren Trennung sondern Minimierung bei der Quantifizierung der deterministischen Systemgleichungen angestrebt wird. Mit Hinblick auf die Optimalität der Filterergebnisse ist zu fordern, dass die verbleibenden Restabweichungen möglichst gering sind und mit  $E\{w\} = 0$  eine wichtige Voraussetzung für die ausschließlich stochastische Berücksichtigung erfüllen.

Die interessierenden Eingangsgrößen  $u(t)$  werden in der Regelungstechnik als „Stellgrößen“ bezeichnet (u.a. FÖLLINGER 1980). Dieser Begriff gehört auch in der KALMAN-Filterung zum standardisierten Vokabular (u.a. SCHRICK 1977, BRAMMER / SIFFLING 1989) und wird im Rahmen dieser Arbeit äquivalent verwendet. Stell- und Störgrößen beeinflussen den Prozess, werden von ihm selbst aber nicht beeinflusst (FÖLLINGER / FRANKE 1982).

Die Untersuchung der Beziehung zwischen den interessierenden Ein- und Ausgangsgrößen eines Systems verfolgt das Ziel der Gewinnung eines mathematischen Modells zur Beschreibung des zeitlichen Systemverhaltens (ISERMANN 1974, NATKE 1983). Für den Fall zeitkontinuierlicher Signale kann die Quantifizierung des Modells im Zeitbereich mittels Differenzialgleichungen erfolgen. Im Fall zeitdiskreter Signale ist der Übergang zu Differenzengleichungen erforderlich (u.a. ISERMANN 1972). Eine exemplarische Darstellung von eindimensionalen deterministischen Ein/Ausgangs-Modellen ist im Folgenden angegeben.

$$y(t) + a_1 \dot{y}(t) + \dots + a_q y^{(q)}(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_p u^{(p)}(t)$$

↓ Differenzenquotienten

$$y_k + a_1^* y_{k-1} + \dots + a_q^* y_{k-q} = b_0^* u_k + b_1^* u_{k-1} + \dots + b_p^* u_{k-p} \quad (2-1)$$

$$\text{mit } y_{k-q} = y(t_{k-q}) = y(t_k - q \Delta t)$$

Zeitdiskrete Signale treten i.a. als Folge der messtechnischen Erfassung von Ein- und Ausgangsgrößen auf. Der Einsatz von Digitalrechnern erfordert dann die Abtastung der ursprünglich zumeist zeitkontinuierlichen Signale (s. Abbildung 2-2).

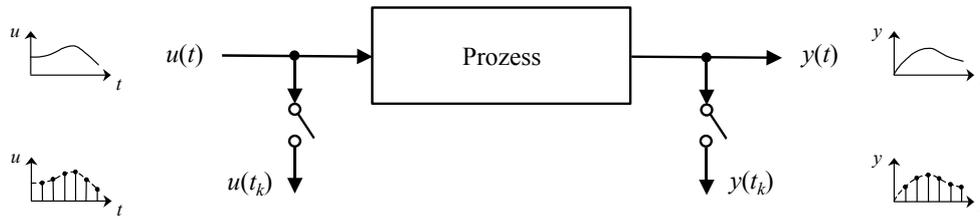


Abbildung 2-2: Abtastung von kontinuierlichen Ein- und Ausgangssignalen (nach ISERMANN 1972)

### 2.1.2 Elementare Systemeigenschaften

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Eigenschaften von Systemen vorgestellt, welche im Rahmen dieser Arbeit zur Klassifizierung und Beurteilung von Auswertemodellen herangezogen werden. Die Verwendung der nachfolgenden Begriffsbildungen erfolgt hierbei im Sinne der Systemtheorie.

#### (a) Kausale Systeme

Nach UNBEHAUEN (1969) wird ein System genau dann als „kausal“ bezeichnet, wenn der Verlauf des Ausgangssignals  $y(t)$  bis zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_1$  stets nur vom Verlauf des zugehörigen Eingangssignals  $u(t)$  bis zu diesem Zeitpunkt  $t_1$  abhängt.

Ergänzend zu dieser Definition wird in FÖLLINGER (1980) das „Kausalitätsgesetz“ in der Form spezifiziert, dass bei einem physikalischen System die Ausgangsgröße zeitlich nicht vor der (zugehörigen) Eingangsgröße auftreten kann (s. Abbildung 2-3).

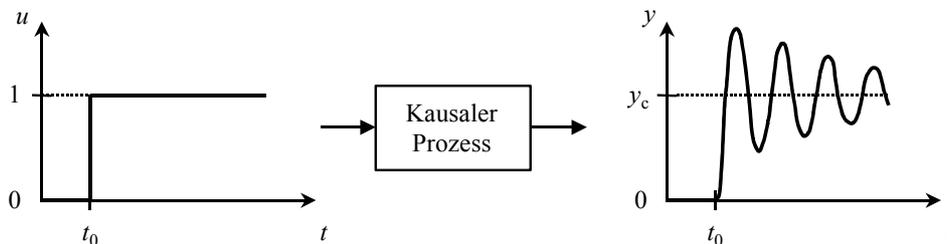


Abbildung 2-3: Exemplarische Darstellung der Sprungantwort eines linearen kausalen Systems 2. Ordnung

#### (b) Statische und dynamische Systeme

Der Begriff des „dynamischen Systems“ wird in UNBEHAUEN (1969) ganz allgemein wie folgt eingeführt:

„Hängt der Wert des Ausgangssignals  $y(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t = t_1$  nur vom Wert des als zulässig vorausgesetzten Eingangssignals  $u(t)$  zum Zeitpunkt  $t = t_1$  ab, also nicht von vergangenen (oder gar künftigen) Werten von  $u(t)$ , so bezeichnet man das betreffende System als „gedächtnislos“. Anderenfalls spricht man von einem „dynamischen System“.“

Dieses hat, wie man zu sagen pflegt, das endliche Gedächtnis  $\tau$  ( $\neq \infty$ ) oder ein unendliches Gedächtnis, je nachdem die Ausgangsgröße  $y(t_1)$  stets von den Werten der Eingangsgröße im Intervall  $t_1 - \tau$  bis  $t_1$  abhängt oder von den Werten  $-\infty$  bis  $t_1$ .“

Der ebenfalls nach obiger Definition spezifizierte Begriff eines „gedächtnislosen Systems“ ist identisch mit dem des „statischen Systems“ (u.a. ISERMANN 1974).

Wichtige Eigenschaften dynamischer Systeme sind:

- Nach obiger Definition besitzen dynamische Systeme ein Gedächtnis. Sie sind in der Lage Energie zu speichern und zeitverzögert wieder abzugeben (EYKHOFF 1974, FELGENDREHER 1981).
- Folglich reagieren dynamische Systeme auf eine Änderung der Eingangsgrößen mit einem zeitabhängigen Prozess von Anpassungsvorgängen (s.a. Abbildung 2-3).
- Dynamische Systeme, die auf physikalischen Gesetzmäßigkeiten basieren, sind stets kausale Systeme (u.a. FÖLLINGER 1980).

Wichtige Eigenschaften statischer Systeme sind:

- Nach obiger Definition besitzen statische Systeme kein Gedächtnis.
- Folglich reagieren statische Systeme auf eine Änderung der Eingangsgrößen mit einem verzögerungsfreien Übergang in einen neuen Gleichgewichtszustand.
- Statische Systeme sind stets kausale Systeme (UNBEHAUEN 1993).
- Das statische System ist der Sonderfall des dynamischen Systems (ISERMANN 1972, FELGENDREHER 1981).

Die mathematische Modellbildung der Ein/Ausgangs-Beziehung bei statischem und dynamischem Systemverhalten kann exemplarisch anhand der nachfolgenden Differenzgleichungen dargestellt werden (ISERMANN 1972, s.a. (2-1)).

$$\begin{aligned}
 y_k &= b u_k && \text{statisch} \\
 y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_q y_{k-q} &= b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_p u_{k-p} && \text{dynamisch}
 \end{aligned}
 \tag{2-2}$$

Mit Gleichung (2-2) sind die o.g. Systemeigenschaften nochmals anschaulich dargestellt.

### (c) Lineare Systeme

Ein System besitzt genau dann die Eigenschaft der „Linearität“, wenn eine beliebige Linearkombination von Eingangssignalen  $u_i(t)$  eine entsprechende Linearkombination von (zugeordneten) Ausgangssignalen  $y_i(t)$  erzeugt (u.a. UNBEHAUEN 1969, EYKHOFF 1974). Es gilt also das Superpositionsprinzip:

$$\begin{aligned}
 y_i(t) &= \Psi(u_i(t)) \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n \\
 \Psi\left(\sum_{i=1}^n k_i u_i(t)\right) &= \sum_{i=1}^n k_i \Psi(u_i(t)) = \sum_{i=1}^n k_i y_i(t)
 \end{aligned}
 \tag{2-3}$$

In Gleichung (2-3) ist  $\Psi$  der lineare Systemoperator. Beispiele für lineare Ein/Ausgangs-Beziehungen sind mit (2-1) und (2-2) gegeben.

### (d) Zeitinvariante Systeme

Nach UNBEHAUEN 1969 und FÖLLINGER 1980 wird ein System genau dann als „zeitinvariant“ bezeichnet, wenn die Form des Ausgangssignals  $y(t)$  unabhängig vom Zeitpunkt  $t_0$  ist, bei dem das Eingangssignal  $u(t)$  einsetzt (s. Abbildung 2-4). Beispiele für zeitinvariante Ein/Ausgangs-Beziehungen sind wieder mit (2-1) und (2-2) gegeben.

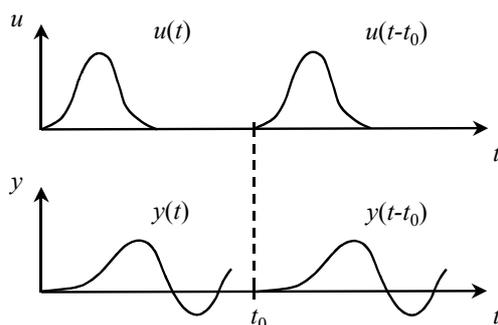


Abbildung 2-4: Übertragungsverhalten eines zeitinvarianten Systems (nach UNBEHAUEN 1969)

## 2.2 Struktur- und Verhaltensmodelle im Umfeld ingenieurgeodätischer Anwendungen

### 2.2.1 Einteilung der Auswertemodelle zur Analyse von Deformationen

Zur Übertragung der in Kapitel 2.1 allgemein formulierten Begriffe bzw. Zusammenhänge auf den Bereich der Deformationsanalyse ist zunächst eine Eingrenzung notwendig. Im Folgenden sollen nur die Systeme betrachtet werden, welche innerhalb der Klasse der ingenieurgeodätisch zu überwachenden bzw. zu untersuchenden Objekte auftreten. HEUNECKE (1995) spricht dann von „geodätischen Systemen“, wenn diese auf der Ausgangsseite mit Deformationen reagieren, welche mittels geodätischer Messungen erfasst werden (s. Abbildung 2-5). Es kann sich hierbei um Bauwerke wie Staudämme oder Türme handeln, welche sich unter dem Einfluss von Wasserstand, Sonneneinstrahlung oder Wind verformen. Hierzu sind aber auch Objekte wie Werkzeugmaschinen oder Roboter aus dem industriellen Umfeld zu zählen.

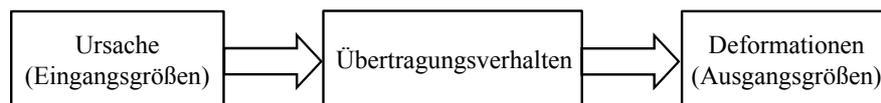


Abbildung 2-5: *Geodätisches System*

Eine Klassifizierung der zur Beschreibung und Analyse von Deformationsprozessen verwendeten Auswertemodelle kann nach HEUNECKE (1995), WELSCH et al. (2000) und WELSCH / HEUNECKE (2001) dadurch erfolgen, dass unterschieden wird, ob im Modell die Zeit und/oder die Belastungen explizit enthalten sind. Unter dem Begriff der „Belastungen“ werden hier generell die Eingangsgrößen (bzw. Stellgrößen) verstanden. In Tabelle 2-1 ist die Einteilung der Modelle in vier Gruppen dargestellt.

#### 1. Kongruenz- oder Identitätsmodell:

Das „Kongruenzmodell“ berücksichtigt weder die Zeit noch die Ursachen für die Deformationsvorgänge.

Das Modell beinhaltet die Beschreibung des Objektverhaltens als „random walk“-Prozess. Die Deformationsanalyse beschränkt sich auf den geometrischen Vergleich von Objektzuständen (z.B. der Koordinaten von Objektpunkten, WELSCH et al. 2000). In diesem Sinne sind hier die in PELZER (1985b bzw. 1988) behandelten statischen und quasi-statischen Punktfelder enthalten.

#### 2. Kinematisches Modell:

Das „kinematische Modell“ ist ein Modell, welches das zeitliche Verhalten des Objekts rein geometrisch beschreibt und nicht nach den Ursachen fragt.

Die Modellbildung kann durch Polynomansätze oder trigonometrische Funktionen erfolgen. Im Gegensatz zum Kongruenzmodell geht die Analyse über den geometrischen Vergleich hinaus und beinhaltet die Bestimmung des kinematischen Zustands (z.B. Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung von materiellen Punkten) des Objekts.

Beispiele für kinematische Ansätze sind durch die in PELZER (1985b) beschriebenen kinematischen Punktfelder und die in PELZER (1988) diskutierten kinematischen Deformationsmodelle gegeben.

#### 3. Statisches Modell:

Beim „statischen Modell“ werden Belastungen in expliziter Weise berücksichtigt. Die Zeit ist in der Modellbildung nicht explizit enthalten. Finden Anpassungsvorgänge des Objekts an eine Belastungssituation statt, so bleiben diese im Modell unberücksichtigt.

Bei der statischen Betrachtungsweise wird vielmehr der algebraische Zusammenhang zwischen der ursächlichen Belastung und dem daraus folgenden neuen Gleichgewichtszustand quantifiziert. Hieraus ergibt sich unmittelbar die Forderung, dass das Objekt zum Zeitpunkt der Messungen hinreichend in Ruhe ist.

#### 4. Dynamisches Modell:

Das „dynamische Modell“ berücksichtigt sowohl die Zeit als auch die Belastungen in expliziter Weise. Zeitliche Anpassungsvorgänge des Objekts werden im Modell abgebildet. Messungen können auch außerhalb einer Ruhelage durchgeführt werden.

Die dynamische Betrachtungsweise eröffnet somit das umfangreichste Spektrum an Möglichkeiten zur Analyse und Interpretation von Deformationsvorgängen (WELSCH et al. 2000). Durch sie wird das reale Verhalten von natürlichen Objekten am besten approximiert.

Im Einklang mit der in Kapitel 2.1.2 eingeführten systemtheoretischen Definition der Kausalität, werden das statische und das dynamische Modell in der vorliegenden Einteilung auch als „kausale Modelle“ bezeichnet. Das Kongruenzmodell bzw. das kinematische Modell sind dagegen „deskriptive Modelle“ (WELSCH et al. 2000).

Tabelle 2-1: Auswertemodelle zur Beschreibung von Deformationsprozessen (nach WELSCH et al. 2000)

<b>Deformationsmodelle</b>	<b>Kongruenzmodell</b>	<b>Kinematisches Modell</b>	<b>Statisches Modell</b>	<b>Dynamisches Modell</b>
<b>Zeit</b>	nicht explizit modelliert	Bewegung als Funktion der Zeit	nicht explizit modelliert	Bewegung als Funktion der Zeit
<b>Belastung</b>	nicht modelliert	nicht modelliert	Verformung als Funktion der Belastung	und der Belastung
<b>Zustand des Messobjekts</b>	hinreichend in Ruhe	bewegt	hinreichend in Ruhe unter Belastung	bewegt unter Belastung

Die in Tabelle 2-1 vorgenommene Klassifizierung der ingenieurgeodätischen Auswertemodelle ist konform mit der in Kapitel 2.1.2 dargestellten systemtheoretischen Sichtweise der Statik und Dynamik.

Vom Standpunkt der Mechanik kann die Einteilung als Unterscheidung der reinen (geometrischen) Bewegungslehre (= Kinematik) von der Kräftelehre (= Dynamik) aufgefasst werden (u.a. FALK 1967). Die explizite Dreiteilung der Mechanik in Kinematik, Statik und Dynamik erfolgt u.a. in HAMEL (1949), HAGEDORN (1989) und HERING et al. (1995). Hierbei wird die Dynamik dann als Synonym für die Kinetik verwendet (HAGEDORN 1989).

An dieser Stelle ist anzumerken, dass eine andere mechanische Sichtweise von einer Einteilung nach dem Bewegungszustand des Objekts ausgeht. Hier erfolgt dann die Unterscheidung von Statik und Dynamik (= Kinematik und Kinetik). Vertreter dieser Klassifizierung sind u.a. WESSEL (1939) und ZIEGLER (1970). Es handelt sich um eine Alternative zur o.g. Einteilung (u.a. ASSMANN 1992).

Die Entscheidung, ob eine statische oder dynamische Modellbildung zur adäquaten Beschreibung des Deformationsprozesses geeignet ist, hängt wesentlich vom zeitlichen Verlauf der auf das Objekt einwirkenden Belastungen ab. Im Bauwesen wird zwischen statischen und dynamischen Belastungen unterschieden (u.a. PANGGABEAN 1978, RUSCHEWEYH 1982).

- Statische Belastungen:  
„Statische Belastungen“ sind entweder zeitlich konstant oder vollziehen sich so langsam, dass die zeitlichen Ableitungen zweiter (Trägheitsglieder) und erster Ordnung der Objektreaktion bei der Modellierung vernachlässigt werden können.
- Dynamische Belastungen:  
„Dynamische Belastungen“ weisen zeitliche Variationen auf, welche die o.g. Vernachlässigungen nicht gestatten. Als Beispiele hierfür können Sprünge, impulsförmige oder harmonische Erregungen angeführt werden.

Dynamische Auswertemodelle finden genau dann ihre Anwendung, wenn die Ein/Ausgangs-Beziehung eines Systems quantifiziert werden soll und eine statische Modellierung aufgrund des zeitlichen Verhaltens von Belastungen und Deformationen nicht gerechtfertigt erscheint. Eine Untersuchung im dynamischen Modell kann dann möglicherweise in der Erkenntnis münden, dass eine statische Sichtweise im vorliegenden Spektrum von Einfluss- und Deformationsgrößen angemessen ist. Die dynamische Behandlung einer Aufgabenstellung schließt damit die statische Betrachtung nicht aus, sondern kann auch zu deren Nachweis herangezogen werden.

### 2.2.2 Identifikation von dynamischen Deformationsprozessen

Die Gewinnung eines Deformationsmodells zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines Deformationsprozesses erfordert eine Systemanalyse, welche entsprechend ISERMANN (1974) in einen theoretischen und einen experimentellen Teil aufzuteilen ist. Im Folgenden sind die wesentlichen Schritte bei der Analyse beschrieben.

## (a) Theoretische Systemanalyse

Im Rahmen der theoretischen Systemanalyse erfolgt die Quantifizierung des Modells auf der Grundlage von qualitativen Vorstellungen über die Beziehung zwischen Ursache und Wirkung (ISERMANN 1974). Nach NATKE (1983) sind diese Vorstellungen zunächst mittels der physikalischen Gesetzmäßigkeiten zu beschreiben (physikalisches Modell) und anschließend mathematisch zu formulieren (mathematisches Modell).

Das Ergebnis ist i.a. ein System von Differenzialgleichungen, welches den realen Deformationsprozess approximiert. Mit den Differenzialgleichungen bzw. deren Lösung liegt nach ISERMANN (1974) ein theoretisches Systemmodell vor, welches eine bestimmte Struktur und bestimmte Parameter aufweist und daher als „Strukturmodell“ (oder „parametrisches Modell“) bezeichnet wird. Beispiele sind in Tabelle 2-2 dargestellt.

Hieraus folgt unmittelbar die Forderung, dass die im Strukturmodell enthaltenen Modellparameter (Prozesskoeffizienten) einer physikalischen Interpretation zugänglich sind. Bei der Untersuchung von Deformationsvorgängen handelt es sich gerade um die Materialparameter, welche die stofflichen Eigenschaften des Bauwerks oder Maschinenteils repräsentieren und das Übertragungsverhalten maßgeblich beeinflussen. Um die Verbindung mit der physikalischen Interpretierbarkeit zu verdeutlichen, wird im weiteren Verlauf der Arbeit für diese Modellparameter auch der Begriff „physikalische Parameter“ verwendet.

## (b) Experimentelle Systemanalyse (Identifikation)

In ISERMANN (1974) wird der experimentelle Teil der Systemanalyse, welcher auch als „Identifikation“ bezeichnet wird, als Ermittlung des Systemmodells aus Messungen charakterisiert. Gemessen werden hierbei die Ein- und Ausgangsgrößen des zu untersuchenden Systems.

## (b1) Nichtparametrische Identifikation

Hierbei wurde im Schritt a kein Strukturmodell explizit erstellt. Die innere Struktur des Deformationsprozesses bleibt bei der Modellbildung daher unberücksichtigt. Das Ergebnis der Identifikation ist ein „Verhaltensmodell“ (oder „nichtparametrisches Modell“, u.a. ISERMANN 1974, FELGENDREHER 1981, WELSCH et al. 2000). Falls Modellparameter existieren, können diese dann i.a. nicht unmittelbar oder überhaupt nicht physikalisch interpretiert werden. Beispiele für Verhaltensmodelle sind in Tabelle 2-2 dargestellt.

## (b2) Parametrische Identifikation

Liegt ein aus Schritt a erhaltenes Strukturmodell vor, so kann die experimentelle Systemanalyse zu dessen Verbesserung verwendet werden (NATKE 1983). Dies ist i.d.R. dann notwendig, wenn die physikalischen Parameter des theoretischen Modells à priori nur unzureichend bekannt sind. Sowohl deren Bestimmung, als auch die Festlegung von geeigneten Anfangs- bzw. Randbedingungen (Anfangswertprobleme / Randwertprobleme) für die Systeme von Differenzialgleichungen, führt zu einer Anpassung des quantifizierten Modells an das reale Systemverhalten.

Dieser Vorgang der Anpassung wird in der vorliegenden Arbeit auch als die „Identifikation eines Strukturmodells“ bezeichnet, womit die Verbesserung der Theorie durch die Empirie verdeutlicht wird. Die Klassifizierung der verschiedenen Arten der Identifikation ist in Abbildung 2-6 nochmals dargestellt.

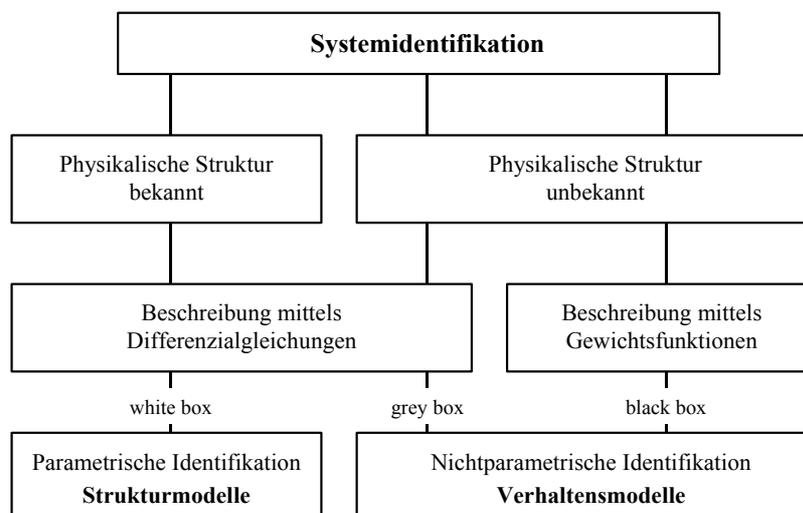


Abbildung 2-6: Parametrische und nichtparametrische Identifikation (nach WELSCH / HEUNECKE 2001)

## (c) Verifikation des identifizierten Deformationsmodells

Die Beurteilung der Identifikationsergebnisse erfolgt im Rahmen der „Verifikation“ (Begriffsbildung u.a. nach ISERMANN 1988a). Es wird im Wesentlichen geprüft, ob die zur Beschreibung des Deformationsprozesses angenommene Modellhypothese zutreffend ist. Die Verifikation kann in mehreren Schritten erfolgen:

1. Die Anwendung von statistischen Verfahren auf der Ebene des verwendeten Identifikationsverfahrens (z.B. KALMAN-Filter).

Nach HEUNECKE (1995) zählt hierzu die statistische Analyse der Verträglichkeit zwischen Modell und Messungen. Treten Unverträglichkeiten auf, welche auf ein unzureichend quantifiziertes Deformationsmodell zurückgeführt werden können, so ist dessen Modifizierung erforderlich. Hierdurch entsteht eine Rückkoppelung mit Schritt a.

Beim Vorliegen eines Strukturmodells ist eine Erweiterung der Untersuchungen möglich:

2. Die Beurteilung der geschätzten physikalischen Parameter und die bei der Schätzung erzielte Genauigkeit.  
Ist aus theoretischen Voruntersuchungen die Größenordnung der Parameter bekannt, so kann diese zur Prüfung der Plausibilität der Identifikationsergebnisse herangezogen werden.
3. Die Gegenüberstellung des unter Vorgabe von signifikant variierenden Belastungsszenarien gerechneten mit dem unabhängig gemessenen Systemausgang.  
Sie ermöglicht eine Aussage darüber, ob lediglich eine lokale Anpassung des Ein/Ausgangs-Verhaltens erfolgt ist, oder ein im interessierenden Belastungsbereich gültiges Systemmodell vorliegt. Diese Vorgehensweise wird auch von ISERMANN (1988a) vorgeschlagen.

Nach Feststellung der Verifikation liegt ein identifiziertes (und verifiziertes) Deformationsmodell vor, wobei letzteres Attribut im Folgenden nur dann ergänzend eingeführt wird, wenn es für das Verständnis unerlässlich ist.

### 2.2.3 Ingenieurgeodätische Anwendungen

Anhand der in Tabelle 2-2 aufgeführten Zusammenstellung von Struktur- und Verhaltensmodellen dynamischer Deformationsprozesse wird die Modelleinteilung nochmals veranschaulicht. Wegen ihrer großen Bedeutung bei der Untersuchung von Bauwerksdeformationen, ist hier auch die (statische) Finite-Elemente-Methode (FEM) enthalten, wobei diese dann als Sonderfall der dynamischen Betrachtungsweise zu interpretieren ist (s. Kapitel 2.1.2 und 2.2.1).

Die Unterteilung der Auswertemodelle in „black box“- „grey box“- und „white box“-Modelle erfolgt nach HEUNECKE (1995) und WELSCH / HEUNECKE (2001). Hierdurch wird eine differenziertere Beurteilung ermöglicht, inwieweit bei der Modellbildung die Struktur des Deformationsprozesses berücksichtigt wird (s.a. Abbildung 2-6).

- „Black box“-Modelle:

„Black box“-Modelle sind Verhaltensmodelle, welche die innere Struktur des Deformationsprozesses unberücksichtigt lassen. Im Zeitbereich werden sie i.a. durch Gewichtsfunktionen (Faltungsintegrale) und im Frequenzbereich durch deren FOURIER-Transformierte repräsentiert. Die Modellparameter sind keiner physikalischen Interpretation zugänglich.

- „Grey box“-Modelle:

Sie werden ebenfalls zu den Verhaltensmodellen gezählt, berücksichtigen aber bereits in gewissem Maße die Struktur des untersuchten Prozesses.

Ihre Quantifizierung erfolgt auf der Grundlage von linearen Differenzialgleichungen. Diese repräsentieren in diesem Fall aber kein physikalisches Modell der Struktur des Prozesses, welches im Rahmen einer theoretischen Systemanalyse erstellt wurde. Ihre Ordnung (bzw. Anzahl der benötigten Modellparameter) wird vielmehr aus der Untersuchung von gemessenen Ein- und Ausgangssignalen gewonnen.

Die in „grey box“-Modellen enthaltenen Modellparameter sind i.a. physikalisch nicht unmittelbar interpretierbar. Es ist aber anzunehmen, dass physikalische Parameter in ihnen implizit enthalten sind (ISERMANN 1988a). In Sonderfällen ist auch eine direkte Interpretation möglich (z.B. im Feder-Dämpfungs-Modell, s. Tabelle 2-2).

- „White box“-Modelle:

„White box“-Modelle sind äquivalent mit den Strukturmodellen. Sie repräsentieren damit die Struktur des untersuchten Deformationsprozesses und ihre Modellparameter sind physikalisch interpretierbar. Ihre Quantifizierung erfolgt auf der Grundlage von gewöhnlichen und/oder partiellen Differenzialgleichungen.

Tabelle 2-2: Zusammenstellung von Verhaltens- und Strukturmodellen

<b>Verhaltensmodelle</b>		
$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) u(t-\tau) d\tau$	<b>Faltungintegral</b>	<b>b l a c k  b o x</b>
$y(t) = \int_0^{\infty} g_1(\tau_1) u(t-\tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_2(\tau_1, \tau_2) u(t-\tau_1) u(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \dots$	<b>VOLTERRA-Funktionalreihe</b> $g_i(\tau) =$ Gewichtsfunktion	
$Y(\nu) = H(\nu)U(\nu)$	<b>Analyse im Frequenzbereich</b> $Y(\nu), U(\nu), H(\nu) =$ FOURIER-Transformierte $y(t), u(t), g(\tau)$ $H(\nu) =$ Durchlasscharakteristik	
$a_q y^q(t) + a_{q-1} y^{q-1}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_p u^p(t) + b_{p-1} u^{p-1}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$ $\downarrow$ $y_k = a_1^* y_{k-1} + a_2^* y_{k-2} + \dots + a_q^* y_{k-q} + b_0^* u_k + b_1^* u_{k-1} + \dots + b_p^* u_{k-p}$	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichung beliebiger Ordnung</b>  $\downarrow$ Übergang zur Differenzengleichung <b>ARMA-Modell</b>	<b>g r e y  b o x</b>
$a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t)$	<b>Dynamisches Analogiemodell</b> (z.B. Feder-Dämpfungs-Modell mit $q = 1, p = 0$ )	
<b>Strukturmodelle</b>		
$KI = f$	<b>Elastische Kraft-Verschiebungsrelation</b> (statische) Finite-Elemente-Methode (FEM) $K =$ Steifigkeitsmatrix, $I =$ Deformationen $f =$ Kräfte	<b>w h i t e  b o x</b>
$KI_k - \int_A B^{*T} D^* \varepsilon_{VP,k} dA = f_k$	<b>Elasto-viskoplastische Kraft-Verschiebungsrelation</b> $B^* =$ Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $D^* =$ materielle Steifigkeitsmatrix $\varepsilon_{VP} =$ zeitabhängige viskoplastische Dehnung	
$M\ddot{l}(t) + D\dot{l}(t) + KI(t) = f(t)$	<b>Schwingungsdifferenzialgleichungen</b> $M =$ Massen-, $D =$ Dämpfungsmatrix	
$m\ddot{l}(t) + \beta\dot{l}(t) + \gamma l(t) = f(t)$ $\beta\dot{l}(t) + \gamma l(t) = f(t)$	<b>Eindimensionale Spezialfälle</b> Masse-Feder-Dämpfungs-Modell Feder-Dämpfungs-Modell	

Die Beschreibung von Deformationsvorgängen im Zeitbereich mittels eines Faltungintegrals wird u.a. in PELZER (1977, 1988) und FELGENDREHER (1981) vorgeschlagen. PELZER (1988) bezeichnet das Modell als universell anwendbar, wobei das lineare Übertragungsverhalten nur sehr abstrakt als Gewichtsfunktion abgebildet wird. Die in Tabelle 2-2 enthaltene Eingangsgröße  $u(t)$  und Ausgangsgröße  $y(t)$  werden als Abweichungen von einem Gleichgewichtszustand des Objekts verstanden (PELZER 1977). Nichtlineares Übertragungsverhalten kann mittels einer VOLTERRA-Funktionalreihe beschrieben werden, welche eine Erweiterung des Faltungintegrals mit Kernen höherer Ordnung darstellt. Anwendungen hierfür sind in PFEUFER (1990 bzw. 1994) beschrieben, wobei das „black box“-

Modell sowohl zur Untersuchung des Deformationsverhaltens von industriellen Anlagen (Großturbinentisch) als auch von Bauwerken (Staudämme) eingesetzt wird.

Die Untersuchung von Ein/Ausgangs-Beziehungen im Frequenzbereich erfolgt u.a. in KUHLMANN (1996) anhand eines Brückenbauwerks. Grundlage für die Betrachtungen sind die FOURIER-Transformierten der Ein- und Ausgangssignale. Eine wesentliche Zielsetzung ist die Bestimmung der Durchlasscharakteristik des Bauwerks, welche gerade als FOURIER-Transformierte der Gewichtsfunktion im Faltungsintegral aufzufassen ist.

Zur Vervollständigung der „black box“-Modelle sind noch neueste Arbeiten auf dem Gebiet der künstlichen neuronalen Netze zu erwähnen. In HEINE (1999) wird diese Methode zur Beschreibung und Interpretation von Hangrutschungen angewendet.

ARMA-Modelle (ARMA = „autoregressive moving average“, u.a. CHATFIELD 1982, SCHLITGEN / STREITBERG 1991) verschiedenster Ordnung werden bei ELLMER (1987) zur Untersuchung des Deformationsverhaltens eines Grossturbinentisches herangezogen. Die Bestimmung der notwendigen Anzahl von Modellparametern, d.h. der Gedächtnislänge, tritt hier als eine zentrale Problemstellung auf. Eine Spezialisierung dieser „grey box“-Modelle erfolgt in MÖHLENBRINK / WELSCH (1984) mittels eines rekursiven AR-Modells 1. Ordnung ( $q = 1, p = 0$ , s. Tabelle 2-2). Das zeitliche Verhalten der Deformationen einer Schleuse kann in diesem Fall durch ein Feder-Dämpfungs-Modell abgebildet werden, wodurch eine physikalische Interpretierbarkeit der im Modell enthaltenen Parameter gegeben ist. Das dynamische Analogiemodell Feder-Dämpfung findet seine Anwendung bei der Beschreibung von sich langsam vollziehenden Deformationsvorgängen, bei denen Beschleunigungen zu vernachlässigen sind (PELZER 1977, 1988)

Ein wesentlicher Schwerpunkt bei der Verwendung von „white box“-Modellen ist die Beschreibung und Interpretation von bodenmechanischen Vorgängen. Hierbei sind vor allem die statischen Strukturmodelle von Bedeutung, welche mit der FEM eine vielfältige Anwendung gefunden haben (u.a. BOLJEN 1980 und 1983, TESKEY 1985 und 1988, CHRZANOWSKI et al. 1990). Eine Zielsetzung ist die Bestimmung von bodenmechanischen Parametern aus Messungen, d.h. die parametrische Identifikation der bodenmechanischen Modelle. Die allgemeine Erweiterung der FEM auf die Untersuchung von geodätischen Systemen und die Nutzung der KALMAN-Filterung als Identifikationsverfahren erfolgt in HEUNECKE (1995). Anwendungen auf Bauwerke wie Brücken, Staudämme und Schalenkonstruktionen sind dann bei HEUNECKE (1996), GÜLAL (1997) und HESSE (2002) zu finden.

Kontinuumsmechanische Ansätze zur Beschreibung von Bauwerksdeformationen liegen bei MÖHLENBRINK (1984) vor, welcher mechanisch und thermisch induzierte (statische) Biegelinien zur Interpretation von Neigungsmessungen verwendet.

Zur Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit bei elasto-viskoplastischem Materialverhalten in der Bodenmechanik (BINGHAM-Element) erfolgt bei BOLJEN (1983) die Erweiterung der Kraft-Verschiebungsrelation der FEM zur elasto-viskoplastischen Kraft-Verschiebungsrelation. Ein weiteres dynamisches Strukturmodell ist mit dem in PELZER (1977) vorgeschlagenen Feder-Dämpfungs-Modell gegeben, wobei dieses dann das viskoelastische Verhalten des Bodens bei Bauwerkssetzungen (KELVIN-Element) repräsentiert. In HEUNECKE et al. (1993) erfolgt die parametrische Identifikation eines Feder-Dämpfungs-Modells mittels KALMAN-Filterung. Schwingungsdifferenzialgleichungen werden bei MÖHLENBRINK / KRZYTEK (1984) als Modelle für windinduzierte Turmschwingungen eingesetzt, wobei das zeitliche Verhalten des Turms als Mehrmassenschwinger abgebildet wird.

#### 2.2.4 Strukturmodelle zur Analyse von thermischen Deformationen

Die Beschreibung der Auswirkung von Temperatureinflüssen mittels eines „white box“-Modells erfolgt in GÜLAL (1997). Hier werden die Deformationen der in der Türkei gelegenen Oymapinar-Staumauer unter den Einflüssen von Wasserstand und Temperatur untersucht. Das Übertragungsverhalten wird in einem statischen FE-Modell quantifiziert. Die zu einer Messungsepoche vorliegende Temperaturverteilung wird als stationär und ihr horizontaler Gradient als linear angenommen. Die temperaturinduzierten Verformungen sind im Modell auf der Grundlage des nachfolgenden Ansatzes enthalten.

$$\varepsilon_{T,x} = \varepsilon_{T,y} = \varepsilon_{T,z} = \alpha_T \Delta T \quad (2-4)$$

In obiger Gleichung sind die Temperaturdehnungen  $\varepsilon_T$  eines räumlichen finiten Elements mit dessen Temperaturänderung  $\Delta T$  linear über den Temperaturexpansionskoeffizienten  $\alpha_T$  verknüpft. Dieser physikalische Parameter wird mittels adaptiver KALMAN-Filterung geschätzt, d.h. es liegt eine parametrische Identifikation vor.

Die parametrische Identifikation eines statischen Strukturmodells mittels adaptiver KALMAN-Filterung liegt auch bei dem in HEUNECKE (1996) bzw. HEUNECKE / KUHLMANN (1998) beschriebenen FE-Modell für die Biegelinie eines Pylons der Nordereilbbrücke vor. Wie bei GÜLAL (1997) wird der Temperatureinfluss unter der Annahme eines zu jeder Messungsepoche stationären linearen horizontalen Temperaturgradienten modelliert. Die zur Beschreibung des Tagesgangs des Bauwerks erforderliche zeitliche Variation des Gradienten ist durch eine entsprechende Abtastrate ( $\Delta t = 1$  h)

der Temperaturmessungen an den Außenseiten des Pylons berücksichtigt. Die Erfassung der Temperaturverteilung erweist sich in diesem Fall allerdings als unzureichend und beeinträchtigt die Filterergebnisse für die Biegelinie und die physikalischen Parameter (u.a. Temperaturexpansionskoeffizient  $\alpha_T$ ).

Die Untersuchung von dynamischen thermischen Lastfällen erfolgt im Bereich der Ingenieurgeodäsie ausschließlich durch Verhaltensmodelle (u.a. PELZER 1977, MÖHLENBRINK / WELSCH 1984, ELLMER 1987, PFEUFER 1990, KUHLMANN 1996). Eine Identifikation dynamischer Strukturmodelle liegt bislang nicht vor.

### 2.3 Das kausal modifizierte kinematische Modell als Sonderfall eines dynamischen Strukturmodells

Die Anwendung von kinematischen Modellen erfolgt in der Ingenieurgeodäsie häufig bei der deskriptiven Quantifizierung von Deformationsprozessen (s. Kapitel 2.2.1). Bei Ortungsaufgaben werden sie üblicherweise auch als Bewegungsmodelle für Wasser-, Luft- und Landfahrzeuge genutzt (HUEP 1986, ENTENMANN 1995, AUSSEMS 1999, STERNBERG 2000).

Stehen Eingangsgrößen des zu untersuchenden Prozesses als zusätzliche Informationen direkt oder indirekt zur Verfügung und sollen diese als Stellgrößen genutzt werden, so ist deren auf die Zukunft gerichteter Wirkungssinn (Prinzip der Kausalität, vgl. Kapitel 2.1.2) nicht notwendigerweise mittels einer aufwändig zu erstellenden Übertragungsfunktion auf der Grundlage von Differenzialgleichungen neu zu beschreiben. In einigen Fällen kann ein eleganter Lösungsweg mit der nachträglichen „kausalen Modifizierung“ des kinematischen Modells beschriftet werden (EICHHORN et al. 2001).

Im Vorgriff auf das in Kapitel 6 gezeigte Anwendungsbeispiel, ergeben sich die wesentlichen Vorteile wie folgt:

- Verbesserte Anpassung des Bewegungsmodells an die Realität, wobei die Trägheit der Systemgleichungen des KALMAN-Filters vermindert wird.
- Reduktion der im Filter enthaltenen stochastischen Störgrößen als unmittelbare Folge der verbesserten Anpassung. Hierdurch wird im Filterverlauf eine Zunahme der Stabilität erzielt.

In Abbildung 2-7 ist der prinzipielle Ablauf bei der kausalen Modifizierung eines kinematischen Modells dargestellt. Im rechten Teil der Abbildung wird die Vorgehensweise exemplarisch anhand der Parametrisierung einer Fahrzeugbewegung als Folge von gleichförmigen Kreisbewegungen veranschaulicht, was gerade dem Anwendungsbeispiel entspricht.

Der kausalen Modifizierung liegt ein kinematisches Modell zugrunde, welches auf der Grundlage von qualitativen geometrischen und physikalischen Annahmen hinsichtlich des Bewegungsverhaltens des Fahrzeugs erstellt wird. Das zeitliche Verhalten der im Modell enthaltenen Parameter  $\mathbf{p}$  (z.B. Position und Orientierung  $P$  des Fahrzeugs, Bahngeschwindigkeit  $v$  und Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\alpha}$ ) ist durch die kinematische Funktion  $\Psi_{\text{kin}}$  festgelegt.

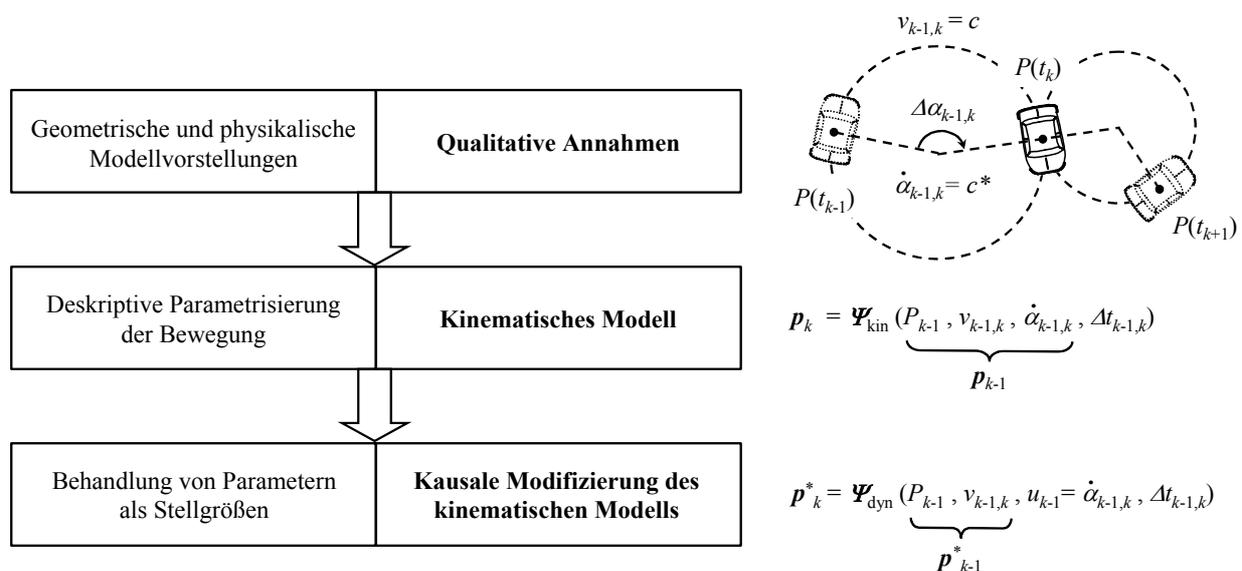


Abbildung 2-7: Darstellung der kausalen Modifizierung

Die praktische Nutzung eines Parameters (z.B.  $\dot{\alpha}$ ) als Stellgröße erfordert dann die Erfüllung der nachfolgenden Voraussetzungen:

- Es darf kein Widerspruch im zugrunde liegenden Bewegungsmodell erzeugt werden. Somit ist nur die im Modell auftretende höchste Ableitung des Parameters in Betracht zu ziehen.
- Der Parameter muss einer messtechnischen Erfassung zugänglich sein.
- Der Parameter sollte direkt oder zumindest indirekt durch einen äußeren Eingriff beeinflusst werden. Bei einem zugrunde liegenden kinematischen Modell ist dieses Kriterium für jeden Bewegungsparameter gültig.

Die Festlegung des zeitlichen Verhaltens der verbleibenden Parameter  $\mathbf{p}^*$  ( $P$  und  $v$ ) erfolgt mittels der als dynamisch interpretierbaren Übertragungsfunktion  $\Psi_{\text{dyn}}$ . Im Sinne der in Tabelle 2-1 getroffenen Klassifizierung ist die Bezeichnung „dynamisch interpretierbar“ durchaus gerechtfertigt, da im Modell sowohl Stellgrößen als auch die Zeit explizit enthalten sind.

Die in Kapitel 2.2 getroffene Einteilung in Struktur- und Verhaltensmodelle ist nicht notwendigerweise auf die Untersuchung von Deformationsvorgängen beschränkt. Folglich kann vor ihrem Hintergrund auch eine Diskussion des kausal modifizierten Modells erfolgen. Die dynamisch interpretierbare Übertragungsfunktion  $\Psi_{\text{dyn}}$  der Fahrzeugbewegung weist eine definierte innere Struktur auf. Ihre Parameter sind sowohl von physikalischer als auch von geometrischer Natur. Aufgrund dieser Eigenschaften kann das kausal modifizierte Modell als Sonderfall eines dynamischen Strukturmodells aufgefasst werden.

Die Klassifizierung als Sonderfall ist notwendig, da gegenüber den bisher diskutierten Strukturmodellen veränderte Aufgabenstellungen und Anforderungen an die Modellbildung bzw. Identifikation vorliegen. Als wichtigster Punkt ist hierbei zu beachten, dass die Quantifizierung einer Fahrzeugbewegung im Allgemeinen als Grundlage zur Zusammenführung der aus hybriden Positionssensoren erhaltenen, mit einer bestimmten Abtastrate vorliegenden Messwerte benötigt wird (Multisensorintegration). Die Gültigkeitsforderung an die zur Erstellung des Bewegungsmodells zu treffenden geometrischen und physikalischen Annahmen bezieht sich dann nur auf das Zeitintervall zwischen aufeinanderfolgenden Messungen (s. Abbildung 2-7). Das durch Messungen identifizierte Modell kann folglich nur eine abschnittsweise Beschreibung des Prozesses „Fahrzeugbewegung“ leisten und ist zu jeder Messungsepoche erneut zu identifizieren. Im Rahmen der Identifikation erfolgt nicht die Bestimmung von Prozesskoeffizienten, sondern der zeitliche Verlauf der Bewegungsparameter des Fahrzeugs.

### 3 Identifikation dynamischer Strukturmodelle mittels adaptiver KALMAN-Filterung

Wesentliche Zielsetzung der experimentellen Systemanalyse ist die Anpassung der physikalischen Parameter und der Anfangs- bzw. Randbedingungen des dynamischen Strukturmodells an das reale Systemverhalten. Im Folgenden werden die hierzu benötigten mathematischen Werkzeuge bereitgestellt.

Die parametrische Identifikation erfordert ein Identifikationsverfahren, welches die Verknüpfung des theoretisch quantifizierten Modells mit am Objekt durchgeführten Messungen und die optimale Schätzung der gesuchten Parameter gewährleistet. Das im Jahre 1960 von R. KALMAN für lineare dynamische Systeme begründete und nach ihm benannte KALMAN-Filter ist zur Durchführung dieser Aufgabe besonders gut geeignet.

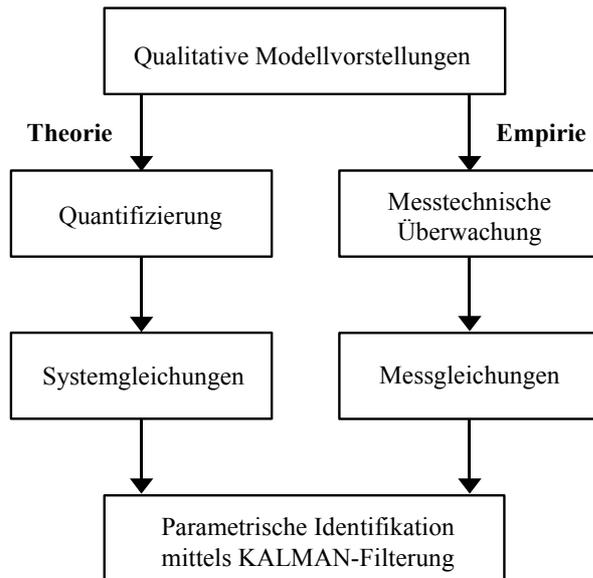


Abbildung 3-1: *Parametrische Identifikation mittels KALMAN-Filterung (nach HEUNECKE 1995)*

In Abbildung 3-1 ist der prinzipielle Ablauf zur Formulierung der Filtergleichungen dargestellt. Die Systemgleichungen werden aus den Ergebnissen der theoretischen Systemanalyse gewonnen, d.h. aus dem System von partiellen und/oder gewöhnlichen Differenzialgleichungen.

Mit der Auswahl von Messverfahren, Messpunkten und Abtastrate beinhaltet die experimentelle Systemanalyse die Erstellung des Designs zur messtechnischen Erfassung des Objektverhaltens, d.h. zur direkten oder indirekten Beobachtung der inneren Zusammenhänge bzw. der Ausgangsseite des zu untersuchenden Systems. Hierdurch sind im Filter die Messgleichungen festgelegt.

Die Anpassung des theoretischen Modells an die Realität erfolgt mittels der Zusammenführung von System- und Messgleichungen in einem auf der Methode der kleinsten Quadrate (u.a. PELZER 1985a, NIEMEIER 2002) basierenden Schätzalgorithmus, wodurch im Filterverlauf die optimale Schätzung der in den Systemgleichungen enthaltenen Zustandsparameter erzielt wird.

Im Rahmen einer adaptiven Erweiterung der Systemgleichungen ist die Einbindung von physikalischen Parametern als physikalische Zustandsparameter in das Filterkonzept möglich.

Das KALMAN-Filter ist zur Bearbeitung von Identifikationsaufgaben sowohl in kontinuierlicher als auch in diskreter Zeit geeignet. Da Messungen im ingenieurgeodätischen Bereich ausschließlich von zeitdiskreter Natur sind, wird das zeitkontinuierliche KALMAN-BUCY-Filter (u.a. SCHRICK 1977, BRAMMER / SIFFLING 1989) im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Der zeitdiskrete KALMAN-Filter-Algorithmus wird im Folgenden kurz als „diskretes KALMAN-Filter“ bezeichnet.

### 3.1 Die Grundgleichungen des diskreten KALMAN-Filters

Wie in Abbildung 3-1 dargestellt ist, wird die Struktur des diskreten KALMAN-Filters aus den System- und den Messgleichungen gebildet (u.a. GELB et al. 1974, SCHRICK 1977, BRAMMER / SIFFLING 1989, HEUNECKE 1995, BROWN / HWANG 1997).

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_{k+1}) &= \mathbf{T}(t_{k+1}, t_k) \tilde{\mathbf{x}}(t_k) + \mathbf{B}(t_{k+1}, t_k) \tilde{\mathbf{u}}(t_k) + \mathbf{S}(t_{k+1}, t_k) \mathbf{w}(t_k) \\ \text{(b)} \quad \tilde{\mathbf{l}}(t_{k+1}) &= \mathbf{A}(t_{k+1}) \tilde{\mathbf{x}}(t_{k+1}) \end{aligned} \quad (3-1)$$

Im Gleichungssystem (3-1) wird von linearen System- und Messgleichungen ausgegangen. Nichtlineare Problemstellungen sind dann in geeigneter Weise zu linearisieren, so dass die oben gezeigte Struktur erhalten wird.

Die Fortschreibung des zeitdiskreten Verlaufs des wahren Zustandsvektors  $\tilde{\mathbf{x}}$  erfolgt in den gestörten Systemgleichungen (3-1-a) in rekursiver Weise. Ausgehend von einem Zeitpunkt  $t_k$  wird der Zustandsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}(t_{k+1})$  durch Übertragung des Zustandsvektors  $\tilde{\mathbf{x}}(t_k)$  mittels der „Transitionsmatrix“  $\mathbf{T}(t_{k+1}, t_k)$ , des Stellgrößenvektors  $\tilde{\mathbf{u}}(t_k)$  mittels der „Stellmatrix“  $\mathbf{B}(t_{k+1}, t_k)$  und des stochastischen Störgrößenvektors  $\mathbf{w}(t_k)$  mittels der „Störmatrix“  $\mathbf{S}(t_{k+1}, t_k)$  (Begriffe nach BRAMMER / SIFFLING 1989) erzeugt. Der Störgrößenvektor  $\mathbf{w}(t_k)$  beinhaltet die Abweichungen in der Modellbildung gegenüber der Realität (s.a. Kapitel 2.1.1). Da eine deterministische Berücksichtigung ausscheidet, wird in der KALMAN-Filterung  $E\{\mathbf{w}(t_k)\} = \mathbf{o}$  angenommen.

In den Messgleichungen (3-1-b) sind in  $\tilde{\mathbf{x}}(t_{k+1})$  enthaltene Zustandsparameter mittels des (verkürzten) Beobachtungsvektors  $\tilde{\mathbf{l}}(t_{k+1})$  direkt oder indirekt beobachtet, wobei der funktionale Zusammenhang durch die Designmatrix  $\mathbf{A}(t_{k+1})$  festgelegt ist.

Durch Einführung der in System- und Messgleichungen enthaltenen fehlerbehafteten Größen wird (3-1) in die nachfolgenden Fehlergleichungen überführt.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\tilde{\mathbf{x}}, k+1} &= \bar{\mathbf{x}}_{k+1} - \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{T}_{k+1, k} \underbrace{(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}, k}} + \mathbf{B}_{k+1, k} \underbrace{(\mathbf{u}_k - \tilde{\mathbf{u}}_k)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{u}, k}} + \mathbf{S}_{k+1, k} \underbrace{(\mathbf{o} - \mathbf{w}_k)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{w}, k}} \\ \text{(b)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{l}, k+1} &= \mathbf{l}_{k+1} - \tilde{\mathbf{l}}_{k+1} = \mathbf{l}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \end{aligned} \quad (3-2)$$

Die zufälligen Abweichungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{u}, k}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{w}, k}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{l}, k+1}$  werden im KALMAN-Filter als diskrete vektorielle Rauschprozesse angenommen, welche keine zeitlichen und gegenseitigen Korrelationen aufweisen (u.a. HEUNECKE 1995). Die nachfolgenden Berechnungsformeln basieren auf der Begründung des KALMAN-Filters mittels des GAUSS-MARKOV-Modells (u.a. SCHRICK 1977, HEUNECKE 1995).

Die Berechnung der Prädiktion des Zustandsvektors erfolgt durch Einsetzen der fehlerbehafteten Zustandsparameter und Stellgrößen in die Systemgleichungen (3-1-a).

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{T}_{k+1, k} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_{k+1, k} \mathbf{u}_k \quad (3-3)$$

Mit (3-2-a) wird die Kovarianzmatrix der Prädiktion durch Fehlerfortpflanzung berechnet.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{x}}, k+1} = \mathbf{T}_{k+1, k} \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}, k} \mathbf{T}_{k+1, k}^T + \mathbf{B}_{k+1, k} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}, k} \mathbf{B}_{k+1, k}^T + \mathbf{S}_{k+1, k} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}, k} \mathbf{S}_{k+1, k}^T \quad (3-4)$$

Das stochastische Modell des KALMAN-Filters ergibt sich dann zu:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{l}^T, k+1} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{l}^T, k+1} = \sigma_0^2 \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}, k+1} & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o} & \mathbf{Q}_{\mathbf{l}, k+1} \end{array} \right) \quad (3-5)$$

Für die Schätzwerte  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  der Zustandsparameter zur Epoche  $t_{k+1}$  gilt in der üblichen Darstellung die nachfolgende Beziehung.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \bar{\mathbf{x}}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} \underbrace{(\mathbf{l}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \bar{\mathbf{x}}_{k+1})}_{\mathbf{d}_{k+1}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{D}_{k+1} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{l}, k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}, k+1} \mathbf{A}_{k+1}^T \\ \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}, k+1} \mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{D}_{k+1}^{-1} \end{cases} \quad (3-6)$$

Die aus den Systemgleichungen berechnete Prädiktion  $\bar{x}_{k+1}$  wird durch die Beobachtungen mit dem Produkt  $K_{k+1} d_{k+1}$  zur endgültigen Schätzung aufdatiert. Die Matrix  $K_{k+1}$  ist dabei die KALMAN-Verstärkungsmatrix, welche den Einfluss der Innovation  $d_{k+1}$  auf das Schätzungsergebnis festlegt.

Der durch die Aufdatierung erzielte Genauigkeitsgewinn ist bei Betrachtung der Kofaktormatrix des geschätzten Zustandsvektors unmittelbar zu erkennen.

$$Q_{\hat{x}\hat{x},k+1} = Q_{\bar{x}\bar{x},k+1} - K_{k+1} D_{k+1} K_{k+1}^T \quad (3-7)$$

Für die Verbesserungen ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} v_{\bar{x},k+1} \\ v_{l,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{k+1} \\ -Q_{ll,k+1} D_{k+1}^{-1} \end{pmatrix} d_{k+1} \quad (3-8)$$

In Gleichung (3-6) ist ersichtlich, dass die Innovation gerade den Widerspruch zwischen den Beobachtungen und den „prädierten“ Beobachtungen repräsentiert. Sie ist damit ein Maß für die Verträglichkeit von theoretischem Systemmodell und den real durchgeführten Messungen. Ihre statistische Bewertung bildet ein zentrales Element im Algorithmus des KALMAN-Filters.

Die Testgröße des Verträglichkeitsglobaltests wird mittels der Kofaktormatrix der Innovation  $D_{k+1}$  gebildet (u.a. PELZER 1985b).

$$\sigma_{k+1}^2 = \frac{d_{k+1}^T Q_{dd,k+1}^{-1} d_{k+1}}{\sigma_0^2} = \frac{d_{k+1}^T D_{k+1}^{-1} d_{k+1}}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n_l, k+1}^2 \Big|_{H_0} \quad \text{mit } H_0 : E\{d_{k+1}\} = \mathbf{o} \quad (3-9)$$

$$H_a : E\{d_{k+1}\} \neq \mathbf{o}$$

Bei Annahme der Nullhypothese  $H_0$  tritt kein Widerspruch zwischen den System- und den Messgleichungen auf. Es ist kein Eingriff in den Verlauf des Filters notwendig.

Bei einer als signifikant erkannten Innovation wird die Nullhypothese verworfen. Es verbleibt dann die Aufgabe, die Ursachen für die Unverträglichkeit zu lokalisieren. Als mögliche Ursachen kommen Fehler in den Beobachtungen, in der Prädiktion und im stochastischen Modell des Filters in Frage. Für eine detaillierte Beschreibung von Lokalisierungsstrategien sei auf HEUNECKE (1995) verwiesen.

In Gleichung (3-9) ist ersichtlich, dass die Anzahl der Freiheitsgrade (= Gesamtredundanz) des Ausgleichungsproblems gerade der Anzahl  $n_{l, k+1}$  der zur aktuellen Filterepoche vorliegenden Beobachtungen entspricht.

## 3.2 Integration von linearen dynamischen Strukturmodellen in die Systemgleichungen des KALMAN-Filters

### 3.2.1 Die Zustandsraummethodik

Die Integration eines linearen dynamischen Strukturmodells in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters erfordert dessen Quantifizierung im Zustandsraum. Der in Kapitel 3.1 noch sehr abstrakt behandelte Begriff der „Zustandsparameter“ kann an dieser Stelle in der Weise konkretisiert werden, dass es sich um zeitveränderliche Zwischengrößen handelt, die zu jedem Zeitpunkt den Zustand des quantifizierten Prozesses eindeutig festlegen (FÖLLINGER / FRANKE 1982). Bei ingenieurgeodätischen Aufgabenstellungen ist die Wahl der Zustandsparameter in vielen Fällen nicht eindeutig, sondern erfolgt problemorientiert (HEUNECKE 1995). Typische Beispiele für die problem-spezifische Einführung von Zustandsparametern liegen in dieser Arbeit mit der adaptiven Erweiterung und dem kausal modifizierten Bewegungsmodell vor.

Erfolgt die Quantifizierung eines dynamischen Strukturmodells als System von gewöhnlichen und / oder partiellen Differenzialgleichungen, so existieren immer standardisierte Verfahren zur Überführung in den Zustandsraum (u.a. FÖLLINGER / FRANKE 1982). Hierdurch ist dann auch die minimale Anzahl der erforderlichen Zustandsparameter festgelegt.

Die allgemeine Form der zeitkontinuierlichen Zustandsraumdarstellung eines linearen dynamischen Strukturmodells ist durch ein lineares stochastisches Vektordifferenzialgleichungssystem 1. Ordnung und ein lineares (bzw. linearisiertes) funktionales Modell zur Quantifizierung des Zusammenhangs zwischen Zustandsparametern  $x$  und gesuchten Ausgangsgrößen  $y$  (z.B. Deformationen) gegeben (u.a. UNBEHAUEN 1969 und FÖLLINGER / FRANKE 1982).

$$\begin{aligned} \text{(a) } \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{w}(t) \\ \text{(b) } \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{Z}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3-10)$$

In (3-10-a) repräsentieren die „Systemmatrix“  $\mathbf{F}$  und die „Stelleingangsmatrix“ (bzw. „Steuereingangsmatrix“)  $\mathbf{G}$  den deterministischen Anteil des Vektordifferentialgleichungssystems. Die „Störeingangsmatrix“  $\mathbf{C}$  verknüpft die Störgrößen  $\mathbf{w}(t)$  mit dem Gleichungssystem und bildet den stochastischen Anteil. Die Bezeichnung für die Matrizen erfolgt hierbei nach SCHRICK (1977). Entsprechend Kapitel 3.1 handelt sich bei  $\mathbf{w}(t)$  um die Abweichungen in der Modellbildung gegenüber der Realität, wobei wieder  $E\{\mathbf{w}(t)\} = \mathbf{o}$  angenommen wird.

Mit den Ausgangsgleichungen (3-10-b) liegt bereits eine Spezialisierung vor. Die direkte Wirkung von Störgrößen auf den Ausgang wird im Rahmen der ingenieurgeodätischen Aufgabenstellungen vernachlässigt (HEUNECKE 1995), so dass auf der rechten Seite der Gleichungen nur eine Abhängigkeit von den Zustandsparametern und den Stellgrößen auftritt. Ferner erweitert HEUNECKE (1995) die Ausgangsgleichungen in der Hinsicht, dass neben den interessierenden Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}^*(t)$  auch Beobachtungen  $\mathbf{I}(t)$  enthalten sind, womit die Bedeutung von (3-10) als mögliche Grundlage für die Quantifizierung von System- und Messgleichungen des KALMAN-Filters anschaulich dokumentiert wird. Gleichung (3-10-b) ist dann entsprechend zu partitionieren.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}(t) \\ \mathbf{y}^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(t) \\ \mathbf{H}_{y^*}(t) \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{Z}_{y^*}(t) \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3-11)$$

In der nachfolgenden Abbildung 3-2 wird die Zustandsraumdarstellung (3-10) im regelungstechnisch üblichen Analogschaltbild dargestellt.

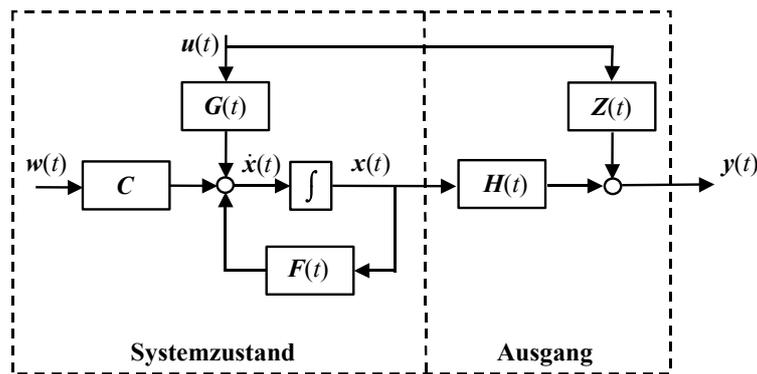


Abbildung 3-2: Zustandsraumdarstellung eines linearen dynamischen Strukturmodells (nach SCHRICK 1977, erweitert)

Methoden zur Überführung von linearen partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen in den Zustandsraum sind in den praktischen Beispielen dieser Arbeit aufgeführt. Der Begriff der „Zustandsraumdarstellung“ wird dann auch für das Vektordifferentialgleichungssystem alleine verwendet. Es ist dabei vorausgesetzt, dass die interessierenden Ausgangsgrößen direkt im Zustandsvektor enthalten sind und mittels einer selektiven Matrix  $\mathbf{H}_{y^*}$  zu extrahieren sind, wodurch die Ausgangsgleichungen die folgende Struktur aufweisen:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_r(t) \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

$\mathbf{y}^*(t) \qquad \qquad \mathbf{H}_{y^*} \qquad \qquad \mathbf{x}(t)$

Die Integration der Zustandsraumdarstellung (3-10) in die Gleichungen (3-1) des diskreten KALMAN-Filters erfordert die Lösung des Vektordifferentialgleichungssystems (3-10-a). Ausgangspunkt für die nachfolgenden Betrachtungen ist die Annahme eines (zunächst) zeitinvarianten Modells, d.h. System- und Stelleingangsmatrix sind nicht mehr explizit von der Zeit abhängig.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{w}(t) \quad (3-13)$$

Bei der Wahl hinreichend kleiner Zeitabschnitte kann in ingenieurgeodätischen Anwendungen zumindest stückweise zeitinvariantes Verhalten in vielen Fällen vorausgesetzt werden (HEUNECKE 1995). Die Lösung des Differenzialgleichungssystems (3-13) führt zu (u.a. GELB et al. 1974, SCHRICK 1977, BRAMMER / SIFFLING 1989):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{G} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{C} \mathbf{w}(\tau) d\tau \quad (3-14)$$

$$\text{mit } \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{E} \quad ; \quad \Phi(t \rightarrow \infty, t_0) = \mathbf{O}$$

Ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt  $t_0$  und Vorgabe von Anfangswertbedingungen  $\mathbf{x}(t_0)$  und dem Verlauf der Stellgrößen  $\mathbf{u}(t)$  bzw. Störgrößen  $\mathbf{w}(t)$  für  $t > t_0$  wird der zeitliche Verlauf der Zustandsparameter  $\mathbf{x}(t)$  für  $t > t_0$  berechnet. Die Transitionsmatrix  $\Phi$  beinhaltet das in Kapitel 2.1.2 beschriebene Gedächtnis des dynamischen Strukturmodells, welches auch bei verschwindenden Stell- und Störgrößen eine autonome ‚Bewegung‘ zulässt.

Die Überführung der zeitkontinuierlichen Lösung in die Systemgleichungen des KALMAN-Filters erfolgt durch Diskretisierung von (3-14), wodurch ein System von Differenzgleichungen entsteht.

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) \approx \Phi(t_{k+1}, t_k) \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G} d\tau \mathbf{u}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{C} d\tau \mathbf{w}(t_k) \quad (3-15)$$

$$\text{mit } \mathbf{u}(t) = \mathbf{const}_u(t_{k+1}, t_k) = \mathbf{u}(t_k) \quad ; \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{const}_w(t_{k+1}, t_k) = \mathbf{w}(t_k) \quad \text{für } t_k \leq t < t_{k+1}$$

In den Differenzgleichungen (3-15) werden Stell- und Störgrößen als stückweise zeitlich konstant angenommen. Diese Behandlung der Stellgrößen entspricht in der Systemtheorie einem Halteglied 0ter Ordnung (u.a. ISERMANN 1972). Die Beziehung mit (3-1-a) wird durch die folgenden Substitutionen hergestellt:

$$\mathbf{T}(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \quad ; \quad \mathbf{B}(t_{k+1}, t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G} d\tau \quad ; \quad \mathbf{S}(t_{k+1}, t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{C} d\tau \quad (3-16)$$

Die zeitdiskrete rekursive Darstellung (3-15) der Lösung des Vektordifferenzialgleichungssystems entspricht somit gerade den Systemgleichungen (3-1-a) des diskreten KALMAN-Filters. Es handelt sich um eine stückweise Lösung der Differenzialgleichungen, wobei die Anfangswertbedingungen  $\mathbf{x}(t_k)$  in jeder Filtereпоche durch Messungen aufdatiert und somit an die Realität angepasst werden. An dieser Stelle ist unmittelbar ersichtlich, dass die KALMAN-Filterung der in Kapitel 2.2.2 als ein Identifikationsziel definierten Anpassung der Anfangswertbedingungen gerecht wird.

### 3.2.2 Berechnung der Transitionsmatrix

Die Bestimmung der Transitionsmatrix  $\Phi(t, t_0)$  ist wesentliche Voraussetzung zur Auswertung von (3-14). Ihre Berechnung kann mittels unterschiedlicher Lösungsansätze durchgeführt werden (s. SCHRICK 1977). Im Folgenden werden zwei Wege aufgezeigt, welche im Rahmen dieser Arbeit genutzt werden.

(a) Das Verfahren nach CAYLEY-HAMILTON

Bei zeitinvarianter Systemmatrix  $\mathbf{F}$  erfolgt die Darstellung der Transitionsmatrix üblicherweise als Matrixexponentialfunktion, welche durch Entwicklung als Matrizenpotenzreihe dann einer numerischen Behandlung zugänglich wird (u.a. GELB et al. 1974).

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{F}^i}{i!} (t-t_0)^i \quad (3-17)$$

Die strenge analytische Berechnung der in Gleichung (3-17) enthaltenen Matrixexponentialfunktion kann mittels des Verfahrens nach CAYLEY-HAMILTON erfolgen (u.a. UNBEHAUEN 1969, SCHRICK 1977, BRAMMER / SIFFLING 1989, EICHHORN / MÖHLENBRINK 2001).

Die Grundidee des Verfahrens ist die Darstellung der Matrixexponentialfunktion  $f(\mathbf{F})$  durch ein äquivalentes Ersatzpolynom  $\varphi(\mathbf{F})$ , welches, im Gegensatz zur unendlichen Matrizenpotenzreihe, einen endlichen Grad aufweist und damit explizit angegeben werden kann.

$$f(\mathbf{F}) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{F}^i}{i!} (t-t_0)^i = \varphi(\mathbf{F}) \quad (3-18)$$

Unter Ausnutzung des Theorems von CAYLEY-HAMILTON (u.a. ZURMÜHL 1964) ergibt sich für die häufig auftretende Klasse von diagonalähnlichen Systemmatrizen  $\mathbf{F}$  der nachfolgende Berechnungsablauf:

1. Berechnung des Minimalpolynoms  $m(\lambda)$  aus den  $s$  unterscheidbaren Eigenwerten  $\lambda_i$  der Systemmatrix  $\mathbf{F}$ .

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s) \quad (3-19)$$

2. Bildung des skalarwertigen Ersatzpolynoms  $\varphi(\lambda)$  aus  $s$  LAGRANGE-Polynomen  $m_i(\lambda)$ .

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^s F_i m_i(\lambda) \quad \text{Ersatzpolynom vom Grad } s-1 \quad (3-20)$$

mit  $m_i(\lambda) = \frac{m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)}$  und  $F_i = F_i(\lambda_i) = \frac{f(\lambda_i)}{m_i(\lambda_i)} = \frac{e^{\lambda_i(t-t_0)}}{m_i(\lambda_i)}$

3. Substitution von  $\mathbf{F}$  zum matriziellen Ersatzpolynom  $\varphi(\mathbf{F})$ .

$$\Phi(t, t_0) = \varphi(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^s F_i m_i(\mathbf{F}) \quad (3-21)$$

Liegen nichtdiagonalähnliche Systemmatrizen vor, kann ebenfalls immer ein äquivalentes Ersatzpolynom gefunden werden. Der zur Berechnung erforderliche Formelapparat ist dann allerdings wesentlich aufwändiger. Die hierfür benötigten Ansätze sind in ZURMÜHL (1964) beschrieben.

#### (b) Die LAPLACE-Transformation

Die LAPLACE-Transformation stellt eine häufig genutzte Alternative zur Lösung des Vektordifferenzialgleichungssystems (3-13) bzw. Bestimmung der Transitionsmatrix  $\Phi$  dar. Die grundlegende Beziehung zwischen einer Funktion im Zeitbereich  $f(t)$  und ihrer LAPLACE-Transformierten  $f^*(s)$  ist nach FÖLLINGER (1986) durch das uneigentliche LAPLACE-Integral definiert.

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = f^*(s) \quad (3-22)$$

Die LAPLACE-Transformierte  $f^*(s)$  ist eine komplexe Funktion mit der komplexen Variablen  $s = \delta + j\omega$ , wobei  $j$  die imaginäre Einheit darstellt. Die Rücktransformation ist durch

$$L^{-1}\{f^*(s)\} = f(t) \quad (3-23)$$

gegeben. In der Literatur sind etliche Tabellenwerke mit Zeitfunktionen  $f(t)$  und den korrespondierenden  $f^*(s)$  zu finden. DRESZER (1975), FÖLLINGER (1986) und BRONSTEIN / SEMENDJAJEW (1987) beinhalten besonders umfangreiche Sammlungen von Transformationsbeziehungen und Rechenregeln.

Lineare gewöhnliche Differenzialgleichungen können dann mittels der Differenziationsregel

$$L\{f^q(t)\} = s^q f^*(s) - s^{q-1} f(+0) - s^{q-2} \dot{f}(+0) - \dots - s f^{q-2}(+0) - f^{q-1}(+0) \quad (3-24)$$

in algebraische Gleichungen überführt werden, welche nach der gesuchten Funktion aufzulösen sind. Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert das gesuchte Ergebnis (s. FÖLLINGER 1986).

### 3.3 Erweiterung zum adaptiven KALMAN-Filter

Liegt ein lineares Strukturmodell als Vektordifferenzialgleichungssystem (3-13) vor, so können die zu identifizierenden physikalischen Parameter in der Systemmatrix  $\mathbf{F}$ , der Stelleingangsmatrix  $\mathbf{G}$  und möglicherweise der Störeingangsmatrix  $\mathbf{C}$  enthalten sein. Die Gleichungen (3-16) und (3-17) erlauben dann die unmittelbare Übertragung dieser Aussage auf Transitionsmatrix  $\mathbf{T}(t_{k+1}, t_k)$ , Stellmatrix  $\mathbf{B}(t_{k+1}, t_k)$  und Störmatrix  $\mathbf{S}(t_{k+1}, t_k)$  des diskreten KALMAN-Filters.

Zur Schätzung der physikalischen Parameter muss das Filter adaptiv erweitert werden. Die adaptive Filterung geht dann von à priori unzureichend bekannten funktionalen und / oder stochastischen Modellen aus, welche im Filterverlauf zu verbessern sind (u.a. GELB et al. 1974). Im Zusammenhang mit dem Begriff „adaptiv“ wird bei BROWN /

HWANG (1997) auch von einem „selbstlernenden Filter“ gesprochen, welches sich eigenständig an die realen Gegebenheiten anpassen bzw. adaptieren soll.

Die Einbindung der physikalischen Parameter in das Filterkonzept erfolgt durch ihre Aufnahme in den Zustandsvektor (HUEP 1986, ISERMANN 1988b, HEUNECKE 1995). Der originäre Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  wird hierzu mit einer physikalischen Partition  $\mathbf{x}_p(t)$  zum Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{erw}(t)$  erweitert.

$$\mathbf{x}_{erw}^T(t) = \left( \mathbf{x}^T(t) \mid \mathbf{x}_p^T(t) \right) \quad (3-25)$$

Bei der Initialisierung des KALMAN-Filters können aus theoretischen und experimentellen Voranalysen erhaltene Näherungswerte für  $\mathbf{x}_p$  und deren stochastische Eigenschaften eingeführt werden.

Mit (3-25) ist eine praxisgerechte nachträgliche Erweiterung der Systemgleichungen (3-1-a) möglich (s. HUEP 1986, HEUNECKE 1995). Die rekursive Fortschreibung der physikalischen Parameter erfolgt dabei mittels eines „random walk“-Prozesses (u.a. GELB et al. 1974, ISERMANN 1988b, SCHLITGEN / STREITBERG 1991).

$$\mathbf{x}_p(t_{k+1}) = \mathbf{x}_p(t_k) + \mathbf{w}_p(t_k) \quad \text{mit } E\{\mathbf{w}_p(t_k)\} = \mathbf{o} \quad (3-26)$$

Mit der Einführung der vektorwertigen Funktionen  $\Psi$  und  $\Psi_p$  ergeben sich die adaptiv erweiterten Systemgleichungen zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{T}_{k+1,k}(\mathbf{x}_{p,k} + \mathbf{w}_{p,k}) \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_{k+1,k}(\mathbf{x}_{p,k} + \mathbf{w}_{p,k}) \mathbf{u}_k + \mathbf{S}_{k+1,k}(\mathbf{x}_{p,k} + \mathbf{w}_{p,k}) \mathbf{w}_k \\ &= \Psi(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{p,k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{p,k}) \end{aligned} \quad (3-27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{p,k+1} &= \mathbf{x}_{p,k} + \mathbf{w}_{p,k} \\ &= \Psi_p(\mathbf{x}_{p,k}, \mathbf{w}_{p,k}) \end{aligned}$$

Hierbei sind die physikalischen Parameter nichtlinear in den nun zeitvarianten Matrizen  $\mathbf{T}_{k+1,k}$ ,  $\mathbf{B}_{k+1,k}$  und  $\mathbf{S}_{k+1,k}$  enthalten.

Die Berechnung der Prädiktion des erweiterten Zustandsvektors zur Epoche  $t_{k+1}$  erfolgt mittels der ungestörten erweiterten Systemgleichungen und den geschätzten bzw. gemessenen Größen zur Epoche  $t_k$ .

$$\bar{\mathbf{x}}_{erw,k+1} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \bar{\mathbf{x}}_{p,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{x}}_{p,k}, \mathbf{u}_k) \\ \hat{\mathbf{x}}_{p,k} \end{pmatrix} \quad (3-28)$$

Die Berechnung der Kovarianzmatrix der Prädiktion erfolgt mittels Fehlerfortpflanzung, wobei im adaptiv erweiterten KALMAN-Filter Gleichung (3-27) zunächst linearisiert werden muss. Es ergibt sich:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{\mathbf{x}}_{erw,k+1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{\mathbf{x}},k+1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{\mathbf{x}}_p,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{k+1,k} & \mathbf{T}_{p,k+1,k} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\hat{\mathbf{x}},k} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\hat{\mathbf{x}}_p,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{k+1,k} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{u},k} + \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{k+1,k} & \mathbf{S}_{p,k+1,k} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{w},k} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{w}_p,k} \end{pmatrix} \quad (3-29)$$

$\mathbf{T}_{erw,k+1,k} \qquad \mathbf{B}_{erw,k+1,k} \qquad \mathbf{S}_{erw,k+1,k}$

Die Submatrizen  $\mathbf{T}_{p,k+1,k}$  und  $\mathbf{S}_{p,k+1,k}$  sind JACOBI-Matrizen, welche durch Ableitung von  $\Psi$  nach  $\mathbf{x}_{p,k}$  bzw.  $\mathbf{w}_{p,k}$  zu bilden sind. Aufgrund der Zeitvarianz der Hypermatrizen  $\mathbf{T}_{erw,k+1,k}$ ,  $\mathbf{B}_{erw,k+1,k}$  und  $\mathbf{S}_{erw,k+1,k}$  muss (3-29) in jedem Filterschritt neu berechnet werden.

Mit (3-28) und (3-29) liegen die Prädiktionen und die zugehörigen Fehlergleichungen im adaptiv erweiterten KALMAN-Filter vor. Die Filterung kann nun einfach mittels des in Kapitel 3.1 bereitgestellten Formelapparats durchgeführt werden, wobei an den entsprechenden Stellen die erweiterten Matrizen bzw. Vektoren zu verwenden sind.

### 3.4 Ermittelbarkeit und Identifizierbarkeit als Struktureigenschaften des adaptiven KALMAN-Filters

Bei ingenieurgeodätischen Aufgabenstellungen besitzen die Messgleichungen des adaptiven KALMAN-Filters zumeist die nachfolgende Struktur mit einer nicht beobachtbaren physikalischen Partition  $\mathbf{x}_p$  des Zustandsvektors (HEUNECKE 1995).

$$\hat{\mathbf{i}}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k+1} & \mathbf{A}_{p,k+1} = \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{p,k+1} \end{pmatrix} \quad (3-30)$$

Die physikalischen Parameter sind damit weder direkten noch indirekten geodätischen Beobachtungen zugänglich und bzgl. der Messgleichungen hochgradig konfigurationsdefekt. In diesem Fall kann eine Beurteilung der Filterergebnisse für  $\mathbf{x}_p$  auf der Grundlage zweier wichtiger Struktureigenschaften des KALMAN-Filters erfolgen.

#### (a) Ermittelbarkeit

Der Begriff der „Ermittelbarkeit eines Systems“ ist nach SCHRICK (1977) gleichzusetzen mit dem ‚selbsttätigen‘ Abklingen der Unsicherheiten innerhalb der nichtbeobachtbaren Partition des Zustandsvektors. Nach HEUNECKE (1995) muss hierzu die nachfolgende grundlegende Bedingung erfüllt sein:

- Die Existenz von algebraischen Korrelationen zwischen den anhand der Systemgleichungen des KALMAN-Filters berechneten Prädiktionen der beobachtbaren und der nicht beobachtbaren Zustandsparameter.
- Die Korrelationen ermöglichen dann eine Aufdatierung der nicht beobachtbaren Zustandsparameter mit Verbesserungen und eine Reduktion der Varianzen (s.a. (3-6) bis (3-8)).

#### (b) Identifizierbarkeit

Nach NATKE (1983) und ISERMANN (1988a) ist unter dem Begriff der „Identifizierbarkeit“ ganz allgemein die Möglichkeit zu verstehen, ein System aufgrund gemessener Daten und Anwendung eines Identifikationsverfahrens in Form eines mathematischen Modells eindeutig zu beschreiben.

HEUNECKE (1995) bezeichnet dann die Ermittlung der in der physikalischen Partition  $\mathbf{x}_p$  des Zustandsvektors enthaltenen Parameter als „Parameteridentifikation“ und die Fähigkeit des Ansatzes, dies zu leisten als „(Parameter-) Identifizierbarkeit“. Im Sinne der Ausgleichsrechnung ist die Zielsetzung der Parameteridentifikation eine erwartungstreue Schätzung der physikalischen Parameter.

$$E \{ \hat{\mathbf{x}}_{p,k+1} - \tilde{\mathbf{x}}_{p,k+1} \} = \mathbf{0} \quad (3-31)$$

Die praktische Überprüfung der Forderung (3-31) erfordert dann die Untersuchung der Filterergebnisse auf der Grundlage der nachfolgenden Aussagen:

- Die zum Zeitpunkt der Filterinitialisierung vorliegenden Startwerte  $\mathbf{x}_{p,k=0}$  müssen im Filterverlauf mittels der Messungen aufdatiert werden, d.h. Verbesserungen erhalten. Die Ermittelbarkeit von  $\mathbf{x}_p$  ist damit eine wichtige Voraussetzung für die Identifizierbarkeit von  $\mathbf{x}_p$ .
- Der Nachweis der Ermittelbarkeit ist ein notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium zur Feststellung der Identifizierbarkeit von  $\mathbf{x}_p$ . Wie in Kapitel 2.2.2 dargelegt wurde, muss im Rahmen der Verifikation des an die Realität angepassten Modells immer eine Überprüfung der Filterergebnisse hinsichtlich einer erfolgreichen Parameteridentifikation erfolgen.

Eine vertiefende Diskussion der Ermittelbarkeit und Identifizierbarkeit von physikalischen Parametern erfolgt in den praktischen Beispielen dieser Arbeit.

## 4 Entwicklung einer Filterstrategie anhand der parametrischen Identifikation eines Masse-Feder-Dämpfungs-Systems

### 4.1 Vorbemerkungen

Als Motivation für die nachfolgenden Untersuchungen eines Masse-Feder-Dämpfungs-Systems können zwei Aufgabenstellungen angeführt werden.

1. Zielsetzung der ersten Aufgabenstellung ist die Entwicklung und Erprobung einer Filterstrategie zur Identifikation von dynamischen Strukturmodellen.

Mit der Betrachtung des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems erfolgt eine Untersuchung der Beziehung zwischen experimentellem Umfeld / Filterdesign und der Ermittler- bzw. Identifizierbarkeit der gesuchten physikalischen Parameter.

Hierdurch können methodische Grundlagen bereitgestellt werden, welche in Kapitel 5 die Identifikation des Temperaturdeformationsmodells ermöglichen.

2. Die zweite Aufgabenstellung beinhaltet gerade die Identifikationsaufgabe. Zielsetzung ist die Nutzung der parametrischen Identifikation mittels adaptiver KALMAN-Filterung bei der Analyse von Bauwerksschwingungen.

Die Berechnung von Schwingungen zur Untersuchung der Standsicherheit repräsentiert im Bauwesen eine klassisch dynamische Problemstellung, wobei das Bauwerksverhalten im Zeitbereich im Allgemeinen durch finite Elemente idealisiert und durch Systeme von gewöhnlichen Differenzialgleichungen quantifiziert wird („Zeitverlaufsmethode“, u.a. SCHÜELLER et al. 1975, PANGGABEAN 1978, RUSCHEWEYH 1982). Die ursächlichen Einwirkungen sind durch Belastungen wie den Wind oder den Verkehr vorgegeben. Im Gegensatz zu den in Kapitel 5 behandelten thermisch induzierten Deformationen erfolgt die Verformung des Bauwerks unter dem Einfluss von mechanischen Belastungen, d.h. äußerer Kräfte (u.a. RUSCHEWEYH 1982).

Anhand der Identifikation eines Einmassenschwingers soll im Rahmen dieser Arbeit die Möglichkeit der Anwendung der adaptiven KALMAN-Filterung auf Schwingungsprobleme vorgestellt werden. Die Nutzung des KALMAN-Filters versteht sich als Ergänzung zu den von MÖHLENBRINK / KRZYTEK (1984) zur Untersuchung von Bauwerksschwingungen angewendeten parametrischen Methoden.

### 4.2 Modellierung von Bauwerksschwingungen im Zeitbereich

Bei der Idealisierung der mechanischen Eigenschaften des Bauwerks als System von Massen, Feder- und Dämpfungselementen kann unter Voraussetzung von sehr kleinen Deformationen (verglichen mit den Abmessungen des Bauwerks) näherungsweise lineares Verhalten angenommen werden. Aufgrund dieser Annahme kann das nachfolgende System von Bewegungsgleichungen (gekoppeltes System von linearen gewöhnlichen Differenzialgleichungen 2. Ordnung = DGL-System 2. Ordnung) mit  $r$  Freiheitsgraden formuliert werden (u.a. SCHÜELLER et al. 1975, PANGGABEAN 1978, MÖHLENBRINK / KRZYTEK 1984).

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1r} \\ & \ddots & \vdots \\ & & m_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{l}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{l}_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ & \ddots & \vdots \\ & & d_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{l}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{l}_r(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1r} \\ & \ddots & \vdots \\ & & k_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(t) \\ \vdots \\ l_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_r(t) \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

$\mathbf{M} \quad \ddot{\mathbf{l}}(t) \quad \mathbf{D} \quad \dot{\mathbf{l}}(t) \quad \mathbf{K} \quad \mathbf{l}(t) \quad \mathbf{f}(t)$

Das dynamische Deformationsverhalten des Bauwerks wird hierbei mittels des Vektors  $\mathbf{l}(t)$  der Strukturdeformationen beschrieben. Die Deformationen entstehen aufgrund von auf das Bauwerk einwirkenden äußeren Kräften, welche im Belastungsvektor  $\mathbf{f}(t)$  enthalten sind. Typische Belastungssituationen sind z.B. durch die Gravitationskraft, den Verkehr oder durch aerodynamische Kräfte aufgrund der Einwirkung des Windes (u.a. SCHMID 1991) gegeben.

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ , der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  und der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  enthalten die Materialparameter des modellierten Bauwerks (z.B. Federkonstanten  $\gamma_i$ , Dämpfungskonstanten  $\beta_i$  bzw. Elastizitätsmodule  $E_i$ ). Ihre Bestimmung erfolgt nach LUZ (1992) i.d.R. über baustatische Methoden ( $\mathbf{K}$ ) bzw. möglichst gute Abschätzungen ( $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{M}$ ). Die Gültigkeit dieser Annahmen muss im Anschluss experimentell überprüft werden.

An dieser Stelle wird deutlich, dass ein parametrischer Identifikationsansatz mittels KALMAN-Filterung eine sinnvolle Ergänzung dieser Methoden darstellt. Die gesuchten Parameter können dann in den Zustandsvektor des Filters aufgenommen und im Filterverlauf geschätzt werden.

Die parametrische Identifikation der in (4-1) enthaltenen Materialparameter mittels diskreter KALMAN-Filterung erfordert die Integration des DGL-Systems in die Systemgleichungen des Filters. Der Übergang in die Zustandsraumdarstellung erfolgt durch Einführung von  $2r$  Zustandsparametern  $\mathbf{x}$ .

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad \dots \quad x_r \mid x_{r+1} \quad \dots \quad x_{2r})^T = (l_1 \quad \dots \quad l_r \mid \dot{l}_1 \quad \dots \quad \dot{l}_r)^T \quad (4-2)$$

Mit (4-1) und (4-2) ergibt sich das folgende System von  $2r$  gekoppelten, linearen gewöhnlichen Differenzialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_r \\ \dot{x}_{r+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mid & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ & & 0 & \mid & & & 1 \\ \hline -\sum_{j=1}^r m_{1j}^* k_{j1} & \dots & -\sum_{j=1}^r m_{1j}^* k_{jr} & \mid & -\sum_{j=1}^r m_{1j}^* d_{j1} & \dots & -\sum_{j=1}^r m_{1j}^* d_{jr} \\ \vdots & & \vdots & \mid & \vdots & & \vdots \\ -\sum_{j=1}^r m_{rj}^* k_{j1} & \dots & -\sum_{j=1}^r m_{rj}^* k_{jr} & \mid & -\sum_{j=1}^r m_{rj}^* d_{j1} & \dots & -\sum_{j=1}^r m_{rj}^* d_{jr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_{2r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \\ \hline m_{11}^* & \dots & m_{1r}^* \\ & & \vdots \\ & & m_{rr}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} \quad (4-3)$$

$\frac{\dot{\mathbf{x}}}{2r,1} \qquad \qquad \qquad \frac{\mathbf{F}}{2r,2r} \qquad \qquad \qquad \frac{\mathbf{x}}{2r,1} \qquad \qquad \qquad \frac{\mathbf{G}}{2r,r} \qquad \qquad \qquad \frac{\mathbf{u}}{r,1}$

Die Größen  $m_{ij}^*$  sind die Elemente der inversen Massenmatrix  $\mathbf{M}^{-1}$ . Die Invertierbarkeit der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  kann i.a. als vorausgesetzt angenommen werden (LUZ 1992).

Die Zustandsraumdarstellung (4-3) bildet die für DGL-Systeme beliebiger Größe und Koppelung gültige Grundlage zur Integration in das diskrete KALMAN-Filter, welche mittels der Beziehungen (3-13) – (3-16) und des Verfahrens von CAYLEY-HAMILTON (s. Kapitel 3.2.2) erfolgen kann.

### 4.3 Erstellung der Systemgleichungen für das Masse-Feder-Dämpfungs-System im diskreten KALMAN-Filter

Als Einmassenschwinger wird die idealisierte Darstellung eines schwingenden Objekts als punktförmige Masse, welche elastisch mit einer Feder an einen festen Lagerungspunkt  $F_p$  gekoppelt ist, verstanden.

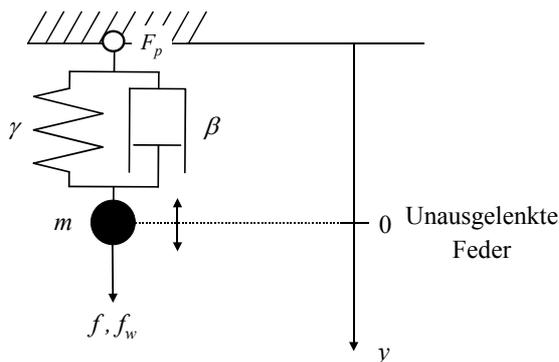


Abbildung 4-1: Masse-Feder-Dämpfungs-System

Die Energieverluste dieser Schwingung (bspw. durch Reibung) werden durch eine weitere Koppelung der Masse mit einem geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer berücksichtigt, welcher ebenfalls mit  $F_p$  verbunden ist. Kräfte sollen ausschließlich in Richtung der Längsachse dieses Masse-Feder-Dämpfungs-Systems gerichtet sein, so dass die Bewegung der Masse nur entlang einer Koordinatenachse erfolgt. Das System besitzt somit  $r = 1$  Freiheitsgrad. Über das Datum wird mittels der starren Lagerungsbedingung im Festpunkt  $F_p$  verfügt. In Abbildung 4-1 ist dieser Spezialfall von (4-1) dargestellt.

Als Bewegungsgleichung der Masse ergibt sich eine skalare lineare gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung mit stochastischer rechter Seite (stochastische DGL 2. Ordnung).

$$m \ddot{y} + \beta \dot{y} + \gamma y = f + f_w \quad (4-4)$$

Die im Trägheitsglied enthaltene punktförmige Masse  $m$ , die Dämpfungskonstante  $\beta$  und die Federkonstante  $\gamma$  sind die physikalischen Parameter des Systemmodells. Auf der rechten Seite wirkt die skalare Kraft  $f$  auf das System ein.

Eine Möglichkeit zur Berücksichtigung von Störeinflüssen ist durch die Einführung einer stochastischen „Störkraft“  $f_w$  gegeben, welche auf die rechte Seite von (4-4) aufaddiert werden kann. Es ist dann  $E\{f_w\} = 0$  zu fordern. Zu bemerken ist allerdings, dass mit diesem Ansatz Modellstörungen im allgemeinen Sinne nur insoweit berücksichtigt werden können, als sie in Form von Störkräften abzubilden sind.

Durch Einführung der Substitutionen  $a_0 = \gamma/m$  und  $a_1 = \beta/m$  kann obige DGL dann zu

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = \frac{1}{m} (f + f_w) \quad (4-5)$$

umgeformt werden. Hierbei sind  $a_0(\gamma, m)$  und  $a_1(\beta, m)$  physikalisch interpretierbar und werden im Folgenden als Feder- bzw. Dämpfungsparameter bezeichnet. Das Ziel der adaptiven KALMAN-Filterung ist deren Identifikation. Die Masse  $m$  wird exemplarisch als bekannt vorausgesetzt.

Aufgrund der festgelegten Zielgrößen ist die vorliegende Aufgabenstellung auch als eine Ergänzung der in HEUNECKE et al. (1993) beschriebenen parametrischen Identifikation eines Feder-Dämpfungs-Systems für den Fall eines schwingenden Systems zu verstehen.

Die wesentlichen Kenngrößen der Schwingung der Masse ergeben sich u.a. nach GERTHSEN et al. (1982) wie folgt:

$$\delta = \frac{a_1}{2} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{a_0} \quad ; \quad \omega_d = \sqrt{a_0 - \frac{1}{4}a_1^2} \quad (4-6)$$

Die Größe  $\delta$  ist hierbei der Dämpfungsfaktor der gedämpften freien Schwingung des Massenpunktes. Die Größe  $\omega_0$  ist die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften frei schwingenden Massenpunktes. Die Größe  $\omega_d$  bezeichnet man als die Eigenkreisfrequenz des gedämpften frei schwingenden Massenpunktes.

Mit (4-2) und (4-3) kann (4-5) in die Zustandsraumdarstellung überführt werden.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} f_w \quad \text{mit } x_1 = y \ ; \ x_2 = \dot{y} \quad (4-7)$$

$\dot{\mathbf{x}} \quad \quad \mathbf{F} \quad \quad \mathbf{x} \quad \quad \mathbf{G} \ u \quad \quad \mathbf{C} \ w$

Die Integration des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters erfordert die rekursive Darstellung der Lösung von (4-7). Diese wird auf der Grundlage des Verfahrens nach CAYLEY-HAMILTON bestimmt.

Die für den Schwingfall konjugiert komplexen Eigenwerte  $\lambda_{1/2}$  der Systemmatrix  $\mathbf{F}$  ergeben sich zu:

$$\det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm j \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \quad (4-8)$$

Die Systemmatrix  $\mathbf{F}$  ist in diesem Fall diagonalähnlich. Mit (3-19) – (3-21) kann die Transitionsmatrix  $\Phi(t, t_0)$  berechnet werden. Unter Ausnutzung von (3-15) und (3-16) erfolgt dann unmittelbar der Übergang zur zeitdiskreten Darstellung.

$$\begin{pmatrix} y(t_{k+1}) \\ \dot{y}(t_{k+1}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_2 \Delta t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 \Delta t} & e^{\lambda_1 \Delta t} - e^{\lambda_2 \Delta t} \\ -\lambda_1 \lambda_2 [e^{\lambda_1 \Delta t} - e^{\lambda_2 \Delta t}] & \lambda_1 e^{\lambda_1 \Delta t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t_k) \\ \dot{y}(t_k) \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2} [1 - e^{\lambda_2 \Delta t}] - \frac{1}{\lambda_1} [1 - e^{\lambda_1 \Delta t}] \\ e^{\lambda_1 \Delta t} - e^{\lambda_2 \Delta t} \end{pmatrix} f(t_k) \quad (4-9) \\ + \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2} [1 - e^{\lambda_2 \Delta t}] - \frac{1}{\lambda_1} [1 - e^{\lambda_1 \Delta t}] \\ e^{\lambda_1 \Delta t} - e^{\lambda_2 \Delta t} \end{pmatrix} f_w(t_k)$$

Hierbei ist  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  der Fortschritt des KALMAN-Filters. Für den Schwingfall ist es weiterhin möglich, obige Gleichung mit (4-6) und (4-8) wie folgt zu spezialisieren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(t_{k+1}) \\ \dot{y}(t_{k+1}) \end{pmatrix} &= e^{-\delta \Delta t} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\omega_d} \sin(\omega_d \Delta t) + \cos(\omega_d \Delta t) & \frac{1}{\omega_d} \sin(\omega_d \Delta t) \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega_d} \sin(\omega_d \Delta t) & \cos(\omega_d \Delta t) - \frac{\delta}{\omega_d} \sin(\omega_d \Delta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t_k) \\ \dot{y}(t_k) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\delta \Delta t} \left( \cos(\omega_d \Delta t) + \frac{\delta}{\omega_d} \sin(\omega_d \Delta t) \right) \right] \\ \frac{1}{\omega_d} e^{-\delta \Delta t} \sin(\omega_d \Delta t) \end{pmatrix} f(t_k) \\ &+ \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\delta \Delta t} \left( \cos(\omega_d \Delta t) + \frac{\delta}{\omega_d} \sin(\omega_d \Delta t) \right) \right] \\ \frac{1}{\omega_d} e^{-\delta \Delta t} \sin(\omega_d \Delta t) \end{pmatrix} f_w(t_k) \end{aligned} \quad (4-10)$$

Die Einführung der üblichen Substitutionen für Transitions-, Stell- und Störmatrix führt dann zur nachfolgenden Darstellung der gestörten Systemgleichungen des KALMAN-Filters für das Masse-Feder-Dämpfungs-System.

$$\underset{2,1}{\mathbf{x}(t_{k+1})} = \underset{2,2}{\mathbf{T}(t_{k+1}, t_k)} \underset{2,1}{\mathbf{x}(t_k)} + \underset{2,1}{\mathbf{B}(t_{k+1}, t_k)} \underset{1,1}{u(t_k)} + \underset{2,1}{\mathbf{S}(t_{k+1}, t_k)} \underset{1,1}{w(t_k)} \quad (4-11)$$

Durch das erste Matrizenprodukt wird in (4-11) die gedämpfte freie Schwingung des Massenpunktes beschrieben. Es handelt sich um das Gedächtnis des Systems, da hierdurch der Massenpunkt befähigt wird, eine autonome Bewegung durchzuführen, welche nur durch seine Anfangswerte festgelegt ist. Der Term repräsentiert somit den eigentlichen dynamischen Anteil der Systemgleichungen des KALMAN-Filters.

#### 4.4 Erweiterung zum adaptiven KALMAN-Filter

##### 4.4.1 Einführung einer adaptiven Filterpartition

Zur Identifikation der physikalisch interpretierbaren Parameter  $a_0$  und  $a_1$  werden die Systemgleichungen des KALMAN-Filters um einen adaptiven Anteil erweitert, der die Fortschreibung dieser gesuchten Größen enthält. Gemäß Kapitel 3.3 wird der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  hierzu um eine physikalische Partition  $\mathbf{x}_p$  ergänzt und ergibt sich zu:

$$\mathbf{x}^T = \left( \mathbf{x}_d^T \mid \mathbf{x}_p^T \right) = \left( y \quad \dot{y} \mid a_0 \quad a_1 \right) = \left( y \quad \dot{y} \mid \gamma/m \quad \beta/m \right) \quad (4-12)$$

Ort und Geschwindigkeit werden hier als „deskriptive Partition“  $\mathbf{x}_d$  des Zustandsvektors  $\mathbf{x}$  bezeichnet, da sie das Phänomen der Bewegung des Massenpunktes beschreiben. Auf die physikalische Partition  $\mathbf{x}_p$  sollen nur Störgrößen  $\mathbf{w}_p$  einwirken, wobei  $E\{\mathbf{w}_p\} = \mathbf{o}$  angenommen wird. Ihre Fortschreibung erfolgt dann als „random walk“-Prozess.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p(t_{k+1}) &= \mathbf{x}_p(t_k) + \mathbf{w}_p(t_k) \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0(t_{k+1}) \\ a_1(t_{k+1}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_0(t_k) \\ a_1(t_k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{0,w}(t_k) \\ a_{1,w}(t_k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-13)$$

Da nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Fortschreibung der beiden physikalischen Parameter durch denselben Parameter gestört wird, muss in (4-13) jeder Komponente der physikalischen Partition  $\mathbf{x}_p$  eine individuelle Störgröße  $a_{i,w}$  ( $i = 0, 1$ ) zugeordnet werden. Somit wird im Filteralgorithmus dann auch eine separate Verfügung über diese Störeinflüsse ermöglicht.

Die adaptiv erweiterten, gestörten Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters ergeben sich mit (4-11) – (4-13) zu nachfolgendem Gleichungssystem, wobei die gesuchten physikalischen Parameter  $\mathbf{x}_p$  nichtlinear in  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{S}$  enthalten sind.

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathbf{x}}_{d,k+1}}{2,1} &= \frac{\mathbf{T}_{k+1,k}(\tilde{\mathbf{x}}_{p,k} + \mathbf{w}_{p,k})}{2,2} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{d,k}}{2,1} + \frac{\mathbf{B}_{k+1,k}(\tilde{\mathbf{x}}_{p,k} + \mathbf{w}_{p,k})}{2,1} \frac{\tilde{u}_k}{1,1} + \frac{\mathbf{S}_{k+1,k}(\tilde{\mathbf{x}}_{p,k} + \mathbf{w}_{p,k})}{2,1} \frac{w_k}{1,1} \\
&= \frac{\Psi_d(\tilde{\mathbf{x}}_{d,k}, \tilde{\mathbf{x}}_{p,k}, \tilde{u}_k, w_k, \mathbf{w}_{p,k})}{2,1} \\
\frac{\tilde{\mathbf{x}}_{p,k+1}}{2,1} &= \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{p,k}}{2,1} + \frac{\mathbf{w}_{p,k}}{2,1} \\
&= \frac{\Psi_p(\tilde{\mathbf{x}}_{p,k}, \mathbf{w}_{p,k})}{2,1}
\end{aligned} \tag{4-14}$$

Wegen  $E\{w\} = 0$  und  $E\{\mathbf{w}_p\} = \mathbf{o}$  erfolgt die Prädiktion der Zustandsparameter im KALMAN-Filter mit Hilfe der ungestörten Systemgleichungen.

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\mathbf{x}}_{d,k+1}}{2,1} &= \frac{\mathbf{T}_{k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{p,k})}{2,2} \frac{\hat{\mathbf{x}}_{d,k}}{2,1} + \frac{\mathbf{B}_{k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{p,k})}{2,1} \frac{u_k}{1,1} \\
\frac{\bar{\mathbf{x}}_{p,k+1}}{2,1} &= \frac{\hat{\mathbf{x}}_{p,k}}{2,1}
\end{aligned} \tag{4-15}$$

In Gleichung (4-15) wird die praktische Berechnung der Prädiktion  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$  der Zustandsparameter mittels des im vorherigen Rekursionsschritt im KALMAN-Filter geschätzten Zustandsvektors  $\hat{\mathbf{x}}_k^T = (\hat{\mathbf{x}}_{d,k}^T, \hat{\mathbf{x}}_{p,k}^T)$  und der als gemessen angenommenen Erregung  $u_k$  durchgeführt.

Die (negativen) Prädiktionsfehler ergeben sich aus der Taylorentwicklung von (4-14) um die Prädiktion (4-15). Die Fehlergleichungen lassen sich dann mit der aus Kapitel 3.3 bekannten Hypermatrixschreibweise darstellen. Die im nachfolgenden Gleichungssystem enthaltenen Submatrizen werden gerade aus den partiellen Ableitungen der vektorwertigen Funktionen  $\Psi_d$  und  $\Psi_p$  gebildet.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{d,k+1} - \bar{\mathbf{x}}_{d,k+1}}{2,1} \\ \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{p,k+1} - \bar{\mathbf{x}}_{p,k+1}}{2,1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{T}_{k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{p,k})}{2,2} & \frac{\mathbf{T}_{p,k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{d,k}, \hat{\mathbf{x}}_{p,k}, u_k)}{2,2} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{d,k} - \hat{\mathbf{x}}_{d,k}}{2,1} \\ \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{p,k} - \hat{\mathbf{x}}_{p,k}}{2,1} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{B}_{k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{p,k})}{2,1} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \frac{(\tilde{u}_k - u_k)}{1,1} \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{S}_{k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{p,k})}{2,1} & \frac{\mathbf{T}_{p,k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{d,k}, \hat{\mathbf{x}}_{p,k}, u_k)}{2,2} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{w_k}{1,1} \\ \frac{\mathbf{w}_{p,k}}{2,1} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4-16}$$

Da in den adaptiv erweiterten, gestörten Systemgleichungen (4-14) nur die physikalische Partition  $\mathbf{x}_p$  und die Störgrößen  $\mathbf{w}_p$  nichtlinear in  $\Psi_d$  enthalten sind, reduziert sich die Linearisierungsaufgabe zu:

$$\mathbf{T}_{p,k+1,k} = \frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{x}_{p,k}} \Big|_0 = \left( \frac{\partial \Psi_d}{\partial a_{0,k}} \Big|_0 \quad \frac{\partial \Psi_d}{\partial a_{1,k}} \Big|_0 \right) \stackrel{!}{=} \frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{w}_{p,k}} \Big|_0 \tag{4-17}$$

Die analytische Berechnung der partiellen Ableitungen ist in Anhang A.1 dargestellt. Mit (4-15) und (4-16) sind die für die Berechnung der Prädiktion und deren Kovarianzmatrix benötigten adaptiv erweiterten Systemgleichungen des KALMAN-Filters für das Masse-Feder-Dämpfungs-System gegeben.

#### 4.4.2 Formulierung der Messgleichungen

Die Fähigkeit des KALMAN-Filters zur Lösung der Identifikationsaufgabe muss durch die Hinzunahme geeigneter Messgleichungen erreicht werden. Da die physikalischen Parameter einer direkten Beobachtung nicht zugänglich sind, wird in diesem Beispiel der Ort  $y_{k+1}$  des Massenpunktes als Messgröße eingeführt. Es ist einzusehen, dass der zeitliche Verlauf dieser Messgröße (bei angeregtem System) die Informationen bzgl. des Systemübertragungsverhaltens und damit implizit auch bzgl. der gesuchten Parameter beinhaltet.

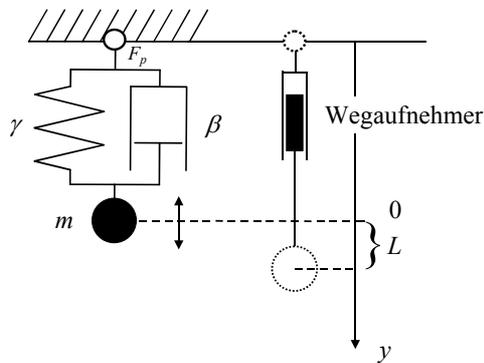


Abbildung 4-2: Messeinrichtung zur Bestimmung des Ortes  $y_{k+1}$  der Masse  $m$

Wie in Abbildung 4-2 ersichtlich, ist zur Erfassung dieser Messgröße ein induktiver (in Relation zur Masse  $m$  als masselos anzunehmender) Wegaufnehmer mit einem auf den unausgelenkten Zustand der Feder bezogenen Nullpunkt denkbar. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Messeinrichtung neben dem Masse-Feder-Dämpfungs-System eingezeichnet.

Mit  $y_{k+1}$  wird der Zustandsparameter des Ortes der Masse  $m$  direkt beobachtet. Somit gilt für das lineare funktionale Modell der Messgleichung des KALMAN-Filters:

$$\begin{array}{r} y_{k+1} - \varepsilon_{y,k+1} = (1 \ 0 \ 0 \ 0) (\tilde{y} \ \tilde{y} \ \tilde{a}_0 \ \tilde{a}_1)_{k+1}^T \\ L_{k+1} \ \varepsilon_{L,k+1} \quad \quad \quad \mathbf{A} \quad \quad \quad \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \end{array} \quad (4-18)$$

Obige Gleichung ist die zur Ortsbeobachtung  $y_{k+1}$  zugehörige Verbesserungsgleichung mit der zeitinvarianten Designmatrix  $\mathbf{A}$ .

#### 4.4.3 Erstellung des stochastischen Modells des Filters

Zur Erstellung des stochastischen Modells des KALMAN-Filters muss das Verhalten der in (4-16) und (4-18) enthaltenen zufälligen Abweichungen  $\varepsilon$  von Mess- und Störgrößen

$$\begin{array}{r} \varepsilon_{u,k} = u_k - \tilde{u} \\ \varepsilon_{w,k} = 0 - w_k \\ \varepsilon_{w_p,k} = \mathbf{o} - \mathbf{w}_{p,k} \\ \varepsilon_{L,k+1} = L_{k+1} - \tilde{L} \end{array} \quad (4-19)$$

modelliert werden. Wie bereits in Kapitel 3.1 dargelegt, wird in der KALMAN-Filterung üblicherweise von zeitlich unkorrelierten Rauschprozessen ausgegangen.

Zeitlich korreliertes, d.h. farbiges Rauschen kann in der KALMAN-Filterung durch eine Erweiterung der Systemgleichungen zu einem Formfilter (s. HUEP 1986) berücksichtigt werden. Hierzu müssen die Parameter der gewählten farbigen Rauschprozesse entweder a priori als bekannt angenommen, oder ebenfalls im Rahmen einer adaptiven Erweiterung mitgeschätzt werden. Dies ist nach HEUNECKE (1995) i.a. als sehr problematisch einzustufen, weil die Rauschprozesse oftmals weniger gut bekannt sind wie das Systemverhalten selbst. Fehlerhafte Annahmen führen zu erheblichen Verzerrungen der Filterergebnisse.

In den nachfolgenden Kapiteln wird gezeigt, dass auch bei Vernachlässigung von farbigen Rauschteilen durch geeignete Wahl (bzw. gezielte Erhöhung) von zeitlich unkorrelierten Rauschprozessen sehr gute Identifikationsergebnisse erzielt werden. Die Modellierung von farbigen Rauschprozessen wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter vertieft.

Gemäß Kapitel 3.1 ist für die weitere Berechnung des KALMAN-Filters auch die gegenseitige Unkorreliertheit der Rauschprozesse für  $\varepsilon_{u,k}$ ,  $\varepsilon_{w,k}$ ,  $\varepsilon_{w_p,k}$  und  $\varepsilon_{L,k+1}$  anzunehmen, wobei zu einer Epoche  $t_k$  dann keine Kreuzkovarianzen existieren.

Unter Berücksichtigung obiger Annahmen ergibt sich für das stochastische Modell des KALMAN-Filters zum Filterzeitpunkt  $t_{k+1}$ :

$$\Sigma_{LL^*,k+1} = \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{\Sigma_{\hat{x}\hat{x},k}}{4,4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Sigma_{uu,k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \Sigma_{w^*w^*,k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & & & \Sigma_{LL,k+1} \\ & & & 1,1 \end{array} \right) \quad \text{mit} \quad \Sigma_{w^*w^*,k} = \left( \begin{array}{cc} \Sigma_{ww,k} & \mathbf{0} \\ \Sigma_{w_pw_p,k} & \end{array} \right) \quad (4-20)$$

In (4-20) repräsentiert die obere Hypermatrix das stochastische Modell der Systemgleichungen des Filters. Die untere Matrix enthält das stochastische Modell der Messgleichung. Die Abschätzung des Niveaus der in den Matrizen enthaltenen Varianzen wird im nachfolgenden Kapitel diskutiert.

### 4.5 Identifikation der Parameter des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems

#### 4.5.1 Simulation von freien und erzwungenen Schwingungen

Im Folgenden soll anhand von vier simulierten Beispielen die Identifikation der physikalischen Parameter des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems gezeigt werden. Zur Simulation von wahren Schwingungsbewegungen seien die in nachfolgender Tabelle enthaltenen physikalischen Parameter exemplarisch vorgegeben.

Tabelle 4-1: Festlegung der wahren physikalischen Parameter des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems zur Simulation von Schwingungen

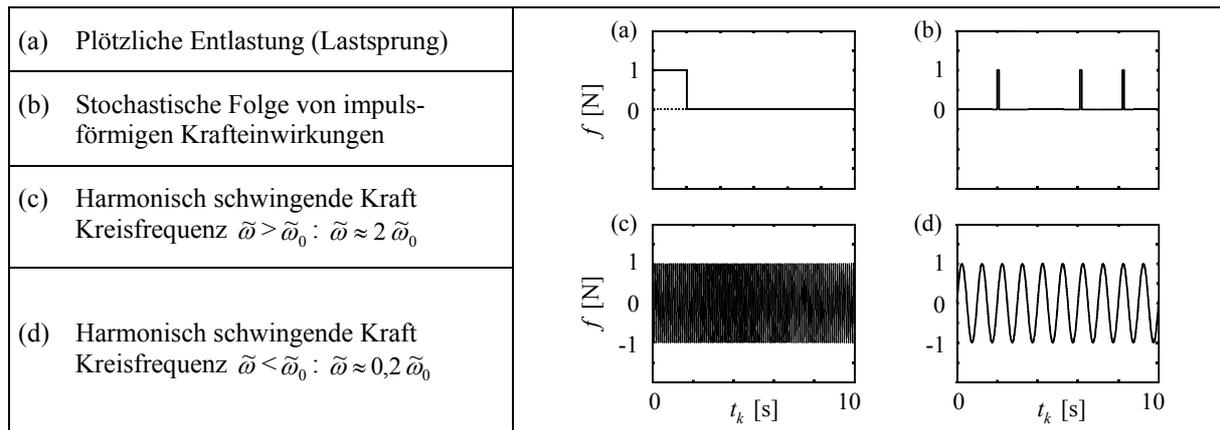
Parametrisierung des Systems				Abgeleitete Parameter				
$m$ [kg]	$\tilde{\gamma}$ [kg s <sup>-2</sup> ]	$\tilde{\beta}$ [kg s <sup>-1</sup> ]	=>	$\tilde{a}_0$ [s <sup>-2</sup> ]	$\tilde{a}_1$ [s <sup>-1</sup> ]	$\tilde{\omega}_0$ [Hz]	$\tilde{\omega}_d$ [Hz]	$\tilde{\delta}$ [s <sup>-1</sup> ]
1	1000	1		1000	1	31,623	31,619	0,5

Die Eigenkreisfrequenz  $\tilde{\omega}_0$  des ungedämpften Systems liegt bei ungefähr 32 Hz. Wegen  $\tilde{a}_0 \gg \tilde{a}_1$  entspricht die Eigenkreisfrequenz  $\tilde{\omega}_d$  der gedämpften freien Schwingung in etwa  $\tilde{\omega}_0$ . Die autonome Schwingung des Systems hat somit eine Frequenz  $\tilde{\nu}_d = \tilde{\omega}_d/2\pi \approx 5$  Hz. Für den Dämpfungsfaktor  $\tilde{\delta}$  der Schwingung ergibt sich 0,5 s<sup>-1</sup>, was einer Dämpfung der Amplitude der autonomen Schwingung um 50% nach ca. 7 Schwingungen entspricht.

Da bei der Untersuchung des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems keine beobachtbare physikalische Partition  $\tilde{x}_p$  vorliegt, wird die Identifizierbarkeit der physikalischen Parameter wesentlich vom zeitlichen Verlauf der auf das System einwirkenden Stellkraft  $\tilde{f}$  beeinflusst. In den nun anschließenden Beispielen wird die Art der auf das System von außen einwirkenden Kraft variiert und deren Auswirkung auf das Identifikationsergebnis diskutiert.

Aus der Vielzahl der möglichen Erregungsformen werden die in Tabelle 4-2 dargestellten vier elementaren Testsignale ausgewählt, deren Einfluss auf das Identifikationsergebnis sehr anschaulich diskutiert werden kann und die in der Praxis entweder näherungsweise in natürlicher Form vorliegen oder künstlich realisiert werden können (z.B. in SCHLAICH et al. 1981).

Tabelle 4-2: Testsignale zur Anregung des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems



Im Fall a reagiert das System mit einer gedämpften freien Schwingung und nimmt schließlich erneut eine statische Gleichgewichtslage an. Werden nur die zeitlichen Zwischenräume zwischen den „Impulsen“ betrachtet, so liegen auch im Fall b gedämpfte freie Schwingungen vor. Im Gegensatz zum ersten Fall handelt es sich hierbei aber um eine Folge von Schwingungen, die immer wieder durch einwirkende „Impulse“ gestört wird. Da impulsförmige Erregungen in der Schwingungsanalyse häufig auftreten (NATKE 1983), stellt der zweite Fall ein für die parametrische Identifikation wichtiges Szenario dar.

Im Gegensatz zu den ersten beiden Fällen repräsentieren die Fälle c und d erzwungene Schwingungen, d.h. das System schwingt nach einer Einschwingphase mit der von der harmonischen Stellkraft eingprägten Frequenz und zeitlich konstanter Amplitude. Diese Fälle stehen exemplarisch für schwingungsförmige Erregungen.

Die für die Messgleichung (4-18) des KALMAN-Filters benötigte Folge von zeitdiskreten Beobachtungen  $y_{k+1}$  des Ortes  $\tilde{y}_{k+1}$  der Masse  $m$  wird durch Abtasten und Verrauschen der simulierten wahren Bewegung erzeugt. Dasselbe gilt für die Erzeugung von Stellgrößenbeobachtungen  $f_k$ , die, im Fall der erzwungenen Schwingungen, für die Berechnung der Prädiktion der deskriptiven Partition des Zustandsvektors mittels (4-15) erforderlich sind.

Die Abtastung der Schwingungen erfolgt mit jeweils 20 äquidistanten Messwerten pro Schwingung und gewährleistet eine gute Erfassung der Extremwerte (s.a. PELZER 1988). Weiterhin werden weiße Rauschprozesse mit Standardabweichungen  $\sigma$  von jeweils 1% des maximalen Messbereichs festgelegt.

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} &= \tilde{y}_{k+1} + \varepsilon_{y,k+1} & \text{mit } \varepsilon_{y,k+1} &\sim N(0, \sigma_y) & \text{und } \sigma_y &= 0,02 \text{ mm} \\
 f_k &= \tilde{f}_k + \varepsilon_{f,k} & \text{mit } \varepsilon_{f,k} &\sim N(0, \sigma_f) & \text{und } \sigma_f &= 0,02 \text{ N}
 \end{aligned}
 \tag{4-21}$$

#### 4.5.2 Entwicklung der Filterstrategie zur Parameteridentifikation

Aufgrund der vergleichbaren Abtastraten und Signal-Rauschverhältnisse der Schwingungen a bis d kann ein Grundfilterdesign festgelegt werden. Die Identifikationsergebnisse sind dann im Wesentlichen von der Struktur der beobachteten Ein- und Ausgangssignale des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems abhängig. In der Hyperkovarianzmatrix (4-20) des KALMAN-Filters ist das stochastische Modell der Messgleichung  $\Sigma_{LL,k+1}$  in diesem Fall sehr einfach festzulegen, da dieses aus der Erzeugung der simulierten Beobachtungen bekannt ist.

$$\frac{\Sigma_{LL,k+1}}{1,1} = (\sigma_y^2)_{k+1} \quad \text{mit } \sigma_{y,k+1} = 0,02 \text{ mm}
 \tag{4-22}$$

Im stochastischen Modell der Systemgleichungen gilt dieselbe Aussage für die Besetzung von  $\Sigma_{uu,k}$ .

$$\frac{\Sigma_{uu,k}}{1,1} = (\sigma_f^2)_k \quad \text{mit } \sigma_{f,k} = 0,02 \text{ N}
 \tag{4-23}$$

Die Kovarianzmatrizen der auf die Systemgleichungen einwirkenden Störgrößen  $w_k$  und  $w_{p,k}$  werden für die Parameteridentifikation im KALMAN-Filter zeitvariant besetzt. Hierbei wird zunächst von einer Nutzphase (HEUNECKE 1995) der Filtergleichungen mit identifizierten physikalischen Parametern ausgegangen. In diesem Fall wirkt in den Systemgleichungen nur noch eine Störung  $w_{k_s}^N$ , die den Restfehler bei der Modellierung repräsentiert und stochastisch durch

ihre Kovarianzmatrix  $\Sigma_{ww,k}^N$  zu berücksichtigen ist. Die Kovarianzmatrix  $\Sigma_{w_p, w_p, k}^N$  der Störgrößen  $w_{p,k}^N$  des „random walk“-Prozesses wird in diesem Fall zu

$$\frac{\Sigma_{w_p, w_p, k}^N}{2,2} = \mathbf{O} \quad (4-24)$$

gesetzt, da keine Veranlassung besteht, die identifizierte physikalische Partition des Zustandsvektors zu stören.

Im Fall des simulierten Masse-Feder-Dämpfungs-Systems tritt der einzige Modellierungsfehler bei der Einführung der Stellkraft als Halteglied 0ter Ordnung auf (s. Kapitel 3.2.1). Mittels (3-14) und (3-15) kann die Übertragung dieses Fehlers von der Epoche  $t_k$  nach  $t_{k+1}$  folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1,k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G} \underbrace{[\tilde{u}(t_k) - \tilde{u}(\tau)]}_{\Delta \tilde{u}(\tau)} d\tau \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G} \Delta \tilde{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4-25)$$

Zur folgenden Abschätzung des stochastischen Niveaus von  $\Sigma_{ww,k}^N$  wird der zeitliche Verlauf der Abweichung  $\Delta \tilde{u}(\tau)$  in  $[t_k, t_{k+1})$  zunächst durch ihren Mittelwert approximiert.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1,k} &\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G} \Delta \bar{u}_{k+1,k} d\tau = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G} d\tau \Delta \bar{u}_{k+1,k} = \mathbf{B}_{k+1,k} \Delta \bar{u}_{k+1,k} \\ &= \mathbf{S}_{k+1,k} \Delta \bar{u}_{k+1,k} \end{aligned} \quad (4-26)$$

mit  $\Delta \bar{u}_{k+1,k} = \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k+1}}{2}$

Aufgrund der in Gleichung (4-10) ersichtlichen Identität von  $\mathbf{B}_{k+1,k}$  und  $\mathbf{S}_{k+1,k}$  kann obiger Modellierungsfehler folglich unter Zuhilfenahme der Störmatrix dargestellt werden, wobei  $w_k^N \approx \Delta \bar{u}_{k+1,k}$  gilt. Für die Varianz dieser Systemstörung im Grundzustand des Filters stellt die nachfolgende Abschätzung eine adäquate Annahme dar.

$$\frac{\Sigma_{ww,k}^N}{1,1} = (\sigma_{f_w}^2)_k \quad \text{mit} \quad \sigma_{f_w,k} = \frac{|\Delta \bar{f}_{k+1,k}^-|}{3} \quad (4-27)$$

Hierbei ist  $|\Delta \bar{f}_{k+1,k}^-|$  in jedem Filterschritt aus der zur Parameteridentifikation verwendeten Messreihe der Stellkräfte zu ermitteln. Bei langsamer Variation der Stellkraft ist auch eine globale Festlegung mittels  $\max(|\Delta \bar{f}_{k+1,k}^-|)$  denkbar. Dieser Wert ist dann im Rahmen eines Filtertrainings zu bestimmen. An dieser Stelle ist anzumerken, dass aufgrund der Identität von  $\mathbf{B}_{k+1,k}$  und  $\mathbf{S}_{k+1,k}$  auch eine Anpassung der Kovarianzmatrix der Stellkraft  $\Sigma_{uu,k}$  durch Addition von (4-27) im Filter denselben Effekt erzielt. Die Unterscheidung zwischen den Kovarianzmatrizen von Stell- und Störkraft ermöglicht aber eine Separierung der unterschiedlichen Fehlerquellen, wodurch eine bessere Interpretierbarkeit des stochastischen Modells gegeben ist. Sie wird im Folgenden beibehalten.

In der vor der Nutzphase des Filters liegenden Identifikationsphase (HEUNECKE 1995) müssen die à priori nur unzureichend bekannten physikalischen Parameter des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems identifiziert werden. Die Identifikation wird durch die Einführung einer von  $\mathbf{O}$  verschiedenen Kovarianzmatrix der Störgrößen  $w_{p,k}^I$  des „random walk“-Prozesses gesteuert.

Zur Festlegung des stochastischen Niveaus dieser Matrix empfiehlt PELZER (1988) im Identitätsmodell eines Punktfeldes (s. Kapitel 2.2.1) die Abschätzung der Varianzen mittels der zu erwartenden Punktbebewegungen. Übertragen auf den Fall der Identifikation eines Strukturmodells ist die zu erwartende Bewegung wesentlich vom Vorwissen hinsichtlich der physikalischen Parameter abhängig und kann u.U. die Größenordnung des Parameters selbst und mehr betragen. Eine epochenweise stochastische Kompensation erfordert die Einführung von großen Varianzen, welche zu einer Divergenz des Filters führen können.

Wie anhand der Filterergebnisse gezeigt wird, erweist sich eine im Verhältnis zur erwarteten Bewegung reduzierte Festlegung des Varianzniveaus von  $w_{p,k}^I$  als die robustere Vorgehensweise. Aufgrund der hohen Abtastung eines schwingenden Systems ist die sukzessive Annäherung an das Identifikationsergebnis auch auf Ebene der Messungen motiviert. Im Gegensatz zur epochenweisen Aufdatierung von Punktfeldern kann folglich nicht in jedem Filterschritt

eine optimale Schätzung erzielt werden. Das Ziel der Parameteridentifikation – und damit die Optimalität des Ergebnisses – wird erst nach mehreren Filterepochen erreicht.

Die Erhöhung der Trägheit des Filters bewirkt unmittelbar eine Erhöhung der Stabilität. Der Nachteil der Verlängerung der Identifikationsphase wird somit durch einen konvergenten Filterverlauf kompensiert. Für die Kovarianzmatrix der Störgrößen  $w_{p,k}^1$  in der Identifikationsphase wird im Folgenden

$$\frac{\Sigma_{w_p w_p, k}^1}{2,2} = \begin{pmatrix} \sigma_{a_{0,w}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{a_{1,w}}^2 \end{pmatrix}_k \quad \text{mit } \sigma_{a_{0,w},k} \approx \frac{p[\%]}{100} \cdot |\hat{a}_{0,k=0} - \tilde{a}_0|$$

$$\sigma_{a_{1,w},k} \approx \frac{p[\%]}{100} \cdot |\hat{a}_{1,k=0} - \tilde{a}_1| \tag{4-28}$$

eingeführt. Im Vorgriff auf Kapitel 4.5.3 kann die Aussage getroffen werden, dass mit der Annahme von  $p = 5\%$  der erwarteten Abweichung zwischen den zu Filterbeginn vorzugebenden Startwerten  $\hat{a}_{0,k=0}$  bzw.  $\hat{a}_{1,k=0}$  und den Sollwerten bei der Parameteridentifikation gute Ergebnisse erzielt werden.

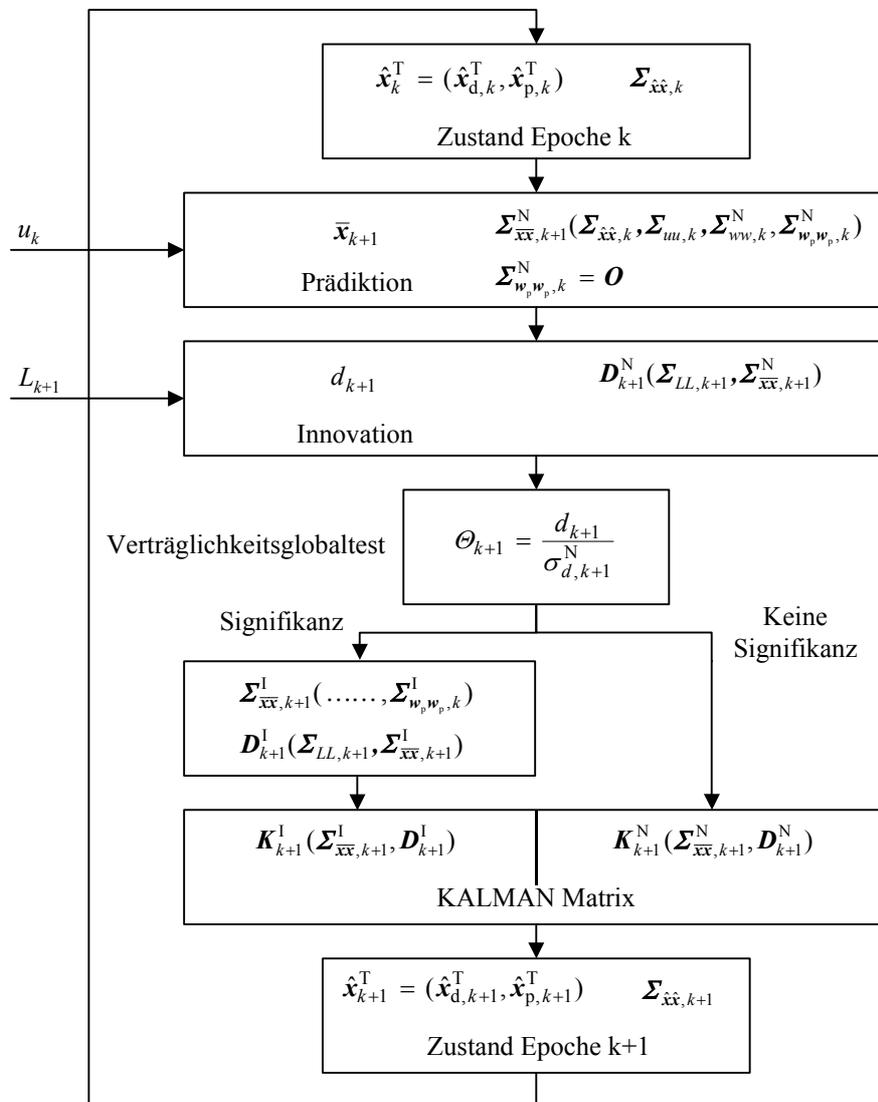


Abbildung 4-3: Strategie zur Identifikation der physikalischen Parameter

In Abbildung 4-3 ist ersichtlich, dass die Detektierung der Länge der Identifikationsphase und Verwendung der Kovarianzmatrix (4-28) mittels des zentralen Verträglichkeitsglobaltests (3-9) erfolgt. Die Innovation des Filters  $d_{k+1}$  ist aus der Ortsbeobachtung  $y_{k+1}$  und deren Prädiktion  $\bar{y}_{k+1}$  zu bilden. Die in diesem Fall skalare Testgröße  $\Theta_{d,k+1}^2$  kann im Fall der Annahme von  $E\{d_{k+1}\} = 0$  als  $\chi^2$ -verteilte Testgröße mit einem Freiheitsgrad formuliert werden, bzw. geht nach Radizieren in eine standardnormalverteilte Zufallsgröße über.

$$\Theta_{d,k+1}^2 = \frac{d_{k+1}^2}{(\sigma_{d,k+1}^N)^2} \sim \chi_1^2 \Big|_{H_0} \Rightarrow \Theta_{d,k+1} = \frac{d_{k+1}}{\sigma_{d,k+1}^N} \sim N(0,1) \Big|_{H_0} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} d_{k+1} = y_{k+1} - \bar{y}_{k+1} \\ \sigma_{d,k+1}^N = \sigma_0 \sqrt{\mathbf{D}_{k+1}^N} \end{cases} \quad (4-29)$$

Die Matrix  $\mathbf{D}_{k+1}^N$  ist hierbei die zur Innovation zugehörige Kofaktorenmatrix. Da zunächst von keiner Unverträglichkeit zwischen Prädiktion und Messungen auszugehen ist, wird sie unter Verwendung der stochastischen Modelle der Nutzphase gebildet. Wie in Abbildung 4-3 ersichtlich ist, erfolgt bei signifikanter Innovation die Entscheidung zur Identifikationsphase mit der entsprechenden Wahl der stochastischen Modelle.

Diese Entscheidung kann nur unter der Voraussetzung der Abwesenheit von groben Messfehlern, einer adäquaten Filterinitialisierung und sorgfältigen Abschätzung des stochastischen Modells getroffen werden. In diesem Falle kann die Unverträglichkeit zwischen Prädiktion und Messungen auf eine Modellstörung infolge der noch nicht identifizierten physikalischen Parameter zurückgeführt werden und liefert ein sensitives Entscheidungskriterium für die Einführung der Kovarianzmatrix  $\Sigma_{w_p, w_p, k}^I$ .

In den nachfolgenden Identifikationsbeispielen werden im Filterverlauf Fehlinterpretationen bei schwachsignifikanten Innovationen durch die Einführung einer entsprechend hohen Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1-\alpha = 99,5\%$  vermindert. Wie bei der Einführung des reduzierten Varianzniveaus der Störgrößen  $w_{p,k}^I$  wird auch durch diese Maßnahme der Filterverlauf stabilisiert. Die Verminderung der Testgüte  $\gamma$  wird vor diesem Hintergrund bewusst in Kauf genommen.

### 4.5.3 Identifikation der physikalischen Parameter

Es erfolgt zunächst die Untersuchung der Parameterschätzung bei Vorliegen von gedämpften freien Schwingungen (Fälle a und b). Bei der Initialisierung des KALMAN-Filters zur Filterepoche  $k = 0$  werden für die physikalische Partition exemplarisch um 100% fehlerhafte Werte angenommen.

$$\hat{a}_{0,k=0} = 2000 \text{ s}^{-2} \quad \hat{a}_{1,k=0} = 2 \text{ s}^{-1} \quad (4-30)$$

Im Fall a (Lastsprung durch Entlastung) wirkt während des Beobachtungszeitraums keine Stellkraft  $\tilde{f}_k$  auf das Masse-Feder-Dämpfungs-System ein, so dass nur der Ort  $\tilde{y}_k$  der Masse  $m$  zu beobachten ist. Im Fall b (impulsförmige Kräfteinwirkungen) ist davon auszugehen, dass eine messtechnische Erfassung der „Impulse“ aufgrund der endlichen Abtastrate des Messsystems ein erhebliches Problem darstellt bzw. überhaupt nicht realisierbar ist. Im Filter wird daher auch in diesem Fall nur die Beobachtung des Ortes eingeführt. Damit soll auch exemplarisch gezeigt werden, dass die in Abbildung 4-3 dargestellte Filterstrategie robust und die Parameteridentifikation innerhalb einer Sequenz von messtechnisch nicht erfassten „(Stör-)Impulsen“ möglich ist.

Bei angestrebten 20 Abtastungen pro Schwingung beträgt das Abtastintervall der simulierten Beobachtungen für beide Fälle  $\Delta t = 0,01\text{s}$ . Dies entspricht auch dem Filterfortschritt. Die Schätzung der Parameter wird mittels des in Kapitel 4.5.2 festgelegten Filterdesigns durchgeführt.

In Abbildung 4-4-a sind die Filterergebnisse des Falls a für einen Zeitraum von 5s (= 500 Filterepochen) dargestellt. Die Schätzwerte  $\hat{a}_{0,k+1}$  des Federparameters konvergieren rasch gegen den Sollwert  $\tilde{a}_0$ . Nach etwa 1s tritt keine signifikante Änderung des Schätzwertes mehr auf, welcher dann um den Sollwert schwingt und im Mittel mit  $\hat{a}_{0,k+1} = 999,8 \text{ s}^{-2}$  ein stabiles Niveau erreicht. Die Restabweichung beträgt 0,02% des Sollwertes. Die Schätzwerte  $\hat{a}_{1,k+1}$  des Dämpfungsparameters weisen ein trägeres Verhalten auf. Sie erreichen nach etwa 2s mit  $\hat{a}_{1,k+1} = 0,9957 \text{ s}^{-1}$  ein stabiles Niveau. Die Restabweichung vom Sollwert beträgt hierbei 0,4%. Das nach Konvergenz erreichte Niveau der Standardabweichung für den Parameter  $\hat{a}_{0,k+1}$  ist mit  $\sigma_{\hat{a}_{0,k+1}} = 0,5 \text{ s}^{-2}$  mit der Restabweichung verträglich. Dieselbe Aussage kann auch für die Standardabweichung  $\sigma_{\hat{a}_{1,k+1}} = 0,0123 \text{ s}^{-1}$  des Parameters  $\hat{a}_{1,k+1}$  getroffen werden. Aufgrund der geringen Restabweichungen, welche auch mit dem ermittelten Genauigkeitsniveau verträglich sind, kann für den Fall a die Identifikation der physikalischen Parameter  $\tilde{a}_0$  und  $\tilde{a}_1$  festgestellt werden.

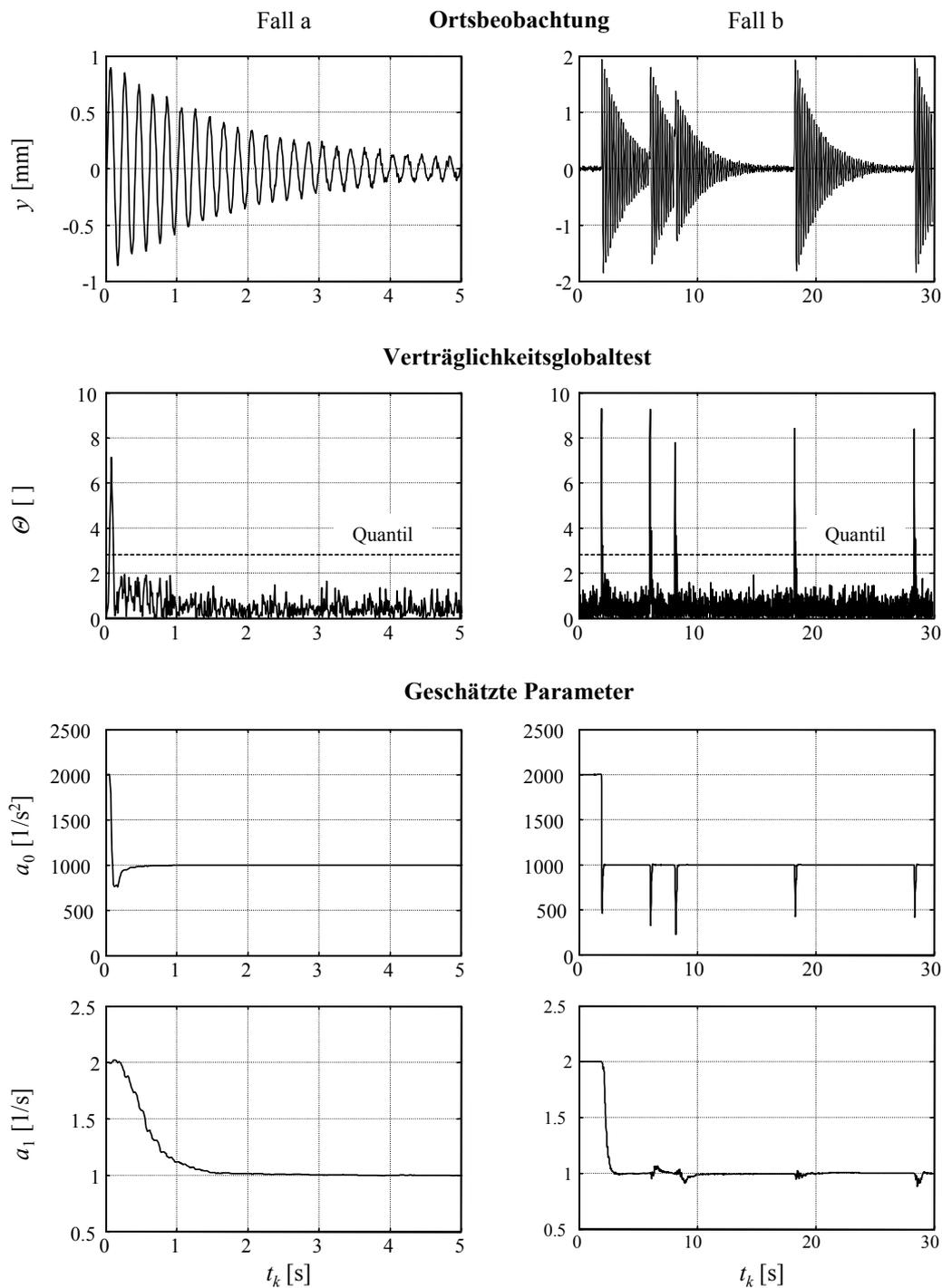


Abbildung 4-4: Filterergebnisse für die Fälle a und b: gedämpfte freie Schwingungen

Im Fall b erfolgt ebenfalls die Identifikation von Feder- und Dämpfungsparameter (s. Abbildung 4-4-b). Die Restabweichungen zu den Sollwerten werden nach dem dritten „Impuls“ ermittelt und nach dem vierten auf Reproduzierbarkeit überprüft. Sie betragen beim Federparameter ca. 0,01% und beim Dämpfungsparameter ca. 0,6% und erreichen damit eine mit dem Fall a vergleichbare Größenordnung. Die Standardabweichungen sind mit den Abweichungen verträglich (s. Tabelle 4-3).

In Abbildung 4-4-b ist zu erkennen, dass das Konvergenzverhalten der Parameterschätzung durch die „Störimpulse“ jeweils kurzfristig beeinträchtigt wird, was bei vorliegender Filterstrategie aufgrund von als signifikant detektierten Innovationen und der damit verbundenen Erhöhung des Varianzniveaus der Störgrößen des „random walk“-Prozesses

geschieht. Eine Teilkompensation dieser Einflüsse wird durch die gezielte Erhöhung des Systemrauschens erreicht, wobei der Verträglichkeitsglobaltest (4-29) dann auch als Detektor für das Einwirken von Störgrößen zu verwenden ist.

Trotz der Störeinflüsse ergibt sich insgesamt ein sehr stabiler Filterverlauf, was auf eine robuste Filterstrategie schließen lässt. Aufgrund der Ergebnisse kann die Aussage getroffen werden, dass die Parameteridentifikation im adaptiven KALMAN-Filter bei impulsförmigen Erregungen auch ohne deren messtechnische Erfassung durchgeführt werden kann.

Das trägere Konvergenzverhalten des geschätzten Dämpfungsparameters kann durch die Diskussion der algebraischen Korrelationen zwischen den beobachtbaren und den nicht beobachtbaren Zustandsparametern erklärt werden (s. Kapitel 3.4):

- Aufgrund der direkten Beobachtung des Ortes der Masse ist für die deskriptive Partition  $\mathbf{x}_d$  (Ort und Geschwindigkeit) des Zustandsvektors  $\mathbf{x}$  die Eigenschaft der Ermittelbarkeit erfüllt.
- Die bzgl. der Messgleichung hochgradig konfigurationsdefekte physikalische Partition  $\mathbf{x}_p$  (Feder- und Dämpfungsparameter) ist nur erwartungstreu schätzbar, d.h. identifizierbar, wenn sie zumindest die Eigenschaft der Ermittelbarkeit erfüllt. Diese kann durch Betrachtung des zeitlichen Verlaufs der Korrelationen zwischen präzidierten deskriptiver und physikalischer Partition untersucht werden.

In der vorliegenden Anwendung lässt die spezielle Struktur der KALMAN-Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$  eine Beschränkung der Diskussion auf die Korrelationen mit dem Zustandsparameter des Ortes zu.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{K}_{k+1}}{4,1} &= \frac{\mathbf{Q}_{\bar{x}\bar{x},k+1}}{4,4} \mathbf{A}^T \frac{\mathbf{D}_{k+1}^{-1}}{1,1} \quad \text{mit } \mathbf{A}^T = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T ; \quad \mathbf{D}_{k+1}^{-1} = \frac{1}{q_{dd,k+1}} \\ &= \frac{1}{q_{dd,k+1}} (q_{\bar{y}\bar{y}} \quad q_{\bar{y}\bar{y}} \mid q_{\bar{y}\bar{a}_0} \quad q_{\bar{y}\bar{a}_1})_{k+1}^T \end{aligned} \quad (4-31)$$

In Abbildung 4-5 sind die Korrelationen zwischen den Prädiktionen von Ort und physikalischen Parametern für 1,6s (= 160 Abtastungen) zu Beginn der Identifikationsphase des Falls a dargestellt.

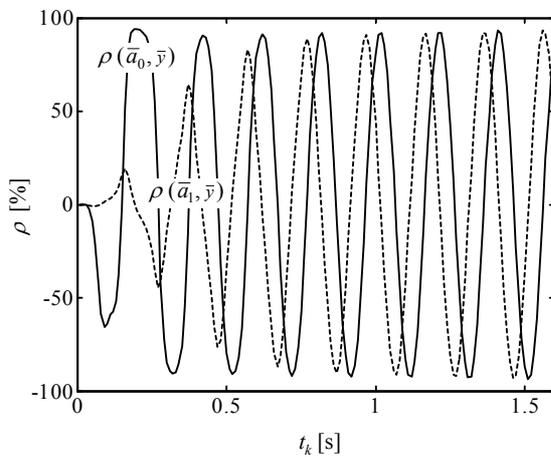


Abbildung 4-5: Fall a: Korrelationen  $\rho_{k+1}$  zwischen  $\bar{y}_{k+1}$  und  $\bar{a}_{0,k+1}$  (—) bzw.  $\bar{a}_{1,k+1}$  (---)

Es ist zu erkennen, dass die Korrelationen  $\rho(\bar{a}_1, \bar{y})$  langsamer anwachsen als  $\rho(\bar{a}_0, \bar{y})$ . Letztere erreichen fast verzögerungsfrei ihre maximale Amplitude. Der Dämpfungsparameter ist in der Anfangsphase der vorliegenden Schwingungen folglich schlechter ermittelbar. Das Erreichen seines Korrelationsmaximums nach ca. 1s deckt sich mit der in Abbildung 4-4-a gegenüber  $a_0$  festgestellten Verzögerung.

Die physikalische Erklärung hierfür liegt in der ausschließlichen Geschwindigkeitsabhängigkeit des im Verhältnis zum Federparameter kleinen Dämpfungsparameters begründet, wodurch Abweichungen von dessen Sollwert durch das System erst bei Geschwindigkeitszunahme der Masse signifikant übertragen werden.

Die algebraischen Kopplungen zwischen deskriptiver und physikalischer Partition des Zustandsvektors werden durch die JACOBI-Matrix  $\mathbf{T}_{p,k+1,k}$  erzeugt, welche mittels (4-16) die Abweichungen von den nicht identifizierten physikalischen Parametern bzw. die Störgrößen des „random walk“-Prozesses korrelierend auf die Fortschreibung der deskriptiven Partition überträgt. Anhand ihrer in (A-3) bis (A-6) dargestellten Matrixelemente ist zu erkennen, dass der zeitliche Verlauf

dieser Übertragung bei komplexen Eigenwerten ebenfalls Schwingungen mit gleicher Frequenz wie die Schwingung der Masse  $m$  aufweist. Dies erklärt unmittelbar das periodische Verhalten der Korrelationen in Abbildung 4-5.

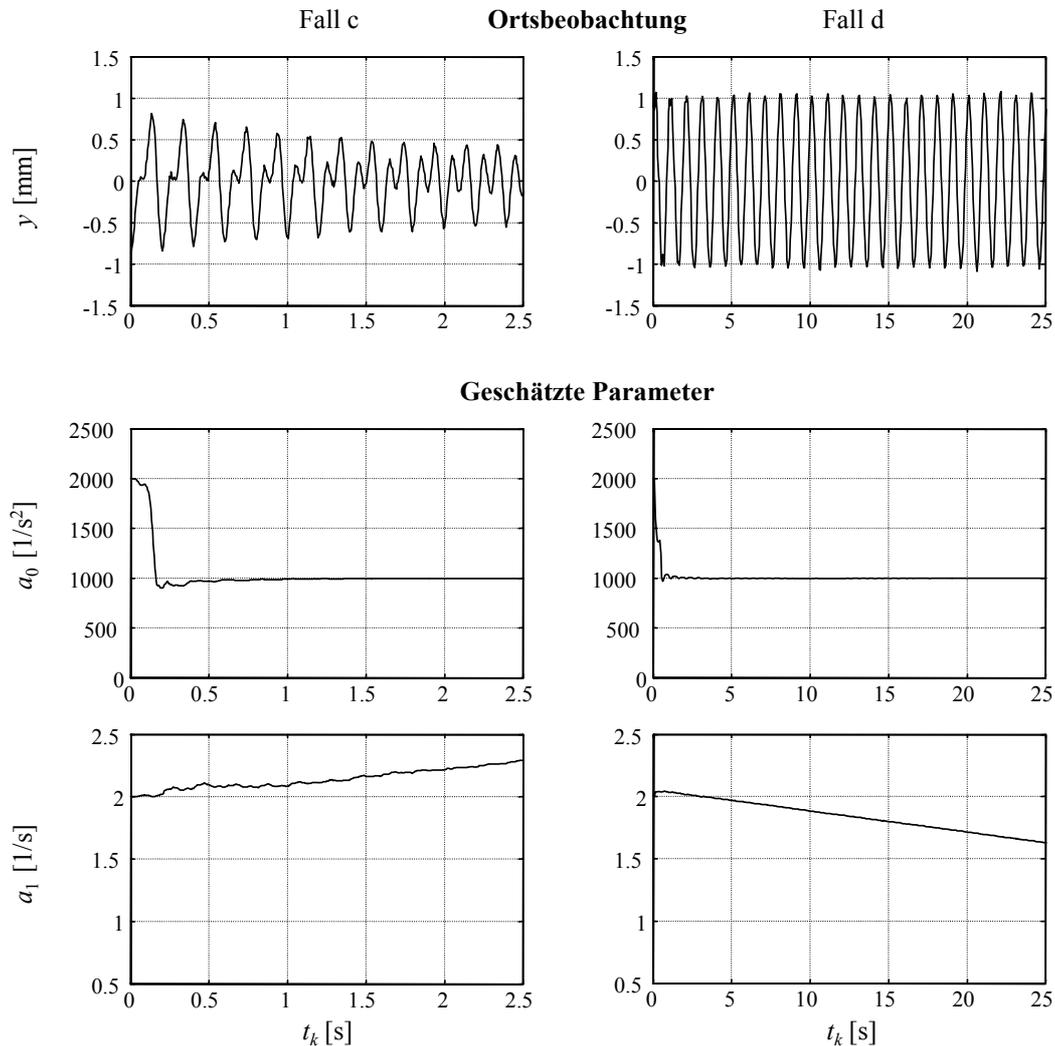


Abbildung 4-6: Filterergebnisse für die Fälle c und d: erzwungene Schwingung bei harmonischer Erregung mit  $\omega \approx 2\omega_0$  (Fall c) bzw.  $\omega \approx 0,2\omega_0$  (Fall d)

Bei der Untersuchung der Fälle c und d (kontinuierliche Anregung des Systems mit harmonischen Schwingungen), wird wieder die bereits in den Fällen a und b verwendete Filterinitialisierung bzw. Identifikationsstrategie verwendet. Bei 20 Abtastungen pro Schwingung (im eingeschwungenen Zustand) betragen Abtastintervall und Filterfortschritt für den Fall c:  $\Delta t = 0,005\text{s}$  und für den Fall d:  $\Delta t = 0,05\text{s}$ . Die betrachteten Zeitausschnitte beginnen mit dem Startzeitpunkt der jeweiligen Erregung und entsprechen wieder 500 Filterepochen.

Die in Abbildung 4-6 dargestellten Filterergebnisse weisen deutliche Unterschiede hinsichtlich der Identifizierbarkeit des Feder- und des Dämpfungsparameters auf. In beiden Fällen konvergieren die Schätzwerte des Federparameters gegen den Sollwert mit einer mittleren Restabweichung von 0,6% (Fall c) bzw. 0,4% (Fall d). Die Standardabweichungen (s. Tabelle 4-3) sind mit den Restabweichungen verträglich. Es kann die Aussage getroffen werden, dass der Federparameter identifiziert wird. Die Schätzwerte des Dämpfungsparameters weisen dagegen weder im Fall c noch im Fall d ein konvergentes Verhalten auf. Der Dämpfungsparameter wird folglich nicht identifiziert.

Die Ergebnisse können wieder anhand der Korrelationen zwischen der deskriptiven und der physikalischen Partition des Zustandsvektors diskutiert werden. Abbildung 4-7-c zeigt hohe Korrelationen des Federparameters zu Beginn der Einschwingphase des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems. Folglich weist der Parameter in diesem Bereich eine gute Ermittelbarkeit auf, was die Grundlage für dessen Identifikation bildet. Im Vergleich zu den gedämpften freien Schwingungen liegt durch das zeitliche Abklingen der Korrelationen aber eine schlechtere Ermittelbarkeit vor, was sich bei der

Identifikation in der signifikant größeren Rest- und Standardabweichung äußert (s.a. Tabelle 4-3). Die Korrelationen für den Dämpfungsparameter bewegen sich dagegen dauerhaft auf einem niedrigen Niveau. Der Vergleich mit Abbildung 4-5 zeigt den signifikanten Rückgang von dessen Ermittlbarkeit gegenüber der gedämpften freien Schwingung. In vorliegender Messkonfiguration kann der Parameter daher nicht identifiziert werden.

Bei Betrachtung des Dämpfungsparameters ist im Fall d eine weitere Abnahme in der Ermittlbarkeit zu erkennen (s. Abbildung 4-7-d). Das Niveau der Korrelationen ist noch wesentlich geringer wie im Fall c. Der Parameter ist bei vorliegender Messkonfiguration ebenfalls nicht identifizierbar.

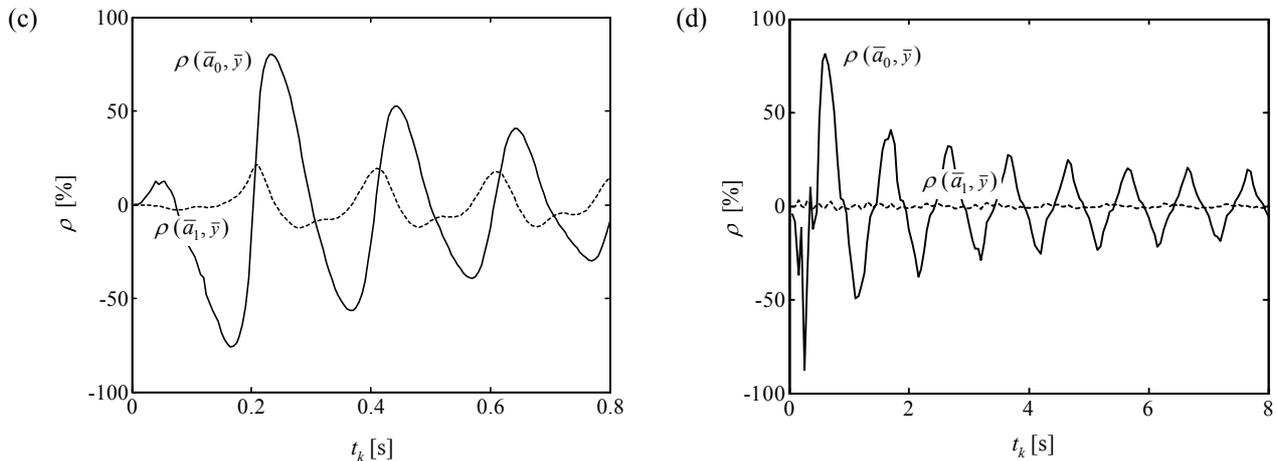


Abbildung 4-7: Fälle c und d: Korrelationen  $\rho_{k+1}$  zwischen  $\bar{y}_{k+1}$  und  $\bar{a}_{0,k+1}$  (—) bzw.  $\bar{a}_{1,k+1}$  (---)

Die physikalische Interpretation für die gegenüber den gedämpften freien Schwingungen schlechteren Identifikationsergebnisse der Fälle c und d ist mit dem Einfluss der harmonischen Stellkraft gegeben. Diese überlagert die Informationsträger der physikalischen Parameter, d.h. Eigenfrequenz und Amplitudenabklingverhalten der freien Schwingung und prägt dem System im eingeschwungenen Zustand die Frequenz der Erregung auf. Vor allem für den Dämpfungsparameter wird hierdurch der Informationsgehalt des gemessenen Signals wesentlich reduziert.

Der mit  $\omega \approx 1/5 \omega_0$  quasi-statische Fall d weist nur sehr geringe Beschleunigungen und Geschwindigkeiten der Masse und damit keine ausgeprägte Einschwingphase auf. Bezüglich des Dämpfungsparameters besitzt die beobachtete Schwingung dann den geringsten Informationsgehalt aller vier untersuchten Fälle.

Neben einer Zusammenfassung der Identifikationsergebnisse sind in Tabelle 4-3 auch aus den physikalischen Parametern abgeleitete Größen (sog. „Nutzerfunktionen“, s. HEUNECKE 1995) enthalten, welche das Schwingungsverhalten des Systems charakterisieren (vgl. Tabelle 4-1).

Tabelle 4-3: Identifikationsergebnisse der Fälle a bis d

Fall	Parametrisierung Masse-Feder-Dämpfungs-System						Abgeleitete Parameter (Nutzerfunktionen)					
	$\hat{a}_0$ [s <sup>-2</sup> ]	$\sigma_{\hat{a}_0}$ [s <sup>-2</sup> ]	$ \hat{a}_0 - \tilde{a}_0 $ [%]	$\hat{a}_1$ [s <sup>-1</sup> ]	$\sigma_{\hat{a}_1}$ [s <sup>-1</sup> ]	$ \hat{a}_1 - \tilde{a}_1 $ [%]	$\hat{\omega}_0$ [Hz]	$\sigma_{\hat{\omega}_0}$ [Hz]	$ \hat{\omega}_0 - \tilde{\omega}_0 $ [%]	$\hat{\delta}$ [s <sup>-1</sup> ]	$\sigma_{\hat{\delta}}$ [s <sup>-1</sup> ]	$ \hat{\delta} - \tilde{\delta} $ [%]
(a)	999,8	0,5	0,02	0,9957	0,0123	0,4	31,620	0,008	0,01	0,4979	0,0062	0,4
(b)	1000,1	0,3	0,01	0,9941	0,0100	0,6	31,624	0,005	0,01	0,4971	0,0050	0,6
(c)	994,2	7,7	0,6	—	—	—	31,531	0,122	0,3	—	—	—
(d)	995,7	7,1	0,4	—	—	—	31,555	0,112	0,2	—	—	—
	Mit $\tilde{a}_0 = 1000 \text{ s}^{-2}$ und $\tilde{a}_1 = 1 \text{ s}^{-1}$						Mit $\tilde{\omega}_0 = 31,623 \text{ Hz}$ und $\tilde{\delta} = 0,5 \text{ s}^{-1}$					

## 4.6 Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse

Aus der Untersuchung des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems werden die nachfolgenden Ergebnisse gewonnen, die auf die parametrische Identifikation von dynamischen Strukturmodellen übertragen werden können. Die Anwendung auf ein Temperaturdeformationsmodell erfolgt in Kapitel 5.

1. Mit der in Kapitel 4.5.2 entwickelten Filterstrategie ist ein robustes Verfahren zur Identifikation von physikalischen Parametern im adaptiven KALMAN-Filter gegeben. Hauptmerkmale sind die reduzierte Festlegung der Störgrößen des „random walk“-Prozesses (Gleichung (4-28)) und die in Abbildung 4-3 dargestellte funktionale Architektur.
2. Eine Beurteilung der Identifizierbarkeit kann indirekt über die Ermittelbarkeit und somit quantitativ mittels des zeitlichen Verlaufs der Korrelationen zwischen der nicht beobachtbaren und der beobachtbaren Partition des Zustandsvektors erfolgen (s.a. HEUNECKE 1995).
3. Das Schließen von der Ermittelbarkeit auf die Identifizierbarkeit ist allerdings nur bedingt möglich (s.a. Kapitel 3.4), da das Niveau der Korrelationen von einer Vielzahl von Einflussfaktoren abhängt. Hierzu zählen u.a. die korrelierend wirkenden Störgrößen des „random walk“-Prozesses, die Festlegung der Kovarianzmatrix des Zustandsvektors bei der Filterinitialisierung und das stochastische Niveau der Stell-, Stör- und Messgrößen.
4. Die Definition eines hinsichtlich Filterstrategie, Beobachtungsrate und stochastischem Design einheitlichen Identifikationsszenarios bietet aber die Möglichkeit des qualitativen Vergleichs der Ermittelbarkeit (z.B. bei unterschiedlichen Arten von äußeren Erregungen: s. Abbildung 4-5 und Abbildung 4-7). Mit der Analyse der Korrelationen können Aussagen bzgl. geeigneter Beobachtungsgrößen und Erregungsformen getroffen werden, bzw. eine à priori Lokalisierung von möglichen Schwachstellen im experimentellen Design erfolgen.
5. Aus 4. folgt unmittelbar, dass die Festlegung eines für die experimentelle Systemanalyse geeigneten Designs mittels der Analyse der Korrelationen erfolgen kann. Die Analyse kann in Simulationsrechnungen durchgeführt werden. Diese Vorgehensweise wird auch in Kapitel 5 gezeigt.

Mit der allgemeinen Zustandsraumdarstellung (4-3) können die Systemgleichungen des adaptiven KALMAN-Filters auch bei komplexeren mechanischen Systemen (z.B. Mehrmassenschwinger) aufgestellt werden. Hieraus eröffnen sich potenzielle Einsatzmöglichkeiten von Identifikationsverfahren und Filterstrategie bei der Schwingungsanalyse im Bauwesen.

## 5 Parametrische Identifikation des dynamischen Temperaturmodells einer Aluminiumsäule auf der Grundlage partieller Differentialgleichungen

### 5.1 Beschreibung der Aufgabenstellung

#### 5.1.1 Untersuchung von Temperatureinflüssen

Die Untersuchung der Auswirkung von Temperatureinflüssen auf Bauwerke stellt eine wichtige Aufgabenstellung im Bereich der Ingenieurvermessung dar. Diese Aussage wird von MÖHLENBRINK / WELSCH (1984) mit der Feststellung bestätigt, dass durch die Tendenz zu immer schlankeren, materialsparenden Konstruktionen die Erfassung bzw. Analyse temperaturbedingter Deformationen eine wesentliche Rolle spielt. Die Autoren beziehen sich hierbei in erster Linie auf schlanke Bauwerke wie Fernsehtürme und Brückenpfeiler. Sie konkretisieren eines der zentralen Probleme der Deformationsanalyse bei der Beurteilung von gemessenen Verformungen, nämlich die Trennung der Auswirkung von unterschiedlichen Einflussgrößen in lastbedingte (z.B. Wind, Verkehr) und temperaturbedingte Anteile. Die Bedeutung der temperaturbedingten Anteile ist bereits in EILFORD (1957) ersichtlich. Bei einer Untersuchung des Bewegungsverhaltens des Stuttgarter Fernsehturms wird an einem Sommertag in einer Höhe von 160 m eine Auslenkung von ca. 15 cm festgestellt. Die in WERNER / MÖBIUS (1976) gemessene temperaturbedingte Bewegung des Dresdener Fernsehturms beträgt in einer Höhe von 190 m sogar 22 cm. In einer vergleichbaren Größenordnung liegt auch die in DOLL et al. (1995) ermittelte Auslenkung eines 55 m hohen Pylons der Norderelbbrücke bei Hamburg.

Die Erfassung bzw. Beschreibung temperaturbedingter Deformationen ist auch im Bereich der industriellen Fertigung von großem Interesse. In RICHTER (1998) wird bspw. ein mehrachsiger Industrieroboter beschrieben, dessen TCP (= tool center point) durch thermisch bedingte Einflüsse eine Verlagerung von bis zu 0,5 mm erfährt, was bei einer spezifizierten Wiederholgenauigkeit von 0,01 mm erheblich ist. Die Entwicklung von konstruktiven Maßnahmen und rechnerischen Kompensationsverfahren zur Reduzierung der thermischen Effekte ist der Gegenstand zahlreicher Arbeiten der letzten Jahre (u.a. OVERBECK 1992, RICHTER 1998, BONSE 1999). Die Berechnung der Verformung der Einzelkomponenten von Robotern und Werkzeugmaschinen auf der Grundlage von Temperaturmessungen und das Anbringen von entsprechenden Korrekturfaktoren bei der Ansteuerung ist ein wichtiges Aufgabengebiet der indirekten Kompensationsverfahren (u.a. RICHTER 1998).

Ist bei der Untersuchung von temperaturinduzierten Deformationen der zeitliche Verlauf zwischen Gleichgewichtszuständen von Interesse, so erfordert dies eine dynamische Betrachtungsweise. Das dynamische Modell berücksichtigt die Fähigkeit des Objekts, aufgenommene Wärme zu speichern und durch innere Temperaturengleichvorgänge zeitverzögert in Verformungen umzusetzen. Es findet seine Anwendung, wenn die zeitlichen Variationen der äußeren Temperatureinwirkung die Annahme eines aus Messungen der Oberflächentemperatur zu interpolierenden linearen Temperaturgradienten im Inneren des Objekts nicht zulassen. Als Beispiele hierfür können die Erwärmung und Verformung von Türmen unter dem Einfluss der Sonneneinstrahlung (u.a. REICHMANN 1978) bzw. Aufheizvorgänge von Werkzeugmaschinen infolge innerer und/oder äußerer Wärmequellen (u.a. HEISEL 1980) angeführt werden.

Im Folgenden wird die Auswirkung äußerer Temperaturbelastungen mittels eines dynamischen Strukturmodells quantifiziert, identifiziert und die Fähigkeit des Ansatzes zur realitätsnahen Prädiktions- und Simulationsrechnung gezeigt.

#### 5.1.2 Bedeutung der instationären Temperaturverteilung

Die Beziehung zwischen der Temperaturverteilung im Inneren eines Körpers und dessen Verformung kann im Bauwesen und im Maschinenbau in vielen Fällen hinreichend mittels der Differentialgleichungen der Thermoelastizität beschrieben werden. Hierbei wird linear elastisches Materialverhalten zugrundegelegt (HOOKE'sches Gesetz), was bei –im Verhältnis zu den Abmessungen des Körpers – angenommenen kleinen Deformationen eine zutreffende Modellvorstellung ist (LUZ 1992). Das infolge einer instationären, d.h. zeitabhängigen Temperaturverteilung  $T(x, y, z, t)$  erzeugte räumlich kontinuierliche Verschiebungsfeld  $\delta(x, y, z, t)$  für die materiellen Punkte (s. Abbildung 5-1), ergibt sich nach NOWACKI (1974) aus dem nachfolgenden System von linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung, den (vereinfachten) Gleichungen von DUHAMEL-NEUMANN.

$$(a) \quad \mu_L \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} + (\lambda_L + \mu_L) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \gamma_T \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5-1)$$

$$(b) \quad \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Die homogene Differenzialgleichung (5-1-b) beschreibt die instationäre Temperaturverteilung im Inneren des Körpers. Als Ursache hierfür können äußere Temperatureinwirkungen angenommen werden, welche in die auf der Körperoberfläche zu formulierenden Randbedingungen zu integrieren sind. Für den Fall des Vorhandenseins innerer Wärmequellen muss die Gleichung inhomogen erweitert werden. Der Parameter  $\alpha$  ist die Temperaturleitfähigkeit des Materials. Der mittels (5-1-b) erhaltene zeitliche Verlauf der Temperaturverteilung des Körpers bewirkt dann in (5-1-a) ein zeitlich veränderliches Verschiebungsfeld. Die Parameter  $\lambda_L$  und  $\mu_L$  sind die LAMÉ'schen Elastizitätskonstanten und können eindeutig aus jeweils zwei Materialparametern wie bspw. dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem Schubmodul  $G$  bzw. der Querdehnungszahl  $\mu$  ermittelt werden (u.a. BOLEY / WEINER 1960, TIMOSHENKO / GOODIER 1985). Der Parameter  $\gamma_T$  beinhaltet die mechanischen und thermischen Stoffeigenschaften. Er ist aus den LAMÉ-Konstanten und dem Temperaturexpansionskoeffizienten  $\alpha_T$  des Materials zu bestimmen (NOWACKI 1974).

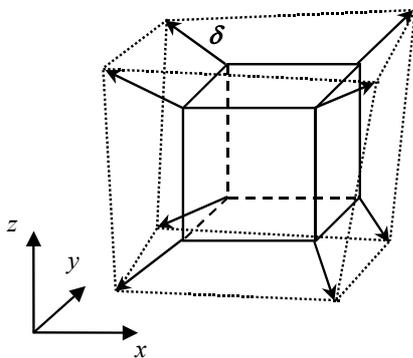


Abbildung 5-1: Exemplarische Darstellung des Verschiebungsfeldes  $\delta$  des verformten Körpers

Es ist anzumerken, dass das Strukturmodell (5-1) bereits eine Spezialisierung des thermoelastischen Verhaltens repräsentiert. Die elastischen Eigenschaften des Körpers sind als isotrop, d.h. richtungsunabhängig festgelegt. Die zeitliche Veränderung der Temperaturverteilung aufgrund äußerer mechanischer Belastungen wird nicht berücksichtigt. Sie erfordert die Rückkoppelung zwischen Temperaturzustand und Verschiebungsfeld, welche durch eine entsprechende Modifizierung von (5-1-b) erreicht werden kann. NOWACKI (1974) bezeichnet eine derartige Erweiterung als erkenntnistheoretisch bedeutsam, aber bei Anwendungen im Bauwesen und im Maschinenbau vernachlässigbar. Zur Betrachtung von Schwingungen aufgrund stoßartiger Temperaturerrregungen ist (5-1-a) mit einem Trägheitsglied zu erweitern. Thermisch induzierte Schwingungen sind bei der Berechnung von dünnen Platten (die Plattendicke ist klein gegenüber ihrer Ausdehnung) von Bedeutung (NOWACKI 1974).

Aufgrund der ausschließlichen Ortsabhängigkeit des Systems von Differenzialgleichungen (5-1-a) ist zu erkennen, dass die Temperatur den Verformungszustand hier quasi-statisch beeinflusst. Die Zeitabhängigkeit der Verformung ist damit ausschließlich durch die instationäre Temperaturverteilung gegeben.

In Abbildung 5-2 ist die Ein/Ausgangs-Beziehung zwischen äußerer Temperatureinwirkung und der Verformung des Körpers dargestellt. Gemäß Gleichungssystem (5-1) kann die Beschreibung des Übertragungsverhaltens als Reihenschaltung von zwei linearen Teilsystemen behandelt werden.

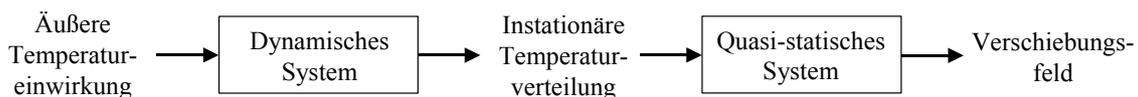


Abbildung 5-2: Verformung des Körpers als Reihenschaltung zweier linearer Systeme

Der Modellierung der instationären Temperaturverteilung im Inneren des Körpers muss eine dynamische Betrachtungsweise zugrunde gelegt werden. Als Eingangsgröße des quasi-statischen Systems erzeugt die Verteilung dann verzögerungsfrei die Verformung des Körpers. Das Gedächtnis des geodätischen Gesamtsystems bzgl. zeitlich zurückliegender

äußerer Temperatureinwirkungen ist im zeitlichen Verlauf der instationären Temperaturverteilung des Körpers enthalten.

Aus (5-1) und Abbildung 5-2 ist ersichtlich, dass die Modellierung und Identifikation eines Temperaturdeformationsmodells für Temperaturverteilung und Verformung sequentiell erfolgen kann. Die wesentlichen Vorteile dieser Vorgehensweise sind:

- Flexibilität bei der Modellbildung und Untersuchung der Deformationen.  
Je nach Aufgabenstellung kann die identifizierte instationäre Temperaturverteilung die Ausgangsbasis für verschiedene Deformationsgrößen bilden, wobei die strenge Ermittlung des Verschiebungsfeldes aller materiellen Punkte des Körpers nicht notwendigerweise von Interesse ist.
- Identifikation der physikalischen Parameter des Modells der instationären Temperaturverteilung unter geeigneten experimentellen Rahmenbedingungen.

Die parametrische Identifikation des Modells sollte in einem experimentell gut beherrschbaren Ausschnitt des Körpers erfolgen. In der Praxis ist damit auch die Zugänglichkeit der benötigten Temperaturmessstellen zu gewährleisten. Aufgrund der i.a. erheblich geringeren geometrischen Abmessungen des Ausschnitts, kann möglicherweise nur die Ermittlung der physikalischen Parameter der Temperaturverteilung und nicht der Verformung sichergestellt werden.

Der Schwerpunkt der nachfolgenden Betrachtungen ist auf den dynamischen Teil von Abbildung 5-2 konzentriert. Die Erstellung und Identifikation des Strukturmodells der instationären Temperaturverteilung eines Körpers, welches im Folgenden kurz als „Temperaturmodell“ bezeichnet wird, repräsentiert die Erweiterung der Analyse von thermisch induzierten Deformationen von der statischen zu einer dynamischen Betrachtungsweise. Hiermit unmittelbar verknüpft ist eine Verbesserung der Modellvorstellung über die Temperaturverhältnisse im Inneren des Körpers, wodurch dem in vielen Fällen auftretenden Problem einer repräsentativen Erfassung (u.a. MÖHLENBRINK / WELSCH 1984, HEUNECKE 1996) entgegengewirkt werden kann.

Die Beschreibung von instationären Temperaturverteilungen erfolgt im Bauwesen u.a. bei REICHMANN (1978). Er untersucht den Einfluss der Sonneneinstrahlung auf das Bewegungsverhalten des Münchner Fernsehturms. Die Quantifizierung des hochgradig nichtlinearen Temperaturgradienten in der Wand des Turmschafts erfolgt auf Grundlage der in (5-1-b) formulierten partiellen Differenzialgleichung.

In der industriellen Fertigung erfordert die Erstellung von rechnerischen Kompensationsverfahren bei Aufheiz- bzw. Abkühlvorgängen in Werkzeugmaschinen und Robotern i.d.R. ebenfalls eine instationäre Betrachtungsweise. HEISEL (1980) und BONSE (1999) stellen Ansätze zur Beschreibung der Temperaturverteilungen für die wichtige Klasse von balkenförmigen Bauteilen vor. Die Modellbildung erfolgt mittels eindimensionaler Spezialfälle von (5-1-b). Die dynamischen Kompensationsmodelle stehen hierbei in Konkurrenz zu den statischen Ansätzen. Bei zeitlich schnell variierenden thermischen Belastungen (z.B. Lastsprünge) wird eine adäquate rechnerische Kompensation der Verformung nur bei Berücksichtigung der instationären Temperaturverhältnisse erreicht (BONSE 1999).

### 5.1.3 Beschreibung des Experiments

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Temperaturdeformationsmodell einer im Fuß fest eingespannten schlanken Säule entwickelt, welche durch eine äußere Wärmequelle einseitig thermisch belastet wird.

Das Interesse an Temperatureinflüssen auf schlanke Baukonstruktionen wie Türme oder Brückenpfeiler wurde in Kapitel 5.1.1 bereits dokumentiert. Die Kenntnis des horizontalen Temperaturgefälles im Inneren des Bauwerks ist eine wichtige Voraussetzung für die Berechnung von dessen thermischer Biegung (PELZER 1974, MÖHLENBRINK / WELSCH 1984, HEUNECKE 1996). In der industriellen Fertigung ist die Ermittlung der Verformung von balkenförmigen Maschinenelementen (z.B. innerhalb der kinematischen Kette eines Roboters) wichtiger Bestandteil der rechnerischen Kompensationsverfahren. Neben der thermischen Längenänderung ist hier vor allem die Berechnung der thermischen Biegung aufgrund eines Temperaturgefälles senkrecht zur Längsachse des Bauteils von Interesse (u.a. RICHTER 1998).

Die Temperaturverteilung der Säule weist vergleichbare Eigenschaften wie bei den o.g. Applikationen auf. Als interessierende Zielgröße der Verformung wird ebenfalls die thermische Biegung betrachtet. Anhand dieses Beispiels wird der experimentelle Nachweis für die Quantifizierung und parametrische Identifikation von dynamischen Temperaturdeformationsmodellen für schlanke Konstruktionen geführt.

Die experimentelle Realisierung der Säule ist in Abbildung 5-3 dargestellt. Es handelt sich um eine im Inneren hohle Aluminiumsäule mit einem kreisrunden Querschnitt und einem Mantel dessen Wandstärke  $r_a - r_i = 2,5$  mm beträgt. Ihre Höhe beträgt  $H = 1,533$  m und ihr Durchmesser  $d = 0,150$  m (bezogen auf die Mitte des Mantelquerschnitts). Sie wird entlang eines Vertikalprofils durch eine äußere Wärmequelle einseitig thermisch belastet. Äußere mechanische Belastungen werden im Experiment ausgeschlossen.

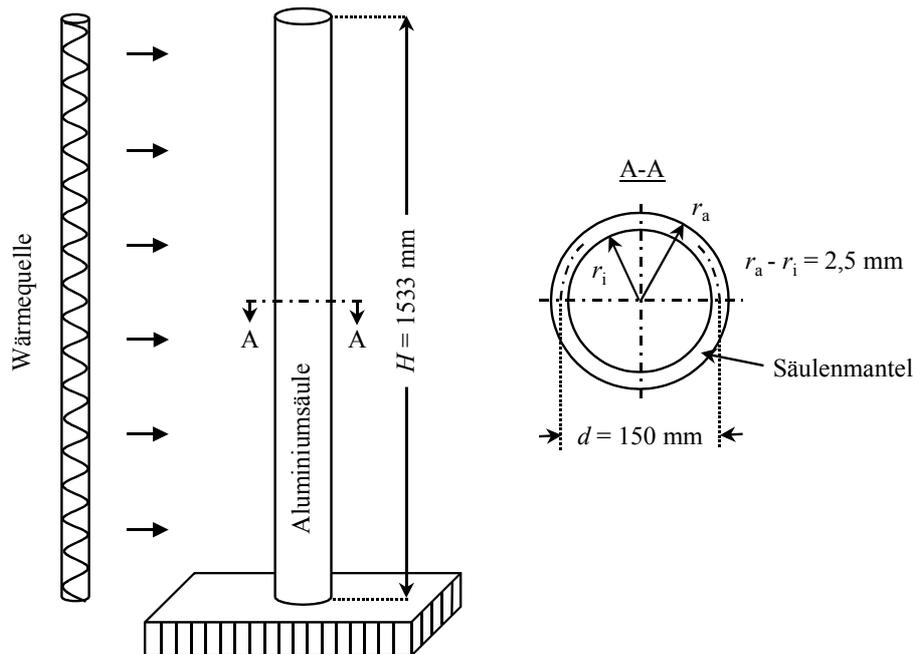


Abbildung 5-3: Einseitige thermische Belastung der Aluminiumsäule

Für das Experiment wird bewusst eine Säule mit dünner Wandstärke ausgewählt. Vor dem Hintergrund der Verifikation des identifizierten Temperaturmodells kann mit dieser Maßnahme eine repräsentative messtechnische Erfassung der realen Temperaturverhältnisse mit gut zugänglichen Messstellen sichergestellt werden. Der instationäre Verlauf des horizontalen Temperaturgradienten erfolgt in diesem Fall entlang des Säulenmantels.

Die verwendete Aluminiumlegierung hat eine sehr hohe Wärmeleitfähigkeit, wodurch die Zeitabhängigkeit der Temperaturverteilung besonders hervortritt. Die thermischen Materialeigenschaften der Legierung sind – innerhalb gewisser Toleranzen – a priori bekannt, wodurch die Verifikation der Identifikationsergebnisse zusätzlich gestützt werden kann.

Der im Folgenden betrachtete Bereich der Absoluttemperaturen für die thermische Belastung der Säule liegt zwischen Raumtemperatur (20°C) und ca. 80°C. Damit werden sowohl die im Bauwesen zum Nachweis der Standsicherheit anzunehmenden einseitigen Erwärmungen (80°C, s. DIN 1055-7) als auch die bei der Erwärmung von Werkzeugmaschinen auftretenden Extremwerte (bis 80°C im Bereich der Antriebselemente, RICHTER 1998) berücksichtigt. Die Angabe der Temperaturen erfolgt zukünftig in „Kelvin“ (0°C = 273,16 K, GERTHSEN et al. 1982) und entspricht damit der in Physik und Technik üblichen Darstellungsweise.

## 5.2 Physikalische Modellbildung des Temperaturprozesses

### 5.2.1 Qualitative Annahmen bezüglich des Wärmestroms

Die Erstellung des Temperaturmodells der Säule als Teil der theoretischen Systemanalyse erfordert zunächst grundlegende Annahmen bzgl. der Säulengeometrie und -struktur, Einwirkung der Stellgrößen, Ausbreitung der Wärme im Körper selbst und deren messtechnischer Erfassung. Hierbei handelt es sich um Vereinfachungen gegenüber der Realität, die für das in dieser Arbeit betrachtete experimentelle Umfeld angemessen sind. Die Quantifizierung des ungestörten Temperaturmodells basiert auf den nachfolgenden grundlegenden Annahmen:

1. Zur Erstellung des Temperaturmodells kann die Geometrie der Säule als Zylinder mit dünner Wandstärke betrachtet werden.  
Diese Annahme ist aufgrund des dünnen Säulenmantels (s. Kapitel 5.1.3) und der sehr guten Wärmeleitfähigkeit von Aluminium gerechtfertigt, wodurch bei Erwärmung nur geringe zeitliche Verzögerungen in radialer Richtung, d.h. zwischen innerem und äußerem Rand der Säule auftreten.
2. Im Inneren des Säulenmantels sollen keine Wärmequellen bzw. -senken vorhanden sein, was bei einer gewöhnlichen Säule unmittelbar einzusehen ist. Der Wärmetransport erfolgt ausschließlich durch Wärmeleitung.
3. Die Einwirkung der äußeren Wärmequelle soll entlang eines Profils parallel zur vertikalen konstruktiven Achse der Säule (s. Abbildung 5-4) erfolgen. Das Profil wird für den Betrachtungszeitraum als unveränderlich angenommen. Diese Forderung führt des Weiteren zu

4. Die Säule soll – abgesehen vom Bereich des vertikalen Belastungsprofils – keine Wärmeenergie in Form von Konvektion bzw. Strahlung abführen bzw. zugeführt bekommen.

Hinsichtlich des konvektiven Wärmeaustauschs ist diese Annahme nur bei einer idealen Isolierung der Säule gültig. Bei Abschätzung der Wärmeleitfähigkeit der Aluminiumsäule mit  $\lambda_{\text{Säule}} \approx 220 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  und ruhender Umgebungsluft mit  $\lambda_{\text{Luft}} \approx 0,003 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  (nach KUCHLING 1986) kann letztere als guter Isolator betrachtet werden. Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass die Umgebung der Säule weitgehend frei von Luftströmungen ist. Verbleibende Strömungen infolge von Temperatur- und somit Dichteunterschieden in der Umgebungsluft werden als „freie Konvektion“ bezeichnet. Diese wird in der nachfolgenden Modellbildung als Störeinfluss interpretiert. Eine derartige Betrachtung beinhaltet die Forderung, dass der Einfluss der Konvektion eine stochastisch kompensierbare Größe nicht überschreiten darf. Eine deterministische Beschreibung des konvektiven Wärmeaustauschs benötigt u.a. strömungsabhängige Wärmeübergangskoeffizienten, deren Bestimmung aufgrund der Abhängigkeit von einer Vielzahl physikalischer Einflussgrößen als problematisch anzusehen ist (s.a. RICHTER 1998).

Die Vernachlässigung von strahlungsbedingten Wärmeverlusten bei der Bildung des deterministischen Modells kann bei einer Aluminiumsäule durch deren niedriges Emissionsvermögen begründet werden (GOBRECHT 1974, BONSE 1999), wobei die Wärmeabgabe im interessierenden Temperaturbereich (unter 360 K) deutlich geringer als die der freien Konvektion ist (s.a. RICHTER 1998). Die Betrachtung als Störeinfluss ist auch in diesem Fall motiviert.

5. Der Wärmestrom im Säulenmantel erfolgt eindimensional senkrecht zur vertikalen konstruktiven Achse, d.h. Wandstärke (s. Punkt 1) und aus der Horizontalen abweichende Richtungen werden bei der deterministischen Beschreibung vernachlässigt.

Diese Forderung ist durch eine als weitgehend homogen angenommene Einwirkung der äußeren Wärmequelle entlang des vertikalen Profils (s. Punkt 3) begründet. Von der Horizontalen abweichende Ausbreitungsvorgänge können unter diesen Umständen durch eine entsprechende Abschätzung des stochastischen Modells der Störgrößen des Filters berücksichtigt werden.

6. Die Temperaturabhängigkeit der den Wärmestrom beeinflussenden physikalischen Strukturparameter wie Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und spezifische Wärmekapazität  $c$  (u.a. KAMMER 1995) soll im Temperaturbereich unter 360 K nicht explizit berücksichtigt werden. Implizit ist in den (gestörten) Systemgleichungen des KALMAN-Filters eine mögliche Variation der Parameter durch die im „random walk“-Prozess enthaltenen Störgrößen gegeben. Der Nachweis der Zulässigkeit der Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit muss mittels einer von der eigentlichen Parameteridentifikation unabhängigen Überprüfung der Gültigkeit des kalibrierten Temperaturmodells erfolgen.
7. Die messtechnische Erfassung zur Identifikation des Temperaturmodells soll mittels üblicher Temperatursensoren erfolgen, und somit für den praktischen Einsatz bei ingenieurgeodätischen Problemstellungen geeignet sein.

In Abbildung 5-4-a ist der angenommene Verlauf des Wärmestroms dargestellt, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit nur diskrete Profile gezeigt werden.

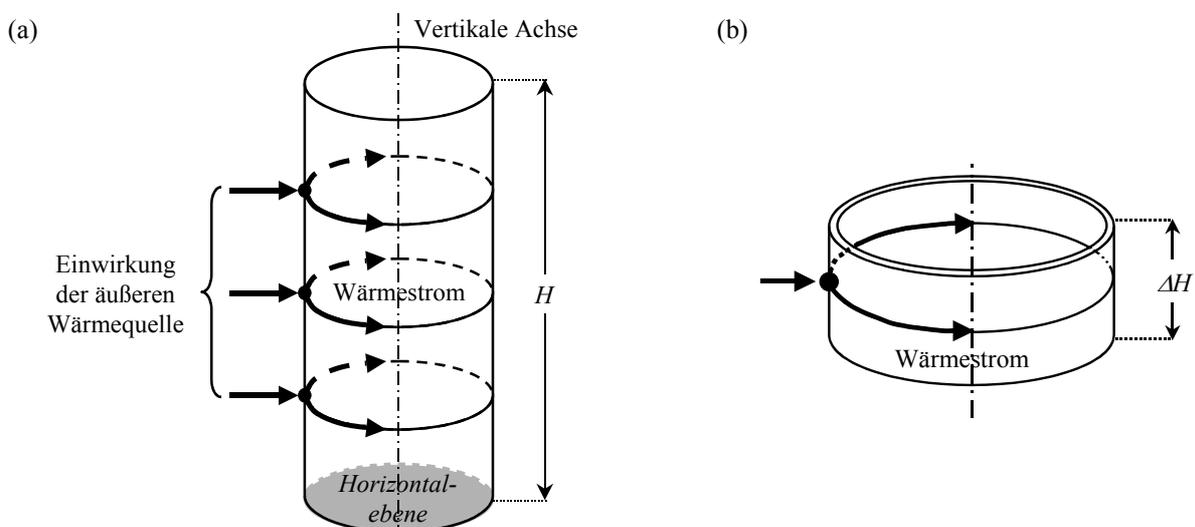


Abbildung 5-4: (a) Angenommener Verlauf des Wärmestroms im Mantel der Säule und (b) ringförmiges finites Mantelsegment

Unter Berücksichtigung der in den Punkten 1 bis 5 getroffenen Annahmen bzgl. Ursache und Ausbreitung von Wärme im Mantel der Säule, kann die Modellierung auf die Betrachtung vertikal geschichteter, ringförmiger finiter Mantelsegmente reduziert werden. Im Einzelsegment werden hinsichtlich der Ausbreitung der Wärme homogene Verhältnisse vorausgesetzt, d.h. es wird angenommen, dass der Wärmestrom senkrecht zu dessen Querschnittsfläche verläuft und in dieser eine konstante Stromdichte aufweist. Hierdurch wird eine eindimensionale Betrachtung ermöglicht (s.a. Abbildung 5-5). In Abbildung 5-4-b ist der Verlauf des Wärmestroms im einzelnen Segment dargestellt. Er bildet die Grundlage für die nun folgende physikalische Quantifizierung des Temperaturmodells der Säule.

### 5.2.2 Quantifizierung des Modells

Zur physikalischen Quantifizierung des Temperaturmodells wird der von Ort und Zeit abhängige Wärmestrom  $\Phi(\xi, t) = \partial Q(\xi, t) / \partial t$  in einem differentiellen Ausschnitt des ringförmigen, als ideal isoliert angenommenen Mantelsegments betrachtet. In Abbildung 5-5 ist die Beziehung zwischen dem örtlichen Temperaturgradienten  $\partial T / \partial \xi$  und der im differentiellen Zeitfortschritt  $dt$  an einem festen Ort durch die Querschnittsfläche  $A$  transportierten Wärmemenge  $dQ$  exemplarisch dargestellt.

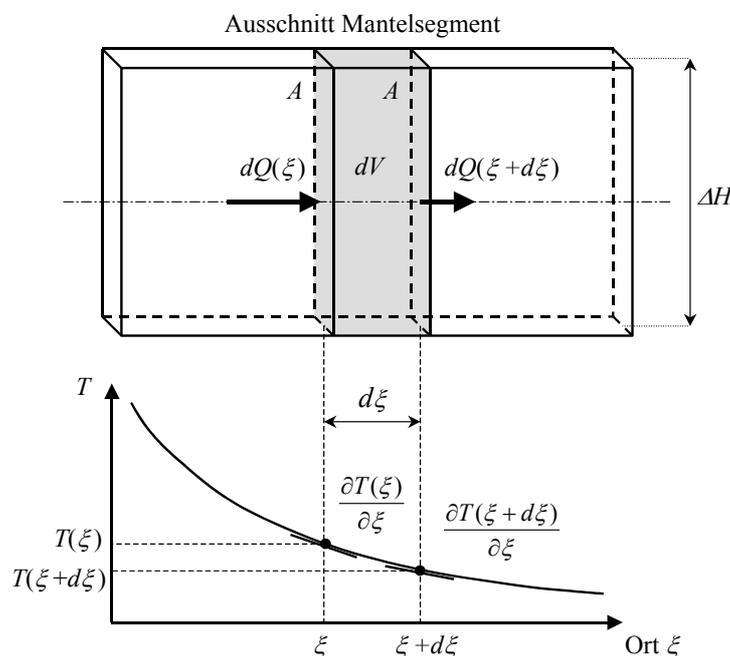


Abbildung 5-5: Im Zeitintervall  $dt$  in einem Volumenelement  $dV$  des Mantelsegments erfolgender Wärmez- und -abfluss

Aus dem Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung der Wärmemenge im Volumenelement  $dV$  und der räumlichen Änderung des örtlichen Temperaturgradienten ergibt sich dann u.a. nach GOBRECHT (1974) die nachfolgende Gleichung.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (5-2)$$

Mit (5-2) ist eine lineare partielle Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstantem Koeffizienten (PDGL 2. Ordnung) für den instationären örtlichen und zeitlichen Temperaturverlauf  $T(\xi, t)$  im ringförmigen Mantelsegment gegeben. Mit  $\alpha$  ist die Temperaturleitfähigkeit des Materials spezifiziert. Diese setzt sich aus der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , der Dichte  $\rho$  und der spezifischen Wärmekapazität  $c$  des Mantelmaterials zusammen (u.a. JANNA 2000).

Die PDGL entspricht dem „zweiten Fickschen Gesetz der Diffusion“ (GOBRECHT 1974) und repräsentiert den eindimensionalen Fall von Gleichung (5-1-b). Die Differenzialgleichung ist homogen, da im angenommenen Modell die Einwirkung der Wärmequelle auf das Mantelsegment örtlich konzentriert (s. Abbildung 5-4-b) und mittels der Randwerte der PDGL zu formulieren ist. Die Betrachtung als Randwertproblem kann durch die Abwicklung des Mantel-

segments in die Ebene anschaulich dargestellt werden, wobei die Wärmequelle dann im linken und rechten Rand des Streifens von außen die Randtemperatur  $T_u(t)$  einprägt (s.a. Abbildung 5-6).

Die zu einem Zeitpunkt  $t_0$  gegebene Anfangstemperaturverteilung  $T(\xi, t_0)$  des Mantelsegments und der durch die äußere Wärmequelle eingeprägte zeitliche Verlauf der Randtemperatur  $T_u(t)$  legen die Lösung  $T(\xi, t)$  der PDGL (5-2) und damit den Verlauf der Temperaturverteilung für  $t > t_0$  eindeutig fest (s.a. FÖLLINGER 1986). Die Randtemperatur  $T_u(t)$  kann als Stellgröße des Temperaturmodells (5-2) aufgefasst werden. In Abbildung 5-6 ist der zeitliche Verlauf der Temperaturverteilung  $T(\xi, t)$  im Mantelsegment exemplarisch dargestellt. Hierbei wird dem System ab dem Zeitpunkt  $t_0$  durch die äußere Wärmequelle eine zeitlich konstante Randtemperatur  $T_u(t) = \text{const}$  eingeprägt. Die zeitliche Konstanz wird hierbei lediglich aus Gründen einer anschaulichen Darstellung des Temperaturfelds gewählt.

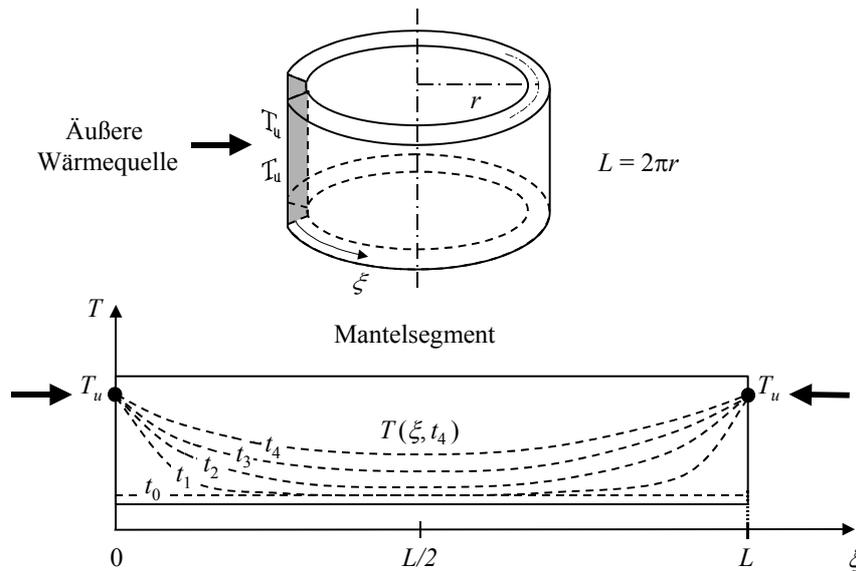


Abbildung 5-6: Zeitlicher Verlauf der Temperaturverteilung  $T(\xi, t)$  des Mantelsegments bei Einprägung einer zeitlich konstanten Randtemperatur  $T_u = \text{const}$  für  $t \geq t_0$

In obiger Abbildung wird deutlich, dass die Randtemperaturen im linken Rand  $\xi = 0$  und rechten Rand  $\xi = L$  des abgewickelten Mantelsegments identisch sind, da die Ränder denselben Ort repräsentieren. Ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt  $t_0$  kann das Anfangs-/Randwertproblem (ARWP) der PDGL (5-2) somit folgendermaßen formuliert werden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = 0$$

$$T(\xi, t = t_0) = T_0(\xi) \quad \text{für } 0 < \xi < L \quad \text{Anfangsbedingung} \quad (5-3)$$

$$T(\xi = 0, t) = T(\xi = L, t) = T_u(t) \quad \text{für } t \geq t_0 \quad \text{Randbedingung, Stellgrößen}$$

gesucht:  $T(\xi, t)$  für  $t > t_0$  und  $0 < \xi < L$

Die Integration des Temperaturmodells in die Systemgleichungen eines diskreten KALMAN-Filters erfordert die Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Temperaturverteilung  $T(\xi, t)$  in rekursiver Schreibweise. Diese wird im nun folgenden Kapitel bereitgestellt.

### 5.3 Integration des quantifizierten Temperaturmodells in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters

#### 5.3.1 Integrationsansatz nach dem Verfahren der „Ortsdiskretisierung“

Zur rekursiven Darstellung des mit (5-3) formulierten ARWP ist ein möglicher Lösungsansatz mit dem u.a. in FÖLLINGER / FRANKE (1982), EICHLER (1999) beschriebenen Verfahren der „Ortsdiskretisierung“ gegeben. Die partiellen Ableitungen bzgl. der Ortsvariablen  $\xi$  werden dabei mittels finiter Ortsdifferenzen  $\Delta \xi$  als Differenzenquotienten

approximiert und ermöglichen den Übergang auf ein ausschließlich zeitabhängiges System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Bei Unterteilung des Mantelsegments der Länge  $L$  in  $n-1$  äquidistante Abschnitte  $\Delta\xi = L/(n-1)$ , kann in den Stützstellen  $\xi_i$  (ohne Rand) das nachfolgende System von  $n-2$  gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen gebildet werden.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 T(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi_i} &\approx \frac{T(\xi_{i+1}, t) - 2T(\xi_i, t) + T(\xi_{i-1}, t)}{\Delta\xi^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial T(\xi_i, t)}{\partial t} - \alpha \frac{T(\xi_{i+1}, t) - 2T(\xi_i, t) + T(\xi_{i-1}, t)}{\Delta\xi^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5-4)$$

mit  $i = 2 \dots n-1$  ;  $\xi_i = (i-1) \frac{L}{n-1}$  ;  $\xi_1 = 0$  ;  $\xi_n = L$

und  $[T(\xi_2, t_0), T(\xi_3, t_0), \dots, T(\xi_{n-1}, t_0)]^T$  Anfangsbedingungen aus  $T_0(\xi)$

$$T(0, t) = T(L, t) = T_u(t) \quad \text{für } t \geq t_0 \quad \text{Randbedingung}$$

Mit dem obigen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung ist unmittelbar die ungestörte Zustandsraumdarstellung des Temperaturmodells mit Systemmatrix  $\mathbf{F}$  und Stelleingangsmatrix  $\mathbf{G}$  gegeben.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial T(\xi_2, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial T(\xi_3, t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial T(\xi_{n-2}, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial T(\xi_{n-1}, t)}{\partial t} \end{pmatrix} &= \frac{\alpha}{\Delta\xi^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(\xi_2, t) \\ T(\xi_3, t) \\ \vdots \\ T(\xi_{n-2}, t) \\ T(\xi_{n-1}, t) \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\Delta\xi^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} T_u(t) \end{aligned} \quad (5-5)$$

$\dot{\mathbf{x}}_{n-2,1}$                        $\mathbf{F}_{n-2, n-2}$                        $\mathbf{x}_{n-2,1}$                        $\mathbf{G}_{n-2,1}$                        $u_{1,1}$

Anhand der Zustandsraumdarstellung wird nochmals die Bedeutung der eingepprägten Randtemperatur als Stellgröße besonders anschaulich verdeutlicht. Aufgrund der zeitinvarianten Systemmatrix  $\mathbf{F}$  ist die Bestimmung der Transitionsmatrix  $\mathbf{T}(t_{k+1}, t_k)$  des diskreten KALMAN-Filters mittels Matrixexponentialfunktion und dem Verfahren nach CAYLEY-HAMILTON (s. Kapitel 3.2.2) möglich.

$$\Phi(t, t_0) = e^{\frac{\alpha}{\Delta\xi^2} \mathbf{F}(t-t_0)} \Rightarrow \mathbf{T}(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \quad (5-6)$$

Die tridiagonale Systemmatrix  $\mathbf{F}_{(n-2, n-2)}$  ist diagonalähnlich und besitzt folgende allgemeine Darstellung für ihre  $n-2$  unterscheidbaren Eigenwerte  $\lambda_j$  (ZURMÜHL / FALK 1997):

$$\lambda_j = 2 \cos \beta_j - 2 \quad \text{mit } \beta_j = \frac{j}{n-1} \pi \quad \text{und } j=1, 2, \dots, n-2 \quad (5-7)$$

Unter Verwendung von obiger Darstellung kann das Minimalpolynom  $m(\lambda)$  in allgemeiner Form angegeben werden.

$$m(\lambda) = \prod_{j=1}^{n-2} (\lambda - \lambda_j) \quad (5-8)$$

Mit (3-20) und (5-8) folgt für das äquivalente Ersatzpolynom  $\varphi$  vom Grad  $n-3$ :

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i \frac{\alpha}{\Delta \xi^2} (t-t_0)}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-2} (\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-2} (\lambda - \lambda_j) \quad (5-9)$$

Die Bestimmung von  $\Phi(t, t_0)$  erfolgt mittels Substitution der Potenzen von  $\lambda$  durch die entsprechenden Potenzen der Systemmatrix  $F$ .

$$\Phi(t, t_0) = \varphi(F) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{e^{\lambda_i \frac{\alpha}{\Delta \xi^2} (t-t_0)}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-2} (\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-2} (F - \lambda_j E) \quad (5-10)$$

Zum flexiblen Einsatz des KALMAN-Filters ist eine allgemeingültige Darstellung der Transitionsmatrix mit prinzipiell beliebig wählbarer Anzahl von finiten Ortsdifferenzen anzustreben. Im Rahmen dieser Zielsetzung ist eine analytische Auflösung von (5-10) sehr rechenaufwändig und soll hier nicht weiter verfolgt werden. Eine Vereinfachung ergibt sich im Fall einer à priori fest vorgegebenen Anzahl von Ortsdifferenzen, womit eine unmittelbare numerische Auswertung der Produktterme ermöglicht wird und der Ansatz der finiten Ortsdifferenzen eine praktikable Integrationsstrategie darstellt. Allerdings ist dann bei jeder Veränderung der Abtastung des Mantelsegments eine erneute Bestimmung der Transitionsmatrix und der abgeleiteten Matrizen (z.B. Stellmatrix  $B$ ) erforderlich.

Bei nachfolgendem Integrationsverfahren der PDGL in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters wird in dieser Arbeit ein Weg beschritten, der eine – in Bezug auf die Diskretisierung – sehr flexible analytische Darstellung der Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters erlaubt. Mit Gleichung (5-10) ist allerdings gezeigt, dass das Berechnungsverfahren von CAYLEY-HAMILTON auch auf partielle Differenzialgleichungen anwendbar ist, sofern diese mittels des Verfahrens der Ortsdiskretisierung in die standardisierte Zustandsraumdarstellung überführt werden können.

### 5.3.2 Integrationsansatz mittels Approximation der Anfangstemperaturverteilung

Die Grundidee des im Folgenden gezeigten Verfahrens zur Lösung des ARWP (5-3) entspricht der rekursiven Lösungsdarstellung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen und ist somit konform mit dem Verfahren der Ortsdiskretisierung. Ausgehend von einem Zeitpunkt  $t_k$  mit gegebener Anfangstemperaturverteilung  $T(\xi, t_k)$  und Randwert  $T_u(t_k)$  wird die Lösung der PDGL über ein Zeitintervall  $\Delta t$  zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$  fortgeschrieben. An dieser Stelle kann mittels der fortgeschriebenen Temperaturverteilung  $T(\xi, t_{k+1})$  und dem aktuellen Randwert  $T_u(t_{k+1})$  dann erneut ein ARWP formuliert werden. Der zeitliche Verlauf von  $T_u(t)$  ist hierbei – entsprechend der üblichen Modellierung von Stellgrößen – als stückweise konstant zu betrachten (Halteglied 0ter Ordnung), d.h. es wird  $T_u(t) = T_u(t_k)$  für  $t_k \leq t < t_{k+1}$  angenommen.

Die analytische Lösung der PDGL erfordert eine analytische Darstellung der entlang des Mantelsegments stetigen Anfangstemperaturverteilung  $T(\xi, t_k)$ . Es ist weiterhin zu beachten, dass der Algorithmus des KALMAN-Filters die (diskrete) Repräsentierung von  $T(\xi, t_k)$  als Partition des Zustandsvektors erfordert. Die im Folgenden gewählte Beschreibung der Anfangstemperaturverteilung als Polygon  $T_{\text{poly}}(\xi, t_k)$  besitzt den Vorteil, dass mit ihr eine unmittelbare Definition des Zustandsvektors gegeben ist. Dieser wird gerade aus den Temperaturwerten in den Stützstellen gebildet und ist somit konform mit den in Kapitel 5.3.1. eingeführten Zustandsparametern. Die Integration von Temperaturbeobachtungen in die Messgleichungen des diskreten KALMAN-Filters ist somit ebenfalls auf sehr einfache Weise möglich. Der Temperaturverlauf zwischen den Stützstellen ergibt sich durch lineare Interpolation, womit die Forderung nach Stetigkeit erfüllt ist.

Bei entsprechender hoher Abtastung ist es prinzipiell möglich, einen beliebigen Verlauf der Temperaturverteilung zu beschreiben. Es ist ebenfalls offensichtlich, dass Abschnitte mit näherungsweise konstantem Temperaturgradienten durch Stützstellen in den jeweiligen Rändern mit ausreichender Genauigkeit approximiert werden können.

Die analytische Lösungsstrategie für die PDGL mit der Approximation der Anfangstemperaturverteilung als Polygon ist in Abbildung 5-7 dargestellt. Hierbei wird zur Vereinfachung wieder eine zeitlich konstante Randtemperatur  $T_u$  angenommen.

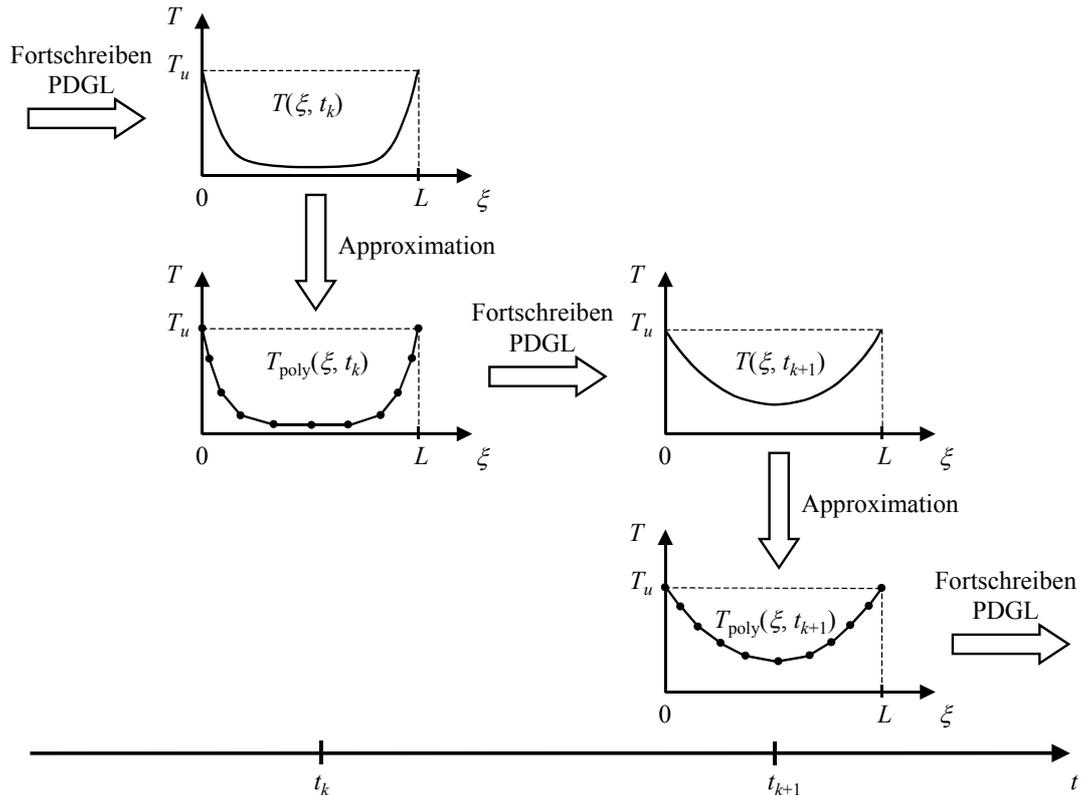


Abbildung 5-7: Fortschreibung der Lösung der PDGL von  $t_k$  nach  $t_{k+1}$ , wobei die Anfangstemperturverteilung als Polygon approximiert wird

Zur analytischen Lösung des ARWP (5-3) muss dieses – vor dem Hintergrund der KALMAN-Filter gerechten, rekursiven Lösungsstrategie – neu formuliert werden. Hierbei sind die hinsichtlich Randtemperatur und Anfangstemperturverteilung getroffenen Annahmen zu berücksichtigen.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = 0$$

$$T(\xi, t = t_k) = T_{\text{poly}}(\xi) \quad \text{für } 0 < \xi < L \quad \text{Anfangsbedingung} \quad (5-11)$$

$$T(\xi = 0, t) = T(\xi = L, t) = T_u(t_k) \quad \text{für } t_k \leq t < t_{k+1} \quad \text{Randbedingung, Stellgrößen}$$

gesucht:  $T(\xi, t_{k+1}) \quad \text{für } 0 < \xi < L$

Eine Vereinfachung der Lösung von (5-11) erfolgt durch Aufspaltung des ARWP in zwei Teilprobleme, wobei in (a) der alleinige Einfluss der Anfangstemperturverteilung betrachtet wird und in (b) nur die Einwirkung der Randtemperatur zu berücksichtigen ist.

$$(a) \begin{cases} T(\xi, t = t_k) = T_{\text{poly}}(\xi) & \text{für } 0 < \xi < L \\ T(\xi = 0, t) = T(\xi = L, t) = 0 & \text{für } t_k \leq t < t_{k+1} \end{cases} \quad (5-12)$$

$$(b) \begin{cases} T(\xi, t = t_k) = 0 & \text{für } 0 < \xi < L \\ T(\xi = 0, t) = T(\xi = L, t) = T_u(t_k) & \text{für } t_k \leq t < t_{k+1} \end{cases}$$

Aufgrund der Linearität des ARWP ergibt sich nach FÖLLINGER (1986) die allgemeine Lösung von (5-11) dann durch Superposition der Teillösungen von (5-12-a) und (5-12-b). Im weiteren Verlauf der Integration des ungestörten Tempe-

raturmodells in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters werden nur die wesentlichen Zwischenergebnisse dargestellt. Die hierzu notwendigen Berechnungen sind im Anhang B aufgeführt.

Mittels LAPLACE-Transformation bzgl. der Zeitvariablen  $t$  (s.a. Kapitel 3.2.2) werden die beiden Teilprobleme zunächst auf gewöhnliche Differenzialgleichungen bzgl. der Ortsvariablen  $\xi$  zurückgeführt. Da die Beziehungen zwischen Zeitfunktionen und deren Ableitungen mit den zugehörigen LAPLACE-Transformierten in der Literatur i.a. auf  $t=0$  bezogen dargestellt werden (vgl. auch DRESZER 1975, FÖLLINGER 1986), muss eine Verschiebung des Nullpunkts der Zeitachse in den Zeitpunkt  $t_k$  erfolgen, d.h. es ist in den ARWP (5-12) die Zeitvariable  $t$  mit  $t = t_k + \tau$  zu substituieren. Die LAPLACE-Transformation erfolgt dann bzgl. der neuen Zeitvariablen  $\tau = t - t_k$ . Mit den in Anhang B.1 angegebenen LAPLACE-Transformierten ergibt sich für die transformierten Problemstellungen:

$$(a) \begin{cases} \frac{\partial^2 T^*(\xi, s)}{\partial \xi^2} - \frac{s}{\alpha} T^*(\xi, s) = -\frac{1}{\alpha} T_{\text{poly}}(\xi) & \text{mit } T^*(\xi, s) = L\{T(\xi, \tau)\} \\ T^*(\xi = 0, s) = T^*(\xi = L, s) = 0 \end{cases} \quad (5-13)$$

$$(b) \begin{cases} \frac{\partial^2 T^*(\xi, s)}{\partial \xi^2} - \frac{s}{\alpha} T^*(\xi, s) = 0 \\ T^*(\xi = 0, s) = T^*(\xi = L, s) = T_u(\tau = 0) \end{cases}$$

Zur analytischen Beschreibung der Anfangstemperaturverteilung  $T_{\text{poly}}(\xi)$  in (5-13-a) wird das Mantelsegment in  $n-1$  äquidistante Abschnitte der Breite  $\Delta\xi$  unterteilt (s.a. Abbildung 5-8). In den  $n$  Stützstellen  $\xi_i$  sind die Anfangstemperaturen  $T(\xi_i)$  bekannt. Das Polygon kann dann unter Zuhilfenahme von einer Folge von Rechteckimpulsen mit der Impulsbreite  $\Delta\xi$  dargestellt werden. Für den einzelnen Rechteckimpuls  $r(\xi)$  gilt hierbei die nachfolgende Definition.

$$r(\xi) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \xi < \Delta\xi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5-14)$$

Hiermit ergibt sich für die analytische Beschreibung des Polygons der Anfangstemperaturverteilung die nachfolgende Beziehung, wobei die Temperaturen  $T(\xi_i)$  im Folgenden nur noch indiziert werden.

$$T_{\text{poly}}(\xi) = \sum_{i=1}^{n-1} r(\xi - \xi_i) \cdot [T_i + \frac{\Delta T_{i,i+1}}{\Delta\xi} (\xi - \xi_i)] \quad ; \quad T_1 \equiv T_n \quad (5-15)$$

$$\text{mit } \Delta T_{i,i+1} = T_{i+1} - T_i$$

Mit (5-15) ist die rechte Seite von (5-13-a) gegeben. Da das Polygon auf dem ringförmigen Mantelsegment gegeben ist, sind die Stützstellen  $\xi_1 = 0$  und  $\xi_n = L$  identisch, so dass  $T_1 \equiv T_n$  gilt.

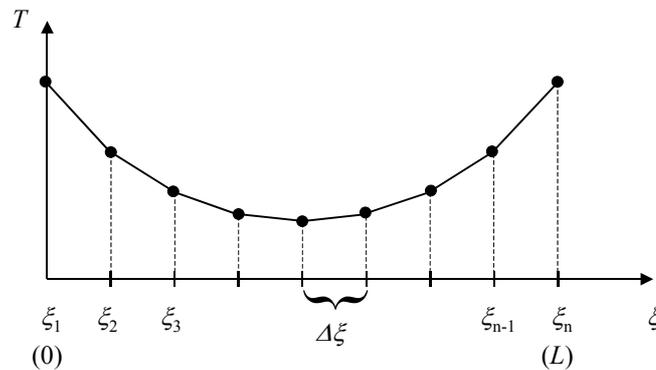


Abbildung 5-8: Polygon  $T_{\text{poly}}(\xi)$  der Anfangstemperaturverteilung

Die Lösung der mit (5-13-a) und (5-13-b) festgelegten Randwertprobleme bzgl. linearer gewöhnlicher Differenzialgleichungen erfolgt mittels der üblichen mathematischen Verfahren (z.B. BRONSTEIN 1987). Für die LAPLACE-transformierte Lösung des ARWP (5-12-a), d.h. des alleinigen Einflusses der Anfangstemperaturverteilung, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
T_a^*(\xi, s) = & \\
& \sqrt{\frac{\alpha}{s^3}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\Delta T_{i,i+1}}{\Delta \xi} \cdot \left[ \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi_i) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{\sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} - \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi_{i+1}) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{\sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right] \right. \\
& + \frac{\Delta T_{j,j+1}}{\Delta \xi} \cdot \left[ \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi_j) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{\sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} - \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi_{j+1}))}{\sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right] \\
& \left. + \sum_{i=j+1}^{n-1} \frac{\Delta T_{i,i+1}}{\Delta \xi} \cdot \left[ \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi_i))}{\sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} - \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi_{i+1}))}{\sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right] \right\} \\
& - \frac{T_1 \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{s \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} - \frac{T_n \sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi)}{s \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} + \frac{1}{s} \left[ T_j + \frac{\Delta T_{j,j+1}}{\Delta \xi} (\xi - \xi_j) \right]
\end{aligned} \tag{5-16}$$

Hierbei befindet sich die betrachtete Stelle  $\xi$  im Intervall  $[\xi_j, \xi_{j+1})$ . Die LAPLACE-transformierte Lösung des ARWP (5-12-b), d.h. des alleinigen Einflusses der eingepprägten Randtemperatur  $T_u$ , ist mit

$$T_b^*(\xi, s) = T_u(\tau=0) \cdot \left[ \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{s \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} + \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi)}{s \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right] \tag{5-17}$$

gegeben. Durch Rücktransformation von (5-16) und (5-17) in den Zeitbereich und Superposition der Ergebnisse erhält man dann die strenge Lösung des ARWP (5-11) bzw. die mittels des Polygons der Anfangstemperaturverteilung approximierte Lösung des ARWP (5-3). Die hierfür notwendigen Berechnungsschritte sind in Anhang B.2 dargestellt.

$$T(\xi, \tau) = L^{-1}\{T_a^*(\xi, s)\} + L^{-1}\{T_b^*(\xi, s)\} \quad \text{mit } \tau = t - t_k \tag{5-18}$$

Ausgehend von einer Anfangstemperaturverteilung  $T_{\text{poly}}(\xi, t_k)$  mit den Stützstellentemperaturen  $T_i(t_k)$  und einer eingepprägten Randtemperatur  $T_u(t_k)$  ergibt sich für die in Ort und Zeit kontinuierliche Darstellung des Temperaturmodells im Mantelsegment für  $0 < \xi < L$  und  $t_k \leq t < t_{k+1}$  die nachfolgende Darstellung.

$$\begin{aligned}
T(\xi, t, t_k) = & \\
& \frac{2L}{\pi^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta T_{i,i+1}(t_k)}{\Delta \xi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\nu \pi \xi / L)}{\nu^2} \cdot [\sin(\nu \pi \xi_{i+1} / L) - \sin(\nu \pi \xi_i / L)] \cdot e^{-\alpha \left(\frac{\nu \pi}{L}\right)^2 (t-t_k)} \\
& + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \cdot [(T_1(t_k) - T_u(t_k)) \cdot \sin(\nu \pi (\xi - L) / L) - (T_n(t_k) - T_u(t_k)) \cdot \sin(\nu \pi \xi / L)] \cdot e^{-\alpha \left(\frac{\nu \pi}{L}\right)^2 (t-t_k)} \\
& + T_u(t_k)
\end{aligned} \tag{5-19}$$

Da die Temperaturen in den Stützstellen des Polygons der Anfangstemperaturverteilung in obiger Gleichung linear enthalten sind, können sie durch einfache Umformung in vektorieller Schreibweise dargestellt werden, womit – im Hinblick auf die Integration in das diskrete KALMAN-Filter – die Definition einer Partition des Zustandsvektors gegeben ist.

$$\begin{aligned}
T(\xi, t, t_k) = & \\
& \left( \begin{array}{l} \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^\nu}{\nu} \cdot \sin(\nu \pi (\xi - L)/L) - \frac{L}{\pi \Delta \xi} \cdot \frac{\sin(\nu \pi \xi/L)}{\nu^2} \cdot [\sin(\nu \pi \xi_2/L) - \sin(\nu \pi \xi_1/L)] \right\} \cdot e^{-\alpha \left(\frac{\nu \pi}{L}\right)^2 (t-t_k)} \\ \vdots \quad i = 2 \dots n-1 \\ - \frac{2L}{\pi^2 \Delta \xi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\nu \pi \xi/L)}{\nu^2} \cdot [\sin(\nu \pi \xi_{i-1}/L) - 2\sin(\nu \pi \xi_i/L) + \sin(\nu \pi \xi_{i+1}/L)] \cdot e^{-\alpha \left(\frac{\nu \pi}{L}\right)^2 (t-t_k)} \\ \vdots \\ - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^\nu}{\nu} \cdot \sin(\nu \pi \xi/L) - \frac{L}{\pi \Delta \xi} \cdot \frac{\sin(\nu \pi \xi/L)}{\nu^2} \cdot [\sin(\nu \pi \xi_n/L) - \sin(\nu \pi \xi_{n-1}/L)] \right\} \cdot e^{-\alpha \left(\frac{\nu \pi}{L}\right)^2 (t-t_k)} \end{array} \right)^T \begin{pmatrix} T_1(t_k) \\ T_2(t_k) \\ T_3(t_k) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T_n(t_k) \end{pmatrix} \\
& + \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \cdot [\sin(\nu \pi (\xi - L)/L) - \sin(\nu \pi \xi/L)] \cdot e^{-\alpha \left(\frac{\nu \pi}{L}\right)^2 (t-t_k)} \right\} T_u(t_k) \quad (5-20)
\end{aligned}$$

Für die in Abbildung 5-7 dargestellte Strategie der Fortschreibung der Lösung des ARWP und Integration in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters ist obige Gleichung zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$  gerade in den  $n$  Stützstellen  $\xi_i$  mit äquidistantem Abstand  $\Delta \xi$  auszuwerten, so dass die Bildung des Polygons  $T_{\text{poly}}(\xi, t_{k+1})$  für den nächsten Rekursions-schritt ermöglicht wird.

Damit ergeben sich unmittelbar die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters für die Fortschreibung des ungestörten dynamischen Temperaturmodells. Der die Temperaturverteilung repräsentierende Teil des Zustandsvektors ist mit  $\mathbf{x}_{\text{Temp}}$  gegeben.  $\mathbf{T}$  bezeichnet wieder die Transitionsmatrix und  $\mathbf{B}$  die Stellmatrix des Filters. Die von der äußeren Wärmequelle eingeprengte Randtemperatur  $T_u$  ist in den Systemgleichungen als Stellgröße enthalten.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} T_1(t_{k+1}) \\ \vdots \\ T_j(t_{k+1}) \\ \vdots \\ T_n(t_{k+1}) \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \left( \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & \text{-----} & 0 & 0 & 0 & \text{-----} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ \left( \begin{array}{l} \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^\nu}{\nu} \cdot \sin(\nu \pi (\xi_j - L)/L) - \frac{L}{\pi \Delta \xi} \cdot \frac{\sin(\nu \pi \xi_j/L)}{\nu^2} \cdot [\sin(\nu \pi \xi_2/L) - \sin(\nu \pi \xi_1/L)] \right\} \cdot e^{-\alpha \left(\frac{\nu \pi}{L}\right)^2 \Delta t} \\ \vdots \quad i = 2 \dots n-1 \\ - \frac{2L}{\pi^2 \Delta \xi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\nu \pi \xi_j/L)}{\nu^2} \cdot [\sin(\nu \pi \xi_{i-1}/L) - 2\sin(\nu \pi \xi_i/L) + \sin(\nu \pi \xi_{i+1}/L)] \cdot e^{-\alpha \left(\frac{\nu \pi}{L}\right)^2 \Delta t} \\ \vdots \\ - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^\nu}{\nu} \cdot \sin(\nu \pi \xi_j/L) - \frac{L}{\pi \Delta \xi} \cdot \frac{\sin(\nu \pi \xi_j/L)}{\nu^2} \cdot [\sin(\nu \pi \xi_n/L) - \sin(\nu \pi \xi_{n-1}/L)] \right\} \cdot e^{-\alpha \left(\frac{\nu \pi}{L}\right)^2 \Delta t} \end{array} \right)^T \\ \vdots \\ \left( \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & \text{-----} & 0 & 0 & 0 & \text{-----} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right)^T \begin{pmatrix} T_1(t_k) \\ T_2(t_k) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{n-1}(t_k) \\ T_n(t_k) \end{pmatrix} \\ \left( \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & \text{-----} & 0 & 0 & 0 & \text{-----} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{x}_{\text{Temp}}(t_{k+1})}_{n,1} & \underline{\mathbf{T}(t_{k+1}, t_k)}_{n,n} & \underline{\mathbf{x}_{\text{Temp}}(t_k)}_{n,1} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \cdot \left[ \sin(\nu\pi(\xi_j - L)/L) - \sin(\nu\pi\xi_j/L) \right] \cdot e^{-\alpha \left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2 \Delta t} T_u(t_k) \\
 & \left( \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right) \quad j = 2 \dots n-1 \\
 & \left( \begin{array}{c} \mathbf{B}(t_{k+1}, t_k) \\ n, 1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} u(t_k) \\ 1, 1 \end{array} \right)
 \end{aligned} \tag{5-21}$$

Wie in der obigen Gleichung ersichtlich ist, erfolgt die Fortschreibung der Temperaturen  $T_1$  und  $T_n$  direkt mittels der Stellgröße  $T_u$ . Dies ist sofort einzusehen, da diese unmittelbar im Rand, d.h. bei  $\xi_1 = 0$  bzw.  $\xi_n = L$  eingepreßt ist. Aufgrund  $T_1 \equiv T_n$  repräsentieren diese Stützstellentemperaturen denselben Zustandsparameter. Aus Gründen einer formal übersichtlichen Schreibweise werden sie weiterhin getrennt dargestellt. Die Identität muss aber bei der Initialisierung des stochastischen Modells der Zustandsparameter mit einem Korrelationskoeffizienten von  $\rho_{1,n} = 1$  berücksichtigt werden.

Im Folgenden wird mit den ungestörten Systemgleichungen des KALMAN-Filters die Ausbreitung der Wärme im ringförmigen Mantelsegment einer Säule aus Aluminium für einen exemplarischen Fall simuliert. Die Länge des Segments beträgt hierbei  $L = 200$  mm. Die örtliche Abtastung erfolgt mit  $\Delta\xi = 1$  mm, woraus  $n = 201$  Stützstellen resultieren. Die zeitliche Abtastung, d.h. der Fortschritt der Rekursion, beträgt  $\Delta t = 1$  s. Zum Startzeitpunkt  $t = 0$  der Simulation wird im Mantelsegment eine konstante Temperatur von  $T(\xi, t = 0) = 293$  K ( $\approx 20^\circ\text{C}$ ) angenommen. Eine äußere Wärmequelle soll eine zeitlich konstante Randtemperatur  $T_u(t) = 353$  K ( $\approx 80^\circ\text{C}$ ) als Stellgröße einprägen. In Abbildung 5-9 ist das mittels (5-21) fortgeschriebene, orts- und zeitdiskrete Temperaturfeld  $T_i(t_k)$  des Mantelsegments für einen Zeitraum von 180 s dargestellt. Aufgrund der reziprok enthaltenen Exponentialfunktion weisen die unendlichen Reihen numerisch ein sehr gutes Konvergenzverhalten auf.

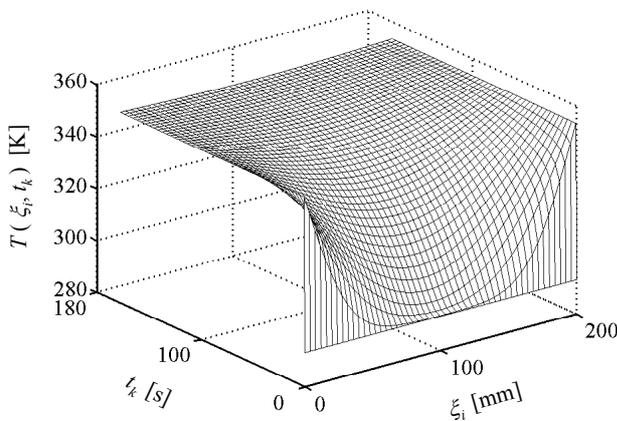


Abbildung 5-9: Simulationsbeispiel: Darstellung des Temperaturfeldes  $T_i(t_k)$  eines ringförmigen Mantelsegments aus Aluminium ( $L = 200$  mm,  $\Delta\xi = 1$  mm,  $\Delta t = 1$  s) über einen Zeitraum von 180 s unter Einwirkung einer zeitlich konstanten Randtemperatur  $T_u = 353$  K ( $\approx 80^\circ\text{C}$ )

Ausgehend von der örtlich konstanten Temperaturverteilung zum Startzeitpunkt der Simulation und der zeitlich konstanten Stellgröße, kann mittels (5-19) auch die strenge Lösung des ARWP (5-3), d.h. das von Approximationsfehlern freie Temperaturfeld des Mantelsegments berechnet werden. In Abbildung 5-10 ist dessen Vergleich mit der obigen rekursiven Berechnung in den Abtaststellen in Form von Temperaturdifferenzen  $\Delta T_i(t_k)$  dargestellt.

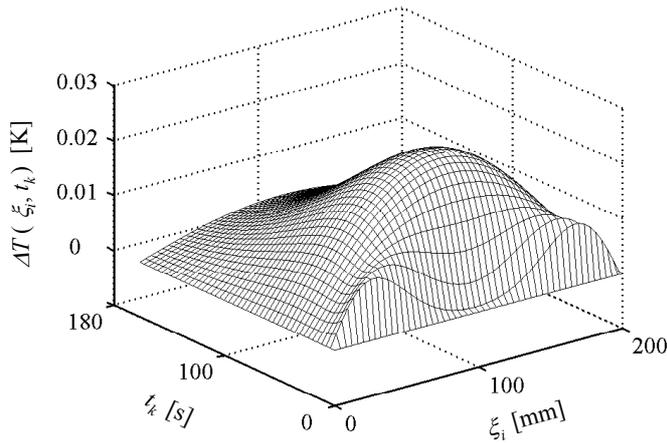


Abbildung 5-10: Simulationsbeispiel: Approximationsfehler  $\Delta T_i(t_k)$  in den Abtaststellen der rekursiven Lösung gegenüber der strengen Berechnung

Der Approximationsfehler der rekursiven Lösung wird in diesem Beispiel nur durch die Dichte der örtlichen Abtastung der Anfangstemperaturverteilung  $\Delta\xi$  beeinflusst. Aufgrund der zeitlich konstanten Randtemperatur, verursacht deren zeitliche Abtastung keinen Fehler. Da sowohl strenge als auch rekursive Lösung gegen die Randtemperatur streben, konvergiert das Feld der Approximationsfehler letztlich gegen Null.

Das Feld erreicht in der vorliegenden Konfiguration nach 45 s in der Mitte des Mantelsegments ein Maximum von ca. 0,025 K. Vergleicht man diesen Fehler mit der Relativmessgenauigkeit von handelsüblichen Temperatursensoren ( $\sigma_{AT} \approx 0,4$  K, s.a. Kapitel 5.5.1.2) ist festzustellen, dass – bei hinreichend dichter örtlicher Abtastung – das Verfahren der Approximation der Anfangstemperaturverteilung als Polygon eine ausreichende Annäherung an die strenge Lösung des ARWP gewährleistet. Des Weiteren repräsentiert der im Simulationsbeispiel gezeigte Vergleich den ungünstigsten Fall von systematisch kumulierenden Approximationsfehlern. Im Algorithmus des KALMAN-Filters erfolgt in der Identifikations- und der Nutzphase nach jeder Epoche eine Aufdatierung der Prädiktionen durch Temperaturmessungen, wodurch dieser Effekt gedämpft wird.

Analog zum Masse-Feder-Dämpfungs-System ist die Dichte der zeitlichen Abtastungen durch die zeitliche Variation der Stellgröße, das Systemübertragungsverhalten, die realisierbare Messfrequenz und die Trennschärfe des Messverfahrens motiviert (s.a. PELZER 1988).

### 5.3.3 Modellierung der Störeinflüsse

Bei den auf das Temperaturmodell (5-21) einwirkenden Störeinflüssen handelt es sich um Abweichungen der Realität gegenüber den in Kapitel 5.2.1 hinsichtlich des Verlaufs des Wärmestroms getroffenen Annahmen. Die Störungen können im Wesentlichen auf die nachfolgenden Effekte konzentriert werden:

- Abweichungen des Wärmestroms im Säulenmantel von der als eindimensional und horizontal angenommenen Ausbreitungsrichtung (s. Abbildung 5-4), d.h. Wärmetransport  $Q_{w, \text{Leitung}}$  im Inneren des Mantels.
- Wärmeaustausch des Mantels mit der Luft als umgebendes Medium, d.h. Wärmetransport  $Q_{w, \text{Konvektion}}$  durch hauptsächlich freie Konvektion.

Aufgrund dieser Einflüsse können für das Temperaturmodell im Mantelsegment keine homogenen Verhältnisse mehr angenommen werden. In nachfolgender Abbildung sind die im Zeitintervall  $dt$  in einem Volumenelement  $dV$  des Mantelsegments zu- und abfließenden Wärmeströme für den Fall obiger Störeinflüsse exemplarisch dargestellt (vgl. Abbildung 5-5).

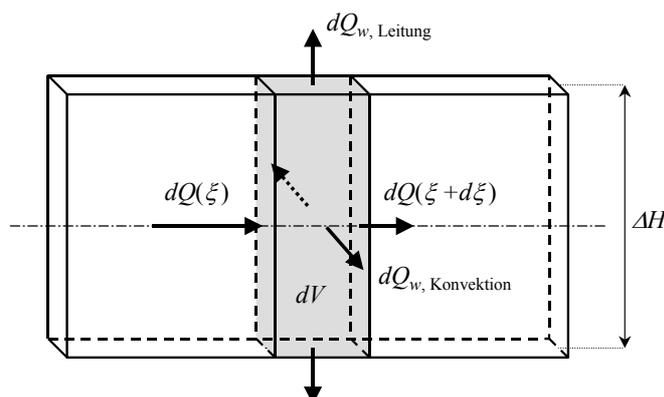


Abbildung 5-11: Gestörter Wärmeeinfluss und Wärmeabfluss in einem Volumenelement  $dV$  des Mantelsegments im Zeitintervall  $dt$

### 5.3.3.1 Modellbildung mittels einer Störquellenfunktion

Bei der Herleitung des Temperaturmodells in Kapitel 5.2.2 ist die Wärmeänderung im Volumenelement durch  $dQ_w = dQ_{w, \text{Leitung}} + dQ_{w, \text{Konvektion}}$  gestört (s. Abbildung 5-11). Der Störeinfluss kann prinzipiell analytisch durch Einführung einer Quellenfunktion  $U_w(\xi, t)$  entlang des Mantelsegments berücksichtigt werden (s.a. FÖLLINGER / FRANKE 1982), wodurch die homogene PDGL 2. Ordnung (5-2) dann entsprechend zu einer inhomogenen Differenzialgleichung zu erweitern ist.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = U_w(\xi, t) \quad (5-22)$$

Die Erweiterung der PDGL mit einer Störquellenfunktion  $U_w$  ist hierbei konform mit der in Kapitel 4.3 durchgeführten Überlagerung der rechten Seite der gewöhnlichen Schwingungsdifferenzialgleichung mit einer Störkraft  $f_w$ . Ein möglicher Ansatz zur Integration in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters ist durch das Verfahren der Ortsdiskretisierung gegeben, wobei die Zustandsraumdarstellung (5-5) durch örtliche Abtastung der Störquellenfunktion  $U_{w,i}(t)$  in ihre gestörte Form zu überführen ist. Die Störeingangsmatrix  $C$  entspricht hierbei gerade der Einheitsmatrix.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T_2(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial T_3(t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n-2}(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial T_{n-1}(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\Delta \xi^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mathbf{0} & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2(t) \\ T_3(t) \\ \vdots \\ T_{n-2}(t) \\ T_{n-1}(t) \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{\Delta \xi^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} T_u(t) + \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{0} & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{w,2}(t) \\ U_{w,3}(t) \\ \vdots \\ U_{w,n-2}(t) \\ U_{w,n-1}(t) \end{pmatrix} \quad (5-23)$$

$$\begin{matrix} \frac{\dot{\mathbf{x}}_{\text{Temp}}}{n-2,1} & \mathbf{F} & \frac{\mathbf{x}_{\text{Temp}}}{n-2,1} & \mathbf{G} & u & \mathbf{C} & \mathbf{w} \\ & n-2, n-2 & n-2,1 & n-2,1 & 1,1 & n-2, n-2 & n-2,1 \end{matrix}$$

Im vorliegenden System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen repräsentieren die Störquellen  $U_{w,i}(t)$  nicht deterministisch beschreibbare Einflüsse auf die Temperaturverteilung im Mantelsegment. Entsprechend der Diskussion in Kapitel 4.3 ist anzumerken, dass hierbei nur die Modellabweichungen eine Berücksichtigung finden, welche mittels obiger Erweiterung abgebildet werden können.

Der Einfluss der Störquellen ist mit (5-23) analytisch streng dargestellt. Es wird gezeigt, dass die Modellbildung der Systemstörungen auf der Ebene der PDGL erfolgen und somit in die Zustandsraumdarstellung integriert werden kann. Die Abschätzung der stochastischen Eigenschaften der Störquellen muss allerdings als aufwändig eingestuft werden. Wie bereits in Kapitel 5.2.1 diskutiert wurde, wird zur Ermittlung des konvektiven Wärmetransports die Kenntnis von strömungsabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten benötigt. Die Abweichung des Wärmestroms im Säulenmantel von der rein horizontalen Ausbreitungsrichtung ist u.a. von der Homogenität des vertikalen thermischen Lastprofils der Säule und der Temperaturverteilung im Säulenmantel abhängig. Diese ist ihrerseits wiederum an den konvektiven Wärmetransport gekoppelt.

Im Folgenden wird daher eine praxisorientierte Alternative vorgeschlagen, welche eine adäquate Abschätzung von stochastischen Störeinflüssen erlaubt und zugleich eine einfache Erweiterung der ungestörten Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters gewährleistet.

### 5.3.3.2 Modellansatz mittels einer Störtemperaturverteilung

Aufgrund der Abweichungen zwischen Temperaturmodell und Realität erfolgt mittels (5-21) eine fehlerhafte Fortschreibung der Temperaturverteilung im Mantelsegment vom Zeitpunkt  $t_k$  nach  $t_{k+1}$ . Dieser Fortschreibungsfehler entspricht gerade der Auswirkung von nicht modellierten Einflussgrößen und wird im Folgenden als „Störtemperaturverteilung“  $T_w(\xi, t_k)$  bezeichnet. Auf dem Mantelsegment werden  $q \leq n$  Störtemperaturen  $T_{w,j}(t_k)$  mit  $E\{T_{w,j}(t_k)\} = 0$  definiert, die auf die Fortschreibung des Zustandsvektors einwirken.

$$\begin{pmatrix} T_1(t_{k+1}) \\ \vdots \\ T_n(t_{k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(t_k) \\ \vdots \\ T_n(t_k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} T_u(t_k) + \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{w,1}(t_k) \\ \vdots \\ T_{w,q}(t_k) \end{pmatrix} \quad (5-24)$$

$$\underbrace{\mathbf{x}_{\text{Temp}}(t_{k+1})}_{n,1} \quad \underbrace{\mathbf{T}(t_{k+1}, t_k)}_{n,n} \quad \underbrace{\mathbf{x}_{\text{Temp}}(t_k)}_{n,1} \quad \underbrace{\mathbf{B}(t_{k+1}, t_k)}_{n,1} \quad \underbrace{u(t_k)}_{1,1} \quad \underbrace{\mathbf{S}(t_{k+1}, t_k)}_{n,q} \quad \underbrace{\mathbf{w}(t_k)}_{q,1}$$

Mit (5-24) sind die gestörten Systemgleichungen des Temperaturmodells im diskreten KALMAN-Filter mit der Störmatrix  $\mathbf{S}$  gegeben. Im Sinne des Elementarfehlermodells (u.a. PELZER 1985a) wirkt die Störmatrix hierbei als Einflussmatrix mit  $s_{ij} \neq 0$  wenn  $T_{w,j}$  den Zustandsparameter  $T_i$  stört. Der wesentliche Vorteil dieses Modellansatzes liegt in der Möglichkeit einer empirischen Bestimmung der Störtemperaturen (und der Besetzung der Störmatrix) begründet. Bei zumindest näherungsweise bekannter Temperaturleitfähigkeit  $\alpha$  kann im Vorfeld der Parameteridentifikation eine Trainingsphase erfolgen, in der Modellprädiktionen und Temperaturmessungen auf dem Mantel verglichen werden. Mittels der Innovationen ist dann die Ermittlung der Größenordnung der Störtemperaturen und somit eine adäquate Abschätzung von deren Einflussverhalten und des Varianzniveaus möglich. Die empirische Bestimmung des stochastischen Modells der Störgrößen  $\mathbf{w}$  erfolgt in Kapitel 5.5.1.2.

## 5.4 Aufbau des adaptiven KALMAN-Filters zur parametrischen Identifikation des Temperaturmodells

### 5.4.1 Adaptive Erweiterung der Systemgleichungen des Filters

Die Aufgabe der parametrischen Identifikation des dynamischen Temperaturmodells konzentriert sich auf die Bestimmung des in (5-21) enthaltenen physikalischen Parameters, d.h. der Temperaturleitfähigkeit  $\alpha$ . Der bisherige Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{\text{Temp}}$  beinhaltet die Temperaturen in den Stützstellen des Mantelsegments und ist mit der physikalischen Partition  $x_p$  zu erweitern.

$$\mathbf{x}^T(t_k) = \left( \mathbf{x}_{\text{Temp}}^T(t_k) \mid x_p(t_k) \right) = \left( T_1(t_k) \cdots T_n(t_k) \mid \alpha(t_k) \right) \quad (5-25)$$

Die physikalische Partition wird mittels  $w_p$  gestört und ihre Fortschreibung als „random walk“ Prozess formuliert.

$$x_p(t_{k+1}) = x_p(t_k) + w_p(t_k) \Rightarrow \alpha(t_{k+1}) = \alpha(t_k) + \alpha_w(t_k) \quad (5-26)$$

Für die adaptiv erweiterten, gestörten Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters ergibt sich die nachfolgende Darstellung.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k+1}}{n,1} &= \frac{\mathbf{T}_{k+1,k}(\tilde{\mathbf{x}}_{p,k} + w_{p,k})}{n,n} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k}}{n,1} + \frac{\mathbf{B}_{k+1,k}(\tilde{\mathbf{x}}_{p,k} + w_{p,k})}{n,1} \frac{\tilde{u}_k}{1,1} + \frac{\mathbf{S}_{k+1,k}}{n,q} \frac{\mathbf{w}_k}{q,1} \\ \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{p,k+1}}{1,1} &= \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{p,k}}{1,1} + \frac{w_{p,k}}{1,1} \end{aligned} \quad (5-27)$$

Die Prädiktion der Zustandsparameter zur Epoche  $t_{k+1}$  erfolgt mittels der ungestörten Systemgleichungen des Filters unter Nutzung der Schätzwerte für die Temperaturen  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k}$  in den Abtaststellen des Mantelsegments, der geschätzten Temperaturleitfähigkeit  $\hat{x}_{p,k}$  und der gemessenen Randtemperatur  $u_k$ . Es ergibt sich daher folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k+1}}{n,1} &= \frac{\mathbf{T}_{k+1,k}(\hat{x}_{p,k})}{n,n} \frac{\hat{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k}}{2,1} + \frac{\mathbf{B}_{k+1,k}(\hat{x}_{p,k})}{n,1} \frac{u_k}{1,1} \\ \frac{\bar{\mathbf{x}}_{p,k+1}}{1,1} &= \frac{\hat{x}_{p,k}}{1,1} \end{aligned} \quad (5-28)$$

Die Bestimmung der Kovarianzmatrix  $\Sigma_{\bar{\mathbf{x}},k+1}$  der Prädiktion  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$  des KALMAN-Filters erfordert die Linearisierung der erweiterten Systemgleichungen (5-27). Hierzu ist zunächst die Fortschreibung der Partitionen  $\mathbf{x}_{\text{Temp}}$  und  $x_p$  des Zustandsvektors mittels der vektorwertigen Funktion  $\Psi_{\text{Temp}}$  bzw. skalarwertigen Funktion  $\Psi_p$  zu substituieren.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k+1}}{n,1} &= \frac{\Psi_{\text{Temp}}}{n,1}(\tilde{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k}, \tilde{\mathbf{x}}_{p,k}, \tilde{u}_k, \mathbf{w}_k, w_{p,k}) \\ \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{p,k+1}}{1,1} &= \frac{\Psi_p}{1,1}(\tilde{\mathbf{x}}_{p,k}, w_{p,k}) \end{aligned} \quad (5-29)$$

Da nur  $\tilde{x}_{p,k}$  bzw.  $w_{p,k}$  in  $\Psi_{\text{Temp}}$  nichtlinear enthalten sind, reduziert sich die Linearisierung der Systemgleichungen entsprechend Kapitel 4.4.1 zu:

$$\mathbf{T}_{p,k+1,k} = \left. \frac{\partial \Psi_{\text{Temp}}}{\partial x_{p,k}} \right|_0 = \left. \frac{\partial \Psi_{\text{Temp}}}{\partial \alpha_k} \right|_0 \stackrel{!}{=} \left. \frac{\partial \Psi_{\text{Temp}}}{\partial w_{p,k}} \right|_0 \quad (5-30)$$

Die Ableitungen sind an der Stelle  $\mathbf{x}_k^0 = \hat{\mathbf{x}}_k$ ,  $u_k^0 = u_k$ ,  $\mathbf{w}_k^0 = \mathbf{o}$  und  $w_{p,k}^0 = 0$  zu bilden und werden im Anhang B.3 explizit angegeben. Für die (negativen) Prädiktionsfehler folgt mit (5-27) bis (5-30):

$$\begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k+1} - \bar{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k+1}}{n,1} \\ \frac{\tilde{x}_{p,k+1} - \bar{x}_{p,k+1}}{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{T}_{k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{p,k})}{n,n} & \frac{\mathbf{T}_{p,k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k}, \hat{\mathbf{x}}_{p,k}, u_k)}{n,1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k}}{n,1} \\ \frac{\tilde{x}_{p,k} - \hat{x}_{p,k}}{1,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{B}_{k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{p,k})}{n,1} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \frac{(\tilde{u}_k - u_k)}{1,1} + \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{S}_{k+1,k}}{n,q} & \frac{\mathbf{T}_{p,k+1,k}(\hat{\mathbf{x}}_{\text{Temp},k}, \hat{\mathbf{x}}_{p,k}, u_k)}{n,1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{w}_k}{q,1} \\ \frac{w_{p,k}}{1,1} \end{pmatrix} \quad (5-31)$$

Mit (5-28) und (5-31) sind die zur Berechnung der Prädiktion und deren Kovarianzmatrix benötigten, adaptiv erweiterten Systemgleichungen des KALMAN-Filters für das Temperaturmodell festgelegt.

### 5.4.2 Formulierung der Messgleichungen

Die Identifikation der Temperaturleitfähigkeit  $\tilde{\alpha}$  erfolgt mittels Temperaturmessungen auf der Oberfläche des Mantel-segments. Aufgrund der dünnen Wandstärke können in diesen Messstellen die Temperaturen im Inneren des Segments als repräsentativ erfasst angenommen werden. Die Messung der Randtemperatur, d.h. der Stellgröße, ist hierbei in  $\xi = 0$  (bzw.  $\xi = L$ ) durchzuführen. Des Weiteren werden entlang des Segments  $m$  Temperatursensoren in Abtaststellen  $\xi_i$  der Temperaturverteilung platziert, welche einen direkten Vergleich der Prädiktionen mit den Temperaturmessungen ermöglichen (s.a. Abbildung 5-12). Anzahl und Verteilung der Sensoren werden in Kapitel 5.5.1.1 im Rahmen der Analyse der Korrelationen diskutiert.

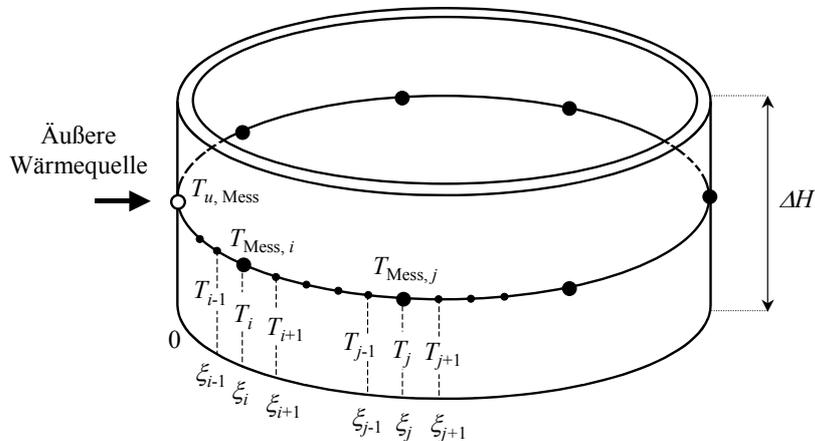


Abbildung 5-12: Platzierung der Temperatursensoren

Aufgrund der direkten Beobachtung von Elementen der Partition  $\mathbf{x}_{\text{Temp}}$  des Zustandsvektors folgt für die Messgleichungen des KALMAN-Filters zur Epoche  $t_{k+1}$ :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ T_{\text{Mess},i} \\ T_{\text{Mess},j} \\ \vdots \end{pmatrix}_{k+1} - \begin{pmatrix} \vdots \\ \varepsilon_{T,i} \\ \varepsilon_{T,j} \\ \vdots \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} & & i & & j & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & & & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{T}_1 \\ \vdots \\ \tilde{T}_i \\ \vdots \\ \tilde{T}_j \\ \vdots \\ \tilde{T}_n \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix}_{k+1} \quad (5-32)$$

$$\begin{matrix} \mathbf{L}_{k+1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{L,k+1} & \mathbf{A} & \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \frac{m,1}{m,1} & \frac{m,1}{m,1} & \frac{m,n+1}{m,1} & \frac{n+1,1}{n+1,1} \end{matrix}$$

In obigem Gleichungssystem sind  $n-m$  Temperaturzustandsparameter und der physikalische Parameter mit keiner Beobachtung verknüpft. Auf Ebene der Messgleichungen des KALMAN-Filters liegt bzgl. dieser Größen somit ein Konfigurationsdefekt vor. Entsprechend der nicht beobachtbaren Zustandsparameter des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems, wird ihre Schätzung durch algebraische Korrelationen innerhalb der Systemgleichungen ermöglicht. Die Diskussion der Ermittelbarkeit der Zustandsparameter erfolgt ebenfalls anhand der Analyse der Korrelationen.

### 5.4.3 Erstellung des stochastischen Modells des Filters

Das Verhalten der zufälligen Abweichungen  $\varepsilon_{u,k}$ ,  $\varepsilon_{w,k}$ ,  $\varepsilon_{w_p,k}$  und  $\varepsilon_{L,k+1}$  der in den Fehlergleichungen der Prädiktion (5-31) und den Messgleichungen (5-32) enthaltenen Stell- und Stör- und Messgrößen  $u_k$ ,  $w_k$ ,  $w_{p,k}$  und  $L_{k+1}$  wird wieder mittels zeitlich unkorrelierter Rauschprozesse beschrieben. Es wird ebenfalls die Abwesenheit von Kreuzkorrelationen zwischen den Prozessen angenommen. Mit den getroffenen Voraussetzungen ist zu einer Filterepoche  $t_{k+1}$  wieder die Unkorreliertheit von Prädiktionen  $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$  und Messungen  $\mathbf{L}_{k+1}$  als eine wesentliche Bedingung für die Zulässigkeit des KALMAN-Filter Algorithmus gewährleistet. Das stochastische Modell des KALMAN-Filters zur Epoche  $t_{k+1}$  ergibt sich als Hyperkovarianzmatrix zu:

$$\frac{\boldsymbol{\Sigma}_{L^*L^*,k+1}}{n+m+q+3, n+m+q+3} = \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x},k}}{n+1, n+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{uu,k}}{1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{w^*w^*,k}}{q+1, q+1} & \mathbf{0} \\ \hline & & & \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{LL,k+1}}{m,m} \end{array} \right) \quad \text{mit} \quad \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{w^*w^*,k}}{q+1, q+1} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{ww,k}}{q,q} & \mathbf{0} \\ & \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{w_p w_p,k}}{1,1} \end{pmatrix} \quad (5-33)$$

Die quantitative Besetzung der in (5-33) enthaltenen Submatrizen erfolgt in den nachfolgenden Kapiteln im Rahmen des durchgeführten Experiments.

## 5.5 Parametrische Identifikation des Temperaturmodells der Aluminiumsäule

In den vorangegangenen Kapiteln wurde auf der Grundlage einer theoretischen Systemanalyse das dynamische Temperaturmodell für eine Säule aus Aluminium mit dünner Wandstärke unter Aufteilung der Säule in ringförmige Mantelsegmente erstellt. Des Weiteren wurde ein Verfahren für die Identifikation des Modells im adaptiv erweiterten KALMAN-Filter erarbeitet. Als wesentlicher Bestandteil der experimentellen Systemanalyse wird im Folgenden der Nachweis für die Gültigkeit von quantifizierter Modellhypothese und Identifikationsmethode erbracht. Hierfür liegt der in Abbildung 5-13 dargestellte experimentelle Aufbau vor, welcher vereinfacht aus Säule, Wärmequelle, Temperatursensoren und Messwerterfassungssystem besteht.

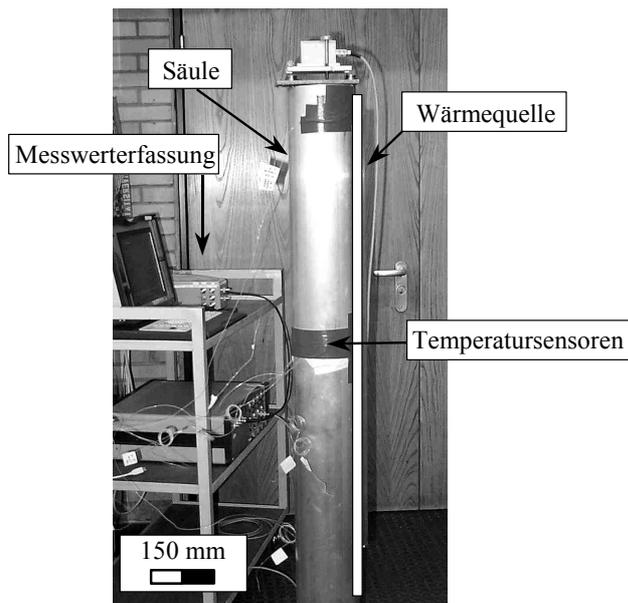


Abbildung 5-13: Grundaufbau zur experimentellen Systemanalyse der Säule

Für die parametrische Identifikation des Temperaturmodells der Säule ist die Schaffung eines kontrollierten experimentellen Umfelds anzustreben, innerhalb dessen die Beeinflussung des Schätzwertes der Temperaturleitfähigkeit durch Störgrößen möglichst gering zu halten und eine geeignete Erregung des Systems (vgl. Kapitel 4.5.3) zu realisieren ist. Hierdurch soll bereits à priori der Möglichkeit einer Divergenz des Filterverlaufs bzw. einer nur im aktuellen experimentellen Design gültigen Konvergenz mit  $E\{\hat{\alpha} - \alpha\} \neq 0$  entgegengewirkt werden. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Schätzung der Temperaturleitfähigkeit und Identifikation des Temperaturmodells nicht an der Säule selbst, sondern anhand eines experimentell gut beherrschbaren Ausschnittes, d.h. eines einzelnen ringförmigen Mantelsegments, durchgeführt (s. Abbildung 5-14).

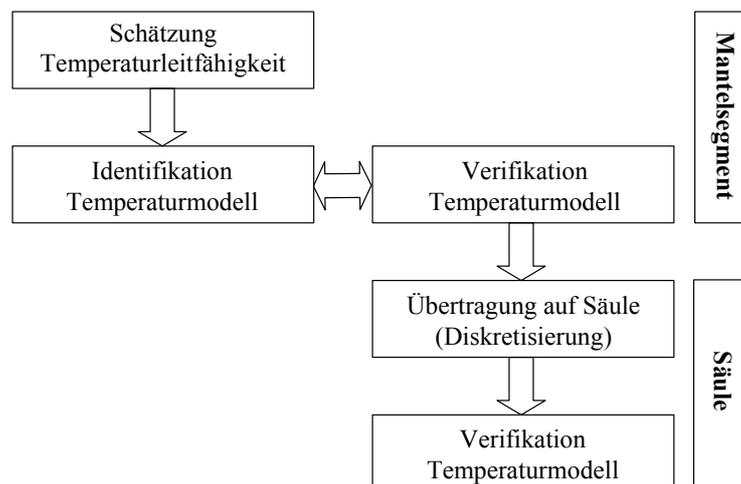


Abbildung 5-14: Ablauf von Identifikation und Verifikation

Die Identifikation und Verifikation im Mantelsegment liefert dann die Voraussetzung für eine Übertragung des kalibrierten Modells auf die gesamte Säule, wobei diese mittels geeigneter Diskretisierung in thermisch repräsentative Einzelsegmente aufgeteilt wird. Aufgrund des geänderten experimentellen Umfelds muss nochmals die Verifikation des kalibrierten Modells erfolgen, wodurch dann die Gültigkeit des Temperaturmodells (im betrachteten Temperaturbereich) für die Säule nachgewiesen ist.

### 5.5.1 Identifikation des Modells im einzelnen Mantelsegment

Die parametrische Identifikation des Temperaturmodells erfolgt anhand eines Ausschnitts der Säule, welcher der Definition des einzelnen ringförmigen Mantelsegments genügt. Wie in Abbildung 5-15 zu erkennen ist, wird das Mantelsegment im Experiment gegenüber der Umgebung isoliert, wobei der äußere Isolationsring im Bild entfernt wurde. Die Maßnahme der Isolierung dient der Reduzierung von konvektiven Störeffekten, mit dem Ziel einer verbesserten Annäherung des Schätzergebnisses  $\hat{\alpha}_{k+1}$  an  $\tilde{\alpha}$ .

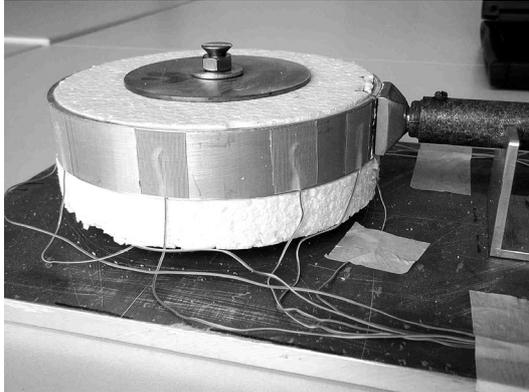


Abbildung 5-15: Versuchsaufbau mit einem einzelnen ringförmigen Mantelsegment der Säule

#### 5.5.1.1 Simulation zur Ermittlung von geeigneten experimentellen Rahmenbedingungen

Zur Bestimmung von geeigneten experimentellen Rahmenbedingungen für die Identifikation des Temperaturmodells erfolgt zunächst die Durchführung des Versuchs in der Simulation. Wesentliche Ziele sind hierbei die Festlegung der Temperaturmessstellen und Erkenntnisse hinsichtlich eines für die Parameteridentifikation geeigneten zeitlichen Verhaltens der Stellgröße, d.h. der von außen eingeprägten Randtemperatur  $T_u$ . Die Temperaturverteilung im Mantelsegment (Länge  $L = 470$  mm) zum Initialisierungszeitpunkt  $t_0 = 0$  s des KALMAN-Filters soll hierbei normaler Raumtemperatur (293 K) entsprechen.

Für den zeitlichen Verlauf der von außen eingeprägten Randtemperatur werden zwei Ansätze verwendet, welche in Abbildung 5-16 dargestellt sind.

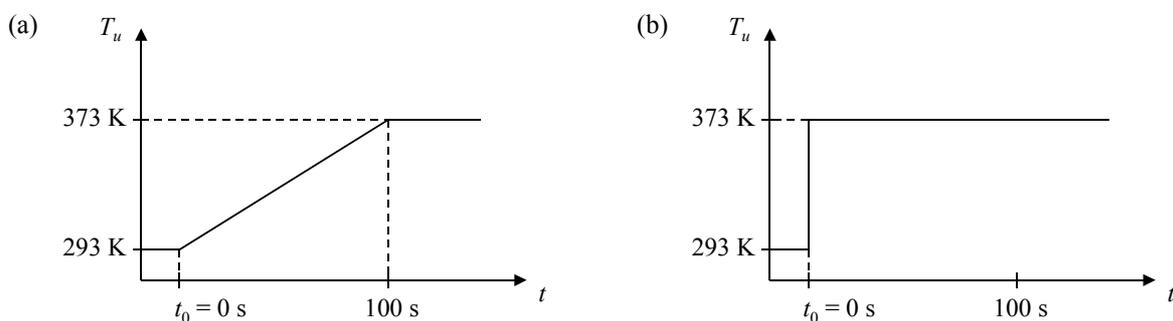


Abbildung 5-16: Vorgabe des Verlaufs der Stellgröße  $\tilde{T}_u$  ab der Filterinitialisierung  $t_0$ : (a) lineare und (b) sprunghafte Änderung

Der Fall a beinhaltet eine allmähliche Erwärmung. Ausgehend von Raumtemperatur ändert sich  $T_u$  linear mit einem Anstieg von  $0,8$  K/s. Sie erreicht nach  $100$  s einen Wert von  $373$  K ( $\approx 100^\circ\text{C}$ ). Im Fall b wird das Temperaturniveau von  $373$  K verzögerungsfrei erreicht, d.h. es liegt eine sprunghafte Änderung der Stellgröße vor.

Zur Definition eines realistischen Niveaus der zu identifizierenden Temperaturleitfähigkeit  $\tilde{\alpha}$  der Aluminiumlegierung des Mantelsegments, werden in der Simulation die aus der Literatur für reines Aluminium erhaltenen Werte für Temperaturleitfähigkeit  $\tilde{\lambda}_{\text{Alu}}$ , Dichte  $\tilde{\rho}_{\text{Alu}}$  und spezifische Wärmekapazität  $\tilde{c}_{\text{Alu}}$  verwendet (u.a. KUHLING 1986).

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{\text{Alu}} &= 0,220 \frac{\text{W}}{\text{mm K}} ; \tilde{\rho}_{\text{Alu}} = 2,702 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} ; \tilde{c}_{\text{Alu}} = 896 \frac{\text{Ws}}{\text{kg K}} \\ \Rightarrow \tilde{\alpha}_{\text{Alu}} &= \frac{\tilde{\lambda}_{\text{Alu}}}{\tilde{\rho}_{\text{Alu}} \tilde{c}_{\text{Alu}}} = 90,872 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \end{aligned} \quad (5-34)$$

Es handelt sich hierbei um Angaben bei einer Temperatur von 293 K. Die mit den Stellgrößen der Fälle a und b und der Temperaturleitfähigkeit (5-34) simulierten zeitlichen Verläufe der Temperaturverteilungen im Mantelsegment sind in Abbildung 5-17 für einen Berechnungszeitraum von 150 s dargestellt.

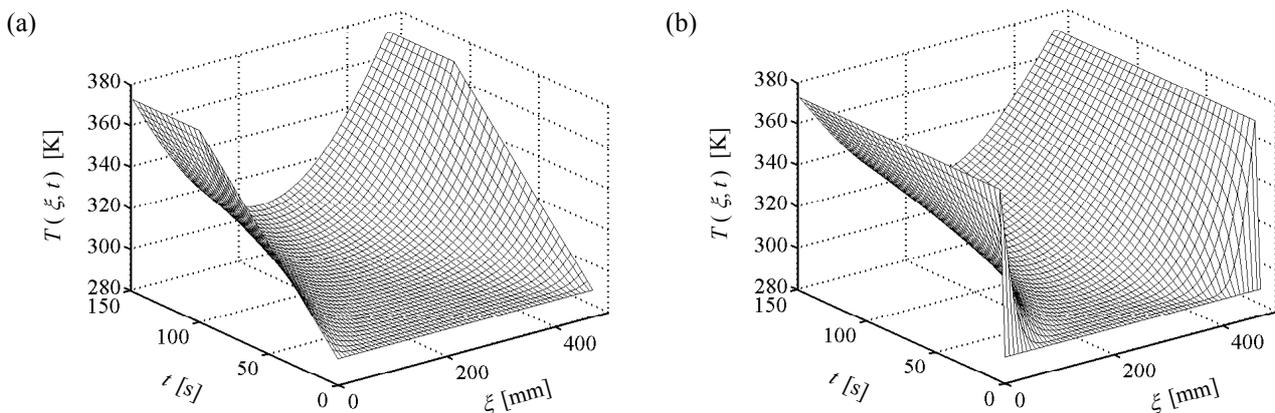


Abbildung 5-17: Simulation  $\tilde{T}(\xi, t)$  des zeitlichen Verlaufs der Temperaturverteilung im Mantelsegment: (a) lineare und (b) sprunghafte Änderung der Randtemperatur  $\tilde{T}_u(t)$

Die Erzeugung von simulierten Messungen erfolgt durch Abtastung der Temperaturverteilungen in Ort und Zeit. Die Temperaturwerte jeder der  $m$  Messstellen werden anschließend mit weißen Rauschprozessen überlagert (vgl. Kapitel 4.5.1). Dies gilt auch für die zeitliche Abtastung der Randtemperaturen.

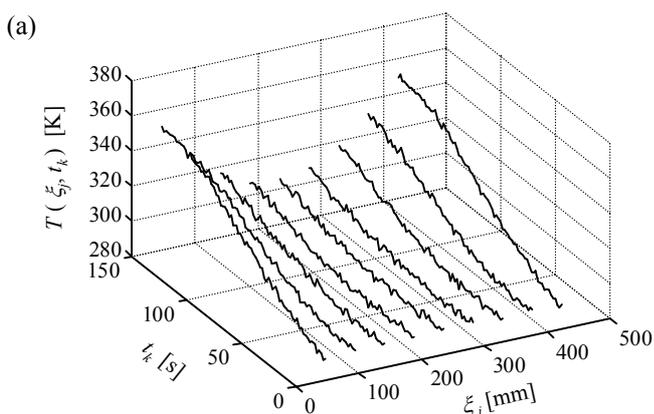


Abbildung 5-18: Fall a: simulierte Temperaturmessungen  $T_{\text{Mess},j}(t_{k+1})$

Die simulierten Messungen sind in Abbildung 5-18 exemplarisch für den Fall a dargestellt. Entlang des Mantelsegments werden  $m = 9$  Temperaturmessstellen  $\xi_{\text{Mess},j}$  in zunächst äquidistantem Abstand von  $\Delta\xi = 47$  mm ( $\xi_{\text{Mess},1} = 47$ ,  $\xi_{\text{Mess},2} = 94$ , ...,  $\xi_{\text{Mess},9} = 423$  mm) zur Messung  $T_{\text{Mess},j}(t_{k+1})$  der Temperaturverteilung und eine Messstelle ( $\xi_{\text{Mess},0} = 0 = 470$  mm) zur Messung  $T_{u,\text{Mess}}(t_k)$  der Randtemperatur angenommen. Die zeitliche Abtastung erfolgt mit  $\Delta t = 2$  s. Entsprechendes gilt für den Fall b.

Bei der Erzeugung der Rauschprozesse wird in der Simulation von einer theoretischen Standardabweichung der im Experiment zu verwendenden Temperatursensoren ausgegangen. Bei den Sensoren handelt es sich um auf die Manteloberfläche der Säule aufzuklebende NickelChrom-Nickel Thermoelemente der DIN Klasse 1, deren absolute Mess-toleranz im verwendeten Temperaturbereich mit  $\pm 1,5$  K spezifiziert wird (nach DIN IEC 584-1). Da die zeitliche Änderung der Temperaturdifferenzen im Mantelsegment (und nicht das absolute Temperaturniveau) wesentlicher Informationsträger hinsichtlich der zu identifizierenden Temperaturleitfähigkeit ist, muss bei der Festlegung des stochastischen Niveaus die höhere relative Messgenauigkeit der Sensoren durch eine optimistischere Bewertung berücksichtigt werden. Für die Standardabweichung der Temperaturmessungen wird  $\sigma_{T_{\text{Mess},j}(t_k)} = \sigma_{T_{u,\text{Mess}}(t_k)} = 0,4$  K eingeführt, womit eine adäquate Abschätzung gegeben ist.

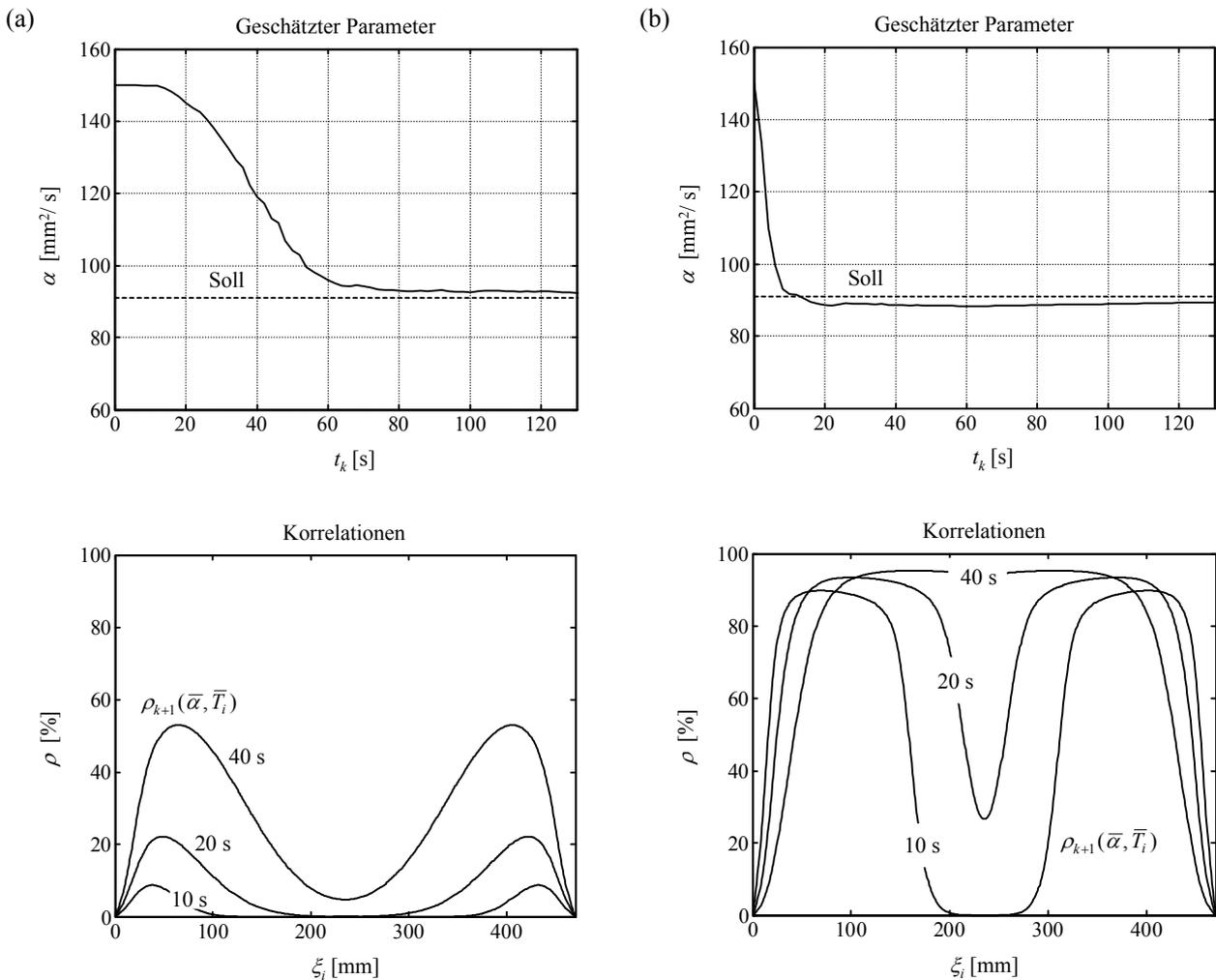


Abbildung 5-19: Simulation der parametrischen Identifikation des Temperaturmodells im Mantelsegment: (a) lineare und (b) sprunghafte Änderung der Randtemperatur

Die parametrische Identifikation des Temperaturmodells erfolgt mittels der in Kapitel 4.5.2 anhand des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems erarbeiteten Filterstrategie. Zur Besetzung des stochastischen Modells (5-33) wird das stochastische Niveau der simulierten Temperaturmessungen  $T_{\text{Mess},j}(t_{k+1})$  und  $T_{u,\text{Mess}}(t_{k+1})$  entsprechend der oben eingeführten Rauschprozesse festgelegt. Die Einführung von Störtemperaturen  $T_{w,j}(t_k)$  ist in der Simulation nur durch die im Abtastintervall  $\Delta t$  nicht konstante Randtemperatur (Fall a) und die örtliche Diskretisierung des Mantelsegments (Fälle a und b) motiviert. Bei einer im Filter verwendeten örtlichen Abtastung von  $\Delta \xi = 1$  mm kann letzterer Einfluss vernachlässigt werden (s.a. Abbildung 5-10). Die Störung der präzidierten Temperaturverteilung aufgrund der zeitlichen Variation der Randtemperatur nimmt mit zunehmender Entfernung vom Rand ( $\xi = 0 = 470$  mm) des Mantelsegments ab. Entsprechend Kapitel 4.5.2 kann ihr Einfluss durch die Besetzung von  $\mathbf{S}_{k+1,k} = \mathbf{B}_{k+1,k}$  oder durch die unmittelbare Erhöhung des stochastischen Niveaus der Randtemperatur berücksichtigt werden. Die Abschätzung des Störniveaus erfolgt mittels (4-27), d.h. unter Verwendung der zeitlichen Änderung der Stellgröße in  $\Delta t$ , und wird mit  $\sigma_{T_w}(t_k) = 0,2$  K festgelegt.

In der Identifikationsphase des KALMAN-Filters kann die Standardabweichung  $\sigma_{\alpha_w, k}$  der im „random walk“ Prozess (5-26) enthaltenen Störgröße unter Verwendung von (4-28) bestimmt werden. Entsprechend der Identifikation des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems erzeugt eine Festlegung mit etwa  $p = 5\%$  der erwarteten Abweichung  $|\hat{\alpha}_{k=0} - \bar{\alpha}|$  in beiden Fällen einen stabilen und konvergenten Filterverlauf (s. Abbildung 5-19).

Die Detektierung der Länge der Identifikationsphase erfolgt wieder mittels der statistischen Bewertung der Innovationen  $\mathbf{d}_{k+1}$ , welche aus den Differenzen der 9 gemessenen und den an den Messstellen prädierten Temperaturen im Mantelsegment berechnet werden. In Erweiterung von (4-29) ist aus ihnen dann die Testgröße  $\vartheta_{d, k+1}^2$  zu bilden.

$$\frac{\mathbf{d}_{k+1}}{9,1} = \frac{\mathbf{L}_{k+1}}{9,1} - \mathbf{A} \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{9,1} \Rightarrow \vartheta_{d, k+1}^2 = \frac{\mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{d}_{k+1}}{\sigma_0^2} \sim \chi_9^2 \Big|_{H_0} \quad (5-35)$$

Der Innovationstest wird mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 99,5\%$  durchgeführt (s.a. Kapitel 4.5.2). Im oberen Teil von Abbildung 5-19 sind die Ergebnisse der parametrischen Identifikation für den Fall a (linearer Anstieg der Randtemperatur) und den Fall b (sprunghafte Änderung der Randtemperatur) dargestellt. Die Filterinitialisierung erfolgt in beiden Fällen mit  $\hat{\alpha}_{k=0} = 150 \text{ mm}^2/\text{s}$ , womit eine Anfangsabweichung von ca. 70% gegenüber  $\bar{\alpha}_{\text{Alu}}$  vorliegt.

Der Fortschritt des Filters entspricht mit  $\Delta t = 2\text{s}$  der Abtastung der Messungen. Es ist zu erkennen, dass im Fall der sprunghaften Änderung der Randtemperatur der Schätzwert  $\hat{\alpha}_{k+1}$  der Temperaturleitfähigkeit wesentlich schneller gegen ein stabiles Niveau – d.h. keine weitere signifikante Änderung des Schätzwertes (s.a. Kapitel 4.5.3) – konvergiert. Er weist nach ca. 30 s (= 15 Filterepochen) eine Restabweichung von  $-1,4\%$  des Sollwertes auf. Im Fall des linearen Anstiegs der Randtemperatur wird dagegen erst nach 90 s (= 45 Filterepochen) ein stabiles Niveau mit einer Restabweichung von  $+1,8\%$  erreicht. Die in der identifizierten Temperaturleitfähigkeit enthaltene Abweichung von  $-1,4\%$  erzeugt gegenüber dem Referenztemperaturfeld  $\tilde{T}(\xi, t)$  des Falls b einen maximalen Fehler  $(T_{\text{Ist}} - T_{\text{Soll}})_{\text{max}} \approx -0,6 \text{ K}$  (in der Mitte des Mantelsegments bei  $t_k = 250 \text{ s}$ ), welcher in der Größenordnung der eingeführten Rauschprozesse liegt.

Entsprechend dem Masse-Feder-Dämpfungs-System ist die auf Ebene der Messgleichungen konfigurationsdefekte physikalische Partition  $x_p$  des KALMAN-Filters nur aufgrund der algebraischen Korrelationen mit den Temperaturzustandsparametern  $\mathbf{x}_{\text{Temp}}$  ermittelbar, welche durch die in (5-30) gebildete JACOBI-Matrix  $\mathbf{T}_{p, k+1, k}$  erzeugt werden. Die Abhängigkeit der Korrelationen vom Verlauf der Randtemperatur ist dabei mit (B-12) gegeben. Die Ursache für das trägere Verhalten des Schätzwertes bei linearem Anstieg der Randtemperatur ist somit unmittelbar aus dem zeitlichen Verlauf der Korrelationen  $\rho_{k+1}(\bar{\alpha}, \bar{T}_i)$  zwischen prädierten Temperaturen und prädiertem Temperaturleitfähigkeit ersichtlich (unterer Teil von Abbildung 5-19). Bei sprunghafter Änderung der Randtemperatur erreichen die Korrelationsmaxima verzögerungsfrei ein Niveau zwischen 80 und 90%, während sich das Korrelationsniveau bei linearem Anstieg erst mit zunehmender Differenz zwischen Randtemperatur und Temperatur im Mantelsegment erhöht. Es ist hierbei zu bemerken, dass in letzterem Fall der Verlauf der Korrelationen durch die Erhöhung des Varianzniveaus der Störtemperaturen (aufgrund der im Abtastintervall nicht konstanten Randtemperatur) zusätzlich gedämpft wird. Bei sprunghafter Änderung der Randtemperatur liegt somit eine bessere Ermittelbarkeit für die Temperaturleitfähigkeit vor, wie im Fall des linearen Anstiegs. Dies ist sofort einzusehen wenn man bedenkt, dass sich eine Abweichung in der Temperaturleitfähigkeit nach dem Sprungereignis unmittelbar auf die Prädiktionen der Temperaturverteilung auswirkt, während bei der allmählichen Erhöhung der Randtemperatur das System nur schwach angeregt ist. Der Vorteil einer sprunghaften Erregung für die parametrische Identifikation verhält sich hierbei konform zu den in Kapitel 4.5.3 bei der Untersuchung des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems erhaltenen Ergebnissen.

Aufgrund der selektiven Wirkung der in (5-32) dargestellten Designmatrix  $\mathbf{A}$  erfolgt die Besetzung der für die Schätzung der Temperaturleitfähigkeit relevanten Zeile der KALMAN-Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}_{k+1}$  gerade unter Verwendung der Kofaktoren  $q_{\bar{\alpha}, \bar{T}_j, k+1}$  ( $j = 1 \dots m$ ) der  $m = 9$  direkt beobachteten Temperaturzustandsparameter.

$$\frac{\mathbf{K}_{k+1}}{n+1, m} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{x}_{\text{Temp}}} \\ n, m \\ \mathbf{K}_{\mathbf{x}_p} \\ 1, m \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m d_{j,1}^* q_{\bar{\alpha}, \bar{T}_j} & \sum_{j=1}^m d_{j,2}^* q_{\bar{\alpha}, \bar{T}_j} & \dots & \sum_{j=1}^m d_{j,m}^* q_{\bar{\alpha}, \bar{T}_j} \end{pmatrix}_{k+1} \quad (5-36)$$

Hierbei sind die Gewichtungsfaktoren  $d_{j,r}^*$  die Elemente der inversen Kofaktorenmatrix  $\mathbf{D}_{k+1}$  der Innovationen. Aus obiger Gleichung und Abbildung 5-19 ist unmittelbar ersichtlich, dass die Ermittlung der Temperaturleitfähigkeit durch die Platzierung der Messstellen in den Bereichen der örtlichen Korrelationsmaxima optimiert werden kann. Im Fall der sprunghaften Änderung der Randtemperatur umfassen die Abschnitte mit maximalen Korrelationen (im für die Identifikation relevanten Zeitbereich bis 30 s nach der Filterinitialisierung) einen Bereich von  $\xi = 40$  bis 180 mm bzw. – aufgrund des symmetrischen Verhaltens des Temperaturmodells – von  $\xi = 290$  bis 430 mm (s. Abbildung 5-19-b).

Unter Berücksichtigung der Analyse der Korrelationen wird die Identifikation für den Fall b erneut durchgeführt. Hierbei sind die Messstellen in den Bereichen maximaler Korrelationen platziert.

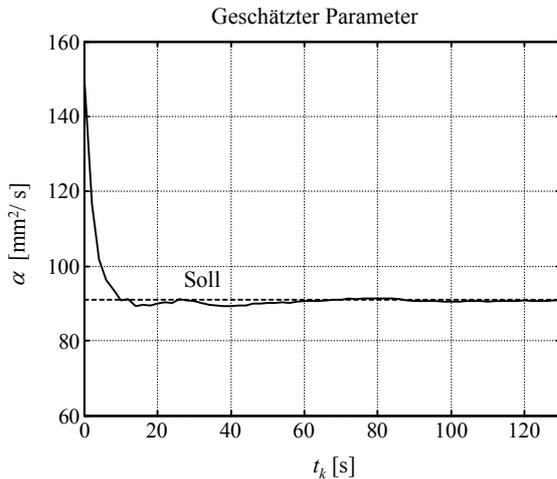


Abbildung 5-20: Optimierte Identifikation der Temperaturleitfähigkeit

Im Vergleich zum in Abbildung 5-19-b dargestellten Identifikationsergebnis verbessert sich die Schätzung auf eine Restabweichung von ca.  $-0,4\%$  des Sollwertes und erzeugt gegenüber dem Referenztemperaturfeld des Falls b einen reduzierten maximalen Fehler von nur noch  $(T_{\text{Ist}} - T_{\text{Soll}})_{\text{max}} \approx -0,15$  K. Hierdurch wird die optimierte Wahl der Messstellen unmittelbar bestätigt.

### 5.5.1.2 Identifikation und Verifikation des Modells

Die Identifikation der Temperaturleitfähigkeit  $\tilde{\alpha}$  im ringförmigen Mantelsegment der Säule erfolgt mittels der im vorherigen Kapitel ermittelten experimentellen Rahmenbedingungen und Filterstrategie. Das Mantelsegment (bzw. die Säule) besteht aus der Aluminiumlegierung AlMgSi0,5 (nach DIN 1725-1). Das Segment hat einen Umfang von  $L = 470$  mm (bezogen auf die Mantelmitte) und eine Höhe  $\Delta H = 30$  mm. Entsprechend der Säule beträgt die Wandstärke 2,5 mm. Auf der Außenseite des Mantels werden  $m = 9$  Temperaturmessstellen  $\xi_{\text{Mess},j}$  zur Messung  $T_{\text{Mess},j}$  der Temperaturverteilung festgelegt (s. Abbildung 5-21). Die Temperaturmessstelle in  $\xi_{\text{Mess},0} = 0 = L$  dient der Messung  $T_{u,\text{Mess}}$  der von der äußeren Wärmequelle erzeugten Randtemperatur. Um eine direkte Beeinflussung von  $T_{u,\text{Mess}}$  durch die Wärmequelle zu verhindern, wird der Temperatursensor an der Innenseite des Mantels adaptiert.

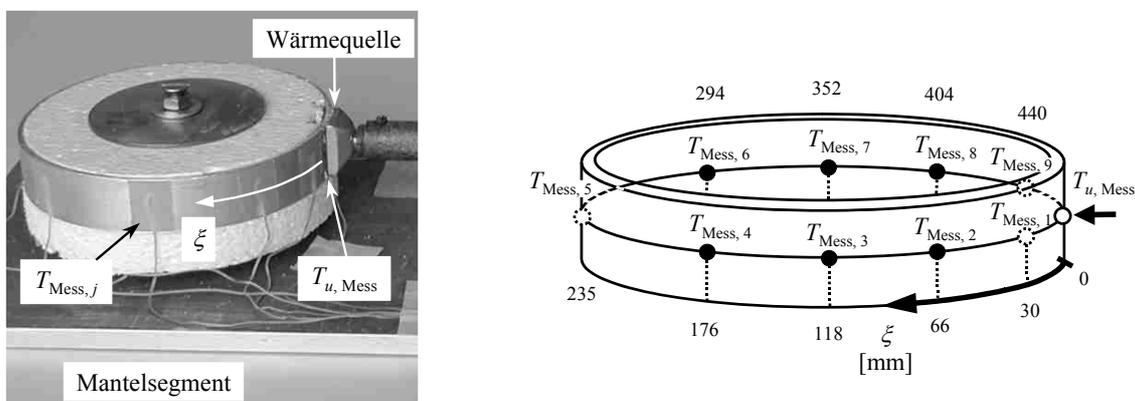


Abbildung 5-21: Experimenteller Aufbau zur Identifikation der Temperaturleitfähigkeit im Mantelsegment der Säule

In Abbildung 5-21 sind speziell 6 Messstellen (ausgefüllte Punkte) der Temperaturverteilung spezifiziert, welche aufgrund der örtlichen Korrelationsmaxima wesentlich zur Ermittelbarkeit von  $\tilde{\alpha}$  beitragen (s.a. Kapitel 5.5.1.1). Die übrigen 3 Messstellen (gepunktet) dienen zur Kontrolle und zusätzlichen Detektierung von eventuellen Störeinflüssen im Mantelsegment.

Zur Temperaturmessung werden auf die Oberfläche des Mantelsegments NickelChrom-Nickel Thermoelemente aufgeklebt, welche sowohl eine hohe Messgenauigkeit als auch eine besonders geringe Trägheit in Bezug auf die Detektierung von Temperaturänderungen aufweisen (OMEGA 2000). Aufgrund der sehr geringen Ausdehnung des Messkopfs (Durchmesser  $\approx 0,6$  mm) erfolgt eine präzise Realisierung des Modellkoordinatensystems auf der Oberfläche des Mantelsegments. Die Fehlerquellen durch die verwendete Sensorik, welche sich im Experiment auf die parametrische Identifikation des Temperaturmodells auswirken, können dann im Wesentlichen auf die folgenden zwei Problemstellungen reduziert werden:

- Fehlerhafte Adaptierung der Sensoren, d.h. keine repräsentative Temperaturerfassung aufgrund von Luftenschlüssen zwischen Sensor und Manteloberfläche.
- Einflüsse des Messsystems, wobei es sich bspw. um das Verstärkerrauschen bzw. um systematisch wirkende Kalibrierungsrestfehler wie einen fehlerbehafteten Maßstabsfaktor zwischen gemessener Thermospannung und Temperatur und eine zeitliche Drift der zur Temperaturmessung mit Thermoelementen benötigten Temperaturvergleichsstelle (u.a. RÖSLER 1999) handelt.

Die empirische Untersuchung der Fehlereinflüsse erfolgt direkt am Messobjekt, wodurch eine adäquate Berücksichtigung der experimentellen Rahmenbedingungen gewährleistet ist. Zum direkten Vergleich der Sensoren werden die Messungen in den 10 Temperaturmessstellen (s. Abbildung 5-21) bei einer örtlich und zeitlich konstanter Temperaturverteilung im Mantelsegment durchgeführt. Diese wird durch eine konstante Raumtemperatur und die Abschirmung des Segments von äußeren thermischen Einflüssen sichergestellt.

In Abbildung 5-22 sind die Temperaturmessergebnisse der 10 Sensoren exemplarisch für einen Zeitraum von 280 s dargestellt, womit der aus den Simulationsrechnungen zu erwartende Identifikationszeitraum hinreichend berücksichtigt ist. Die Abtastrate des Messsystems beträgt  $\Delta t = 1$  s. Die zeitlichen Mittelwerte der Temperaturmessungen weisen untereinander eine maximale Abweichung von ca. 0,3 K auf. Die zeitlichen Verläufe der Messwerte selbst sind von signifikanten, linearen Trendanteilen überlagert, welche bei drei Messstellen eine maximale Steigung von ca. 0,002 K/s erreichen. Aufgrund des sehr geringen Anstiegs ist allerdings im KALMAN-Filter keine Auswirkung auf das Identifikationsergebnis zu erwarten.

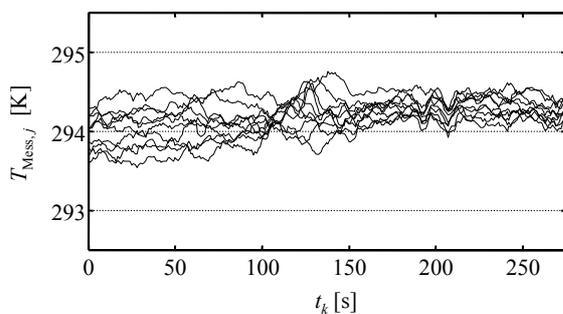


Abbildung 5-22: Temperaturmessungen an den 10 Messstellen bei örtlich und zeitlich konstanter Manteltemperatur

Unter Annahme von Stationarität und unter Berücksichtigung der Autokorrelationen (u.a. TAUBENHEIM 1969, KUHLMANN 1996, WELSCH et al. 2000) erfolgt die Ermittlung der inneren Genauigkeit der Temperaturmessungen aus dem zeitlichen Verlauf der einzelnen Messreihen mit  $s_1 \approx 0,2$  K. Die äußere Genauigkeit kann aus den, zu jeweils einem festen Zeitpunkt  $t_k$  erfolgten, Vergleichsmessungen der 10 Messstellen bestimmt werden. Sie ist aufgrund der systematischen Abweichungen zwischen den einzelnen Messreihen mit  $s_A \approx 0,3$  K schlechter wie die innere Genauigkeit und aufgrund der Anwesenheit positiver Kreuzkorrelationen (u.a. TAUBENHEIM 1969, WELSCH et al. 2000) von 20 ... 40% (bei Verschiebung  $\tau_k = 0$  s der Messreihen) etwas zu optimistisch.

In Hinblick auf die genannten Fehlerquellen kann für die eingesetzten Messsensoren die Aussage getroffen werden, dass sie im interessierenden Zeitbereich weitgehend frei von Drifterscheinungen sind. Aufgrund ihrer geringen systematischen Abweichungen liegen keine signifikanten Fehler in den Adaptierungen vor. Eine Überprüfung des Maßstabsfaktors kann in obiger Messkonfiguration nicht erfolgen, da die Sensoren hierzu definierten thermischen Lastdifferenzen ausgesetzt werden müssten (bspw. in einer Klimakammer). Nach OMEGA (2000) erfolgt die Approximation der nichtlinearen Temperatur-Thermospannungs-Kennlinie abschnittsweise mit Polynomen bis 9. Ordnung. Die geringen systematischen Restabweichungen sind durch das angesetzte stochastische Niveau zu kompensieren.

Die Sensorgruppe ist zur Messung der zeitlichen Änderungen der Temperaturdifferenzen im Mantelsegment geeignet. Das stochastische Niveau der Gruppe wird auf der Grundlage der empirisch ermittelten äußeren Genauigkeit festgelegt, wobei die z.T. auftretenden Kreuzkorrelationen und mögliche Restkalibrierungsfehler durch eine Erhöhung der Standardabweichung auf  $\sigma_T \approx 0,4 \dots 0,5$  K berücksichtigt werden.

Die Besetzung der Störmatrix  $\mathbf{S}_{k+1,k}$  und die Abschätzung des stochastischen Niveaus der Störtemperaturen  $T_{w,j}(t_k)$  erfolgt anhand der in Abbildung 5-23 dargestellten Methode.

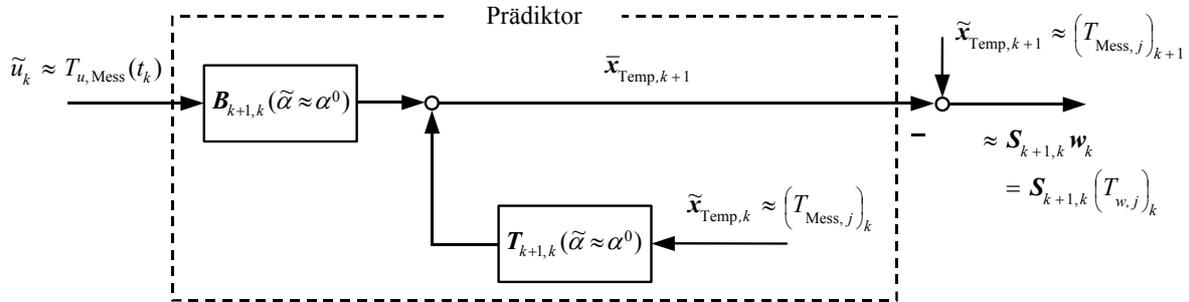


Abbildung 5-23: Ermittlung von Einfluss und stochastischem Niveau der Störtemperaturen

Der Einfluss  $\mathbf{S}_{k+1,k} \mathbf{w}_k = \mathbf{S}_{k+1,k} (T_{w,j})_k$  der Störgrößen bei der Fortschreibung der Temperaturzustandsparameter von  $t_k$  nach  $t_{k+1}$  kann unter Verwendung der Fehlergleichungen der Prädiktionen (5-31) abgeschätzt werden. Hierbei sind die gemessene Randtemperatur  $T_{u,Mess}(t_k)$  und die gemessenen Temperaturverteilungen  $T_{Mess,j}(t_k)$  und  $T_{Mess,j}(t_{k+1})$  als – in Relation zu kritischen Größenordnungen der Störeinflüsse – genähert fehlerfrei anzunehmen. Des Weiteren ist zu fordern, dass die Temperaturleitfähigkeit  $\tilde{\alpha}$  zumindest näherungsweise bekannt ist. Die Differenzbildung aus mittels  $T_{Mess,j}(t_k)$  und  $T_{u,Mess}(t_k)$  zur Epoche  $t_{k+1}$  prädizierter Temperaturverteilung und gemessener Verteilung enthält dann gerade die gesuchten Abweichungen des Modells von der Realität.

In Abbildung 5-24 sind die Abweichungen zwischen prädizierter und gemessener Temperaturverteilung in den Messstellen des Mantelsegments dargestellt. Ausgehend vom Beginn der thermischen Belastung umfasst die Berechnung einen Zeitausschnitt von 100 s mit einer zeitlichen Fortschreibung des Prädiktors von jeweils  $\Delta t = 2$  s. Dies entspricht dem für das adaptive KALMAN-Filter vorgesehenen Fortschritt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind nur die Ergebnisse im zeitlichen Abstand von jeweils 10 Epochen aufgetragen. Die den Berechnungen zugrunde liegenden experimentellen Rahmenbedingungen wie Versuchsaufbau, Temperaturverteilung zum Zeitpunkt der Initialisierung und von außen einwirkende thermische Last, entsprechen ebenfalls dem für die Identifikation von  $\tilde{\alpha}$  vorgesehenen Szenario. Als Näherung für  $\tilde{\alpha}$  wird der in (5-34) aus der Literatur spezifizierte Wert für reines Aluminium verwendet.

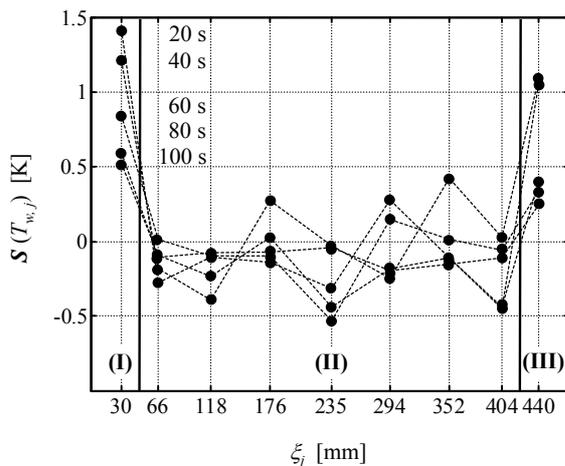


Abbildung 5-24: Darstellung des in den Messstellen  $\xi_{Mess,j}$  berechneten Einflusses der Störtemperaturen  $T_{w,j}(t_k)$

In Abbildung 5-24 ist zu erkennen, dass die Störeinflüsse im Randbereich (Bereiche I und III) zunächst ein signifikant höheres Niveau (maximal +1,5 K) aufweisen als im inneren Bereich II des Mantelsegments. Hier liegt ein – im Rahmen der Einflüsse des Messrauschens – homogenes Niveau vor, welches im Mittel etwa  $-0,1$  bis  $-0,2$  K erreicht. Der erhöhte Störeinfluss im Randbereich ist im Wesentlichen durch die nicht ideal punktförmige Wärmequelle zu erklären (s. Abbildung 5-21), welche diesen Bereich zu Beginn der Untersuchung schneller erwärmt, als dies vom Modell vorher-

gesagt wird und somit ein signifikant positives Niveau der Residuen erzeugt. Das negative Niveau im inneren Bereich des Mantelsegments wird vermutlich durch Temperaturverluste infolge von Wärmeleitung und Konvektion erzeugt.

Die in Abbildung 5-24 getroffene Einteilung des Segments in drei Abschnitte jeweils vergleichbarer Störeinflüsse wird im Folgenden mittels der drei Störtemperaturen

$$\mathbf{w}_k = (T_{w,I}, T_{w,II}, T_{w,III})_k^T \tag{5-37}$$

repräsentiert. Ihr Einfluss auf die Temperaturzustandsparameter wird durch eine Störmatrix der Struktur

$$\mathbf{S}_{k+1,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \tag{5-38}$$

modelliert. In obiger Einflussmatrix wird der ebenfalls korrelierende Einfluss von benachbarten Störtemperaturen in den Übergängen der eingeteilten Bereiche vernachlässigt. Des Weiteren erfolgt keine differenzierte Gewichtung der Störtemperaturen innerhalb der Bereiche. Derartige Modifizierungen können aus den durchgeführten Versuchsreihen nicht empirisch bestimmt werden. Es ist aber zu bemerken, dass an dieser Stelle ein mögliches Potenzial für eine Optimierung des Störgrößenmodells vorliegt.

Das stochastische Niveau der Störtemperaturen wird aus den o.g. Temperaturabweichungen ermittelt und ist in Tabelle 5-1 dargestellt, welche sowohl die Ergebnisse der Genauigkeitsuntersuchung der Temperatursensoren als auch der Untersuchung der Störeinflüsse enthält.

Tabelle 5-1: Stochastisches Modell für Temperaturmessungen und Störtemperaturen

Temperaturmessungen [K]		Störtemperaturen [K]		
$\sigma_{T_{\text{Mess},j}}(t_k)$	$\sigma_{T_{u,\text{Mess}}}(t_k)$	(I) $\sigma_{T_{w,I}}(t_k)$	(II) $\sigma_{T_{w,II}}(t_k)$	(III) $\sigma_{T_{w,III}}(t_k)$
0,4	0,4	0,5	0,1	0,5

Der Identifikation der Temperaturleitfähigkeit des Mantelsegments liegen Temperaturmessungen über einen Zeitraum von insgesamt 140 s zugrunde. In Abbildung 5-25 ist der gemessene Verlauf  $T_{u,\text{Mess}}(t_k)$  der nahezu sprunghaft auf das Mantelsegment einwirkenden Randtemperatur und die in den 9 Messstellen der Abbildung 5-21 erfasste Reaktion  $T_{\text{Mess},j}(t_k)$ , d.h. die Erwärmung des Segments, dargestellt.

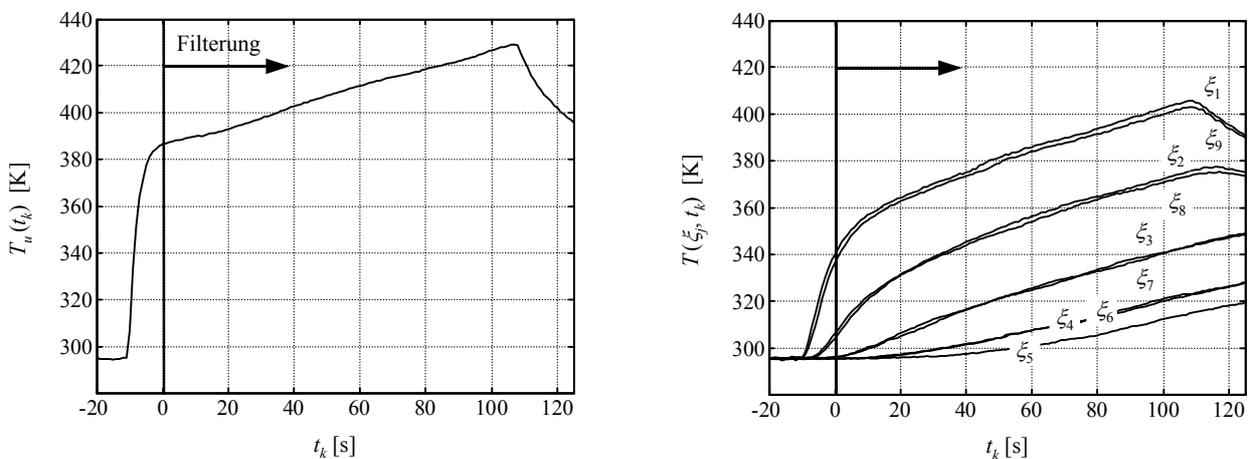


Abbildung 5-25: Verlauf der Messungen der auf das Mantelsegment als Stellgröße einwirkenden Randtemperatur  $T_{u,\text{Mess}}(t_k)$  und der Reaktion  $T_{\text{Mess},j}(t_k)$

Zu Beginn der Messung befindet sich das Mantelsegment auf einem homogenen Temperaturniveau von ca. 295 K (= 22°C), was gerade der Raumtemperatur entspricht. Das Segment wird in den der Wärmequelle am nächsten gelegenen Messstellen ( $\xi_{\text{Mess}, 1}$  und  $\xi_{\text{Mess}, 9}$ ) auf maximal 400 K und in der am weitesten entfernten Stelle ( $\xi_{\text{Mess}, 5}$ ) auf maximal 320 K erwärmt. Das plötzliche Abfallen der Randtemperatur am Ende der Messreihe wird durch eine Schwankung in der Heizleistung der Wärmequelle verursacht. Der Effekt wird in der Prädiktion des Filters berücksichtigt und stellt keine Störung dar.

Im rechten Teil der Abbildung 5-25 ist ersichtlich, dass in den Paaren von Messstellen  $\xi_{\text{Mess}, j}$ , welche sich im gleichen Abstand von der von außen eingprägten Randtemperatur befinden, ein ähnlicher Temperaturverlauf vorherrscht. Dieser Effekt ist bereits aus den Simulationsrechnungen von Kapitel 5.5.1.1 bekannt, wo aus einer zum Zeitpunkt der Initialisierung bzgl.  $\xi = L/2$  symmetrischen Temperaturverteilung im ringförmigen Modell zu jedem Zeitpunkt  $t_k$  eine symmetrische Verteilung folgt. In den Paaren ( $\xi_{\text{Mess}, 1}$ ,  $\xi_{\text{Mess}, 9}$ ) bzw. ( $\xi_{\text{Mess}, 2}$ ,  $\xi_{\text{Mess}, 8}$ ) liegen bei den realen Messungen allerdings systematische Abweichungen von der Symmetrie in der Größenordnung von 1,5...2 K vor. Diese werden u.a. durch die räumlich ausgedehnte Wärmequelle verursacht, deren Wärmezentrum nicht exakt im Nullpunkt des angenommenen Koordinatensystems liegt. Durch die Messung der Temperaturverteilung entlang des gesamten Segments sind derartige Abweichungen maßgeblich im geschätzten Temperaturzustandsvektor enthalten und können somit im deterministischen Teil der Systemgleichungen des KALMAN-Filters berücksichtigt werden. Sie müssen nicht durch die Störgrößen kompensiert werden.

Die Initialisierung des KALMAN-Filters erfolgt zum Zeitpunkt  $t_k = 0$  s (s. Abbildung 5-25), womit gewährleistet ist, dass die eigentliche Sprungstelle der Randtemperatur nicht im Filterverlauf enthalten ist. Hier liegt das übliche Abtastproblem von steilen Flanken vor. Gemäß der Simulation werden Abstand der Temperaturzustandsparameter und Fortschritt des Filters mit  $\Delta\xi = 1$  mm und  $\Delta t = 2$  s eingeführt.

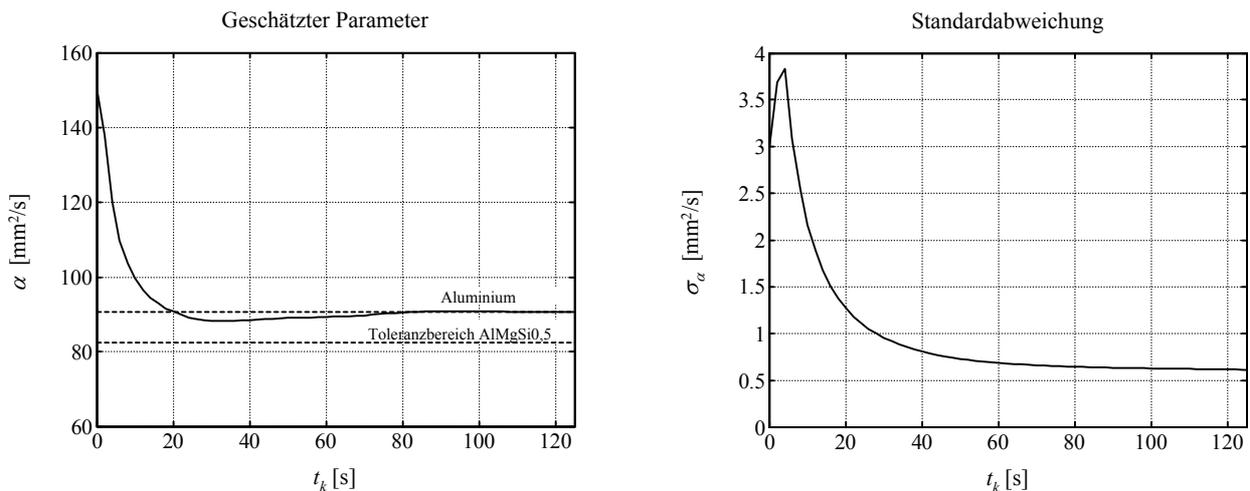


Abbildung 5-26: Identifikation der Temperaturleitfähigkeit  $\tilde{\alpha}$  im Mantelsegment: Verlauf der Schätzwerte  $\hat{\alpha}_{k+1}$  und der Standardabweichungen  $\sigma_{\hat{\alpha}_{k+1}}$

Entsprechend den Simulationsrechnungen wird von einem Startwert  $\hat{\alpha}_{k=0} = 150$   $\text{mm}^2/\text{s}$  zum Zeitpunkt der Filterinitialisierung ausgegangen. Der Verlauf der Schätzwerte erreicht nach 80 s ein stabiles Niveau mit  $\hat{\alpha}_{k+1} = 90,7$   $\text{mm}^2/\text{s}$ . Bezogen auf den mit (5-34) gegebenen theoretischen Wert für reines Aluminium  $\tilde{\alpha}_{\text{Alu}} = 90,872$   $\text{mm}^2/\text{s}$  liegt eine Abweichung von  $-0,2\%$  vor. Das Niveau der zugehörigen Standardabweichung hat mit  $\sigma_{\hat{\alpha}_{k+1}} = 0,7$   $\text{mm}^2/\text{s}$  eine vergleichbare Größenordnung.

Aufgrund der (im vorliegenden Fall) Kenntnis der Aluminiumlegierung AlMgSi0,5, werden die aus der Literatur bekannten theoretischen Werte für die relevanten physikalischen Parameter zur Beurteilung des Ergebnisses herangezogen. Abweichungen gegenüber reinem Aluminium treten im Wesentlichen durch den in dieser Legierung enthaltenen Anteil von 0,4 – 0,8% Magnesium und 0,3 – 0,7% Silizium (nach DIN 1725-1) auf. Nach KAMMER (1995) sind für AlMgSi0,5 die nachfolgenden theoretischen Parameter bei einer Temperatur von 293 K gegeben.

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{\text{AlMgSi}} &= 0,200 \dots 0,220 \frac{\text{W}}{\text{mm K}} ; \tilde{\rho}_{\text{AlMgSi}} = 2,700 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} ; \tilde{c}_{\text{AlMgSi}} = 898 \frac{\text{W s}}{\text{kg K}} \\ \Rightarrow \tilde{\alpha}_{\text{AlMgSi}} &= \frac{\tilde{\lambda}_{\text{AlMgSi}}}{\tilde{\rho}_{\text{AlMgSi}} \tilde{c}_{\text{AlMgSi}}} = 82,872 \dots 90,737 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}} \end{aligned} \quad (5-39)$$

Bezogen auf das o.g. Temperaturniveau weist der Toleranzbereich für die Temperaturleitfähigkeit  $\tilde{\alpha}_{\text{AlMgSi}}$  eine Breite von ca.  $8 \text{ mm}^2/\text{s}$  auf und ergibt sich aufgrund der Variationen (in Abhängigkeit des im Experiment nicht exakt bekannten Anteils von Magnesium und Silizium) der Wärmeleitfähigkeit  $\tilde{\lambda}_{\text{AlMgSi}}$  der Legierung. In Abbildung 5-26 ist zu erkennen, dass sich der Verlauf des Schätzwertes der oberen Grenze des Bereichs annähert, welcher in unmittelbarer Nachbarschaft zum theoretischen Wert für reines Aluminium liegt. Die Restabweichung zwischen Schätzwert und oberer Grenze beträgt  $-0,04\%$ .

Der Vergleich der Filterergebnisse mit den aus der Literatur entnommenen Referenzwerten lässt den Schluss zu, dass eine realistische Schätzung des Niveaus der Temperaturleitfähigkeit des Mantelsegments vorliegt. Eine endgültige Bewertung des geschätzten Parameters und des kalibrierten Temperaturmodells kann in dieser ersten Stufe der Verifikation noch nicht erfolgen, da zum Einen der direkte Vergleich mit den theoretischen Parametervorgaben der Legierung auf den o.g. Toleranzbereich beschränkt bleibt und zum Anderen eine mögliche Auswirkung von temperaturabhängigen Änderungen der Strukturparameter auf das zu berechnende Temperaturfeld nicht ausgeschlossen werden kann.

Zur weiteren Beurteilung des Identifikationsergebnisses wird in der zweiten Stufe das kalibrierte Temperaturmodell (5-21) als Prädiktor für die Prognose der zeitlichen Änderung der Temperaturverteilung im Mantelsegment verwendet (s. Abbildung 5-27).

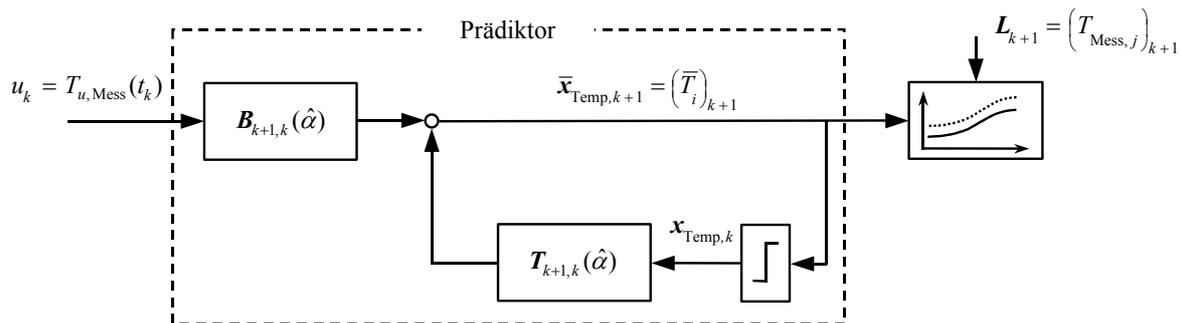


Abbildung 5-27: Prinzip der zweiten Verifikationsstufe des kalibrierten Temperaturmodells

Hierbei erfolgt die Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Temperaturverteilung  $\bar{T}(\xi_i, t_k)$  nur unter Verwendung des gemessenen Verlaufs der Stellgröße  $T_{u, \text{Mess}}(t_k)$  und des mit  $\hat{\alpha}$  kalibrierten Temperaturmodells als Übertragungsglied des dynamischen Systems. Die Initialisierung des Prädiktors ist durch die zu Beginn der Aufheizphase örtlich konstante Temperaturverteilung (Niveau der Raumtemperatur) im Segment gegeben, welche durch  $T_{u, \text{Mess}}(t_0 = 0 \text{ s})$  repräsentativ erfasst wird. Zur Verifikation werden die prognostizierten Temperaturverläufe unabhängig durchgeführten Temperaturmessungen gegenübergestellt. Der Vergleich des gemessenen mit dem über das Modell berechneten Systemausgang stellt nach ISERMANN (1988a) eine adäquate Vorgehensweise dar.

Im linken Teil von Abbildung 5-28 ist exemplarisch der mit einer Abtastung von  $\Delta t = 1 \text{ s}$  gemessene zeitliche Verlauf  $T_{u, \text{Mess}}(t_k)$  der durch die äußere Wärmequelle erzeugten Stellgröße für zwei Lastfälle dargestellt. Im Fall a steigt die Randtemperatur innerhalb von 200 s vom Niveau der Raumtemperatur um 80 K an. Im Fall b erfolgt innerhalb desselben Zeitraums mit 60 K ein geringerer Anstieg. Mit beiden Belastungsverläufen wird der interessierende Temperaturbereich repräsentativ erfasst. Sie unterscheiden sich von der bei der parametrischen Identifikation verwendeten Temperaturbelastung (Abbildung 5-25) aufgrund

- ihres absoluten Niveaus zum Zeitpunkt der Initialisierung des Prädiktors (zur Überprüfung von möglichen Einflüssen der Temperaturabhängigkeit des zu identifizierenden Parameters)
- der Art der Erwärmung (allmähliche Zunahme des zeitlichen Gradienten)

Durch die Stellgrößen werden im Mantelsegment Temperaturfelder erzeugt (rechter Teil der Abbildung 5-28), die sich ebenfalls im absoluten Niveau sowie im örtlichen und zeitlichen Gradienten signifikant von dem bei der parametrischen

Identifikation vorliegenden Feld unterscheiden. Die Herstellung des Zusammenhangs zwischen Stellgröße und Systemreaktion stellt dann eine durchgreifende Überprüfung des Übertragungsglieds, d.h. des kalibrierten Temperaturmodells, dar.

Im rechten Teil der Abbildung 5-28-a sind die prognostizierten (—) den unabhängig gemessenen Temperaturverläufen (---) des Falls a gegenübergestellt. Der Fortschritt des Prädiktors entspricht mit  $\Delta t = 1$  s der Abtastung der Stellgröße. Aufgrund des im Experiment bzgl.  $\xi = L/2$  (näherungsweise) symmetrischen Temperaturverhaltens werden hier nur die Messstellen  $\xi_{\text{Mess}, 5}$  bis  $\xi_{\text{Mess}, 9}$  dargestellt, welche gerade eine Hälfte des Mantelsegments repräsentieren (s.a. Abbildung 5-21). Es ist ersichtlich, dass die gemessenen Temperaturverläufe aller 5 Stellen sehr gut prognostiziert werden können. Die Abweichungen zwischen Prognose und Messung liegen im Betrachtungszeitraum mit maximal 1 K in der Größenordnung der 2fachen Standardabweichung der Temperaturmesssensoren (vgl. Tabelle 5-1). Sie setzen sich jeweils aus geringen systematischen und zufälligen Anteilen zusammen. Die systematischen Anteile werden hier im Wesentlichen durch den Restkalibrierungsfehler der Temperaturleitfähigkeit, die räumlich ausgedehnte Wärmequelle und experimentell nicht vollständig ausgeschaltete Wärmeverluste durch Leitung bzw. freie Konvektion verursacht. Aufgrund des Wärmeverlustes ist in der am weitesten von der Wärmequelle entfernten Stelle  $\xi_{\text{Mess}, 5}$  eine geringe Drift zwischen Messungen und Berechnungsergebnissen erkennbar.

Die Gegenüberstellung von prognostizierten und gemessenen Verläufen des Falls b erfolgt im rechten Teil der Abbildung 5-28-b. Die für den Fall a getroffenen Aussagen sind vollständig auf diesen Fall übertragbar. Auch hier ist in der Stelle  $\xi_{\text{Mess}, 5}$  eine geringe Drift zu erkennen. In keinem der beiden Fälle kann innerhalb des betrachteten Temperaturbereichs eine signifikante Auswirkung der Temperaturabhängigkeit der Strukturparameter auf die prognostizierten Ergebnisse nachgewiesen werden.

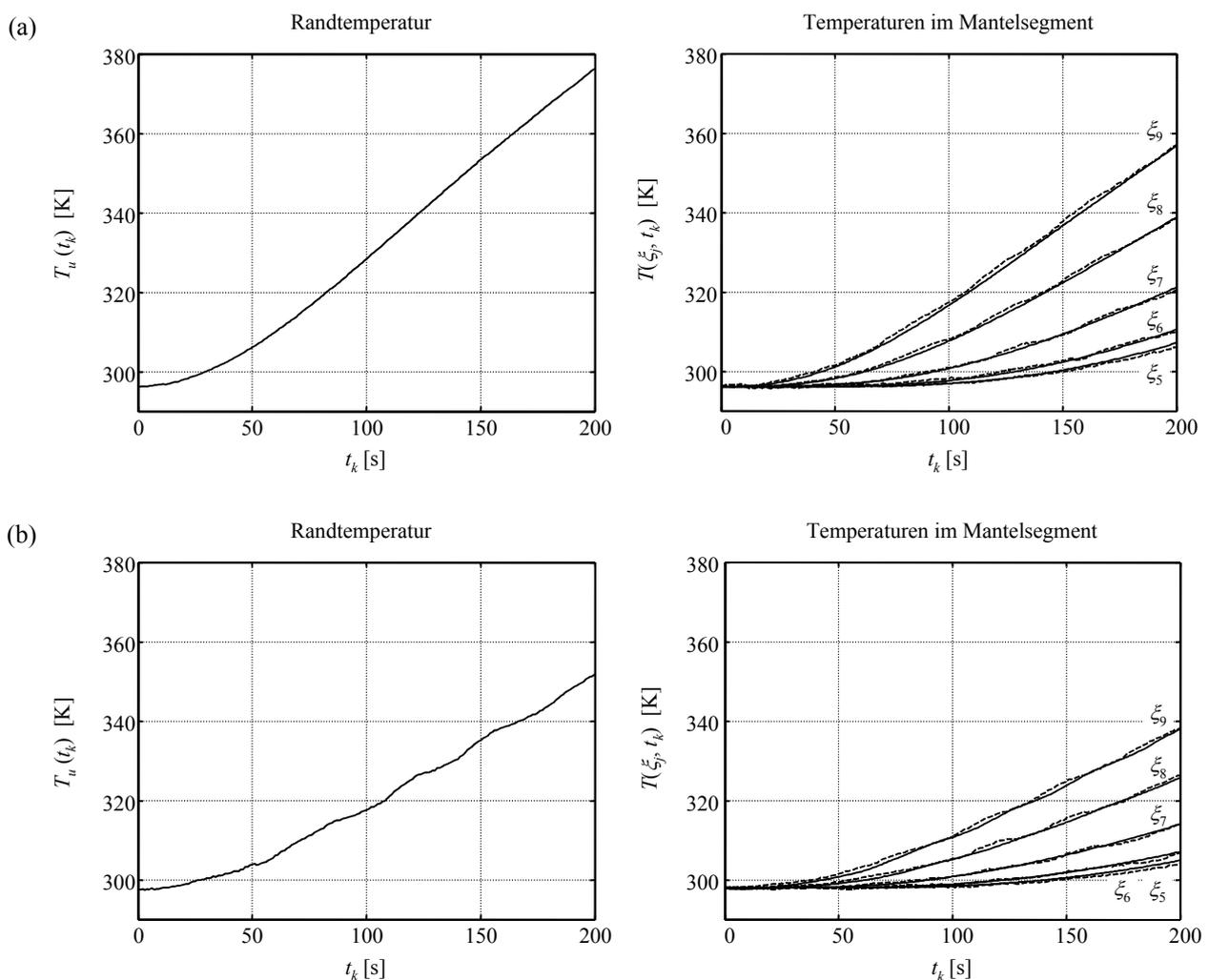


Abbildung 5-28: Anstieg der Randtemperatur um (a) 80 bzw. (b) 60 K : Darstellung von gemessener Stellgröße  $T_{u, \text{Mess}}(t_k)$  und mit dem kalibrierten Temperaturmodell prognostizierten (—) Temperaturen  $\bar{T}(\xi_{\text{Mess}, j}, t_k)$  bzw. unabhängig gemessenen (---) Temperaturen  $T_{\text{Mess}}(\xi_{\text{Mess}, j}, t_k)$

In Tabelle 5-2 werden die Abweichungen zwischen prognostizierten und gemessenen Temperaturen bei Variation der geschätzten Temperaturleitfähigkeit  $\hat{\alpha}_{k+1}$  mittels der berechneten Residuen quantifiziert. Die kleinste Variation liegt mit  $\pm 4\%$  des Schätzwertes geringfügig außerhalb des im Zuge der parametrischen Identifikation ermittelten Bereichs der dreifachen Standardabweichung  $\pm 3\sigma_{\hat{\alpha},k+1}$ . Da die in den Residuen enthaltenen systematischen Anteile mit zur Beurteilung herangezogen werden sollen, wird als Maß für die Konformität von Prognose und Messung jeweils der „*r.m.s.*-Wert“ (*r.m.s.* = root mean square, s. Tabelle 5-2) berechnet, der in diesem Fall nicht der empirischen Standardabweichung entspricht. Den Berechnungsergebnissen liegen die in Abbildung 5-28 dargestellten gemessenen Last- und Temperaturverläufe der Fälle a und b zugrunde.

Tabelle 5-2: Konformität zwischen prognostizierten und gemessenen Temperaturen

Variation $\alpha$	-10%	-5%	-4%	$\hat{\alpha}$	+4%	+5%	+10%
Fall a : <i>r.m.s.</i> [K]	1,06	0,74	0,69	0,53	0,54	0,56	0,79
Fall b : <i>r.m.s.</i> [K]	0,71	0,55	0,53	0,48	0,51	0,53	0,66
$r.m.s. = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j,k} v_{j,k}^2} \quad \text{mit} \quad v_{j,k} = \bar{T}(\xi_{\text{Mess},j}, t_k) - T_{\text{Mess}}(\xi_{\text{Mess},j}, t_k)$							

In obiger Tabelle ist zu erkennen, dass in den Fällen a und b die größte Konformität (minimale *r.m.s.*-Werte) zwischen gemessenen und prognostizierten Temperaturen im Bereich der dreifachen Standardabweichung um die geschätzte Temperaturleitfähigkeit vorherrscht. Außerhalb der dreifachen Standardabweichung des Schätzwertes gelegene Variationen erzeugen stets eine Vergrößerung der *r.m.s.*-Werte und damit eine schlechtere Übereinstimmung. Beide Fälle weisen ein vergleichbares Niveau in den Ergebnissen auf. Die niedrigeren *r.m.s.*-Werte im Fall b sind auf die geringere thermische Last zurückzuführen.

Aufgrund der auch bei variierenden Belastungsszenarien übereinstimmend guten Prognoseergebnisse kann die Temperaturleitfähigkeit  $\hat{\alpha}$  als identifiziert und das Temperaturmodell als verifiziert angenommen werden. Mit dem identifizierten Temperaturmodell liegt ein Prädiktor vor, der im interessierenden Temperaturbereich die Prognose des zeitlichen Verlaufs der Temperaturverteilung im Mantelsegment ermöglicht. Die mit zunehmender Temperaturbelastung und Entfernung von der Wärmequelle herabzusetzende zeitliche Begrenzung für die Gültigkeit der Berechnungsergebnisse ist im Wesentlichen durch die Einwirkung von Störeinflüssen gegeben. Wärmeverluste im Mantelsegment aufgrund freier Konvektion und Wärmeleitung repräsentieren hierbei die Haupteinflussfaktoren. Im vorliegenden Lastbereich und Zeitraum treten keine Abweichungen auf, die das Genauigkeitsniveau der Temperaturmessensoren signifikant unterschreiten.

Mit der identifizierten Temperaturleitfähigkeit kann nun die in (5-39) infolge der Unkenntnis der exakten Zusammensetzung der Legierung AlMgSi0,5 nur als Toleranzbereich angegebene Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  als Nutzerfunktion bestimmt werden. Spezifische Wärmekapazität und Dichte der Legierung werden in diesem Fall als bekannt vorausgesetzt. Die Ergebnisse der parametrischen Identifikation im einzelnen Mantelsegment sind in Tabelle 5-3 nochmals zusammengefasst.

Tabelle 5-3: Im einzelnen Mantelsegment identifizierte physikalische Parameter der Aluminiumlegierung

Temperaturleitfähigkeit		Wärmeleitfähigkeit	
$\hat{\alpha}$ [mm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\sigma_{\hat{\alpha}}$ [mm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\hat{\lambda}$ [W mm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	$\sigma_{\hat{\lambda}}$ [W mm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
90,7	0,7	0,220	0,002

### 5.5.2 Verifikation des identifizierten Modells auf der Aluminiumsäule

Der Übertragung des im einzelnen Mantelsegment kalibrierten Temperaturmodells (5-21) auf die gesamte Säule liegt der in Abbildung 5-29 dargestellte experimentelle Aufbau zugrunde. Die Geometrie der Säule entspricht der Darstellung in Abbildung 5-3. Wandstärke und Material der Säule sind mit dem ringförmigen Mantelsegment identisch. Zur Dämpfung von konvektiven Störeinflüssen ist der Säulenmantel ebenfalls vollständig isoliert.

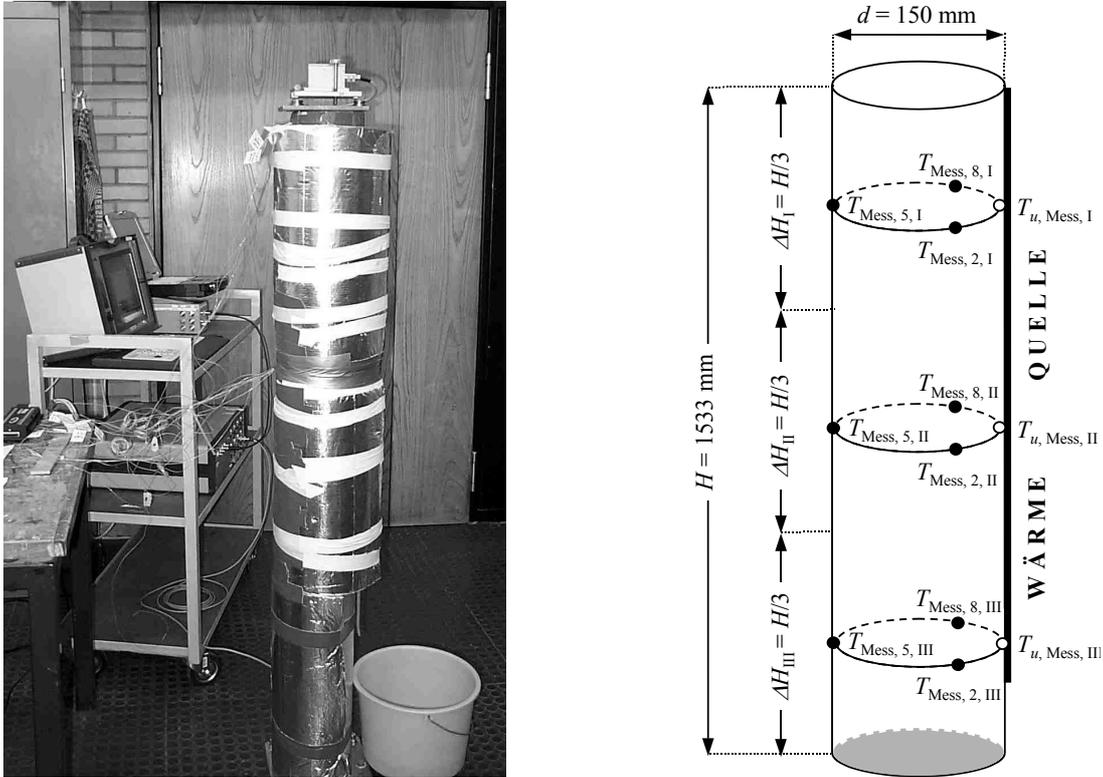


Abbildung 5-29: Experimenteller Aufbau der Säule

Die thermische Belastung der Säule erfolgt unter den nachfolgenden Rahmenbedingungen:

- Die Beheizung wird entlang eines Profils parallel zur vertikalen konstruktiven Achse (s.a. Abbildung 5-4) durchgeführt.
- Die Beheizung erfolgt mit erhitztem Wasser, welches in direkten Kontakt mit dem Säulenmantel gebracht wird. Durch diese Maßnahme wird ein sehr guter Wirkungsgrad bei der Wärmeübertragung auf die Säule erzielt. Wie im linken Teil von Abbildung 5-30 gezeigt wird, besteht die Möglichkeit, über das gesamte Vertikalprofil der Säule sprunghafte Belastungen zu erzeugen, wodurch das Ausbreitungsverhalten der Wärme besonders gut zu beobachten ist.
- Durch die verwendete Beheizungsmethode ist der im Experiment realisierbare Betrachtungszeitraum auf ca. 200 s beschränkt.

Innerhalb dieses Zeitintervalls kann die verwendete Wärmequelle als äußere thermische Belastung betrachtet werden. Im Anschluss daran erfolgt eine signifikante Rückkoppelung mit der bereits aufgetragenen Säulentemperatur. Die Interpretation der Randtemperatur als Stellgröße ist in diesem Fall dann nicht mehr zulässig.

Vor dem Hintergrund der Vorteile der verwendeten Beheizungsmethode wird eine Einschränkung des Betrachtungszeitraums in dieser Arbeit bewusst in Kauf genommen. In Kapitel 5.6.2 wird gezeigt, dass im vorliegenden Zeitintervall eine hinreichende Beschreibung des charakteristischen Deformationsverhaltens der Säule erfolgen kann.

Entlang der linienförmigen Heizung treten Abweichungen von einer homogenen Heizleistung aufgrund der Art der Befüllung und Konvektion innerhalb der Wassersäule auf. Zur Berücksichtigung dieser Effekte bei der Prognose der Temperaturverteilung erfolgt die Unterteilung der Säule in drei repräsentative zylinderförmige Abschnitte:

- Abschnitt I repräsentiert den oberen, Abschnitt II den zentralen und Abschnitt III den unteren Bereich der Säule (s. Abbildung 5-29).
- Für alle drei Abschnitte wird dieselbe Höhe  $\Delta H = H/3$  festgelegt.

Vor dem Hintergrund der Verifikation des Temperaturmodells für die Säule stellt die vorliegende Einteilung eine adäquate Vorgehensweise dar, da mit Abschnitt I der Übergang zur luftseitigen Oberkante der Säule, mit Abschnitt II das Zentrum und mit Abschnitt III der Übergang zum Fundament erfasst wird. Die gleiche Höhe der Abschnitte ist durch einen näherungsweise linearen vertikalen Gradienten der in verschiedenen Höhen der Säule gemessenen Randtemperaturen motiviert.

Im Sinne des für vertikal geschichtete ringförmige Mantelsegmente entwickelten Temperaturmodells (vgl. Kapitel 5.2.1) sind mit den drei gewählten Abschnitten gerade drei Segmente festgelegt. Wie im rechten Teil der Abbildung 5-29 ersichtlich ist, erfolgt bei jedem Segment die Erfassung der Stellgröße, d.h. die Messung  $T_{u, \text{Mess}, i}$  ( $i = \text{I} \dots \text{III}$ ) der infolge der Einwirkung der äußeren Wärmequelle erzeugten Randtemperatur. Diese wird zur Prognose der Temperaturverteilung (im zugehörigen Mantelsegment  $i$ ) mittels des in Abbildung 5-27 dargestellten Prädiktors verwendet. Die für die Überprüfung der Prognose benötigten unabhängigen Temperaturmessungen  $T_{\text{Mess}, j, i}$  ( $j = 2, 5, 8$ ) werden auf jedem Mantelsegment in drei Messstellen durchgeführt, deren Nummerierung und Positionen entsprechend der Abbildung 5-21 festgelegt sind. Es ist hier bereits anzumerken, dass die der Wärmequelle diametral gegenüberliegende Stelle  $\xi_{\text{Mess}, 5}$  von besonderer Bedeutung bei der Quantifizierung der thermischen Biegung ist.

Die Ergebnisse des Experiments sind in Abbildung 5-30 und der zugehörigen Tabelle 5-4 dargestellt. Entsprechend der Verifikation des Temperaturmodells im einzelnen Mantelsegment zeigt der linke Teil der Abbildung wieder den mit einer Abtastung von  $\Delta t = 1$  s gemessenen Verlauf der Stellgrößen für die drei Segmente der Säule. Die infolge der Beheizung maximal auftretenden Randtemperaturen liegen ca. 50 K über dem Niveau der Raumtemperatur. Es ist zu erkennen, dass zwischen jeweils benachbarten Randtemperaturen signifikante (mittlere) Niveauunterschiede von ca. 10 ... 14 K vorherrschen, was im Wesentlichen auf die inhomogene Beheizung zurückzuführen ist.

Im rechten Teil der Abbildung sind die in den Messstellen der Säule prognostizierten (—) und unabhängig gemessenen (---) Temperaturverläufe exemplarisch für die Stellen  $\xi_{\text{Mess}, 5}$  und  $\xi_{\text{Mess}, 8}$  dargestellt. Der Fortschritt des Prädiktors entspricht mit  $\Delta t = 1$  s der Abtastung der Stellgrößen. Es ist ersichtlich, dass der in den drei Abschnitten der Säule gemessene Temperaturverlauf durch die prognostizierten Temperaturen insgesamt gut repräsentiert wird. Im Folgenden erfolgt abschnittsweise eine vertiefende Diskussion.

- Abschnitt I (mit dem Übergang zur luftseitigen Oberkante der Säule)

Hier treten geringfügig größere Abweichungen wie in den übrigen Abschnitten auf. In den Stellen  $\xi_{\text{Mess}, 5}$  und  $\xi_{\text{Mess}, 8}$  ist eine Drift der prognostizierten Temperaturen gegenüber den gemessenen Temperaturen zu erkennen. In der von der Heizung am weitesten entfernten Stelle  $\xi_{\text{Mess}, 5}$  wachsen die Abweichungen nach 200 s auf ca. +3 K an. In der näher an der Heizung gelegenen Stelle  $\xi_{\text{Mess}, 8}$  weist die prognostizierte Temperatur anfänglich ein zu niedriges Niveau auf (maximal -2 K). Eine Ursache hierfür ist u.a. durch die Abtastung der steilen Flanke der Randtemperatur und Einführung im Modell als Halteglied 0ter Ordnung gegeben, wodurch die Prädiktionen systematisch zu niedrig liegen. Dieser Anteil kann durch eine Erhöhung der Abtastrate kompensiert werden, was mit dem zur Verfügung stehenden Temperaturmesssystem allerdings nicht realisierbar ist. Nach einer Angleichung an das Niveau der Messwerte driftet der Verlauf gegen eine Abweichung von +1 K am Ende des Betrachtungszeitraums.

Die systematischen Anteile im oberen Bereich der Säule werden – neben den o.g. Einflüssen der Abtastung – im Wesentlichen durch Störeinflüsse wie Wärmeleitung und freie Konvektion verursacht. Simulationsrechnungen zeigen, dass ein möglicher Restkalibrierungsfehler in diesem Fall den geringsten Einfluss ausübt. Eine Variation des Schätzwertes der Temperaturleitfähigkeit mit dessen dreifacher Standardabweichung hat bei den maximal auftretenden Abweichungen nur einen Anteil von ca. 15%.

- Abschnitte II und III (zentraler und unterer Bereich der Säule)

Hier sind die systematischen Anteile der Abweichungen geringer. Als Begründung hierfür kann u.a. das abnehmende Niveau der thermischen Belastung angeführt werden, wodurch eine Reduktion der Wärmeverluste entlang des Säulenmantels erfolgt. Im Vorgriff auf Kapitel 5.6 kann des Weiteren die Aussage getroffen werden, dass die näherungsweise periodischen Schwankungen der gemessenen Temperaturen durch ihren mittleren Verlauf ersetzt werden können, da das Deformationsverhalten der Säule diesbezüglich als Tiefpass wirkt (u.a. Abbildung 5-34). Die mittleren Abweichungen an der Stelle  $\xi_{\text{Mess}, 8}$  liegen dann in beiden Abschnitten bei ca. -1 K. An der Stelle  $\xi_{\text{Mess}, 5}$  kann im zentralen Abschnitt II nur eine geringfügige Drift festgestellt werden, welche nach 200 s eine Abweichung von +0,6 K bewirkt. Im unteren Abschnitt III erreicht die driftbedingte Abweichung eine Größe von +1,1 K.

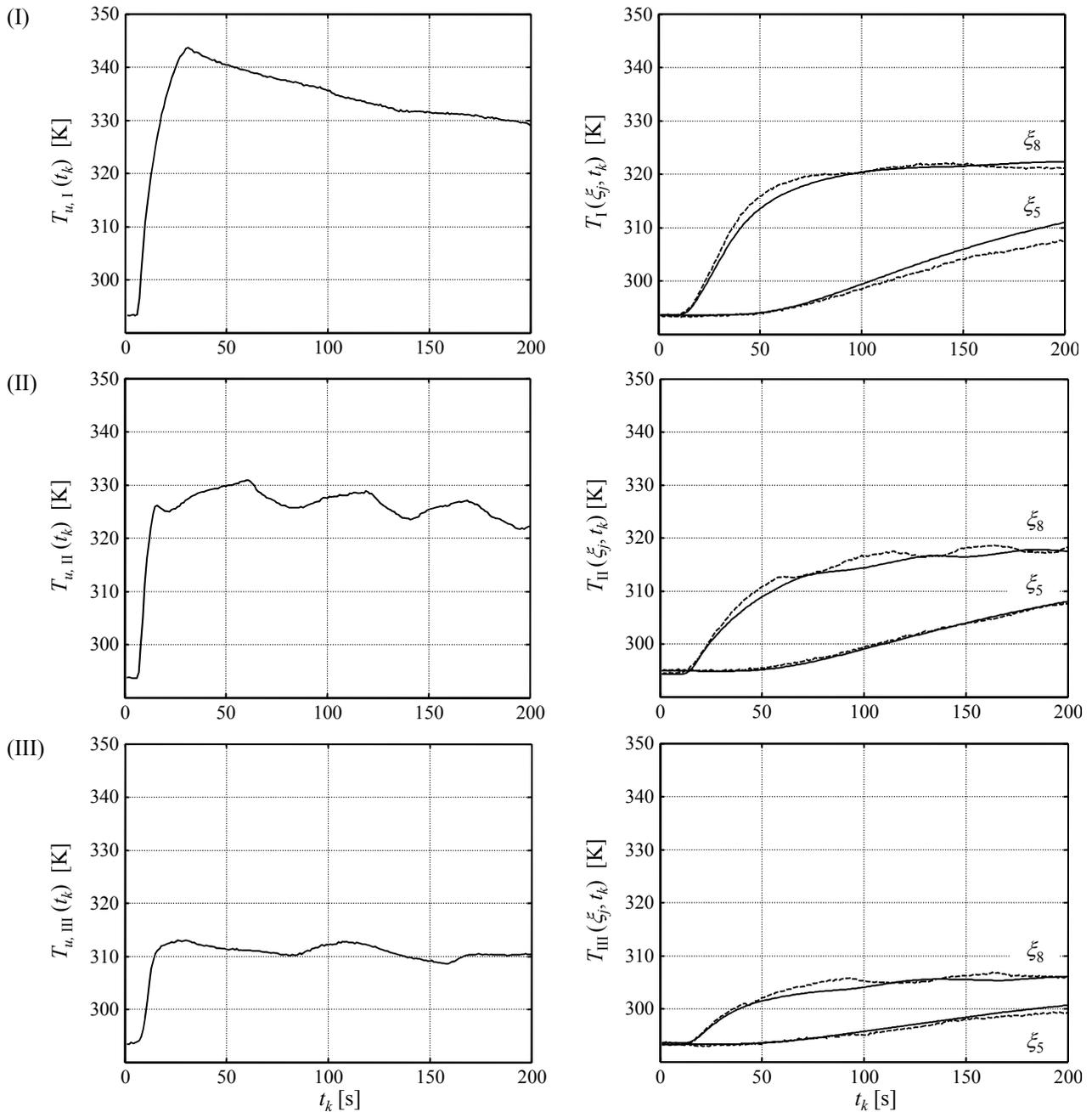


Abbildung 5-30: Darstellung der gemessenen Randtemperaturen  $T_{u, Mess, i}(t_k)$  und der in den Segmenten der Säule prognostizierten (—)  $\bar{T}_i(\xi_{Mess, j}, t_k)$  bzw. gemessenen (---) Temperaturen  $T_{Mess, i}(\xi_{Mess, j}, t_k)$

In der nachfolgenden Tabelle sind die *r.m.s.*-Werte für die einzelnen Abschnitte dargestellt, wodurch wieder die Konformität zwischen Prognosen und unabhängigen Messungen quantifiziert wird. Die Berechnungsergebnisse entsprechen den in der vorherigen Diskussion getroffenen Aussagen.

Tabelle 5-4: Konformität zwischen prognostizierten und gemessenen Temperaturen

		$\hat{\alpha}$
Abschnitt I	$r.m.s._I$ [K]	1,38
Abschnitt II	$r.m.s._{II}$ [K]	0,89
Abschnitt III	$r.m.s._{III}$ [K]	0,76
$r.m.s._i = \sqrt{1/n \sum_{j,k} v_{j,i}^2(t_k)}$		mit $v_{j,i}(t_k) = \bar{T}_i(\xi_{Mess, j}, t_k) - T_{Mess, i}(\xi_{Mess, j}, t_k)$

Die wesentlichen aus dem Experiment erhaltenen Erkenntnisse werden nachfolgend zusammengefasst:

1. Die Abweichungen der prognostizierten Temperaturverläufe im mittleren und unteren Bereich (Abschnitte II und III) der Säule liegen innerhalb der dreifachen Standardabweichung der Temperaturmesssensoren. Aufgrund größerer Störeinflüsse (Wärmeverluste) erfolgt in den prognostizierten Temperaturverläufen des oberen Abschnittes I eine geringfügige Zunahme der Abweichungen.
2. Eine Kompensation der im Abschnitt I auftretenden Abweichungen kann nicht durch eine verbesserte Parameteridentifikation, sondern nur durch eine Erweiterung des Temperaturmodells erfolgen (z.B. mittels deterministischer Quellenfunktionen).
3. Bei einer Einteilung der Säule in drei repräsentative Abschnitte kann die Prognose des zeitlichen Verlaufs der Temperaturverteilung mittels des im einzelnen Mantelsegment kalibrierten Temperaturmodells (5-21) durch unabhängige Temperaturmessungen als verifiziert gelten (im vorliegenden Fall liegt ein Prognosezeitraum von 200 s zugrunde).
4. Mit dem verifizierten Temperaturmodell (5-21) kann die für jeweils einen Abschnitt als repräsentativ angenommene Temperaturverteilung mit beliebiger örtlicher und zeitlicher Auflösung prognostiziert werden. Dies wird in Abbildung 5-31 exemplarisch für den Abschnitt II der Säule gezeigt (Auflösung:  $\Delta\xi = 1$  mm,  $\Delta t = 1$  s). Im linken Teil der Abbildung ist die gemessene Stellgröße dargestellt. Im rechten Teil der Abbildung die prognostizierte Systemreaktion, d.h. der zeitliche Verlauf der Temperaturverteilung im Mantel der Säule.

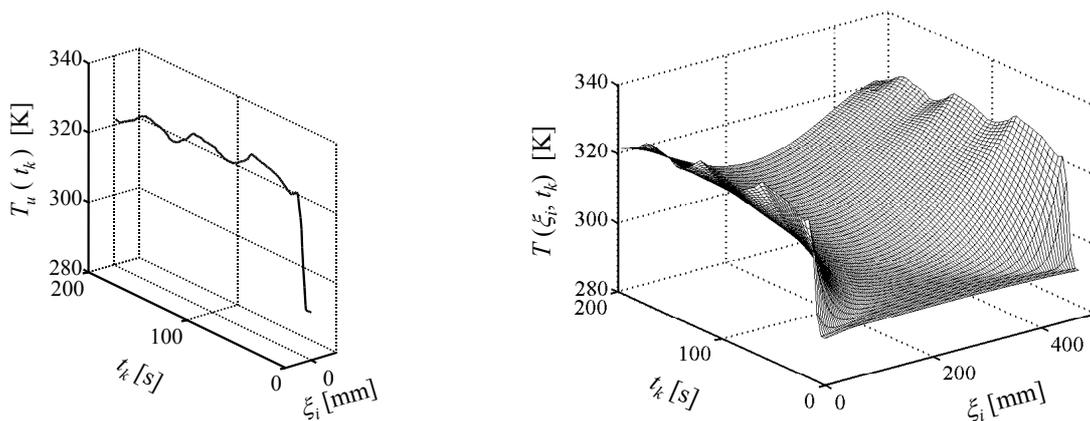


Abbildung 5-31: Prognostizierter zeitlicher Verlauf  $\bar{T}_{II}(\xi_i, t_k)$  der Temperaturverteilung im Abschnitt II

## 5.6 Erweiterung des Temperaturmodells zum Temperaturdeformationsmodell

### 5.6.1 Quantifizierung des Deformationsmodells

Bei Einwirkung einer einseitigen äußeren thermischen Belastung auf die schlanke Aluminiumsäule wird deren Deformation wesentlich durch die thermische Biegung (s.a. Kapitel 5.1.3, MÖHLENBRINK / WELSCH 1984, MÖHLENBRINK 1984, TIMOSHENKO / GOODIER 1985) verursacht. Für diese Zielgröße ist im Folgenden das Deformationsmodell zu quantifizieren, das mit dem identifizierten dynamischen Temperaturmodell im Sinne von Abbildung 5-2 verknüpft werden soll. Anhand der Modellerweiterung wird die Möglichkeit der Prognose von Temperaturdeformationsvorgängen exemplarisch vorgestellt. Eine Identifikation der physikalischen Parameter mittels KALMAN-Filterung kann unter Ausnutzung der instationären Temperaturverteilung als Stellgröße erfolgen. Diesbezügliche Untersuchungen bleiben nachfolgenden Arbeiten vorbehalten. An dieser Stelle ist der Ausbau des Temperaturmodells zum Temperaturdeformationsmodell im Sinne von HEUNECKE (1995) als Nutzerfunktion zu verstehen.

Im Rahmen der Elastizitätstheorie genügt die Säule der u.a. in WRYCZA (1983) beschriebenen Definition eines Balkens bzw. Stabes. Für die Durchbiegung eines balkenförmigen Körpers mit beliebigem Querschnitt aufgrund thermoelastischer Deformation wird in BOLEY / WEINER (1960) und TIMOSHENKO / GOODIER (1985) ein direkter Lösungsansatz vorgeschlagen, der auf den Gleichungen (5-1-a) von DUHAMEL-NEUMANN und dem Prinzip der virtuellen Arbeit beruht. Aufgrund der festen Verankerung der Säule mit dem Untergrund ist eine Betrachtung als einseitig eingespannter Balken möglich, womit der Ansatz wie folgt spezialisiert werden kann (s. RICHTER 1998):

$$\delta(x) = \int_0^H \frac{M_T(x_0) M_D(x_0; x)}{E I} dx_0 \quad \text{mit} \quad M_T(x) = - \iint_A \alpha_T E T(x, y, z) z dz dy \quad (5-40)$$

In obiger Gleichung wird die Auslenkung  $\delta(x)$  eines Balkens der Höhe  $H$  infolge der räumlichen Temperaturverteilung  $T(x, y, z)$  im Balken beschrieben (s.a. Abbildung 5-32). Hierbei repräsentiert  $M_D$  ein Biegemoment aufgrund eines virtuellen (fiktiven) Systems von Belastungen (s. GALLAGHER 1976) und  $M_T$  das Temperaturmoment.  $I$  bezeichnet das axiale Flächenträgheitsmoment,  $E$  das Elastizitätsmodul und  $\alpha_T$  den Temperatureausdehnungskoeffizienten des Materials. Das im Schwerpunkt der Querschnittsfläche  $A$  des Balkens gelagerte  $(y, z)$ -Koordinatensystem ist in Richtung der Hauptachsen (u.a. ZIEGLER 1970) orientiert.

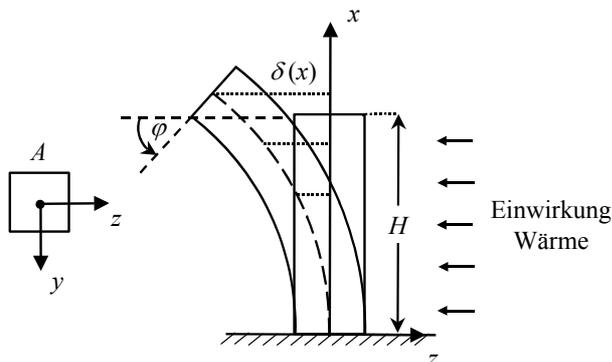


Abbildung 5-32: Thermische Biegung eines balkenförmigen Körpers (nach RICHTER 1998)

Gleichung (5-40) stellt einen allgemeingültigen Ansatz für die Berechnung der thermischen Biegung eines balkenförmigen Körpers dar. Mit der im Temperaturmoment  $M_T$  enthaltenen räumlichen Temperaturverteilung  $T(x, y, z)$  ist die Schnittstelle zur Verknüpfung des Temperaturmodells mit dem Deformationsverhalten des Körpers definiert.

Die indirekte Bestimmung des zeitlichen Verhaltens der thermischen Biegung kann u.a. durch die zeitliche Erfassung der Neigung  $\varphi$  (s. Abbildung 5-32) der Säule erfolgen. Hierzu wird der experimentelle Aufbau mit einem elektronischen Neigungsmesser (s. MÖHLENBRINK 1984) erweitert. Es handelt sich um den inertialen Sensor Q-flex 1400 (s. HONEYWELL 2002). Die Ausrichtung der neigungssensitiven Achse des Sensors erfolgt in Richtung der zu erwartenden Biegung / Neigung der Säule. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 5-33 dargestellt, wobei die Isolierung des Säulenmantels im Bild entfernt wurde.

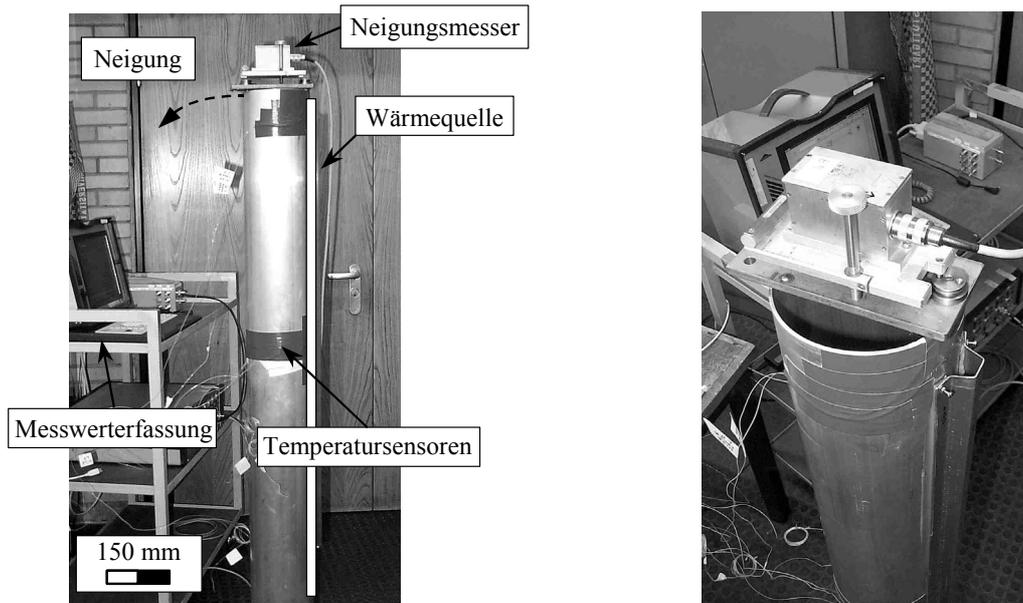


Abbildung 5-33: Versuchsaufbau zur Ermittlung der thermischen Biegung der Säule

In Abbildung 5-34 ist der gemessene zeitliche Verlauf  $\varphi_{\text{Mess}}(t_k)$  der Neigung der Säule als Reaktion auf die infolge der einseitigen Beheizung erzeugten Randtemperaturen  $T_{u, \text{Mess}, i}(t_k)$  für den Betrachtungszeitraum von 200 s dargestellt. Die Temperaturmessungen erfolgen in den in Abbildung 5-29 festgelegten Abschnitten ( $i = \text{I} \dots \text{III}$ ) der Säule. Die Messungen  $\varphi_{\text{Mess}}(t_k)$  des elektronischen Neigungsmessers sind auf den thermisch unbelasteten Zustand der Säule reduziert, wodurch der Nullpunkt des Sensors nicht zu berücksichtigen ist.

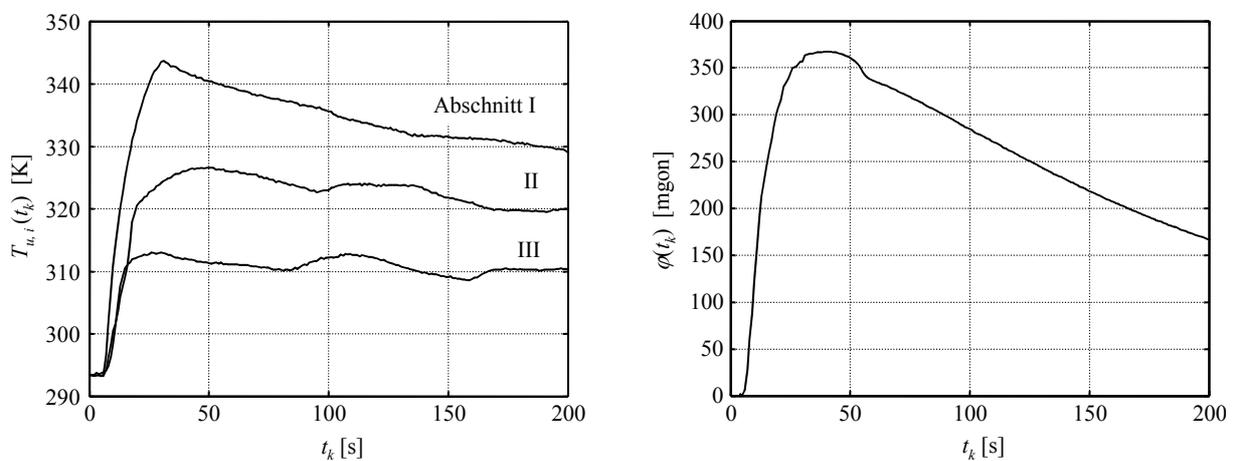


Abbildung 5-34: Verlauf der Neigung der Säule infolge einseitiger thermischer Belastung

Einer durch die Aufheizung der elektronischen Bauteile erzeugten Drift des Nullpunktes (Einlaufeffekte, s. MÖHLENBRINK 1984) wird durch eine entsprechend lange Vorwärmzeit von ca. 24 h und durch nahezu konstant gehaltene Raumtemperatur entgegengewirkt. Der Sensor selbst ist mittels einer Teflonaufgabe von der thermisch belasteten Säule entkoppelt, so dass durch das Experiment keine Beeinflussung erfolgen kann. Eine Langzeitdrift des Nullpunktes muss im betrachteten Zeitbereich nicht berücksichtigt werden. MÖHLENBRINK (1984) gibt exemplarisch für elektronische Neigungsmesser vom Typ Schaevitz bzw. Talyvel eine Drift  $< 1$  mgon für mehrere Tage an. Maßstabsfehler werden durch Kalibrierung des Sensors vor und nach der Messung klein gehalten. Der relative Maßstabsfehler der Laborkalibrierung liegt bei  $s_m / m = 0,03\%$ . Die Kalibrierung erfolgt auf einem Kipptisch (s. MÖHLENBRINK 1984) mit einer Referenzneigungsdifferenz von  $\Delta\varphi = 670,1$  mgon. Die maximal auftretenden Säulenneigungen liegen innerhalb dieses Neigungsbereichs.

Wie in Abbildung 5-34 ersichtlich ist, reagiert die Säule nahezu verzögerungsfrei auf die thermische Belastung. Mit Zunahme der Randtemperaturen  $T_{u, \text{Mess}, i}(t_k)$  nimmt auch die Neigung bis ca. 370 mgon zu, um anschließend allmählich zum Ausgangszustand  $\varphi = 0$  mgon zurückzukehren.

Für die Quantifizierung des Deformationsmodells muss für den Fall der Aluminiumsäule mit dünner Wandstärke nicht unmittelbar von Gleichung (5-40) ausgegangen werden. Im rechten Teil der Abbildung 5-35 ist exemplarisch der zeitliche Verlauf der über die drei vertikalen Abschnitte der Säule gemittelten Temperaturdifferenz

$$\Delta T_{\text{Mess}}^m(t_k) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\text{III}} \Delta T_{\text{Mess}, i}(t_k) = T_{u, \text{Mess}}^m(t_k) - T_{\text{Mess}}^m(\xi_{\text{Mess}, 5}, t_k) \quad (5-41)$$

zwischen den gemessenen Randtemperaturen und den diametral gegenüber (jeweils an den Stellen  $\xi_{\text{Mess}, 5}$ , s. Abbildung 5-21) gemessenen Temperaturen in Relation zur Neigung  $\varphi_{\text{Mess}}(t_k)$  der Säule dargestellt.

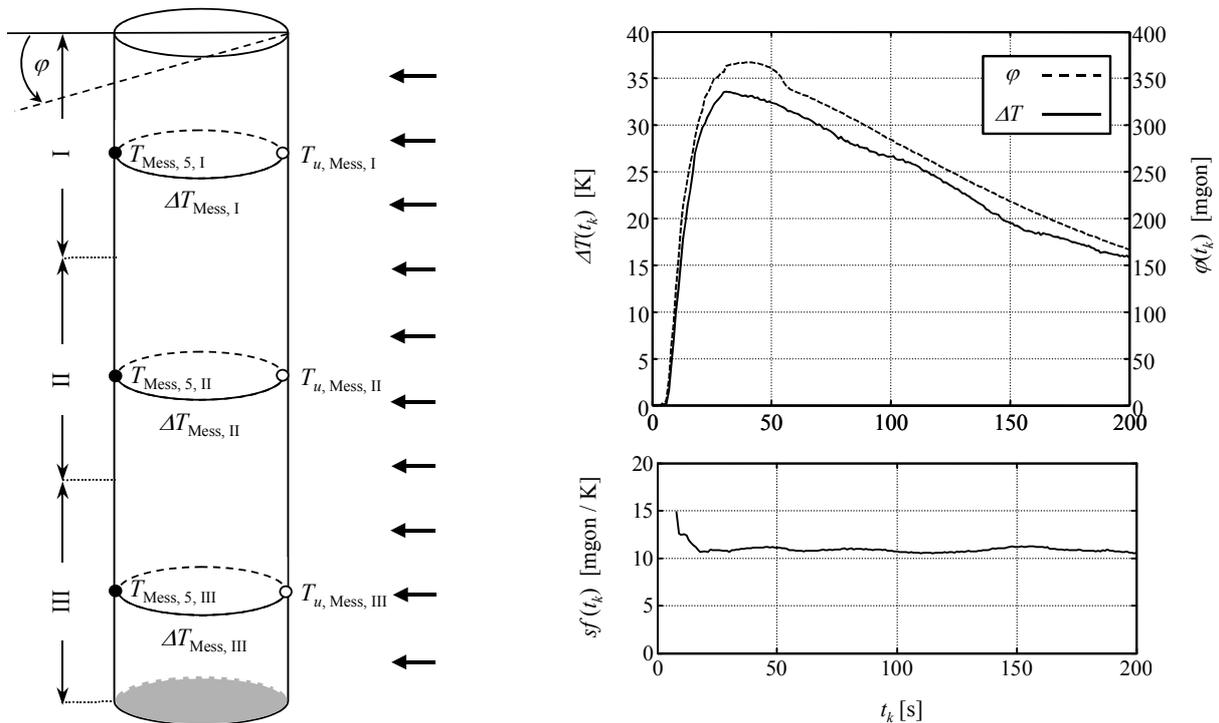


Abbildung 5-35: Gemeinsame Darstellung von Säulenneigung und gemittelten Temperaturdifferenzen

Aus dem ebenfalls im rechten Teil von Abbildung 5-35 gezeigten zeitlichen Verlauf des Verhältnisfaktors

$$sf(t_k) = \frac{\varphi_{\text{Mess}}(t_k)}{\Delta T_{\text{Mess}}^m(t_k)} \quad (5-42)$$

ist ersichtlich, dass zwischen Neigungen und gemittelten Temperaturdifferenzen im Betrachtungszeitraum mit guter Näherung ein linearer Zusammenhang angenommen werden kann.

Ein linearer Zusammenhang zwischen Temperaturdifferenz und Neigung wird u.a. nach PELZER (1974) und MÖHLENBRINK / WELSCH (1984) aus geometrischen Überlegungen motiviert. Dem Deformationsmodell für einen einseitig eingespannten nur von einer Seite thermisch belasteten zylinderförmigen Körper mit dünner Wandstärke kann hierbei die Modellvorstellung einer kreisbogenförmigen Verformung zugrunde gelegt werden (s. Abbildung 5-36). Für die Neigung  $\varphi$  gilt dann (u.a. PELZER 1974, MÖHLENBRINK / WELSCH 1984, MÖHLENBRINK 1984):

$$\varphi = \frac{H \alpha_T (T_u - T_5)}{d} = \frac{H \alpha_T \Delta T}{d} \quad (5-43)$$

Infolge der über die gesamte Höhe  $H$  des zylinderförmigen Körpers als konstant angenommenen Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_u - T_5$  zwischen thermisch belastetem und gegenüberliegendem unbelastetem Vertikalprofil erfolgt beim belasteten Profil eine thermische Längenänderung  $dH = \alpha_T H \Delta T$  gegenüber dem unbelasteten Profil. Diese Längenänderung bewirkt eine gleichmäßige Krümmung des Körpers, wodurch eine kreisbogenförmige Biegelinie (u.a. MÖHLENBRINK 1984) entsteht. Bei einem Durchmesser  $d$  ergibt sich für den Zentriwinkel bzw. die diesem entsprechende Neigung  $\varphi$  gerade die Beziehung (5-43). Im vorliegenden Modell ist der Nullpunkt der Neigung auf den Zustand des Körpers bei räumlich konstanter Temperaturverteilung bezogen.

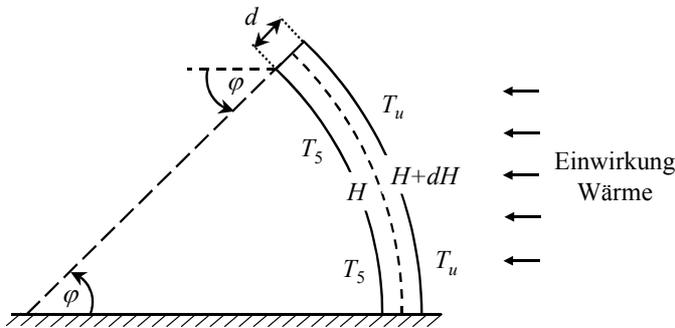


Abbildung 5-36: Kreisbogenförmige thermische Biegung eines zylinderförmigen Körpers mit dünner Wandstärke (nach MÖHLENBRINK / WELSCH 1984)

Das Modell (5-43) wird im Folgenden zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs der Neigung  $\varphi(t_k)$  der Säule verwendet. Die Forderung der über die Höhe  $H$  der Säule konstanten Temperaturdifferenz  $\Delta T$  wird dahingehend modifiziert, dass die über die drei Säulenabschnitte gemittelte Temperaturdifferenz  $\Delta T^m$  in das Modell eingeführt wird.

$$\varphi(t_k) = \frac{H \alpha_T \Delta T^m(t_k)}{d} \quad \text{mit} \quad \Delta T^m(t_k) = T_u^m(t_k) - T^m(\xi_{\text{Mess},5}, t_k) \quad (5-44)$$

Das Deformationsmodell (5-44) beschreibt die verzögerungsfreie (quasi-statische) zeitliche Reaktion der Säule auf die Temperaturdifferenz zwischen den Vertikalprofilen. Abweichungen gegenüber der Realität entstehen hierbei im Wesentlichen durch die nachfolgenden Vereinfachungen:

- Vernachlässigung der durch eine nichtlineare Temperaturverteilung im Körper erzeugten Biegespannungen, wodurch die thermische Biegung unabhängig von der Art des Querschnitts berechnet werden kann (u.a. TIMOSHENKO / GOODIER 1985, RICHTER 1998)
- Homogenisierung der über die Höhe der Säule nicht konstanten Temperaturdifferenzen  $\Delta T_i(t_k)$  durch Einführung des Mittelwertes  $\Delta T^m(t_k)$

Durch die Bestimmung der in (5-44) enthaltenen Temperaturdifferenz  $\Delta T^m(t_k)$  mittels des identifizierten Temperaturmodells wird letzteres zu einem Deformationsmodell erweitert. Hierbei werden die infolge der einseitigen thermischen Belastung erzeugten Randtemperaturen  $T_{u,i}(t_k)$  der Säulenabschnitte wieder als die Stellgrößen des geodätischen Systems betrachtet. Die Säulenneigung  $\varphi(t_k)$  ist die interessierende Ausgangsgröße. Mit der Kombination von (5-21) mit (5-44) wird das Systemübertragungsverhalten durch ein dynamisches Strukturmodell quantifiziert. Als Nutzerfunktion liegt damit ein dynamisches Temperaturdeformationsmodell vor.

## 5.6.2 Prognose des Deformationsverhaltens der Aluminiumsäule

Die Prognose des Deformationsverhaltens der Säule erfolgt mit dem in Abbildung 5-37 gezeigten Prädiktor, dessen Kern durch das in Abbildung 5-27 dargestellte Berechnungsverfahren für die senkrecht zur vertikalen konstruktiven Achse der Säule erfolgende Ausbreitung der Wärme gebildet wird. Der Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Neigung  $\varphi(t_k)$  liegt die messtechnische Erfassung  $T_{u,\text{Mess},i}(t_k)$  der Stellgrößen in den Abschnitten I bis III der Säule (Abbildung 5-29 bzw. Abbildung 5-35) zugrunde. Aufgrund der Linearität des Temperaturmodells (5-21) hinsichtlich der Temperaturzustandsparameter und der Temperaturstellgröße kann die zur Bestimmung der Temperaturdifferenz  $\Delta T^m(t_k)$  erforderliche mittlere Temperatur  $\bar{T}^m(\xi_{\text{Mess},5}, t_k)$  direkt aus der Berechnung der mittleren Temperaturverteilung  $\bar{T}^m(\xi_j, t_k)$  der Säule erhalten werden. Als abgeleitete Stellgröße ist dann die über die drei Abschnitte gemittelte Randtemperatur  $T_{u,\text{Mess}}^m(t_k)$  einzuführen.  $\bar{T}^m(\xi_{\text{Mess},5}, t_k)$  wird durch Extraktion aus der Temperaturverteilung gewonnen. Die Beurteilung des im Betrachtungszeitraum von 200 s prognostizierten Verlaufs der Neigung  $\varphi(t_k)$  erfolgt durch unabhängig durchgeführte Neigungsmessungen  $\varphi_{\text{Mess}}(t_k)$ .

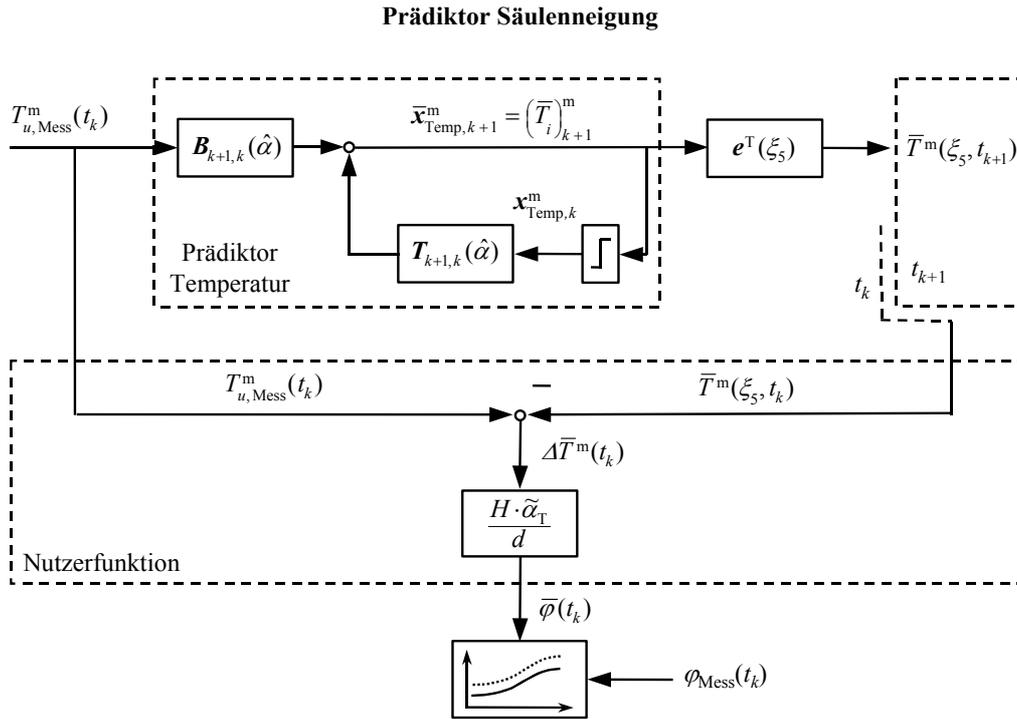


Abbildung 5-37: Prognose  $\bar{\varphi}(t_k)$  des zeitlichen Verlaufs der Neigung der Säule

Entsprechend der Vorgehensweise bei den in den Kapiteln 5.5.1.2 und 5.5.2 durchgeführten Berechnungen erfolgt die zur Initialisierung des Prädiktors notwendige Bestimmung der mittleren Temperaturverteilung  $\bar{T}^m(\xi_i, t_0 = 0s)$  mittels  $T_{u, Mess}^m(t_0 = 0s)$ . Hierdurch wird das Mittel der zu Beginn der Heizphase in den drei Abschnitten der Säule vorliegenden Temperaturverteilungen (Niveau der Raumtemperatur) repräsentativ erfasst. Der Fortschritt des Prädiktors entspricht mit  $\Delta t = 1s$  der Abtastung der Stellgrößen.

Die Ergebnisse des Experiments sind in Abbildung 5-38 dargestellt. Der linke Teil der Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der über die Abschnitte I bis III der Säule gemittelten Stellgröße  $T_{u, Mess}^m(t_k)$ . Im rechten Teil der Abbildung ist die prognostizierte (—) Neigung  $\bar{\varphi}(t_k)$  der unabhängig gemessenen (---) Neigung  $\varphi_{Mess}(t_k)$  der Säule gegenübergestellt. Der Berechnung liegt der für die Aluminiumlegierung AlMgSi0,5 im interessierenden Temperaturbereich gültige mittlere lineare Temperatursausdehnungskoeffizient  $\tilde{\alpha}_T = 23,4 \cdot 10^{-6} K^{-1}$  zugrunde (nach KAMMER 1995). Die Geometrie der Säule geht mit ihrer Höhe  $H = 1533mm$  und dem Durchmesser  $d = 150mm$  in das Deformationsmodell ein.

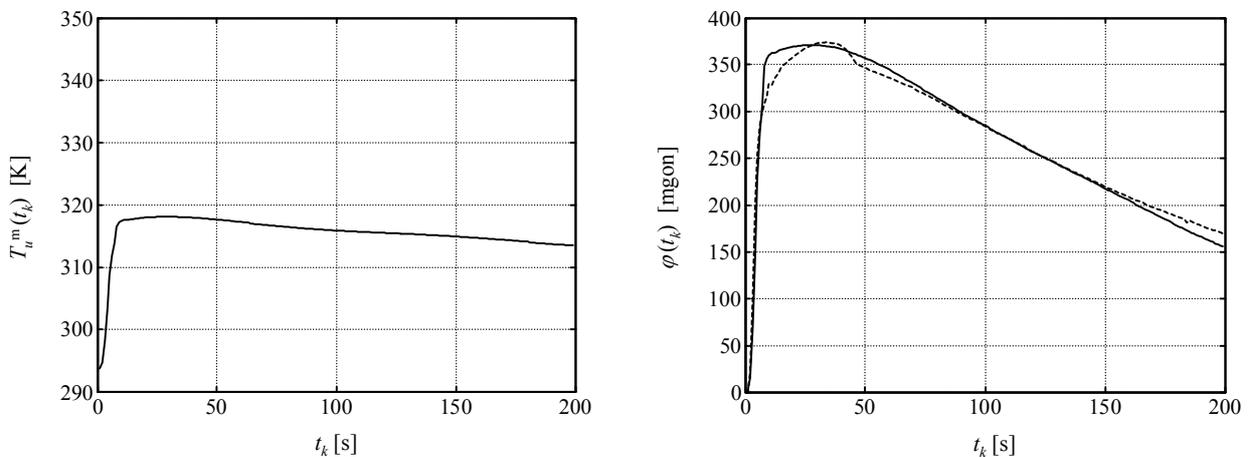


Abbildung 5-38: Gemittelte Stellgröße  $T_{u, Mess}^m(t_k)$  und prognostizierte (—) Neigung  $\bar{\varphi}(t_k)$  bzw. unabhängig gemessene (---) Neigung  $\varphi_{Mess}(t_k)$  der Säule

Wie in der Abbildung ersichtlich ist, wird die gemessene Neigung im Betrachtungszeitraum von 200 s gut durch die prognostizierte Neigung repräsentiert. Die mittlere Abweichung liegt bei 10 mgon (*r.m.s.*-Wert, s. Tabelle 5-5). Der Rückgang der Neigung aufgrund des allmählichen Temperaturausgleichs der Säule stellt den eigentlichen dynamischen Zeitabschnitt im Verlauf der Temperaturdeformation dar. Dieser wird im Prädiktor durch das zugrunde liegende identifizierte Temperaturmodell modelliert.

Auf der Grundlage der Kalibrierungsergebnisse kann für den elektronischen Neigungsmesser im vorliegenden Neigungsbereich eine empirische Standardabweichung  $s_\varphi = 0,2$  mgon angegeben werden. Im Gegensatz zur Verifikation der Temperaturverteilungen in den Kapiteln 5.5.1.2 und 5.5.2 liegt das Genauigkeitsniveau der Neigungsmessungen somit erheblich über den Ergebnissen der Prognose. Die Fehlerfortpflanzung im Deformationsmodell (5-44) bzgl. der über die Säule gemittelten Temperaturdifferenz  $\Delta T^m$

$$\sigma_\varphi = \frac{H \tilde{\alpha}_T}{d} \sigma_{\Delta T^m} = 5 \text{ mgon} \quad \text{mit } \sigma_{\Delta T^m} = 0,3 \text{ K} \quad (5-45)$$

zeigt, dass alleine aufgrund der Messgenauigkeit der Temperaturmesssensoren ( $\sigma_{T_{\text{Mess}}} = 0,4 \text{ K} \Rightarrow \sigma_{\Delta T^m} = 0,3 \text{ K}$ , bei drei Abschnitten zur Mittelbildung) *r.m.s.*-Werte in der o.g. Größenordnung zu erwarten sind. In der in (5-45) ermittelten Standardabweichung sind systematisch wirkende Modellabweichungen noch nicht berücksichtigt. Nutzerfunktion und verwendete Temperatursensoren tragen somit wesentlich zur Begrenzung des Genauigkeitsniveaus der Prognose bei. Innerhalb dieser Rahmenbedingungen wird mit dem identifizierten Temperaturmodell (5-21) im Betrachtungszeitraum ein sehr gutes Ergebnis erzielt.

Ein im experimentellen Aufbau enthaltener möglicher Fehlwinkel  $\chi$  zwischen der Ausrichtung der sensitiven Achse des Neigungsmessers und der Hauptrichtung der thermischen Biegung der Säule hat im vorliegenden Neigungsbereich einen nur geringen Einfluss. Für den sehr pessimistisch angenommenen Fall von  $\chi = 5$  gon und einer maximal erreichten Neigung von  $\varphi = 400$  mgon weist die Neigungsmessung dann eine Abweichung von  $\Delta\varphi \approx 1$  mgon gegenüber der tatsächlich erfolgten Neigung auf.

Die maximale Abweichung zwischen Prognose und Messung liegt nach 10 s mit 40 mgon vor, was 12 % des Messwertes entspricht. Im zeitlichen Umfeld dieses Extremwertes wird das sehr differenzierte Neigungsverhalten der Säule durch die Prognose nur generalisiert wiedergegeben. Die Begründung hierfür ist durch die in Kapitel 5.6.1 diskutierten, mit der verwendeten Nutzerfunktion einhergehenden Vereinfachungen gegeben. Die Vernachlässigung der thermisch bedingten Materialspannungen verhindert im Modell die Vorhersage von Ereignissen wie den bei  $t_k = 45$  s zu erkennenden „Knick“ im Neigungsverlauf. Die Auflösung dieser Details erfordert die Erstellung des Deformationsmodells auf der Grundlage von Gleichung (5-40) und kann mit dem vorliegenden Ansatz nicht geleistet werden.

Anhand der in Tabelle 5-5 dargestellten Variationen der Temperaturleitfähigkeit  $\alpha$  kann gezeigt werden, dass innerhalb der dreifachen Standardabweichung ( $\approx \pm 4\%$ ) um den geschätzten Wert  $\hat{\alpha}$  die größte Konformität zwischen Prognose und Messung erzielt wird. Dieses Ergebnis entspricht den aus der Verifikation des Temperaturmodells in Kapitel 5.5.1.2 erhaltenen Erkenntnissen, womit die Verträglichkeit von identifiziertem Temperaturmodell (5-21) und Nutzerfunktion (5-44) festgestellt werden kann. Das Temperaturdeformationsmodell der Säule kann im vorliegenden Betrachtungszeitraum und Lastbereich als verifiziert angenommen werden. Der Begriff der Verifikation ist vor dem Hintergrund der modell- und sensorbedingten Abweichungen zu betrachten.

In der Tabelle ist ebenfalls ersichtlich, dass auch bei einer Variation bis  $\pm 10\%$  des Schätzwertes noch eine vergleichsweise gute Konformität zwischen prognostiziertem und gemessenem Neigungsverlauf erzielt wird. Hieraus kann die Aussage abgeleitet werden, dass die Temperaturleitfähigkeit – bei vorliegendem einfachen Deformationsmodell, Betrachtungszeitraum und Lastbereich – nicht notwendigerweise mit der in Tabelle 5-3 dargestellten Standardabweichung bestimmt werden muss. Eine Verschlechterung der Standardabweichung um den Faktor 2 bis 3 liefert im vorliegenden Fall noch vergleichbar gute Ergebnisse und ist für eine (zumindest qualitative) Beurteilung des Neigungsverlaufs der Säule ausreichend.

Tabelle 5-5: Konformität zwischen prognostizierten und gemessenen Neigungen

Variation $\alpha$	-10%	-5%	-4%	$\hat{\alpha}$	+4%	+5%	+10%
<i>r.m.s.</i> [mgon]	12,7	10,1	9,9	10,0	11,7	12,3	15,9
$r.m.s. = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_k v_k^2}$ mit $v_k = \bar{\varphi}(t_k) - \varphi_{\text{Mess}}(t_k)$							

Die prognostizierten Neigungen  $\bar{\varphi}$  können in Auslenkungen  $\bar{\delta}(H)$  des oberen Endes der Säule umgerechnet werden (s.a. Abbildung 5-32). Unter Berücksichtigung der in Kapitel 5.6.1 getroffenen Vereinfachungen ergibt sich nach PELZER (1974) die folgende einfache Beziehung:

$$\bar{\delta}(H, t_k) = \frac{H^2 \alpha_T (T_u^m(t_k) - \bar{T}^m(\xi_{\text{Mess},5}, t_k))}{2d} = \frac{H}{2} \bar{\varphi}(t_k) \quad (5-46)$$

Mittels (5-46) und der in Abbildung 5-38 dargestellten Prognose für die Neigung der Säule folgt dann für die Prognose der Auslenkung der in Abbildung 5-39 gezeigte Verlauf.

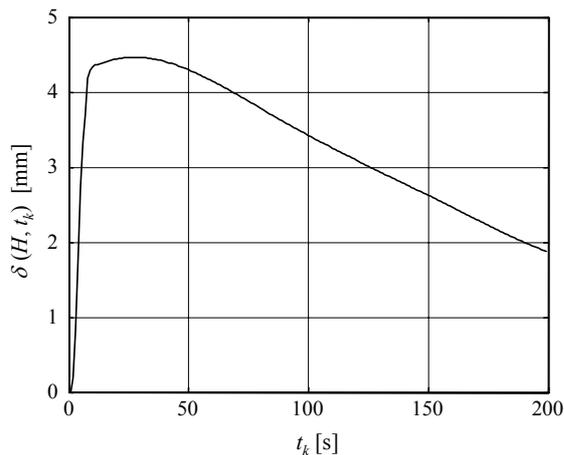


Abbildung 5-39: Prognostizierte Auslenkung  $\bar{\delta}(H, t_k)$  des oberen Endes der Säule

## 5.7 Bewertung der Ergebnisse und Möglichkeit zur Modellübertragung

In den vorangegangenen Kapiteln wurde ein dynamisches Strukturmodell für die thermische Biegung einer Aluminiumsäule erstellt. Die Ergebnisse des Vergleichs von Prognosen und unabhängigen Kontrollmessungen sind in Tabelle 5-6 nochmals zusammenfassend dargestellt.

Tabelle 5-6: Zusammenfassung der Verifikationsergebnisse des Deformationsmodells

	Temperaturverteilung der Säule		Säulenneigung
	Abschnitt I	Abschnitte II und II	
<i>r.m.s.</i>	1,4 K	0,8 K	10 mgon

Die *r.m.s.*-Werte der Temperaturverteilung liegen im Bereich der dreifachen Standardabweichung der Temperaturmesssensoren ( $\sigma_T = 0,4$  K). Die Prognose der Säulenneigung weist mit einer mittleren Abweichung von 10 mgon (= 0,1 mm Auslenkung des oberen Endes der Säule) einen realitätsnahen Verlauf auf (s.a. Abbildung 5-38). Das identifizierte Deformationsmodell kann damit als verifiziert bewertet werden.

Systematische Abweichungen werden im Wesentlichen aufgrund konvektiver Störeinflüsse durch das umgebende Medium Luft und durch die Vernachlässigung der Biegespannungen verursacht. Eine Verbesserung der Prognoseergebnisse kann nur durch eine diesbezügliche Erweiterung im deterministischen Teil des Deformationsmodells erzielt werden.

Im Fall einer als einseitig anzunehmenden thermischen Belastung des Körpers, ist eine wichtige Anwendung für das Modell auf dem Gebiet der Simulationsrechnungen zu sehen. Im Gegensatz zu der bei der kausalen Betrachtung von Temperatureinflüssen bislang üblichen Definition der Stellgrößen als Temperaturdifferenzen zwischen gegenüberliegenden Messstellen (HEUNECKE 1996, GÜLAL 1997) wird im vorliegenden Fall der Zusammenhang zwischen den interessierenden Temperaturstellen der Säule durch ein dynamisches Temperaturmodell quantifiziert. Die alleinige Vorgabe der durch eine Wärmequelle erzeugten Randtemperaturen  $T_{u,i}$  ermöglicht dann eine realistische Berechnung des Deformationsverhaltens der Säule, ohne dass im Vorfeld die Notwendigkeit einer messtechnischen Erfassung des

zeitlichen Verhaltens der Temperaturdifferenzen besteht. Mittels des identifizierten Temperaturdeformationsmodells können im betrachteten Temperaturbereich beliebige Belastungsszenarien simuliert und untersucht werden.

Zur Übertragung des vorliegenden Temperaturdeformationsmodells auf eine schlanke Baukonstruktion bzw. ein balkenförmiges Maschinenelement sind gegebenenfalls die nachfolgenden Maßnahmen vorzunehmen:

1. Erreicht der konvektive Wärmeaustausch des Körpers mit dem umgebenden Medium (z.B. Luft) eine Größenordnung, welche dessen ausschließlich stochastische Berücksichtigung als Störgröße nicht mehr zulässt, so muss eine entsprechende Modifizierung in der deterministischen Modellbildung erfolgen. Die Einwirkung von Wärmequellen bzw. -senken ist dann nicht mehr örtlich konzentriert, sondern mittels einer ortsdiskreten Quellenfunktion entlang des Mantels zu formulieren (s. Kapitel 5.3.3.1).
2. Im Fall der inhomogenen Einwirkung äußerer Wärmequellen / -senken ist die eindimensionale Betrachtung des Wärmestroms unter Umständen nicht mehr ausreichend. Des Weiteren kann die Wandstärke eines Bauwerks / Maschinenelements im Allgemeinen nicht vernachlässigt werden, bzw. der betrachtete Körper ist sogar vollständig ausgefüllt. Zur Beschreibung der instationären Temperaturverteilung ist dann der Übergang von der PDGL (5-2) auf die räumliche Darstellung (5-1-b) erforderlich. Die finiten Ortsdifferenzen gehen in räumliche finite Elemente über. Die Stellgrößen können durch die zugehörigen Randbedingungen an den Außenelementen des Körpers definiert werden (z.B. REICHMANN 1978).
3. Bei der Untersuchung einer Baukonstruktion ist nicht notwendigerweise von der Realisierbarkeit der für die Schätzung der Materialparameter benötigten optimalen Konfiguration der Messstellen auszugehen. Wie in den Kapiteln 5.5.1 und 5.5.2 gezeigt wurde, ist es ebenfalls möglich, die Identifikationsaufgabe anhand eines repräsentativen Ausschnitts im kontrollierten experimentellen Umfeld durchzuführen und anschließend auf dem Bauwerk zu verifizieren.
4. Ist zur adäquaten Beschreibung der thermischen Biegung die Berücksichtigung von im Inneren des Körpers auftretenden Temperaturspannungen erforderlich, so kann dies mittels der Verknüpfung von Temperaturmodell und Gleichung (5-40) geschehen. Dieser Ansatz stellt bereits eine Spezialisierung bzgl. der Auslenkung des Körpers dar. Das Verschiebungsfeld der materiellen Körperpunkte ist mit der als aufwändig einzustufenden Formulierung (5-1-a) gegeben, wobei im identifizierten Modell dann auch die räumliche Spannungsverteilung und deren zeitlicher Verlauf ermittelt werden können. Für die Stressanalyse werden die u.a. in BOLEY / WEINER (1960) beschriebenen thermoelastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (Stress-Strain Relations) verwendet.

Die Entscheidung zur Durchführung einer oder mehrerer der o.g. Maßnahmen ist applikationsabhängig. Die Modifizierungen sind zunächst im Rahmen der theoretischen Systemanalyse aufgrund von Vorkenntnissen über das zu untersuchende Objekt und die Art der Belastung vorzunehmen. Aber auch während der experimentellen Systemanalyse ist bei einer nicht erfolgreichen Identifikation und / oder Verifikation unter Umständen eine Veränderung des Strukturmodells erforderlich. Es handelt sich letztendlich um eine iterative Vorgehensweise (s. Kapitel 2.2.2, ISERMANN 1974).

## 6 Parametrische Identifikation einer Fahrzeugbewegung unter Verwendung eines kausal modifizierten Ansatzes

### 6.1 Aufgabenstellung und Anforderungen

Das Beispiel der parametrischen Identifikation der Bewegung eines Landfahrzeugs (PKW) entstand als Teilprojekt im Rahmen einer Beauftragung durch die DaimlerChrysler AG. Zielsetzung des Projektes war die Bereitstellung eines Algorithmus zur möglichst genauen und zuverlässigen Positionsbestimmung eines Fahrzeugs, welcher, unabhängig von digitalen Karten, unter Verwendung von hybriden Positionssensoren als Eingangsgrößen und Annahmen über die Fahrzeugbewegung realisiert werden sollte. Die Bestimmung der Position war hierbei auf die Lage  $(Y, X)$  beschränkt. Die vollständige Darstellung der Ergebnisse erfolgte in Form eines Abschlussberichtes (EICHORN et al. 2001).

Eine wichtige zukünftige Anwendung der kartenunabhängigen Fahrzeugortung ist im Bereich von „Location Based Services“ (u.a. BERNHARDT 2002) zu sehen. Als Beispiel hierfür ist die gezielte Führung von Rettungskräften zu einem Unfallort zu nennen. Dazu kann vom verunfallten Fahrzeug ein Notruf in Kombination mit der Position bzw. der letzten Positionsfolge an eine Notrufzentrale abgesetzt werden. Ein weiteres Anwendungsfeld ist durch das „Mobile Mapping“ (u.a. AUSSEMS 1999, STERNBERG 2000), d.h. die mobile Erfassung von Straßendaten, gegeben. Hierbei wird die Erfassung bzw. Aktualisierung von Datenbeständen des Straßenraums bzw. dessen Umfelds mittels Multisensorfahrzeugen realisiert. Zur Georeferenzierung der gesammelten Daten ist die Bestimmung der vom Fahrzeug zurückgelegten Folge von Positionen erforderlich. Als drittes wichtiges Anwendungsfeld können noch die „Map Matching“-Verfahren genannt werden. Die genaue Standortbestimmung des Fahrzeugs erfolgt durch Ermittlung der Form der gefahrenen Trajektorie und deren Einpassung in eine digitale Karte (s. CZOMMER 2001a). Als mögliches Szenario ist hierbei angedacht, dass die Karte in einer Zentrale (z.B. der bereits genannten Notrufzentrale) vorgehalten wird, wodurch das Map Matching dann nicht im Fahrzeug, sondern zentralenseitig durchgeführt wird. Mit Hilfe von Positionssensoren wie Radsensoren („Odometer“) und Kreisel ist die Bestimmung von Trajektorien mit einer sehr guten lokalen Formtreue möglich. Es handelt sich allerdings nur um relative Positionsinformationen, welche auf längeren Fahrabschnitten erheblichen sensorbedingten, systematischen Fehlereinflüssen wie Maßstabseffekten und Drifterscheinungen unterliegen (u.a. LABAHN 2000, CZOMMER 2001a). Bei optimaler Kombination mit einem absoluten Positionsverfahren wie GPS (= Global Positioning System) können diese Schwächen kompensiert werden. Im Ergebnis wird eine glatte Trajektorie mit bekannter absoluter Lage erzeugt. Die kartenunabhängige Fahrzeugortung liefert dann sehr gute Startwerte für den in der nächsten Stufe erfolgenden Matching-Prozess.

Aufgrund des o.g. Anwendungsspektrums wurden zu Beginn des Projektes die nachfolgenden Anforderungen an die Positionssensoren und den Algorithmus zu deren Zusammenführung definiert:

1. Echtzeitfähigkeit der Positionsbestimmung, d.h. die Position des Fahrzeugs soll mit möglichst geringer zeitlicher Verzögerung (in der Größenordnung einiger Millisekunden) bereitgestellt werden. Diese Anforderung schließt eine Auswertung der Sensordaten im Postprocessing aus. Die Berechnung der Position muss während der Fahrt im Fahrzeug erfolgen.
2. Das Fahrzeug muss sich im öffentlichen Verkehrsfluss mit der üblichen Fahrdynamik bewegen können. Als typische Szenarien sind Fahrten im Innenstadtbereich von Stuttgart, auf Landstraßen und auf Autobahnen vorgegeben, wobei maximale Geschwindigkeiten bis 180 km/h und schnelle Änderungen der Fahrzeugorientierung auftreten.
3. Die obere Grenze der erforderlichen absoluten Genauigkeit der Positionsbestimmung bezieht sich im Wesentlichen auf den Anwendungsbereich der Location Based Services und ist mit einer Standardabweichung von  $\sigma_Y = \sigma_X < 4$  m festgelegt. Dies entspricht ungefähr der Breite einer Fahrspur. Im Hinblick auf eine formtreue Repräsentierung der gefahrenen Trajektorie soll die Relativgenauigkeit von aufeinanderfolgenden Positionen besser als die absolute Genauigkeit sein. Eine obere Grenze wurde diesbezüglich aber im Vorfeld nicht explizit definiert.
4. Für die Abtastrate, d.h. die zeitliche Diskretisierung der gefahrenen Trajektorie ist ein Zeitintervall von  $\Delta t = 1$  s festgelegt (s.a. Punkt 2). Hieraus ergibt sich unmittelbar die erforderliche Mindestfrequenz für die Bereitstellung der Messwerte der im Algorithmus zusammenzuführenden Positionssensoren und der zeitliche Fortschritt im Algorithmus selbst.
5. In Hinblick auf die o.g. Map Matching-Verfahren muss mit der ermittelten Positionsfolge des Fahrzeugs eine formtreue Repräsentierung der gefahrenen Trajektorie vorliegen (s.a. Punkt 3).
6. Der bereitzustellende Algorithmus soll eine Steigerung der Zuverlässigkeit der Positionsbestimmung gegenüber den Einzelsensoren gewährleisten. Hierbei liegt ein wesentlicher Schwerpunkt in der Aufdeckung und Eliminierung von groben Fehlern (z.B. Abweichungen der GPS-Position aufgrund von „Multipath“-Effekten in dicht bebauten Gebieten, u.a. SEEBER 1989). Mit dem Ziel der Bereitstellung einer möglichst unterbrechungsfreien Folge von Positionen (s.a. Punkt 4) sollen temporäre Ausfälle von Positionssensoren überbrückt und eine Steigerung der Verfügbarkeit gegenüber den Einzelsensoren erzielt werden. Aus diesen Zuverlässigkeits- und

Verfügbarkeitsforderungen resultiert unmittelbar die Forderung nach der Einführung von geometrischen Redundanzen im Algorithmus und dessen Fähigkeit zur Ermittlung und Prädiktion von wesentlichen Kenngrößen des Fahrzeugzustands (z.B. Position, Geschwindigkeit und Orientierung).

7. Als Positionssensoren sind preisgünstige standardisierte Systeme einzusetzen, d.h. Komponenten, die in der Automobilindustrie bereits serienmäßig in Fahrzeuge integriert werden. Hierbei handelt es sich um absolutes GPS, Odometer, Tachosignal, einfache Kreisel u.s.w. Dieser wesentliche ökonomische Aspekt erfordert die optimale Ausnutzung und Kombination der Einzelsensoren.

Aus den Forderungen nach Echtzeit- und Prädiktionsfähigkeit des Algorithmus (Punkte 1 und 6) und dem großen Variationsbereich innerhalb der Kinematik der Fahrzeugbewegung (Punkt 2) resultiert unmittelbar die Auswahl eines diskreten KALMAN-Filters. Hiermit werden die Zuverlässigkeitsanforderungen (Punkt 6) zufriedenstellend berücksichtigt, da mit der statistischen Bewertung der Innovationen eine unmittelbare Beurteilung der aktuell eingehenden Messwerte erfolgen kann. Die im Prinzip beliebig erweiterbaren Messgleichungen des Filters sichern sowohl eine ausreichende Redundanz als auch die Steigerung der Verfügbarkeit (Punkte 4 und 6). Die in den Schätzalgorithmus einfließenden stochastischen Modelle der Positionssensoren gewährleisten deren optimale Gewichtung (Punkte 3 und 7). Das im Filter enthaltene Bewegungsmodell des Fahrzeugs erzeugt eine – im Rahmen der vorgegebenen physikalischen Annahmen – gewisse ‚Trägheit‘ der ermittelten Folge von Fahrzeugpositionen und somit einen glatten Verlauf der geschätzten Trajektorie (Punkt 5).

Die Positionssensoren sind dann unter Berücksichtigung aller Anforderungen auszuwählen. Es handelt sich hierbei um

- Absolutes GPS zur Bestimmung des absoluten Position ( $Y_{\text{GPS}}, X_{\text{GPS}}$ ) des Fahrzeuges
- Odometer zur Bestimmung von zurückgelegten Streckeninkrementen ( $\Delta s_{\text{Odo}}$ ) und Orientierungsänderungen ( $\Delta \alpha_{\text{Odo}}$ ) des Fahrzeugs
- Kreisel zur Ermittlung von Orientierungsänderungen ( $\Delta \alpha_{\text{Kreisel}}$ ) des Fahrzeugs

Die Kombination aus absolutem Positionssensor (GPS) und Sensoren zur Ermittlung der Form der gefahrenen Trajektorie (Radsensoren und Kreisel) ermöglicht die Schätzung einer lagerichtigen (Punkt 3) und formtreuen (Punkt 5) Trajektorie. Aufgrund ihrer hohen Sensitivität bzgl. Änderungen des Bewegungszustands des Fahrzeuges sind gerade Odometer und Kreisel als formbestimmende Sensoren für den Einsatz im festgelegten fahrdynamischen Umfeld (Punkt 2) besonders geeignet (s.a. CZOMMER 2001a). Durch die gegenseitige Kontrolle der Sensoren und der möglichen Überbrückung von temporären Sensorausfällen erfolgt eine erhebliche Steigerung der Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit (Punkte 4 und 6) in der Positionsbestimmung. Da es sich um handelsübliche „Low Cost“-Sensoren handelt, die bereits in anderen Fahrzeugsystemen integriert sind, wird die ökonomische Anforderung (Punkt 7) ebenfalls erfüllt.

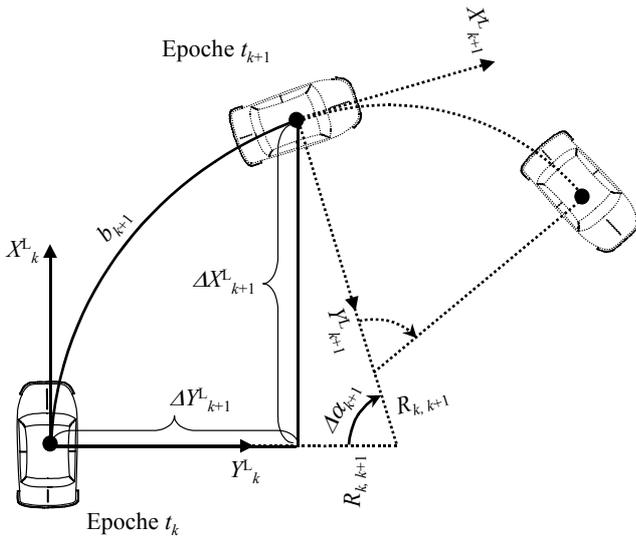
Mit der Bestimmung von relativen Positionsänderungen des Fahrzeugs aus gemessenen Richtungsänderungen (Odometer und Kreisel) bzw. Streckeninkrementen (Odometer) liegt eine Koppelnavigationsaufgabe bzw. ein „Dead-Reckoning“ vor (u.a. CZOMMER / MÖHLENBRINK 1999, CZOMMER 2001a). Startpunktbestimmung und Stützung der relativen Positionssensoren werden durch absolutes GPS realisiert. Die optimale Zusammenführung der Sensoren erfolgt im KALMAN-Filter, wobei durch das Bewegungsmodell eine zusätzliche Stützung der Sensoren gegeben ist. Bei Ausfall eines oder mehrerer Sensoren besteht weiterhin die Möglichkeit der Fortschreibung des Bewegungszustands des Fahrzeugs in einer reduzierten Konfiguration (Steigerung der Verfügbarkeit).

## 6.2 Aufbau des diskreten KALMAN-Filters zur Schätzung der Fahrzeugbewegung

### 6.2.1 Modellierung der Fahrzeugbewegung und Integration in das Filter

Die im Folgenden beschriebene Modellierung der Fahrzeugbewegung basiert auf dem in die Ebene projizierten Grundmodell von AUSSEMS (1999). Die Geometrie der vom Fahrzeug zurückgelegten Trajektorie wird hierbei als Folge von Kreisbögen approximiert, wobei in den Übergangspunkten jeweils eine gemeinsame Tangente anzunehmen ist. Letztere ist durch die Forderung nach einem stetigen Verlauf der Fahrzeugorientierung  $\alpha$  über dem zurückgelegten Weg  $s$  motiviert. Die skalare Bahngeschwindigkeit  $v$  des Fahrzeugs wird innerhalb des Filterfortschritts von  $\Delta t = 1$  s als konstant angenommen. Im physikalischen Sinne liegt im Abtastintervall eine gleichförmige Kreisbewegung vor (s.a. GERTHSEN 1982). Abweichungen von der Annahme der Gleichförmigkeit der Bewegung treten bspw. bei Beschleunigungen oder Bremsvorgängen des Fahrzeugs auf. Bei vorliegender Abtastrate und einer normalen Fahrzeugbewegung ist deren Einfluss allerdings gering (u.a. AUSSEMS 1999, STERNBERG 2000) und kann in den Störgrößen des KALMAN-Filters berücksichtigt werden. Das Modell einer gleichförmigen Kreisbewegung stellt eine bei Koppelnavigationssystemen übliche Annahme für das Bewegungsverhalten von Fahrzeugen dar (vgl. WANG 1997).

In Abbildung 6-1 ist die angenommene Fahrzeugbewegung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Epochen  $t_k$  und  $t_{k+1}$  des KALMAN-Filters dargestellt. Sie wird zunächst in einem trajektorienbegleitenden Koordinatensystem  $[Y^L, X^L]_k$  parametrisiert, welches im Fahrzeug (Zentrum GPS-Antenne) gelagert und in Richtung von dessen Längsachse, d.h. senkrecht zur Radachse orientiert ist.



Geometrische Größen:

$[Y^L, X^L]_k$ :  
Trajektorienbegleitendes Koordinatensystem zum Zeitpunkt  $t_k$

$(\Delta Y^L, \Delta X^L)_{k+1}$ :  
Lokaler Koordinatenfortschritt im Zeitintervall  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$

$b_{k+1}$ :  
Im Zeitintervall  $\Delta t$  überstrichene Kreisbogenlänge

$\Delta\alpha_{k+1}$ :  
Im Zeitintervall  $\Delta t$  erfolgte Änderung der Fahrzeugorientierung

$R_{k, k+1}$ :  
Krümmungsradius des im Zeitintervall  $\Delta t$  befahrenen Kreisbogens

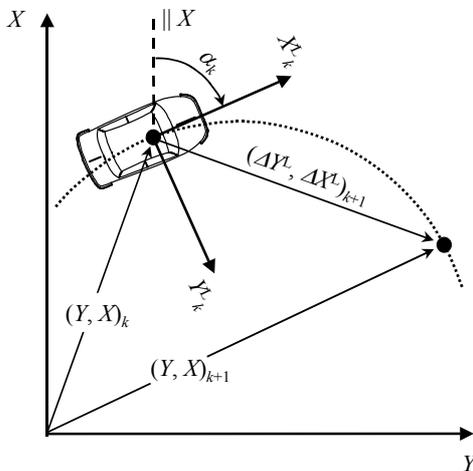
Abbildung 6-1: Trajektorienbegleitende Parametrisierung der Fahrzeugbewegung

Zur Beschreibung des lokalen Koordinatenfortschritts  $(\Delta Y^L, \Delta X^L)_{k+1}$  des Fahrzeugs müssen die zeitlich veränderlichen Parameter so gewählt werden, dass sie im KALMAN-Filter als Zustandsparameter in rekursiver Schreibweise formuliert werden können. Die Rekursion muss dabei mit den bzgl. des Bewegungsverhaltens des Fahrzeugs getroffenen Annahmen verträglich sein. AUSSEMS (1999) schlägt hierzu eine Substitution des Krümmungsradius  $R_{k, k+1}$  unter Verwendung der skalaren Bahngeschwindigkeit  $v_k$  vor, welche im Modell der gleichförmigen Bewegung mittels  $v_{k+1} = v_k$  fortzuschreiben ist. Der Koordinatenfortschritt kann somit wie folgt parametrisiert werden:

$$R_{k, k+1} = \frac{b_{k+1}}{\Delta\alpha_{k+1}} = \frac{v_k \Delta t}{\Delta\alpha_{k+1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta Y^L_{k+1} = R_{k, k+1} (1 - \cos(\Delta\alpha_{k+1})) = \frac{v_k \Delta t}{\Delta\alpha_{k+1}} (1 - \cos(\Delta\alpha_{k+1})) \\ \Delta X^L_{k+1} = R_{k, k+1} \sin(\Delta\alpha_{k+1}) = \frac{v_k \Delta t}{\Delta\alpha_{k+1}} \sin(\Delta\alpha_{k+1}) \end{cases} \quad (6-1)$$

In Gleichung (6-1) ist die Bewegung des Fahrzeugs im Zeitintervall  $\Delta t$  vollständig durch dessen Bahngeschwindigkeit  $v_k$  und die Orientierungsänderung  $\Delta\alpha_{k+1}$  beschrieben. Im Unterschied zu AUSSEMS (1999) wird  $\Delta\alpha_{k+1}$  nicht mit der Drehrate  $\dot{\alpha}_k$  parametrisiert ( $\Delta\alpha_{k+1} = \dot{\alpha}_k \Delta t$ ). Die Begründung hierfür liegt in ihrer Einführung als direkt beobachtete Größe, was im Folgenden noch weiter diskutiert wird. Im nächsten Schritt werden die lokalen Koordinatendifferenzen in das übergeordnete Referenzkoordinatensystem  $[Y, X]$  transformiert, in welchem dann die Darstellung der zurückgelegten Trajektorie des Fahrzeugs erfolgt.



Geometrische Größen:

$[Y, X]$ :  
Übergeordnetes Referenzkoordinatensystem

$(Y, X)_k$ :  
Absolute Position des Fahrzeugs zur Epoche  $t_k$

$(Y, X)_{k+1}$ :  
Absolute Position des Fahrzeugs zur Epoche  $t_{k+1}$

$\alpha_k$ :  
Orientierung des Fahrzeugs = Azimut des lokalen Koordinatensystems  $[Y^L, X^L]_k$  zur Epoche  $t_k$

Abbildung 6-2: Transformation in das Referenzkoordinatensystem

Eine einfache Transformationsvorschrift ist hierbei mit der Ähnlichkeitstransformation zwischen beiden Koordinatensystemen und der Fahrzeugorientierung  $\alpha_k$  als Rotationsparameter gegeben.

$$\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \cos(\alpha_k) & \sin(\alpha_k) \\ -\sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Y^L \\ \Delta X^L \end{pmatrix}_{k+1} \quad (6-2)$$

Mit (6-1) und (6-2) ergibt sich dann das nachfolgende System von Bewegungsgleichungen.

$$\begin{pmatrix} Y_{k+1} \\ X_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_k \\ X_k \end{pmatrix} + \frac{v_k \Delta t}{\Delta \alpha_{k+1}} \begin{pmatrix} \cos(\alpha_k) & \sin(\alpha_k) \\ -\sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos(\Delta \alpha_{k+1}) \\ \sin(\Delta \alpha_{k+1}) \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \Delta \alpha_{k+1} \quad (6-3)$$

$$v_{k+1} = v_k$$

Das Gleichungssystem (6-3) repräsentiert die nichtlinearen ungestörten Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters. Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_k$  des Filters ist damit wie folgt festgelegt:

$$\mathbf{x}_k^T = (Y_k, X_k, \alpha_k, v_k) \quad (6-4)$$

Die Änderung der Fahrzeugorientierung  $\Delta \alpha_{k+1}$  wird nicht in den Zustandsvektor aufgenommen, sondern auf Systemebene als direkt beobachtete Größe (aus Kreismessungen) eingeführt. Durch diese Maßnahme wird einer Trägheit des Bewegungsmodells beim Durchfahren von engen Kurven entgegengewirkt und ein mögliches Überschwingen der im Filter geschätzten Trajektorie gedämpft (s.a. Abbildung 6-14). Die Notwendigkeit hierfür ist durch die zum Teil hochdynamischen Fahrscenarien gegeben, wobei enge Kurvenradien mit verhältnismäßig hoher Geschwindigkeit durchfahren werden (s.a. Kapitel 6.1, Punkt 2). Dann sind Änderungen in der Orientierung des Fahrzeugs von bis zu 40 gon/s möglich. Für die Fahrscenarien repräsentative  $\Delta \alpha$  sind in Abbildung 6-3 exemplarisch anhand einer Testfahrt östlich von Stuttgart dargestellt. Hierbei sind die im Zeitintervall  $\Delta t = 1$  s erfolgten Orientierungsänderungen aus Kreismessungen  $\Delta \alpha_{\text{Kreisel}, k}$  bestimmt.

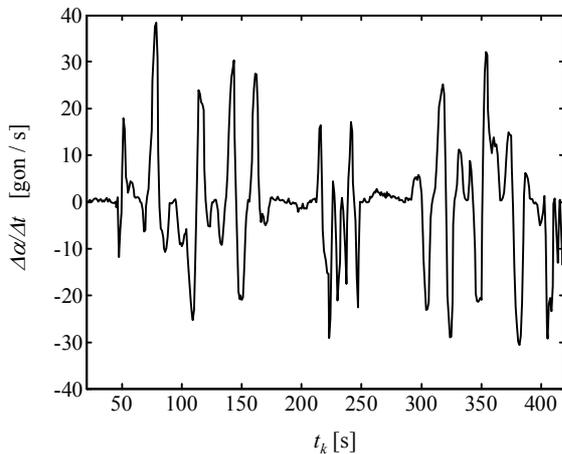


Abbildung 6-3: Orientierungsänderungen  $\Delta \alpha_{\text{Kreisel}, k}$  des Fahrzeugs bei einer Testfahrt ( $\Delta t = 1$  s)

In Bezug auf die noch einzuführenden Störgrößen besitzt die Nutzung eines beobachteten  $\Delta \alpha_{k+1}$  den Vorteil einer weitestgehend hypothesefreien Formulierung der Orientierungsänderung des Fahrzeugs im Fortschritt des KALMAN-Filters. Abweichungen von der Gleichförmigkeit der Bewegung durch Störbeschleunigungen wirken sich dann unmittelbar auf den Zustandsparameter  $v_k$  der Bahngeschwindigkeit aus, müssen im Filter aber nicht als Winkelbeschleunigungen berücksichtigt werden. Diese sind implizit in den beobachteten Orientierungsänderungen enthalten. Mit der Reduzierung der benötigten Störgrößen wird die Gefahr einer fehlerhaften Abschätzung der einzuführenden stochastischen Modelle gemindert und eine Erhöhung der Filterstabilität erreicht.

Die Größe  $\Delta \alpha_{k+1}$  wird – zumindest formal – dem Bewegungsmodell des Fahrzeugs von außen eingepreßt, da sie nicht in rekursiver Weise fortgeschrieben, sondern u.a. durch die Lenkbewegung des Fahrers im Zeitintervall  $[t_k, t_{k+1})$  verursacht und zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$  durch Messung ermittelt wird. Im Sinne der Reaktion des Fahrzeugs auf die Aktion des

Fahrers wird  $\Delta\alpha_{k+1}$  im Folgenden als „geometrische Stellgröße“ mit  $u_k = \Delta\alpha_{k+1}$  betrachtet. Die Nutzung als Stellgröße führt zu der in Kapitel 2.3 beschriebenen kausalen Modifizierung des kinematischen Bewegungsmodells. Die dort ebenfalls definierten Anforderungen an den Parameter sind als erfüllt zu betrachten: durch die Einführung von  $\Delta\alpha_{k+1}$  als Stellgröße treten keine Widersprüche im Modell auf, und es ist eine Bestimmung aus Kreismessungen möglich. Zu bemerken ist allerdings, dass der Begriff „Stellgröße“ systemtheoretisch nicht streng ist (vgl. UNBEHAUEN 1969, ISERMANN 1974), da die Orientierungsänderung auch von der Geschwindigkeit des Fahrzeugs abhängt, welche im Zustandsvektor enthalten ist und somit eine systemimmanente Größe darstellt. Der im Modell indirekt hergestellte kausale Zusammenhang mit Lenkaktionen des Fahrers lässt aber eine Betrachtungsweise als kinematisches Modell nicht zu, sondern erfordert auch in den Systemgleichungen des KALMAN-Filters die für kausale Modelle standardisierte Schreibweise.

Aufgrund der kausalen Betrachtungsweise, der explizit enthaltenen Zeit und der unmittelbaren physikalischen und geometrischen Interpretierbarkeit der im Modell enthaltenen Parameter liegt nach Kapitel 2.3 mit (6-3) der Sonderfall eines dynamischen Strukturmodells vor.

## 6.2.2 Bestimmung der gestörten Systemgleichungen

Die Störung der Systemgleichungen erfolgt mittels einer in tangentialer Richtung der Trajektorie wirkenden skalaren Störbeschleunigung  $w_k = a_{w,k}$  mit  $E\{a_{w,k}\} = 0$ . Diese repräsentiert Abweichungen von der zwischen zwei Abtastzeitpunkten angenommenen gleichförmigen Kreisbewegung, welche bspw. durch Beschleunigungs- bzw. Bremsvorgänge des Fahrzeugs entstehen. Sie wird im Intervall  $[t_k, t_{k+1})$  als konstant angenommen und muss im Filter bei der Fehlerfortpflanzung berücksichtigt werden. Mit der Substitution von (6-3) als vektorwertige Funktion  $\Psi$  ergeben sich die nichtlinearen gestörten Systemgleichungen des KALMAN-Filters.

$$\frac{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}}{4,1} = \frac{\Psi(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{u}_k)}{4,1} + \frac{\mathbf{S}_{k+1,k}}{4,1} \frac{w_k}{1,1} \quad (6-5)$$

$$\text{mit } \tilde{\mathbf{x}}_k^T = (\tilde{Y}_k, \tilde{X}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{v}_k) \quad ; \quad \tilde{u}_k = \Delta\tilde{\alpha}_{k+1} \quad ; \quad w_k = a_{w,k}$$

Die Prädiktion  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$  wird dann mittels der nichtlinearen ungestörten Systemgleichungen

$$\frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{4,1} = \frac{\Psi(\hat{\mathbf{x}}_k, u_k)}{4,1} \quad (6-6)$$

durchgeführt. Entsprechend der Beispiele in den Kapiteln 4 und 5 werden die (negativen) Prädiktionsfehler durch Linearisierung von (6-5) an der Stelle der Prädiktion ermittelt, wobei die Störmatrix  $\mathbf{S}_{k+1,k}$ , erst im Anschluss bestimmt wird. Mit  $\mathbf{x}_k^0 = \hat{\mathbf{x}}_k$ ,  $u_k^0 = u_k$  und  $w_k^0 = 0$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}_{k+1} &= \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_0 (\tilde{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial u_k} \right|_0 (\tilde{u}_k - u_k) + \mathbf{S}_{k+1,k} w_k \\ \Rightarrow \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{4,1} &= \frac{\mathbf{T}_{k+1,k}}{4,4} \frac{(\tilde{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)}{4,1} + \frac{\mathbf{B}_{k+1,k}}{4,1} \frac{(\tilde{u}_k - u_k)}{1,1} + \frac{\mathbf{S}_{k+1,k}}{4,1} \frac{w_k}{1,1} \end{aligned} \quad (6-7)$$

Die partiellen Ableitungen zur Bestimmung der Transitionsmatrix  $\mathbf{T}_{k+1,k}$  und der Stellmatrix  $\mathbf{B}_{k+1,k}$  sind in Anhang C.1 dargestellt. Die Bestimmung der Störmatrix  $\mathbf{S}_{k+1,k}$  erfolgt aus der Überlegung heraus, welche Zustandsparameter durch die tangentiale Störbeschleunigung  $a_{w,k}$  während des Filterfortschritts  $\Delta t$  direkt, bzw. indirekt beeinflusst werden. Die Störbeschleunigung beeinflusst direkt die Fortschreibung der Bahngeschwindigkeit  $v_k$  und somit indirekt die Fortschreibung aller mit der Geschwindigkeit verknüpften Zustandsparameter. Ihre Übertragung von  $t_k$  nach  $t_{k+1}$  erfolgt somit mittels der nachfolgenden Integraldarstellung.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{k+1,k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{C} d\tau \quad \text{mit } \Phi(t_{k+1}, t_k) = \mathbf{T}_{k+1,k} \\ &\quad \text{und } \mathbf{C}^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) \end{aligned} \quad (6-8)$$

Ausgehend von der Zustandsraumdarstellung des Systems entspricht  $\mathbf{C}$  innerhalb des standardisierten Ablaufs der Herleitung des KALMAN-Filters gerade der Störeingangsmatrix (s.a. Kapitel 3.2). Mit ihrer Hilfe wird in obiger Integral-

darstellung die Spalte der Transitionsmatrix isoliert, welche für die Übertragung von Abweichungen  $\tilde{v}_k - \hat{v}_k$  in der Bahngeschwindigkeit verantwortlich ist. Zur Übertragung einer im Zeitintervall  $[t_k, t_{k+1})$  als konstant angenommenen Störbeschleunigung  $a_{w,k}$  muss diese Spalte dann nur noch über das Intervall integriert werden. Die Berechnung von  $S_{k+1,k}$  ist in Anhang C.2 aufgeführt. Für das Gleichungssystem (6-7) ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y}_{k+1} - \bar{Y}_{k+1} \\ \tilde{X}_{k+1} - \bar{X}_{k+1} \\ \tilde{\alpha}_{k+1} - \bar{\alpha}_{k+1} \\ \tilde{v}_{k+1} - \bar{v}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \hat{v}_k \Delta t \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta\alpha_{k+1}) - \sin \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{k+1}} & -\Delta t \frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta\alpha_{k+1}) - \cos \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{k+1}} \\ 0 & 1 & \hat{v}_k \Delta t \frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta\alpha_{k+1}) - \cos \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{k+1}} & \Delta t \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta\alpha_{k+1}) - \sin \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{k+1}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}_k - \hat{Y}_k \\ \tilde{X}_k - \hat{X}_k \\ \tilde{\alpha}_k - \hat{\alpha}_k \\ \tilde{v}_k - \hat{v}_k \end{pmatrix} \\
 + \begin{pmatrix} \hat{v}_k \Delta t \left( \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta\alpha_{k+1})}{\Delta\alpha_{k+1}} + \frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta\alpha_{k+1}) - \cos \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{k+1}^2} \right) \\ \hat{v}_k \Delta t \left( \frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta\alpha_{k+1})}{\Delta\alpha_{k+1}} - \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta\alpha_{k+1}) - \sin \hat{\alpha}_k}{\Delta\alpha_{k+1}^2} \right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\Delta\tilde{\alpha}_{k+1} - \Delta\alpha_{k+1}) \quad (6-9) \\
 + \begin{pmatrix} -\frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta\alpha_{k+1}) - \cos \hat{\alpha}_k}{2\Delta\alpha_{k+1}} \Delta t^2 \\ \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta\alpha_{k+1}) - \sin \hat{\alpha}_k}{2\Delta\alpha_{k+1}} \Delta t^2 \\ 0 \\ \Delta t \end{pmatrix} a_{w,k}$$

Mit den Gleichungen (6-6) und (6-9) sind die zur Berechnung der Prädiktion und deren Kovarianzmatrix benötigten Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters für das Bewegungsmodell des Fahrzeugs festgelegt. Im Fall der Geradeausfahrt ist die geometrische Stellgröße  $\Delta\alpha_{k+1} = 0$ . Das hieraus resultierende Modell einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung geht dann unmittelbar durch Bildung des Grenzwerts  $\lim (\Delta\alpha_{k+1} \rightarrow 0)$  aus den Systemgleichungen des KALMAN-Filters hervor.

### 6.2.3 Bestimmung der Messgleichungen des Filters

In jeder Filterepoche  $t_{k+1}$  werden aus absolutem GPS und den Odometern ermittelte Messwerte  $(Y_{\text{GPS}}, X_{\text{GPS}})_{k+1}$  und  $(\Delta\alpha_{\text{Odo}}, \Delta s_{\text{Odo}})_{k+1}$  in die Messgleichungen des KALMAN-Filters eingeführt. Das aus der Kreismessung ermittelte  $\Delta\alpha_{\text{Kreisel}, k+1}$  wird auf Ebene der Systemgleichungen als Beobachtung der Stellgröße  $\Delta\alpha_{k+1}$  verwendet.

Die in das Filter eingeführten  $(\Delta\alpha_{\text{Odo}}, \Delta s_{\text{Odo}})_{k+1}$  und  $\Delta\alpha_{\text{Kreisel}, k+1}$  sind bereits vorverarbeitete Größen, welche in jedem Filterschritt aus den Messsignalen der Positionssensoren des Fahrzeugs abzuleiten sind. Beim Odometer werden u.a. Radimpulse gezählt (z.B. WESTBROOK / TURNER 1994), mit deren Hilfe der im Zeitintervall  $\Delta t$  zurückgelegte Weg eines Rades bestimmt wird. Die Berechnung der Weglänge aus Impulsen ist abhängig vom Umfang des Rades. Sie erfolgt mittels eines Maßstabsfaktors, welcher den zurückgelegten Weg zu den Impulsen in Beziehung setzt und im Rahmen der Sensorkalibrierung zu ermitteln ist. Die Montage von zwei Odometern an die beiden Vorder- oder Hinterräder des Fahrzeugs („Differenzialodometer“) ermöglicht – zusätzlich zur Bestimmung des zurückgelegten Wegs

$\Delta s_{\text{Odo},k+1}$  – auch die Ermittlung der Orientierungsänderung  $\Delta\alpha_{\text{Odo},k+1}$  des Fahrzeugs. Die Berechnung erfolgt auf Grundlage der Differenzbildung zwischen zurückgelegtem Weg des linken und des rechten Rades. Im Fall handelsüblicher piezoelektrischer Vibrationskreisel für Fahrzeugnavigationssysteme (u.a. WESTBROOK / TURNER 1994, REPPICH / WILLIG 1995) wird die aktuelle Winkelgeschwindigkeit der Fahrzeugorientierung („Gierrate“) ermittelt, aus welcher dann durch Integration die im Zeitintervall  $\Delta t$  erfolgte Orientierungsänderung  $\Delta\alpha_{\text{Kreisel},k+1}$  zu berechnen ist. Die Berechnungsformeln für die aus den Sensorsignalen abgeleiteten Beobachtungstypen sind u.a. in CZOMMER (2001a) beschrieben.

Bei den im Projekt durchgeführten Messfahrten standen die Sensorsignale mit einer Frequenz von 50 Hz auf dem CAN-Bus (CAN = Controller Area Network) des Messfahrzeugs zur Verfügung. Ihre Kalibrierung und Genauigkeitsuntersuchung erfolgte im Vorfeld der eigentlichen Filterentwicklung (CZOMMER 2001b).

Die linearen Messgleichungen des diskreten KALMAN-Filters ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} Y_{\text{GPS},k+1} - \varepsilon_{Y,k+1} &= \tilde{Y}_{k+1} \\ X_{\text{GPS},k+1} - \varepsilon_{X,k+1} &= \tilde{X}_{k+1} \\ \Delta s_{\text{Odo},k+1} - \varepsilon_{\Delta s,k+1} &= \tilde{v}_{k+1} \Delta t \\ \Delta\alpha_{\text{Odo},k+1} - \varepsilon_{\Delta\alpha,k+1} &= \tilde{\alpha}_{k+1} - \alpha_k \end{aligned} \quad (6-10)$$

Und in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} Y_{\text{GPS}} \\ X_{\text{GPS}} \\ \Delta s_{\text{Odo}} \\ \Delta\alpha_{\text{Odo}} \end{pmatrix}_{k+1} - \begin{pmatrix} \varepsilon_Y \\ \varepsilon_X \\ \varepsilon_{\Delta s} \\ \varepsilon_{\Delta\alpha} \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y} \\ \tilde{X} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}_{k+1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha_k \end{pmatrix} \quad (6-11)$$

$$\begin{matrix} \mathbf{L}_{k+1} & \mathbf{\varepsilon}_{k+1} & \mathbf{A} & \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} & \mathbf{c} \\ 4,1 & 4,1 & 4,4 & 4,1 & 4,1 \end{matrix}$$

Die zum Aufstellen der Messgleichungen benötigte Fahrzeugorientierung  $\alpha_k$  der vorhergehenden Epoche  $t_k$  wird in obigem Gleichungssystem als Parameter mitgeführt, welcher aus dem zurückliegenden Verlauf der Trajektorie durch einen Glättungsansatz bestimmt wird. Die Glättung ist hierbei nicht Bestandteil des eigentlichen Filterkerns und bewirkt durch ihre Tiefpassfilterwirkung die Dämpfung von physikalisch nicht motivierbaren Schwankungen im Orientierungsverlauf.

Die Formulierung der Messgleichungen (6-11) erweist sich als zweckmäßig, da sie eine unmittelbare Verknüpfung der zu schätzenden Fahrzeugorientierung mit der aus den Odometern gewonnenen Orientierungsänderung erlaubt. Diese besitzt eine hohe Zuverlässigkeit und Relativgenauigkeit. Die zugehörige Innovation wird im Wesentlichen aus der Differenz von Kreisel- und Odometermessung gebildet. Durch ihre Bewertung besteht im Filter eine direkte Kontrollmöglichkeit für die gemessene Stellgröße.

## 6.2.4 Ermittlung des stochastischen Modells

### 6.2.4.1 Genauigkeitsanalyse der Messsensoren

Die Kalibrierung und Genauigkeitsanalyse der Messsensoren erfolgte empirisch mittels Testfahrten, welche im Vorfeld der eigentlichen Filterentwicklung durchgeführt wurden. Die vollständigen Ergebnisse dieser Untersuchung sind in CZOMMER (2001b) dargestellt. Folgende Positionssensoren des Messfahrzeugs waren Gegenstand der Analyse:

- GPS-Empfänger
- Differenzialodometer
- Kreisel

Für die Testfahrten wurden Szenarien ausgewählt, welche sowohl in topographischer als auch fahrdynamischer Hinsicht den definierten Anforderungen entsprachen. So wurden Fahrten im Innenstadtbereich, auf Landstrassen und Autobahnen durchgeführt. Die Ermittlung der Referenztrajektorien erfolgte mittels DGPS-Messungen (DGPS = Differenzielles GPS), welche zeitsynchron mit den übrigen Sensoren mit einer Frequenz von 1 Hz aufgezeichnet wurden. Es handelte sich hierbei um differenzielle Codelösungen, welche eine – im Vergleich zu differenziellen Phasenlösungen – besonders hohe Verfügbarkeit aufweisen. Pro Messfahrt standen durchschnittlich ca. 97 % der Messungen als Referenz-

positionen zur Verfügung. Im Vergleich hierzu konnten bei den differenziellen Phasenlösungen im Durchschnitt nur in 20 ... 30 % der Fälle die Mehrdeutigkeiten gelöst werden (vgl. CZOMMER 2001b). Mit einer absoluten Lagegenauigkeit von  $\sigma_p \approx 0,2$  m (Helmertscher Punktfehler) und der hohen relativen Genauigkeit von aufeinanderfolgenden Positionsbestimmungen (im Bereich einiger cm), war die differenzielle Codelösung sowohl zur Beurteilung der absoluten GPS-Messungen, als auch zur Kalibrierung und z.T. zur Genauigkeitsanalyse der relativen Positionssensoren geeignet.

Die Ergebnisse der empirisch ermittelten Lagegenauigkeit für absolutes GPS (Codelösung mit einem Empfänger) sind in Abbildung 6-4 dargestellt.

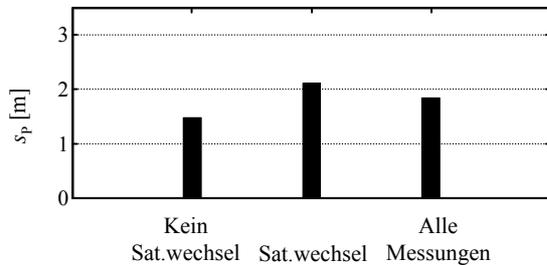


Abbildung 6-4: Empirische Helmertsche Punktfehler  $s_p$  der absoluten GPS-Messungen: Unterscheidung nach Messungen, bei denen kein Wechsel in der Satellitenkonstellation bzw. ein Wechsel stattfindet

Die empirischen Helmertschen Punktfehler  $s_p$  sind aus den Abweichungen zwischen DGPS- und absoluten GPS-Positionen der Testfahrten ermittelt. Aufgrund des Einflusses der Satellitenkonstellation auf die Positionsgenauigkeit wird zwischen den Messungen unterschieden, in deren unmittelbarem zeitlichen Umfeld kein Wechsel in der Satellitenkonstellation stattfindet und denen, wo dies gerade der Fall ist. Als Indikator für die Qualität der geometrischen Anordnung der Satelliten werden die bei den Messungen übermittelten HDOP-Werte (HDOP = Horizontal Dilution of Precision) herangezogen. Die Messungen ohne Konstellationswechsel weisen mit  $s_p \approx 1,5$  m eine signifikant bessere Genauigkeit auf wie die Messungen mit Konstellationswechsel ( $s_p \approx 2,1$  m). Im echtzeitfähigen KALMAN-Filter kann der Verlauf des HDOP allerdings nur als Informationsträger bzgl. zeitlich zurückliegender Ereignisse, d.h. zur Analyse der Qualität der GPS-Positionen im Rahmen des Filtertrainings genutzt werden.

Signifikante GPS-Sprünge, welche u.a. durch eine Änderung in der Anzahl der Satelliten oder Multipath-Effekte entstehen können, sind in den Helmertschen Punktfehlern nicht enthalten. Diese sind als grobe Fehler im Filter zu detektieren und einer gesonderten Behandlung zuzuführen.

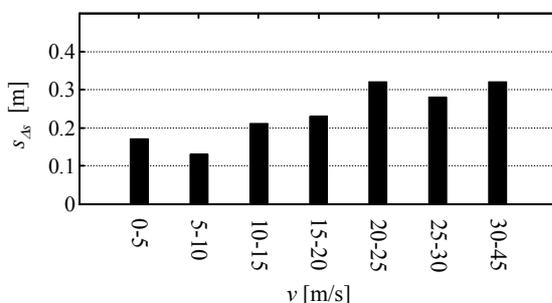


Abbildung 6-5: Empirische Standardabweichungen  $s_{\Delta}$  der aus Differenzialodometermessungen für  $\Delta t = 1$  s ermittelten Streckeninkremente  $\Delta s_{\text{odo}}$ : Unterscheidung nach Fahrzeuggeschwindigkeiten

Die empirischen Standardabweichungen der mittels Differenzialodometer bestimmten Streckeninkremente (Abbildung 6-5) sind aus den Abweichungen zu den aus DGPS-Positionen berechneten Streckeninkrementen abgeleitet. Die empirischen Standardabweichungen der mittels Differenzialodometer bzw. Kreisel ermittelten Orientierungsänderungen des Fahrzeugs (Abbildung 6-6) sind wegen der bei niedrigen Geschwindigkeiten ungünstigen Fehlerfortpflanzung nicht mittels DGPS bestimmt. Die Berechnung der Abweichungen ist auf die jeweiligen, aus den Sensordaten ermittelten, mittleren Orientierungsänderungen bezogen. Die Standardabweichungen der Streckeninkremente und der Orientierungsänderungen sind in den Abbildungen für das Zeitintervall  $\Delta t = 1$  s dargestellt. Ihre Einteilung in Geschwindigkeitsklassen dient dem Aufzeigen von eventuellen Abhängigkeiten zwischen Genauigkeit und Geschwindigkeit des Fahrzeugs.

In Abbildung 6-5 weisen die empirischen Standardabweichungen  $s_{\Delta, \text{odo}}$  mit zunehmender Geschwindigkeit einen Anstieg von  $s_{\Delta, \text{odo}} \approx 0,2$  m auf 0,3 m (pro s) auf. Dieser Effekt ist weniger auf das Differenzialodometer selbst – dessen Genauigkeit theoretisch unabhängig von der Geschwindigkeit ist (CZOMMER 2001b) – als vielmehr auf die mit dem entsprechenden Fahrscenario verknüpften äußeren Bedingungen zurückzuführen. Hierzu zählen Einflüsse wie bspw. der „Schlupf“ (u.a. AMMON 1997, SCHWARZ et al. 1997), wodurch der Maßstabsfaktor zwischen den im Zeitintervall  $\Delta t$  gezählten Radimpulsen und dem vom Reifen abgewickelten Streckeninkrement beeinflusst wird. Die Folge sind Abweichungen zu dem bei der Sensorkalibrierung bestimmten mittleren Maßstab, welche sich bei ansteigender Geschwindigkeit zunehmend stark auf das gemessene Streckeninkrement und dessen empirische Standardabweichung auswirken.

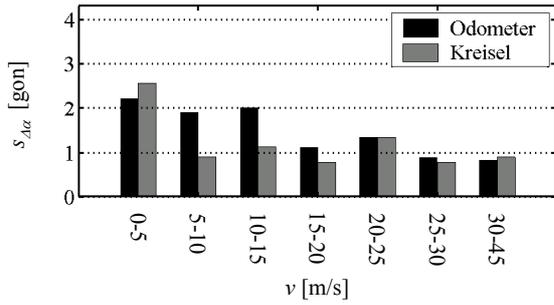


Abbildung 6-6: Empirische Standardabweichungen  $s_{\Delta\alpha}$  der aus Differenzialodometer- und Kreiselmessungen für  $\Delta t = 1s$  ermittelten Orientierungsänderungen  $\Delta\alpha_{Odo}$  bzw.  $\Delta\alpha_{Kreisel}$ : Unterscheidung nach Fahrzeuggeschwindigkeiten

Die empirischen Standardabweichungen der mittels Differenzialodometer ermittelten Orientierungsänderungen des Fahrzeugs nehmen mit zunehmender Geschwindigkeit von  $s_{\Delta\alpha, Odo} \approx 2$  gon auf 1 gon (pro s) ab. Die aus Kreiselmessungen ermittelten Orientierungsänderungen weisen ein (abgesehen von der Geschwindigkeitsklasse 0 – 5 m/s) konstantes Niveau von  $s_{\Delta\alpha, Kreisel} \approx 1$  gon (pro s) auf. Die in Abbildung 6-6 ersichtliche Verschlechterung des Kreisels bei niedrigen Geschwindigkeiten wird u.a. durch die Korrelation mit Fahrscenarien verursacht, welche Kurven mit sehr kleinen Krümmungsradien (Abbiege-, Rangiervorgänge des Fahrzeugs) bzw. „Stop and Go“ im Innenstadtbereich beinhalten. Hierbei entstehen u.a. durch Nick- und Wankbewegungen der Fahrzeugkarosserie (u.a. AMMON 1997) Abweichungen zwischen Kreiselmessungen und tatsächlichen horizontalen Orientierungsänderungen des Fahrzeugs.

Tabelle 6-1: Empirische Standardabweichungen der Messgrößen

		Geschwindigkeitsklasse [m/s]		
		0 – 5	5 - 15	> 15
$L$	$s_{Y_{GPS}}, s_{X_{GPS}}$	1,5 m		
	$s_{\Delta\alpha, Odo}$ (pro s)	0,2 m		0,3 m
	$s_{\Delta\alpha, Odo}$ (pro s)	2 gon		1 gon
$u$	$s_{\Delta\alpha, Kreisel}$ (pro s)	2 gon		1 gon

In Tabelle 6-1 sind die als Ergebnisse der Genauigkeitsanalyse erhaltenen empirischen Standardabweichungen der Einzelsensoren zusammengefasst. Diese werden in das stochastische Modell des KALMAN-Filters eingeführt. Da den Berechnungsergebnissen vielfältige Testfahrten mit unterschiedlichsten Fahrsituationen zugrunde liegen, werden wesentliche, zum Teil auch systematisch wirkende Fehlereinflüsse wie Maßstabsfehler der Radsensoren, Driftverhalten des Kreisels etc. durch das abgeschätzte stochastische Niveau bereits berücksichtigt. Hierin ist ein wesentlicher Vorteil der empirischen Vorgehensweise bei der Genauigkeitsanalyse der Sensoren zu sehen. Durch eine Erweiterung des KALMAN-Filters mit den Kalibrierungsparametern von Differenzialodometer bzw. Kreiselmessungen kann der Einfluss von systematischen Fehlern prinzipiell weiter reduziert werden. Diese Vorgehensweise wird an späterer Stelle noch diskutiert.

### 6.2.4.2 Besetzung des stochastischen Modells des Filters

Die Genauigkeitsanalyse der Positionssensoren liefert die Grundlage für die Besetzung des stochastischen Modells des KALMAN-Filters. Entsprechend den Kapiteln 4.4.3 und 5.4.3 werden für die zufälligen Abweichungen  $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_w$  und  $\varepsilon_L$  der in den Fehlergleichungen der Prädiktion (6-7) und den Messgleichungen (6-11) enthaltenen Stell-, Stör- und Messgrößen  $u$ ,  $w$  und  $L$  zeitlich unkorrelierte Rauschprozesse angenommen. Es wird ebenfalls wieder die Abwesenheit von Kreuzkorrelationen zwischen den Prozessen vorausgesetzt. Das stochastische Modell des KALMAN-Filters zur Epoche  $t_{k+1}$  ergibt sich daher zu:

$$\frac{\Sigma_{LL^*,k+1}}{10,10} = \left( \begin{array}{ccc|c} \Sigma_{\ddot{x}\ddot{x},k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & \Sigma_{uu,k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \Sigma_{ww,k} & \mathbf{0} \\ \hline & & & \Sigma_{LL,k+1} \end{array} \right) \begin{array}{c} 4,4 \\ 1,1 \\ 1,1 \\ 4,4 \end{array} \tag{6-12}$$

Die zur Festlegung des Varianzniveaus der Submatrizen für Stell- und Messgrößen verwendeten Standardabweichungen sind in Tabelle 6-1 dargestellt.

Die Abschätzung des stochastischen Niveaus der tangentialen Störbeschleunigungen  $a_{w,k}$  erfolgt durch Untersuchung der zeitlichen Variationen der aus den sehr zuverlässigen Differenzialodometermessungen abgeleiteten Bahngeschwindigkeiten des Fahrzeugs. Abbildung 6-7 zeigt die Geschwindigkeitsdifferenzen  $\Delta v_{k,k+1}$  zwischen aufeinanderfolgenden Epochen mit  $\Delta t = 1$  s. Hierbei ist in Abbildung 6-7-a ein repräsentativer Ausschnitt einer kurvenreichen Landstrassenfahrt dargestellt, wobei gezielt häufige, zum Teil extreme Geschwindigkeitswechsel stattfinden. In Abbildung 6-7-b wird eine typische Autobahnfahrt gezeigt.

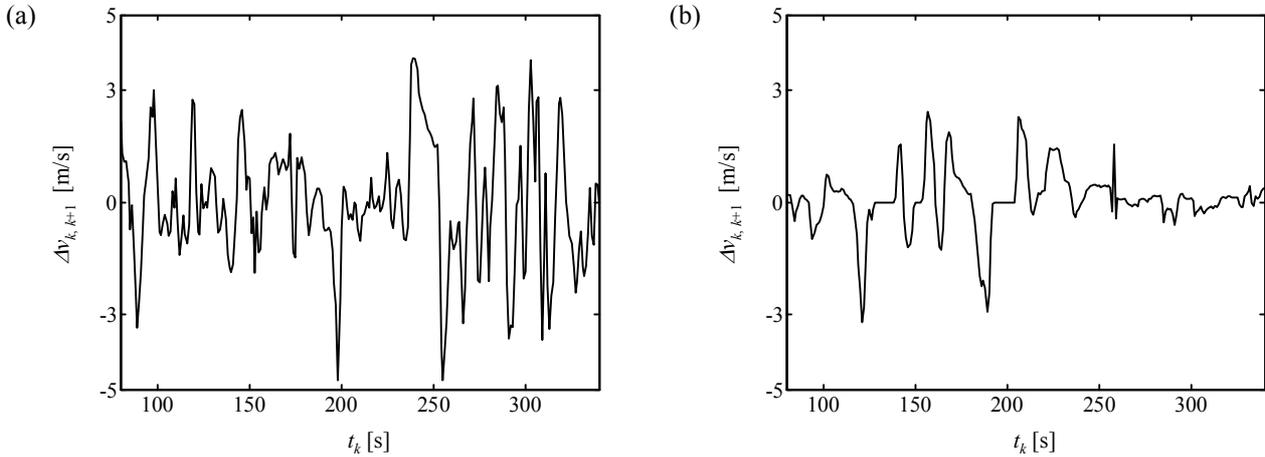


Abbildung 6-7: Geschwindigkeitsdifferenzen  $\Delta v_{k,k+1}$  bei  $\Delta t = 1$  s: (a) Landstrasse und (b) Autobahn

Die bei der Landstrassenfahrt auftretenden Verzögerungen und Beschleunigungen  $a_{w,k} = \Delta v_{k,k+1} / \Delta t$  liegen i.d.R. zwischen  $-3$  und  $+3$   $\text{m/s}^2$ , wobei in einzelnen Bereichen  $-5$   $\text{m/s}^2$  erreicht wird. Bei der Autobahnfahrt treten i.a. geringere Werte im Bereich von ca.  $-1,5$   $\text{m/s}^2$  bis  $+2,5$   $\text{m/s}^2$  auf. Maximale Verzögerungen liegen bei  $-3$   $\text{m/s}^2$ . Der Verlauf des Signals ist hier glatter, d.h. das Fahrzeug weist über einen längeren Zeitraum ein ähnliches Beschleunigungs- bzw. Verzögerungsverhalten auf wie bei der Landstrassenfahrt.

Da die Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta v_{k,k+1}$  in jedem Filterschritt aus den Differenzialodometermessungen bestimmt werden kann, ist eine zeitvariable Anpassung des Varianzniveaus von  $a_{w,k}$  an die aktuelle Fahrsituation möglich. Empirische Untersuchungen ergeben, dass mit

$$\Sigma_{ww,k} = (\sigma_{a_w}^2)_k \quad \text{mit} \quad \sigma_{a_w,k} = \frac{\Delta v_{k,k+1}}{3\Delta t} \quad (6-13)$$

eine adäquate Abschätzung für die Besetzung der Kovarianzmatrix der Störbeschleunigung vorliegt. Im Fall eines Fahrtverlaufs ohne extreme Geschwindigkeitswechsel (z.B. Abbildung 6-7-b) werden im Filter auch mit der zeitinvarianten Abschätzung

$$\Sigma_{ww,k} = (\sigma_{a_w}^2)_k \quad \text{mit} \quad \sigma_{a_w,k} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (6-14)$$

vergleichbar gute Ergebnisse erzielt. Mit Tabelle 6-1, (6-13) und (6-14) sind die Varianzniveaus von Stell-, Stör- und Messgrößen für das stochastische Modell (6-12) des KALMAN-Filters festgelegt.

Das zur Bestimmung der Messgrößen  $(\Delta s_{\text{Odo}}, \Delta \alpha_{\text{Odo}})_{k+1}$  verwendete Differenzialodometer ist an den Vorderrädern des Fahrzeugs installiert. Aufgrund der in der Horizontalebene gegenüber der Vorderachse drehbaren Radaufhängungen sind die geometrischen Modelle für  $\Delta s$  und  $\Delta \alpha$  hochgradig nichtlinear (s. CZOMMER 2001a). Im Gegensatz zur gegenseitigen Unkorreliertheit der Messgrößen bei einer Installation an den Hinterrädern, können bei den Vorderrädern algebraische Korrelationen auftreten. Diese sind dann bei der Besetzung von  $\Sigma_{LL,k+1}$  in den entsprechenden Kovarianzen zu berücksichtigen. Sie werden nachträglich mittels

$$s_{\Delta s \Delta \alpha, k+1} = \rho_{\Delta s, \Delta \alpha, k+1} s_{\Delta s, k+1} s_{\Delta \alpha, k+1} \quad (6-15)$$

bestimmt. Dabei wird der theoretische Korrelationskoeffizient  $\rho_{\Delta s, \Delta \alpha, k+1}$  in jedem Filterschritt aus den Bestimmungsgleichungen für  $(\Delta s_{\text{Odo}}, \Delta \alpha_{\text{Odo}})_{k+1}$  mittels Fehlerfortpflanzung berechnet. Sein zeitlicher Verlauf ist in Abbildung 6-8 anhand des Ausschnitts einer Autobahnfahrt dargestellt. Hierbei wird auch die Abhängigkeit zwischen Korrelationen und Krümmungen der befahrenen Trajektorie deutlich.

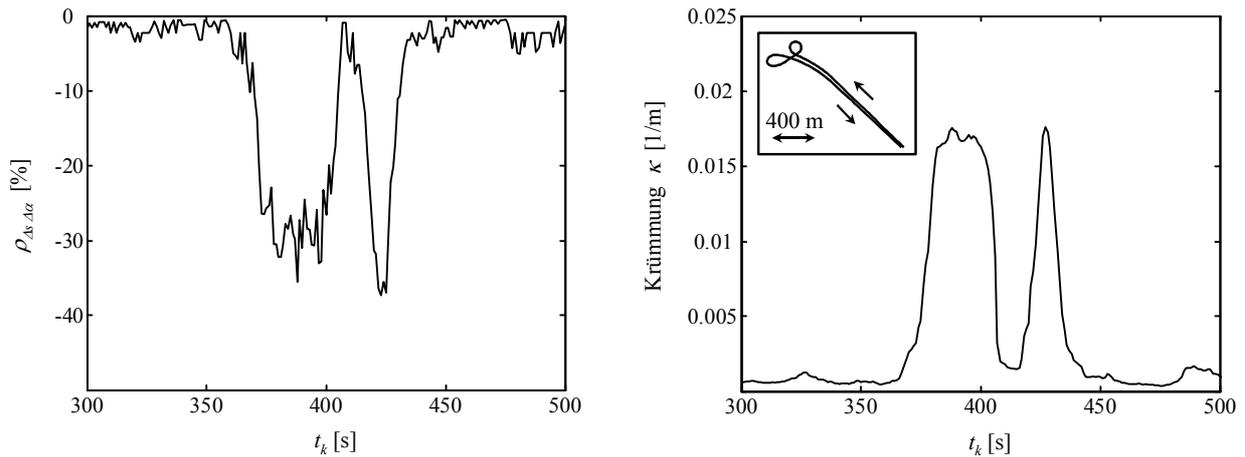


Abbildung 6-8: Zeitlicher Verlauf des mittels Radimpulsmessungen bestimmten Korrelationskoeffizienten  $\rho_{\Delta s, \Delta \alpha}$  und der befahrenen Krümmungen  $\kappa_{k+1}$ : Ausschnitt einer Autobahnfahrt (halbes Kleeblatt)

Wie in der Abbildung ersichtlich ist, hängt das Niveau des Korrelationskoeffizienten  $\rho_{\Delta s, \Delta \alpha, k+1}$  unmittelbar mit der aktuell befahrenen Krümmung  $\kappa_{k+1}$  der Trajektorie zusammen. Bei Geradeausfahrt bzw. schwachen Krümmungen verschwindet der Korrelationskoeffizient nahezu vollständig, während er im Bereich von Kurven (hier: halbes Kleeblatt) mit zunehmender Krümmung deutlich ansteigt. Die Korrelationen sind folglich gerade bei kurvenreichen Fahrten im Filter zu berücksichtigen.

### 6.3 Integration des KALMAN-Filters in ein Modul zur Fahrzeugortung

Mit den Gleichungen zur Prädiktion (6-6), den (negativen) Prädiktionsfehlern (6-9) und dem stochastischen Modell (6-12) sind die wesentlichen Elemente des diskreten KALMAN-Filters festgelegt. Zur Erfüllung der in Kapitel 6.1 definierten Anforderungen und als wichtige Voraussetzung für einen operationellen Einsatz im Fahrzeug ist die Integration des Filteralgorithmus in ein „Ortungsmodul“ erforderlich. Das KALMAN-Filter repräsentiert hierbei den zentralen Kern des Moduls.

Die in Abbildung 6-9 dargestellte funktionale Architektur des Ortungsmoduls besteht aus einer Kombination von Submodulen, welche alternative Strategien zur Bestimmung der Fahrzeugposition beinhalten. Ihre Auswahl ist sowohl vom Zustand des Filters und des Fahrzeugs, als auch von der aktuellen Verfügbarkeit der Signale der Positionssensoren abhängig. Die wesentliche Aufgabe des Ortungsmoduls ist die Übermittlung einer in erster Linie zuverlässigen Positionsinformation. Hiermit unmittelbar verknüpft ist die Gewährleistung eines zeitlich stabilen Verlaufs des KALMAN-Filters.

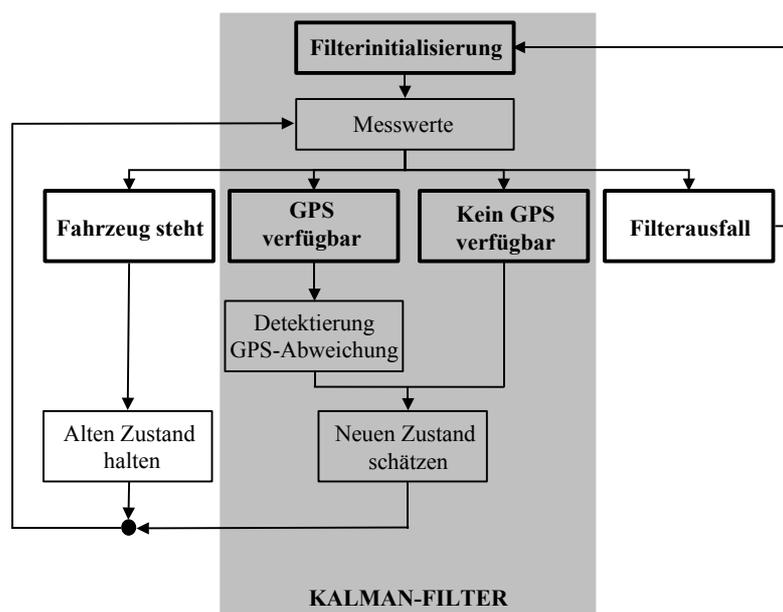


Abbildung 6-9: Architektur des Ortungsmoduls mit zentralem KALMAN-Filter

Sowohl die Funktionalität der Submodule als auch die in ihnen enthaltenen Parameter (Schwellwerte, kritische Werte für Testgrößen, etc.) sind im Rahmen einer Trainingsphase zu ermitteln. Diese muss Fahrscenarien aufweisen, welche für die späteren Einsatzbereiche des Ortungsmoduls repräsentativ sind. Im vorliegenden Fall erfolgte das Training anhand spezieller, im Vorfeld des Projekts spezifizierter Testfahrten, die sowohl in topographischer als auch fahrdynamischer Hinsicht das gesamte Spektrum der für das Ortungsmodul geplanten Fahr Situationen abdecken (s. EICHORN et al. 2001). Wie bei der Sensoruntersuchung wurden die Referenztrajektorien mittels DGPS-Messungen bestimmt.

Im Submodul „Filterinitialisierung“ erfolgt die Bestimmung der Initialisierungswerte für das KALMAN-Filter. Hierbei werden die Elemente des Zustandsvektors aus Messwerten gewonnen. Da eine falsche Anfangsorientierung des Fahrzeugs den Einschwingvorgang des Filters verlängert bzw. bei nachfolgendem GPS-Ausfall (z.B. bei Tunnelfahrt) zu einer Divergenz der gefilterten Trajektorie führen kann, ist dieser Startwert sehr sorgfältig zu ermitteln. Die Berechnung erfolgt aus GPS-Positionen, wobei aufgrund der Fehlerfortpflanzung eine Mindestbasis  $b_{\min} = 8$  m überschritten werden muss. Bei GPS-Ausfall während der Initialisierung wird der Vorgang nach einer maximal überschrittenen Basis  $b_{\max} = 30$  m abgebrochen und wiederholt. Die Initialisierung der Kovarianzmatrix des Zustandsvektors kann durch einfache Fehlerfortpflanzung aus den Varianzen der Messgrößen realisiert werden.

Das Submodul „Fahrzeug steht“ detektiert den Fahrzeugstillstand mittels des aus Differenzialodometermessungen abgeleiteten Streckeninkrements  $\Delta s_{\text{Odo}}$ . Nach Erkennen des Stillstands werden der letzte geschätzte Zustand und seine Kovarianzmatrix so lange gehalten, bis wieder eine signifikante Bewegung des Fahrzeugs angenommen wird. In dieser Phase wird im KALMAN-Filter somit keine Schätzung durchgeführt. Diese Maßnahme verhindert ein Driften der Position des Fahrzeugs und vor allem die Beeinflussung von dessen Orientierung aufgrund der Streuung der GPS-Messungen. Sie sichert die Qualität der Anfangswerte bei Wiederaufnahme der Fahrt.

Aufgrund der sehr hohen Verfügbarkeit der relativen Positionssensoren (kein Ausfall während der gesamten Trainingsphase) wird im eigentlichen KALMAN-Filter nur zwischen den Submodulen „GPS verfügbar“ und „Kein GPS verfügbar“ unterschieden. Im Fall einer mittels absolutem GPS gemessenen Position  $(Y_{\text{GPS}}, X_{\text{GPS}})_{k+1}$  ist dann das Submodul „GPS verfügbar“ zur Positionsschätzung zu verwenden. Innerhalb des Moduls sind die Beurteilung der GPS-Qualität und die, bei als signifikant erkannten Abweichungen durchzuführenden Maßnahmen von zentraler Bedeutung. Infolge von fehlerhaften GPS-Messungen traten in der Trainingsphase zum Teil Abweichungen der Messwerte von bis zu 100 m gegenüber der Sollposition des Fahrzeugs auf. Diese Effekte können im Wesentlichen in zwei Gruppen eingeteilt werden:

- GPS-Einzelsprünge bzw. Sprungsequenzen, welche im Sinne der Ausgleichsrechnung als grobe Fehler zu detektieren und im stochastischen Modell entsprechend niedrig zu gewichten bzw. aus dem Beobachtungsmaterial zu eliminieren sind. Eine einfache Detektierung ist über Differenzbildung der aus (den sehr zuverlässigen) Differenzialodometermessungen und GPS abgeleiteten Streckeninkrementen  $(\Delta s_{\text{Odo}} - \Delta s_{\text{GPS}})_{k+1}$  möglich.
- GPS-Parallelversatz, d.h. eine Folge von abweichenden GPS-Positionen, die mehr oder weniger parallel zur Referenztrajektorie verläuft und dabei eine ähnliche innere Geometrie aufweist. Wegen der geometrischen Ähnlichkeit ist die Detektierung eines Versatzes besonders anspruchsvoll. Aufgrund der z.T. erheblichen Länge (es sind durchaus 200 bis 300 m möglich) scheidet eine einfache Eliminierung der GPS-Messungen aus Gründen der über längere Streckenabschnitte kumulierenden systematischen Fehler der übrigen Positionssensoren aus.

Die Ermittlung von GPS-Abweichungen erfolgt im KALMAN-Filter durch die Bewertung der Koordinateninnovationen, d.h. aus der Differenz von gemessener und mittels der Systemgleichungen des Filters prädiizierter Fahrzeugposition.

$$\begin{pmatrix} dY_{\text{GPS}} \\ dX_{\text{GPS}} \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} Y_{\text{GPS}} \\ X_{\text{GPS}} \end{pmatrix}_{k+1} - \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{X} \end{pmatrix}_{k+1} \quad (6-16)$$

Die Innovationen werden als signifikant bewertet, wenn die Testgröße  $\Theta_{\text{GPS}, k+1}$  einen kritischen Wert  $\Theta_{\text{GPS}, \text{krit}}$  überschreitet.

$$\Theta_{\text{GPS}, k+1} = \sqrt{dY_{\text{GPS}, k+1}^2 + dX_{\text{GPS}, k+1}^2} \leq \Theta_{\text{GPS}, \text{krit}} \quad (6-17)$$

Die in obiger Gleichung dargestellte Testgröße ist ausschließlich durch die Innovationen und nicht durch deren Stochastik festgelegt. Im Fall eines GPS-Versatzes weist (6-17) ein robusteres Verhalten auf wie der gewöhnliche Innovationstest des KALMAN-Filters. Bei sehr niedriger Gewichtung bzw. Eliminierung von GPS wird der Verlauf der Schätzwerte im Dead-Reckoning wesentlich durch die relativen Positionssensoren Differenzialodometer und Kreisel bestimmt. Das Fehlerverhalten des Dead-Reckoning entspricht einem nur einseitig angeschlossenen Polygonzug und führt zu einer fortlaufenden Erhöhung des Varianzniveaus der Innovationen, wodurch die Sensitivität des gewöhnlichen Innovationstests dann zunehmend herabgesetzt wird.

Die o.g. Teststrategie führt genau dann zu einer Fehlentscheidung, wenn die signifikante Koordinateninnovation nicht aus einer GPS-Abweichung, sondern aufgrund einer fehlerhaften Prädiktion entsteht. Im Verlauf des Filtertrainings wurden Modellfehler durch grob fehlerhafte Stellgrößen, d.h. Kreismessungen verursacht, wobei zumindest in drei Fällen plötzliche Sprünge zwischen 30 und 40 gon (pro s) in der Orientierungsänderung des Fahrzeugs auftraten. Bei hoher Geschwindigkeit des Fahrzeugs entstehen dann Positionsabweichungen bis zu 20 m, welche, im Fall einer falschen Interpretation, zu einem divergenten Filterverlauf führen können (s. Abbildung 6-10). Zur Vermeidung einer falschen Testentscheidung erfolgt im Filter sowohl eine Überprüfung der Stellgröße  $\Delta\alpha_{\text{Kreisel}, k+1}$  durch das aus den Differenzialodometermessungen abgeleitete  $\Delta\alpha_{\text{Odo}, k+1}$  als auch die Einführung eines geschwindigkeitsabhängigen kritischen Wertes  $\Theta_{\text{GPS}, \text{krit}}(v)$  für den Koordinateninnovationstest (6-17).

$$\Theta_{\text{GPS}, \text{krit}}(v) = \max\left(10 \text{ m}, \frac{40 \text{ gon}}{\rho_{\text{gon}}} v \Delta t\right) \quad \text{mit } v[\text{m/s}] \quad (6-18)$$

Die untere Schranke von 10 m verhindert hierbei eine irrtümliche Herabsetzung der GPS-Gewichtung bei Langsamfahrt. Das in (6-18) festgelegte Niveau des kritischen Werts ist ausschließlich für die verwendete Sensorkonfiguration und die Testfahrtszenarien gültig und muss gegebenenfalls neu bestimmt werden.

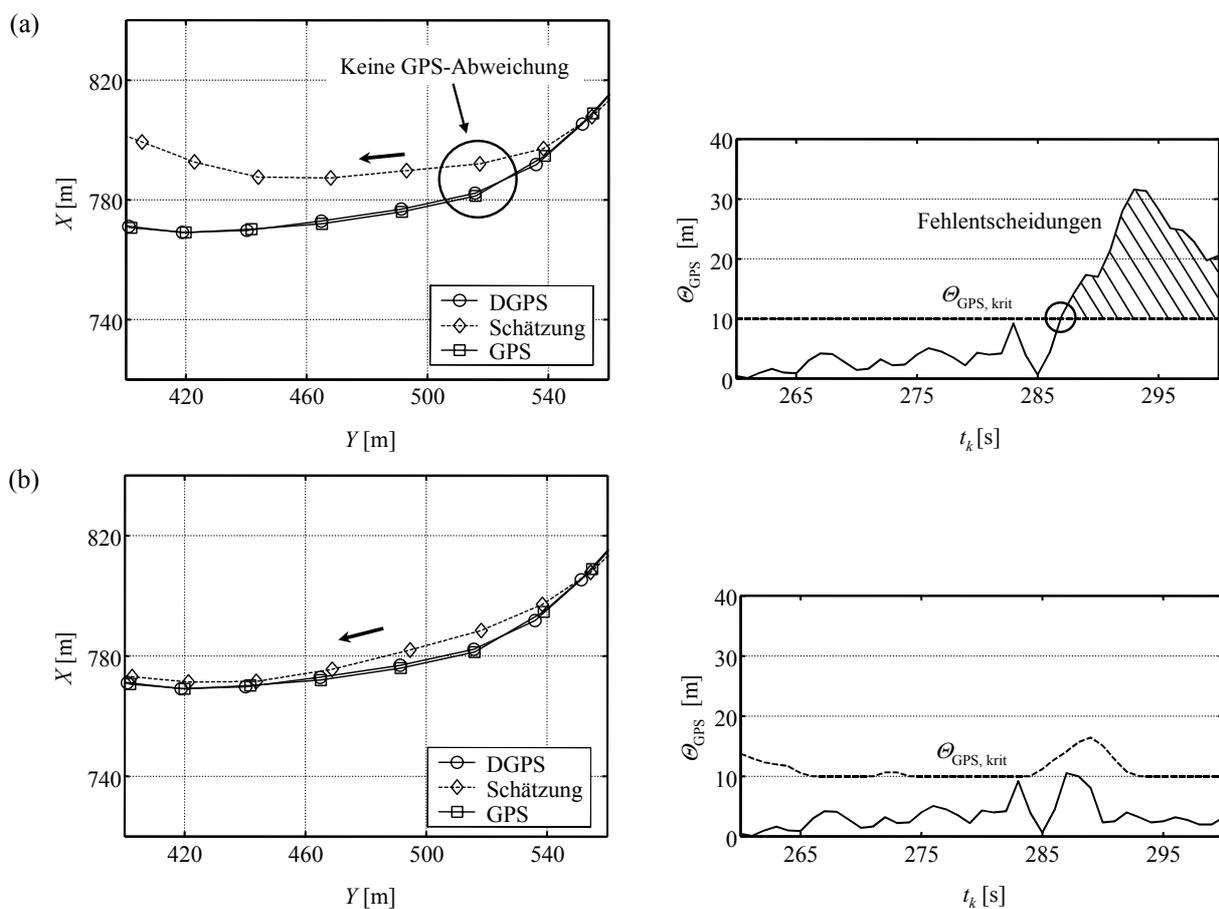


Abbildung 6-10: Filterverlauf bei Landstraßenfahrt mit grob fehlerhafter Kreismessung: (a) Fehlentscheidung des Tests der Koordinateninnovationen bei konstantem kritischem Wert  $\Theta_{\text{GPS}, \text{krit}}$  und (b) korrekte Entscheidung durch geschwindigkeitsabhängigen kritischen Wert  $\Theta_{\text{GPS}, \text{krit}}(v)$

In Abbildung 6-10 ist ein Ausschnitt einer Landstraßenfahrt dargestellt, wobei in der Filterepoche  $t_k = 287 \text{ s}$  ein grob fehlerhaftes  $\Delta\alpha_{\text{Kreisel}}$  (ca. 20 gon) bei konstantem  $\Theta_{\text{GPS}, \text{krit}}$  zu einer signifikanten Koordinateninnovation führt. Die folgende Fehlentscheidung, die Gewichtung von GPS zu verringern, erzeugt eine Verschwenkung der Trajektorie und, aufgrund des Anwachsens der Innovationen, eine weitere Folge von Fehlentscheidungen, was letztlich zur Divergenz der gefilterten Trajektorie führt (Abbildung 6-10-a). Die Einführung des geschwindigkeitsabhängigen kritischen Werts (6-18) verhindert sowohl die Fehlentscheidung als auch die Divergenz der Trajektorie (Abbildung 6-10-b).

Die Detektierung eines GPS-Parallelversatzes erfolgt im Modul durch Untersuchung des zeitlichen Verlaufs der aus den Koordinateninnovationen gebildeten Testgröße  $\Theta_{\text{GPS}, k+1}$ . Diese weist dann eine in Relation zum Fortschritt  $\Delta t$  des Filters zeitliche Konstanz auf (s. Abbildung 6-12), welche bspw. durch die Bildung des folgenden Gradienten

$$|\theta'_{\text{GPS},k+1}| = \frac{|\theta_{\text{GPS},k+1} - \theta_{\text{GPS},k}|}{t_{k+1} - t_k} \leq \theta'_{\text{GPS,max}} \tag{6-19}$$

ermittelt werden kann. Im Fall eines detektierten GPS-Parallelversatzes werden dann die Differenzen  $(\Delta Y_{\text{GPS}}, \Delta X_{\text{GPS}})_{k+1}$  von aufeinanderfolgenden GPS-Positionen anstelle  $(Y_{\text{GPS}}, X_{\text{GPS}})_{k+1}$  als Beobachtungen in das KALMAN-Filter eingeführt. Diese Maßnahme ist zulässig, da von dem Versatz in erster Linie nur die absolute Lage der Folge von GPS-Positionen beeinflusst wird. Die Orientierung der Folge weist dagegen ein ähnliches Verhalten wie die Referenztrajektorie auf (s. Abbildung 6-12) und kann im Filter genutzt werden. Durch die Einführung der Differenzbeobachtungen wird vor allem die Fahrzeugorientierung gestützt und die Neigung zum Driften unterdrückt. Die Strategie der Detektierung und Behandlung von GPS-Abweichungen ist in Abbildung 6-11 nochmals zusammenfassend dargestellt.

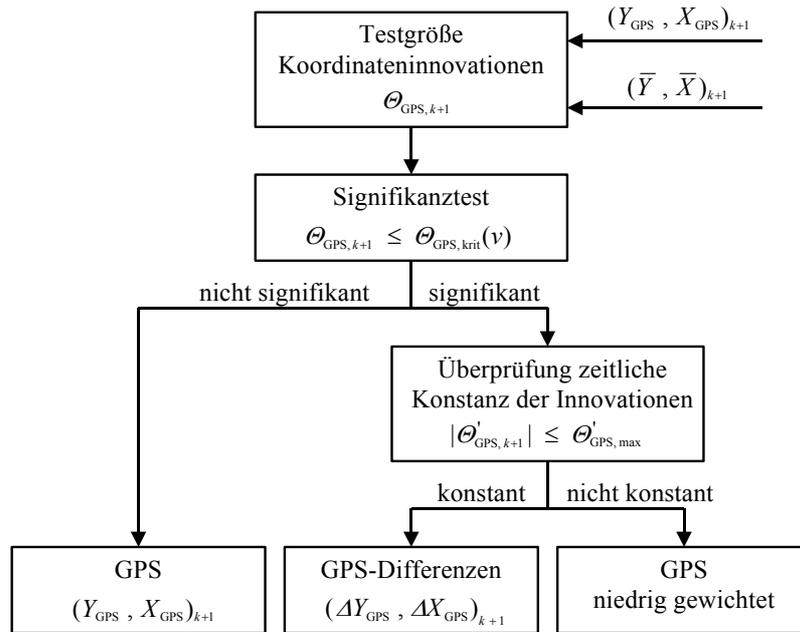


Abbildung 6-11: Detektierung und Behandlung von GPS-Abweichungen im Submodul „GPS verfügbar“

Die im Folgenden dargestellten Filterergebnisse sind mit einer im Filtertraining ermittelten oberen Grenze  $\theta'_{\text{GPS,max}} = 0,5 \text{ m}$  für den Gradienten (6-19) berechnet. Es handelt sich hierbei um den Ausschnitt einer Landstraßenfahrt, bei dem ein ca. 300 m langer GPS-Parallelversatz mit einer mittleren Querabweichung von 20 m zur Referenztrajektorie auftritt. Die Detektierung und Behandlung der GPS-Abweichungen erfolgt mittels der in Abbildung 6-11 gezeigten Strategie. Der Parallelversatz ist in der gefilterten Trajektorie vollständig eliminiert.

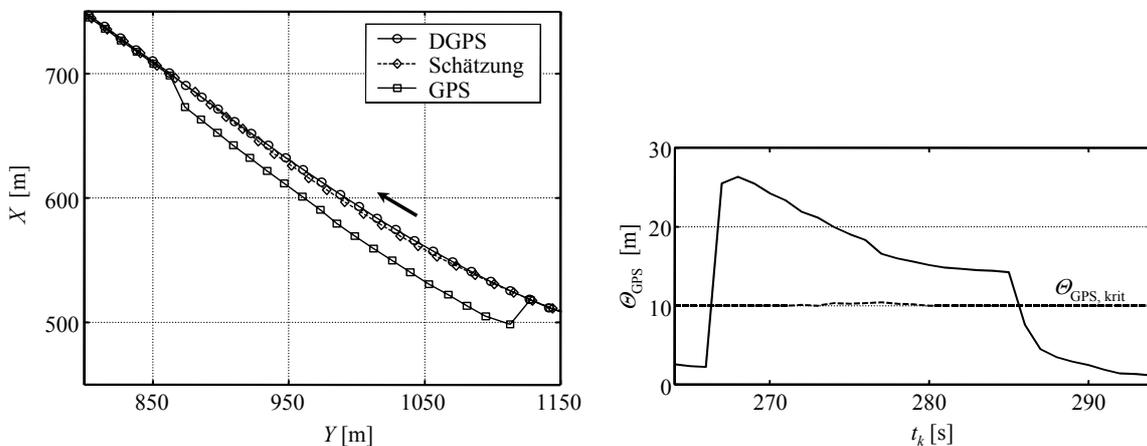


Abbildung 6-12: Filterung von einem ca. 300 m langen GPS-Parallelversatz

Liegt zu einer Epoche keine mittels absolutem GPS gemessene Position vor, erfolgt im Ortungsmodul die Positionsschätzung des Fahrzeugs mit dem Submodul „Kein GPS verfügbar“. Eine solche Situation tritt bspw. beim Durchfahren eines Tunnels auf. Als Positionssensoren stehen nur Differenzialodometer und Kreisel zur Verfügung, womit ein Dead-Reckoning vorliegt. Die in das Filter eingehenden Informationen entsprechen somit dem Fall der Eliminierung der GPS-Messung im Submodul „GPS verfügbar“.

Aufgrund des ungünstigen Fehlerverhaltens des Dead-Reckoning besteht die Gefahr, dass die Abweichungen der geschätzten Trajektorie von der Referenztrajektorie mit der Anzahl der Filterepochen zunehmend anwachsen. Verantwortlich hierfür ist zum Einen die kumulierende Wirkung von Kalibrierungsrestfehlern der relativen Positionssensoren und zum Anderen eine möglicherweise fehlerhafte Anfangsorientierung des Fahrzeugs zu Beginn des GPS-Ausfalls. Strategien zur diesbezüglichen Optimierung des Ortungsmoduls werden noch diskutiert.

Das Submodul „Filterausfall“ dient als Notfallstrategie zur Überbrückung von Fahrsituationen, bei denen im KALMAN-Filter keine zuverlässige Positionsschätzung mehr erfolgen kann. Im Modul sind vorerst die nachfolgenden Szenarien spezifiziert:

- Gemeinsamer Ausfall von Odometer und Kreisel bei Bewegung des Fahrzeugs, wodurch in den Systemgleichungen des KALMAN-Filters keine Stellgröße  $\Delta\alpha$  vorliegt und folglich keine Prädiktion berechnet werden kann. Somit kann auch die absolute GPS-Messung nicht mehr kontrolliert werden.
- Überschreitung einer maximalen Epochenzahl im Dead-Reckoning. In diesem Fall muss von signifikanten Abweichungen der gefilterten von der Solltrajektorie ausgegangen werden, wodurch die Zuverlässigkeit der vom Ortungsmodul übermittelten Position nicht mehr garantiert werden kann. Die zeitliche Begrenzung für das Dead-Reckoning ist bei den vorliegenden Messfahrten auf  $t_{\max} = 90$  s festgelegt. Diese Begrenzung ist abhängig von der Qualität der Anfangsorientierung des Fahrzeugs bei GPS-Ausfall und der Sensorkalibrierung (s.a. Submodul „Kein GPS verfügbar“). Sie muss im Filtertraining auf die zu befahrenden Szenarien und verwendeten Sensoren abgestimmt werden.

Bei Filterausfall wird vom Ortungsmodul keine Fahrzeugposition übermittelt. Im Anschluss erfolgt im Submodul „Filterinitialisierung“ eine Neuinitialisierung des KALMAN-Filters.

#### 6.4 Parametrische Identifikation der Fahrzeugbewegung

Die parametrische Identifikation einer Fahrzeugbewegung wird im Folgenden anhand von zwei Beispielen gezeigt, wobei die vorliegende Ortungsaufgabe eine Beschränkung der Ergebnisdarstellung auf die Zustandsparameter  $(\hat{Y}, \hat{X})_{k+1}$  erlaubt. Das erste Beispiel ist eine Autobahnfahrt, welche ein insgesamt gleichförmiges (d.h. mit dem ungestörten Modell konformes) Bewegungsverhalten des Fahrzeugs und eine gute Qualität von absolutem GPS aufweist. Das zweite Beispiel repräsentiert das Gegenteil der ersten Fahrt. Bei der Stadtfahrt bewegt sich das Fahrzeug auf einer Trajektorie, welche bei Abbiegevorgängen erhebliche Krümmungswechsel aufweist, wodurch Orientierungsänderungen des Fahrzeugs bis zu 40 gon/s erzeugt werden. Beschleunigungen und Verzögerungen im Stop&Go verursachen starke Variationen in der Geschwindigkeit des Fahrzeugs. Aufgrund der dichten Bebauung verschlechtert sich die Qualität von absolutem GPS. Die Stadtfahrt stellt das für das Ortungsmodul anspruchsvollste Szenario dar. Die Bestimmung der Referenztrajektorie erfolgt – soweit verfügbar – mittels DGPS.

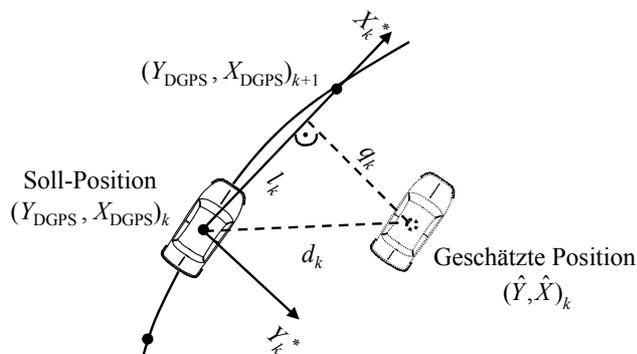


Abbildung 6-13: Bestimmung der Abweichung von der Soll-Position

Die zur Beurteilung der Ortungsgenauigkeit herangezogenen empirischen Genauigkeitsmaße werden aus den Abweichungen der geschätzten Fahrzeugpositionen zur Referenztrajektorie berechnet. Hierbei wird die als euklidischer Abstand zwischen Soll- und Ist-Position ermittelte Absolutabweichung  $d_k$  in einem trajektorienbegleitenden Koordinatensystem  $[Y^*, X^*]_k$  in die Längsabweichung  $l_k$  und die Querabweichung  $q_k$  aufgespalten (s. Abbildung 6-13). Nach

Elimination von groben Fehlern in den Schätzwerten (und der DGPS-Referenz) erfolgt dann die Berechnung der empirischen Varianzen.

$$s_{Abs,l}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n l_k^2 \quad ; \quad s_{Abs,q}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n q_k^2 \quad ; \quad s_{Abs,d}^2 = s_{Abs,l}^2 + s_{Abs,q}^2 \quad (6-20)$$

In (6-20) ist  $n$  die Anzahl der Fahrzeugpositionen, die zur Berechnung verwendet werden. Mit  $s_{Abs,d}$  liegt die mittlere empirische Standardabweichung der Absolutabweichung des Fahrzeugs von der Sollposition vor. Mit  $s_{Abs,l}$  und  $s_{Abs,q}$  kann die Homogenität von Längs- bzw. Querkomponente der Absolutabweichung beurteilt und Schlussfolgerungen hinsichtlich der korrekten Gewichtung von eingesetzten Sensoren und Bewegungsmodell gezogen werden.

Die Autobahnfahrt hat eine Länge von 27,5 km, wobei Fahrzeuggeschwindigkeiten bis 160 km/h auftreten. Ein besonders anspruchsvolles Detail ist das Durchfahren eines 500 m langen Tunnels im Dead-Reckoning. Abbildung 6-14 zeigt die Ergebnisse der Positionsschätzung bei der Tunnelfahrt.

Auf dem Hinweg (Pfeil nach oben) ist vor dem Tunnel, im Tunnel selbst und beim nachfolgenden Abbiegevorgang für einen Zeitraum von 83 s kein GPS verfügbar. Auf dem Rückweg beträgt der Ausfall 44 s. Mangels DGPS erfolgt die Überprüfung der gefilterten Trajektorie in diesem Bereich durch Transformation in eine digitale Straßenkarte, wobei im Tunnelabschnitt keine signifikante Abweichung des Dead-Reckoning vom Straßenraum festgestellt werden kann. Bei den beiden Abbiegevorgängen am oberen Ende des Tunnels folgt das Filter nahezu verzögerungsfrei dem Straßenverlauf. Dieses Verhalten wird wesentlich durch die geometrische Stellgröße  $\Delta\alpha_{k+1}$  in den Systemgleichungen bewirkt, wodurch bereits bei der Prädiktion von Fahrzeugposition und Orientierung die tatsächliche Orientierungsänderung des Fahrzeugs berücksichtigt wird.

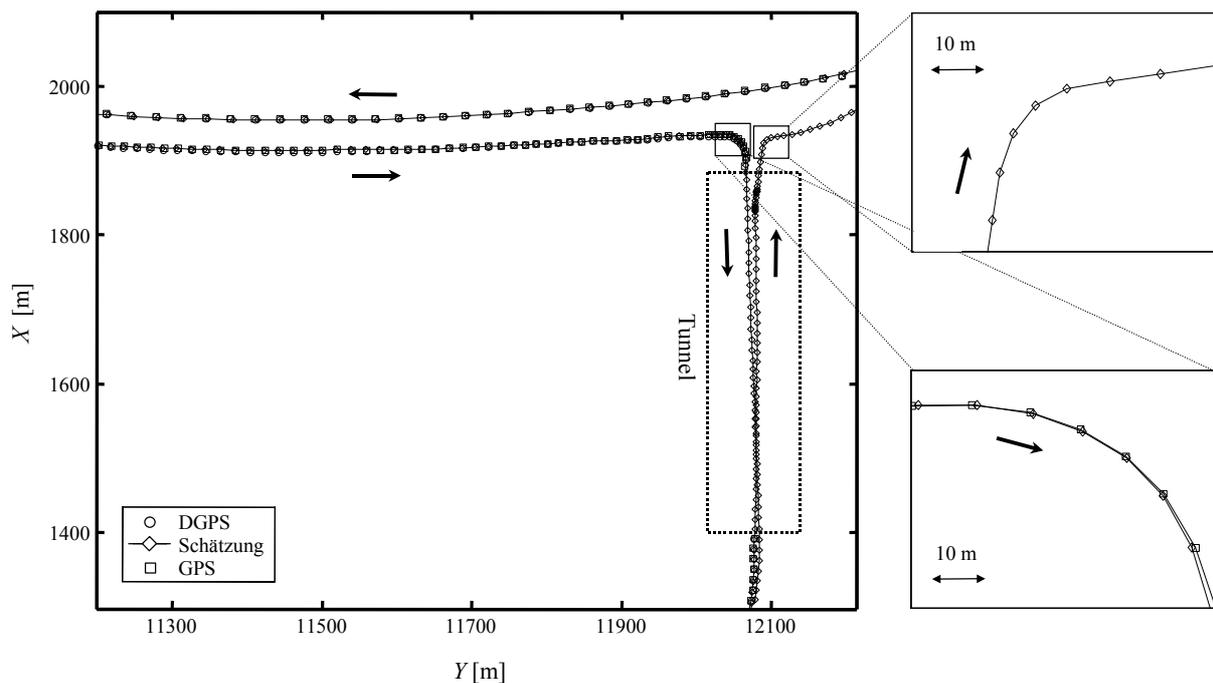


Abbildung 6-14: Ausschnitt Autobahnfahrt: Dead-Reckoning in einem 500 m langen Tunnel

In Tabelle 6-2 sind die Ergebnisse der Genauigkeitsanalyse für die gesamte Autobahnfahrt dargestellt. Der in der dritten Spalte verwendete Begriff „Gute GPS-Qualität“ bezieht sich auf alle Filterepochen, in denen absolutes GPS verfügbar ist und keine signifikanten Koordinateninnovationen erzeugt.

Tabelle 6-2: Genauigkeitsanalyse der Autobahnfahrt

Länge [km]	Anzahl Filterepochen	Gute GPS-Qualität [%]	$s_{Abs,l}$ [m]	$s_{Abs,q}$ [m]	$s_{Abs,d}$ [m]
27,5	1402	87	1,35	1,27	1,85

Die Standardabweichungen  $s_{\text{Abs},l}$  für die Längs- und  $s_{\text{Abs},q}$  für die Querabweichung weisen ein sehr homogenes Genauigkeitsniveau von ca. 1,3 m auf. Eine signifikante Abweichung zwischen beiden Komponenten ist nicht zu erkennen. Dies lässt den Rückschluss auf eine korrekte Gewichtung innerhalb des stochastischen Modells des KALMAN-Filters zu. Die mittlere empirische Standardabweichung der Absolutabweichung des Fahrzeugs wird als Maß für die absolute Ortungsgenauigkeit herangezogen und erfüllt mit  $s_{\text{Abs},d} = 1,85$  m deutlich die in Kapitel 6.1 spezifizierte Genauigkeitsanforderung.

Ein wesentlicher Grund für die guten Filterergebnisse der Autobahnfahrt ist in der hohen Verfügbarkeit von qualitativ guten absoluten GPS-Messungen zu sehen (87 %). Des Weiteren liegt eine lokal sehr gleichförmige Fahrzeugbewegung vor, d.h. es treten i.d.R. keine plötzlichen Geschwindigkeitswechsel auf. Aufgrund der Konformität der Bewegung mit dem in Kapitel 6.2.1 erstellten ungestörten Bewegungsmodell wird die Gefahr von Fehlentscheidungen bei der Innovationsbewertung im Filter reduziert.

Als zweites Beispiel werden die Filterergebnisse der Stadtfahrt gezeigt. Diese hat eine Länge von 12,8 km und weist insgesamt eine im Vergleich zur Autobahnfahrt schlechtere Qualität der absoluten GPS-Messungen auf.

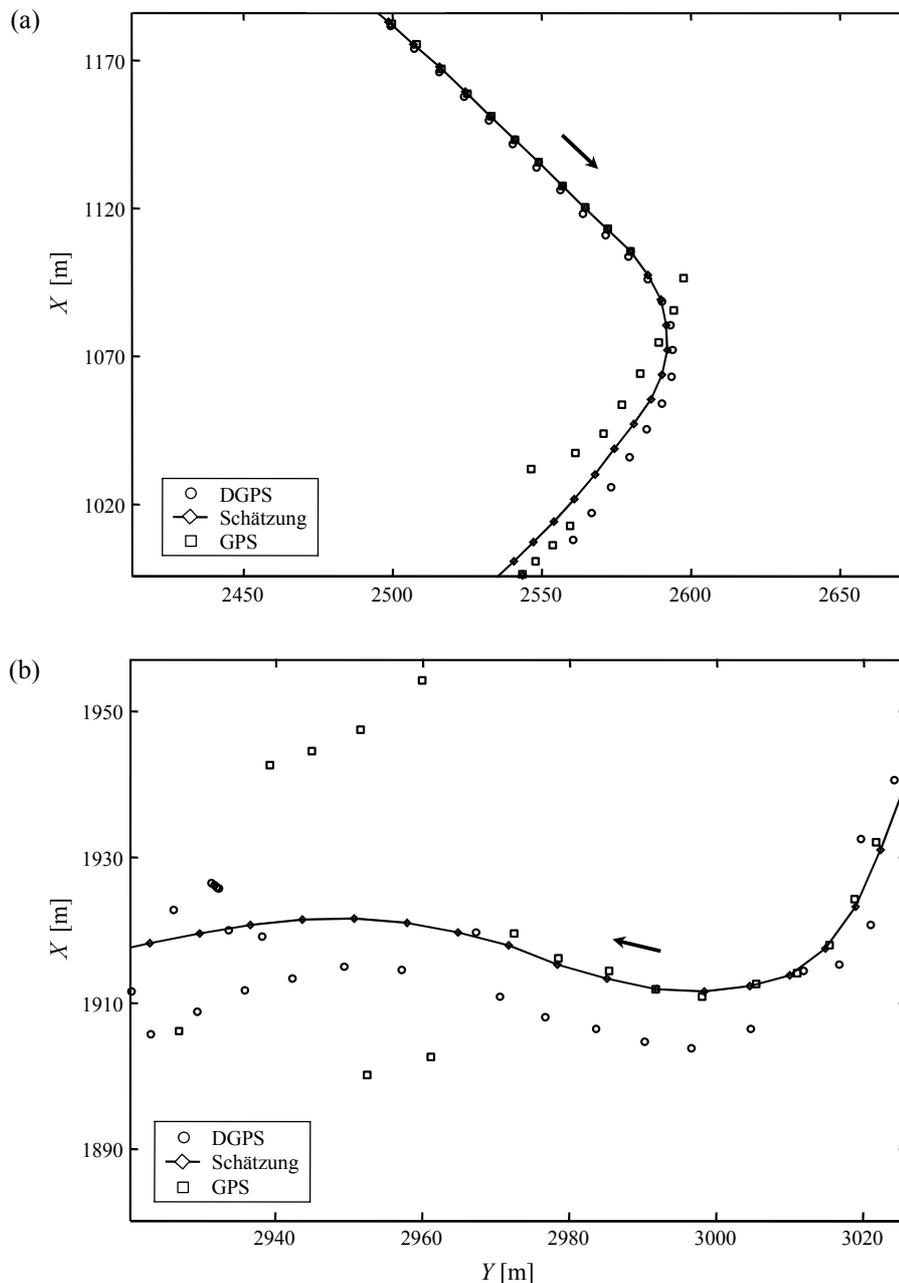


Abbildung 6-15: Ausschnitt Stadtfahrt: (a) Abbiegevorgang und (b) dicht bebaute Nebenstrasse

Abbildung 6-15-a zeigt einen Abbiegevorgang, bei dem eine plötzliche Verschlechterung der Qualität der absoluten GPS-Messungen mit einer maximalen Abweichung von ca. 20 m auftritt. Aufgrund der signifikanten Koordinateninnovationen werden die GPS-Messungen im Ortungsmodul niedriger gewichtet, wodurch der korrekte Verlauf der gefilterten Trajektorie dann wesentlich durch Differenzialodometer und Kreisel sichergestellt wird. Nach dem Abbiegevorgang treten Abweichungen der geschätzten Positionen von den DGPS-Referenzpositionen auf, wobei hier allerdings fehlerhafte DGPS-Messungen als Ursache zu benennen sind.

Eine vergleichbare Situation ist auch in Abbildung 6-15-b zu erkennen. Die Sprungsequenz der absoluten GPS-Messungen erreicht hierbei Abweichungen bis ca. 30 m. Durch Eliminierung dieser Messungen weist die gefilterte Trajektorie in den entsprechenden Filterepochen einen korrekten Verlauf auf.

Eine für das Ortungsmodul kritische Situation ist in Abbildung 6-16 dargestellt. Hierbei erfolgt die Initialisierung des KALMAN-Filters auf einem GPS-Parallelversatz. Aufgrund der Ähnlichkeit der inneren Geometrie der GPS-Trajektorie mit der DGPS-Referenztrajektorie und der Abwesenheit von signifikanten Koordinateninnovationen ist eine Identifizierung des Versatzes zunächst nicht möglich. Die gefilterte Trajektorie ist somit ebenfalls parallel zur Referenztrajektorie verschoben. Erst durch den Rücksprung von absolutem GPS auf die Referenz ist ein Indikator gegeben, welcher eine Korrektur des Verlaufs der geschätzten Trajektorie ermöglicht.

Hier wird eine Einschränkung für die kartenunabhängige Ortung aufgezeigt. In der vorliegenden Situation ist das Ortungsmodul ohne stützende Zusatzinformationen nicht in der Lage, die fehlerhafte Initialisierung zu erkennen. Es liefert für den Straßenabschnitt eine falsche Information hinsichtlich der befahrenen Trajektorie. Es wird allerdings auch deutlich, dass die implementierten Strategien und Kontrollmechanismen zur zuverlässigen Positionsbestimmung in der Lage sind, eine derartige Situation im Anschluss zu kompensieren und für den weiteren Straßenverlauf wieder korrekte Positionen zu übermitteln.

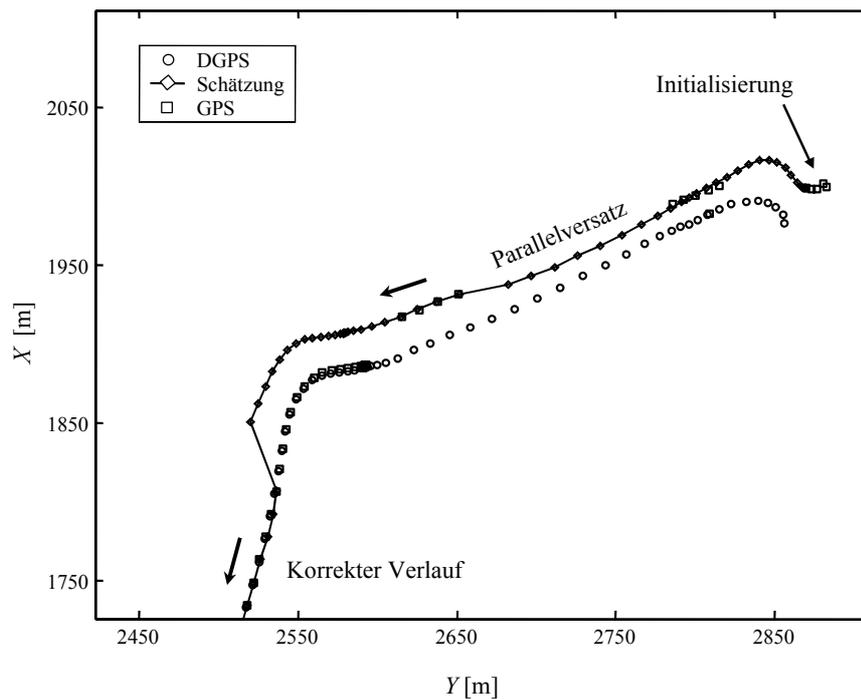


Abbildung 6-16: Fehlerhafte Initialisierung des KALMAN-Filters auf einem GPS-Parallelversatz

Die Ergebnisse der Genauigkeitsanalyse für die gesamte Stadtfahrt sind in Tabelle 6-3 dargestellt. Die Genauigkeitsmaße sind wieder mittels (6-20) bestimmt. Fehlerverläufe der geschätzten Trajektorie wie in Abbildung 6-16 werden nicht zur Berechnung herangezogen.

In der Tabelle erfolgt eine Klassifizierung der Stadtfahrt nach dichter (überwiegend Straßenzüge mit hohen geschlossenen Häuserfronten) und lockerer Bebauung (überwiegend breite Straßenzüge mit freistehenden einzelnen Gebäuden). Im Vergleich zur Autobahnfahrt verschlechtert sich bei dichter Bebauung der Anteil von qualitativ guten absoluten GPS-Messungen signifikant und sinkt auf 72%. Bei lockerer Bebauung kann mit 85% keine signifikante Verschlechterung festgestellt werden.

Tabelle 6-3: Genauigkeitsanalyse der Stadtfahrt

	Länge [km]	Anzahl Filterepochen	Gute GPS-Qualität [%]	$s_{Abs, l}$ [m]	$s_{Abs, q}$ [m]	$s_{Abs, d}$ [m]
Dicht bebaut	≈ 7,1	1425	72	2,12	2,18	3,04
Locker bebaut	≈ 5,7	672	85	1,87	1,64	2,49
Gesamt	12,8	2097	76	2,06	1,97	2,85

Die Zunahme von Häufigkeit und Größe der GPS-Abweichungen führt bei dichter Bebauung zu einer Verschlechterung der mittleren empirischen Standardabweichungen für die Längs- und Querabweichungen  $s_{Abs, l}$  und  $s_{Abs, q}$  der geschätzten Fahrzeugpositionen von 1,3 m (Autobahnfahrt) auf ca. 2,2 m. Die absolute Ortungsgenauigkeit erfüllt mit  $s_{Abs, d} = 3,04$  m (im Vergleich hierzu 1,85 m bei der Autobahnfahrt) immer noch deutlich die spezifizierte Genauigkeitsanforderung. Aufgrund der homogenen Genauigkeitsverhältnisse in Längs- und Querabweichung kann auf eine korrekte Gewichtung im stochastischen Modell des KALMAN-Filters geschlossen werden. Bei lockerer Bebauung verbessern sich die Standardabweichungen für die Längs- und Querabweichungen auf ca. 1,8 m. Die absolute Ortungsgenauigkeit liegt mit  $s_{Abs, d} = 2,49$  m zwischen Autobahnfahrt und dichter Bebauung.

Die auch bei der Stadtfahrt erzielten guten Ergebnisse zeigen die Leistungsfähigkeit des Ortungsmoduls innerhalb der befahrenen Szenarien. Die Kartenunabhängigkeit erzeugt allerdings die Möglichkeit von sequentiellen Fehlinterpretationen (s. Abbildung 6-16), was im Folgenden noch bewertet wird.

## 6.5 Zusammenfassung der Ergebnisse und Aufzeigen des Verbesserungspotenzials

Die mit den Anforderungen in Kapitel 6.1 spezifizierte Aufgabe der parametrischen Identifikation einer Fahrzeugbewegung in Echtzeit wird durch den Aufbau eines Ortungsmoduls bearbeitet. Die geforderte Steigerung der Zuverlässigkeit der Positionssensoren wird durch das Bewegungsmodell des Fahrzeugs (s. Kapitel 6.2.1), redundante geometrische Informationen mit einer dem Genauigkeitspotenzial der Sensoren entsprechenden Gewichtung (s. Kapitel 6.2.4.2) und durch eine Teststrategie zum Erkennen von grob fehlerhaften Sensordaten (s. Kapitel 6.3) erreicht. Formtreue der Trajektorie und Genauigkeitsniveau der Positionsschätzungen entsprechen den Anforderungen des Auftraggebers. In den vorliegenden Testfahrten treten keine Filterausfälle auf.

Eine vollständige Verfügbarkeit von korrekten Positionsinformationen wird mit der kartenunabhängigen Ortung allerdings nicht erreicht. In Einzelfällen auftretende Fehlinterpretationen (s. Abbildung 6-16) und Verschwenkungen der Trajektorie im Dead-Reckoning können ohne zusätzliche Informationen aus einer digitalen Karte nicht ausgeschlossen werden. Zur zusätzlichen Stützung des Ortungsmoduls wird daher die Kombination mit einem zentralenseitigen Map Matching-Verfahren (s. Kapitel 6.1) empfohlen.

Die Untersuchung der spezifizierten Anforderungen wird in Kapitel 6.4 exemplarisch anhand zweier Fahrten im öffentlichen Straßenraum durchgeführt. Die Fahrten repräsentieren hierbei die für den zukünftigen Einsatz des Ortungsmoduls geplanten Szenarien. Bei der ca. 28 km langen Autobahnfahrt wird – bei guter Qualität von absolutem GPS und einer mit dem ungestörten Bewegungsmodell des Fahrzeugs konformen Fahrzeugbewegung – eine absolute Ortungsgenauigkeit mit einer empirisch ermittelten mittleren Standardabweichung  $s_{Abs, d} = 1,85$  m erzielt. Ein 500 m langer Tunnel wird im Dead-Reckoning ohne signifikante Abweichungen durchfahren.

Aufgrund der dichten Bebauung weist die ca. 13 km lange Stadtfahrt eine Verschlechterung der Qualität von absolutem GPS auf. Das Bewegungsverhalten des Fahrzeugs ist durch häufig auftretende Beschleunigungs- und Verzögerungsvorgänge (Stop&Go) sehr inhomogen. Es treten Abbiegesituationen mit Orientierungsänderungen des Fahrzeugs bis zu 40 gon/s auf, wodurch hohe Anforderungen an das Bewegungsmodell gestellt werden. Die Stadtfahrt repräsentiert somit ein für das Ortungsmodul äußerst anspruchsvolles Szenario. Die absolute Ortungsgenauigkeit ist mit einer empirisch ermittelten mittleren Standardabweichung von  $s_{Abs, d} = 3,04$  m (Klassifizierung: dichte Bebauung) signifikant schlechter als bei der Autobahnfahrt, erfüllt aber die mit  $\sigma_Y = \sigma_X < 4$  m spezifizierte Genauigkeitsanforderung.

Sowohl bei der Autobahn- als auch bei der Stadtfahrt tritt bei schnellen Orientierungsänderungen des Fahrzeugs kein Überschwingen der geschätzten Trajektorie auf. Wesentlicher Grund hierfür ist die Einführung der Orientierungsänderung  $\Delta\alpha_{k+1}$  als geometrische Stellgröße in den Systemgleichungen des KALMAN-Filters, wodurch eine verzögerungsfreie Reaktion des Bewegungsmodells auf eine diesbezügliche Änderung des Fahrzeugzustands erfolgen kann. Für die Beobachtung der Stellgröße ist der verwendete piezoelektrische Vibrationskreisel aufgrund seiner hohen Genauigkeit ( $s_{\Delta\alpha, \text{Kreisel}} \leq 1$  gon/s), Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit geeignet. Während allen Messfahrten treten in den Kreismessungen nur 2 grobe Fehler auf. Zu einem Ausfall des Sensors kommt es überhaupt nicht. Das verwendete

Differenzialodometer weist ein ebenso zuverlässiges Verhalten wie der Kreisel auf, hat mit  $s_{\Delta\alpha, \text{Odo}} \approx 1\text{--}2$  gon/s allerdings eine etwas geringere Genauigkeit. Die Verfügbarkeit ist bei allen Fahrten ebenfalls immer gegeben. In Kombination mit dem kausalen Bewegungsmodell des Fahrzeugs erzeugen die relativen Positionssensoren einen geschätzten Fahrtverlauf, welcher die tatsächliche Trajektorie durch die Filterung hinreichend glatt repräsentiert und dabei deren lokale Krümmungsänderungen bewahrt.

Eine weitere Erhöhung von Genauigkeit bzw. Zuverlässigkeit und Steigerung der Verfügbarkeit der Ergebnisse muss durch die im Rahmen der nachfolgenden Problemszenarien vorgeschlagenen Gegenmaßnahmen erzielt werden:

- Fehlerhafte Anfangsorientierung des Fahrzeugs bei nachfolgendem längerem Ausfall von absoluten GPS-Messungen und die daraus resultierende zunehmende Abweichung der geschätzten Fahrzeugpositionen von der Referenztrajektorie.

Eine Reduzierung der Verschwenkung der im Dead-Reckoning geschätzten Trajektorie muss durch die Hinzunahme eines Sensors zur Ermittlung der Fahrzeugorientierung  $\alpha$  erreicht werden. Unter dem Aspekt der Wirtschaftlichkeit ist hier bspw. eine „Magnetfeldsonde“ (u.a. WESTBROOK / TURNER 1994) denkbar. Ob und inwieweit durch diesen Sensor eine Verbesserung erzielt werden kann, ist in nachfolgenden Untersuchungen zu klären.

Eine weitere Verbesserung des Schätzwertes der Fahrzeugorientierung kann durch die Hinzunahme eines zusätzlichen Sensors zur Ermittlung der Orientierungsänderung  $\Delta\alpha$  des Fahrzeugs erzielt werden. Hierfür ist u.U. das ebenfalls auf dem CAN-Bus des Messfahrzeugs zur Verfügung stehende Lenkwinkelsignal (u.a. MAULICK et al. 1997) geeignet, welches eine ebenso hohe Verfügbarkeit wie Differenzialodometer und Kreisel aufweist (vgl. CZOMMER 2001b). Zur Verifizierung ist eine Genauigkeitsuntersuchung und die Integration in das KALMAN-Filter erforderlich.

- Auswirkung von Kalibrierungsrestfehlern der relativen Positionssensoren. Die im Rahmen der Trainingsphase des Ortungsmoduls ermittelten mittleren Kalibrierungsparameter für Differenzialodometer und Kreisel enthalten Restabweichungen, die vor allem im Dead-Reckoning zur Kumulierung von systematischen Fehlern in der geschätzten Trajektorie führen können.

Ein möglicher Lösungsansatz ist durch die Kalibrierung der Sensoren während der Fahrt selbst gegeben. Hierzu müssen die entsprechenden Kalibrierungsparameter in das Ortungsmodul aufgenommen und im Verlauf der Fahrt mitgeschätzt werden. Ihre genaue und zuverlässige Bestimmung erfordert hinreichend lange Sequenzen von qualitativ guten Positionsschätzungen und kann daher nicht in jeder Filterepoche erfolgen (s.a. LABAHN 2000). Es wird daher ein dezentraler Ansatz vorgeschlagen, wobei eine vom eigentlichen Hauptfilter getrennte Berechnung der Parameter nur dann erfolgt, wenn die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt sind. Die Berechnungsergebnisse sind dann in das Hauptfilter einzuführen.

Die Erhöhung von Genauigkeit und Zuverlässigkeit der relativen Positionsinformationen ermöglicht für den Filterverlauf generell eine Verbesserung der Methoden zur Aufdeckung, Interpretation und Behandlung von signifikanten Koordinateninnovationen. Hierunter ist bspw. eine differenziertere Gewichtung von als grob fehlerhaft erkannten GPS-Messungen und die Entwicklung weiterer Plausibilitätskontrollen zur Vermeidung von Fehlinterpretationen zu verstehen. Die genannten Maßnahmen werden im Rahmen der Weiterentwicklung des Ortungsmoduls durchgeführt.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Quantifizierung und Identifikation von dynamischen Strukturmodellen zur Analyse und Interpretation von Deformations- und Bewegungsprozessen. Die Aufgabenstellungen sind aus zwei Teilgebieten der Ingenieurgeodäsie entnommen, welche im Rahmen des Forschungsschwerpunkts „Identifikation dynamischer Systeme“ von der Arbeitsgruppe „Geodätische Messtechnik“ des „Instituts für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen“ (IAGB) bearbeitet werden. Sowohl der Untersuchung von dynamischen Deformationsprozessen als auch der Fahrzeugortung auf der Grundlage von dynamischen Bewegungsmodellen liegen die parametrische Identifikation von Ursache/Wirkungs-Beziehungen und das Identifikationsverfahren der KALMAN-Filterung zugrunde, was aus systemtheoretischer Sicht eine gemeinsame Bearbeitung und Diskussion motiviert.

Im ersten Teil der Arbeit wird ein Temperaturdeformationsmodell zur Untersuchung der Auswirkung des einseitigen Temperatureinflusses auf eine Aluminiumsäule entwickelt. Kern des Modells ist die Quantifizierung der instationären Temperaturverteilung im Mantel der Säule, womit eine Erweiterung der bislang in der Deformationsanalyse als statisch angenommenen Temperaturbelastungen hin zu dynamischen Lasten erreicht wird. Die Modellierung des horizontalen nichtlinearen Temperaturgradienten wirkt unmittelbar den üblicherweise auftretenden Problemen einer repräsentativen messtechnischen Erfassung entgegen. Die Identifikation der Temperaturleitfähigkeit, welche das thermische Übertragungsverhalten der Aluminiumsäule maßgeblich festlegt, gelingt mittels adaptiver KALMAN-Filterung. Durch die Quantifizierung der thermischen Biegung als Nutzerfunktion kann das an die Realität angepasste Temperaturmodell zum Temperaturdeformationsmodell erweitert werden, wobei speziell die Neigung der Säule als Zielgröße spezifiziert und im interessierenden Temperaturbereich (ca. 20–80°C) verifiziert wird. Die mittlere Abweichung zwischen gerechneten und gemessenen Säulenneigungen liegt bei ca. 3% der experimentell erzeugten maximalen Amplitude. Das identifizierte Strukturmodell kann damit zur präzisen Simulation bei (innerhalb des betrachteten Temperaturbereichs) prinzipiell beliebigen einseitigen Belastungsszenarien genutzt werden.

Als zukünftige Anwendungsgebiete des dynamischen Temperaturdeformationsmodells sind die Analyse und Interpretation der thermischen Biegung von schlanken Baukonstruktionen bei einseitiger Belastung durch Sonneneinstrahlung und die im Maschinenbau viel diskutierten Verfahren zur rechnerischen (indirekten) Kompensation der Biegung balkenförmiger Elemente von hochpräzisen Werkzeugmaschinen vorstellbar. Zur Übertragung des Modells müssen dann entsprechende Modifikationen im Bereich der Modellbildung des konvektiven Wärmeaustauschs zwischen der Säule und dem umgebenden Medium (z.B. Luft) vorgenommen werden. Des Weiteren ist eine Anpassung an die Geometrie des untersuchten Objekts erforderlich, was gegebenenfalls den Übergang von der aktuell vorliegenden eindimensionalen Betrachtung finiter Ortsdifferenzen zu räumlichen finiten Elementen erfordert.

Vor dem Hintergrund des erheblichen Modellierungsaufwands, muss an dieser Stelle allerdings deutlich gemacht werden, dass derartige Modellerweiterungen nur interdisziplinär erfolgen können. Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit ist im Einzelfall unbedingt zu prüfen, inwieweit die interessierenden thermischen Deformationsprozesse nicht auch durch Verhaltensmodelle oder statische Lastannahmen quantifiziert werden können. Für diese Arbeit ist der Modellierungsaufwand als positiv zu beurteilen, da mit dem identifizierten Strukturmodell für den Ingenieurgeodäten ein erheblicher Erkenntnisgewinn hinsichtlich thermischer Prozesse vorliegt. Hierdurch wird die Schnittstelle zu Fachdisziplinen des Maschinenbaus und der Thermodynamik weiter gefestigt bzw. geöffnet. Die kooperative Erstellung und Nutzung physikalisch begründeter Modelle entspricht der aktuellen Entwicklung in der Ingenieurgeodäsie.

Im zweiten Teil der Arbeit erfolgt die parametrische Identifikation einer Fahrzeugbewegung. Im Rahmen eines Forschungsprojekts mit der DaimlerChrysler AG wird ein Ortungsmodul entwickelt, welches das quantifizierte Bewegungsmodell mit hybriden Positionssensoren der Serienausstattung des Fahrzeugs (absolutes GPS, Differenzialodometer und piezoelektrischer Vibrationskreisel) verknüpft. Die Integration erfolgt in einem zentralen KALMAN-Filter. Das Bewegungsmodell basiert auf der geometrisch und physikalisch motivierten Vorstellung einer zwischen zwei Abtastzeitpunkten gleichförmigen Kreisbewegung.

Die Einführung der Orientierungsänderung des Fahrzeugs als eine durch Kreismessungen erfasste „geometrische Stellgröße“, ermöglicht die kausale Modifizierung des ursprünglich kinematischen Ansatzes. Hierdurch wird eine unmittelbare Reduktion der Trägheit der Systemgleichungen des Filters erreicht, was speziell bei Kurvenfahrten eine Verbesserung in der Form der geschätzten Trajektorie bewirkt.

Die bei Stadtfahrten auftretende signifikante Verschlechterung der GPS-Qualität (Einzelsprünge und Parallelversatz) erfordert die Erarbeitung von Teststrategien zur Aufdeckung und entsprechenden Gewichtung der fehlerhaften GPS-Messungen. Insbesondere parallel versetzte GPS-Trajektorien können durch die Überprüfung des Gradienten der Koordinateninnovationen erfolgreich detektiert und in den Filterergebnissen beseitigt werden. Die Erhöhung der Verfügbarkeit der mittels des Ortungsmoduls erzielten Positionsschätzungen wird anschaulich anhand von Tunnelfahrten dokumentiert, wobei auch im Dead-Reckoning die Zuordnung der Positionsschätzungen zur Straße gewährleistet ist. Die erzielte mittlere absolute Ortungsgenauigkeit liegt zwischen  $s_d = 1,9$  m (bei Autobahnfahrten) und  $s_d = 3,0$  m (bei Stadtfahrten mit dichter Bebauung). Die Ergebnisse erfüllen die mit  $\sigma_Y = \sigma_X < 4$  m a priori festgelegten Genauigkeitsanforderungen.

Die vollständige Verfügbarkeit von korrekten Positionsinformationen kann mittels kartenunabhängiger Ortung nicht erreicht werden. In Einzelfällen liegen Fehlinterpretationen des Ortungsmoduls und Verschwenkungen der Trajektorie im Dead-Reckoning vor. Das Ortungsmodul ist daher in erster Linie als fahrzeugautonomer Lieferant von formtreuen und (zumeist) lagerichtigen Trajektorienstücken zu betrachten. Diese können als qualitativ hochwertige Startwerte für nachfolgende Map Matching-Prozesse verwendet werden. Hieraus ergeben sich auch die geplanten zukünftigen Anwendungen.

Zukünftige Anwendungen des Ortungsmoduls sind vor allem im Bereich der Location Based Services vorgesehen. Notrufzentralen sollen die vom verunfallten Fahrzeug übermittelte letzte Positionsfolge als Eingangsdaten für zentralen- seitige Map Matching-Prozesse nutzen und Rettungskräfte gezielt zum Unfallort führen. Zur Steigerung der Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit der Positionsschätzungen ist am IAGB die Integration weiterer Fahrzeugsensoren in das Ortungsmodul geplant. Aktuelle Untersuchungen beschäftigen sich mit der Hinzunahme des Lenkwinkelsignals, welches als zusätzliche Stellgröße des Bewegungsmodells denkbar wäre. Systematische Verschwenkungen einer im Dead-Reckoning geschätzten Trajektorie können möglicherweise durch die Einführung von richtungsgebenden Sensoren wie der (störungsanfälligen) Magnetfeldsonde reduziert werden. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt liegen diesbezüglich allerdings noch keine gesicherten Erkenntnisse vor.

## Literatur

- AMMON, D. (1997): *Modellbildung und Systementwicklung in der Fahrzeugdynamik*. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart
- ASSMANN, B. (1992): *Technische Mechanik: Band 3*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien
- AUSSEMS, T. (1999): *Positionsschätzung von Landfahrzeugen mittels KALMAN-Filterung aus Satelliten- und Koppel-navigationsbeobachtungen*. Veröffentlichungen des Geodätischen Instituts der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Nr. 55, Aachen
- BERNHARDT, U. (2002): *GIS-Technologien in der New Economy: Markttransparenz durch Geoinformationssysteme*. Wichmann Verlag, Heidelberg
- BOLEY, B.A. / WEINER, J.H. (1960): *Theory of Thermal Stresses*. John Wiley & Sons, New York London
- BOLJEN, J. (1980): *Interpretation gemessener Deformationen mit den Hilfsmitteln der Elastizitätstheorie*. In: CONZETT, R. / MATTHIAS, H.J. / SCHMID, H. (Hrsg.): *Ingenieurvermessung 80*, Beiträge zum VIII. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung, Band 1, Dümlers Verlag, Bonn, B 14
- BOLJEN, J. (1983): *Ein dynamisches Modell zur Analyse und Interpretation von Deformationen*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 122, Hannover
- BONSE, R. (1999): *Thermisches Last-Verformungsverhalten von Werkzeugmaschinen*. RWTH Aachen, Berichte aus der Produktionstechnik, Band 14/99, Aachen
- BRAMMER, K. / SIFFLING, G. (1989): *Kalman-Bucy-Filter: deterministische Beobachtung und stochastische Filterung*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien
- BRONSTEIN, I.N. / SEMENDJAJEW, K.A. (1987): *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun & Frankfurt/Main
- BROWN, R.G. / HWANG, P.Y.C. (1997): *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, New York Chichester Brisbane Toronto Singapore Weinheim
- CHATFIELD, C. (1982): *Analyse von Zeitreihen*. Carl Hanser Verlag, München Wien
- CHRZANOWSKI, A. / CHEN, Y.Q. / SZOSTAK-CHRZANOWSKI, A. / SECORD, J.M. (1990): *Combination of Geometrical Analysis with Physical Interpretation for the Enhancement of Deformation Modelling*. In: Proceedings of FIG XXIX Congress of Engineering Surveys, Commission 6, Helsinki, 612.3
- CZOMMER, R. / MÖHLENBRINK, W. (1999): *Multi-Sensor Map Matching Concepts for Positioning of Road and Rail Vehicles*. In: Proceedings of the International Workshop on Mobile Mapping Technology, Bangkok
- CZOMMER, R. (2001a): *Leistungsfähigkeit fahrzeugautonomer Ortungsverfahren auf der Basis von Map-Matching-Techniken*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 535, München
- CZOMMER, R. (2001b): *Genauigkeitsanalyse der Einzelsensoren der Ortungsplattform*. Bericht im Auftrag der DaimlerChrysler AG, Universität Stuttgart, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, unveröffentlicht
- DOLL, H. / HEGER, W. / KUHLMANN, H. / SPINDLER, U. (1995): *Deformationsanalyse des westlichen Pylons der Norderelbbrücke mit dem Neigungsmeßsystem ROTLEVEL*. In: Allgemeine Vermessungsnachrichten, Heft 4, Wichmann Verlag, Heidelberg, 133 – 143
- DRESZER, J. (1975): *Mathematik Handbuch für Technik und Naturwissenschaft*. Verlag Harri Deutsch, Zürich Frankfurt/Main Thun
- EICHHORN, A. / KUHLMANN, H. / BETTERMANN, R. / CZOMMER, R. (2001): *Entwurf eines Kalman-Filters zur karten-unabhängigen Fahrzeugortung*. Abschlussbericht im Auftrag der DaimlerChrysler AG, Universität Stuttgart, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, unveröffentlicht
- EICHHORN, A. / MÖHLENBRINK, W. (2001): *Identification of Physical Parameters by Means of Differential Equations in the Adaptive Dynamic Filter Model*. In: Proceedings of the 10<sup>th</sup> FIG International Symposium on Deformation Measurements, Orange, 326 - 335
- EICHLER-LIEBENOW, C. (1999): *Zur numerischen Behandlung räumlich mehrdimensionaler parabolischer Differentialgleichungen mit linear-impliziten Splitting-Methoden und linearer partieller differentiell-algebraischer Systeme*. Dissertation an der Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Halle
- EILFORD, H. (1957): *Bewegungsmessungen am Stuttgarter Fernsehturm*. In: FINSTERWALDER, R. / GROßMANN, W. (Hrsg.): *Zeitschrift für Vermessungswesen*, Nr. 8, Wittwer Verlag, Stuttgart, 258 – 263

- ELLMER, W. (1987): *Untersuchung temperaturinduzierter Höhenänderungen eines Großturbinentisches*. Schriftenreihe des Studiengangs Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr, Heft 26, München
- ENTENMANN, V. (1995): *Prädiktion von Flugzeugtrajektorien*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, unveröffentlicht
- EYKHOFF, P. (1974): *System Identification*. John Wiley & Sons, London New York Sydney Toronto
- FALK, S. (1967): *Lehrbuch der technischen Mechanik: Erster Band*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- FELGENDREHER, N. (1981): *Studie zur Erfassung und Verarbeitung von Meßdaten dynamischer Systeme*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Nr. 256, München
- FÖLLINGER, O. (1980): *Regelungstechnik*. AEG-TELEFUNKEN AG, Berlin Frankfurt/M
- FÖLLINGER, O. / FRANKE, D. (1982): *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien
- FÖLLINGER, O. (1986): *Laplace- und Fourier-Transformation*. Hüthig Verlag, Heidelberg
- GALLAGHER, R.H. (1976): *Finite-Element-Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- GELB, A. / KASPER, J.F. / NASH, R.A. / PRICE, C.F. / SUTHERLAND, A.A. (1974): *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T. Press, Cambridge London
- GERTHSEN, C. / KNESER, H.O. / VOGEL, H. (1982): *Physik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- GOBRECHT, H. (1974): *Mechanik, Akustik, Wärme*. In: Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1, Verlag Walter de Gruyter, Berlin New York
- GÜLAL, E. (1997): *Geodätische Überwachung einer Talsperre; eine Anwendung der KALMAN-Filtertechnik*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 224, Hannover
- HAGEDORN, P. (1989): *Technische Mechanik: Band 1*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt
- HAMEL, G. (1949): *Theoretische Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg
- HEINE, K. (1999): *Beschreibung von Deformationsprozessen durch Volterra- und Fuzzy-Modelle sowie Neuronale Netze*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 516, München
- HEISEL, U. (1980): *Ausgleich thermischer Deformationen an Werkzeugmaschinen*. Produktionstechnik-Berlin, Band 10, Carl Hanser Verlag, München Wien
- HERING, E. / MARTIN, R. / STOHRER, M. (1995): *Physik für Ingenieure*. VDI Verlag, Düsseldorf
- HESSE, C. (2002): *Deformation Analysis of a Shell Structure under varying Loads with Kalman-Filter Techniques*. In: KAHMEN, H. / NIEMEIER, W. / RETSCHER, G. (Eds.): 2<sup>nd</sup> Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering, Berlin
- HEUNECKE, O. / PELZER, H. / PFEUFER, A. / WILLGALIS, S. (1993): *Comparative Investigations of Dynamic Deformation Models*. In: Proceedings of 7th International FIG Symposium on Deformation Measurements together with 6th Canadian Symposium on Mining Surveying, Banff, 310 - 321
- HEUNECKE, O. (1995): *Zur Identifikation und Verifikation von Deformationsprozessen mittels adaptiver KALMAN-Filterung (Hannoversches Filter)*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 208, Hannover
- HEUNECKE, O. (1996): *Einige Gedanken zur fachübergreifenden Untersuchung von Deformationsvorgängen, dargestellt am Beispiel der Filterung einer Biegelinie eines Pylons*. In: Festschrift zum 60. Geburtstag von Hans Pelzer, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 209, Hannover, 75 – 92
- HEUNECKE, O. / KUHLMANN, H. (1998): *Fachübergreifende Deformationsanalyse am Beispiel der Untersuchung des Tagesganges eines Pylons*. In: MÖSER, M. (Red.): Meßtechniken und Auswertalgorithmen für die praktische Deformationsanalyse heute und morgen, Beiträge zum 45. DVW-Seminar, Schriftenreihe des DVW, Band 30, Dresden, 160 – 176
- HONEYWELL (2002): *Honeywell Accelerometer Product Lines: QAI400*. Inertial Sensor Products Redmond, <http://www.inertialsensor.com>
- HUEP, W. (1986): *Zur Positionsschätzung im gestörten KALMAN-Filter am Beispiel eines manövrierenden Wasserfahrzeuges*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 143, Hannover

- ISERMANN, R. (1972): *Parameter-Identifikationsverfahren*. Technische Universität Berlin, Automatisierung, Analyse und Synthese dynamischer Systeme, Nr. 42, Berlin
- ISERMANN, R. (1974): *Prozeßidentifikation*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- ISERMANN, R. (1988a): *Identifikation dynamischer Systeme*. Band 1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo
- ISERMANN, R. (1988b): *Identifikation dynamischer Systeme*. Band 2, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo
- JANNA, W.S. (2000): *Engineering Heat Transfer*. CRC Press, Boca Raton London New York Washington
- KAMMER, C. (1995): *Grundlagen und Werkstoffe*. In: ALUMINIUM-ZENTRALE-DÜSSELDORF (Hrsg.): Aluminium-Taschenbuch, Band 1, Aluminium-Verlag, Düsseldorf
- KUCHLING (1986): *Taschenbuch der Physik*. Verlag Harri Deutsch, Thun & Frankfurt/Main
- KUHLMANN, H. (1996): *Ein Beitrag zur Überwachung von Brückenbauwerken mit kontinuierlich registrierten Messungen*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 218, Hannover
- LABAHN, R. (2000): *Entwurf eines KALMAN-Filters zur Integration von DGPS- und Radsensordaten*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, unveröffentlicht
- LUZ, E. (1992): *Schwingungsprobleme im Bauwesen: Einführung in die Schwingungsberechnung von Baukonstruktionen*. expert-Verlag, Ehningen bei Böblingen
- MAULICK, T. / HAKEN, K.-L. / ESSERS, U. (1997): *Einfluß von Messung und Berechnung der Reifeneigenschaften auf die Aussagefähigkeit von Fahrdynamiksimulationen*. In: VDI-GESELLSCHAFT FAHRZEUG- UND VERKEHRSTECHNIK (Hrsg.): Reifen Fahrwerk Fahrbahn, 6. Fachtagung in Hannover, VDI Berichte 1350, VDI Verlag, Düsseldorf, 185 - 208
- MÖHLENBRINK, W. (1984): *Zur Entwicklung eines Meßverfahrens für die Bestimmung von Bauwerksverformungen aus Neigungs- und Beschleunigungsmessungen*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 307, München
- MÖHLENBRINK, W. / KRZYSZEK, P. (1984): *Messung windinduzierter Bewegungen an Hochbauten – Erfahrungen und neue Erkenntnisse*. In: RINNER, K. / SCHELLING, G. / BRANDSTÄTTER, G. (Hrsg.): Ingenieurvermessung 84, Beiträge zum IX. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung, Band 2, Dümmlers Verlag, Bonn, C 7
- MÖHLENBRINK, W. / WELSCH, D. (1984): *Aktions-Reaktions-Analyse thermischer Verformungen an Ingenieurbauten*. In: RINNER, K. / SCHELLING, G. / BRANDSTÄTTER, G. (Hrsg.): Ingenieurvermessung 84, Beiträge zum IX. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung, Band 2, Dümmlers Verlag, Bonn, E 2
- NATKE, H.G. (1983): *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg Verlag, Braunschweig
- NIEMEIER, W. (2002): *Ausgleichsrechnung*. Verlag Walter de Gruyter, Berlin New York
- NOWACKI, W. (1974): *Baudynamik*. Springer-Verlag, Wien New York
- OMEGA (2000): *Temperatur-Meßtechnik*. Katalog der Newport Electronics GmbH, Deckenpfronn
- OVERBECK, T. (1992): *Beitrag zur Steigerung der Leistungsfähigkeit von Horizontal-Knickarm-Robotern*. Technische Universität Hamburg-Harburg, AWA Fortschrittsberichte, Band 4, Hamburg
- PANGGABEAN, H. (1978): *Schwingungsverhalten von turmartigen Tragwerken unter aerodynamischer Belastung*. Beiträge zur Anwendung der Aeroelastik im Bauwesen, Heft 10, München
- PELZER, H. (1974): *Bewegungen hoher Türme*. In: Vermessungswesen und Raumordnung, Heft 36, 345 – 354.
- PELZER, H. (1977): *Ein Modell zur messtechnischen und mathematischen Erfassung kontinuierlicher Deformationsvorgänge*. In: XV. International Congress of Surveyors, Commission 6, Stockholm, 607.1
- PELZER, H. (1985a): *Grundlagen der mathematischen Statistik und der Ausgleichsrechnung*. In: PELZER, H. (Hrsg.): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Wittwer-Verlag, Stuttgart, 3 – 120
- PELZER, H. (1985b): *Statische, kinematische und dynamische Punktfelder*. In: PELZER, H. (Hrsg.): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Wittwer-Verlag, Stuttgart, 225 – 262
- PELZER, H. (Hrsg.) (1988): *Ingenieurvermessung: Deformationsmessungen, Massenberechnung*. Ergebnisse des Arbeitskreises 6 des Deutschen Vereins für Vermessungswesen (DVW) e.V., Wittwer-Verlag, Stuttgart

- PFEUFER, A. (1990): *Beitrag zur Identifikation und Modellierung dynamischer Deformationsprozesse*. In: KAMMER DER TECHNIK (Hrsg.): Vermessungstechnik, Zeitschrift für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie, Heft 1, Verlag für Bauwesen GmbH, Berlin, 19 – 22
- PFEUFER, A. (1994): *On the analysis of dynamic deformation processes*. In: Proceedings of FIG XX Congress of Engineering Surveys, Commission 6, Melbourne, 602.2
- REICHMANN, K.-H. (1978): *Zur Querschwingung, thermischen Belastung und Zuverlässigkeits-Beurteilung turmartiger Tragwerke*. In: MÜLLER, F.P. (Hrsg.): Beiträge zum 3. Berichtskolloquium „Bauwerke unter aerodynamischer Belastung“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Karlsruhe, 93 – 115
- REPPICH, A. / WILLIG, R. (1995): *Yaw Rate Sensor for Vehicle Dynamics Control System*. In: SORG, H. (Ed.): Symposium Gyro Technology 1995, Universität Stuttgart und Deutsche Gesellschaft für Ortung und Navigation (DGON), Stuttgart, 16.1 – 9
- RICHTER, F. (1998): *Erfassung und Ausgleich thermisch bedingter Verformungen an Industrierobotern*. Universität Stuttgart, Berichte aus dem Institut für Werkzeugmaschinen, Band 12, Stuttgart
- RÖSLER, E.S. (1999): *Temperaturmessung: Reproduzierbare Aussage oder nur Interpolation zwischen Fixpunkten ?*. In: MSR-Magazin, Heft 3, Vereinigte Fachverlage GmbH, Mainz, 16 - 18
- RUSCHEWEYH, H. (1982): *Dynamische Windwirkung an Bauwerken*. Band 1, Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin
- SCHLAICH, J. / SCHÄFER, K. / NEUERBURG, W. (1981): *Winddruck- und Verformungsmessungen am Funkturm Aufhausen*. In: ZERNA, W. (Hrsg.): Gebäudeaerodynamik, DFG-Kolloquium an der Ruhr-Universität Bochum, Konstruktiver Ingenieurbau-Berichte, Heft 35/36, Vulkan-Verlag, Essen, 16 – 26
- SCHLITTEG, R. / STREITBERG, B.H.J. (1991): *Zeitreihenanalyse*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien
- SCHMID, H. (1991): *Winderregte Schwingungen schlanker Bauwerke*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 7, Nr. 195, VDI-Verlag, Düsseldorf
- SCHRICK, K.W. (1977): *Anwendungen der Kalman-Filter-Technik*. Oldenbourg Verlag, München
- SCHUËLLER, G.I. / PANGGABEAN, H. / WITTMANN, F.H. (1975): *Spectral- and Time History Approach for Prediction of the Behaviour of Slender Structures under Wind-Load – a Comparative Study*. Beiträge zur Anwendung der Aeroelastik im Bauwesen, Heft 6, München
- SCHWARZ, R. / WILLIMOWSKI, M. / WILLIMOWSKI, P. / ISERMANN, R. (1997): *Modellbasierte Rekonstruktion der Einflußgrößen von Radaufhängungs- und Reifendynamik auf den Schlupf*. In: VDI-GESELLSCHAFT FAHRZEUG- UND VERKEHRSTECHNIK (Hrsg.): Reifen Fahrwerk Fahrbahn, 6. Fachtagung in Hannover, VDI Berichte 1350, VDI Verlag, Düsseldorf, 155 - 184
- SEEBER, G. (1989): *Satellitengeodäsie: Grundlagen, Methoden und Anwendungen*. Verlag Walter de Gruyter, Berlin New York
- STERNBERG, H. (2000): *Zur Bestimmung der Trajektorie von Landfahrzeugen mit einem hybriden Meßsystem*. Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformation der Universität der Bundeswehr, Heft 67, Neubiberg
- TAUBENHEIM, J. (1969): *Statistische Auswertung geophysikalischer und meteorologischer Daten*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig
- TESKEY, W.F. (1985): *Determining Deformation by Combining Measurement Data with Structural Data*. In: TESKEY, W.F. / GRUENDIG, L. (Eds.): Papers for the Precise Engineering and Deformation Surveys Workshop, Calgary Alberta, 202 – 217
- TESKEY, W.F. (1988): *Integrierte Analyse geodätischer und geotechnischer Daten sowie physikalischer Modelldaten zur Beschreibung des Deformationsverhaltens großer Erddämme unter statischer Belastung*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 341, München
- TIMOSHENKO, S.P. / GOODIER, J.N. (1985): *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company, Singapore
- UNBEHAUEN, R. (1969): *Systemtheorie: Eine Einführung für Ingenieure*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien
- UNBEHAUEN, R. (1993): *Systemtheorie: Grundlagen für Ingenieure*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien
- UNBEHAUEN, R. (1998): *Systemtheorie 2: Mehrdimensionale, adaptive und nichtlineare Systeme*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien
- WANG, J.G. (1997): *Filtermethoden zur fehlertoleranten kinematischen Positionsbestimmung*. Schriftenreihe des Studiengangs Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr, Heft 52, Neubiberg

- WELSCH, W.M. (1981): *Gegenwärtiger Stand der geodätischen Analyse und Interpretation geometrischer Deformationen*. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Heft 2, Wichmann Verlag, Karlsruhe, 41 – 51
- WELSCH, W.M. / HEUNECKE, O. / KUHLMANN, H. (2000): *Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen*. In: MÖSER, M. / MÜLLER, G. / SCHLEMMER, H. / WERNER, H. (Hrsg.): Handbuch Ingenieurgeodäsie, Wichmann Verlag, Heidelberg
- WELSCH, W.M. / HEUNECKE, O. (2001): *Models and Terminology for the Analysis of Geodetic Monitoring Observations*. In: Proceedings of the 10<sup>th</sup> FIG International Symposium on Deformation Measurements, Commission 6, Orange, 390 - 412
- WERNER, H. / MÖBIUS, G. (1976): *Beitrag zur Auswertung und Interpretation von Bauwerksüberwachungsmessungen*. In: KAMMER DER TECHNIK (Hrsg.): Vermessungstechnik, Zeitschrift für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie der Deutschen Demokratischen Republik, Heft 8, 302 – 305
- WERNSTEDT, J. (1989): *Experimentelle Prozeßanalyse*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien
- WESSEL, P. (1939): *Physik*. Ernst Reinhardt Verlag, München
- WESTBROOK, M.H. / TURNER, J.D. (1994): *Automotive Sensors*. Institute of Physics Publishing, Bristol & Philadelphia
- WRYCZA, W. (1983): *Praktische Schwingungsberechnung von Türmen, Schornsteinen, Maschinenpodesten, Fundamenten und Hochbauten*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin München
- ZIEGLER, H. (1970): *Vorlesungen über Mechanik*. Birkhäuser Verlag, Basel & Stuttgart
- ZIENKIEWICZ, O.C. (1971): *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London
- ZURMÜHL, R. (1964): *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg
- ZURMÜHL, R. / FALK, S. (1997): *Matrizen und ihre Anwendungen: 1. Grundlagen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York

## A Bestimmung der partiellen Ableitungen der Matrix $T_{p, k+1, k}$ der adaptiv erweiterten Systemgleichungen des Masse-Feder-Dämpfungs-Systems

Die in Gleichung (4-22) enthaltene Matrix  $T_{p, k+1, k}$  beinhaltet die partiellen Ableitungen der Systemgleichungen  $\Psi_d$  nach den gesuchten physikalischen Parametern  $a_0$  und  $a_1$ . Die partiellen Ableitungen werden mittels

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{d,k}^0 \\ \mathbf{x}_{p,k}^0 \\ u_k^0 \\ w_k^0 \\ \mathbf{w}_{p,k}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{d,k} \\ \hat{\mathbf{x}}_{p,k} \\ u_k \\ 0 \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} \quad (\text{A-1})$$

an der Stützstelle der Taylorentwicklung von (4-20) gebildet. Somit ergibt sich für die Matrix  $T_{p, k+1, k}$  mittels der Gleichung (4-23):

$$\mathbf{T}_{p, k+1, k} = \frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{x}_{p,k}} \Big|_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_{k+1}}{\partial a_{0,k}} \Big|_0 & \frac{\partial y_{k+1}}{\partial a_{1,k}} \Big|_0 \\ \frac{\partial \dot{y}_{k+1}}{\partial a_{0,k}} \Big|_0 & \frac{\partial \dot{y}_{k+1}}{\partial a_{1,k}} \Big|_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

Die in obiger Gleichung auftretenden partiellen Ableitungen werden mittels der Darstellung (4-15) der rekursiven Lösung der Bewegungsgleichung ermittelt. Da die in (4-15) enthaltenen Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  wiederum Funktionen der gesuchten physikalischen Parameter sind, werden diese ebenfalls zeitindiziert und es folgt für die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{p, k+1, k}(1, 1) &= \frac{\partial y_{k+1}}{\partial a_{0,k}} \Big|_0 = \left( \frac{\partial y_{k+1}}{\partial \lambda_{1,k}} \frac{\partial \lambda_{1,k}}{\partial a_{0,k}} + \frac{\partial y_{k+1}}{\partial \lambda_{2,k}} \frac{\partial \lambda_{2,k}}{\partial a_{0,k}} \right) \Big|_0 \\ \mathbf{T}_{p, k+1, k}(1, 2) &= \frac{\partial y_{k+1}}{\partial a_{1,k}} \Big|_0 = \left( \frac{\partial y_{k+1}}{\partial \lambda_{1,k}} \frac{\partial \lambda_{1,k}}{\partial a_{1,k}} + \frac{\partial y_{k+1}}{\partial \lambda_{2,k}} \frac{\partial \lambda_{2,k}}{\partial a_{1,k}} \right) \Big|_0 \\ \mathbf{T}_{p, k+1, k}(2, 1) &= \frac{\partial \dot{y}_{k+1}}{\partial a_{0,k}} \Big|_0 = \left( \frac{\partial \dot{y}_{k+1}}{\partial \lambda_{1,k}} \frac{\partial \lambda_{1,k}}{\partial a_{0,k}} + \frac{\partial \dot{y}_{k+1}}{\partial \lambda_{2,k}} \frac{\partial \lambda_{2,k}}{\partial a_{0,k}} \right) \Big|_0 \\ \mathbf{T}_{p, k+1, k}(2, 2) &= \frac{\partial \dot{y}_{k+1}}{\partial a_{1,k}} \Big|_0 = \left( \frac{\partial \dot{y}_{k+1}}{\partial \lambda_{1,k}} \frac{\partial \lambda_{1,k}}{\partial a_{1,k}} + \frac{\partial \dot{y}_{k+1}}{\partial \lambda_{2,k}} \frac{\partial \lambda_{2,k}}{\partial a_{1,k}} \right) \Big|_0 \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

Im Folgenden sind die einzelnen, in Gleichungssystem (A-3) enthaltenen, partiellen Ableitungen angegeben. Die Berechnung der Eigenwerte  $\lambda_{1,k}$  und  $\lambda_{2,k}$  an der Stelle  $\hat{\mathbf{x}}_{p,k} = (\hat{a}_{0,k}, \hat{a}_{1,k})^T$  wird mittels

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{1,k} &= -\frac{\hat{a}_{1,k}}{2} + \sqrt{\frac{\hat{a}_{1,k}^2}{4} - \hat{a}_{0,k}} \\ \hat{\lambda}_{2,k} &= -\frac{\hat{a}_{1,k}}{2} - \sqrt{\frac{\hat{a}_{1,k}^2}{4} - \hat{a}_{0,k}} \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

abgekürzt. Für die partiellen Ableitungen nach den Eigenwerten gilt:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial y_{k+1}}{\partial \lambda_{1,k}} \right|_0 &= \frac{1}{(\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k})^2} \left\{ \left[ \left( 1 - (\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k}) \Delta t \right) e^{\hat{\lambda}_{1,k} \Delta t} - e^{\hat{\lambda}_{2,k} \Delta t} \right] (\hat{\lambda}_{2,k} \hat{y}_k - \hat{y}_k) \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{1}{\hat{\lambda}_{1,k}} \left( \frac{\hat{\lambda}_{2,k}}{\hat{\lambda}_{1,k}} + (\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k}) \Delta t - 2 \right) e^{\hat{\lambda}_{1,k} \Delta t} + \frac{1}{\hat{\lambda}_{2,k}} e^{\hat{\lambda}_{2,k} \Delta t} - \frac{(\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k})^2}{\hat{\lambda}_{1,k} \hat{\lambda}_{2,k}} \right] \frac{f_k}{m} \right\} \\
\left. \frac{\partial y_{k+1}}{\partial \lambda_{2,k}} \right|_0 &= \frac{1}{(\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k})^2} \left\{ \left[ e^{\hat{\lambda}_{1,k} \Delta t} - \left( 1 + (\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k}) \Delta t \right) e^{\hat{\lambda}_{2,k} \Delta t} \right] (\hat{y}_k - \hat{\lambda}_{1,k} \hat{y}_k) \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{1}{\hat{\lambda}_{1,k}} e^{\hat{\lambda}_{1,k} \Delta t} + \frac{1}{\hat{\lambda}_{2,k}} \left( \frac{\hat{\lambda}_{1,k}}{\hat{\lambda}_{2,k}} - (\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k}) \Delta t - 2 \right) e^{\hat{\lambda}_{2,k} \Delta t} - \frac{(\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k})^2}{\hat{\lambda}_{1,k} \hat{\lambda}_{2,k}^2} \right] \frac{f_k}{m} \right\} \\
\left. \frac{\partial \dot{y}_{k+1}}{\partial \lambda_{1,k}} \right|_0 &= \frac{1}{(\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k})^2} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{\hat{\lambda}_{1,k}}{\hat{\lambda}_{2,k}} (\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k}) \Delta t \right) e^{\hat{\lambda}_{1,k} \Delta t} - e^{\hat{\lambda}_{2,k} \Delta t} \right] (\hat{\lambda}_{2,k}^2 \hat{y}_k - \hat{\lambda}_{2,k} \hat{y}_k) \right. \\
&\quad \left. + \left[ (\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k}) \Delta t - 1 \right] e^{\hat{\lambda}_{1,k} \Delta t} + e^{\hat{\lambda}_{2,k} \Delta t} \right] \frac{f_k}{m} \right\} \\
\left. \frac{\partial \dot{y}_{k+1}}{\partial \lambda_{2,k}} \right|_0 &= \frac{1}{(\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k})^2} \left\{ \left[ e^{\hat{\lambda}_{1,k} \Delta t} - \left( 1 + \frac{\hat{\lambda}_{2,k}}{\hat{\lambda}_{1,k}} (\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k}) \Delta t \right) e^{\hat{\lambda}_{2,k} \Delta t} \right] (\hat{\lambda}_{1,k} \hat{y}_k - \hat{\lambda}_{1,k}^2 \hat{y}_k) \right. \\
&\quad \left. + \left[ e^{\hat{\lambda}_{1,k} \Delta t} - (\hat{\lambda}_{1,k} - \hat{\lambda}_{2,k}) \Delta t + 1 \right] e^{\hat{\lambda}_{2,k} \Delta t} \right] \frac{f_k}{m} \right\} \tag{A-5}
\end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen der Eigenwerte nach den gesuchten physikalischen Parametern gilt:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \lambda_{1,k}}{\partial a_{0,k}} \right|_0 &= - \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\hat{a}_{1,k}^2}{4} - \hat{a}_{0,k}}} & \left. \frac{\partial \lambda_{1,k}}{\partial a_{1,k}} \right|_0 &= \frac{\hat{a}_{1,k}}{4 \sqrt{\frac{\hat{a}_{1,k}^2}{4} - \hat{a}_{0,k}}} - \frac{1}{2} \\
\left. \frac{\partial \lambda_{2,k}}{\partial a_{0,k}} \right|_0 &= \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\hat{a}_{1,k}^2}{4} - \hat{a}_{0,k}}} & \left. \frac{\partial \lambda_{2,k}}{\partial a_{1,k}} \right|_0 &= - \frac{\hat{a}_{1,k}}{4 \sqrt{\frac{\hat{a}_{1,k}^2}{4} - \hat{a}_{0,k}}} - \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{A-6}$$

Mit den partiellen Ableitungen (A-5) und (A-6) muss  $T_{p,k+1,k}$  in (A-2) in jedem Filterschritt neu besetzt werden.

## B Integration des Temperaturmodells in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filter

### B.1 LAPLACE-Transformation des ungestörten Temperaturmodells

Die nachfolgenden Beziehungen zwischen Zeitfunktionen und deren LAPLACE-Transformierten sind u.a. in FÖLLINGER (1986) hergeleitet. Für die LAPLACE-Transformation des Teilmodells (5-12-a), d.h. den alleinigen Einfluss der Anfangstemperaturverteilung, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial^2 T(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} &= 0 \quad \text{mit } \tau = t - t_k \\ T(\xi, \tau = 0) &= T_{\text{poly}}(\xi) \quad ; \quad T(\xi = 0, \tau) = T(\xi = L, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

für  $0 < \xi < L$  und  $0 \leq \tau < t_{k+1} - t_k$

$$\begin{aligned} L \left\{ \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right\} &= s L \{ T(\xi, \tau) \} - T(\xi, \lim \tau \rightarrow +0) = s T^*(\xi, s) - T_{\text{poly}}(\xi) \\ L \left\{ \alpha \frac{\partial^2 T(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right\} &= \alpha L \left\{ \frac{\partial^2 T(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right\} = \alpha \frac{\partial^2 T^*(\xi, s)}{\partial \xi^2} \\ L \{ T(\xi = 0, \tau) \} &= L \{ T(\xi = L, \tau) \} = T^*(\xi = 0, s) = T^*(\xi = L, s) = 0 \end{aligned}$$

Das Teilmodell (5-12-b), d.h. der alleinige Einfluss der Randtemperatur, unterscheidet sich von (5-12-a) nur in der Art der Anfangs- bzw. Randbedingung. Somit folgt an den entsprechenden Stellen von (B-1):

$$\begin{aligned} T(\xi, \tau = 0) &= 0 \quad ; \quad T(\xi = 0, \tau) = T(\xi = L, \tau) = T_u(\tau = 0) \\ \text{für } 0 < \xi < L \quad \text{und } 0 \leq \tau < t_{k+1} - t_k \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

$$\begin{aligned} L \left\{ \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right\} &= s L \{ T(\xi, \tau) \} - T(\xi, \lim \tau \rightarrow +0) = s T^*(\xi, s) - 0 \\ L \{ T(\xi = 0, \tau) \} &= L \{ T(\xi = L, \tau) \} = T^*(\xi = 0, s) = T^*(\xi = L, s) = \frac{T_u(\tau = 0)}{s} \end{aligned}$$

### B.2 Rücktransformation der LAPLACE-transformierten Lösung des ungestörten Temperaturmodells

Für die Rücktransformation der LAPLACE-transformierten Lösungen (5-16) und (5-17) des ungestörten Temperaturmodells werden die nachfolgenden wichtigen Beziehungen benötigt. Die Rücktransformation von Produkten von LAPLACE-Transformierten kann mittels der Faltungsregel der LAPLACE-Transformation durchgeführt werden (s.a. FÖLLINGER 1986).

$$L^{-1} \{ f_1^*(s) f_2^*(s) \} = \int_0^\tau f_1(\tau - \tau') \cdot f_2(\tau') d\tau' \quad (\text{B-3})$$

Die in der Faltungsregel zu transformierenden Einzelterme lassen sich auf die nachfolgenden drei Transformationsvorschriften abbilden (ebenfalls nach FÖLLINGER (1986)), wobei hier eine allgemeingültige Darstellung gewählt wird.

$$L^{-1} \left\{ \frac{c}{s} \right\} = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \quad (\text{B-4})$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{\sinh(z\sqrt{s})}{\sinh(l\sqrt{s})} \right\} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \nu \sin\left(\frac{\nu\pi z}{l}\right) e^{-\left(\frac{\nu\pi}{l}\right)^2 \tau} \quad (\text{B-5})$$

für  $-l < z < l$  ;  $l > 0$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\sinh(\zeta\sqrt{s}) \sinh((l-z)\sqrt{s})}{\sinh(l\sqrt{s})} \right\} = \frac{2}{l} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\nu\pi z}{l}\right) \sin\left(\frac{\nu\pi \zeta}{l}\right) e^{-\left(\frac{\nu\pi}{l}\right)^2 \tau} \quad (\text{B-6})$$

für  $0 \leq \zeta \leq z$  ;  $-l < z < l$  ;  $l > 0$

Mit den Transformationsvorschriften (B-3) bis (B-6) kann (5-16) in die nachfolgenden Teiltransformationsprobleme eingeteilt werden.

$$\begin{aligned} T_a^*(\xi, s) = & \\ & \sqrt{\alpha} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\Delta T_{i,j+1}}{\Delta \xi} \cdot \left[ \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi_i) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{s \sqrt{s} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} - \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi_{i+1}) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{s \sqrt{s} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right] \right. \\ & + \frac{\Delta T_{j,j+1}}{\Delta \xi} \cdot \left[ \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi_j) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{s \sqrt{s} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} - \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi_{j+1}))}{s \sqrt{s} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right] \\ & \left. + \sum_{i=j+1}^{n-1} \frac{\Delta T_{i,j+1}}{\Delta \xi} \cdot \left[ \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi_i))}{s \sqrt{s} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} - \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi_{i+1}))}{s \sqrt{s} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right] \right\} \\ & - T_1 \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{s \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} - T_n \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi)}{s \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} + \frac{1}{s} \left[ T_j + \frac{\Delta T_{j,j+1}}{\Delta \xi} (\xi - \xi_j) \right] \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

Diese Vorgehensweise ist ebenfalls bei der Rücktransformation von (5-17) anzuwenden.

$$T_b^*(\xi, s) = T_u(\tau=0) \cdot \left[ \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{s \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} + \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi)}{s \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right] \quad (\text{B-8})$$

Mit Hilfe der in (B-7) und (B-8) spezifizierten Transformationsprobleme erfolgt die Rücktransformation in den Zeitbereich. Hierbei werden im Folgenden nur die Transformationen der Einzelterme angegeben.

(B-3)/(B-4)/(B-6):

$$\begin{aligned}
L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi_i) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi_i))}{\sqrt{s} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right\} &= \int_0^\tau [1] \cdot \left[ \frac{2\sqrt{\alpha}}{L} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\nu\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{\nu\pi\xi_i}{L}\right) e^{-\alpha\left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2 \tau'} \right] d\tau' \\
&= -\frac{2L}{\sqrt{\alpha}\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \sin\left(\frac{\nu\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{\nu\pi\xi_i}{L}\right) [e^{-\alpha\left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2 \tau} - 1] \\
L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi) \sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi_i))}{\sqrt{s} \sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right\} &= \text{s.o.}
\end{aligned}$$

(B-3)/(B-4)/(B-5):

$$\begin{aligned}
L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} (L-\xi))}{\sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right\} &= \int_0^\tau [1] \cdot \left[ \frac{2\pi\alpha}{L^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \nu \sin\left(\frac{\nu\pi(L-\xi)}{L}\right) e^{-\alpha\left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2 \tau'} \right] d\tau' \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sin\left(\frac{\nu\pi(L-\xi)}{L}\right) [e^{-\alpha\left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2 \tau} - 1] \\
L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha} \xi)}{\sinh(\sqrt{s/\alpha} L)} \right\} &= \int_0^\tau [1] \cdot \left[ \frac{2\pi\alpha}{L^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \nu \sin\left(\frac{\nu\pi\xi}{L}\right) e^{-\alpha\left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2 \tau'} \right] d\tau' \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sin\left(\frac{\nu\pi\xi}{L}\right) [e^{-\alpha\left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2 \tau} - 1]
\end{aligned} \tag{B-9}$$

(B-4):

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \left[ T_j + \frac{\Delta T_{j,j+1}}{\Delta\xi} (\xi - \xi_j) \right] \right\} = T_j + \frac{\Delta T_{j,j+1}}{\Delta\xi} (\xi - \xi_j)$$

Die Rücktransformation  $L^{-1}\{T_a^*(\xi, s)\}$  bzw.  $L^{-1}\{T_b^*(\xi, s)\}$  erfolgt dann durch Substitution der in (B-7) und (B-8) enthaltenen Terme durch die rücktransformierten Terme (B-9).

### B.3 Bestimmung der partiellen Ableitungen der Matrix $T_{p, k+1, k}$ der adaptiv erweiterten Systemgleichungen des Temperaturmodells

Die im Gleichungssystem (5-31) enthaltene Matrix  $T_{p, k+1, k}$  beinhaltet die partiellen Ableitungen der Systemgleichungen  $\Psi_{\text{Temp}}$  (zur Fortschreibung der Temperaturen in den Abtaststellen des Mantelsegments) nach dem gesuchten physikalischen Parameter  $\alpha$ . Die partiellen Ableitungen werden an der Stützstelle der Taylorentwicklung von Gleichung (5-29) gebildet.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{Temp}, k}^0 \\ x_{p, k}^0 \\ u_k^0 \\ \mathbf{w}_k^0 \\ w_{p, k}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\text{Temp}, k} \\ \hat{x}_{p, k} \\ u_k \\ \mathbf{o} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B-10}$$

Für die Matrix  $\mathbf{T}_{p, k+1, k}$  ergibt sich somit mittels Gleichung (5-30):

$$\mathbf{T}_{p, k+1, k} = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_{\text{Temp}}}{\partial \mathbf{x}_{p, k}} \Big|_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{1, k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n, k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 \end{pmatrix} \quad (\text{B-11})$$

Hierbei werden die partiellen Ableitungen aus den gestörten Systemgleichungen (5-24) ermittelt. Transitions- und Stellmatrix sind explizit in (5-21) angegeben.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{1, k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 &= 0 \\ &| \\ &| \quad j = 2 \dots n-1 \\ &| \\ \frac{\partial T_{j, k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 &= \frac{2}{L} \Delta t \cdot \left\{ \dots \right. \\ &\left. \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{L} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ (-1)^\nu \nu \sin(\nu \pi (\xi_j - L) / L) - \frac{L}{\pi \Delta \xi} \sin(\nu \pi \xi_j / L) \cdot [\sin(\nu \pi \xi_2 / L) - \sin(\nu \pi \xi_1 / L)] \right\} \cdot e^{-\hat{\alpha}_k \left( \frac{\nu \pi}{L} \right)^2 \Delta t} \\ \vdots \quad i = 2 \dots n-1 \\ \frac{1}{\Delta \xi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin(\nu \pi \xi_j / L) \cdot [\sin(\nu \pi \xi_{i-1} / L) - 2 \sin(\nu \pi \xi_i / L) + \sin(\nu \pi \xi_{i+1} / L)] \cdot e^{-\hat{\alpha}_k \left( \frac{\nu \pi}{L} \right)^2 \Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\pi}{L} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ (-1)^\nu \nu \sin(\nu \pi \xi_j / L) - \frac{L}{\pi \Delta \xi} \sin(\nu \pi \xi_j / L) \cdot [\sin(\nu \pi \xi_n / L) - \sin(\nu \pi \xi_{n-1} / L)] \right\} \cdot e^{-\hat{\alpha}_k \left( \frac{\nu \pi}{L} \right)^2 \Delta t} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \hat{T}_{1, k} \\ \hat{T}_{2, k} \\ | \\ | \\ \hat{T}_{n-1, k} \\ \hat{T}_{n, k} \end{pmatrix} \right. \\ &+ \left. \frac{\pi}{L} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \nu [\sin(\nu \pi (\xi_j - L) / L) - \sin(\nu \pi \xi_j / L)] \cdot e^{-\hat{\alpha}_k \left( \frac{\nu \pi}{L} \right)^2 \Delta t} \cdot T_{u, k} \right\} \\ &| \\ &| \\ \frac{\partial T_{n, k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-12})$$

Mit den partiellen Ableitungen (B-12) muss  $\mathbf{T}_{p, k+1, k}$  dann in jedem Filterschritt neu besetzt werden.

## C Integration des Fahrzeugbewegungsmodells in die Systemgleichungen des diskreten KALMAN-Filters

### C.1 Linearisierung der ungestörten Systemgleichungen

Die in Gleichung (6-7) enthaltene Transitionsmatrix  $T_{k+1,k}$  und Stellmatrix  $B_{k+1,k}$  enthalten die partiellen Ableitungen der nichtlinearen, ungestörten Systemgleichungen (6-3) nach den Zustandsparametern und der Stellgröße. Mit der Substitution der rechten Seite von (6-3) mittels der vektorwertigen Funktion  $\Psi$  und der Linearisierungsstelle

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_k^0 \\ u_k^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ u_k \end{pmatrix} \quad (\text{C-1})$$

ergeben sich die nachfolgenden JACOBI-Matrizen.

$$\mathbf{T}_{k+1,k} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_k} \Big|_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial Y_k} \Big|_0 & \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial X_k} \Big|_0 & \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 & \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial v_k} \Big|_0 \\ \frac{\partial X_{k+1}}{\partial Y_k} \Big|_0 & \frac{\partial X_{k+1}}{\partial X_k} \Big|_0 & \frac{\partial X_{k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 & \frac{\partial X_{k+1}}{\partial v_k} \Big|_0 \\ \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial Y_k} \Big|_0 & \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial X_k} \Big|_0 & \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 & \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial v_k} \Big|_0 \\ \frac{\partial v_{k+1}}{\partial Y_k} \Big|_0 & \frac{\partial v_{k+1}}{\partial X_k} \Big|_0 & \frac{\partial v_{k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 & \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_k} \Big|_0 \end{pmatrix} \quad (\text{C-2})$$

$$\mathbf{B}_{k+1,k} = \frac{\partial \Psi}{\partial u_k} \Big|_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial \Delta \alpha_{k+1}} \Big|_0 \\ \frac{\partial X_{k+1}}{\partial \Delta \alpha_{k+1}} \Big|_0 \\ \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \Delta \alpha_{k+1}} \Big|_0 \\ \frac{\partial v_{k+1}}{\partial \Delta \alpha_{k+1}} \Big|_0 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist in der Transitionsmatrix  $T_{k+1,k}$  die Übertragung nach  $Y_{k+1}$  und  $X_{k+1}$  wie folgt zu besetzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial Y_k} \Big|_0 &= 1 & \frac{\partial X_{k+1}}{\partial Y_k} \Big|_0 &= 0 \\ \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial X_k} \Big|_0 &= 0 & \frac{\partial X_{k+1}}{\partial X_k} \Big|_0 &= 1 \\ \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 &= \hat{v}_k \Delta t \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1}) - \sin \hat{\alpha}_k}{\Delta \alpha_{k+1}} & \frac{\partial X_{k+1}}{\partial \alpha_k} \Big|_0 &= \hat{v}_k \Delta t \frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1}) - \cos \hat{\alpha}_k}{\Delta \alpha_{k+1}} \\ \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial v_k} \Big|_0 &= -\Delta t \frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1}) - \cos \hat{\alpha}_k}{\Delta \alpha_{k+1}} & \frac{\partial X_{k+1}}{\partial v_k} \Big|_0 &= \Delta t \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1}) - \sin \hat{\alpha}_k}{\Delta \alpha_{k+1}} \end{aligned} \quad (\text{C-3})$$

Für die Übertragung nach  $\alpha_{k+1}$  und  $v_{k+1}$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial Y_k} \right|_0 &= 0 & \left. \frac{\partial v_{k+1}}{\partial Y_k} \right|_0 &= 0 \\
 \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial X_k} \right|_0 &= 0 & \left. \frac{\partial v_{k+1}}{\partial X_k} \right|_0 &= 0 \\
 \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_0 &= 1 & \left. \frac{\partial v_{k+1}}{\partial \alpha_k} \right|_0 &= 0 \\
 \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial v_k} \right|_0 &= 0 & \left. \frac{\partial v_{k+1}}{\partial v_k} \right|_0 &= 1
 \end{aligned} \tag{C-4}$$

Die Stellmatrix  $\mathbf{B}_{k+1, k}$  wird wie folgt besetzt:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial Y_{k+1}}{\partial \Delta \alpha_{k+1}} \right|_0 &= \hat{v}_k \Delta t \left( \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1})}{\Delta \alpha_{k+1}} + \frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1}) - \cos \hat{\alpha}_k}{\Delta \alpha_{k+1}^2} \right) \\
 \left. \frac{\partial X_{k+1}}{\partial \Delta \alpha_{k+1}} \right|_0 &= \hat{v}_k \Delta t \left( \frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1})}{\Delta \alpha_{k+1}} - \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1}) - \sin \hat{\alpha}_k}{\Delta \alpha_{k+1}^2} \right) \\
 \left. \frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \Delta \alpha_{k+1}} \right|_0 &= 1 \\
 \left. \frac{\partial v_{k+1}}{\partial \Delta \alpha_{k+1}} \right|_0 &= 0
 \end{aligned} \tag{C-5}$$

## C.2 Bestimmung der Störmatrix $\mathbf{S}_{k+1, k}$

Unter Verwendung von (6-8) und (6-9) wird die Störmatrix  $\mathbf{S}_{k+1, k}$  mittels

$$\mathbf{S}_{k+1, k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \mathbf{C} \, d\tau = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{pmatrix} -(t_{k+1} - \tau) \frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1}) - \cos \hat{\alpha}_k}{\Delta \alpha_{k+1}} \\ (t_{k+1} - \tau) \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1}) - \sin \hat{\alpha}_k}{\Delta \alpha_{k+1}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \tag{C-6}$$

berechnet. Die Auswertung des bestimmten Integrals in (C-6) ergibt dann:

$$\mathbf{S}_{k+1, k} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1}) - \cos \hat{\alpha}_k}{2 \Delta \alpha_{k+1}} \Delta t^2 \\ \frac{\sin(\hat{\alpha}_k + \Delta \alpha_{k+1}) - \sin \hat{\alpha}_k}{2 \Delta \alpha_{k+1}} \Delta t^2 \\ 0 \\ \Delta t \end{pmatrix} \tag{C-7}$$

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Andreas Eichhorn  
Geburtsdatum: 15.03.1967  
Geburtsort: Bad Hersfeld  
Familienstand: Ledig

## Schulbildung

1973 – 1977 Grundschole in Bad Hersfeld  
1977 – 1986 Gymnasium in Bad Hersfeld  
Juni 1986 Allgemeine Hochschulreife  
1986 – 1987 15 Monate Wehrdienst in Hessisch-Lichtenau

## Praktika

Okt. 1987 – Juni 1988 Materialprüfung, Babcock-BSH AG, Bad Hersfeld  
Juli 1988 – Sept. 1988 Praktikum Elektrotechnik, Siemens AG, Bad Hersfeld  
Juli 1990 – Sept. 1990 Praktikum Vermessungswesen, Staatliches Vermessungsamt, Karlsruhe

## Studium

1988 – 1990 Studium der Elektrotechnik an der Universität Karlsruhe  
1990 – 1996 Studium des Vermessungswesens an der Universität Karlsruhe  
Juli 1996 Abschluss als „Diplom-Vermessungsingenieur“  
Note: Sehr gut („Mit Auszeichnung bestanden“)  
„Tulla Medaille“ der Stadt Karlsruhe, „Bilfinger und Berger Preis“

## Berufstätigkeit

1996 – 2002 Wissenschaftlicher Angestellter am „Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen“ bei Prof. Dr.-Ing. W. Möhlenbrink, Universität Stuttgart  
Sept. 2003 – heute Universitätsassistent am „Institut für Geodäsie und Geophysik“ bei Prof. Dr.-Ing. H. Kahmen, Technische Universität Wien

## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Beschäftigung als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen der Universität Stuttgart unter Leitung von Prof. Dr.-Ing. W. Möhlenbrink.

Bei Herrn Professor W. Möhlenbrink möchte ich mich recht herzlich für seine aktive Unterstützung bei der Bearbeitung des Themas bedanken. Seine wissenschaftliche und zugleich pragmatische Art zu denken und zu handeln holte mich oftmals wieder auf den Boden der Tatsachen zurück.

Ebenso gilt mein Dank den Herren Professoren A. Kleusberg und O. Heunecke für die Übernahme der Koreferate. Ihre Hinweise und kritischen Anmerkungen haben zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Bedanken möchte ich mich bei den Mitarbeitern des Instituts für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen für die kollegiale und familiäre Atmosphäre in der ich in den letzten Jahren arbeiten durfte. Besonders erwähnen möchte ich die Sekretärin und Fremdsprachenkorrespondentin Frau C. Schüler, die mir stets den Rücken gestärkt hat und den Mechanikermeister M. Knihs, der ohne zu klagen alle Experimente aufgebaut hat.

Bei meinen Eltern bedanke ich mich für ihre Geduld und die vielen moralisch aufbauenden Gespräche, die mir die notwendige Unterstützung gegeben haben, um diese Arbeit zu beenden.

