

DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C

Dissertationen

Heft Nr. 593

Frank Gielsdorf

**Ausgleichsrechnung
und raumbezogene Informationssysteme**

München 2007

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**

ISSN 0065-5325

ISBN 3 7696 5032 8

Ausgleichsrechnung
und raumbezogene Informationssysteme

Habilitationsschrift

an der Fakultät VI – Bauingenieurwesen und angewandte Geowissenschaften
der Technischen Universität Berlin
Lehrgebiet: Geo-Informationssysteme

vorgelegt von

Dr.-Ing. Frank Gielsdorf

D 83

München 2007

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission beim Verlag C. H. Beck

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

Deutsche Geodätische Kommission

Marstallplatz 8 • D – 80 539 München

Telefon (089) 23 031 -1113 • Telefax (089) 23 031 -1283/ -1100

E-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://dgk.badw.de>

Eröffnung des Verfahrens: 17. August 2004

Verleihung der Lehrbefähigung: 03. November 2004

Habilitationskolloquium: 08. März 2005

Aushändigung der Urkunde: 17. Juni 2005

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Lothar Gründig

Prof. Dr.-Ing. habil, Wolfgang Niemeier (TU Braunschweig)

Prof. Dr.-Ing. Matthäus Schilcher (TU München)

© 2007 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Kurzfassung

In fast allen GIS oder CAD-Systemen werden Geometrieparameter als fest determinierte Größen betrachtet. Doch diese Herangehensweise reflektiert die Wirklichkeit nur aus dem Blickwinkel der Konstruktion. In einem Rekonstruktionsprozess ist es hingegen erforderlich, inhomogene redundante Geometriedaten zu einem einheitlichen und widerspruchsfreien Ergebnis zu integrieren. Ein Werkzeug, dieses Ziel zu erreichen ist die Ausgleichsrechnung, welche auf der Methode der kleinsten Quadrate basiert.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Abbildung topologischer und geometrischer Informationen in Datenmodellen raumbezogener Informationssysteme. Es wird gezeigt, wie sich die Anzahl der notwendigen Geometrieparameter signifikant verringern lässt, was eine Grundvoraussetzung für die Anwendbarkeit der Ausgleichsrechnung ist. Ein Ansatz wird vorgeschlagen, welcher geometrische Messwerte als Primärdaten behandelt. Diese Messwerte sind Zufallsvariablen und im Allgemeinen redundant. Eindeutige Geometrieparameter, meistens Koordinaten, werden als Sicht auf diese Primärdaten betrachtet, welche durch Anwendung der Ausgleichsrechnung aus diesen generiert wird. Standarddatenmodelle werden hinsichtlich ihrer Eignung für diesen Ansatz untersucht. Die Möglichkeiten des vorgeschlagenen Verfahrens werden anhand von Beispielen aus den Bereichen Geometriefortführung in GIS und Erfassung von 3D Gebäudegeometrie demonstriert.

Summary

In almost all GIS or CAD systems geometrical parameters are seen as determined values. But this approach reflects just a construction point of view. In a reconstruction process it is necessary to integrate inhomogeneous redundant geometrical data to a unique result. This aim can be achieved by using adjustment techniques based on the least squares method.

The paper deals with the mapping of topological and geometrical information in data models of spatial information systems. It is shown how the number of geometrical parameters can be significantly reduced as a prerequisite for adjustment calculations. An approach is proposed in which geometric measurements are stored as persistent primary data. Those measurements always represent redundant random variables. Unique geometric parameters, usually coordinates, are seen as view at these primary data and are generated by applying adjustment techniques. Standard data models are investigated with respect to their suitability to this approach. The capabilities of the proposed procedure are shown using the examples of geometrical updating in GIS and of surveying of 3D building structures.

Inhalt

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	4
2.1	Topologische Räume	4
2.2	Sachdaten und Geometriedaten	6
2.2.1	Sachdaten	6
2.2.2	Geometriedaten	8
2.3	Abbildungsbeziehungen	8
2.3.1	Geometrie → Topologie	8
2.3.2	Topologie → Geometrie	10
2.3.3	Was ist eine Ecke	11
2.4	Abbildungsvorschrift einer p-Zelle	12
2.4.1	Entity-Relationship-Modell	12
2.4.2	Dimension der Parametrisierung	14
2.4.3	Randbeschreibung	16
2.4.4	Zusammenfassung	21
2.5	Die Zeit	24
2.5.1	Topologischer Raum mit diskreter Zeit	24
2.5.2	Temporale Datenhaltung	27
2.5.3	Die vierdimensionale Raumzeit	27
2.5.4	Historisierung in der Raumzeit	29
2.5.5	Bewegte Objekte in der Raumzeit	30
3	Referenzsysteme	35
3.1	In der Geodäsie gebräuchliche Referenzsysteme	35
3.1.1	Kartesische Referenzsysteme	35
3.1.2	Lagesysteme mit gekrümmter Bezugsfläche	37
3.1.3	Systeme mit gekrümmter Bezugslinie	39
3.2	Transformationen	40
3.2.1	Transformationen im Datenmodell eines GIS	41
3.2.2	Transformationen als Graph	44
4	Datenverwaltung aus geodätischer Sicht	45
4.1	Redundante Geometrie	45
4.2	Integration und Fortführung von Geometriedaten	48
4.2.1	Trennung von Geometrie und Topologie	49
4.2.2	Modellierung der lokalen Nachbarschaft	50
5	Standards für die Modellierung von Geometriedaten	54

5.1	Geography Markup Language GML.....	54
5.2	Industry Foundation Classes IFC	60
5.3	Vergleich GML - IFC.....	63
6	Beispiele für die Verwaltung von Geometrieinformation.....	64
6.1	Amtliches Liegenschaftskataster.....	64
6.1.1	Das Problem der virtuellen Punktverschiebungen	65
6.1.2	Vorschlag einer Fortführungsstrategie	66
6.2	Bestandsdokumentation von Gebäuden	70
6.2.1	Geometrieerfassung und CAD	71
6.2.2	Datenmodell für die absolute Gebäudegeometrie	72
6.2.3	Handaufmaß als Ausgleichungsproblem.....	76
6.2.4	Tachymetrie und Laserscanning.....	84

1 Einleitung

Seit Langem werden grafische und alphanumerische Informationen auf analogen Datenträgern gespeichert. Die alphanumerische Form der Speicherung erfolgte in Buchwerken, wobei die gegenseitige Referenzierung der Informationsobjekte durch Registraturen, Karteikarten, Querverweise, Indizes usw. erreicht wurde.

Die Abbildung grafischer Informationen geschah in Planwerken wie Konstruktionszeichnungen, Landkarten usw. Eine Referenzierung der dargestellten Grafikobjekte auf alphanumerische Informationsobjekte war im Allgemeinen nicht vorhanden, da die analoge Form der Speicherung der Zugriffsgeschwindigkeit enge Grenzen setzte. Vielmehr versuchte man die Eigenschaften der dargestellten Objekte durch deren grafische Ausprägung, wie Linienform, Schraffur, Farbe usw. darzustellen oder alphanumerische Informationen, wie Bemaßungen oder Beschriftungen, wurden direkt in die Grafik mit einbezogen.

Die Entwicklung von Computern ermöglichte die digitale Speicherung von Informationen auf Datenträgern wie Magnetband oder Festplatte. Der entscheidende Vorteil dieser Art der Datenhaltung war vor allem die, im Vergleich zu analogen Datenträgern, sehr hohe Zugriffsgeschwindigkeit. Zunächst wurden nur alphanumerische Datenbestände auf elektronische Speichermedien übertragen. Die ersten Datenbanken beruhten dabei auf einem hierarchischen Modell, welches weitgehend eine Fortsetzung der analogen Denkweise mit digitalen Mitteln darstellte. Im Verlauf der Zeit wurden Datenbanken und Datenmodelle weiterentwickelt, wobei die Entwicklung des relationalen Datenmodells durch Codd 1970 einen wichtigen Meilenstein darstellt. Diese Entwicklung ist ein fortschreitender Prozess, wobei der Stand der Technik gekennzeichnet ist durch relationale, objektrelationale und objektorientierte Datenbanken.

Parallel und zunächst unabhängig von den Datenbanken für alphanumerische Daten, wurde versucht auch grafische Daten digital zu speichern. Hierbei stand zunächst die 1:1-Abbildung der Zeichnung im Vordergrund. Die ersten CAD-Systeme waren, wie der Name schon andeutet, Werkzeuge für die grafische Konstruktion. Das Endprodukt des Konstruktionsprozesses war nach wie vor der analoge Plan, der auf einem Plotter ausgegeben wurde. Die Eigenschaften der Zeichnungsobjekte wurden wie bereits im analogen Vorbild durch ihre grafische Präsentation verschlüsselt. Selbst die Einführung der Layertechnik stellt die Übertragung eines analogen Verfahrens, nämlich des Übereinanderlegens von transparenten Folien, dar. Die Etablierung von Standards oder Quasi-Standards, wie zum Beispiel den Drawing Exchange Files (DXF) der Firma Autodesk, eröffnete später die Möglichkeit, Zeichnungen zwischen unterschiedlichen Programmen auszutauschen.

Die Entwicklung der Geo-Informationssysteme stellt in gewisser Weise eine Verschmelzung der beiden angedeuteten Entwicklungslinien dar. Die Ersten Geo-Informationssysteme waren dann auch CAD-Systeme mit angeschlossener Datenbank. Grafikdaten und Sachdaten wurden in getrennten Datenbeständen verwaltet. Die Verbindung von Grafikobjekten und Informationsobjekten der Datenbank war durch gemeinsame Schlüsselattribute gegeben.

In modernen Geo-Informationssystemen erfolgt die Verwaltung beider Klassen von Daten in einer gemeinsamen Datenbank. Die grafische Oberfläche dieser Systeme ist kein eigenständiges Programmsystem, sondern stellt vielmehr ein Werkzeug für die grafisch unterstützte Abfrage und Manipulation der Daten in der darunterliegenden Datenbank dar. Durch die Bereitstellung spezieller Features für den schnellen Zugriff auf mehrdimensionale Daten, wie zum Beispiel der spatial data cartridge der Firma ORACLE® oder der spatial data engine der Firma ESRI®, wurden die bis dahin vorhandenen Einschränkungen im Antwortzeitverhalten weitgehend überwunden.

Probleme treten jedoch nach wie vor bei der Integration heterogener Geometriedaten, speziell bei der Fortführung der Geo-Basisdaten auf. Nach wie vor existieren Geo-Informationssysteme und CAD-Systeme in zwei parallelen Welten und nach wie vor ist die Modellierung von zeitabhängigen Veränderungen in diesen Systemen nicht zufriedenstellend gelöst.

Ein Geo-Informationssystem besteht aus den Komponenten Hardware, Software und Daten. Bei den Daten kann zwischen Geo-Basisdaten und Geo-Fachdaten unterschieden werden. [BILL 1999] Die Daten stammen im Allgemeinen von verschiedenen Anbietern, welche unterschiedliche Erfassungsmethoden verwenden und deren Daten daher auch von sehr heterogener Qualität sein können. Geo-Daten sind dadurch charakterisiert, dass sie Geometrieobjekte als Referenz verwenden. Die Mengen von Geometrieobjekten verschiedener Datenanbieter sind aber nicht disjunkt, so dass der Nutzer bei jeder Fortführung vor dem Problem der Datenintegration steht. Diese Datenintegration aber wirft mitunter erhebliche Probleme auf. Diese Probleme sind im Kern darauf zurückzuführen, dass die Softwarekomponente eines GIS und insbesondere das Datenmodell auf die Aufgabe *Konstruktion* ausgerichtet ist, während die zu integrierenden Daten aber einer *Rekonstruktion* der Realität entstammen.

Grundlage eines rekonstruierten geometrischen Modells ist immer die Beobachtung des abzubildenden Realitätsausschnittes. Beobachtungen aber sind im Allgemeinen redundant, sie sind Zufallsgrößen und sie beziehen sich auf eine lokale Basis. Für eine globale Parametrisierung müssen die in den Beobachtungen enthaltenen Widersprüche unter Berücksichtigung der Genauigkeit beseitigt und die lokalen Basen in eine globale transformiert werden. Es handelt sich bei der Aufgabe der *Rekonstruktion* also um ein klassisches Ausgleichungsproblem. Will man nun zwei durch Rekonstruktion entstandene Datensätze zusammenführen steht man wiederum vor einem Ausgleichungsproblem. Man kann in diesem Fall entweder eine Stationsausgleichung durchführen, was die Kenntnis der vollständigen Kovarianzmatrizen beider Datensätze voraussetzt oder man kann die zugrunde liegenden Beobachtungsvektoren beider Datensätze zusammenfügen und ausgleichen. Die zurzeit in Geo-Informationssystemen gebräuchlichen Datenmodelle unterstützen keine dieser beiden Möglichkeiten.

Eine zentrale Fragestellung jeder Ausgleichung ist die Parametrisierung des Problems. Diese sollte möglichst so beschaffen sein, dass die zu schätzenden unbekannt Parameter das Problem gerade eindeutig beschreiben. Jeder redundante Parameter führt zu einer zusätzlichen Bedingungsgleichung und damit zu einer unerwünschten Erhöhung des Rechen- und Datenverwaltungsaufwandes. In Geo-Informationssystemen, welche hauptsächlich die Erdoberfläche in einem zweidimensionalen Raum abbilden, erfolgt die Parametrisierung der Geometrie fast ausschließlich durch Koordinaten, bezogen auf eine globale Basis. Für den in diesem Fall abzubildenden Realitätsausschnitt stellt dies eine redundanzarme Form der Parametrisierung dar. Ganz anders stellt sich die Situation in drei- oder vierdimensionalen Räumen dar. Besonders augenfällig wird dieses Problem bei der Parametrisierung von Gebäudegeometrien mittels 3D Koordinaten. Selbst wenn jeder Punkt nur einmal gespeichert wird beträgt der Anteil redundanter Parameter hier bis zu über 99%! Die Rekonstruktion von Gebäudegeometrien mittels Ausgleichung ist unter diesen Voraussetzungen fast unmöglich.

In Entwicklung begriffen ist auch die Abbildung von zeitlichen Veränderungen geometrischer Attribute in raumbezogenen Informationssystemen. Verschiedene Systeme bieten die Möglichkeit der Historisierung, bei der jedem Objekt ein Entstehungs- und ein Untergangszeitpunkt zugewiesen werden kann. Die Historisierung bildet jedoch nur Veränderungen in der Realzeit ab. Virtuelle Punktverschiebungen, wie sie bei der Integration heterogener Datenbestände oder bei der Fortführung auftreten, können damit nicht abgebildet werden, dazu ist eine bitemporale Datenhaltung erforderlich, welche zwischen Real- und

Systemzeit unterscheidet. Auch die stetige Bewegung von Objekten im Raum kann durch Historisierung nicht vollständig erfasst werden, dies gelingt nur wenn man Raum und Zeit als einen Raum im mathematischen Sinne betrachtet, in dem eine entsprechende Metrik und Topologie definiert wird.

In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, eine übergreifende Sicht auf raumbezogene Daten zu entwickeln, Geo-Informationssysteme und CAD-Systeme werden daher unter dem allgemeinen Begriff der raumbezogenen Informationssysteme zusammengefasst und gemeinsam betrachtet.

Im Kapitel *Theoretische Grundlagen* wird das Problem der Abbildung geometrischer Daten in Datenbanken aus dem Blickwinkel der Theorie der topologischen Räume betrachtet. Es wird gezeigt, dass sich eine Datenbank als topologischer Raum ansprechen lässt. Das Problem der Geometrieabbildung wird zurückgeführt auf die Abbildung von überabzählbaren Mengen von Punkten eines metrischen Raumes auf abzählbare Mengen eines topologischen Raumes. Weiterhin wird gezeigt, dass sich die Bijektivität einer solchen Abbildung nur durch die Definition einer Abbildungsfunktion erreichen lässt. Im Ergebnis dieser Betrachtungen wird ein allgemeines Datenmodell für die Abbildung metrischer auf topologische Räume entwickelt.

Das Kapitel Referenzsysteme gibt einen kurzen Überblick über die in raumbezogenen Informationssystemen gebräuchlichen Referenzsysteme und behandelt ansatzweise das Problem der Datumstransformation.

Die zentrale Frage des Kapitels *Datenverwaltung aus geodätischer Sicht* ist die unterschiedlicher Herangehensweise von Informatikern und Geodäten an das Problem der Verwaltung von Zufallsgrößen in raumbezogenen Informationssystemen. Die Gegensätze beider Sichtweisen werden herausgearbeitet, anschließend wird versucht, beide Standpunkte durch Synthese zu vereinen.

Im Kapitel *Standards für die Modellierung von Geometriedaten* wird auf die Unterschiede zwischen Geo-Informationssystemen und CAD-Systemen in der Modellierung geometrischer Daten eingegangen. Als Beispiel dienen zwei modellbasierte Austauschformate: Auf der einen Seite die *geography markup language GML* des OpenGIS Consortium als typischer Vertreter der Geo-Informationssysteme und auf der anderen Seite die *industry foundation classes IFC* der International Association for Interoperability als Vertreter der CAAD-Systeme (CAAD = Computer Aided Architectural Design). Der Vergleich erfolgt anhand zuvor definierter Vergleichskriterien.

Das abschließende Kapitel *Beispiele für die Verwaltung von Geometrieinformation* zeigt anhand zweier Beispiele aus dem Bereich GIS und CAAD wie Ausgleichsalgorithmen in die Verwaltung von Geometriedaten einbezogen werden können. Es wird ein Verfahren für die Fortführung von Geometriedaten im Liegenschaftskataster vorgeschlagen, welches redundante Beobachtungen als Primärdaten betrachtet und mittels Ausgleichung Koordinaten als Sekundärdaten erzeugt. Es wird eine Möglichkeit der Geometrieparametrisierung von Gebäuden vorgestellt, die den Einsatz der Ausgleichsrechnung als Integrationsinstrument für verschiedene Aufnahmeverfahren erlaubt.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Topologische Räume

Im folgenden Abschnitt werden einige Begriffe aus dem Bereich der Mengenlehre und Topologie eingeführt, die in den darauf folgenden Abschnitten zur Anwendung kommen. Die Definitionen sind hauptsächlich [ALEXANDROFF 1973], [JÄNISCH 1990] und [SCHUBERT 1975] entnommen. Die Definitionen werden ergänzt durch Beispiele aus dem Bereich der Geo-Informationssysteme.

Topologischer Raum

Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, O) , bestehend aus einer Menge X und einer Menge O von Teilmengen (genannt „offene Mengen“) von X , derart dass gilt:

Axiom 1: Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.

Axiom 2: der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen ist offen.

Axiom 3: \emptyset und X sind offen.

Man sagt auch: O ist die *Topologie* des topologischen Raumes (X, O) . Gewöhnlich spricht man einfach von einem topologischen Raum X . [JÄNISCH 1990]

Alternativ zu dieser Definition lässt sich ein topologischer Raum auch über Axiome für abgeschlossene Mengen definieren.

Graph

Ein *Graph* G besteht aus einer Menge X (deren Elemente *Knoten* genannt werden) und einer Menge U , wobei jedem Element $u \in U$ in eindeutiger Weise ein geordnetes oder ungeordnetes Paar von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten $x, y \in X$ zugeordnet ist.

Ist jedem $u \in U$ ein geordnetes Paar von Knoten zugeordnet, so heißt der Graph *gerichtet*. Die Elemente von U werden in diesem Fall als *Bögen* bezeichnet.

Ist jedem $u \in U$ ein ungeordnetes Paar von Knoten zugeordnet, so heißt der Graph *ungerichtet*. Die Elemente von U bezeichnen wir dann als *Kanten*. [BIEß 1988]

Es ist leicht zu erkennen, dass jeder Graph einen topologischen Raum (X, U) aufspannt bei der die Kanten $u_i \subseteq U$ eine Topologie auf der Menge der Knoten X definieren.

Metrischer Raum

Ein metrischer Raum ist eine Menge R von Elementen beliebiger Natur, so genannten „Punkten“ des metrischen Raumes R , in der für je zwei Elemente x und y eine nichtnegative Reelle Zahl $\rho(x, y)$, der so genannte Abstand zwischen den Punkten x und y , definiert ist, wobei $\rho(x, y)$ folgende drei Bedingungen erfüllt:

1. Axiom der Identität: $\rho(x, y) = 0$ dann und nur dann, wenn die Punkte x und y zusammenfallen;
2. Axiom der Symetrie: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Dreiecksungleichung: Wie auch immer man drei Punkte x , y und z eines metrischen Raumes R wählt, stets gilt $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Euklidischer Raum

Metrischer Raum endlicher Dimension in dem der Abstand zweier Punkte x und y definiert ist als $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

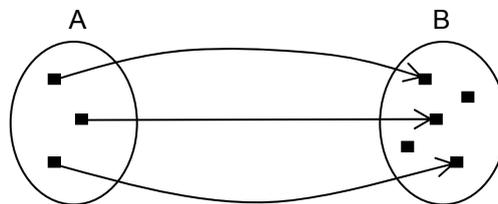
n-Mannigfaltigkeit

Topologischer Raum, in dem die Lage eines Punktes durch n Merkmalswerte eindeutig festgelegt ist, wobei n die Dimension der Mannigfaltigkeit kennzeichnet. Die Begriffe *Mannigfaltigkeit* und *Raum* können synonym verwendet werden.

Abbildung, Funktion

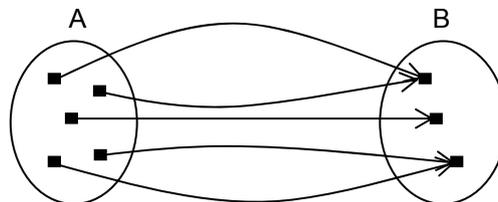
Eine Abbildung oder Funktion f weist jedem Element einer Definitionsmenge (Definitionsbereich) A genau ein Element einer Wertemenge (Wertebereich) B zu. $f : A \rightarrow B$

Eine Abbildung heißt *injektiv* (engl.: one-to-one), wenn nie zwei verschiedene Elemente auf das gleiche abgebildet werden. Man nennt die Funktion dann eine *Injektion*.



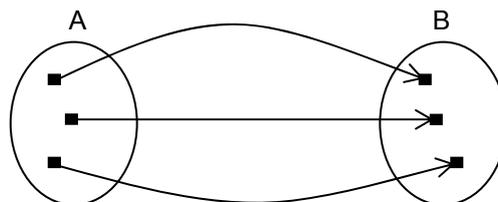
Figur 2-1: Injektive Abbildung

Eine Funktion heißt *surjektiv* (engl.: onto), wenn jedes Element der Wertemenge durch die Funktion abgebildet wird. Man nennt die Funktion dann eine *Surjektion*.



Figur 2-2: Surjektive Abbildung

Eine Funktion heißt *bijektiv* (engl.: one-to-one and onto \rightarrow eineindeutig), wenn sie *injektiv und surjektiv* ist. Das heißt, dass sie verschiedenen Elementen der Definitionsmenge verschiedene Elemente der Wertemenge zuordnet, wobei alle Elemente der Wertemenge durch diese Zuordnung auch erfasst werden. Man nennt die Funktion dann eine *Bijektion*.



Figur 2-3: Bijektive Abbildung

2.2 Sachdaten und Geometriedaten

Die Daten die in GIS verwaltet werden lassen sich in zwei Hauptklassen unterteilen: Sachdaten und Geometriedaten. Diese beiden Klassen von Daten sind von ihrem Informationsgehalt und ihren Abbildungseigenschaften so verschieden, dass sie in der Vergangenheit oft in separaten Datenbeständen verwaltet wurden.

Die klassische Form der Speicherung von Sachdaten ist die Verwendung von relationalen Datenbanken. Das relationale Datenmodell stellt einen weit verbreiteten Standard dar und ist Grundlage der wichtigsten kommerziellen Datenbanksysteme. Moderne GIS bieten die Möglichkeit, Datenbanksysteme verschiedener Anbieter zu verwenden und in vielen Fällen kann das Datenmodell den Erfordernissen des jeweiligen Anwenders angepasst werden.

Ganz anders verhält es sich mit den Geometriedaten. Hier lassen sich zwei Hauptstrategien unterscheiden. Eine Gruppe von GIS verwendet proprietäre Formate und Algorithmen zur Verwaltung der Geometriedaten. Der geometrische Datenbestand steht quasi neben der Datenbank mit den Sachdaten. Geometrieobjekte sind mit den dazugehörigen Sachdaten über entsprechende Identifikatoren verbunden. Der Vorteil dieser Strategie besteht darin, dass sich ein vertretbares Antwortzeitverhalten hinsichtlich der Geometriedaten erreichen lässt. Der entschiedene Nachteil jedoch ist die sehr eingeschränkte Portierbarkeit der Daten.

Aus dem zuletzt genannten Grund geht man bei neueren GIS immer mehr dazu über, auch die Geometriedaten in einer relationalen Datenbank zu verwalten. Um das Antwortzeitverhalten bei mehrdimensionalen Zugriffen zu verbessern wurden spezielle Erweiterungen geschaffen. Als Beispiel seien hier die Spatial Data Cartridge der Firma Oracle zu nennen oder die Spatial Data Engine der Firma ESRI.

Worin besteht nun aber der prinzipielle Unterschied in der Verwaltung von Sach- und Geometriedaten? Um diese Frage zu beantworten, soll die Problematik an dieser Stelle aus dem Blickwinkel der Topologie betrachtet werden.

2.2.1 Sachdaten

Betrachten wir zunächst die Sachdaten. Sachdaten werden im Allgemeinen in relationalen Datenbanken verwaltet. Im mathematischen Sinne ist eine Relation folgendermaßen definiert:

Seien D_1, D_2, \dots, D_k Wertebereiche. $R \subseteq D_1 \times D_2 \times \dots \times D_k$ heißt Relation.

[VORNBERGER 2001]

Folgt man dieser Definition, so ist eine Relation eine Menge von Punkten in einem topologischen Raum, der durch die charakterisierenden Merkmalsklassen einer Objektklasse aufgespannt wird. Die Dimension des topologischen Raumes ist gleich der Anzahl der charakterisierenden Merkmalsklassen.

Man kann die Datenbasis eines Informationssystems also als topologischen Raum betrachten. Die Dimension dieses topologischen Raumes ist gegeben durch die Anzahl aller Merkmalsklassen die in dem GIS verwaltet werden. Die charakterisierenden Merkmalsklassenkombinationen der einzelnen Objektklassen spannen topologische Unterräume auf. Jede Instanz eines Objektes ist dann ein Punkt in einem dieser topologischen Unterräume.

Für die weitere Betrachtung soll das Beispiel der Objektklasse *Adressen* dienen. Die charakterisierenden Merkmalsklassen seien *Postleitzahl (PLZ)*, *Straße* und *Hausnummer*.

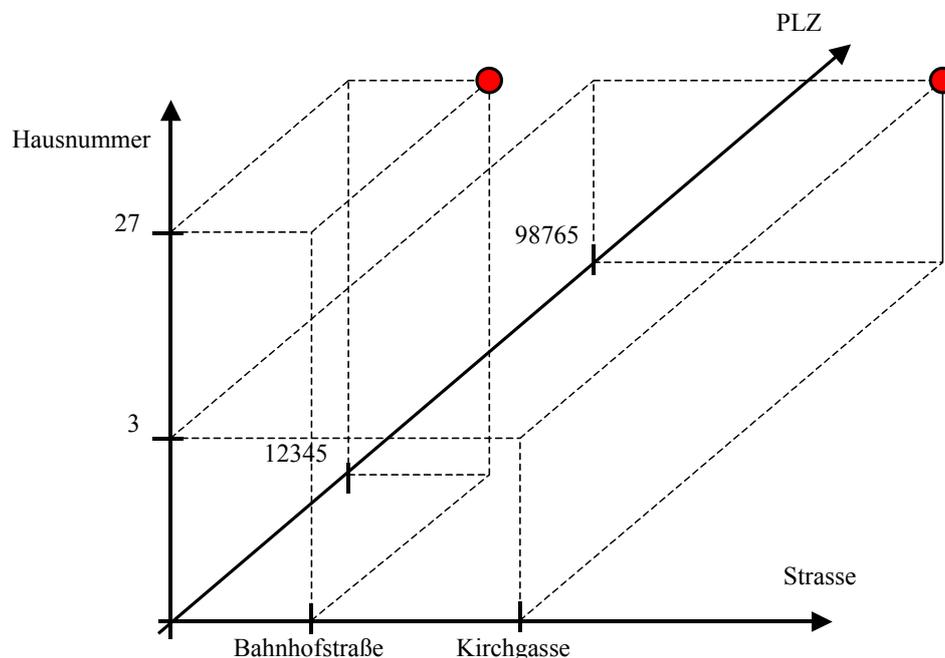
Adressen[{PLZ, Strasse, Hausnummer}]

Die Kombination dieser drei Merkmalsklassen dient zudem als Primärschlüssel, es wird also kein spezieller Identifikator eingeführt. In einer Datenbankrelation würde diese Objektklasse dann folgendermaßen abgebildet werden:

Adressen		
PLZ	Strasse	Hausnummer
12345	Bahnhofstraße	27
98765	Kirchgasse	3
...

Figur 2-4: Datenbankrelation Adressen

Die beiden Instanzen können ebenso als Punkte eines topologischen Unterraumes betrachtet werden.



Figur 2-5: Topologischer Raum

Welche Eigenschaften besitzt nun eine solche Menge von topologischen Punkten?

1. Die Menge ist **endlich**.
2. Die Menge ist **abzählbar**. Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie der Menge der natürlichen Zahlen äquivalent ist oder, anders ausgedrückt, wenn sie in einer Folge durchnummeriert werden kann.
3. Die Menge ist **geordnet**, da zwischen zwei beliebigen Elementen x und x' der Menge eine Ordnungsrelation besteht. Man weiß, zum Beispiel im Fall der Merkmalsklasse *Strasse*, aufgrund einer lexikalischen Sortierung, dass das Element „Bahnhofstraße“ dem Element „Kirchgasse“ vorangeht.

Als Zusammenfassung bleibt festzuhalten, dass sich die Sachdaten von GIS-Objekten als diskrete Punkte in einem topologischen Raum von Merkmalsklassen interpretieren lassen.

2.2.2 Geometriedaten

In der Menge der Merkmalsklassen die von einem GIS verwaltet werden existiert eine Untermenge solcher Merkmalsklassen, die einen metrischen Raum aufspannen. Im Folgenden soll zunächst der Sonderfall des dreidimensionalen euklidischen Raumes näher betrachtet werden. Die Verallgemeinerung auf die vierte Dimension bzw. nichteuklidische metrische Räume erfolgt weiter unten.

Der metrische Raum eines GIS wird im Allgemeinen durch die Merkmalsklassen X , Y und Z aufgespannt. Der Definitionsbereich jeder dieser Merkmalsklassen ist durch die Menge der rationalen Zahlen gegeben. Die Menge der rationalen Zahlen hingegen ist **unendlich**, **überabzählbar** und **offen**.

Die in diesem Raum definierten Objekte sind wiederum Unterräume und können von den Dimensionen $0 \equiv$ Punkt, $1 \equiv$ Linie, $2 \equiv$ Fläche oder $3 \equiv$ Körper sein. Nur Objekte der Dimension 0 sind, analog den Sachdaten, Punkte. Zur Unterscheidung von den topologischen Punkten der Sachdaten sollen diese Punkte hier als geometrische Punkte bezeichnet werden. Objekte mit einer Dimension > 0 bestehen aus einer Menge von geometrischen Punkten. Diese Punktmenge, die ein $(k+1)$ -dimensionales GIS-Objekt definiert, ist **unendlich**, **überabzählbar** und im Allgemeinen **geschlossen**.

Aus der Eigenschaft der Unendlichkeit der das Objekt repräsentierenden Punktmenge ergibt sich der entscheidende Unterschied zu den Sachdaten. Für die Beschreibung der geometrischen Eigenschaften eines GIS-Objektes kann nicht jeder Punkt einzeln durch ein Koordinatentupel (x,y,z) gespeichert werden, eine solche Beschreibung gelingt nur durch die Speicherung einer, das Objekt beschreibenden, **Abbildungsvorschrift**.

In den weiteren Ausführungen soll von folgenden Definitionen ausgegangen werden:

***Geometriedaten** werden durch Merkmalsklassen charakterisiert, die einen metrischen Raum aufspannen, der es erlaubt, Lage und Orientierung von Körpern in Bezug zueinander und zur Zeit darzustellen.*

***Sachdaten** sind solche, auf welche die Definition der Geometriedaten nicht zutrifft.*

2.3 Abbildungsbeziehungen

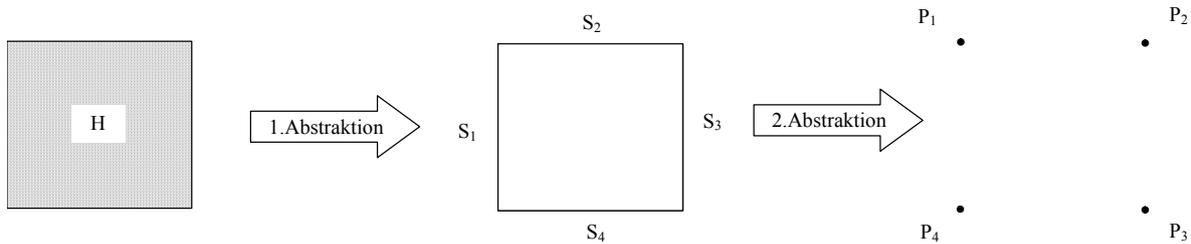
In den folgenden Betrachtungen wird von einfachen Beispielen im \mathbb{R}^2 ausgegangen, die dabei getroffenen Aussagen werden im Anschluss verallgemeinert.

2.3.1 Geometrie \rightarrow Topologie

Betrachten wir zunächst ein viereckiges Objekt z.B. ein Haus. Das Haus wird im \mathbb{R}^2 durch eine Menge H von Punkten der Grundfläche repräsentiert. Da es sich bei H um eine unendliche Menge handelt, lassen sich ihre Elemente (die Punkte der Grundfläche) nicht einzeln speichern. Es muss also ein Weg gefunden werden die unendliche Menge H auf eine endliche Menge P abzubilden, deren Elemente auf einem Datenträger gespeichert werden können.

Diese Abbildung geschieht durch zwei Abstraktionsschritte. Im ersten Schritt bildet man H auf den Rand von H ab. Der Rand von H bildet im \mathbb{R}^2 ein geschlossenes Polygon. Doch auch die Menge der Randpunkte ist noch unendlich. Aus diesem Grund erfolgt ein weiterer Abstraktionsschritt. Der Rand von H lässt sich in vier Teilmengen S_1, \dots, S_4 zerlegen, deren Elemente jeweils auf einer Geraden liegen. Bildet man nun paarweise den Durchschnitt der Teilmengen S_i , so erhält man als Ergebnis die vier Eckpunkte der Grundfläche $P_1 = S_1 \cap S_2$, $P_2 = S_2 \cap S_3$, $P_3 = S_3 \cap S_4$ und $P_4 = S_4 \cap S_1$. Die Mengen der Punkte $P_1 \dots P_4$ enthalten jeweils

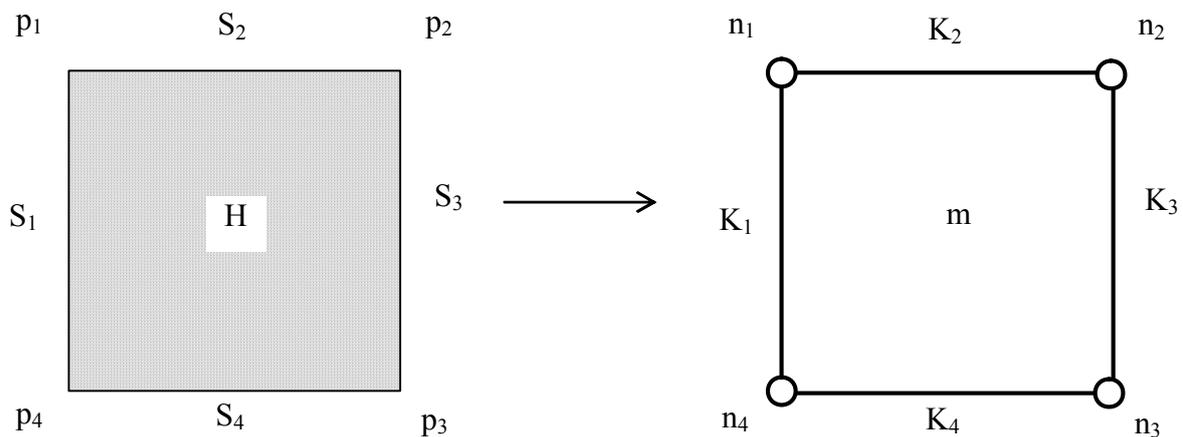
ein Element und lassen sich zur Menge P der Eckpunkte des Gebäudes vereinigen:
 $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$.



Figur 2-6: Abstraktion eines Rechtecks

Bei den Elementen der Menge P handelt es sich nach wie vor um Punkte eines metrischen Raumes R^2 die durch ihre Koordinaten bezüglich einer vorgegebenen Basis definiert sind. Nun tritt in der Praxis häufig der Fall ein, dass die Abbildung der geometrischen Eigenschaften eines Objektes in der Datenbank variiert. Für solche Variationen existieren im Wesentlichen zwei Ursachen: Zum einen kann das ein Wechsel der Basis sein, wie zum Beispiel bei einer Datumstransformation oder dem Übergang von einer Projektion zu einer anderen. Die zweite Ursache leitet sich aus der Tatsache her, dass die Koordinaten von Punkten aus Beobachtungen berechnet werden. Beobachtungen sind im Verständnis von Geodäten Zufallsgrößen und die daraus abgeleiteten Koordinaten Schätzwerte für einen unbekanntem wahren Wert. Die Einführung neuer Beobachtungen in das Berechnungsmodell der Koordinaten führt daher zu veränderten Koordinaten. Als typisches Beispiel für diesen Vorgang sei die Fortführung der ALK (Automatisierte Liegenschaftskarte) genannt.

Die Variationen der Geometrieinformation lassen es ratsam erscheinen, nach einer Abbildung zu suchen, die gegen Transformationen der Geometrie invariant ist. Diese Abbildung erhält man, wenn man von der Metrik abstrahiert und p -dimensionale Punktmengen eines metrischen Raumes auf p -dimensionale Zellen eines topologischen Raumes abbildet.



Figur 2-7: Abbildung von Geometrie auf Topologie

Figur 2-7 zeigt die Abbildung der Gebäudegrundfläche auf eine Topologie. In (2.1) sind die Abbildungsbeziehungen im Einzelnen aufgeführt.

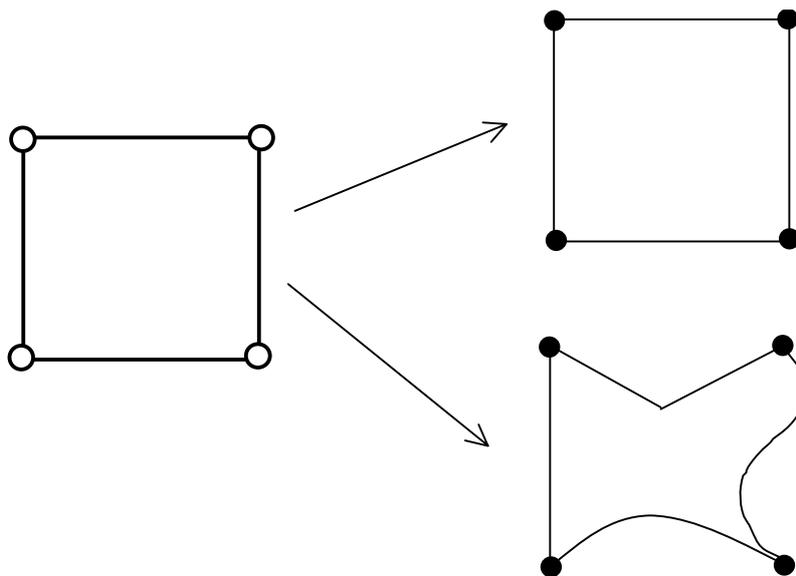
$$\begin{aligned}
 H &\rightarrow m \\
 S_1 &\rightarrow K_1 = \{n_1, n_4\} \quad \dots \quad S_4 \rightarrow K_4 = \{n_3, n_4\} \\
 p_1 &\rightarrow n_1 \quad \dots \quad p_4 \rightarrow n_4
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Im betrachteten Beispiel bildet man H auf eine 2-Zelle (Masche), $S_1 \dots S_4$ auf 1-Zellen (Kanten) und $p_1 \dots p_4$ auf 0-Zellen (Knoten) ab. Diese Abbildungen $H \rightarrow m$ und $S_i \rightarrow K_i$ sind surjektiv, nicht aber injektiv und daher auch nicht bijektiv, also nicht umkehrbar, da unendlich viele Punkte des metrischen Raumes auf endliche Mengen des topologischen Raumes abgebildet werden. Nur die diskreten Punkte $p_1 \dots p_4$ können bijektiv auf 0-Zellen abgebildet werden.

Da das Ergebnis der Abbildung Geometrie \rightarrow Topologie abzählbare Mengen sind, lassen sich deren Elemente ohne weiteres auf einem Datenträger speichern. Knoten, Kanten und Maschen, oder allgemeiner Mengen von p -Zellen, können zu topologischen Objekten zusammengefasst werden, welche in einem GIS wiederum als Referenz für Sachdaten dienen.

2.3.2 Topologie \rightarrow Geometrie

Nun ist die Abbildung der Topologie auf die Geometrie wie bereits gezeigt nicht bijektiv. Man möchte jedoch jedem Objekt eines GIS eine eindeutige Geometrie zuordnen. Die Aufgabe besteht also darin, jede p -Zelle des topologischen Raumes auf eine p -dimensionale Punktmenge in einem metrischen Raum abzubilden. Der Begriff der Abbildung ist an dieser Stelle dann gerechtfertigt, wenn man Untermengen aller Punkte des metrischen Raumes als Elemente einer Wertemenge betrachtet.



Figur 2-8: Mehrdeutigkeit der Abbildung Topologie auf Geometrie

An dieser Stelle ist es nun erforderlich, auf die Begriffe der Zelle bzw. des Zellenkomplexes einzugehen. Für $p > 0$ verstehen wir unter E^p stets die durch $\sum_{i=1}^p x_i^2 \leq 1$ definierte abgeschlossene Kugel des \mathbb{R}^p , unter S^{p-1} die Sphäre $\sum_{i=1}^p x_i^2 = 1$. Es ist also $S^{p-1} \subset E^p$ und unter $E^p - S^{p-1}$ die offene Kugel $\sum_{i=1}^p x_i^2 < 1$.

Definition. Ein *Zellenkomplex* K ist ein separierter topologischer Raum, der so in Zellen zerlegt ist, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Z1) Jeder Punkt von K gehört genau einer Zelle an.

- (Z2) Zu jeder p-Zelle e_p von K gibt es eine stetige Abbildung $\varphi: E^p \rightarrow K$ derart, dass $E^p - S^{p-1}$ topologisch auf e_p abgebildet wird und dass $\varphi(S^{p-1})$ für $p > 0$ in der Vereinigung endlich vieler Zellen von K mit kleinerer Dimension als p enthalten ist ($p = 0, 1, 2, \dots$).
- (Z3) Eine Teilmenge von K ist abgeschlossen, wenn ihr Durchschnitt mit der abgeschlossenen Hülle einer jeden Zelle jeweils abgeschlossen ist.

Die Bedingung (Z2) besagt, dass sich K gerüstweise aufbauen lässt. Man beginne mit K^0 . Durch „Anheften“ der 1-Zellen an K^0 entsteht K^1 . Allgemein entsteht K^{q+1} aus K^q durch anheften der $(q+1)$ -Zellen, wobei jede $(q+1)$ -Zelle an nur endlich viele Zellen von K^q angeheftet wird. [SCHUBERT 1975 S. 175]

Auf unser Beispiel übertragen bedeutet es, dass sich die Kanten $K_1 \dots K_4$ aus den Knoten $n_1 \dots n_4$ herleiten lassen und die Masche m wiederum aus den Kanten $K_1 \dots K_4$. Wie lässt sich nun aber diesem Zellenkomplex eine eindeutige Geometrie zuordnen? Bei den Knoten ist die Lösung dieses Problems trivial, da sich diese bijektiv auf geometrische Punkte abbilden lassen.

Bei den Kanten fällt die Antwort schon schwerer. Diese werden jeweils auf eine Punktmenge abgebildet. Eine solche Punktmenge kann mit Hilfe einer *Funktion* beschrieben werden. Die einfachste Art einer solchen Funktion ist die Verbindung zweier Punkte durch eine Strecke. Im euklidischen Raum lässt sich dann die Abbildung folgendermaßen definieren:

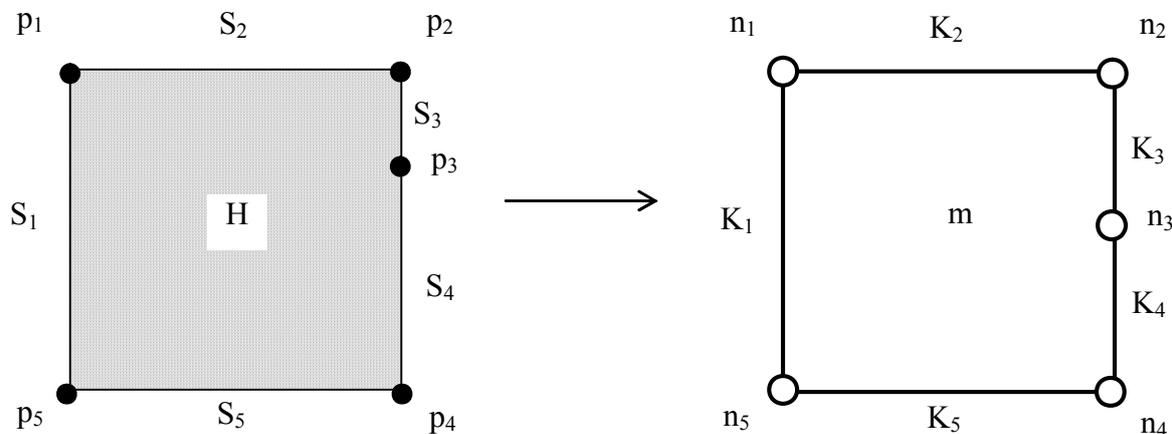
$$f: K_i = \{n_A, n_E\} \rightarrow S_i = \left\{ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_A + t \cdot (\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_A), \quad t = 0 \dots |\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_A| \right\} \quad (2.2)$$

Man beachte jedoch, dass die Krümmung immer eine Funktion der gewählten Basis und der Metrisierungsfunktion ist. Die Verbindung zweier Punkte durch eine Strecke ist eine, aber natürlich nicht die einzige denkbare Funktion. Als weitere Beispiele seien hier nur Kreisbogen oder Klotoide genannt, in diesen Fällen sind dann zusätzliche Parameter erforderlich, welche die Funktion definieren.

Die Abbildung der Masche m auf die Punktmenge H der Grundfläche erfolgt durch eine point-in-polygon Funktion, die alle Punkte beschreibt die innerhalb des Polygons $p_1-p_2-p_3-p_4$ liegen.

2.3.3 Was ist eine Ecke ?

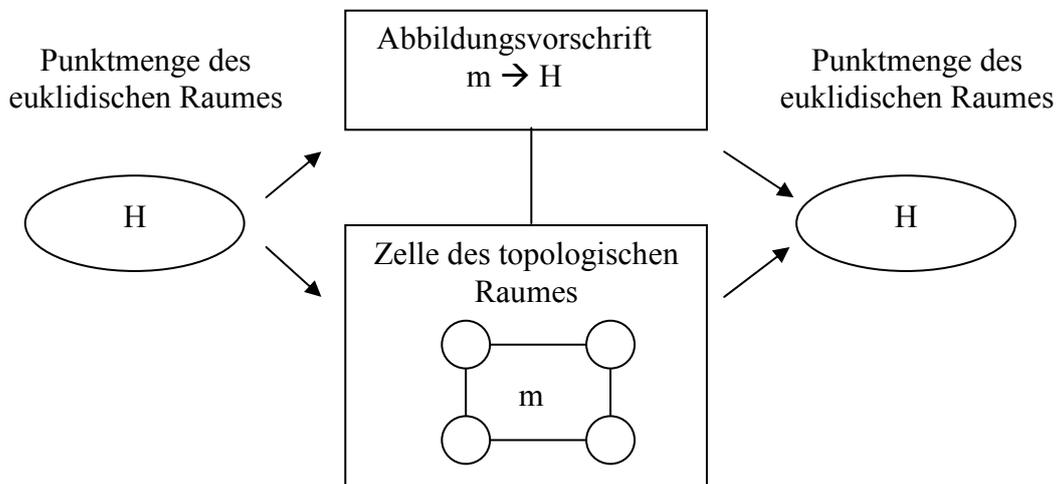
Kehren wir noch einmal zum Beispiel aus dem Abschnitt 2.3.1 zurück. Ganz selbstverständlich wurden dort die Ecken des Gebäudes auf Knoten und die Gebäudeseiten auf Kanten abgebildet. Doch betrachten wir das folgende Beispiel:



Figur 2-9: Grundriss mit „unechter“ Ecke

Die Abbildung der Geometrie auf die Topologie erfolgte hier im Wesentlichen wie in Abschnitt 2.3.1. Mit einem Unterschied: Der Rand von H wurde hier nicht in vier sondern in fünf Teilmengen $S_1 \dots S_5$ zerlegt, die weiteren Schritte sind identisch. Nun kann man sich fragen wozu es nützlich ist, den Punkt p_3 auf einen Knoten abzubilden. Man kann in der Tat darauf verzichten. Doch es erhebt sich die Frage, warum man andererseits nicht auch auf den Punkt p_1 verzichten kann. Die Antwort könnte lauten: Weil p_1 eine Ecke ist und p_3 nicht. Doch – was ist eine Ecke?

Die Antwort auf diese Frage liefert die Funktion für die Beschreibung von S_i . Die Kanten K_1 und K_2 lassen sich auf *eine* Gerade, nämlich $p_2 p_4$ abbilden. Bei der Abbildung der Kanten K_1 und K_2 auf das Polygon $p_5 - p_2 - p_1$ sind *zwei* Geraden erforderlich. Das Kriterium dafür, dass Punkte eines metrischen Raumes zu einer Menge zusammengefasst werden, welche auf eine Zelle eines topologischen Raumes abgebildet wird, ist also die Frage, ob sich diese Punktmenge durch *eine* Funktion beschreiben lässt. Andersherum muss jeder Zelle des topologischen Raumes eine eindeutige Abbildungsvorschrift zugeordnet werden, damit diese auf eine Punktmenge im metrischen Raum abgebildet werden kann. Figur 2-10 zeigt die allgemeinen Abbildungsbeziehungen zwischen Punktmenge und Zelle.



Figur 2-10: Allgemeine Beziehung zwischen Punktmenge und Zelle

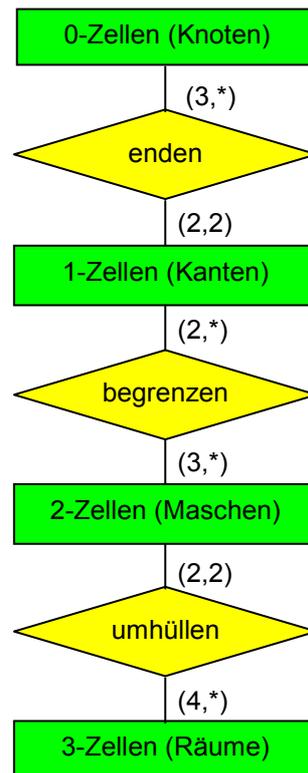
2.4 Abbildungsvorschrift einer p-Zelle

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, dass jeder Zelle eines topologischen Raumes eine Abbildungsvorschrift zugeordnet werden muss, damit diese auf eine Punktmenge des metrischen Raumes abgebildet werden kann. Diese Abbildungsvorschrift kann nun wiederum in eine Abbildungsfunktion, die dazugehörigen Parameter und eine Randbeschreibung zerlegt werden.

2.4.1 Entity-Relationship-Modell

Wie kann nun eine allgemeine Sicht der Abbildungsbeziehungen zwischen Geometrie und Topologie, wie sie in 2.3 dargestellt wurde, auf ein Informationssystem übertragen werden? An dieser Stelle soll dazu der Ausschnitt eines Konzeptuellen Datenbank-Schemas entwickelt werden. Die Beschreibung des Schemas erfolgt als Entity-Relationship-Diagramm in Chen-Notation.

Figur 2-11 zeigt das E-R-Diagramm eines Zellenkomplexes im dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 . Als Einschränkung soll hier gelten, dass die 1-Zellen auf Geraden, die 2-Zellen auf Ebenen und die 3-Zellen auf Polyeder abgebildet werden. Die angegebenen Kardinalitäten ergeben sich aus eben dieser Einschränkung der nicht gekrümmten Zellenränder.



Figur 2-11: E-R-Diagramm Zellenkomplex aus Polyedern

Mit diesem Modell ist noch nichts über die Geometrie ausgesagt, da ja, wie bereits erwähnt, die Topologie invariant gegen Transformationen der Geometrie ist. Es muss also noch jeder Zelle dieses topologischen Raumes eine Punktmenge im metrischen Raum zugeordnet werden. Es soll daher versucht werden, die Beschreibung eben solcher Punktmenge ebenfalls in einem E-R-Diagramm darzustellen.

Nun ist zunächst festzustellen, dass es *den* metrischen Raum an sich nicht gibt. Ein metrischer Raum wird immer durch eine Basis und eine Metrisierbarkeitsfunktion, welche die Entfernung zwischen Punkten des Raumes definiert, aufgespannt. Ein dreidimensionaler euklidischer Raum zum Beispiel besitzt die orthogonale Basis $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ und die Metrisierbarkeitsfunktion $s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Eine Gleichung, die eine Punktmenge beschreibt, bezieht sich also immer auf eine bestimmte Basis.

Eine $n-1$ -dimensionale Hyperfläche in einem n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n lässt sich durch eine Gleichung der Form $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ beschreiben, die eine Bedingung ausdrückt, welche alle Punkte der Hyperfläche erfüllen.

$$H = \{\mathbf{x} \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\} \quad (2.3)$$

Mit der Einführung jeder weiteren Gleichung verringert sich die Dimension der so beschriebenen Punktmenge um eins. Als Beispiel betrachten wir in einem dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 die Gleichung

$$2x^2 + 3y^2 - z = 0 \quad (2.4)$$

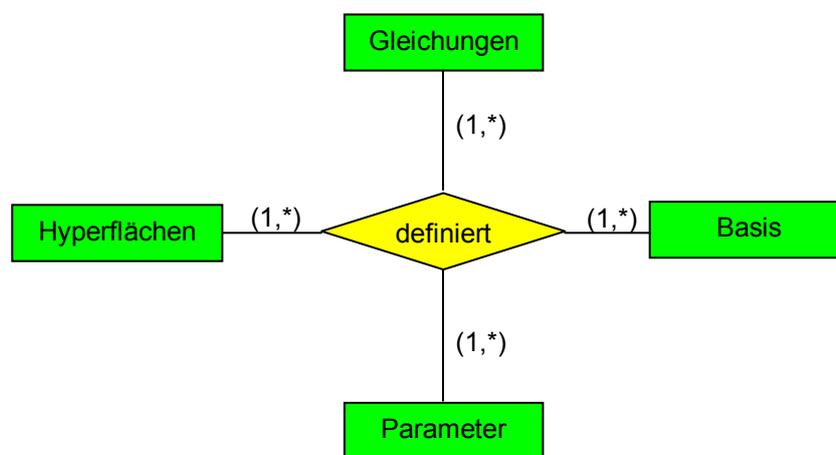
Die Punktmenge $H = \{\mathbf{x} \mid 2x^2 + 3y^2 - z = 0\}$ beschreibt ein Paraboloid. Die Punktmenge ist *offen*, das heißt sie besitzt keinen Rand.

Gleichung (2.4) lässt sich nun noch in einen allgemeinen funktionalen Ansatz und in Parameter zerlegen. Der allgemeine Ansatz lautet dann

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 - z = 0 \quad (2.5)$$

Die Größen a und b sind die Parameter der Gleichung. Das Beispiel beschreibt die Instanziierung für $a = 2$ und $b = 3$.

Für die Datenmodellierung lassen sich aus dieser Betrachtung folgende Entitätentypen ableiten: *Hyperflächen* (beschreiben eine Punktmenge H auf die eine topologische Zelle abgebildet werden soll), *Basis*, *Gleichungen* und *Parameter*. Eine Hyperfläche wird also durch eine parametrisierte Gleichung beschrieben, die sich auf eine definierte Basis bezieht. Figur 2-12 zeigt das Ergebnis der Modellierung in dem die Hyperfläche durch einen vierwertigen Relationentyp definiert wird.

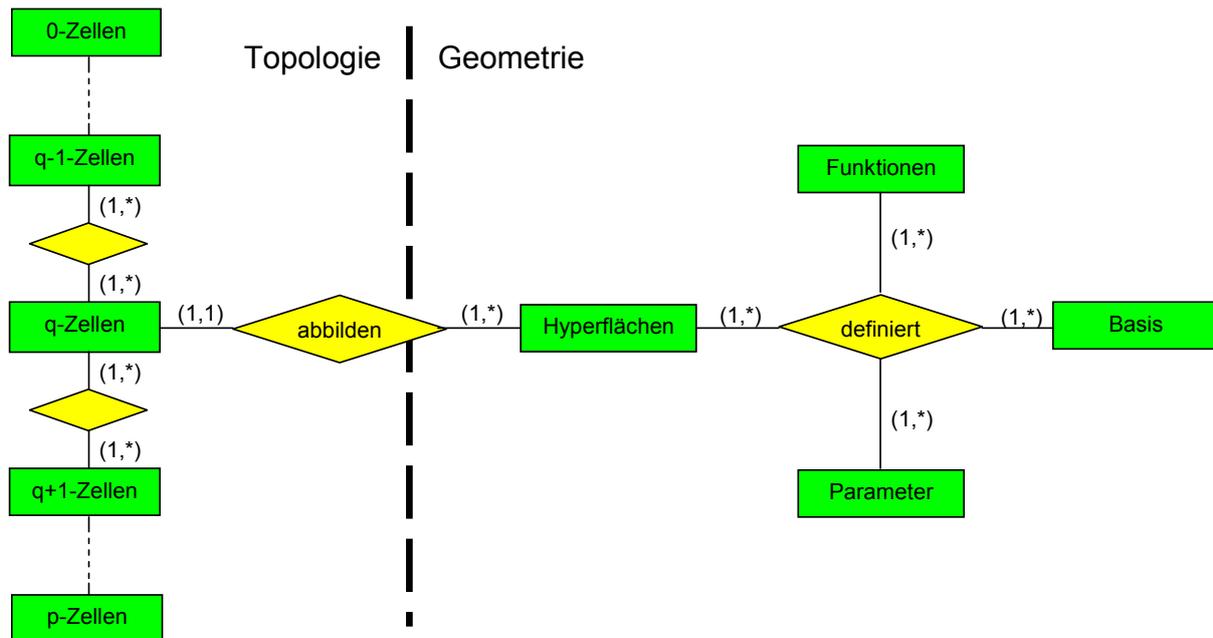


Figur 2-12: Beschreibung einer Hyperfläche

Nun mag sich die Frage erheben, ob denn nicht die parametrisierte Gleichung eine originäre Eigenschaft der Hyperfläche ist, und ob es denn daher notwendig sei, die Entitätentypen *Gleichungen* und *Parameter* überhaupt einzuführen. In der Tat ist deren Einführung nur dann sinnvoll, wenn ein und derselbe Parameter für verschiedene Gleichungen bzw. ein und dieselbe Gleichung für verschiedene Hyperflächen benutzt wird. Dass dem so sein kann wird weiter unten gezeigt.

2.4.2 Dimension der Parametrisierung

In 2.4.1 wurden die Sichten auf Topologie und Geometrie getrennt betrachtet. Es stellt sich nun aber die Frage, welcher topologischen Zelle eine Hyperfläche zugeordnet werden soll. Prinzipiell besteht die Möglichkeit, Zellen beliebiger Dimension eine Hyperfläche zuzuordnen. Figur 2-13 zeigt wie die Abbildung einer topologischen Zelle beliebiger Dimension q auf eine Hyperfläche im Datenmodell erfolgen kann. Es sei darauf hingewiesen, dass eine Hyperfläche beliebig viele topologische Zellen „tragen“ kann. Dieser Umstand ist bei der Abbildung von regelmäßigen Strukturen von großer Bedeutung.



Figur 2-13: E-R-Diagramm Geometrie – Topologie

In der großen Mehrzahl der Anwendungen werden jedoch nur die 0-Zellen umkehrbar eindeutig auf Punkte abgebildet. Ein Punkt kann in diesem Fall als 0-dimensionale Hyperfläche betrachtet werden. Die Parameter, welche den Punkt in Bezug auf eine Basis definieren, sind Koordinaten. Weiterhin wird für alle Hyperflächen mit einer Dimension p mit $p > 0$ vorausgesetzt, dass sie gegenüber der Basis nicht gekrümmt sind. Das heißt, dass die sie beschreibende Gleichung linear ist. In diesem Fall handelt es sich bei der Hyperfläche um eine Hyperebene. Eine Hyperebene im \mathbb{R}^n wird gebildet durch die Menge aller Punkte für die gilt

$$H = \{\mathbf{x} \mid a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\} \quad (2.6)$$

Hyperebenen der Dimension p mit $0 \leq p < n-1$ entstehen durch Schnitt von Hyperebenen der Dimension $p+1$.

Doch diese Vorgehensweise ist nicht immer sinnvoll. In vielen Fällen kann es zweckmäßig sein, nicht die 0-Zellen sondern Zellen höherer Dimension auf eine parametrisierte Punktmenge im metrischen Raum abzubilden. Das folgende Beispiel soll dies verdeutlichen.

Beispiel Quader

Im Falle eines Quaders im E^3 werden die Knoten auf Punkte, die Kanten auf Geraden und die Maschen auf Ebenen abgebildet. Die Punkte können direkt durch ihre Koordinaten parametrisiert werden. Die Beschreibung der Strecken ergibt sich aus den Koordinaten der Endpunkte und einer Vektorgleichung:

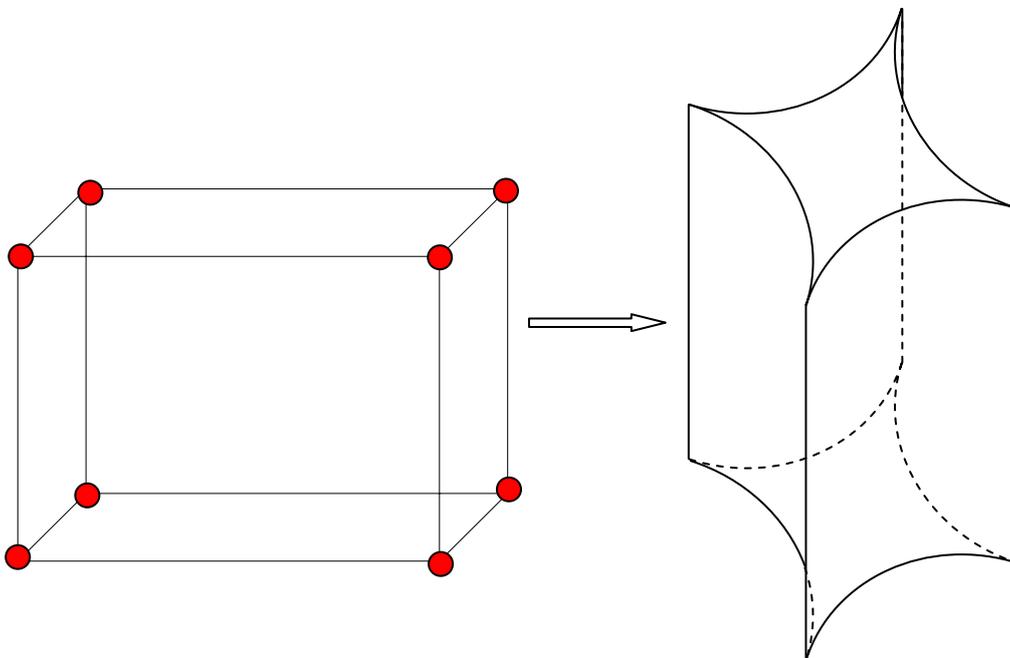
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_A + t \cdot (\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_A) \quad \wedge \quad t = 0 \dots |\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_A| \quad (2.7)$$

Ein Problem ergibt sich bei der Beschreibung der Seitenflächen, da bereits drei Punkte ausreichen sind, um eine Ebene im E^3 festzulegen. Eine Parametrisierung durch Punktkoordinaten ist daher in diesem Fall redundant. Für die Parametrisierung der 0-Zellen ergibt sich so eine Parameterzahl von 8 Punkte \times 3 Koordinaten = 24 Parameter.

Eine elegantere Möglichkeit bietet hier die Parametrisierung der 2-Zellen, das heißt, die Maschen werden auf parametrisierte Ebenen abgebildet. Vorausgesetzt alle beteiligten Ebenen lassen sich durch eine Gleichung der Form $ax+by+z-c = 0$ beschreiben, benötigt man für die Beschreibung jeder Seitenfläche 3 Parameter. Als Gesamtparameterzahl ergeben sich dann $6 \text{ Ebenen} \times 3 \text{ Koeffizienten} = 18 \text{ Parameter}$. Die Koordinaten der Eckpunkte ergeben sich durch den Schnitt von jeweils drei Ebenen. Das Problem der redundanten Geometrieinformation tritt bei diesem Ansatz nicht mehr auf.

Das Beispiel des Quaders zeigt bereits ein Kriterium dafür, welche Dimension parametrisiert werden sollte. Immer dann wenn eine Parametrisierung der 0-Zellen zu redundanter Geometrieinformation führt kann es sinnvoll sein, die Parametrisierung in einer höheren Dimension durchzuführen.

Doch dieses Kriterium ist nicht das einzige. Die vollständige Beschreibung einer Hyperfläche im \mathbb{R}^n durch Parametrisierung von 0-Zellen ist nur unter der Voraussetzung möglich, dass diese Hyperfläche nicht gekrümmt ist. Figur 2-14 Zeigt die Abbildung einer 3-Zelle auf ein Prismaoid mit zylindrischen Seitenflächen.



Figur 2-14: Abbildung einer 3-Zelle auf ein Prismaoid mit gekrümmten Seitenflächen

Eine solche Abbildung ist durch alleinige Parametrisierung der 0-Zellen nicht zu beschreiben, hier ist es ebenfalls erforderlich die 2-Zellen zu parametrisieren.

$$H_{\text{Zylinder}} = \{ \mathbf{x} \mid (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2 = 0 \} \quad (2.8)$$

2.4.3 Randbeschreibung

Bevor auf das Problem der Randbeschreibung näher eingegangen wird, sollen zuvor einige Begriffe definiert werden. Die Definitionen wurden [www.mathe.braunling.de/Metrik.htm] entnommen.

Offene und abgeschlossene Mengen

Eine Teilmenge $C \subseteq M$ bezeichnet man als *offen*, wenn jeder beliebige Punkt $c \in C$ eine Umgebung $U_\varepsilon(c)$ (mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$) besitzt, so dass diese Umgebung vollständig in

C enthalten ist (also $U_\varepsilon(c) \subseteq C$). Man bezeichnet eine Teilmenge C als *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement bezüglich M offen ist.

Inneres und Äußeres einer Menge

Die Menge $\text{int}(C)$ bezeichnet man als *Inneres* von C . Sie besteht aus allen Punkten, die eine vollständig in C enthaltene Umgebung besitzen. Die Menge $\text{ext}(C)$ bezeichnet man als *Äußeres* von C . Sie besteht aus allen Punkte, die eine vollständig nicht in C enthaltene Umgebung besitzen.

Rand einer Menge

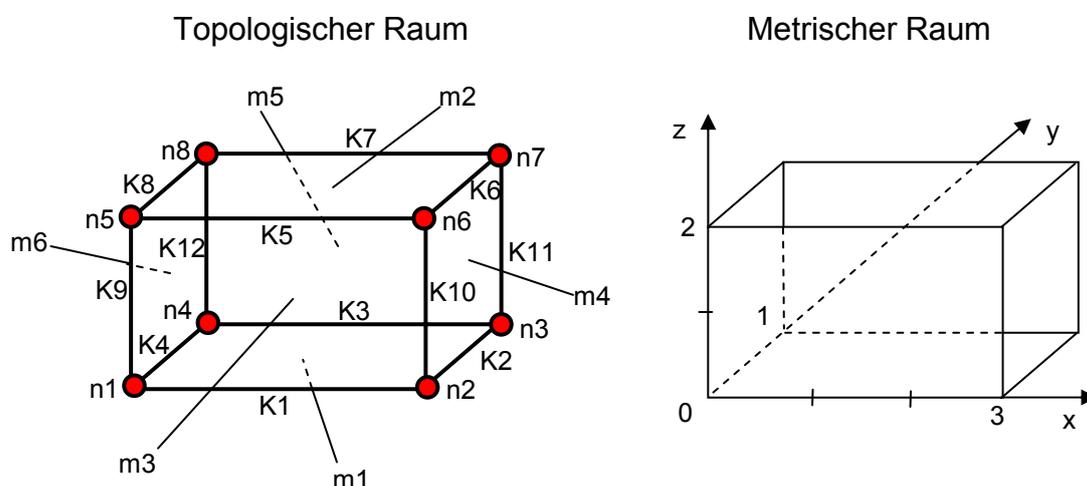
Als *Rand* ∂C bezeichnet man die Menge aller Punkte, die weder im Inneren noch im Äußeren von C liegen. Alle Umgebungen eines Randpunktes aus ∂C enthalten sowohl Punkte im Inneren als auch Punkte im Äußeren von C . Die Mengen $\text{int}(C)$, $\text{ext}(C)$ und ∂C sind immer disjunkt.

Zur besseren Veranschaulichung der Definitionen sollen die folgenden Beispiele dienen. Eine Gerade ist eine offene Menge während eine Strecke eine abgeschlossene Menge ist. Der Rand einer Strecke sind ihre Endpunkte. Eine Ebene ist eine offene Menge während ein Viereck eine abgeschlossene Menge ist. Der Rand des Vierecks sind seine Seiten.

Eine parametrisierte Gleichung beschreibt, mit Ausnahme des Falles $p=0$, eine *offene* $(n-1)$ -dimensionale Teilmenge H von Punkten im \mathbb{R}^n . Oder anders ausgedrückt, die Punktmenge spannt eine Hyperfläche der Dimension $n-1$ im \mathbb{R}^n auf. Die Objekte der Realität, die in einem Informationssystem gespeichert werden sollen stellen aber im Allgemeinen abgeschlossene Punktmengen dar. Das heißt, eine p -Zelle des topologischen Raumes soll auf eine *abgeschlossene* Teilmenge abgebildet werden. Daher ist es erforderlich, innerhalb der Abbildungsvorschrift auch den Rand von H zu beschreiben.

Bei der allgemein üblichen Vorgehensweise, der Parametrisierung der 0-Zellen, tritt das Problem nicht auf, da jeder Punkt per Definition sozusagen sein eigener Rand ist. Bei einem gerüstweisen Aufbau der Geometrie, beginnend mit der Dimension 0, ist die Randbeschreibung daher immer implizit.

Anders verhält es sich bei einer Parametrisierung der Geometrie in einer Dimension größer 0. Hier ergibt sich die Menge der Randpunkte einer Hyperfläche immer als Schnittmenge mit einer anderen Hyperfläche gleicher Dimension. Als Beispiel soll ein Quader dienen wie er in Figur 2-15 dargestellt ist.



Figur 2-15: Topologie und Geometrie eines Quaders

Die Topologie sieht so aus, dass sich die 3-Zelle aus einer Menge von 2-Zellen zusammensetzt,

$$V = \{m1, m2, m3, m4, m5, m6\} \quad (2.9)$$

die Maschen sind Mengen von Kanten

$$\begin{aligned} m1 &= \{K1, K2, K3, K4\} & m2 &= \{K5, K6, K7, K8\} \\ m3 &= \{K1, K10, K5, K9\} & m4 &= \{K2, K11, K6, K10\} \\ m5 &= \{K3, K12, K7, K11\} & m6 &= \{K4, K9, K8, K12\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

und die Kanten sind schließlich zweiwertige Mengen von Knoten

$$\begin{aligned} K1 &= \{n1, n2\} & K2 &= \{n2, n3\} & K3 &= \{n3, n4\} & K4 &= \{n1, n4\} \\ K5 &= \{n5, n6\} & K6 &= \{n6, n7\} & K7 &= \{n7, n8\} & K8 &= \{n5, n8\} \\ K9 &= \{n1, n5\} & K10 &= \{n2, n6\} & K11 &= \{n3, n7\} & K12 &= \{n4, n8\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Geometrie des Quaders wird durch Ebenengleichungen, also 2-dimensionale Hyperflächen im E^3 , beschrieben.

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\mathbf{x} \mid z = 0\} & H_2 &= \{\mathbf{x} \mid z = 2\} \\ H_3 &= \{\mathbf{x} \mid y = 0\} & H_4 &= \{\mathbf{x} \mid x = 3\} \\ H_5 &= \{\mathbf{x} \mid y = 1\} & H_6 &= \{\mathbf{x} \mid x = 0\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die 2-Zellen der Topologie sollen auf die Seitenflächen $F_1..F_6$ des Quaders abgebildet werden, die wiederum abgeschlossene Teilmengen der Hyperflächen $H_1...H_6$ sind.

$$\begin{aligned} m1 &\rightarrow F_1 \subset H_1 & m2 &\rightarrow F_2 \subset H_2 \\ m3 &\rightarrow F_3 \subset H_3 & m4 &\rightarrow F_4 \subset H_4 \\ m5 &\rightarrow F_5 \subset H_5 & m6 &\rightarrow F_6 \subset H_6 \end{aligned} \quad (2.13)$$

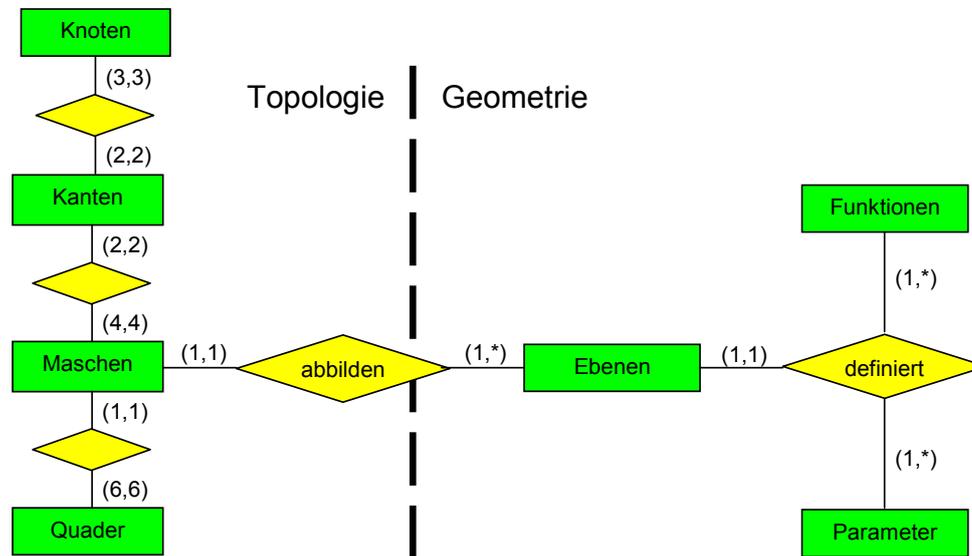
Die Aufgabe besteht nun in der Beschreibung der Ränder $\partial F_1... \partial F_6$ der Flächen $F_1..F_6$. Dazu bildet man die Schnittgeraden $G_1..G_{12}$, welche die abgeschlossenen Teilmengen $S_1...S_{12}$ enthalten, auf die wiederum die Kanten $K_1...K_{12}$ abgebildet werden.

$$\begin{aligned} K1 = m1 \cap m3 &\Rightarrow G_1 = H_1 \cap H_3 = \{\mathbf{x} \mid y = 0 \wedge z = 0\} \\ &\vdots \\ K12 = m5 \cap m6 &\Rightarrow G_{12} = H_5 \cap H_6 = \{\mathbf{x} \mid x = 0 \wedge y = 1\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Eckpunkte des Quaders ergeben sich durch Schnitt von jeweils 3 Ebenen auf welche die Maschen abgebildet werden.

$$\begin{aligned} n1 = m1 \cap m3 \cap m6 &\Rightarrow \mathbf{x}_1 = H_1 \cap H_3 \cap H_6 = (0, 0, 0) \\ &\vdots \\ n8 = m2 \cap m5 \cap m6 &\Rightarrow \mathbf{x}_8 = H_2 \cap H_5 \cap H_6 = (0, 1, 2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Es soll exemplarisch ein konzeptuelles und anschließend ein logisches Datenbankschema entwickelt werden, welches die Topologie als auch die Geometrie von Quadern abbildet, deren Seitenflächen parallel bzw. rechtwinklig zu den Koordinatenachsen verlaufen. Die Möglichkeit der Basistransformation soll der Einfachheit halber noch nicht betrachtet werden.



Figur 2-16: Quader im E-R-Modell

Figur 2-16 Zeigt das E-R-Diagramm für die Abbildung der Quader. Die Funktion, die in diesem Fall nur achsparallele Ebenen bezeichnet, kann in einem nicht objektorientierten Modell nur durch ein katalogisiertes Attribut beschrieben werden. Aus dem E-R-Modell lässt sich das folgende relationale Modell ableiten:

Knoten: {[Knoten-ID]}

Kanten: {[Kante-ID, aKnoten, eKnoten, lMasche, rMasche]}

Maschen: {[Masche-ID, Ebene-ID]}

Quader: {[Quader-ID, Masche-ID]}

Ebenen: {[Ebene-ID, Funktion-ID, Parameter-ID]}

Funktionen: {[Funktion-ID, Achse]}

Parameter: {[Parameter-ID, Wert]}

Durch Verknüpfung von relationalen Operationen kann ohne Probleme eine Relation der Knotenkoordinaten erzeugt werden, die in diesem Fall nur eine Sicht auf die Ebenenparameter darstellt. Für die Darstellung von $8 \times 3 = 24$ Koordinatenwerten werden hier nur 6 Parameter benötigt. Die aufgeführten Operationen lassen sich ohne weiteres auch in ein SQL_Statement überführen.

$$\begin{aligned} \text{Knoten_Kante} &= \prod_{\text{Knoten-ID, Kante-ID}} (\text{Knoten} \triangleright \triangleleft_{\text{Knoten-ID}=a\text{Knoten}} \text{Kanten}) \\ &\cup \prod_{\text{Knoten-ID, Kante-ID}} (\text{Knoten} \triangleright \triangleleft_{\text{Knoten-ID}=e\text{Knoten}} \text{Kanten}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kante_Masche} &= \prod_{\text{Kante-ID, Masche-ID}} (\text{Kanten} \triangleright \triangleleft_{\text{Masche}=Masche-ID} \text{Maschen}) \\ &\cup \prod_{\text{Kante-ID, Masche-ID}} (\text{Kanten} \triangleright \triangleleft_{\text{Masche}=Masche-ID} \text{Maschen}) \end{aligned}$$

$$\text{Knoten_Masche} = \prod_{\text{KnotenID, Masche-ID}} (\text{Knoten_Kante} \triangleright \triangleleft \text{Kante_Masche})$$

$$\text{Knoten_Wert} = \prod_{\text{KnotenID, Achse, Wert}} (\text{Knoten_Masche} \triangleright \triangleleft \text{Ebenen} \triangleright \triangleleft \text{Funktionen} \triangleright \triangleleft \text{Parameter})$$

$$\text{Knoten_X} = \prod_{\text{KnotenID, Xt}} (\rho_{X \leftarrow \text{Wert}} (\sigma_{\text{Achse}='X'} (\text{Knoten_Wert})))$$

$$\text{Knoten_Y} = \prod_{\text{KnotenID, Yt}} (\rho_{Y \leftarrow \text{Wert}} (\sigma_{\text{Achse}='Y'} (\text{Knoten_Wert})))$$

$$\text{Knoten_Z} = \prod_{\text{KnotenID, Zt}} (\rho_{Z \leftarrow \text{Wert}} (\sigma_{\text{Achse}='Z'} (\text{Knoten_Wert})))$$

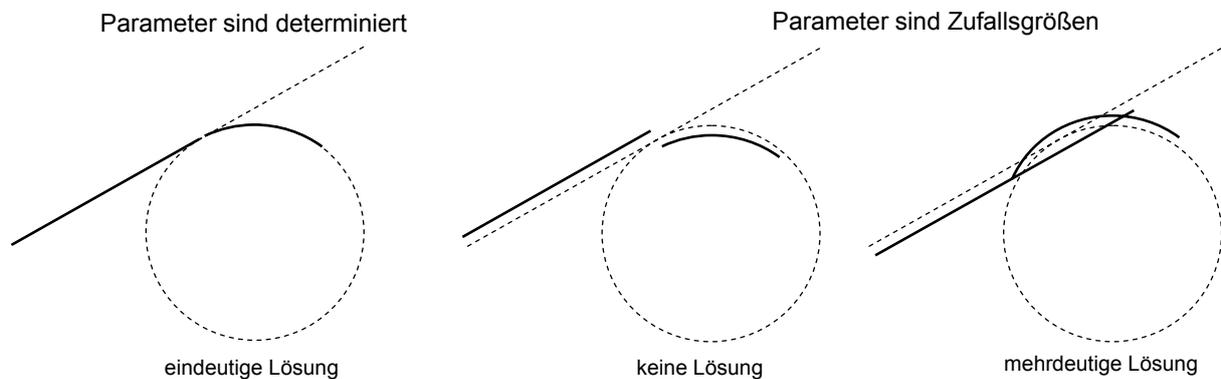
$$\text{Koordinaten} = \text{Knoten_X} \triangleright \triangleleft \text{Knoten_Y} \triangleright \triangleleft \text{Knoten_Z}$$

Die Methode der Parametrisierung von Hyperflächen einer Dimension größer Null kann jedoch dann zu Problemen führen, wenn diese an der Schnittfläche tangential ineinander übergehen. Betrachten wir als Beispiel den Übergang einer Geraden in einen Kreis im E^2 , wie er zum Beispiel bei Verkehrsstrassen häufig vorkommt. Sowohl Gerade als auch Kreis können durch eine Gleichung der Form $f(x,y) = 0$ beschrieben werden.

$$\text{Gerade : } \quad ax + by + c = 0$$

$$\text{Kreis : } \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2 = 0$$

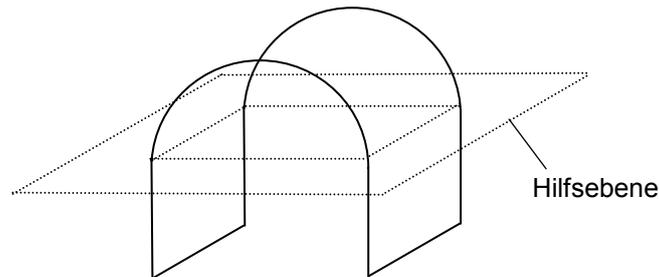
Der Rand beider Elemente könnte auch hier durch Schnittbildung ermittelt werden, doch nur unter der Voraussetzung, dass es sich bei den Parametern um streng determinierte Größen handelt. Diese Voraussetzung ist jedoch nicht immer erfüllt. Oft entstammen die Parameter Berechnungen, in die Beobachtungen, also Zufallsgrößen, eingegangen sind. Im allgemeinen Fall muss also davon ausgegangen werden, dass es sich bei den Parametern um korrelierte Zufallsgrößen handelt. In diesem Fall aber kann die Berechnung des Schnittpunktes zu keiner oder zu einer mehrdeutigen Lösung führen (siehe Figur 2-17).



Figur 2-17: Schnitt von tangential verlaufenden Elementen

Für die die Lösung dieses Problems bestehen mehrere Möglichkeiten. Die nächstliegende wäre hier die direkte Einführung des Schnittpunktes. Es wären dann sowohl Zellen der Dimension 1 als auch Zellen der Dimension 0 parametrisiert, eine redundante Datenhaltung, die aber dadurch zu begründen ist, dass es sich bei den zu speichernden Werten um Zufallsgrößen handelt.

Eine weitere Lösung stellt die Einführung einer zusätzlichen Hyperfläche, in diesem Fall einer Geraden, dar, die orthogonal zu den sich tangential schneidenden Elementen verläuft. Diese, auf den ersten Blick umständlich anmutende, Lösung gewinnt an Sinn, wenn wir z.B. den Fall eines Tonnengewölbes betrachten (siehe Figur 2-18).



Figur 2-18: Tonnengewölbe mit Hilfsebene

Das Gewölbe besteht topologisch aus drei 2-Zellen, den beiden Seitenwänden und der Decke. Die beiden Seitenwände werden jeweils durch eine Ebene Parametrisiert, die Decke durch einen liegenden Zylinder. Der Übergang zwischen Decke und Seitenwänden ist tangential. Nun könnte man auch hier an den Ecken Schnittpunkte einführen doch erscheint diese Lösung hier wenig sinnvoll, da dies zu einer starken Überparametrisierung führen würde ($4 \text{ Punkte} \times 3 \text{ Koordinate} = 12 \text{ Parameter}$). Zweckmäßiger ist die Einführung einer Hilfsebene mit $z = \text{const}$. Bei diesem Ansatz wird nur ein weiterer Parameter benötigt und die Bedingungen, dass die Schnittgeraden zwischen Seitenwänden und Decke horizontal in gleicher Höhe verlaufen sollen sind bereits implizit.

2.4.4 Zusammenfassung

Im folgenden Abschnitt soll nun versucht werden, die hier an Spezialfällen gezeigten Regeln zu verallgemeinern und zusammenzufassen.

Die Abbildung einer p-dimensionalen Punktmenge eines metrischen Raumes auf die p-Zelle eines topologischen Raumes ist eindeutig aber nicht umkehrbar.

Die eindeutige Abbildung der p-Zelle eines topologischen Raumes auf eine p-dimensionale Punktmenge eines metrischen Raumes kann nur erreicht werden, wenn der betreffenden p-Zelle eine Abbildungsvorschrift zugeordnet wird.

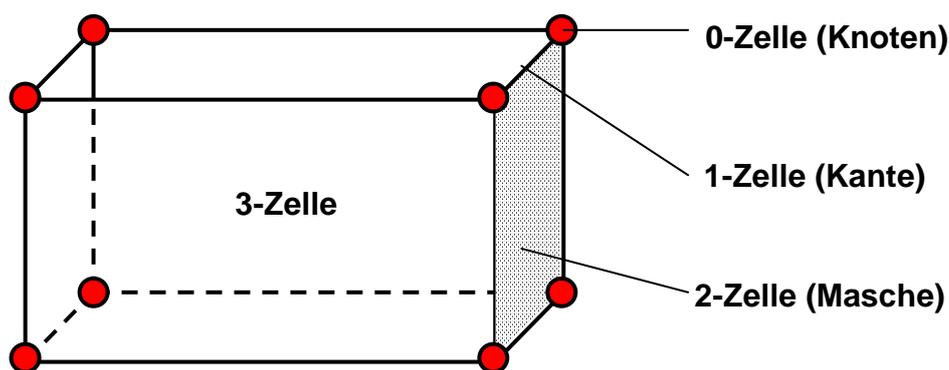
Die Abbildungsvorschrift lässt sich in die Abbildungsfunktion, Parameter und eine Randbeschreibung zerlegen.

Soll ein Zellenkomplex der Dimension p auf einen metrischen Raum abgebildet werden lassen sich für die Abbildungsvorschrift die folgenden Thesen aufstellen:

T1	<i>Eine Abbildungsfunktion kann für Zellen einer beliebigen Dimension q ($0 \leq q \leq p$) definiert werden.</i>
T2	<i>Eine Abbildungsfunktion in der Dimension q setzt voraus, dass alle Hyperflächen mit einer Dimension $q+i$ nicht gekrümmt sind.</i>

T3	<i>Der Rand von Hyperflächen einer Dimension $q+i$ wird durch Hyperflächen der Dimension $q+i-1$ definiert.</i>
T4	<i>Hyperflächen einer Dimension $q-i$ werden durch Hyperflächen der Dimension $q-i-1$ begrenzt, die durch Schnitt der Hyperflächen der Dimension $q-i$ entstehen.</i>
T5	<i>Verschiedene Zellen gleicher Dimension können sich eine Abbildungsfunktion teilen.</i>
T6	<i>Verschiedene Abbildungsvorschriften können auf gleiche Parameter verweisen.</i>

Die aufgeführten Thesen sollen am Beispiel eines Quaders im \mathbb{R}^3 erläutert werden, der auf eine topologische 3-Zelle abgebildet wurde.



Figur 2-19: Topologie eines Quaders

Zu T1: Eine Abbildungsfunktion kann für Zellen einer beliebigen Dimension q ($0 \leq q \leq p$) definiert werden.

Der Quader hat die Dimension $p = 3$. Die Abbildungsfunktion kann in den Dimensionen $q = 0$, $q = 1$, $q = 2$ oder $q = 3$ definiert werden.

$q = 0$: 0-Zellen (Knoten) werden eindeutig auf Punkte abgebildet, die Punkte werden durch Punktkoordinaten parametrisiert.

$q = 1$: 1-Zellen (Kanten) werden auf Geraden abgebildet. Die Geraden können z.B. durch eine Punkt-Richtungs-Gleichung dargestellt werden.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{n} \quad (2.16)$$

$q = 2$: 2-Zellen (Maschen) werden auf Ebenen abgebildet. Die Ebenen werden durch die Hessesche Normalform dargestellt.

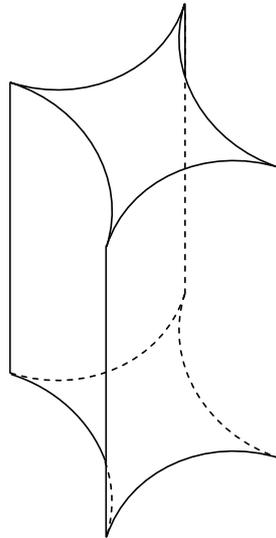
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d = 0 \quad \wedge \quad |\mathbf{n}| = 1 \quad (2.17)$$

$q = 3$: Die 3-Zelle wird direkt auf einen Quader abgebildet. Die innere Geometrie und somit der Rand des Quaders wird durch die Parameter *Länge*, *Breite* und *Höhe* beschrieben. Die Orientierung im Raum kann durch ein Translations- und ein Rotationsquaternion erfolgen.

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{q}}^{-1} \quad \wedge \quad \begin{aligned} v_s &= 0 \\ v_x &= 0 \dots L \\ v_y &= 0 \dots B \\ v_z &= 0 \dots H \end{aligned} \quad (2.18)$$

Zu T2: *Eine Abbildungsfunktion in der Dimension q setzt voraus, dass alle Hyperflächen mit einer Dimension $q+i$ nicht gekrümmt sind.*

Für die Abbildung einer 3-Zelle auf einen Quader genügt eine Abbildungsfunktion in der Dimension 0, da alle begrenzenden Hyperflächen mit größerer Dimension (Geraden, Ebenen) keine Krümmung aufweisen. Wollte man die 3-Zelle aber z.B. auf ein Prismatoid abbilden, dessen Seiten durch Zylinderflächen gebildet werden (Figur 2-20), so wäre dies nur über eine Abbildungsfunktion der Dimension $q = 2$ möglich.



Figur 2-20: Prismatoid mit gekrümmten Seitenflächen

Zu T3: *Der Rand von Hyperflächen einer Dimension $q+i$ wird durch Hyperflächen der Dimension $q+i-1$ definiert.*

Wir betrachten exemplarisch den Fall $q=0$ und $i=2$, das heißt, die Abbildungsfunktion bildet Knoten auf Punkte ab. Die Hyperflächen der Dimension $q+i=2$ sind Ebenen. Der Rand der Ebenen wird dann durch Hyperflächen der Dimension 1, also durch Geraden beschrieben.

Zu T4: *Hyperflächen einer Dimension $q-i$ werden durch Hyperflächen der Dimension $q-i-1$ begrenzt, die durch Schnitt der Hyperflächen der Dimension $q-i$ entstehen.*

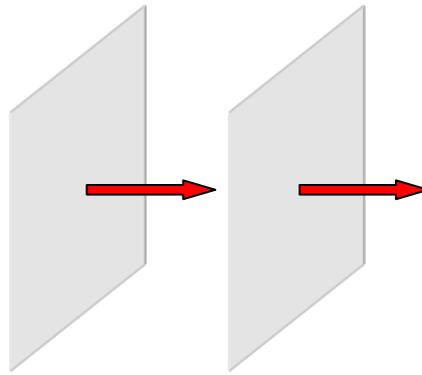
Wir betrachten den Fall einer Abbildungsfunktion der Dimension $q=2$. Im Falle des Quaders ergeben sich die Kanten durch den Schnitt der Seitenebenen. Die Eckpunkte wiederum ergeben sich durch Schnitt der Kanten.

Zu T5: *Verschiedene Zellen gleicher Dimension können sich eine Abbildungsfunktion teilen.*

Wir betrachten den Fall einer Abbildungsfunktion der Dimension $q=2$, das heißt, die 2-Zellen werden auf Ebenen abgebildet. Da es sich bei allen Randflächen um Ebenen handelt verwenden alle 2-Zellen die gleiche Abbildungsfunktion, nämlich die Hessesche Normalform der Ebene (2.16).

Zu T6: *Verschiedene Abbildungsvorschriften können auf gleiche Parameter verweisen.*

Die Randebenen eines Quaders sind paarweise parallel bzw. rechtwinklig. Die Rechtwinkligkeit lässt sich dadurch abbilden, dass parallele Ebenen den gleichen Normalenvektor besitzen (Figur 2-21).



Figur 2-21: Normalenvektoren Paralleler Ebenen

Die zu parallelen Ebenen gehörenden Abbildungsgleichungen unterscheiden sich nur noch im orthogonalen Abstand vom Koordinatenursprung d .

Stellt man rechtwinkelige Geraden im \mathbb{R}^2 in Hessescher Normalform dar, so beinhalten ihre Normalenvektoren vom Betrag her gleiche Parameter. Sie unterscheiden sich nur hinsichtlich Vorzeichen und Komponente.

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \wedge \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \quad (2.19)$$

2.5 Die Zeit

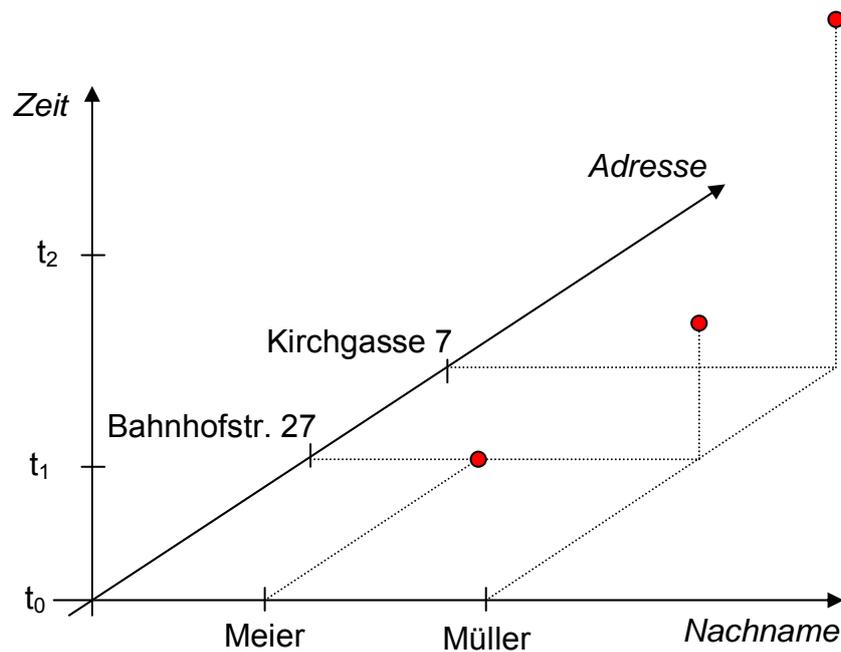
2.5.1 Topologischer Raum mit diskreter Zeit

In den bisherigen Überlegungen wurden im Wesentlichen statische Probleme im zwei- bzw. dreidimensionalen euklidischen Raum betrachtet. Das heißt, die zeitlichen Änderungen der Eigenschaften von den in einem Informationssystem zu speichernden Objekten blieben unberücksichtigt. Die so gespeicherten Informationen bilden gewissermaßen eine Momentaufnahme der Realität, aus der zeitliche Veränderungen nicht ablesbar sind. Häufig soll aber auch der zeitliche Verlauf von Prozessen oder die Bewegung von Objekten dokumentiert werden. So ist es zum Beispiel erforderlich, in einem Liegenschaftsinformationssystem die Entstehungsgeschichte oder die Eigentümerwechsel von Flurstücken zurückverfolgen zu können. Besonders entscheidend ist die Zeitkomponente aber bei Fahrplänen oder Verkehrsinformationssystemen in denen die Bewegungen einzelner Objekte im Raum abgebildet werden sollen.

Im Abschnitt 2.2.1 wurde bereits gezeigt, dass die Merkmalsklassen einer Datenbank einen topologischen Raum aufspannen. Für die Abbildung der zeitlichen Änderung von Merkmalen ist es nun erforderlich, die Basis dieses topologischen Raumes um die Zeitkomponente zu erweitern. Das Problem soll wiederum an einem Beispiel erläutert werden. Wir betrachten ein Objekt der Klasse *Personen* dessen Merkmale *Nachname* und *Adresse* sich im Lauf der Zeit ändern. Die Person Erna Meier ändert ihren Nachnamen in Müller und zieht zu einem späteren Zeitpunkt von der Bahnhofstraße 27 in die Kirchgasse 3.

Personen				
Person-ID	Vorname	Nachname	Adresse	Datum
123	Erna	Meier	Bahnhofstr. 27	t_0
123	Erna	Müller	Bahnhofstr. 27	t_1
123	Erna	Müller	Kirchgasse 3	t_2
...

Diese drei Datensätze entsprechen drei Punkten in einem Topologischen Raum, welcher in Figur 2-22 durch einen dreidimensionalen metrischen Raum veranschaulicht wird.



Figur 2-22: 0-Zellen im topologischen Raum

Diese drei Punkte repräsentieren jedoch ein und dasselbe Objekt der Realität, welches zeitlichen Änderungen seiner Merkmale unterliegt. Daher können zeitlich aufeinander folgende Punkte eines Objektes zu 1-Zellen zusammengefasst werden. Das Objekt wird nunmehr nicht durch einen Punkt sondern durch eine Folge von Kanten im topologischen Raum repräsentiert.

Bei einer solchen Darstellung ist der Zustand eines Objektes zu jedem Zeitpunkt $t \neq t_{\text{Änderung}}$ definiert. Für die Abbildung dieser Betrachtungsweise muss die Relation Personen so modifiziert werden, dass nicht mehr nur ein Gültigkeitszeitpunkt sondern ein Gültigkeitszeitraum gespeichert wird.

Personen					
Person-ID	Vorname	Nachname	Adresse	gültig_von	gültig_bis
123	Erna	Meier	Bahnhofstr. 27	t_0	t_1
123	Erna	Müller	Bahnhofstr. 27	t_1	t_2
123	Erna	Müller	Kirchgasse 3	t_2	t_∞
...

Diese Form der Historisierung wird in [ADV 2002] vorgeschlagen. Bei den Merkmalen *gültig_von* und *gültig_bis* bleibt jedoch offen, ob diese Zeitpunkte den Gültigkeitszeitraum in der Realität oder den in der Datenbank kennzeichnen.

2.5.2 Temporale Datenhaltung

Will man Änderungen in der Realität und solche im System unterscheiden, muss man zu einer so genannten bitemporalen Datenhaltung übergehen. Bei dieser Form der Historisierung werden die Zeitpunkte zu denen in der Realität Änderungen von Merkmalen eintreten von den Zeitpunkten unterschieden, in denen diese Merkmale in der Datenbank modifiziert werden. Diese Informationen können durch die Einführung von zusätzlichen Feldern in bitemporale Datenbankrelationen abgebildet werden. [FRÄFEL 2003]

gueltig_von	Startzeitpunkt der Gültigkeitsperiode
gueltig_bis	Endzeitpunkt der Gültigkeitsperiode
erfasst_am	Zeitpunkt der Erfassung
ersetzt_am	Zeitpunkt der Stempelung von <i>gueltig_bis</i>
fehler_am	Zeitpunkt einer Fehlerkorrektur

Im September 1994 wurde durch das TSQL2 committee eine Spezifikation für eine Temporal Query Language – TSQL2 publiziert. TSQL2 stellt eine Erweiterung des Standards SQL-92 dar. Die Spracherweiterung unterstützt Abfragen und die Formulierung von Integritätsbedingungen auf zeitrelevanten Daten durch die implizite Administration von Gültigkeitszeit (valid time) und Transaktionszeit (transaction time). Die Konstrukte und Inhalte von TSQL3 wurden für die Übernahme in SQL3 vorgeschlagen. [SNODGRASS 2002] [SCHARFFE 2003]

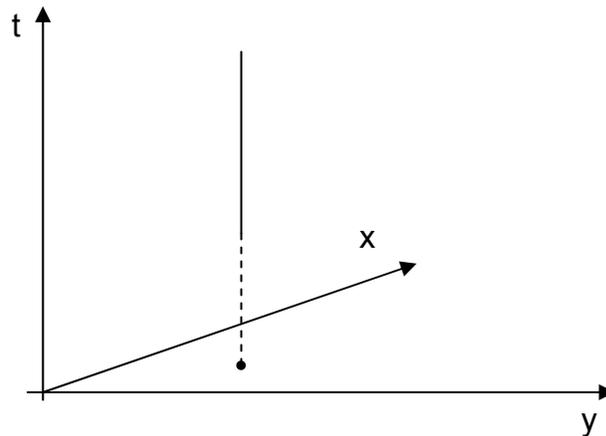
2.5.3 Die vierdimensionale Raumzeit

Im Folgenden sollen Änderungen von Objekten in Raum und Zeit betrachtet werden. Alle bisherigen Beispiele legten einen zwei- bzw. dreidimensionalen euklidischen Raum zugrunde. Dieser Raum soll nun um die Zeitdimension t erweitert werden. Das Ergebnis ist eine vierdimensionale Raumzeit mit der Basis (x, y, z, t) . Der Einfachheit halber soll für diesen Raum die Newtonsche Mechanik gelten, das heißt, auch „unendlich“ große Geschwindigkeiten sind zugelassen. Für die meisten Anwendungen in GIS dürfte diese Modellvorstellung ausreichend sein. Anwendungen der Satellitengeodäsie hingegen verlangen

die Berücksichtigung relativistischer Effekte. Berechnungen dieser Art werden im Minkowski-Raum durchgeführt (siehe [SCHRÖDER 1981]).

Da ein vierdimensionaler Raum der menschlichen Vorstellung nur schwer zugänglich ist und sich Grafisch nicht veranschaulichen lässt, wird für die Beispiele eine dreidimensionale Raumzeit mit der Basis (x, y, t) verwendet. Die Aussagen zu dieser dreidimensionalen Raumzeit lassen sich auf die vierdimensionale Raumzeit übertragen.

Bei Punkten der Raumzeit sprechen wir von Ereignissen. Ein statisch an seinem Ort verharrender Raumpunkt bildet in der Raumzeit eine vertikale Gerade. Figur 2-25 zeigt einen solchen Punkt und seine Projektion in die x - y -Ebene.

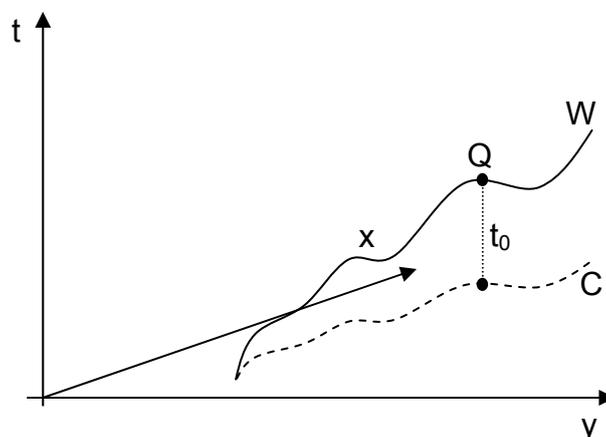


Figur 2-25: Statischer Punkt in der Raumzeit

Das Kausalitätsprinzip verlangt, dass eine Kurve bezüglich der Raumkomponenten x, y, z immer einen Anstieg größer oder gleich Null hat. Die Bewegung eines Punktes lässt sich daher immer explizit als Funktion der Zeit darstellen.

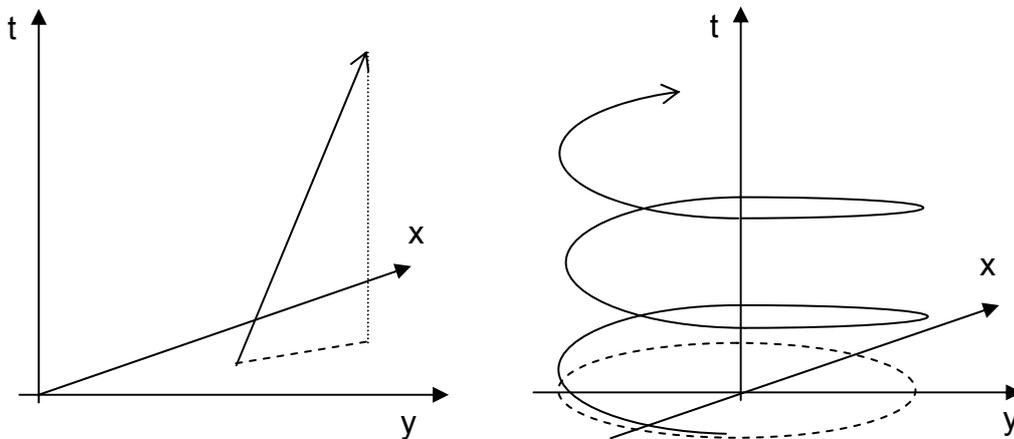
$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (2.20)$$

Die Linie, die ein bewegter Punkt in der Raumzeit beschreibt bezeichnet man als Lebenslinie oder Weltlinie des Punktes. Der geometrische Ort der Punktlagen liefert die Trajektorie C . Im kartesischen Koordinatensystem mit der Zeit t als dritter Koordinate ergibt sich die Weltlinie W . Nimmt man nun einen Punkt Q auf W und fällt das Lot auf die x - y -Ebene, so findet man den Punkt der Trajektorie C , in dem sich der Punkt zum Zeitpunkt t befindet. T ist dabei die Länge des Lotes. [FRIEDMANN 2002]



Figur 2-26: Weltlinie und Trajektorie eines bewegten Punktes

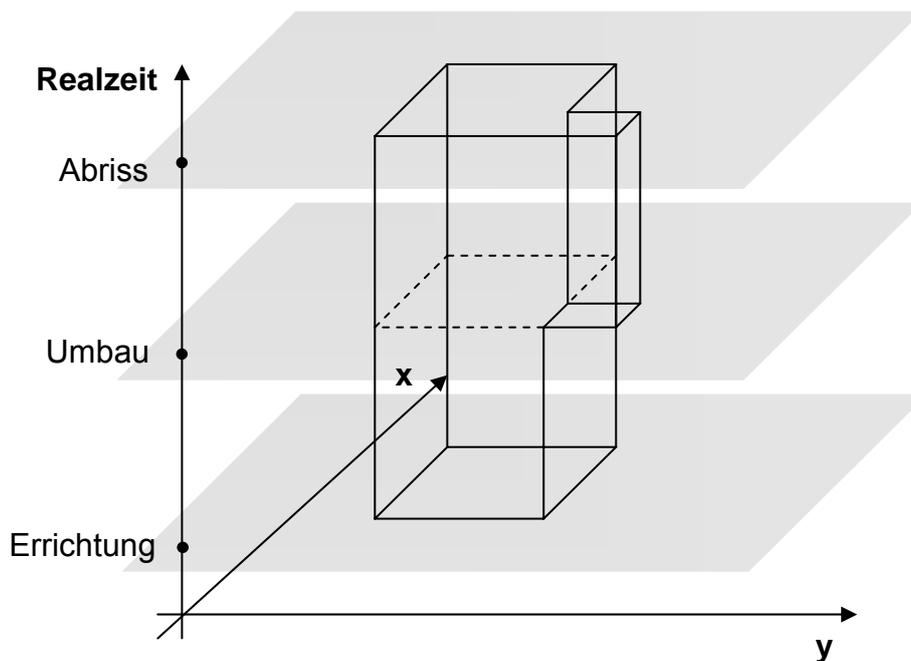
Ein Punkt, der eine geradlinig gleichförmige Bewegung ausführt beschreibt in der Raumzeit eine Gerade. Ein Punkt, der eine Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ausführt beschreibt eine Schraubenlinie (Figur 2-27).



Figur 2-27: Geradlinige bzw. Kreisbewegung in der Raumzeit

2.5.4 Historisierung in der Raumzeit

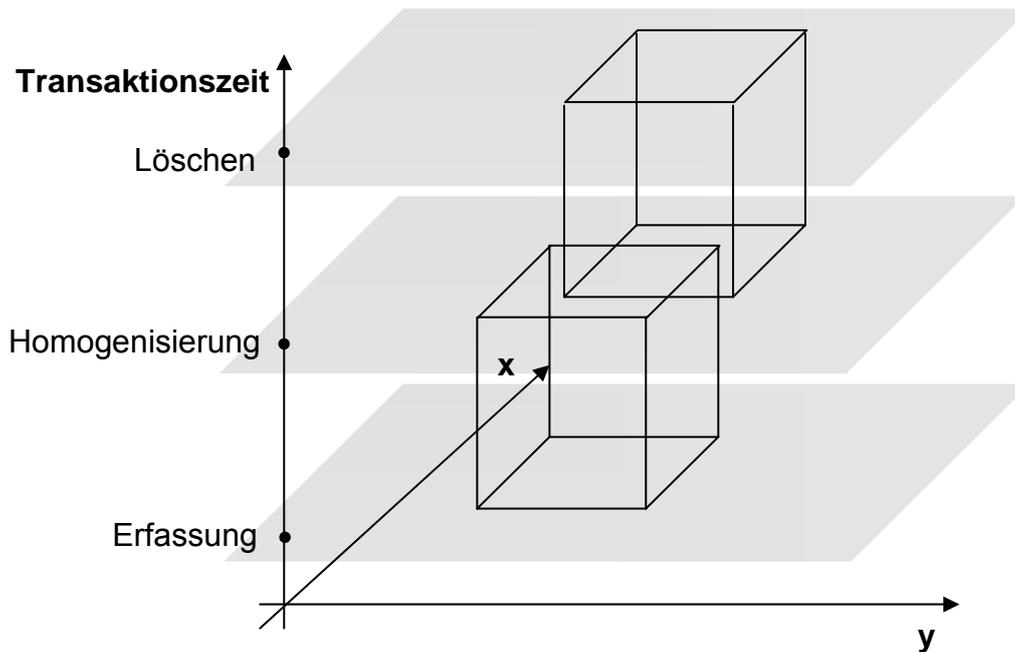
Wie stellt sich nun die Historisierung eines geometrischen Objektes in Geometrie und Topologie der Raumzeit dar? Betrachten wir hierzu ein Gebäude, das errichtet, umgebaut und schließlich wieder abgerissen wird. Figur 2-28 zeigt den Lebenszyklus dieses Gebäudes in der Raumzeit. Die Zeitachse bezeichnet hier die reale Zeit, nicht die Transaktionszeit. Das in seinen Raumkomponenten zweidimensionale Gebäude wird topologisch auf eine 3-Zelle abgebildet. Da sich das Objekt nicht bewegt, erfolgt die Abbildung der 3-Zelle auf eine Punktmenge der Raumzeit hier ausschließlich über nicht gekrümmte Hyperflächen. Es ist daher möglich, hier die 0-Zellen durch Koordinaten der Raumzeit zu parametrisieren und die Elemente höherer Dimension gerüstweise anzuheften. Diese Vorgehensweise entspricht einer temporalen Datenhaltung.



Figur 2-28: Lebenszyklus eines Gebäudes in der Raumzeit

Man beachte, dass hier nur für die Punkte der metrischen Raumzeit ein Zeitattribut mitgeführt werden muss, die Gültigkeit von Elementen höherer Dimension ergibt sich durch den gerüstweisen Aufbau, analog einem rein räumlichen Problem. Es ist demnach überflüssig zum Beispiel die Gültigkeitsdauer einer Kante anzugeben, da sich diese aus der Parametrisierung der Punkte ergibt. Da eine Bewegung von Punkten nicht stattfindet, können mit einem Tupel der Struktur $(x, y, t_{\text{von}}, t_{\text{bis}})$ zwei Punkte der Raumzeit koordiniert werden deren Trajektorie ein Punkt ist.

Der Lebenszyklus des gleichen Gebäudes in der Transaktionszeit kann sich von dem in der realen Zeit durchaus unterscheiden. Figur 2-29 zeigt den Lebenszyklus eines Gebäudes dessen Eckpunktkoordinaten während der Lebensdauer im GIS geändert wurden.



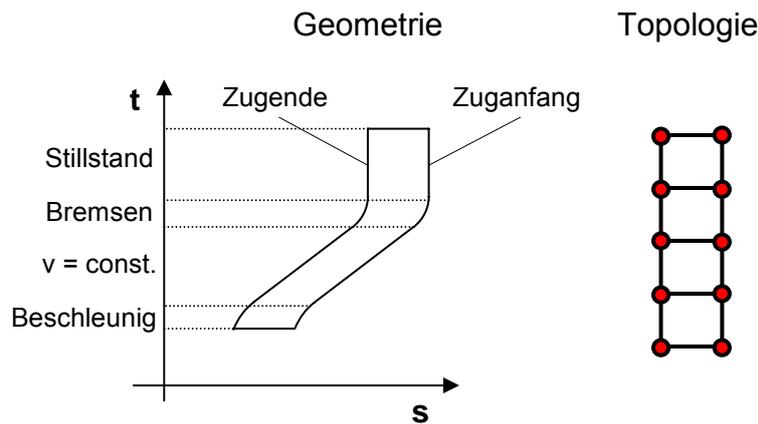
Figur 2-29: Lebenszyklus eines Gebäudes in der Transaktionszeit

Die Verschiebung, die das Gebäude durch die Homogenisierung erfährt ist rein virtuell und kann nur in der Transaktionszeit dargestellt werden. In der realen Zeit findet eine Verschiebung des Gebäudes nicht statt.

2.5.5 Bewegte Objekte in der Raumzeit

Wie gezeigt wurde, ist eine temporale Datenhaltung im herkömmlichen Sinn nur in der Lage, Bewegungen mit einer Geschwindigkeit von $v = 0$ (keine Änderung) oder $v = \infty$ (Änderung) abzubilden. Für eine Abbildung von allgemeinen Bewegungen sind komplexere Abbildungsvorschriften erforderlich.

Wir betrachten einen Zug, der entlang einer Strecke fährt. Die Bewegung lässt sich in einer zweidimensionalen Raumzeit mit der Basis (s, t) darstellen. Hierbei ist s das eindimensionale Raumbezugssystem der Gleisachse und t die Zeit. Der Zug selbst wird als eindimensionales Objekt mit konstanter Länge betrachtet.



Figur 2-30: Geometrie und Topologie einer Zugfahrt

Die Topologie der Zugfahrt ist auf der rechten Seite von Figur 2-30 zu sehen. In diesem Fall ist es nicht ausreichend, nur die 0-Zellen zu parametrisieren, da einige der Linien (eindimensionale Hyperflächen) in der s,t -Raumzeit, auf welche die 1-Zellen abgebildet werden sollen, gekrümmt sind. Die „horizontalen“ Kanten werden auf Geraden mit $t = \text{const.}$ abgebildet. Die „vertikalen“ Kanten lassen sich, auf Grund des Kausalitätsprinzips, explizit auf Funktionen der Zeit abbilden. Diese Funktionen haben die Struktur

$$s = g(t) = s_0 + \dot{s} \cdot t + \ddot{s} \cdot t^2 \quad (2.21)$$

Hierin sind $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit und $\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$ die Beschleunigung.

Nun könnte man Geometrie und Topologie der obigen Zugfahrt in einem Datenmodell abbilden wie es unter 2.4.2 beschrieben wurde. Bei einem solchen Vorgehen würde man jedoch eine wichtige Eigenschaft des Zuges unberücksichtigt lassen, welche die Modellbildung erheblich vereinfacht. Wie viele andere Objekte auch, wird der Zug zu keiner Zeit deformiert, das heißt in diesem Falle gedehnt oder gestaucht.

Aus diesem Grund lässt sich eine mit dem Zug fest verbundene Basis definieren, der gegenüber alle Punkte des Zuges invariant sind. Im vorliegenden Fall bietet sich ein eindimensionales Objektkoordinatensystem entlang der Trajektorie mit dem Zuanfang als Ursprung an. Die Position eines Punktes aus der Punktmenge „Zug“ kann dann durch eine Transformation vom l -System des Zuges in das s -System der Trajektorie berechnet werden.

$$s = s_0 - l \quad (2.22)$$

Hierin sind s die Koordinate eines Punktes des Zuges im s -Koordinatensystem, s_0 der Translationsparameter zwischen dem s -System und dem l -System und l die lokale Koordinate des Punktes im l -System. Dabei ist nur der Transformationsparameter s_0 , nicht aber die lokale Koordinate l eine Funktion der Zeit.

$$s_0 = g(t) \quad (2.23)$$

Es soll nun versucht werden, die Aussagen über die Zugfahrt zu verallgemeinern:

- Für jedes nicht deformierbare Objekt lässt sich eine lokale Basis definieren, gegenüber der die Objektpunkte invariant sind.

- Die globalen Koordinaten eines Objektpunktes lassen sich als Funktion seiner Objektkoordinaten und von Transformationsparametern darstellen.
- Bei einer Bewegung des Objektes im Raum lassen sich die Transformationsparameter für eine Transformation von der lokalen auf eine globale Basis als Funktionen der Zeit darstellen.

$$\mathbf{x}_{\text{global}} = f(\mathbf{p}, \mathbf{x}_{\text{lokal}}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} = \mathbf{g}(t) \quad (2.24)$$

In (2.24) sind $\mathbf{x}_{\text{global}}$ die globalen Koordinaten, \mathbf{p} die Transformationsparameter und $\mathbf{x}_{\text{lokal}}$ die lokalen Koordinaten des zu transformierenden Punktes.

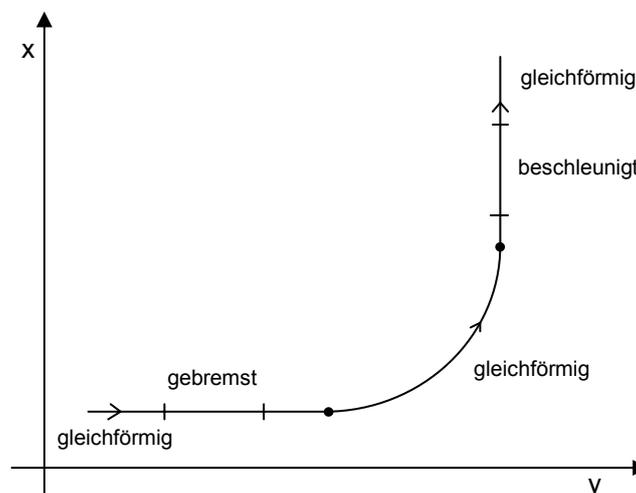
Im Beispiel „fahrender Zug“ wird als Transformationsparameter lediglich die Translation des Zuges in Bezug auf den Ursprung der Trajektorie s_0 benötigt. Im allgemeinen Fall, der Bewegung eines starren Körpers im dreidimensionalen Raum, variieren drei Translations- und drei Rotationsparameter in Abhängigkeit von der Zeit.

$$\mathbf{x}_{\text{global}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} X_0(t) \\ Y_0(t) \\ Z_0(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \\ \kappa(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{\text{lokal}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Wie lässt sich eine solche Bewegung nun aber in einer Datenbank speichern? Die dreidimensionale Punktmenge des starren Körpers lässt sich, wie in den vorangegangenen Kapiteln beschrieben, auf topologische Zellen abbilden. Die Rückabbildung der topologischen Elemente auf dreidimensionale Punktmenge erfolgt über Abbildungsgleichungen, die im Objektkoordinatensystem des Körpers definiert sind.

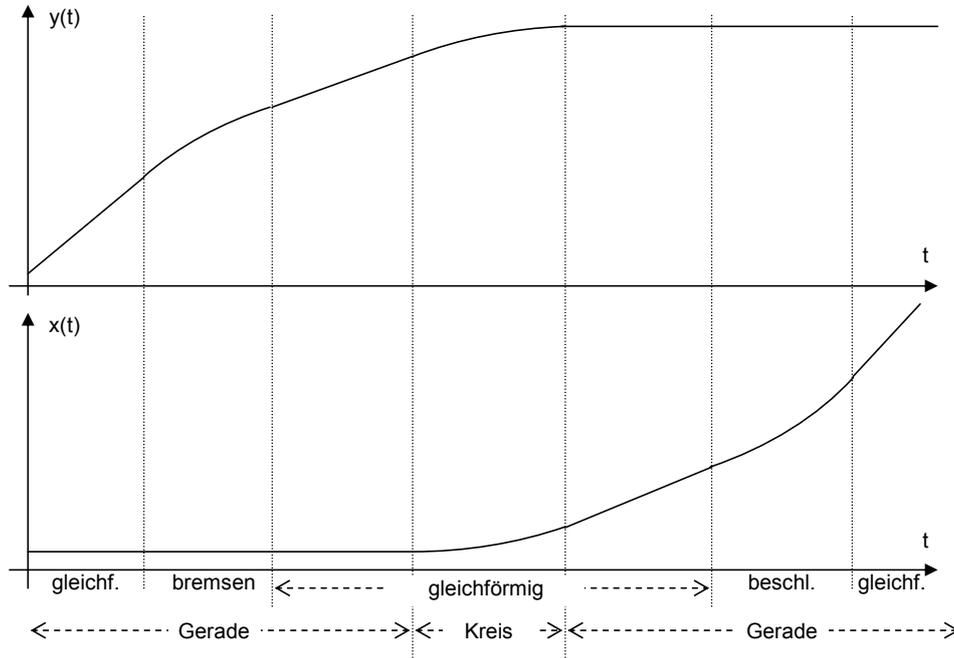
Die Transformationsparameter sind Funktionen der Zeit, das bedeutet, sie bilden eine eindimensionale Punktmenge in einem 7-dimensionalen Raum mit der Basis $(X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa, t)$.

Zur Veranschaulichung betrachten wir die Translation eines Punktes in der x-y-Ebene, wie sie in Figur 2-31 dargestellt ist.



Figur 2-31: Trajektorie in der x-y-Ebene

Der Punkt soll ein Fahrzeug repräsentieren. Die Trajektorie besteht aus den Elementen Gerade – Kreis – Gerade. Das Fahrzeug fährt zunächst mit konstanter Geschwindigkeit, bremst vor der Kurve, durchfährt die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, beschleunigt nach der Kurve und fährt mit konstanter Geschwindigkeit weiter.



Figur 2-32: Koordinaten als Funktion der Zeit

Figur 2-32 zeigt die Raumkoordinaten des Fahrzeuges als Funktionen der Zeit. Die Weltlinie des Fahrzeuges in der Raumzeit (x, y, t) ließe sich auf eine Sequenz von Kanten abbilden. Es würden dann diejenigen Punkte auf Knoten abgebildet, an denen sich die funktionale Beschreibung der Kurve ändert.

Tabelle 2-1: Kantensequenz einer Bewegung

Kante	Bewegung	Trajektorie	$x(t)$	$y(t)$
1	gleichförmig	Gerade	$x = \text{const.}$	$y = y_0 + \dot{y} \cdot t$
2	gebremst		$x = \text{const.}$	$y = y_0 + \dot{y} \cdot t + \ddot{y} \cdot t^2$
3	gleichförmig		$x = \text{const.}$	$y = y_0 + \dot{y} \cdot t$
4		Kreis	$x = x_0 + R - \cos\left(\frac{\dot{s} \cdot t}{R}\right)$	$y = y_0 + \sin\left(\frac{\dot{s} \cdot t}{R}\right)$
5		Gerade	$x = x_0 + \dot{x} \cdot t$	$y = \text{const.}$
6			beschleunigt	$x = x_0 + \dot{x} \cdot t + \ddot{x} \cdot t^2$
7	gleichförmig		$x = x_0 + \dot{x} \cdot t$	$y = \text{const.}$

Tabelle 2-1 zeigt deutlich, dass die der jeweiligen Kante zugeordnete Abbildungsfunktion sowohl von der Bewegungsform in Richtung der Trajektorie als auch von der Geometrie der Trajektorie selbst abhängt.

Nun ist es in vielen Fällen so, dass ein und dieselbe Trajektorie, zumindest stückweise, von verschiedenen Fahrzeugen befahren wird. Als Beispiele seien Gleise oder auch Straßen genannt. Daher erscheint es sinnvoll, die beiden Komponenten, *Bewegungsform des Fahrzeuges* auf der einen und *Geometrie der Trajektorie* auf der anderen Seite, auch im Datenmodell separat zu behandeln.

Die Bewegung entlang der Trajektorie lässt sich durch eine Funktion $s = g(t)$ ausdrücken, die im Falle einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung die Form (2.21) annimmt. Zeitintervalle mit gleicher Beschleunigung können dann jeweils auf eine Kante abgebildet werden.

Die Trajektorie wiederum wird durch Funktionen des Weges beschrieben.

$$\begin{aligned}x &= f_1(s) \\y &= f_2(s) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}(s) \\z &= f_3(s)\end{aligned} \tag{2.26}$$

Auch die Trajektorie wird in der Weise auf eine Sequenz von Kanten abgebildet, dass Wegintervalle, die sich durch eine Funktion beschreiben lassen bestimmten Kanten zugeordnet werden. Bei Straßen und Gleisen entsprechen diese Kanten den einzelnen Trassierungselementen. Die gebräuchlichsten Trassierungselemente sind Gerade, Kreis und Klotoide.

Häufig werden auch noch die Geometriekomponenten der Trajektorie in separaten Komponenten verwaltet, z.B. Lage $x(s)$, $y(s)$, Höhe $z(s)$ und Überhöhung $\kappa(s)$. Näheres hierzu findet man in [GIELSDORF 1998].

3 Referenzsysteme

Bereits in den vorangegangenen Abschnitten tauchten die Begriffe *Basis eines Raumes*, *Referenzsystem* oder *Koordinatensystem* auf. Im Folgenden werden diese Begriffe äquivalent verwendet, wenn also zum Beispiel von der Basis eines Raumes gesprochen wird ist damit ein bestimmtes Koordinatensystem gemeint. Der Begriff der Basis wird in [ALEXANDROFF 1973] folgendermaßen definiert:

Basis

Ein System S von offenen Mengen des Raumes R heißt *Basis des Raumes R* , wenn sich jede offene Menge $G \subseteq R$ als Vereinigung gewisser Mengen des Systems S darstellen lässt.

Diese Definition gilt für topologische und für metrische Räume. So kann man eine Tabelle einer relationalen Datenbank als topologischen Raum betrachten. Die Tabelle stellt eine Menge von Merkmalen R , den einzelnen Zellen, dar. Auf dieser Menge ist ein System von Untermengen S , den Merkmalsklassen von denen jede eine Spalte bildet, definiert. Jeder Punkt des topologischen Raumes, in diesem Fall jede Zeile bzw. jeder Datensatz, lässt sich durch Vereinigung gewisser Mengen des Systems S , den Attributen, darstellen.

In einem dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 wird die Basis durch die Basisvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , und \mathbf{e}_3 aufgespannt. Jeder Punkt des Raumes lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.

$$\mathbf{p} = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 + z \cdot \mathbf{e}_3 \quad (3.1)$$

Die Werte x , y , z sind die Koordinaten des Punktes. Im allgemeinen dreidimensionalen Raum ist ein Punkt P die Schnittmenge aus Flächen deren Punkte den gleichen Wert in einer Koordinatenkomponente besitzen.

$$P = \{\mathbf{x} \mid x_1 = 0\} \cap \{\mathbf{x} \mid x_2 = 0\} \cap \{\mathbf{x} \mid x_3 = 0\} \quad (3.2)$$

Mit Hilfe der entsprechenden Metrisierungsfunktion lassen sich aus den Koordinaten Abstände zwischen Punkten berechnen.

Die in Geo-Informationssystemen verwalteten Geometriedaten sind im Allgemeinen auf ein bestimmtes Referenzsystem bezogen. Abhängig von den Anforderungen des Nutzers kommen dabei verschiedene Systeme zur Anwendung.

3.1 In der Geodäsie gebräuchliche Referenzsysteme

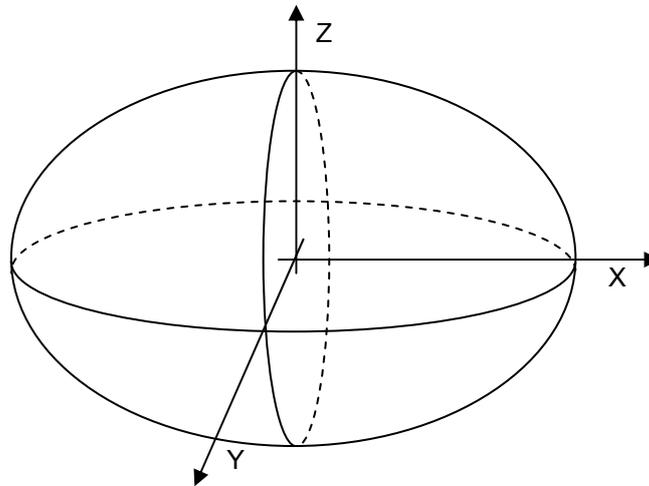
An dieser Stelle sollen die gebräuchlichsten Referenzsysteme der Geodäsie mit ihren wesentlichsten Eigenschaften kurz vorgestellt werden. Insbesondere soll auf deren Relevanz für Geo-Informationssysteme hingewiesen werden. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf die sehr umfangreiche Fachliteratur verwiesen u. A. [GROßMANN 1964], [JORDAN 1963], [MITTERMAYER 1998].

3.1.1 Kartesische Referenzsysteme

Geozentrische Koordinaten

Geozentrische Koordinatensysteme haben ihren Ursprung im Erdmittelpunkt. Die Z-Achse fällt mit der Rotationsachse der Erde zusammen, die X-Achse verläuft durch den

Nullmeridian, gemeinsam mit der Y-Achse wird ein kartesisches Links-System aufgespannt (siehe Figur 3-1).



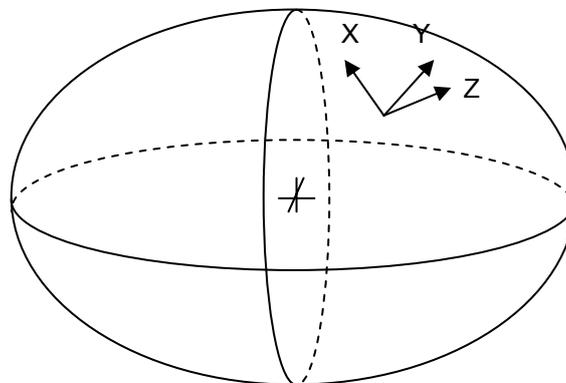
Figur 3-1: Geozentrisches Koordinatensystem

Geozentrische Koordinaten spielen in Geo-Informationssystemen nur mittelbar eine Rolle. Sie dienen in erster Linie der Berechnung von Satellitenbahnen und Datumstransformationen.

Das Datum der einzelnen Systeme ist durch Punkte definiert, welche fest mit Teilen der Erdoberfläche verbunden sind. Durch Effekte der Plattentektonik, Rotationsschwankungen des Erdkörpers usw. sind die Parameter von Datumstransformationen zwischen den Systemen keine konstanten Größen.

Topozentrische Koordinaten

Hierbei handelt es sich um lokale Koordinatensysteme, die ihren Ursprung an einem beliebigen Punkt der Erdoberfläche haben. Die z-Achse fällt im Allgemeinen mit der Gradienten des Erdschwerefeldes zusammen. Ein Vorteil dieser Systeme ist die uneingeschränkte Anwendbarkeit der euklidischen Geometrie. Da aber die Krümmung der Erdoberfläche bei deren Abbildung vernachlässigt wird, erstreckt sich der Anwendungsbereich dieser Systeme nur auf Gebiete mit einer maximalen Ausdehnung von ca. 10 km. Typische Anwendungen sind Baustellen- oder Gebäudekoordinatensysteme. In diesen Fällen findet man diesen Typ Koordinaten auch in Geo-Informationssystemen.



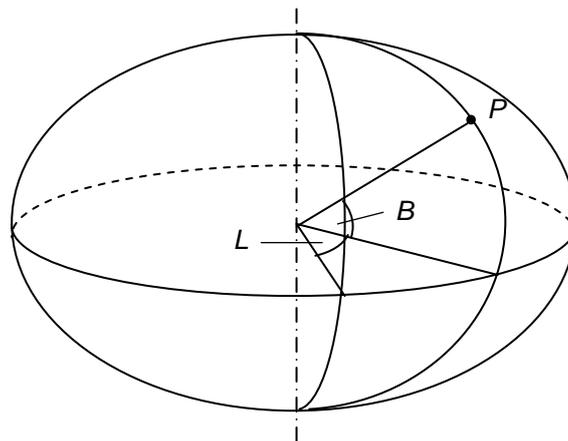
Figur 3-2: Topozentrisches Koordinatensystem

3.1.2 Lagesysteme mit gekrümmter Bezugsfläche

Globale Referenzsysteme sind im Allgemeinen so definiert, dass eine Koordinatenrichtung in etwa mit der Gradienten des Erdschwerefeldes zusammenfällt und eine zweite Komponente in etwa in Richtung des Pols zeigt. Hierbei muss zwischen der Lage- und der Höhenkomponente unterschieden werden. Während sich die Lagekomponenten auf eine rein geometrisch definierte Bezugsfläche beziehen sind Höhen auch physikalisch definiert.

Als Bezugsflächen für die Lage werden Kugeln oder Rotationsellipsoide verwendet, wobei Kugeln nur zur Definition lokal begrenzter Systeme dienen. Im Lauf der Geschichte wurden verschiedene Ellipsoide definiert. Von heutigem Interesse sind vor allem das WGS84, welches für die Bestimmung der Satellitenbahnen im GPS dient, und das GRS80 als Bezugsfläche für das europäische Referenzsystem ETRS89.

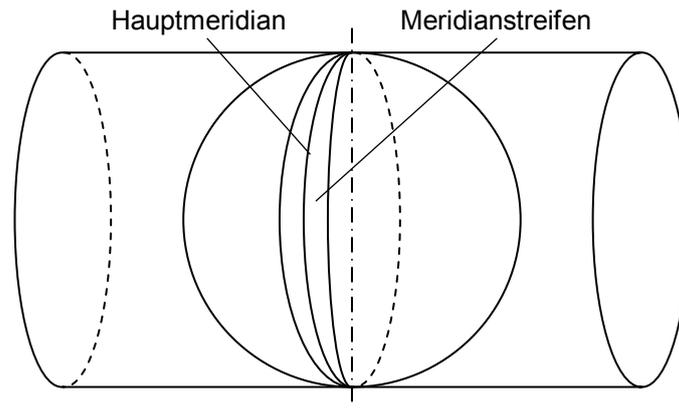
Eine Ellipsoidfläche kann als zweidimensionaler Raum betrachtet werden. Die Position eines Punktes kann demnach durch zwei Parameter bestimmt werden. Das gebräuchlichste Parametersystem ist das der geodätischen Länge und Breite (L, B). Die Länge ist der Winkel zwischen einem ausgezeichneten Nullmeridian und dem Meridian des Punktes P , die Breite ist der Winkel zwischen der Flächennormalen im Punkt P und der Äquatorialebene (siehe Figur 3-3).



Figur 3-3: Geodätische Länge und Breite

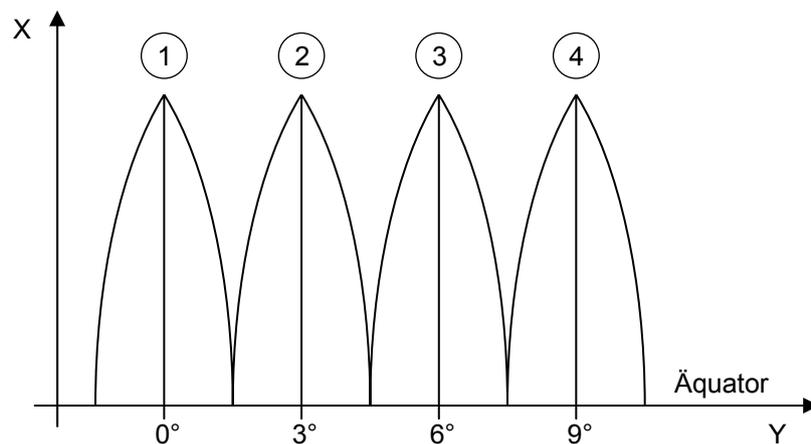
Vorteil eines solchen Referenzsystems ist, dass es die gesamte Erdoberfläche stetig abbildet, daher findet es bei vielen, insbesondere kleinmaßstäbigen, GIS-Applikationen Anwendung. Von Nachteil ist jedoch die Tatsache, dass es sich bei Länge und Breite nicht um isometrische Koordinaten handelt, das heißt, die Seiten eines differentiell kleinen Flächenelementes $dL \times dB$ sind im Allgemeinen nicht gleich lang. Die Berechnung von Richtungen und Strecken zwischen koordinatenmäßig bekannten Punkten auf der Ellipsoidfläche ist sehr kompliziert und für den Gebrauch in Geo-Informationssystemen wenig geeignet.

Den Nachteil der komplizierten Berechnungen im L, B -System kann man umgehen, indem man Stückweise die Erdoberfläche in die Ebene abbildet. Auf diese Weise lassen sich isometrische Koordinatensysteme definieren, für die in erster Näherung die euklidische Geometrie gilt. Bei der am häufigsten angewandten Methode wird ein Meridianstreifen beiderseits eines Hauptmeridians konform auf einen transversal liegenden Zylinder abgebildet (siehe Figur 3-4).



Figur 3-4: Abbildung auf Transversalen Zylinder

So entsteht eine Folge von Meridianstreifensystemen, welche zwar isometrisch sind, welche aber die Erdoberfläche nicht mehr stetig abbilden (siehe Figur 3-5). Am gebräuchlichsten sind das Gauß-Krüger- und das UTM-System. Das Gauß-Krüger-System unterteilt die Erdoberfläche in Meridianstreifen von 3° Breite und das UTM-System in Streifen mit einer Breite von 6° .



Figur 3-5: Meridianstreifensysteme

Da die Referenzfläche, das Rotationsellipsoid, doppelt gekrümmt ist, lässt sie sich nicht verzerrungsfrei in die Ebene abbilden, der Abbildungsmaßstab ist daher nicht konstant, sondern vielmehr eine Funktion des Ortes. Die Metrisierungsfunktion eines so definierten R^2 -Raumes ist in erster Näherung die der Euklidischen Metrik, ergänzt um einen Ortsabhängigen Maßstabsfaktor.

$$s_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \cdot m \quad (3.3)$$

Bei der Gauß-Krüger-Abbildung der Kugel ist der Maßstabsfaktor m eine Funktion des Radius R der Kugel und des Abstandes des Punktes vom Hauptmeridian y der Abbildung [MITTERMAYER 1998].

$$m_{GK} = \cosh\left(\frac{y}{R}\right) \quad (3.4)$$

Da bei der UTM-Abbildung breitere Meridianstreifen verwendet werden, wird hier der Maßstabsfaktor noch mit dem konstanten Wert 0,9996 multipliziert.

$$m_{UTM} = \cosh\left(\frac{y}{R}\right) \cdot 0,9996 \quad (3.5)$$

In der Nähe des Hauptmeridians betragen die Abbildungsverzerrungen der UTM-Abbildung also 40 cm/km. Bei kleinmaßstäbigen Anwendungen können diese Abweichungen von der Euklidischen Metrik vernachlässigt werden. Bei Anwendungen in größeren Maßstabsbereichen, wie zum Beispiel bei der Planung von Bauwerken, müssen sie jedoch berücksichtigt werden.

3.1.3 Systeme mit gekrümmter Bezugslinie

In 2D Geo-Informationssystemen werden punktförmige (0-dimensional), lineare (1-dimensional) und flächenhafte (2-dimensional) Objekte verwaltet. Zu den linearen Objekten zählen zum Beispiel Straßen- und Gleisachsen oder Versorgungsleitungen. Topologisch können lineare Objekte auf Graphen abgebildet werden. Die Kanten eines Graphen werden auf eindimensionale Punktmenge in einem R^2 abgebildet. Eine geschlossene eindimensionale Punktmenge, der eine Abbildungsfunktion der Form $f(x,y) = 0$ zugeordnet werden kann bezeichnet man als Trassierungselement. Typische Beispiele für Trassierungselemente sind die Gerade mit der Abbildungsfunktion

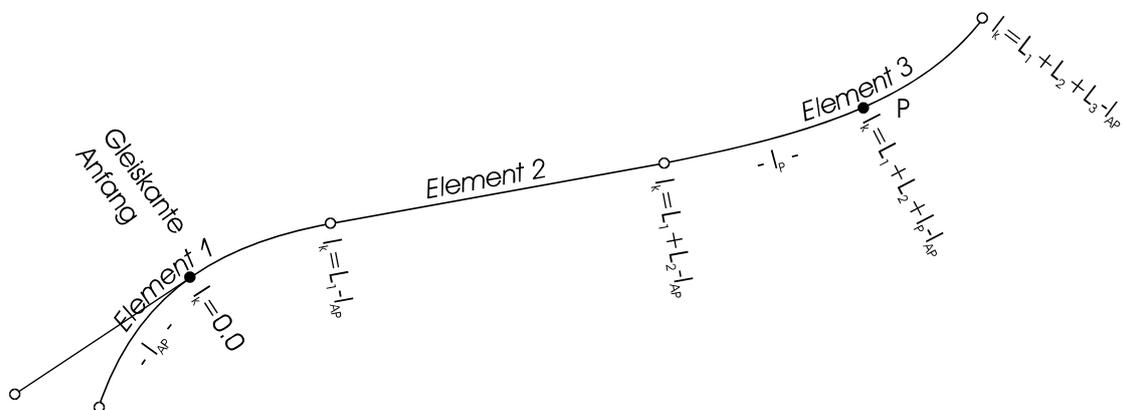
$$H_{Gerade} = \{\mathbf{x} \mid ax + by + c = 0\} \quad \text{bzw.} \quad H_{Gerade} = \{\mathbf{x} \mid \vec{n} \cdot \vec{x} - d = 0\}, \quad (3.6)$$

der Kreis mit der Abbildungsfunktion

$$H_{Kreis} = \{\mathbf{x} \mid (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - R^2 = 0\} \quad (3.7)$$

und die Klotoide deren Abbildungsfunktion nicht geschlossen darstellbar ist. Zwischen Kanten, Trassierungselementen, Funktionen und Parametern besteht im Allgemeinen eine mehrwertige Beziehung, wie sie in Abschnitt 2.4.1 beschrieben wurde. Eine stetige Sequenz von Trassierungselementen kann zu einer Trasse zusammengefasst werden, Straßentrasse, Gleistrasse, Kabeltrasse usw. In [GIELSDORF 1998] wird am Beispiel eines Gleisnetzes die Abbildung von Topologie und Geometrie linearer Objekte in Datenbanken ausführlich behandelt.

Eine Besonderheit linearer Objekte besteht darin, dass sie oft ein eigenes Raumbezugssystem besitzen, welches auch als natürliches Koordinatensystem einer Trasse angesprochen werden kann.



Figur 3-6: Natürliche Koordinaten einer Gleisachse [GIELSDORF 1998]

Den Koordinatenursprung bildet ein ausgezeichnete Punkt der Trasse. Der entlang der Trasse gemessene Abstand zum Koordinatenursprung l ist der Koordinatenwert innerhalb des natürlichen Koordinatensystems. Mit Hilfe der Komponente l lassen sich jedoch nur Punkte auf der Trasse eindeutig ansprechen. Sollen auch Punkte seitlich der Trasse eindeutig beschrieben werden, so ist die Einführung einer zweiten Komponente q erforderlich. Der Wert q entspricht dem orthogonalen Abstand eines beliebigen Punktes P zu Trasse. Zwischen den Koordinatenpaaren (x,y) und (l,q) bestehen, bis auf wenige Ausnahmen, eindeutige Abbildungsbeziehungen. Ausnahmen sind zum Beispiel Kreismittelpunkte. Die Herleitung der Abbildungsbeziehungen zwischen x,y -System und l,q -System findet man ebenfalls in [GIELSDORF 1998].

Trotz der der funktionalen Abhängigkeit von übergeordneten und natürlichen Koordinaten werden in Geo-Informationssystemen beide Koordinaten redundant gehalten [PFANNMÖLLER 2001], [DEMIREL 2002]. Dieser Umstand kann im Wesentlichen auf zwei Ursachen zurückgeführt werden. Zum einen erlauben derzeitige Geo-Informationssysteme nicht die Abbildung von $n:m$ -Beziehungen zwischen geometrischen und topologischen Objekten und zum anderen ist auch die Verwaltung der Abbildungsfunktionen nicht implementiert.

3.2 Transformationen

Unter einer Transformation soll hier die Abbildung eines metrischen Raumes R auf einen metrischen Raum R' verstanden werden. Die Abbildung wird durch eine Abbildungsfunktion $f(\mathbf{p})$ vermittelt, wobei \mathbf{p} der Vektor der Transformationsparameter ist.

$$f(\mathbf{p}) : R \rightarrow R'$$

Die Begriffe Abbildungsfunktion, Abbildungsvorschrift und Transformationsvorschrift sind, auf Transformationen angewendet, synonym. Als Beispiel sei die häufig in Geo-Informationssystemen angewandte 4-Parameter-Helmerttransformation angeführt.

$$f(\mathbf{x}'_0, \mathbf{A}) : \mathbf{x}' = \mathbf{x}'_0 + \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.8)$$

Hierin sind der Translationsvektor \mathbf{x}'_0 und die Rotationsmatrix \mathbf{A} die Transformationsparameter, \mathbf{x}' enthält die Koordinaten des Punktes im Raum R' und \mathbf{x} die Koordinaten desselben Punktes im Raum R .

Homöomorphismus

Eine Abbildung heißt *homöomorph*, wenn sowohl die Abbildung selbst, als auch die Umkehrabbildung stetig sind. [WIKIPEDIA 2003]

So ist die bereits erwähnte Helmert-Transformation $f: R(x,y) \rightarrow R'(x',y')$ homöomorph, wohingegen die Transformation vom geographischen Koordinatensystem in das Gauß-Krüger-Koordinatensystem $f: R(L,B) \rightarrow R'(Y,X)$ nur Bereichsweise homöomorph ist, da an den Rändern der Meridianstreifen Unstetigkeiten in der Abbildung auftreten.

Isometrie

Die *isometrische* Abbildung ist ein Spezialfall der homöomorphen Abbildung. Man sagt, eine bijektive Abbildung f sei eine *Isometrie* zwischen den beiden metrischen Räumen $R = (x, \rho)$ und $R' = (y, \rho')$, wenn $\rho(x, y) = \rho'(f(x), f(y))$, für alle x und y aus R . [WIKIPEDIA 2003]

Beispiel für eine isometrische Abbildung ist eine 2D 3-Parameter-Transformation,

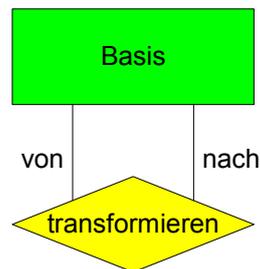
$$f(\mathbf{x}'_0, \mathbf{A}): \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

sie unterscheidet sich von der Helmert-Transformation aus (3.8) lediglich durch den nicht vorhandenen Maßstabsfaktor. Nicht isometrisch hingegen ist die Abbildung $f: R(L,B) \rightarrow R'(Y,X)$ von geographischen in Gauß-Krüger-Koordinaten.

Transformationen von einem Raum R^i in einen Raum R^{i-k} sind immer nichtinjektiv und somit auch nichtbijektiv. Betrachten wir den 3D Raum der geozentrischen Koordinaten $R(X,Y,Z)$ und den 2D Raum der geographischen Koordinaten $R'(L,B)$, so ist die Abbildung $f: R(X,Y,Z) \rightarrow R'(L,B)$ nicht injektiv, da zwar jeder Punkt $p(X,Y,Z)$ aus R auf das Ellipsoid abgelotet werden kann, aber andererseits jedem Punkt der Ellipsoidfläche $p'(L,B)$ unendlich viele Punkte im geozentrischen System zugeordnet sind, nämlich alle Punkte der Flächennormalen. Erst durch Hinzuziehung der ellipsoidischen Höhe h wird eine bijektive Abbildung zwischen beiden Räumen möglich.

3.2.1 Transformationen im Datenmodell eines GIS

Wie lassen sich nun Transformationen in einem Geo-Informationssystem abbilden? Im Sinne der Datenmodellierung stellt eine Transformation die Beziehung zwischen zwei Entitäten des Typs *Basis* dar. Im E-R-Modell erscheint diese Beziehung als rekursive Relation (Figur 3-7).



Figur 3-7: Transformation als rekursive Relation

Merkmale einer Transformation sind der Transformationsansatz und die Transformationsparameter. Die Merkmalswerte des Ansatzes als auch die der Parameter stehen nicht in einer 1:1-Beziehung zu den Transformationen, vielmehr handelt es bei *Transformation - Ansätze* um eine n:1-Beziehung und *Transformation - Parameter* um eine m:n-Beziehung. Aus diesem Grund sind *Ansätze* und *Parameter* keine Merkmalsklassen von *transformieren*, sondern bilden eigenständige Entitätentypen. Zwei Beispiele sollen diese Aussage veranschaulichen.

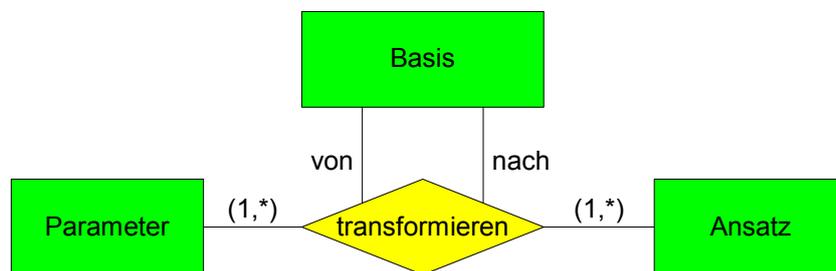
Beispiel 1: Transformationsansätze

In einem Geo-Informationssystem werden Rasterbilder von gescannten analogen Karten verwaltet. Die Geo-Referenzierung eines jeden Rasterbildes geschieht entweder durch eine 4-Parameter-Helmert-Transformation oder durch eine 6-Parameter-Affintransformation. Jedem Rasterbild ist genau ein Transformationsansatz zugeordnet, aber jeder Transformationsansatz gilt für mehr als ein Kartenblatt.

Beispiel 2: Transformationsparameter

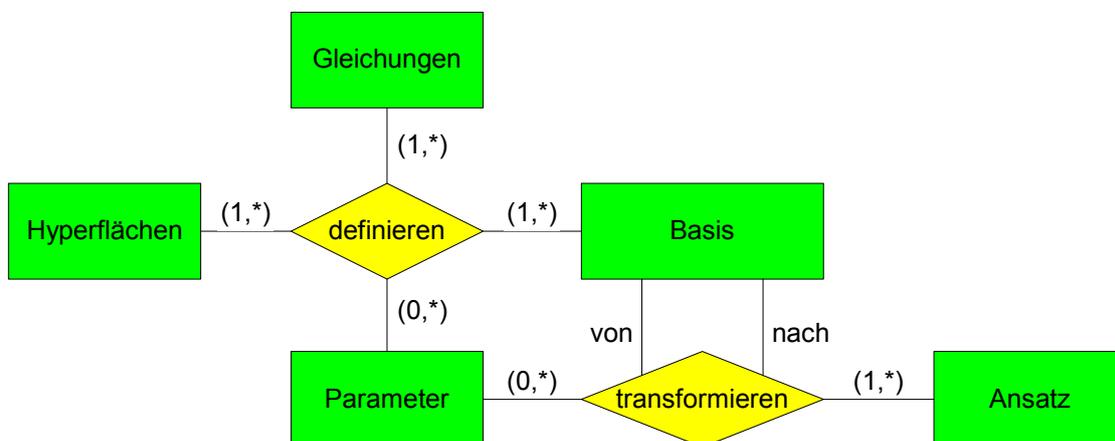
Auf einem Standpunkt werden zu verschiedenen Zeitpunkten mit einem Tachymeter Polarkoordinaten gemessen. Es sollen die Transformationen der einzelnen Polarsysteme in ein übergeordnetes kartesisches System abgebildet werden. Die Translationskomponenten dx und dy sowie die Rotationskomponenten der Lotabweichung ζ und η sind für alle Transformationen eines Standpunktes gleich. Die Translationskomponente dz und die Orientierung ω sind hingegen individuelle Merkmale jeder Transformation. Das bedeutet, Ein und derselbe Transformationsparameter kann Bestandteil verschiedener Transformationen sein. Andererseits steht eine Transformation im Allgemeinen zu mehr als einem Transformationsparameter in Beziehung.

Das E-R-Modell aus Figur 3-7 sieht nach der Erweiterung um die Entitätentypen *Parameter* und *Ansatz* folgendermaßen aus.



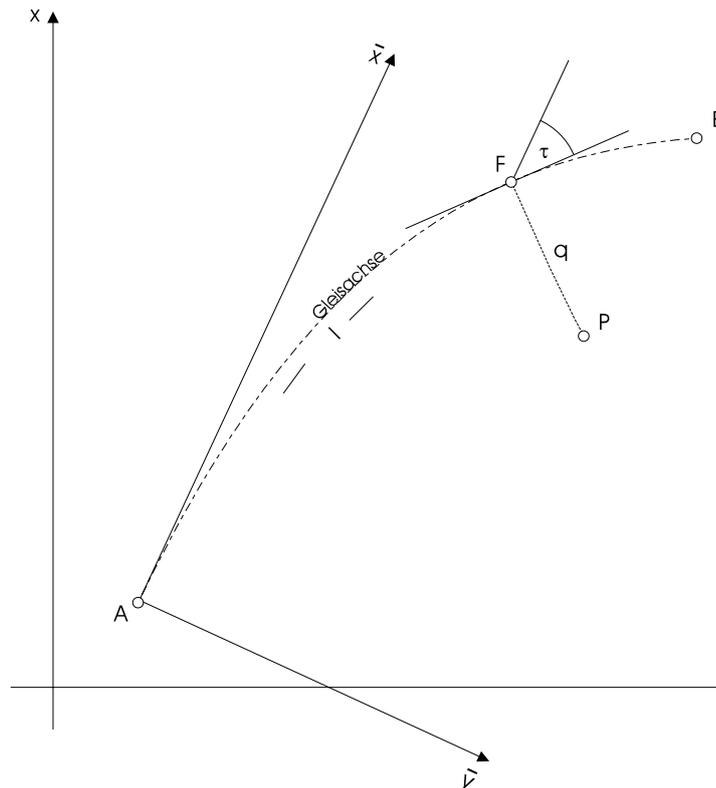
Figur 3-8: Transformationen im E-R-Modell

Nun sind die Entitätentypen *Basis* und *Parameter* bereits Bestandteile des E-R-Modells für die Beschreibung von Hyperflächen in n-dimensionalen Räumen aus Abschnitt 2.4.1. Die Vereinigung beider Modelle ist in Figur 3-9 dargestellt.



Figur 3-9: E-R-Modell für Hyperflächen und Transformationen

Es fällt ins Auge, dass Entitäten vom Typ *Parameter* sowohl zur Beschreibung von Hyperflächen als auch zur Vermittlung von Transformationen dienen. Es erhebt sich die Frage, ob nicht die Menge der Flächenbeschreibungsparameter zu jener der Transformationsparameter disjunkt ist. In diesem Fall könnten für beide auch verschiedene Entitätentypen eingeführt werden. Dass dem nicht so ist zeigt das Beispiel eines Trassierungselementes innerhalb einer Trasse. Die Koordinaten des Elementanfangspunktes dienen der Parametrisierung des Elementes im übergeordneten Koordinatensystem, gleichzeitig sind sie aber auch Translationsparameter der Transformation vom elementeigenen Koordinatensystem in das übergeordnete Koordinatensystem und zurück.



Figur 3-10: Beziehung zwischen übergeordnetem und Elementsystem [GIELSDORF 1998]

Ein Problem, welches bei der expliziten Abbildung von Transformationen im Datenmodell auftritt ist der Umstand, dass dieselbe Information bereits implizit durch die Speicherung von Parametern und Gleichungen identischer Hyperflächen in Bezug auf verschiedene Basen gegeben sein kann.

Als Beispiel betrachten wir drei Punkte, deren Koordinaten in zwei 2D Koordinatensystemen bekannt sind. Die Transformation zwischen System1 und System2 wird durch eine Helmert-Transformation vermittelt.

definieren			
Punkt	System	x	y
1	System1	3,87	5,94
2	System1	3,81	9,68
3	System1	5,14	3,79
1	System2	0,56	-1,21
2	System2	-1,98	-3,90
3	System2	1,25	1,24
...

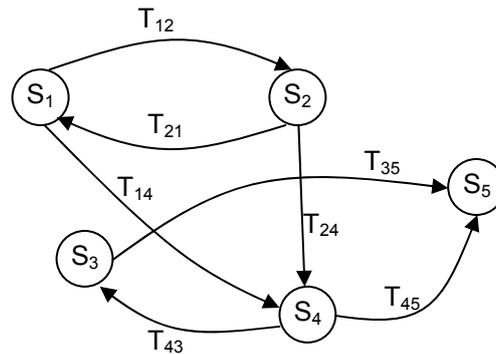
transformieren					
Ausgangssystem	Zielsystem	X_0	Y_0	a	o
System1	System2	7,558	0,283	-0,710528	0,707684
...

Für eine eindeutige Beschreibung der Transformationsvorschrift Zwischen System1 und System2 würden entweder die Koordinaten zweier identischer Punkte oder die

Transformationsparameter X_0 , Y_0 , a und o genügen. Die Speicherung beider Informationen hat einen redundanten Datenbestand zur Folge. Nun handelt es sich bei den Koordinaten der Punkte 1 bis 3 jedoch um Zufallsgrößen und bei den Transformationsparametern um das Ergebnis einer Ausgleichung. Die Transformationsparameter müssen also als Sicht, die Koordinaten der identischen Punkte hingegen als Primärdaten betrachtet werden.

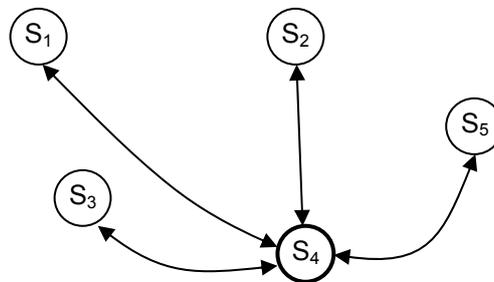
3.2.2 Transformationen als Graph

Koordinatensysteme und Transformationsbeziehungen lassen sich, wenn man die Systeme auf Knoten und die Transformationen auf Kanten abbildet, als gerichteter Graph darstellen.



Figur 3-11: Transformationsgraph

Der Transformationsgraph in Figur 3-11 ist nicht zyklensfrei, was in diesem Fall bedeutet, dass Transformationsvorschriften redundant gehalten werden. Eine redundanzfreie Abbildung von Transformationsvorschriften ist dann gegeben, wenn der dazugehörige Transformationsgraph zyklensfrei ist. Dies lässt sich am einfachsten erreichen, indem ein System als globales System ausgewählt wird, von und zu welchem alle Transformationsvorschriften definiert werden.



Figur 3-12: Zyklensfreier Transformationsgraph

Die Transformationsparameter sind zwar auch Zufallsgrößen, die jedoch, unter der Bedingung, dass sie einer verketteten Transformation entstammen, widerspruchsfrei sind. Nur bei Widerspruchsfreiheit ist eine redundanzfreie Speicherung der Transformationsparameter sinnvoll. Näheres hierzu findet man in [GIELSDORF 1998].

4 Datenverwaltung aus geodätischer Sicht

In der Praxis der Geo-Informationssysteme, insbesondere bei der Verwaltung von Geometriedaten, treffen oft zwei Denkwelten, die des Informatikers und die des Geodäten, aufeinander. In diesem Kapitel soll versucht werden die Widersprüche der beiden Sichtweisen zunächst herauszuarbeiten und diese anschließend aufzulösen.

4.1 Redundante Geometrie

Die Sicht des Informatikers

Die Denkweise des Informatikers stützt sich auf die Datenbanktheorie. Eine grundlegende Forderung dieser Theorie ist die nach der redundanzfreien oder zumindest redundanzarmen Speicherung von Daten. Diese Forderung wird mit mehreren Argumenten begründet. Zum einen wird bei redundanter Datenhaltung unnötig Speicherplatz benötigt zum anderen - und das ist das Hauptargument - treten so genannte Änderungsanomalien auf. Das heißt, bei der Änderung eines Datums müssen alle redundanten Daten ebenfalls geändert werden, da sonst Widersprüche im Datenbestand die Folge sind.

Die Sicht des Geodäten

Der Geodät hingegen hat zur Redundanz ein ganz anderes Verhältnis. Bei geodätischen Messungen wird Redundanz nicht vermieden sondern ausdrücklich gefordert. Auch für dieses Vorgehen bestehen gewichtige Gründe. Bei jeder Art von Beobachtung treten Fehler auf. In der Geodäsie werden diese Fehler in drei Hauptklassen unterteilt [REIBMANN 1980]:

Grobe Fehler entstehen durch Versehen des Beobachters. Sie sind wesentlich größer als das Messverfahren erwarten lässt. Beispiele sind Meterfehler bei der Streckenmessung, Punktverwechslungen, Zahlendreher usw.

Systematische Fehler verfälschen das Messergebnis in systematischer, oft gesetzmäßiger Weise. Beispiele sind Kalibrierungsfehler an Streckenmessgeräten, Restneigungsfehler bei Nivellieren oder Refraktion. Systematische Fehler lassen sich durch Berücksichtigung im mathematischen Modell der Auswertung ausschalten.

Zufällige Fehler haben ihre Ursache in der Unvollkommenheit der Messinstrumente und der menschlichen Sinne, sie sind der eigentliche Gegenstand der Ausgleichsrechnung.

Fehler jedweder Art lassen sich nur durch redundante Beobachtung nachweisen. Redundante Beobachtungen kontrollieren sich gegenseitig. Eine unkontrollierte Beobachtung ist für einen Geodäten wertlos.

Hätten wir es nur mit groben und systematischen Fehlern zu tun, so könnten auch geodätische Beobachtungen redundanzfrei gespeichert werden, nachdem grobe Fehler entfernt und systematische Fehler im mathematischen Modell berücksichtigt wurden. Doch das ist nicht der Fall. Größe und Verteilung der unvermeidlichen zufälligen Fehler lässt sich nur mit Hilfe redundanter Beobachtungen abschätzen.

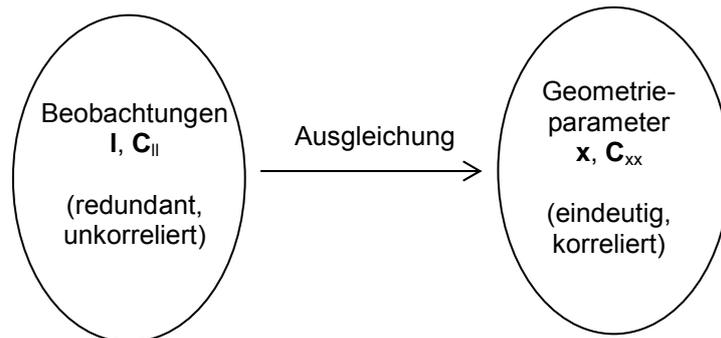
Die Bedeutung der Ausgleichsrechnung

Nun lassen sich aus redundanten Beobachtungen eindeutige Geometrieparameter ableiten. Das Werkzeug für diese Transformation ist die geodätische Ausgleichsrechnung. Sie bietet die Möglichkeit, mehrdeutige Beobachtungen auf eindeutige Geometrieparameter abzubilden. Die Eindeutigkeit führt man durch die Formulierung einer Randbedingung herbei,

welche lautet: Berechne genau die Lösung, bei der die Summe der gewichteten Verbesserungsquadrate minimal wird.

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min. \quad \text{mit } \mathbf{v} : \text{Vektor der Verbesserungen, } \mathbf{P} : \text{Gewichtsmatrix}$$

Im Ergebnis der Ausgleichung erhält man eindeutige Geometrieparameter und deren Kovarianzmatrix. Die in die Ausgleichung eingehenden Beobachtungen sind in den meisten Fällen stochastisch unabhängig, während die berechneten Geometrieparameter algebraisch korreliert sind.



Figur 4-1: Abbildung von Beobachtungen auf eindeutige Geometrieparameter

Allgemein kann jede Ausgleichung als Abbildung eines Punktes im Beobachtungsraum auf einen Punkt im Lösungsraum betrachtet werden,

$$p(l_1, l_2, \dots, l_n) \in R^n \quad \rightarrow \quad p'(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m \quad (4.1)$$

wobei die Dimension des Lösungsraumes m kleiner ist als die des Beobachtungsraumes n . Die Abbildung $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{x}$ ist daher zwar surjektiv, nicht aber injektiv und somit auch nicht bijektiv also nicht umkehrbar. Das einfachste Beispiel einer Ausgleichung ist das arithmetische Mittel x zweier Beobachtungen l_1 und l_2 . Die Abbildungsfunktion

$$x = \frac{1}{2}(l_1 + l_2) \quad (4.2)$$

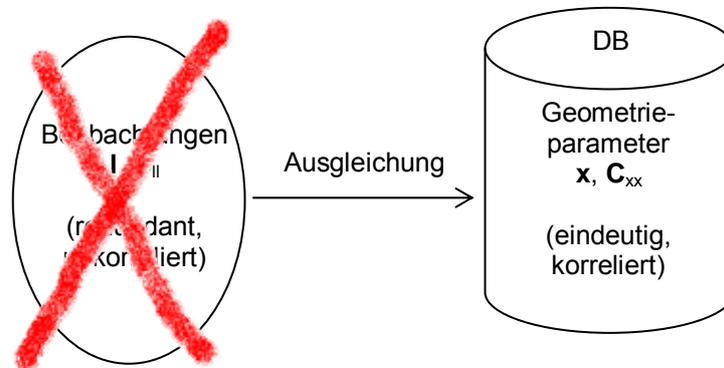
vermittelt die surjektive Abbildung des zweidimensionalen Beobachtungsraumes, der durch die Achsen l_1 und l_2 aufgespannt wird, auf den eindimensionalen Lösungsraum x .

$$p(l_1, l_2) \in R^2 \quad \rightarrow \quad p'(x) \in R^1 \quad (4.3)$$

Der Funktionsgraph dieser Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem mit den Achsen l_1 , l_2 und x ist eine geneigte Ebene. Es ist leicht zu erkennen, dass jedem Punkt $p(l_1, l_2)$ genau ein Punkt $p'(x)$ zugeordnet werden kann, aber jedem Punkt p' der x -Achse unendlich viele Punkte p der l_1, l_2 -Ebene zugeordnet sind, nämlich alle Punkte einer Schnittgeraden S zwischen den Ebenen $\frac{1}{2}(l_1 + l_2) - x = 0$ und $x - x_i = 0$.

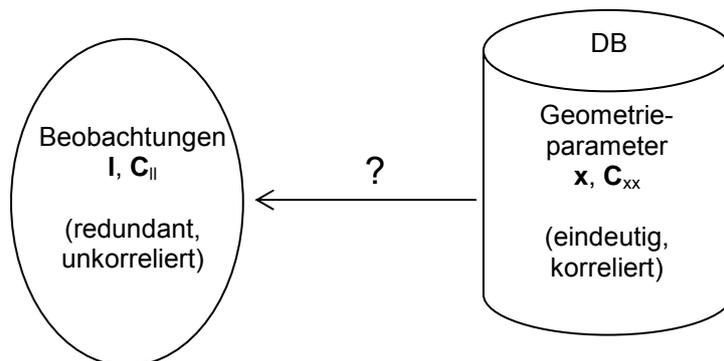
$$S = \left\{ \mathbf{x} \mid \frac{1}{2}(l_1 + l_2) - x = 0 \right\} \cap \left\{ \mathbf{x} \mid x - x_i = 0 \right\} \quad (4.4)$$

Nach Denkungsart des Informatikers ist es dennoch ausreichend, nur die Ergebnisse der Ausgleichung in der Datenbank zu persistentieren. Auf die Beobachtungen kann man getrost verzichten, da sie sowohl untereinander als auch zu den ausgeglichenen Geometrieparametern redundant sind. Schließlich lassen sich alle Relativmaße wie Strecken oder Richtungen aus den eindeutigen Geometrieparametern herleiten.



Figur 4-2: Persistenzierung der ausgeglichenen Geometrieparameter

Bei dieser Vorgehensweise wird aber übersehen, dass die Abbildung der Beobachtungen auf die Geometrieparameter nicht bijektiv ist. Aus den in der Datenbank vorhandenen Parametern lassen sich zwar „ausgeglichenere“ Beobachtungen berechnen nicht aber die originären Messwerte.



Figur 4-3: Nicht umkehrbare Abbildung von Beobachtungen auf Geometrieparameter

Aus dieser Tatsache ergeben sich zwei negative Konsequenzen. Erstens lassen sich Messung und Auswertung nicht mehr rekonstruieren, was insbesondere eine nachträgliche Fehlerlokalisierung erschwert. Zweitens ergeben sich große Probleme bei der Fortführung der Geometriedaten, insbesondere dann, wenn Geometrie verdichtet werden soll oder wenn neue genauere Beobachtungen eingeführt werden.

Synthese

Worin besteht nun im Kern der Unterschied dieser beiden Sichtweisen? In der Datenbanktheorie geht man davon aus, dass es sich bei den zu speichernden Daten um rein deterministische Größen handelt. Der in der Datenbank abzubildende Realitätsausschnitt lässt sich mathematisch eindeutig beschreiben, die darin enthaltenen numerischen Attribute sind Konstanten. In der Geodäsie hingegen rechnet man mit Zufallsgrößen. Jedes Abbild der Realität im menschlichen Bewusstsein oder auf einem beliebigen Datenträger beruht auf der Beobachtung eben dieser Realität. Beobachtungen aber sind immer mit zufälligen Fehlern behaftet und daher, im Sinne der mathematischen Statistik, als Zufallsgrößen anzusprechen. Demzufolge wird auch jedes Abbild der Realität durch Zufallsgrößen beschrieben.

Wie lassen sich nun diese beiden widersprüchlichen Anschauungen vereinen? In der Datenbanktheorie gibt es den Begriff der *Sicht* oder des *View*. Eine Sicht ist immer das Ergebnis von mengenwertigen oder numerischen Operationen auf den Primärdaten der Datenbank. Sie wird erzeugt, um einem Anwender einen bestimmten Ausschnitt des Datenbestandes zu präsentieren bzw. Daten in geeigneter Weise zu kombinieren. Typische Beispiele sind *Selektion*, *Projektion* oder *Join* als mengenwertige und *Summation* oder *Mittelwert* als numerische Operatoren für die Generierung von Sichten in relationalen Datenbanken.

Eine Synthese der Sichtweise des Informatikers und der des Geodäten lässt sich nun erreichen, indem man die Begriffe *Primärdaten*, *Operation* und *Sicht* verallgemeinert. Die Primärdaten sind im Sinne des Geodäten die Beobachtungen. Durch eine Operation, und zwar die Ausgleichung, wird eine Sicht erzeugt. Die eindeutige Geometrie ist somit eine Sicht auf die ursprünglichen Beobachtungen.

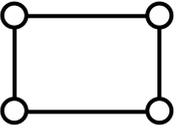
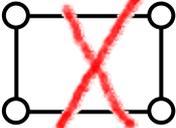
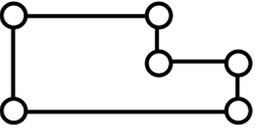
Der Forderung des Informatikers nach Redundanzfreiheit der Primärdaten wird dabei insofern entsprochen, als dass die „geodätische Redundanz“ der Beobachtungen eine Information trägt, nämlich die der stochastischen Eigenschaften der Beobachtungen. Ein Weglassen von Beobachtungen würde zu einem Informationsverlust führen. Die „geodätische Redundanz“ ist demnach mit der „Datenbankredundanz“ nicht vergleichbar, da sich die eine auf Zufallsgrößen und die andere auf Konstanten bezieht.

Die Definition der ausgeglichenen Geometrieparameter als Sicht auf die primären Beobachtungsdaten bedeutet nicht notwendig, dass auch nur die Primärdaten persistentiert werden sollen. Im Allgemeinen werden Sichten in Datenbanksystemen „on-the-fly“, also zur Laufzeit erzeugt und nicht im Sekundärspeicher der Datenbank gehalten, da die zu ihrer Erzeugung erforderlichen Operationen quasi in Echtzeit ausgeführt werden können. Bei umfangreichen Ausgleichungsproblemen stellt sich die Situation freilich anders dar. Mitunter sind recht aufwendige Auswerteprozesse erforderlich, um die Sicht „ausgeglichenen Parameter“ zu erzeugen. Die Operation Ausgleichung ist daher eher als lange Transaktion zu verstehen, die außerhalb des eigentlichen DBMS abläuft. Daher ist es notwendig, auch die Sicht im Sekundärspeicher des DBMS zu halten. Im Unterschied zu den Primärdaten können aber keine direkten Änderungen an den ausgeglichenen Geometrieparametern vorgenommen werden.

4.2 Integration und Fortführung von Geometriedaten

Bei der Datenpflege in Geo-Informationssystemen steht man immer wieder vor der Aufgabe heterogene Datenquellen in ein System zu integrieren oder den vorhandenen Datenbestand durch Einfügen neuer Informationen zu aktualisieren. Beide Aufgaben sind im Wesentlichen äquivalent. Die Fortführung von Daten lässt sich auf die drei Grundoperationen *Einfügen*, *Löschen* und *Ändern* zurückführen. Diese Operationen sind in einem Geo-Informationssystem auf Sachdaten, Topologie und Geometrie anzuwenden. Tabelle 4-1 zeigt Beispiele für solche Anwendungsfälle.

Tabelle 4-1: Fortführungsoperationen in einem GIS

	Einfügen	Löschen	Ändern
Sachdaten	Eigentümer hinzufügen	Eigentümer entfernen	Nutzungsart ändern
Topologie	Haus einfügen 	Haus löschen 	Anbau nachführen 
Geometrie	Punkt einfügen	Punkt löschen	Punkt verschieben

Bei allen Operationen ist dabei die referentielle Integrität der Daten zu gewährleisten. Sachdatenobjekte verweisen auf Topologieobjekte und diese wiederum auf Geometrieobjekte. DBMS bieten im Allgemeinen die Möglichkeit, solche Integritätsbeziehungen zu formulieren und organisieren automatische Löscho- bzw. Aktualisierungsweitergaben.

Von besonderem Interesse ist der Fall bei dem nur die Geometrie geändert wird, die Topologie aber unverändert bleibt. Bei GIS in denen die Geometrie ausschließlich durch Punktkoordinaten parametrisiert wird bedeutet das eine Verschiebung von Punkten, ohne dass sich Topologie oder Sachdaten ändern. Für das Eintreten dieses Falles gibt es im Wesentlichen zwei Ursachen:

1. Verbesserung der Punktgenauigkeit (Positional Accuracy Improvement PAI). Sehr häufig erfolgt die Ersterfassung von Geometriedaten für GIS durch die Digitalisierung vorhandener Kartenwerke. Die so erzeugten Geometriedaten weisen eine Genauigkeit auf, welche jener der zugrunde liegenden Karte entspricht. Diese geometrische Qualität ist jedoch für viele Anwendungen nicht ausreichend. Durch genauere Erfassungsmethoden sollen Punkte neu bestimmt und die dadurch entstehenden Koordinaten im GIS nachgeführt werden.
2. Integration unterschiedlicher Geo-Datenbestände. Dieser Fall ist dann gegeben, wenn separat erfasste Geo-Datenbestände vereinigt werden sollen, die eine gemeinsame Schnittmenge von topologischen Objekten aufweisen. Typisches Beispiel hierfür wären die Geo-Datenbestände eines Gas- und eines Stromnetzbetreibers. Beide dokumentieren neben den jeweiligen Leitungen auch den Gebäudebestand. Legt man beide übereinander wird man in den meisten Fällen voneinander abweichende Geometrieinformationen feststellen.

Eine Fortführung der Geometrie bei invarianter Topologie bereitet jedoch oft erhebliche Probleme. Diese Probleme sind darauf zurückzuführen, dass viele GIS zwei wesentliche Voraussetzungen für diese Art der Fortführung nicht erfüllen. Auf diese beiden Voraussetzungen soll im Folgenden näher eingegangen werden.

4.2.1 Trennung von Geometrie und Topologie

Um die Invarianz der Topologie gegen Transformationen der Geometrie in einem GIS zu gewährleisten, muss die Topologie bereits im Datenmodell des GIS berücksichtigt sein. Es müssen Objektklassen existieren, die topologische Objekte wie Knoten oder Kante abbilden, was aber häufig nicht der Fall ist.

Oft existieren nur die Objektklassen „Punkt“ und „Linie“ wobei die dazugehörigen Koordinaten zugleich den Objektidentifikator bilden. Die Existenz eines Objektes ist aber

unmittelbar an seinen Identifikator gebunden. Eine Veränderung des Objektidentifikators ist gleichbedeutend mit dem Untergang des Objektes. Eine Punktverschiebung kommt also in einem solchen Modell dem Löschen eines Topologieobjektes gleich, womit auch das Referenzobjekt der dazugehörigen Sachdaten verschwindet. Der oben beschriebene Fortführungsfall der Geometrieänderung bei invarianter Topologie ist mit einem solchen Datenmodell nicht realisierbar.

4.2.2 Modellierung der lokalen Nachbarschaft

Doch selbst wenn Geometrie und Topologie im Datenmodell separat modelliert sind kann eine Verschiebung von Punkten zu erheblichen Problemen führen. Grund dafür ist der Umstand, dass die Koordinaten von Punkten im Allgemeinen keine unabhängigen Zufallsgrößen sind sondern vielmehr Korrelationen aufweisen.

Zu Veranschaulichung betrachten wir den folgenden Fall. Gegeben sei eine Menge von Punkten, denen jeweils zwei Koordinatenpaare aus zwei unterschiedlichen Datensätzen zugeordnet sind. Die Koordinaten innerhalb jedes Datensatzes seien untereinander korreliert und die entsprechende Kovarianzmatrix sei bekannt.

geg.: \mathbf{x}_1 : Koordinatenvektor aus Datensatz 1

\mathbf{C}_{xx1} : Kovarianzmatrix zu \mathbf{x}_1

\mathbf{x}_2 : Koordinatenvektor aus Datensatz 2

\mathbf{C}_{xx2} : Kovarianzmatrix zu \mathbf{x}_2

Gesucht sei ein eindeutiger Koordinatensatz $\bar{\mathbf{x}}$. Die Problemstellung führt zu einem Ausgleichungsproblem, bei dem die Koordinaten der Einzeldatensätze verbessert werden. Die Verbesserungsgleichungen lauten dann

$$\mathbf{1} + \mathbf{v} = \bar{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Die ausgeglichenen Koordinaten erhält man mit

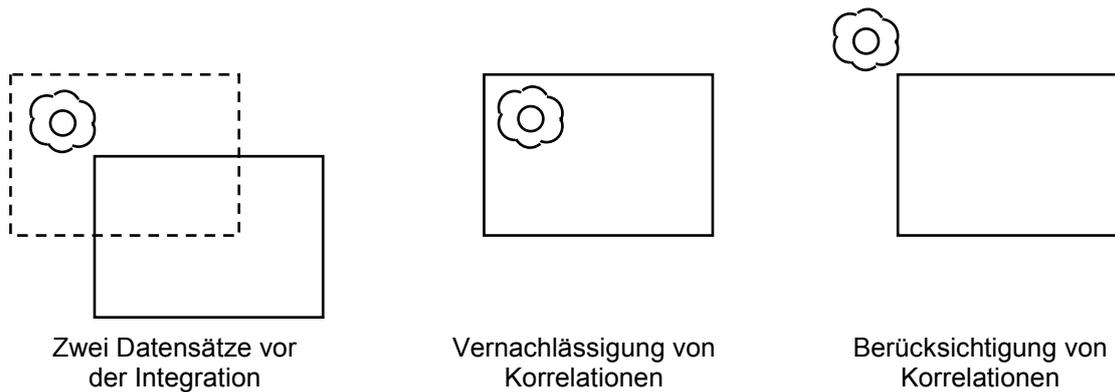
$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{C}_{xx1}^{-1} + \mathbf{C}_{xx2}^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{C}_{xx1}^{-1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_{xx2}^{-1} \mathbf{x}_2) \quad (4.6)$$

Nur bei unkorrelierten Koordinaten sind die Kovarianzmatrizen \mathbf{C}_{xx1} und \mathbf{C}_{xx2} lediglich auf der Hauptdiagonalen besetzt. In diesem Fall lässt sich aus (4.6) die Formel für das gewichtete Mittel zweier Koordinaten herleiten.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \sigma_{x2}^2 + x_2 \sigma_{x1}^2}{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2}{p_1 + p_2} \quad (4.7)$$

Im allgemeinen Fall, also bei korrelierten Beobachtungen, ist diese Vereinfachung nicht möglich.

Welche Konsequenzen hat diese Erkenntnis nun für die Fortführung? Die Verschiebung eines Punktes hat bei unkorrelierten Koordinaten keinerlei Auswirkungen in der Umgebung des betreffenden Punktes. Bei korrelierten Koordinaten hingegen führt die Verschiebung eines Punktes zur gleichzeitigen Verschiebung von Punkten in der Nachbarschaft. Häufig wird bei der Fortführung oder Datenintegration dieser Umstand vernachlässigt. Eine solche Vernachlässigung kann aber zu fehlerhaften Ergebnissen führen, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.



Figur 4-4: Integration von Datensätzen ohne und mit Berücksichtigung der Korrelationen

Im Beispiel in Figur 4-4 sind die Koordinaten der Gebäudeeckpunkte in zwei Datensätzen enthalten, während die Koordinaten des Baumes nur in einem Datensatz vorhanden sind. Bei der Integration beider Datensätze ohne Berücksichtigung der Korrelationen bleibt der Baum stehen, während das Gebäude verschoben wird. Das Ergebnis ist ein Baum, der anscheinend im Haus steht. Bei Berücksichtigung der Korrelationen wird der Baum mit dem Gebäude verschoben.

Um die Korrelationen der Koordinaten im Integrations- bzw. Fortführungsprozess zu berücksichtigen bestehen im Wesentlichen drei Möglichkeiten:

1. Speicherung der ursprünglichen Beobachtungen als Primärdaten
2. Speichern der Kovarianzmatrix
3. Verwendung von Modellannahmen

Auf diese drei Möglichkeiten soll im Folgenden etwas näher eingegangen werden.

1. Möglichkeit: Speicherung der ursprünglichen Beobachtungen als Primärdaten

Die Ursache für die Korrelation der Koordinaten ist darin zu sehen, dass Koordinaten in vielen Fällen das Ergebnis von Berechnungen sind, die Relativmaße zwischen Punkten verwenden, also Richtungen und Strecken. Wenn man nun für die Berechnung der Ausgeglichenen Koordinaten \bar{x} nicht die Koordinatensätze x_1 und x_2 verwendet, die ja auch bereits Berechnungsergebnisse darstellen, sondern in die Ausgleichung anstatt dessen die ursprünglichen Beobachtungen I_1 und I_2 einfließen lässt, so tritt das Problem von korrelierten Koordinaten erst gar nicht auf.

Voraussetzung hierfür ist ein Vorgehen wie es im Abschnitt 4.1 beschrieben wurde. Die Beobachtungen werden als Primärdaten betrachtet, während Koordinaten nur eine Sicht auf die Beobachtungen sind. Praktikabel erscheint ein solches Modell zum Beispiel im Liegenschaftskataster, da hier alle Beobachtungswerte im Zahlenwerk dokumentiert sind. Es entspräche der Praxis im analogen Kataster, bei dem auch nur das Zahlenwerk, also die ursprünglichen Beobachtungen am öffentlichen Glauben teilnehmen. Aber auch Leitungsbetreiber verfügen häufig über Einmessungen von Versorgungsleitungen. Auch hier wäre zu überlegen, ob die darin enthaltenen Messwerte nicht als Primärdaten gespeichert werden sollten zumal sie für eine sequentielle geometrische Konstruktion in einem CAD-System ohnehin erhoben werden müssen.

2. Möglichkeit: Speichern der Kovarianzmatrix

Diese Möglichkeit ist eher theoretischer Natur denn wirklich praxisrelevant. Wollte man die vollständige Kovarianzmatrix jedes Koordinatensatzes permanent verwalten und nachführen,

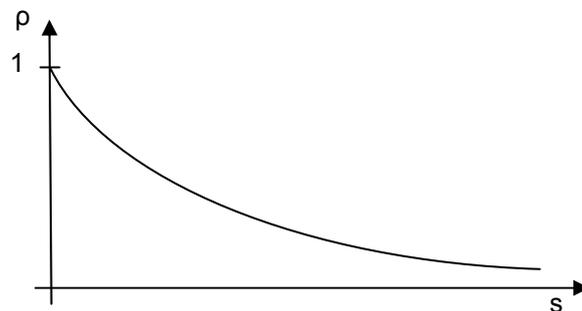
würde das einen erheblichen Aufwand bedeuten. Für einen Datensatz mit nur 1000 Punkten müssten bereits ca. 2 Mio. Kovarianzen verwaltet werden.

3. Möglichkeit: Verwendung von Modellannahmen

Oft stehen die ursprünglichen Beobachtungen, die zu einem Koordinatensatz geführt haben nicht mehr zur Verfügung. Ein typischer Fall sind Koordinaten, die einer Kartendigitalisierung entstammen. Hier kann nicht mehr rekonstruiert werden welche Beobachtungen der Kartierung zugrunde lagen bzw. mit welchen Mitteln und in welcher Reihenfolge kartiert wurde. Dennoch zeigt die praktische Arbeit mit solcherart Koordinaten, dass sie untereinander korreliert sind. Sollen solche Datensätze mit anderen integriert werden, was zum Beispiel dann der Fall ist, wenn neu aufgenommene Punkte in einen bestehenden Datenbestand aufgenommen werden, so sollten die Korrelationen zwischen den digitalisierten Koordinaten berücksichtigt werden.

Eine häufig getroffene Modellannahme geht davon aus, dass der Betrag des Korrelationskoeffizienten zweier Koordinatenwerte eine Funktion der Strecke zwischen den beteiligten Punkten ist, wobei der Betrag des Korrelationskoeffizienten ρ_{ij} bei einer Strecke von $s_{ij} = 0$ den Wert 1 hat und mit zunehmender Strecke gegen 0 konvergiert. Beispiele für solche Korrelationsfunktionen findet man u.a. in [WOLF 1981]

$$\rho_{ij} = \frac{1}{1 + \frac{s_0}{s_{ij}}} \quad \text{oder} \quad \rho_{ij} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s_0}{s_{ij}}\right)^2} \quad (4.8)$$



Figur 4-5: Graph einer Korrelationsfunktion

Die Elemente der Kovarianzmatrix lassen sich dann als Funktionen der Korrelationskoeffizienten und der Standardabweichungen der Koordinaten berechnen.

$$\text{cov}(i, j) = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \quad (4.9)$$

Die Berücksichtigung aller Punktrelationen würde auch hier zu extrem großen Kovarianzmatrizen führen, die in der Praxis nur schwer beherrschbar sind. Um dieses Problem einzudämmen kann eine Grenzstrecke s_g eingeführt werden, ab der alle Korrelationskoeffizienten zu null gesetzt werden. Auf diese Weise erhält man dünn besetzte Kovarianzmatrizen die wesentlich leichter zu handhaben sind.

Andere Verfahren nutzen Pseudobeobachtungen zwischen benachbarten Punkten um die Nachbarschaftsbeziehungen funktional zu modellieren. Als Beobachtungstypen dienen Strecken- oder Koordinatenunterschiedsbeobachtungen. Die topologische Information über die Nachbarschaft von Punkten kann z.B. durch eine Delaunay-Triangulation gewonnen werden. Näheres dazu findet man u.a. in [GIELSDORF 1997].

In den meisten Fällen wird nicht die alleinige Anwendung einer der vorgestellten Methoden zum gewünschten Ergebnis führen. Vielmehr verspricht die Kombination verschiedener Ansätze ein optimales Ergebnis sowohl in fachlicher als auch in wirtschaftlicher Hinsicht. Ein Beispiel einer solchen Kombination wird im Kapitel 6.1 gegeben.

5 Standards für die Modellierung von Geometriedaten

Für die Modellierung und den Austausch von geometrischen und topologischen Daten existieren verschiedene Standards. Die zwei wichtigsten unter ihnen sind Die Geography Markup Language GML des Open GIS Consortium und die Industry Foundation Classes der International Association for Interoperability. Diese beiden Standards sollen in diesem Kapitel miteinander verglichen werden. Als Vergleichskriterien sollen die folgenden Fragen dienen:

1. Unterscheidet das Datenmodell zwischen Geometrie und Topologie?
2. Können n:m-Beziehungen zwischen geometrischen und topologischen Objekten abgebildet werden?
3. Wie erfolgt die Parametrisierung von Geometrieobjekten?
4. Wie erfolgt die Abbildung der Zeit?
5. Können Zufallsgrößen mit der dazugehörigen Stochastik abgebildet werden?
6. Ist eine Persistentierung von Beobachtungen vorgesehen?

5.1 Geography Markup Language GML

Das Open GIS Consortium, Inc (OGC) ist eine internationale Vereinigung von mehr als 250 Firmen, staatlichen Behörden und Universitäten, welche gemeinsam die Entwicklung einheitlicher Standards für den Austausch von Geo-Daten betreiben. OpenGIS-Standards unterstützen interoperable Lösungen im Internet, im Mobilfunk, bei location-based-services sowie andere Informationstechnologien. Die Standards sollen Entwickler in die Lage versetzen, komplexe räumliche Informationen für verschiedene Anwendungen verfügbar und nutzbar zu machen. [www.opengis.org]

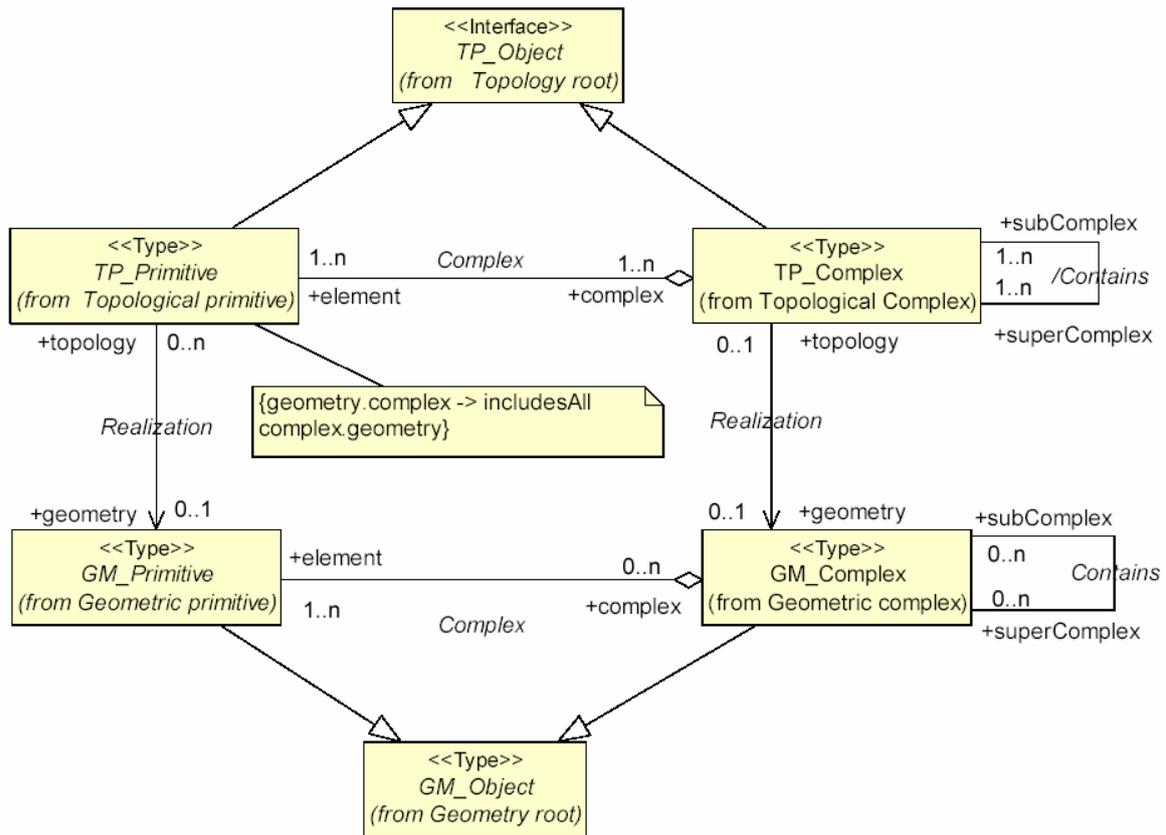
Die Geography Markup Language (GML) ist ein, auf der extensible markup language XML basierender, Standard für die Modellierung, den Austausch und die Speicherung von geographischen Informationen. Grundlage für die Modellierung ist der OpenGIS-Standard „Abstract Specification Topic 1: Feature Geometry“, welcher mit der ISO-Norm 19107 „Spatial Schema“ identisch ist.

zu 1.: Unterscheidung von Geometrie und Topologie

Das Datenmodell unterscheidet klar zwischen geometrischen und topologischen Objekten.

zu 2.: n:m-Beziehungen zwischen Geometrie und Topologie

Das Datenmodell unterstützt 1:n-Beziehungen zwischen geometrischen und topologischen Primitiven (siehe Figur 5-1). Ein Geometrisches Objekt ist in der Lage mehrere topologische Objekte zu „tragen“, welche in ihrer Existenz von eben diesem geometrischen Objekt abhängig sind. Topologische Primitive können zu topologischen Komplexen zusammengefasst werden. Zwischen Topologischen Primitiven und topologischen Komplexen besteht eine n:m-Beziehung. Auf diese Weise lassen sich n:m-Beziehungen zwischen geometrischen Primitiven und topologischen Komplexen abbilden, wie es zum Beispiel bei Trassierungselementen und Gleisabschnitten innerhalb eines Gleisnetzes erforderlich ist. Näheres hierzu findet man in [GIELSDORF 1998].

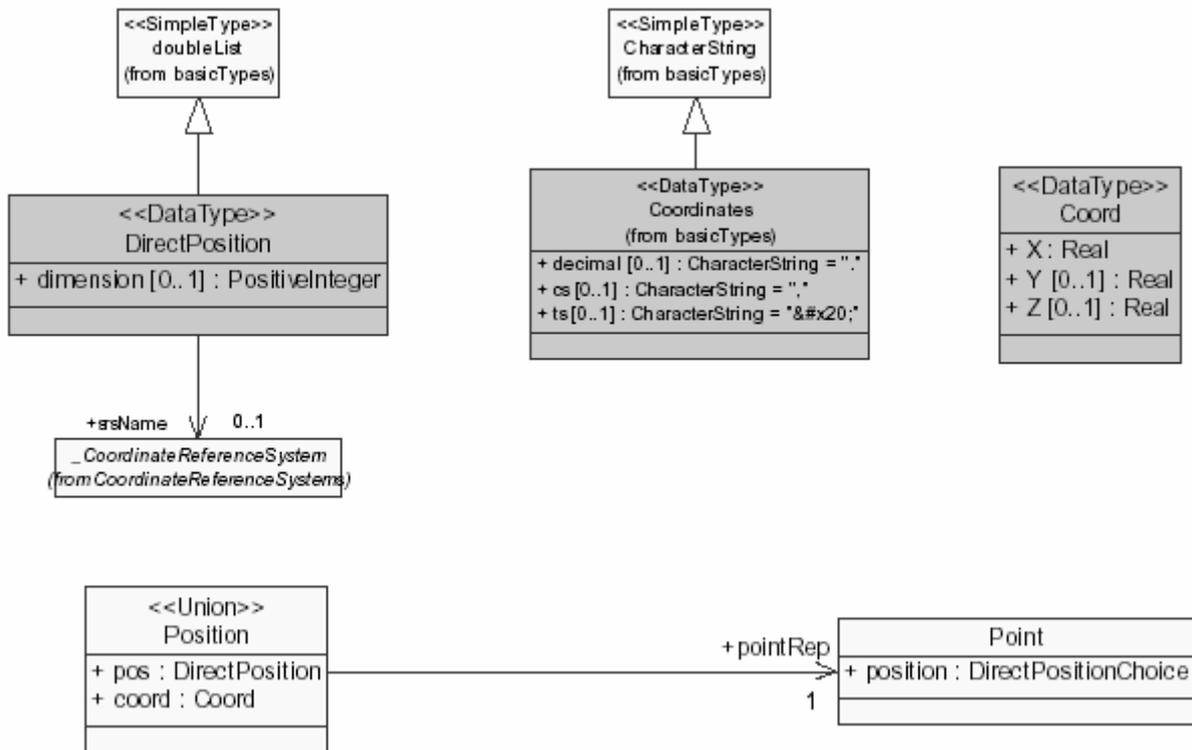


Figur 5-1: Beziehungen von Geometrie und Topologie im OGC-Modell [OGC 2001]

zu 3.: Parametrisierung von Geometrieobjekten

Das Datenmodell bildet null-, ein- und zweidimensionale Hyperflächen, also Punkte, Kurven und Flächen ab. Die Parametrisierung erfolgt fast ausschließlich in der Dimension 0 durch Koordinaten des übergeordneten Systems. Kurven und Flächen werden durch vordefinierte Interpolationsvorschriften erzeugt. Die Randbeschreibung eines k -dimensionalen Objektes erfolgt durch $(k-1)$ -dimensionale Objekte, so werden Kurven durch Punkte und Flächen durch Kurven umrandet. Offene Punktmenge können nicht abgebildet werden, daher ist die topologische Definition des Randes einer Hyperfläche durch Schnitt mit anderen Hyperflächen gleicher Dimension nicht möglich.

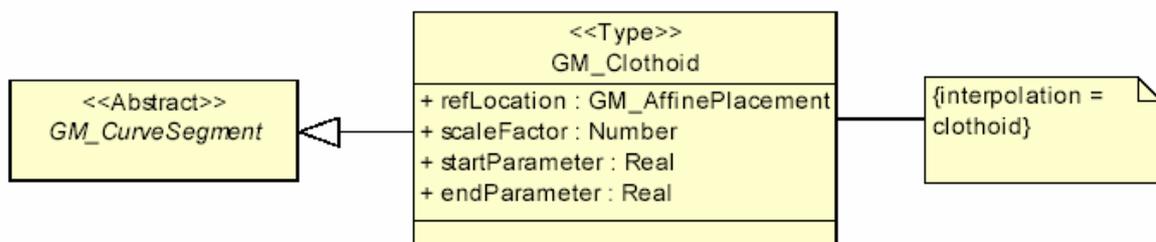
Beispiel Punkt: Die Parametrisierung von Punkten ist durch Punktkoordinaten realisiert, wobei jeder Punkt über genau ein Attribut vom Typ *DirectPosition* verfügt. Dieses Attribut wiederum bezieht sich auf genau ein Koordinatensystem. Das bedeutet, dass in diesem Modell die Koordinaten ein charakteristisches Merkmal des Objektes *Punkt* sind und nicht eines der Beziehung *Punkt-Referenzsystem* (Figur 5-2). Es ist daher nicht möglich, mehrere Koordinatentupel für ein und denselben Punkt, die sich auf verschiedene Koordinatensysteme beziehen zu speichern.



Figur 5-2: Parametrisierung von Punkten [OGC 2003-1]

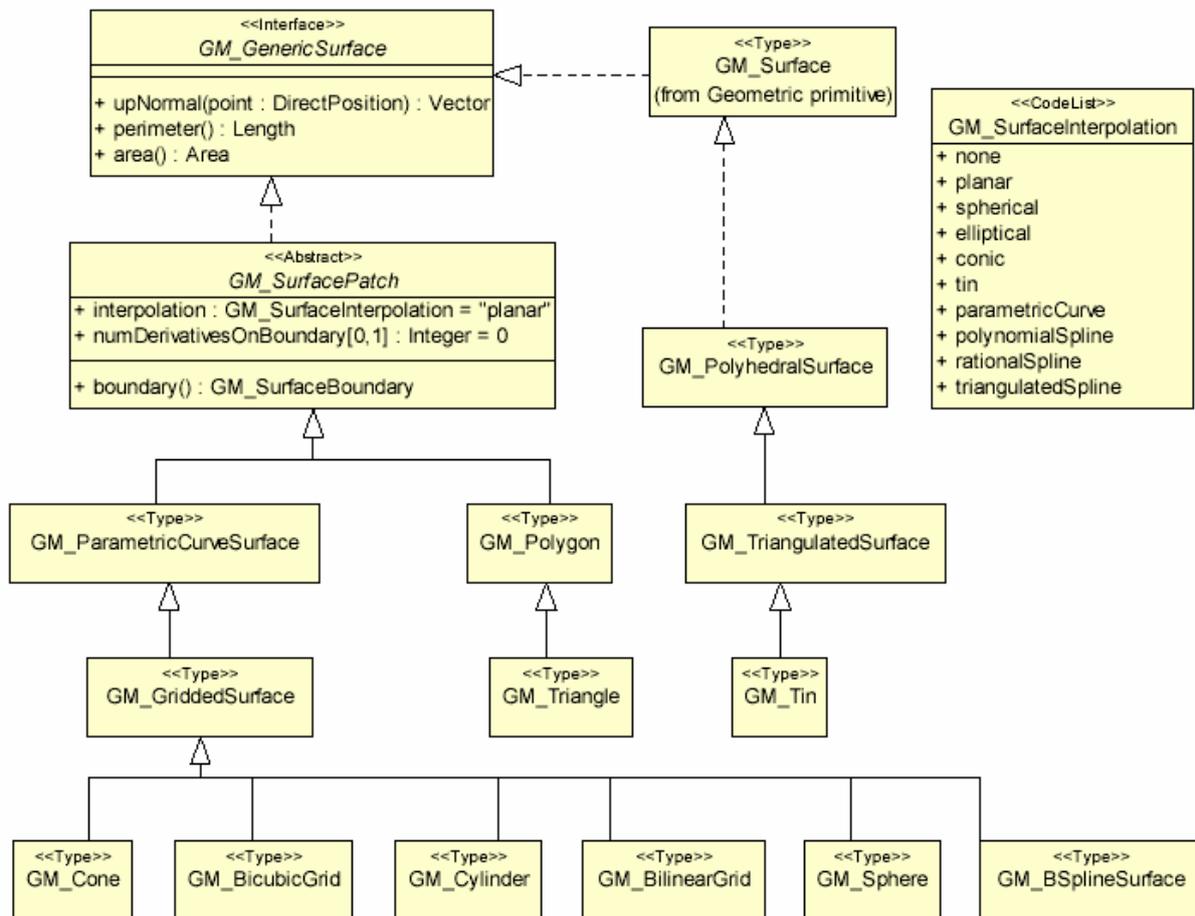
Beispiel Kreisbogen: Ein Kreisbogen wird durch drei Punkte beschrieben, wobei zwei dieser Punkte den Rand, also Anfang und Ende beschreiben. Eine solche Beschreibung setzt voraus, dass sich der Parameterraum des Kreisbogens isometrisch auf den Koordinatenraum des übergeordneten Systems abbilden lässt. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Der Entwurf einer Gleistrasse kann zum Beispiel einen Bogenradius von 1000m vorsehen, die Operation `radius()` eines Objektes vom Typ `GM_Arc` würde bei einer UTM-Abbildung in der Nähe des Hauptmeridians aber einen Wert von 999.6m zurückgeben.

Beispiel Klotoide: Eine Klotoide wird im Parameterraum des Elementes durch den Klotoidenparameter A , die Anfangslänge und die Endlänge parametrisiert. Die Transformation in den übergeordneten Koordinatenraum erfolgt über eine Affintransformation, deren Parameter in einem Objekt vom Typ `GM_AffinePlacement` enthalten sind.



Figur 5-3: Klotoide im OGC-Datenmodell [OGC 2001]

Beispiel Ebene: Eine Ebene wird durch die Punkte des Randpolygons beschrieben. Enthält das Randpolygon mehr als drei Punkte ist die Parametrisierung redundant, was dazu führt, dass die Verschiebung einzelner Punkte zu Änderungsanomalien führen kann. Eigenschaften wie Rechtwinkeligkeit, Parallelität oder Komplanarität können nicht durch die Parametrisierung abgebildet werden. Figur 5-4 zeigt die Abbildung von Flächen im Objektklassenmodell der OGC.



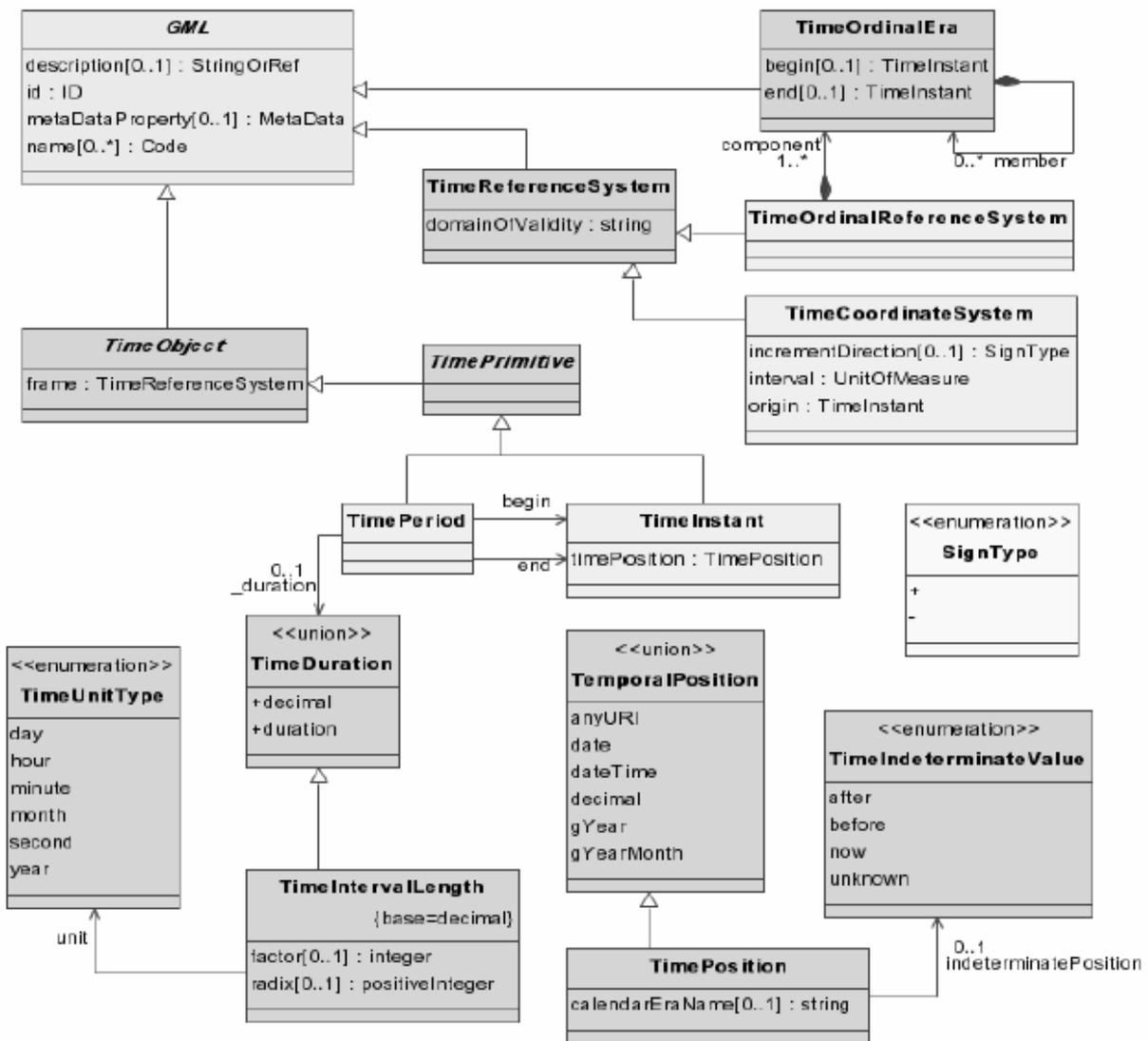
Figur 5-4: Flächen im OGC Datenmodell [OGC 2001]

zu 4.: Abbildung der Zeit

In der GML-Spezifikation der OGC findet man die folgende Aussage:

The conceptual model underlying the representation of temporal objects in GML constitutes a profile of the conceptual schema described in ISO/DIS 19108 [i]; however, topological types and temporal feature relationships are not included in the current versions of the temporal schemas. [OGC 2003-1]

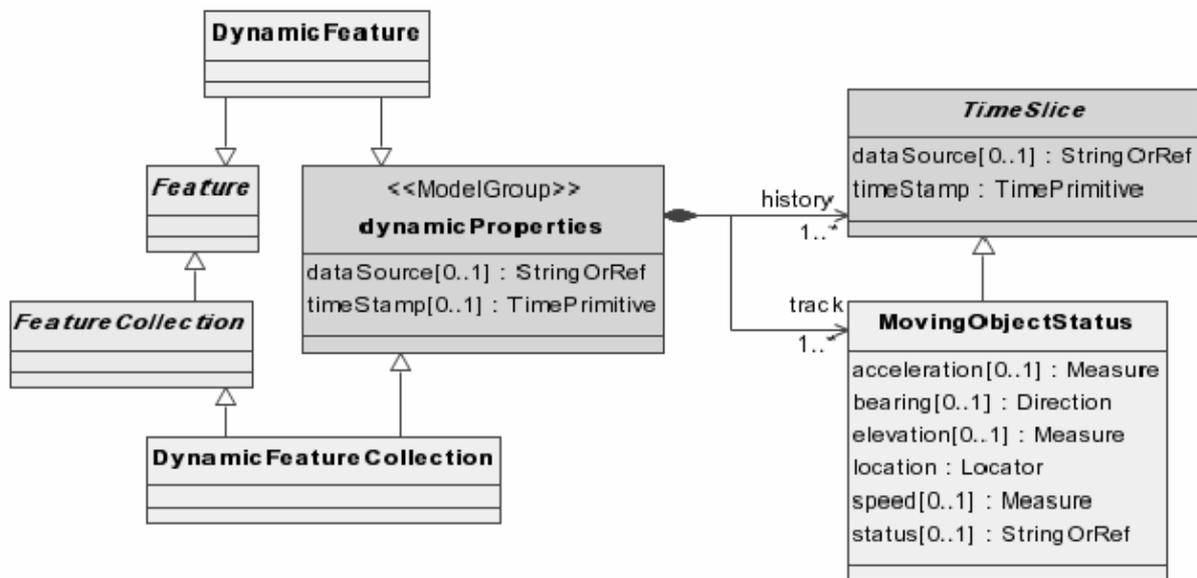
Figur 5-5 zeigt das konzeptuelle Schema für die Abbildung von temporalen Informationen in GML. Es können Zeitpunkte und Zeitintervalle auf verschiedenen Zeitskalen definiert werden. Eine Historisierung von Objekten in der Realzeit und der Systemzeit ist damit möglich.



Figur 5-5: Die Zeit im OGC Datenmodell [OGC 2003-1]

Die dynamischen Eigenschaften von Objekten werden durch die Kombination der Attribute *timeStamp*, *acceleration*, *bearing*, *elevation*, *location* und *speed* ausgedrückt. Mit diesen Attributen lässt sich Punkten in einem dreidimensionalen Raum ein Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor zuordnen.

Offen bleibt die Frage, wie die Bewegung von dreidimensionalen Objekten im Raum beschrieben werden kann. Wie bereits im Abschnitt 2.5.5 gezeigt wurde, sind die Koordinaten der Punkte eines bewegten Objektes invariant gegen das objekteneigene Koordinatensystem. Die Bewegung eines 3D Objektes in einem 3D Raum lässt sich daher durch Darstellung von Transformationsparametern als Funktionen der Zeit beschreiben. Einer solchen Darstellung steht nun aber die Parametrisierung von Geometrieobjekten im OGC Datenmodell entgegen. Hier erfolgt die Parametrisierung hauptsächlich durch Koordinaten im übergeordneten System. Eine solche Art der Geometrieparametrisierung ist für die Abbildung von Bewegten 3D Objekten ungeeignet.

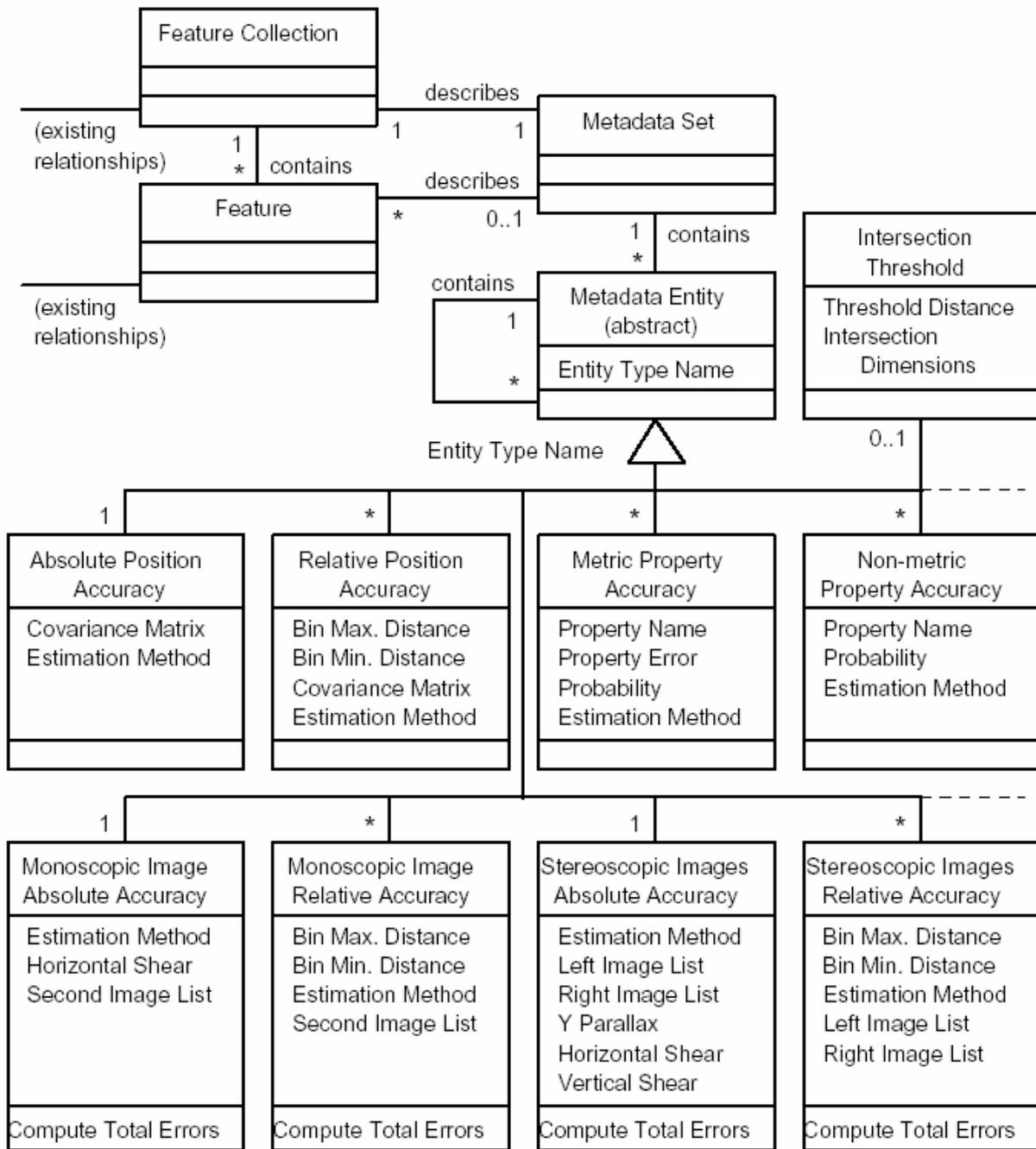


Figur 5-6: Dynamische Eigenschaften im OGC Datenmodell [OGC 2003-1]

zu 5.: Zufallsgrößen und Stochastik

Figur 5-7 zeigt die in der GML verfügbaren Klassen für die Angabe von Genauigkeitsinformationen. Für Koordinaten lassen sich vollständige Kovarianzmatrizen bezogen auf ein absolutes oder relatives Datum abbilden. Darüber hinaus kann jenem Element vom Typ ‚rationale Zahl‘ eine Varianz zuordnen. Jeder Varianz ist außerdem die Schätzmethode zugeordnet, mit Hilfe derer sie entstand.

Kovarianzen beliebiger Zufallsgrößen lassen sich nicht abbilden. Dies wäre wünschenswert um abgeleitete Messwerte übergeben zu können.



Figur 5-7: Klassendiagramm der Genauigkeit [OGC 1999]

Zu 6.: Persistenzierung von Beobachtungen

Das Datenmodell für Beobachtungen wird in [OGC 2003-2] spezifiziert. Das dort vorgeschlagene Modell ist sehr komplex und soll an dieser stelle nicht näher behandelt werden. entscheidend ist, dass sich alle gängigen Beobachtungstypen abbilden und geeignet aggregieren lassen.

5.2 Industry Foundation Classes IFC

Die International Association for Interoperability (IAI) ist eine internationale Verbindung von zurzeit ca. 650 Organisationen aus den Bereichen Bauwesen und Facility Management, die sich die Standardisierung des Informationsaustauschs in der Bauindustrie zum Ziel gesetzt haben. Der IAI gehören Architekten, Bauingenieure, Immobilienbesitzer, Facility Manager,

Baufirmen, Softwareentwickler, Datenanbieter, Behörden und Universitäten an. [www.iai-international.org/iai_international/]

Einer der wichtigsten durch die IAI publizierten Standards sind die Industry Foundation Classes IFC. Im Rahmen der IFC werden alle am Bauwerk existierenden Bauteile als Objekte definiert und in Programmen, die diesen Standard unterstützen, auch wieder als solche interpretiert. Gegenüber dem konventionellen Austausch reiner 2D- und 3D-Strichdarstellungen stellen die IFC dem Anwender ein programmübergreifendes, "intelligentes" Datenmodell zur Verfügung.

Die IFC sind ein objektorientierter Standard, der die Summe aller Informationen zu Planungsobjekten (wie Bauelementen, Räumen, Ausstattungen) beschreibt. Damit werden neben der Geometrie auch alle weiteren Informationen, wie Kosten, Heizlasten, referenzierte Dokumente, etc. zwischen den Softwareprogrammen der Planungsbeteiligten ausgetauscht. [www.iai-ev.de]

Die Beschreibung des Datenmodells in [IAI 2003] erfolgt in der Beschreibungssprache ‚Express‘.

zu 1.: Unterscheidung von Geometrie und Topologie

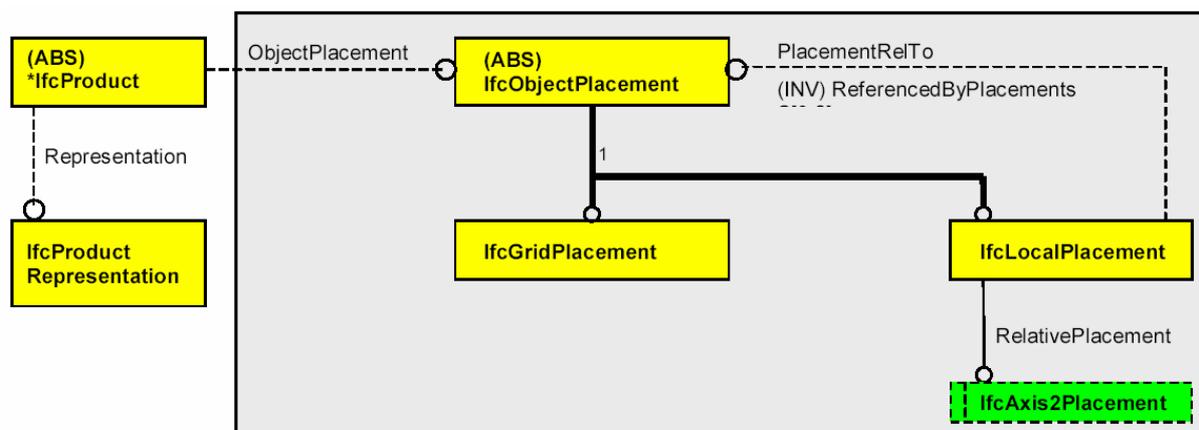
Das Datenmodell unterscheidet klar zwischen geometrischen und topologischen Objekten.

zu 2.: n:m-Beziehungen zwischen Geometrie und Topologie

Zwischen geometrischen und topologischen Objekten bestehen 1:n-Beziehungen, das heißt, ein geometrisches Objekt kann mehrere topologische Objekte „tragen“. Auch in diesem Modell lassen sich topologische Primitive zu Komplexen (z.B. `IfcConnectedFaceSet`) zusammenfassen, so dass n:m-Beziehungen zwischen geometrischen Objekten und topologischen Komplexen abbildbar sind.

zu 3.: Parametrisierung von Geometrieobjekten

Das Datenmodell der IFC ist sehr stark darauf ausgerichtet, 3D-Objekte wie Wände, Stützen oder andere Bauteile abzubilden. Die Parametrisierung erfolgt dabei zunächst im lokalen Koordinatensystem des betreffenden Objektes. Für die absolute Positionierung ist ein Attribut vom Typ `IfcObjectPlacement` zuständig, welches die Position des Objektes im globalen Koordinatensystem oder in Bezug auf ein anderes Objekt definiert (siehe Figur 5-8).



Figur 5-8: Objektpositionierung im IFC-Modell [IAI 2003]

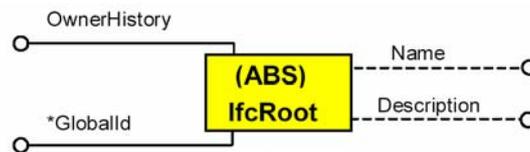
Jede Entität vom Typ `IfcProduct` verweist auf eine Entität vom Typ `IfcObjectPlacement`. Der Transformationsgraph (vgl. 3.2.2) muss dabei azyklisch sein.

Die Parametrisierung lässt offene Punktmengen zu. So wird eine Ebene durch einen Punkt und einen Normalenvektor beschrieben, eine Gerade durch einen Punkt und einen Richtungsvektor. Bei der Verwendung topologischer Objekte wie `IfcFaceSurface`, die z.B. auf Ebenen referenzieren ergibt sich die Geometrie von Kanten und Knoten aus dem Schnitt dieser Ebenen. Dennoch schreibt das Datenmodell für jede Kante und jeden Knoten eine eigene Parametrisierung vor, was zu Redundanz in der Geometriebeschreibung führt.

Durch das Konzept der lokalen Parametrisierung mit anschließender Transformation werden bestimmte geometrische Bedingungen nicht implizit durch eine globale Parametrisierung erzwungen. So könnte zum Beispiel eine Wand über dem Boden schweben bzw. in den Boden eindringen. Um solche Inkonsistenzen zu verhindern, stellt IFC so genannte Constraint-Klassen bereit, die entsprechende geometrische Bedingungen definieren.

zu 4.: Abbildung der Zeit

Historisierung ist ein integraler Bestandteil der IFC. Jedes Objekt verfügt über ein Attribut vom Typ `IfcOwnerHistory`, welches bereits in der Wurzel des Klassendiagramms deklariert ist (siehe Figur 5-9).



Figur 5-9: Historie als Eigenschaft der Root-Klasse [IAI 2003]

Das Attribut `IfcOwnerHistory` definiert alle für die Historie relevanten Informationen. Dazu zählen Besitzer, besitzende Transaktion, Status, Art der letzten Änderung, Datum der letzten Änderung, Ausführender der letzten Änderung, letzte ändernde Transaktion und das Entstehungsdatum. Die gespeicherte Historie bezieht sich auf die Systemzeit.

Abläufe in der Realzeit werden in Prozessen Abgebildet. IFC bietet die Möglichkeit, Prozesse zu schachteln und so Prozessgraphen aufzubauen. Jeder Prozess besitzt eine eigene Zeitskala. Prozesse dienen dazu, Fertigungsabläufe oder Abläufe im Facility Management zu Planen und zu steuern.

Zeitvariante Geometrieattribute sind nicht vorgesehen. Bewegungen von Objekten lassen sich nicht darstellen, die Geometrie ist daher als statisch anzusehen.

zu 5.: Zufallsgrößen und Stochastik

Das IFC Datenmodell ist deterministisch, es ist nicht in der Lage, Zufallsgrößen abzubilden. Lediglich ein Toleranzmaß, das Attribut `Precision` der Objektklasse `IfcGeometricRepresentationContext`, steuert die Identitätsfeststellung bei geometrischen Objekten.

Zu 6.: Persistenzierung von Beobachtungen

Spezielle Objektklassen für die Verwaltung von Beobachtungen sind im IFC-Modell nicht enthalten. Das Datenmodell bietet innerhalb des Schemas `IfcMeasureResource` aber die Möglichkeit Relativmaße abzubilden. Die in diesem Schema enthaltenen Klassen sind in erster Linie dazu gedacht, physikalische Eigenschaften von realen Objekten zu Quantifizieren.

Theoretisch wäre es möglich topologische Objekte wie Kante oder Kantenzug mit geometrischen Quantitäten zu assoziieren, jedoch erscheint ein solches Vorgehen recht umständlich. Darüber hinaus wäre es nicht möglich die so entstandenen Beobachtungen mit stochastischen Eigenschaften zu versehen.

5.3 Vergleich GML - IFC

Die beiden betrachteten Standards widerspiegeln die Sicht unterschiedlicher Berufsgruppen und fokussieren daher auf unterschiedliche Anwenderbedürfnisse. Während GML auf die Bedürfnisse von GIS-Anwendern zugeschnitten ist trägt IFC den Bedürfnissen der Bauindustrie Rechnung. Unterschiede zeigen sich vor allem in der Behandlung der dritten Dimension, in der Geometrieparametrisierung und im Umgang mit Zufallsgrößen.

In GIS Anwendungen spielt die dritte Dimension in den meisten Fällen nur als digitales Geländemodell eine Rolle, eine Ausnahme bilden 3D Stadtmodelle. Im Gegensatz dazu ist eine Gebäudemodellierung ohne dritte Dimension nur schwer vorstellbar, die Konsistenzbedingungen, die ein geometrisches Gebäudemodell erfüllen muss sind wesentlich komplexer als bei einem GIS.

Die topographischen Gegenstände, die in einem GIS verwaltet werden sind mehr oder weniger Unikate, jedes besitzt seine individuelle Geometrie. Aus diesem Grund ist es nahe liegend die geometrische Parametrisierung dieser Objekte in einem einheitlichen übergeordneten Koordinatensystem vorzunehmen. Anders bei Gebäudemodellen, ein Gebäude besteht häufig aus einer großen Zahl von Normteilen wie Stützen, Wände usw. Hier ist es sinnvoll, zunächst die Geometrie dieser Teile lokal zu Parametrisieren und diese anschließend durch Transformation im übergeordneten System zu positionieren.

GIS bilden eine reale Situation ab, deren Abbild in der Datenbank auf Grundlage von Beobachtungen gewonnen wurde. Weiterhin liegt die Erhebung von Geo-Basisdaten für GIS hauptsächlich in der Hand von Geodäten. Diese beiden Faktoren sind sicher dafür verantwortlich, dass der Abbildung von Beobachtungen und stochastischen Eigenschaften in GML wesentlich mehr Aufmerksamkeit gewidmet wurde als in IFC. Der IFC-Standard dient hauptsächlich dazu eine geplante Soll-Geometrie zu definieren und auszutauschen. Die Betrachtungsweise ist daher hier deterministisch.

Die Modellierung von dynamischem Verhalten von Geometrieobjekten ist in beiden Standards nur eingeschränkt möglich. Diese Möglichkeit wäre aber durchaus wünschenswert, man denke nur an Fahrpläne von Zügen oder Prozesssteuerungen im Bauablauf. Bei zukünftigen Erweiterungen der vorhandenen Datenmodelle bzw. beim Entwurf von neuen erscheint es daher angezeigt, sich der Problematik von vornherein in einer vierdimensionalen Sichtweise, sowohl für die Topologie als auch für die Geometrie, zu nähern.

6 Beispiele für die Verwaltung von Geometrieinformation

6.1 Amtliches Liegenschaftskataster

Die Aufgabe der Fortführung oder Aktualisierung besteht bei fast jeder Datenbank. Neue Daten müssen erfasst, nicht mehr aktuelle gelöscht werden, Datenobjekte ändern ihre Attributwerte. Für Sachdaten ist das Problem der Fortführung seit langem gelöst, Schwierigkeiten treten aber immer wieder bei Geometriedaten auf. Die Ursache dieser Schwierigkeiten ist in den unterschiedlichen Auffassungen von Informatikern und Geodäten zu suchen. Diese Probleme sollen hier am Beispiel des Liegenschaftskatasters näher untersucht werden.

Um die Mitte des 19. Jahrhunderts wurde in den meisten deutschen Staaten das Liegenschaftskataster eingeführt. Es dient der Sicherung des Eigentumsrechts an Grund und Boden und kann als eines der ältesten, wenn auch analogen, Geo-Informationssysteme betrachtet werden. Das Interessante an diesem analogen GIS ist der Umstand, dass es seit seiner Einführung einer permanenten Fortführung unterlag, es liegen hier also 150 Jahre Erfahrung in der Fortführung von Geometriedaten vor. Das Liegenschaftskataster gliedert sich in die Bestandteile Zahlenwerk, Kartenwerk und Buchwerk. Die Beobachtungsdaten sind im Zahlenwerk auf Fortführungsrissen dokumentiert. Das Kartenwerk stellt in gewisser Weise eine Sicht auf das Zahlenwerk dar. Es stellt die topologische Information vieler Risse in übersichtlicher Form dar, die Geometrie ist eindeutig und entstammt der rechnerischen oder graphischen Auswertung der Beobachtungen. Das Zahlenwerk erlaubt die Rekonstruktion der Änderungen von Geometrie und Topologie in der Zeit, während das Kartenwerk nur den aktuellen Zustand abbildet. Das Buchwerk enthält die Sachdaten zu den einzelnen Flurstücken.

Mit dem Aufkommen von Datenbanken und computergestützten Geo-Informationssystemen wurde damit begonnen, das analoge Liegenschaftskataster in digitale Form zu überführen. In einem ersten Schritt wurden separate Datenbestände für Sach- und Geometriedaten angelegt. Die Erfassung des Buchwerkes im automatisierten Liegenschaftsbuch ALB war dabei relativ problemlos, da relationale Datenbanksysteme für die Haltung solcher Daten konzipiert sind. Das analoge Kartenwerk wurde in die automatisierte Liegenschaftskarte ALK übernommen. Das Zahlenwerk wurde nicht digitalisiert und wird auch weiterhin analog geführt.

Das Datenmodell der ALK repräsentiert die Sicht des Informatikers mit all ihren negativen Folgen für die Fortführbarkeit der Daten.

- Die Primärdaten – das Zahlenwerk – werden nicht abgebildet.
- Die stochastischen Eigenschaften der Geometrieparameter, in diesem Fall der Koordinaten, werden nicht abgebildet, es ist lediglich eine Klassifikation über einen Punktstatus möglich.
- Geometrie und Topologie werden nicht getrennt betrachtet. Ein großer Teil der Knoten besitzt keinen eigenen Objektidentifikator, diese Knoten werden über die Koordinaten des zugehörigen Punktes angesprochen. Datumstransformationen oder die Verschiebung von Punkten sind daher mit großen Schwierigkeiten verbunden.
- Es werden ausschließlich 0-Zellen parametrisiert, die einzigen Geometrieparameter sind also Punktkoordinaten. Häufig vorkommende geometrische Bedingungen wie Kolinearität oder Rechtwinkligkeit müssen daher separat, also redundant formuliert werden.

- Die Zeitdimension findet keine Berücksichtigung. Eine Historisierung ist nicht möglich.

Die Fortführung der ALK erfolgt über das Löschen und Einfügen ganzer Objekte. Große Probleme treten bei der schrittweisen Verbesserung der Punktgenauigkeit auf. In diesem Fall bleiben Topologie und Sachdaten unverändert während sich die Geometrieparameter ändern. [SCHEU 1999] unterscheidet an dieser Stelle zwischen Fortführungen 1. und 2. Art.

In [ADV 2002] wird eine neue Modellierung für die Daten des automatischen Liegenschaftskataster Informationssystems ALKIS vorgestellt. Dieses Modell beinhaltet bereits wesentliche Verbesserungen im Vergleich zum vorangegangenen ALK-Modell. Geometrie und Topologie sind separat modelliert, die Punktkoordinaten sind mit Genauigkeitsstufen versehen und es wird eine Zeitachse für die Historisierung mitgeführt. Nach wie vor ist jedoch die Speicherung von primären Beobachtungsdaten nicht vorgesehen und die Parametrisierung erfolgt ausschließlich über 0-Zellen.

6.1.1 Das Problem der virtuellen Punktverschiebungen

Für den größten Teil des Liegenschaftskatasters in Deutschland ist die Ersterfassung der digitalen Daten abgeschlossen (73% der Fläche, Stand 10.11.2003). Grundlage der Koordinaten sind hauptsächlich analoge Liegenschaftskarten die digitalisiert und georeferenziert wurden. Die resultierende geometrische Genauigkeit der ALK-Daten reflektiert daher die Genauigkeit der zugrunde liegenden Karten. Der mittlere Punktfehler liegt in einem Bereich zwischen 0,5 und 5 Metern. Die so entstandenen Geo-Basisdaten dienen den Nutzern dieser Daten als geometrische Referenz für ihre eigenen Geo-Fachdaten wie Versorgungsleitungen, Verkehrseinrichtungen usw. Häufig wurden die Geo-Fachdaten an die Geo-Basisdaten mit Hilfe von CAD-Werkzeugen „herankonstruiert“ ohne dabei eine eventuell vorhandene geometrische Redundanz zu berücksichtigen. Gegebenenfalls vorhandene Maße aus Risswerken wurden bestenfalls als Textattribute übernommen.

Durch neue Messungen (GPS, Tachymeter, Orthophotos) werden laufend Koordinaten erfasst, die eine höhere Genauigkeit als die in der ALK enthaltenen aufweisen. Durch die Integration der genaueren Koordinaten in den ALK-Bestand soll dieser schrittweise in seiner geometrischen Qualität verbessert werden

Während die betroffenen Punkte in der Realwelt unverändert bleiben, erfahren sie in der ALK durch diese Art der Fortführung eine virtuelle Verschiebung. Ohne Berücksichtigung der Nachbarschaftsbeziehungen würde eine solche Verschiebung zu einer unerwünschten Veränderung der relativen Lage von verschobenen und nicht verschobenen Punkten führen (z.B. das Abstandsmaß zwischen Versorgungsleitung und Gebäude beträgt 5,5m anstatt früher 2m, oder eine Versorgungsleitung kreuzt das Gebäude). Ein solcher reiner Koordinatenaustausch wäre inakzeptabel.

Bei der virtuellen Verschiebung von Punkten muss der unterschiedlichen Genauigkeit von relativer und absoluter Geometrie Rechnung getragen werden. Hier tritt das unter 4.2.2 beschriebene Problem der Integration von verschiedenen Koordinatensätzen auf, die interne Korrelationen aufweisen.

Die Standardabweichung der digitalisierten Koordinaten setzt sich aus zwei Komponenten zusammen, zum einen aus dem relativ kleinen Digitalisierfehler und zum anderen aus dem Fehler der Punktposition innerhalb der Karte. Die tatsächlichen Punktpositionen auf der Karte entstammen entweder einer Koordinatenberechnung mit anschließender Kartierung bzw. einem sequentiellen Nachvollzug des Messablaufes durch die Kartierung. In beiden Fällen sind die Punktpositionen Funktionen partiell gleicher Zufallsgrößen und daher miteinander korreliert.

Nun lässt sich die Entstehungsgeschichte einer Karte nicht mehr im Einzelnen nachvollziehen, das heißt, die ursprünglichen Beobachtungen sind nicht verfügbar. Als Ersatz können aber künstliche Pseudobeobachtungen generiert werden, deren stochastische Eigenschaften auf begründeten Hypothesen beruhen. Die Verschiebung eines Punktes innerhalb des Netzes der Pseudobeobachtungen führt zu einer Verschiebung seiner Umgebung. Die Beschreibung der Punktpositionen durch Pseudobeobachtungen ist redundant aber zunächst widerspruchsfrei. Die Einführung neuer Koordinaten führt zu Widersprüchen und somit zu einem Ausgleichungsproblem. Die Lösung dieses Ausgleichungsproblems bezeichnet man als Homogenisierung oder nachbarschaftstreue Anpassung.

Neben den Pseudobeobachtungen gehen auch Ursprüngliche Beobachtungen in das Ausgleichungsproblem ein. Diese entstammen dem vorhandenen Risswerk, neueren Messungen vor Ort oder Befliegungsdaten. Beobachtungstypen sind Strecken, Richtungen, lokale und globale Koordinaten usw.

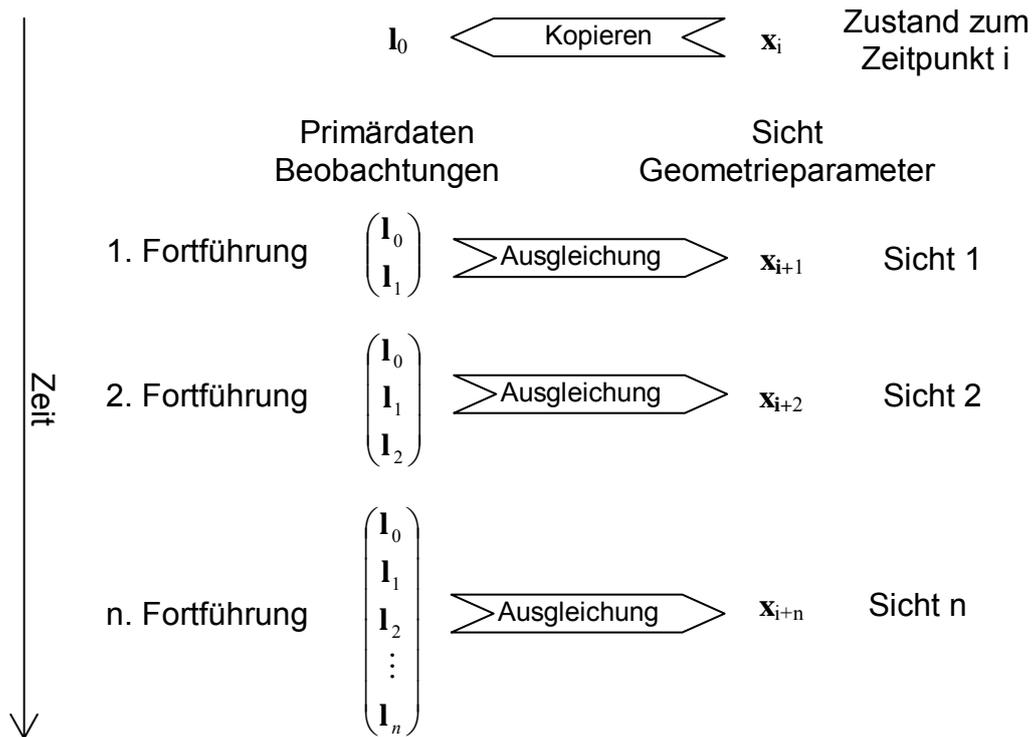
6.1.2 Vorschlag einer Fortführungsstrategie

Wie kann nun aber die Fortführung von Geometriedaten in einem Liegenschafts-GIS aussehen, in dem die ausgeglichenen Geometrieparameter als Sicht auf die primären Beobachtungsdaten betrachtet werden? Wir gehen von dem Fall aus, dass die Ersterfassung abgeschlossen ist und bereits ein Datenbestand vorliegt. Die vorhandenen Geometrieparameter, im allgemeinen Koordinaten, bilden einen Vektor \mathbf{x}_0 . Der Index 0 steht für den Zeitpunkt bzw. den Fortführungsstand. Die Koordinaten repräsentieren die Lage der Punkte in Bezug auf ein definiertes Koordinatensystem.

Diesen Parametervektor \mathbf{x}_0 bilden wir auf einen Beobachtungsvektor \mathbf{l}_0 ab. Die Elemente von \mathbf{l}_0 sind Pseudobeobachtungen, die nicht mehr die absolute Position der Punkte sondern vielmehr deren Nachbarschaftsbeziehungen beschreiben. Die stochastischen Eigenschaften der Beobachtungen werden in der nur diagonal besetzten Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_{l_0} = \sigma_0 \cdot \mathbf{Q}_{l_0}$ modelliert. Das so konstruierte Ausgleichungsproblem ist redundant aber widerspruchsfrei. Eine Ausgleichung der Beobachtungen ergäbe also genau wieder den Vektor $\mathbf{x}_0 = f(\mathbf{l}_0)$. Aus diesem Grund kann man die Parameter \mathbf{x}_0 als Sicht auf die Beobachtungen \mathbf{l}_0 betrachten.

Der Fortführungsfall stellt sich nun so dar, dass neue Beobachtungen in den Datenbestand einzupflegen sind. Im Allgemeinen wird die Fortführung sowohl geometrische als auch topologische und Sachdaten betreffen. Häufig tritt aber auch der Fall ein, dass in einem Gebiet, für welches bislang nur Koordinaten in grafischer Qualität vorliegen, hochgenaue GPS- oder tachymetrische Messungen ausgeführt werden. Die daraus resultierende Fortführung verändert zwar die Koordinaten nicht aber Topologie und Sachdaten.

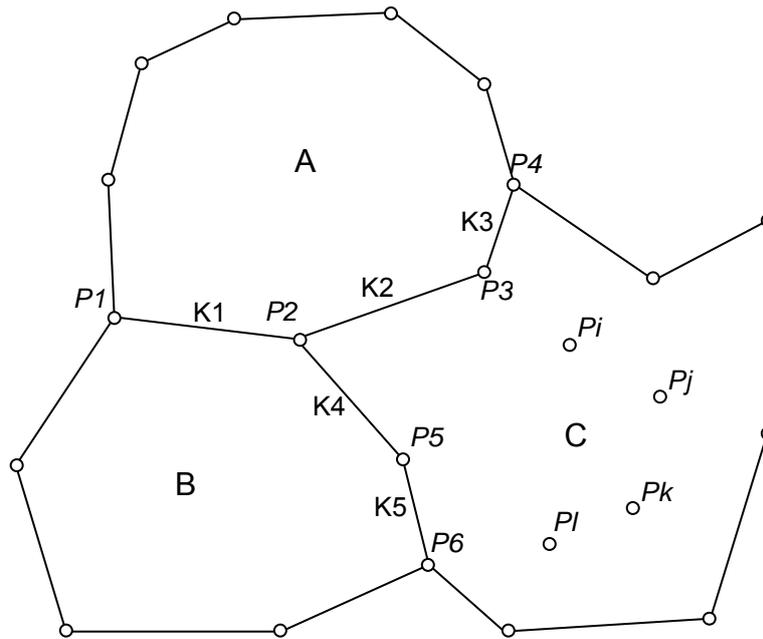
Die geometrische Fortführung stellt sich dann als ein iterativer Prozess dar, in dem bei jedem Iterationsschritt der Beobachtungsvektor um neue Beobachtungen erweitert wird und danach ein neuer Koordinatenvektor als Sicht auf die Beobachtungen berechnet wird. Figur 6-1 veranschaulicht das Vorgehen.



Figur 6-1: Fortführung von Geometriedaten

Aus Gründen der Arbeitsteilung und der Performanz ist es nicht möglich, den Beobachtungsvektor beliebig groß zu wählen. Auch scheidet es wenig sinnvoll, nach jeder Erweiterung des Beobachtungsvektors neue Koordinaten zu berechnen. So kann man zum Beispiel nicht die ALK-Koordinaten eines ganzen Bundeslandes neu berechnen nur weil ein Gebäude neu eingemessen wurde. In Konsequenz bedeutet das, dass der Prozess der Fortführung sowohl räumlich als auch zeitlich partitioniert werden muss.

Eine räumliche Partitionierung kann durch die Definition von Homogenisierungsblöcken erreicht werden. Dazu wird die Erdoberfläche in disjunkte topologische Zellen zerlegt. Die Blockgrenzen sollten durch reale Punkte gegeben sein und sich nicht auf ein Datumsabhängiges Koordinatengitter beziehen. Als Blockgrenzen bieten sich administrative Grenzen wie Gemarkungs- oder Flurgrenzen an. Die bereits vorhandenen eindeutigen Identifikatoren dieser Verwaltungseinheiten können für die Homogenisierungsblöcke übernommen werden. Homogenisierungsblöcke bilden die kleinste Einheit der Fortführung. Ein Fortführungsschritt betrifft mindestens einen ganzen oder aber mehrere Homogenisierungsblöcke.

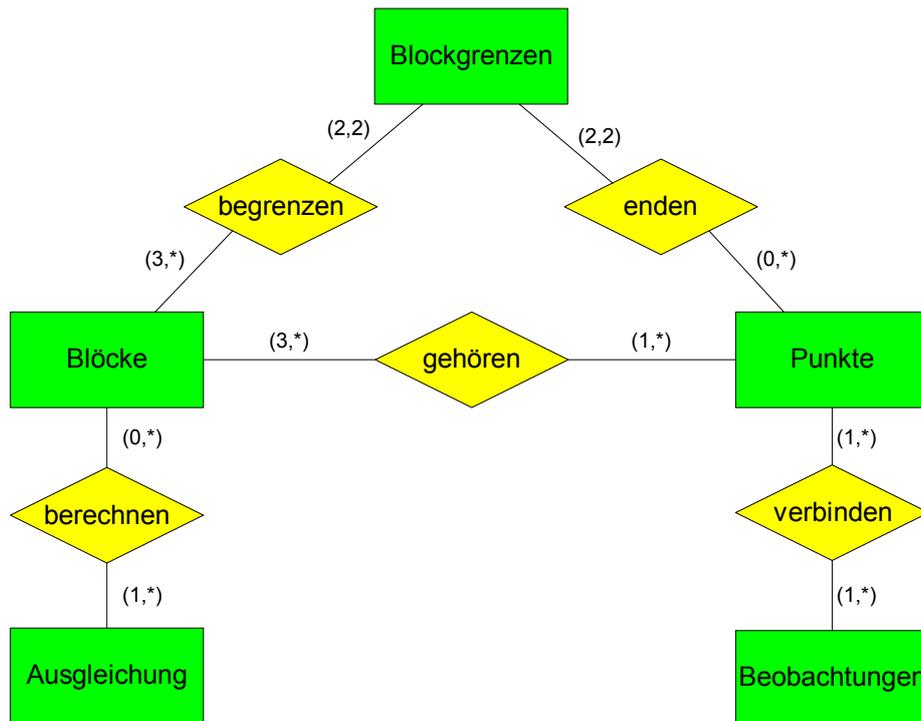


Figur 6-2: Topologie von Homogenisierungsblöcken

Figur 6-2 zeigt die Topologie von Homogenisierungsblöcken. Da Begrenzungspunkte von Homogenisierungsblöcken zu mehreren angrenzenden Blöcken gehören, besteht zwischen Punkten und Homogenisierungsblöcken eine n:m-Beziehung.

Ein Fortführungsschritt erstreckt sich auf einen oder mehrere Homogenisierungsblöcke, die zu einem Fortführungsgebiet zusammengefasst werden. Das Kriterium dafür, welcher Homogenisierungsblock in das Fortführungsgebiet aufgenommen wird bildet der Abstand der fortzuführenden Punkte zu den Blockgrenzen. Befinden sich die fortzuführenden Punkte innerhalb eines Blockes und haben einen hinreichenden Abstand zur Blockgrenze, so genügt es, nur den betreffenden Block einer Fortführung zu unterziehen. Erstreckt sich das Feld der fortzuführenden Punkte über mehrere Homogenisierungsblöcke oder befinden sich die Punkte in der Nähe der Blockgrenze, so sind mehrere Homogenisierungsblöcke zusammenzufassen.

Figur 6-3 zeigt die Abbildung des Fortführungsprozesses in einem E-R-Modell.

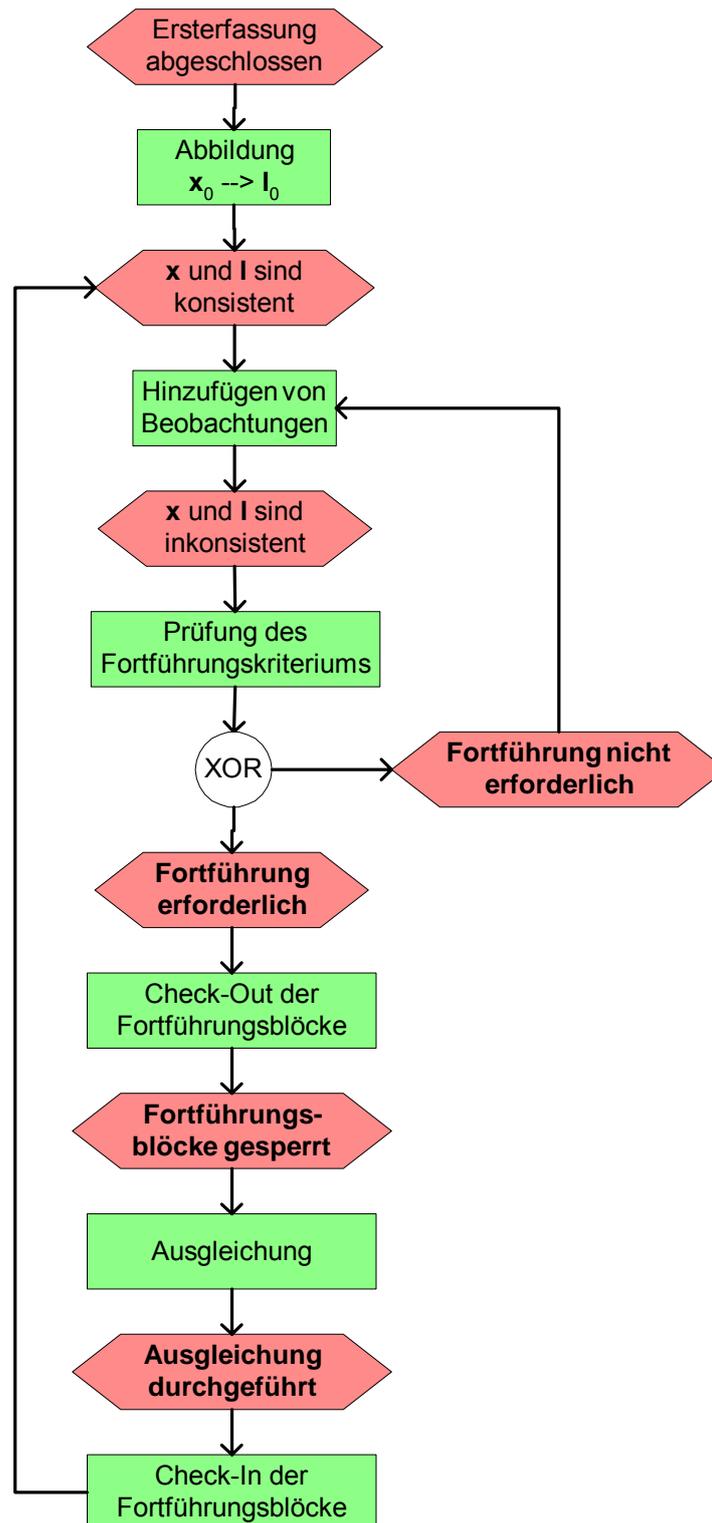


Figur 6-3: E-R-Modell Homogenisierungsblöcke

Die Fortführung stellt im Sinne der Datenbanktheorie eine lange Transaktion dar. Bei einer langen Transaktion erfolgt eine Modifikation der Daten außerhalb des eigentlichen DBMS durch ein externes Programm. Zu diesem Zweck erfolgt ein check-out der betroffenen Daten aus der Datenbank, was bedeutet, dass die entsprechenden Datensätze für die Dauer der langen Transaktion für den Zugriff durch andere Benutzer gesperrt werden. Nach dem Abschluss der langen Transaktion erfolgt ein check-in der modifizierten Daten in die Datenbank, bei dem die alten Datensätze gelöscht werden. Voraussetzung für das check-in ist die Konsistenz der modifizierten Daten. Eine lange Transaktion folgt, wie jede interne Transaktion auch, dem ACID-Prinzip (Atomacy, Consistency, Isolation, Durability).

Für die Fortführung werden zunächst alle zum Fortführungsgebiet gehörenden Beobachtungen selektiert und zu einem Beobachtungsvektor zusammengefasst. Über das Fortführungsgebiet hinausreichende Beobachtungen bleiben unberücksichtigt. Die Datumsfestlegung erfolgt über die Koordinaten der Grenzpunkte des Fortführungsgebietes, welche in die Ausgleichung als fest eingeführt werden. Das Ergebnis der Fortführung sind neue Koordinaten für die Punkte des Fortführungsgebietes. Mit dem check-in werden die neu ausgeglichenen Koordinaten in die Datenbank übernommen, womit der Fortführungsschritt abgeschlossen ist.

Figur 6-4 zeigt den Fortführungsprozess als ereignisgesteuerte Prozesskette (EPK).



Figur 6-4: Prozesskette der Geometrischen Fortführung

6.2 Bestandsdokumentation von Gebäuden

Die Anlageinvestitionen im Wohnungs- und Hochbau betragen im Jahr 2002 in Deutschland 180,31 Mrd. € [ZDB 2003-2]. Das Deutsche Institut für Wirtschaftsforschung setzt in seinen Berechnungen zum Bauvolumen die Modernisierungs- und Instandsetzungsleistungen inzwischen mit einem Anteil von 61 % im Westen und 65 % im Osten am jeweiligen Wohnungsbauvolumen an. Das DIW unterstellt einen raschen Anstieg dieser Quoten während der letzten drei Jahre. Für das Jahr 1999 gingen noch Anteilswerte von 49 % bzw. 56 % in die

Berechnungen ein [ZDB 2003-1]. Diese Zahlen veranschaulichen die große und zunehmende wirtschaftliche Bedeutung des Bauens im Bestand. Grundlage jeder Planung und Ausführung von Baumaßnahmen an bestehenden Gebäuden ist deren Dokumentation.

Ein weiteres wichtiges Anwendungsfeld für Gebäudedokumentationen ist das Facility Management. Während seiner Lebensdauer entfallen mehr Kosten auf den Unterhalt eines Gebäudes als auf dessen Errichtung. Viele Betreiber von Immobilien versuchen, durch Facility Management diesen Kostenaufwand zu senken. Nach Angaben des Deutschen Verbandes für Facility Management e.V. GEFMA betrug das Marktvolumen für FM-Leistungen im Jahr 2000 in Deutschland 26,5 Mrd. €. [www.gefma.de]

Grundlage jeder Gebäudedokumentation ist die Gebäudegeometrie. Sie bildet die Referenz für diverse Sachdaten wie Werkstoffe, Bauschäden, Nutzung usw. Vor jeder Baumaßnahme im Bestand und vor jeder Einführung eines FM-Systems steht daher die Erfassung der Gebäudegeometrie.

6.2.1 Geometrieerfassung und CAD

In der Praxis werden Informationen zur Gebäudegeometrie zumeist in CAD-Systemen verwaltet. Beispiele solcher Systeme sind AutoCAD®, MicroStation®, ArchiCAD® usw. Auch Facility Management Systeme nutzen CAD-Tools um Geometrie zu speichern. Die Datenmodelle von CAD-Systemen besitzen ähnlich Eigenschaften wie das des IFC-Standards (siehe 5.2):

- CAD-Systeme sind Bauteilorientiert, jedes Bauteil wird in sich Parametrisiert. Die Positionierung der Bauteile erfolgt durch Transformation des lokalen Bauteil-Koordinatensystems in das übergeordnete System.
- CAD-Systeme sind deterministisch, eine Verwaltung von Zufallsgrößen ist nicht vorgesehen.
- Beobachtungen werden nicht verwaltet.
- Die geometrische Konsistenz wird durch eine große Zahl geometrischer Bedingungen (Punktidentität, Kolinearität, Koplanarität usw.) gewährleistet, die „on the fly“ kontrolliert werden.

Die Methoden der Geometrieerfassung sind vielfältig und unterscheiden sich hinsichtlich der Genauigkeit und des Detaillierungsgrades ihrer Ergebnisse. Für ein Facility-Management-System genügt häufig eine stark generalisierte und relativ ungenaue Darstellung, während die Dokumentation eines Baudenkmals eine detail- und verformungstreue Erfassung erfordert. Der Anwendungszweck bestimmt daher die Erfassungsmethode. Im Wesentlichen kommen folgende Verfahren für die Erfassung von Gebäudegeometrie zum Einsatz:

- Digitalisierung vorhandener Pläne
- Handaufmaß mit Handheld Laser, Zollstock und Messband
- Tachymetrie
- Photogrammetrie
- Laserscanning

Die Reihenfolge der aufgelisteten Methoden entspricht dabei in etwa ihrer Anwendungshäufigkeit. Im Allgemeinen bietet die Kombination verschiedener Verfahren ein optimales Ergebnis im Hinblick auf Wirtschaftlichkeit und Qualität. In jedem Falle besteht das Ergebnis der Messungen in Beobachtungen, also redundanten Zufallsgrößen, welche die relative Geometrie des Gebäudes beschreiben.

Zwischen der Geometrieerfassung und einem CAD-Modell des Gebäudes steht daher ein Auswerteprozess, der aus den Beobachtungsdaten absolute Geometriedaten für das CAD-System generiert. Aus geodätischer Sicht haben wir es hier mit einem klassischen Ausgleichungsproblem zu tun. Dennoch kommen Ausgleichungstechniken bei dieser Aufgabe nur selten, und wenn, dann nur partiell zum Einsatz. Der Regelfall ist die Konstruktion des Gebäudes im CAD-System. Um ungünstige Effekte der Fehlerfortpflanzung zu vermeiden, geht man dabei noch bestenfalls nach dem Prinzip „vom Großen ins Kleine“ vor. Der größte Arbeitsaufwand entfällt bei dieser Vorgehensweise nicht auf die Messung vor Ort sondern auf die sehr umständliche Fehlersuche während des Auswerteprozesses, obwohl grade die Fehlersuche von Ausgleichungstechniken unterstützt würde.

Worin liegt nun aber die Ursache dafür, dass die Ausgleichungsrechnung für diesen offensichtlichen Ausgleichungsfall kaum angewendet wird? Die Antwort auf diese Frage ist in der Parametrisierung der Geometrie innerhalb des CAD-Systems zu suchen. Die Formulierung eines Ausgleichungsproblems verlangt die eindeutige Parametrisierung dieses Problems. Jeder überzählige Parameter führt notwendigerweise zu einer zusätzlichen Bedingung. Das typische CAD-Datenmodell weist nun aber, wie noch gezeigt werden wird, eine Überparametrisierung von über 95% auf! Ein Ausgleichungsansatz, welcher auf einer solchen Parametrisierung aufbaut ist kaum beherrschbar. Möchte man die Ausgleichungsrechnung auf die Geometriebestimmung von Gebäuden anwenden, muss zunächst ein Datenmodell geschaffen werden, welches eine möglichst geringe Redundanz in den Parametern aufweist und dennoch alle geometrischen Bedingungen abbildet.

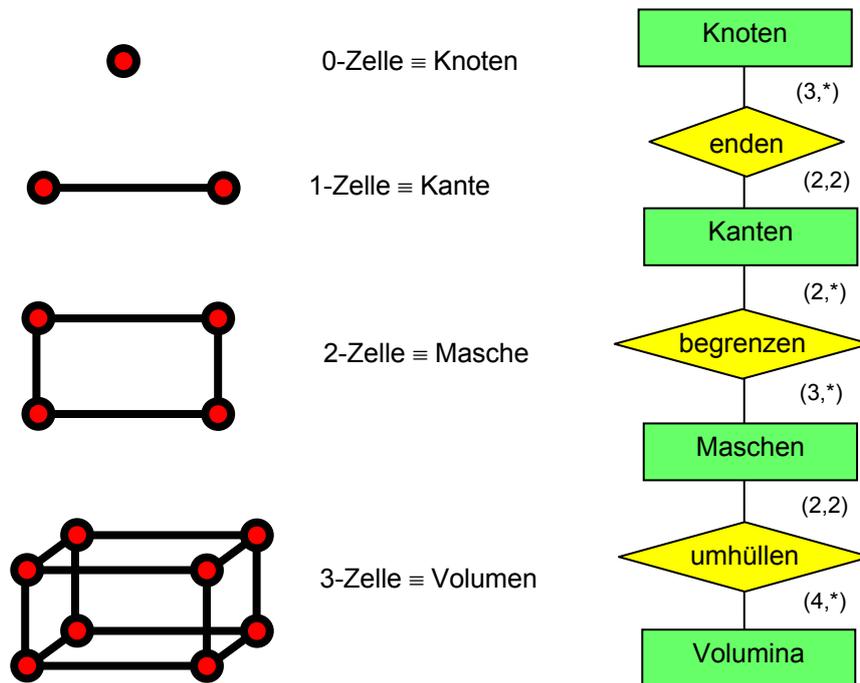
Ein weiteres Argument für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung bei der Gebäudedokumentation ist das einer geeigneten Arbeitsteilung zwischen Geodäten auf der einen und Architekten oder Bauingenieuren auf der anderen Seite. Aus wirtschaftlichen Gründen ist es wünschenswert, Sach- und Geometriedaten in einem Arbeitsgang durch eine Person erfassen zu lassen. Für die Erfassung von Sachdaten wie Bauschäden, konstruktiven Merkmalen usw. besitzen Baufachleute zweifellos eine höhere Kompetenz als ein Geodät. Andererseits sind Nichtgeodäten häufig unerfahren in der Durchführung und Auswertung von Messungen sowie in der Handhabung von Vermessungsinstrumenten. Aus wirtschaftlicher Sicht ist es ohnehin erstrebenswert, die Messung vor Ort so zu gestalten, dass sie von angelerntem Personal ausgeführt werden kann. Würde es gelingen, das erforderliche Qualifikationsniveau von der Messung vor Ort auf den anschließenden Auswerteprozess zu verlagern, so könnte die Datenerfassung durch Nichtgeodäten erfolgen während es die Aufgabe des Geodäten wäre, aus dem Beobachtungsmaterial eine eindeutige Geometrie zu generieren. Eine solche Strategie erfordert jedoch die Möglichkeit, große Mengen von redundanten fehlerbehafteten Beobachtungsdaten, die durch einfaches Handaufmaß entstanden sind, mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung von groben Fehlern zu befreien und in ein eindeutiges Ergebnis zu überführen.

Komplexere Gebäude werden im Allgemeinen mit unterschiedlichen Verfahren erfasst. So werden zum Beispiel die Innenräume tachymetrisch in Kombination mit Handaufmaß und die Fassade photogrammetrisch vermessen. Die Integration der verschiedenen Beobachtungstypen stellt ebenfalls ein Ausgleichungsproblem dar, für dessen Lösung ein geeignetes Datenmodell erforderlich ist.

6.2.2 Datenmodell für die absolute Gebäudegeometrie

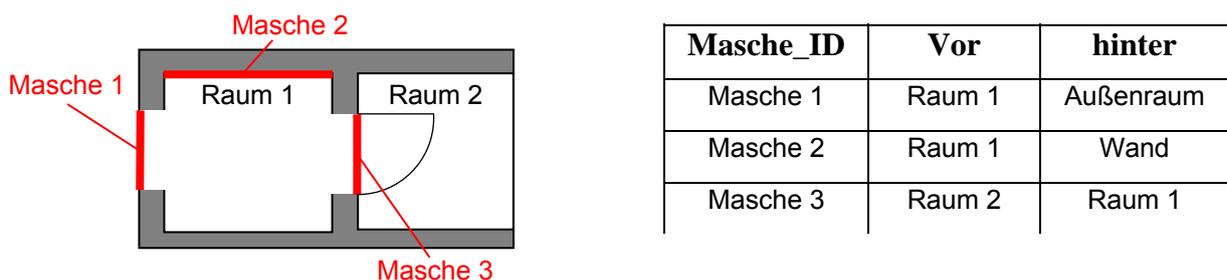
Im Rahmen eines Forschungsprojektes am Fachgebiet Geodäsie und Ausgleichungsrechnung an der Technischen Universität Berlin wurde ein Datenmodell für Gebäudegeometrie und -topologie entwickelt, das der Forderung nach geringer Redundanz in den Parametern bei gleichzeitiger Abbildung geometrischer Bedingungen genügt. Grundlage des Datenmodells ist eine strenge Trennung von Geometrie und Topologie.

Die Abbildung der Topologie erfolgt durch Zellen der Dimensionen 0 bis 3. Topologische Entitätentypen sind Knoten, Kante, Masche und Volumen. Figur 6-5 zeigt die im Datenmodell enthaltenen topologischen Entitätentypen und das dazugehörige E-R-Modell.



Figur 6-5: Topologie im Datenmodell

Es existieren genau drei Typen von 3-Zellen: Raum, Wand und Außenraum. Zurzeit bildet das gesamte Gebäude eine monolithische Zelle. Das Modell lässt aber auch eine Modellierung von Bauteilen wie Wand oder Stütze als Zelle zu. Jede Masche verweist auf genau eine 3-Zelle davor und eine 3-Zelle dahinter. Anhand der Typen der angrenzenden 3-Zellen lässt sich feststellen, ob es sich um eine Wandmasche oder eine Öffnung zwischen Räumen bzw. einem Raum und dem Außenraum handelt (siehe Figur 6-6).

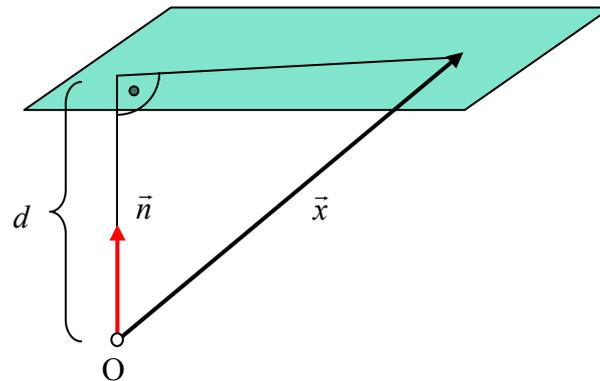


Figur 6-6: Unterschiedliche Maschentypen

Die Beschreibung der Geometrie erfolgt ausschließlich über Ebenen. Eine Erweiterung der Geometriebeschreibung auf Flächen zweiter Ordnung (Zylinder, Kugel, Kegel) ist für einen weiteren Entwicklungsschritt vorgesehen. Jede Ebene wird durch einen Normalenvektor \vec{n} und ihren orthogonalen Abstand zum Koordinatenursprung d parametrisiert. Die Parameter erfüllen die Ebenengleichung

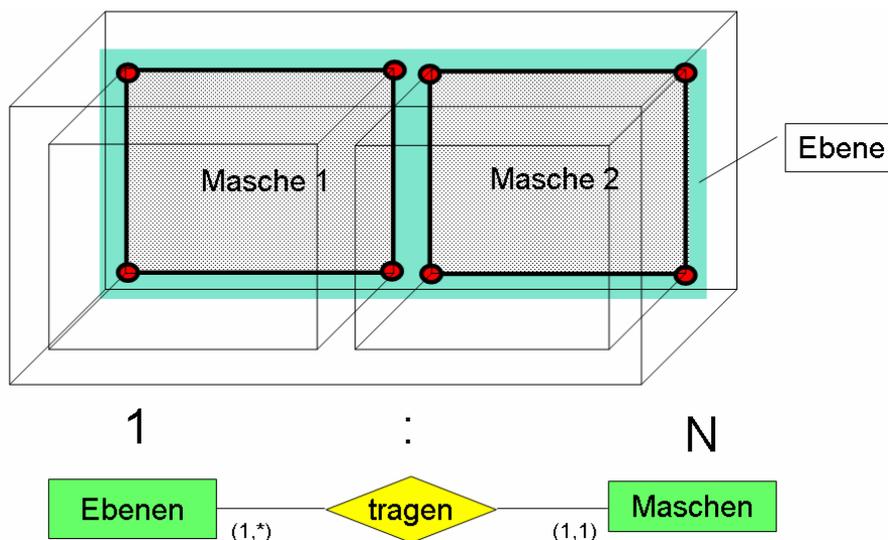
$$\vec{n} \cdot \vec{x} - d = 0 \quad (6.1)$$

Diese Gleichung beschreibt eine offene zweidimensionale Punktmenge in einem dreidimensionalen Raum. Eine separate Parametrisierung des Randes erfolgt nicht. Figur 6-7 veranschaulicht die geometrische Bedeutung der einzelnen Größen.



Figur 6-7: Geometrische Veranschaulichung der Ebenengleichung

Die einzige Verbindung der Topologie mit der Geometrie ist die n:1-Beziehung zwischen den Entitätentypen Masche und Ebene.



Figur 6-8: Ebenen tragen Maschen

Figur 6-8 zeigt zwei Räume eines Gebäudes. Die beiden Wandmaschen Masche 1 und Masche 2 verweisen auf ein und dieselbe Ebene. Die geometrischen Parameter der unterschiedlichen Ränder der beiden Maschen werden nun nicht explizit beschrieben sondern ergeben sich vielmehr aus dem Schnitt mit anderen Ebenen. Die Information darüber welche Ebene mit welcher anderen geschnitten werden muss ist vollständig in der Topologiebeschreibung enthalten.

Punktkoordinaten existieren in diesem Datenmodell nur noch als Sicht auf die persistenten Ebenenparameter.



Figur 6-9: Punktkoordinaten als Sicht auf die Ebenenparameter

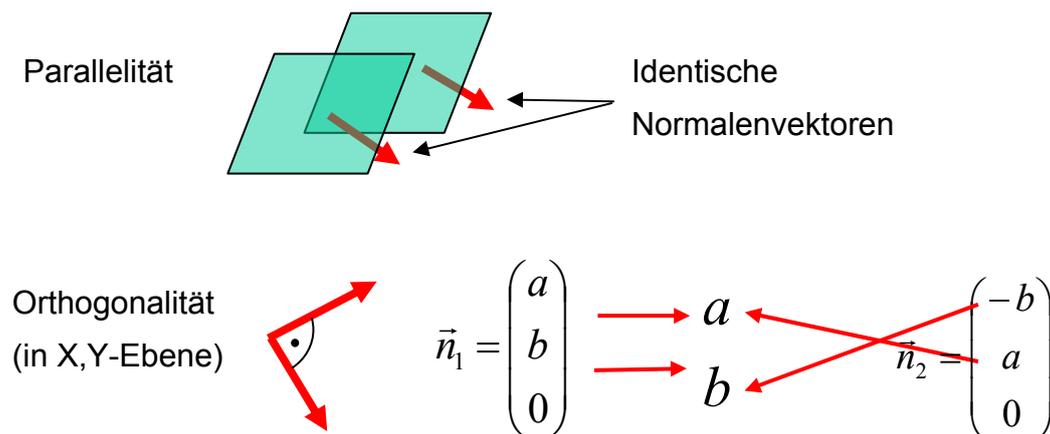
In einer relationalen Datenbank lässt sich eine vollständige Koordinatenliste mit Hilfe eines SQL-Statements erzeugen [THIEMANN 2001].

Die meisten Gebäude besitzen einen relativ regelmäßigen Aufbau. Wände, Böden und Decken sind sehr oft parallel oder zueinander orthogonal. Diese geometrischen Bedingungen werden durch das Datenmodell in besonderer Weise unterstützt. So ist die Bedingung der Komplanarität der vier Eckpunkte einer ebenen Wand durch die Ebenenparametrisierung implizit gegeben.

Die Parallelität zweier Ebenen wird in der Weise abgebildet, dass parallele Ebenen auf ein und denselben Normalenvektor verweisen. Aus diesem Grund wurde die separate Objektklasse *Normalenvektor* eingeführt.

Orthogonalität zwischen vertikalen Wänden wird erreicht, indem orthogonale Normalenvektoren auf ein und dieselben Parameter verweisen. Die Vertauschung der x- und y-Komponente eines Normalenvektors und gleichzeitiger Umkehrung eines der Vorzeichen bewirkt eine Drehung des Vektors um 90° bzw. 270° . Die Umkehrung beider Vorzeichen bewirkt eine Drehung um 180° . Daher wurde eine Separate Objektklasse *Rotationsparameter* definiert. Die Klasse *Normalenvektor* enthält lediglich Vorzeichen und Pointer auf *Rotationsparameter*. Rotationsparameter können den Status *fest* oder *variabel* besitzen. Der Status determiniert deren Rolle in der Ausgleichung. So wird zum Beispiel die Orientierung eines horizontalen Bodens durch die festen Rotationsparameter $\mathbf{n}^T = (0,0,1)$ ausgedrückt.

Komplanarität \rightarrow Implizit

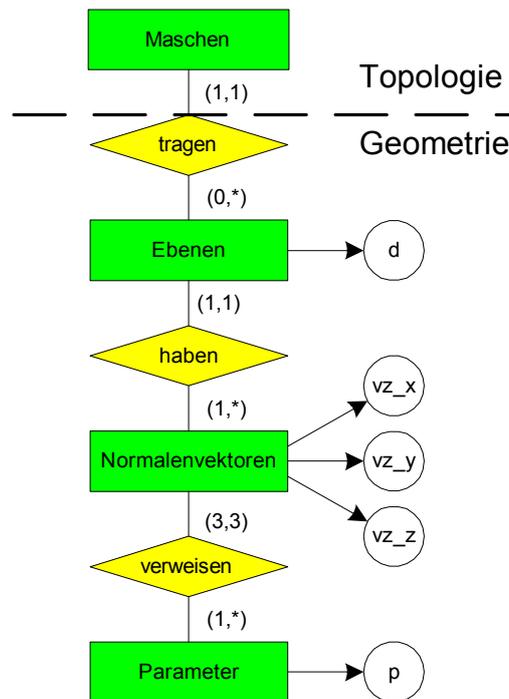


Figur 6-10: Abbildung geometrischer Bedingungen im Datenmodell

Durch den Ansatz des „Parameter Sharing“ wird die Anzahl der benötigten geometrischen Parameter, im Vergleich zur Verwendung von Koordinaten, dramatisch verringert. Zur Veranschaulichung betrachten wir ein theoretisches Gebäude mit 10 Etagen, 4 Wänden in Längsrichtung und 11 Wänden in Querrichtung, Türen und Fenster bleiben zunächst

unberücksichtigt. Im Falle einer Geometrieparametrisierung durch Punktkoordinaten erhalten wir $10 \cdot 10 \cdot 3 = 300$ Räume plus den Außenraum mit jeweils 8 Ecken. Das ergibt insgesamt 2408 Punkte mit 7224 Koordinatenwerten.

Im Falle einer Parametrisierung über Ebenen erhält man $10 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 11 \cdot 2 = 50$ Ebenen. Deren Orientierung ist gegeben durch 3 Normalenvektoren mit zusammen 9 Parametern und die Translationen durch 50 Parameter. In Summa ergibt das 59 Parameter. Das bedeutet, dass die Parametrisierung über Ebenen nur 0,8% der Parameterzahl im Vergleich zur Parametrisierung über Koordinaten benötigt.



Figur 6-11: Verbindung von Geometrie und Topologie

Figur 6-11 zeigt die Abbildung der Geometrie und die Verknüpfung zur Topologie im Datenmodell. Die Unbekannten im Sinne der Ausgleichsrechnung sind die Translationsparameter d_i und die Rotationsparameter p_i .

6.2.3 Handaufmaß als Ausgleichungsproblem

Das Handaufmaß ist die am häufigsten angewandte Methode für die Geometrieerfassung von Gebäuden. Als Messmittel kommen Handheld Laser, Messband und Zollstock zum Einsatz. Die anfallenden Beobachtungstypen sind Distanzen zwischen den topologischen Elementen Masche, Kante und Knoten. Gemessen wird jeweils der orthogonale, also kürzeste Abstand. Die Distanzmessung ist nur bei Vorhandensein bestimmter Parallelitätsbedingungen eindeutig. Tabelle 6-1 zeigt die sechs möglichen Beobachtungstypen und die dazugehörigen Bedingungen. Der weitaus häufigste Beobachtungstyp ist die Distanzmessung zwischen parallelen Maschen.

Tabelle 6-1: Beobachtungstypen mit Bedingungen

	Masche	Kante	Knoten
Masche	parallel	parallel	-
Kante		parallel	-
Knoten			-

6.2.3.1 Funktionales Modell

Die Ausgleichung erfolgt nach dem allgemeinen Gauß-Helmert-Modell, bedingte Ausgleichung mit Unbekannte und Bedingungen zwischen den Unbekannten.

$$\begin{aligned} f(\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{x}}) &= \mathbf{s}_1 \\ g(\bar{\mathbf{x}}) &= \mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die Bedingungsgleichungen $g(\bar{\mathbf{x}})$ sind hierbei für die Normierung der Normalenvektoren verantwortlich.

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (6.3)$$

Die nachfolgend beschriebenen Beobachtungsgleichungen, einschließlich der dazugehörigen Linearisierungen, findet man ausführlich in [THIEMANN 2001].

Die Bedingungsgleichung für den Abstand Masche-Masche liefert einen besonders einfachen linearen Ausdruck. Der Abstand ergibt sich einfach als Differenz der beiden Translationsparameter.

$$d_j - d_i - \bar{l} = 0 \quad (6.4)$$

Die Vorzeichen der Translationen d_i und d_j sind hierbei von der gegenseitigen Lage der beteiligten Ebenen E_i und E_j abhängig. Diese Information wird im Datenmodell durch zwei logische Attribute abgebildet: $E_i_vor_E_j$ und $E_j_vor_E_i$.

Für die Bedingungsgleichungen an denen Kanten und Knoten beteiligt sind müssen zunächst die geometrischen Grundformen Gerade und Punkt als Schnittmenge von zwei bzw. drei Ebenen berechnet werden. Eine Gerade lässt sich als Punkt-Richtungs-Gleichung der Form

$$\bar{p} + t \cdot \bar{r} - \bar{x} = 0 \quad (6.5)$$

ausdrücken. Hierin ist \bar{p} der Ortsvektor eines Punktes auf der Geraden und \bar{r} der Richtungsvektor. Der Richtungsvektor ergibt sich als normiertes Kreuzprodukt der Normalenvektoren der Schnittebenen.

$$\bar{r} = \frac{\bar{n}_1 \times \bar{n}_2}{|\bar{n}_1 \times \bar{n}_2|} \quad (6.6)$$

Der Ortsvektor \bar{p} kann als Schnittpunkt der beiden Ebenen E_1 und E_2 mit einer Ebene E_{12} berechnet werden, wobei E_{12} orthogonal zu E_1 und E_2 ist und durch den Koordinatenursprung verläuft.

$$\begin{aligned}
 P &= E_1 \cap E_2 \cap E_{12} \\
 E_1 &: \vec{n}_1 \cdot \vec{p} - d_1 = 0 \\
 E_2 &: \vec{n}_2 \cdot \vec{p} - d_2 = 0 \\
 E_{12} &: (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \cdot \vec{p} = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

Die Ausdrücke in (6.7) führen auf ein lineares Gleichungssystem mit den Komponenten des Ortsvektors \vec{p} als Unbekannten.

Ein Punkt wiederum entsteht als nulldimensionale Schnittmenge dreier Ebenen.

$$\begin{aligned}
 P &= E_1 \cap E_2 \cap E_3 \\
 E_1 &: \vec{n}_1 \cdot \vec{p} - d_1 = 0 \\
 E_2 &: \vec{n}_2 \cdot \vec{p} - d_2 = 0 \\
 E_3 &: \vec{n}_3 \cdot \vec{p} - d_3 = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

Die Bedingungsgleichung für den Abstand Punkt-Ebene erhält man durch Einsetzen des Ortsvektors des Punktes in die Ebenengleichung (2.16).

$$\vec{n}_4 \cdot \vec{p} (\vec{n}_1, d_1, \vec{n}_2, d_2, \vec{n}_3, d_3) - d_4 = 0
 \tag{6.9}$$

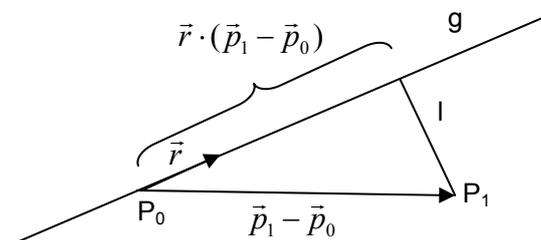
Für den Abstand Ebene-Gerade kann man auf Grund der Parallelität von Ebene und Gerade einen beliebigen Punkt der Geraden auswählen. Zweckmäßigerweise nimmt man den Anfangspunkt aus der Punkt-Richtungs-Gleichung (6.5).

$$\vec{n}_3 \cdot \vec{p} (\vec{n}_1, d_1, \vec{n}_2, d_2) - d_3 = 0
 \tag{6.10}$$

Der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden kann direkt als Abstand der Nullpunkte der beiden Geraden berechnet werden.

$$|\vec{p}_1 - \vec{p}_2| - \vec{l} = 0
 \tag{6.11}$$

Figur 6-12 zeigt eine Skizze zur Veranschaulichung der Berechnung eines Abstandes zwischen einem Punkt und einer Geraden.



Figur 6-12: Berechnung des Abstandes zwischen Punkt und Gerade

Die Bedingungsgleichung baut sich aus den Grundformen Punkt und Gerade auf, welche ihrerseits durch Schnitt von zwei bzw. drei Ebenen entstehen.

$$\sqrt{|\vec{p}_1 - \vec{p}_0|^2 - |\vec{r} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_0)|^2} - \bar{l} = 0$$

mit

$$\vec{p}_0 = f(\vec{n}_1, d_1, \vec{n}_2, d_2)$$

$$\vec{p}_1 = g(\vec{n}_3, d_3, \vec{n}_4, d_4, \vec{n}_5, d_5)$$

(6.12)

6.2.3.2 Näherungswerte und Parameterreduktion

Schon während der Messung werden Informationen über Parallelität bzw. Orthogonalität von Ebenen erfasst. Wenn auch die Zahlenwerte für die Komponenten der Normalenvektoren erst im Zuge der Ausgleichung berechnet werden, so ist durch den Verweis auf ein und denselben Normalenvektor die Information über die Parallelität der betreffenden Ebenen bereits gegeben. Durch die Nutzung gleicher Parameter durch verschiedene Normalenvektoren sind auch Orthogonalitäten bekannt. Das Problem der Näherungswertberechnung und Parameterreduktion findet sich ausführlich in [MEYER 2002].

In einem ersten Auswerteschritt werden die Ebenen nun nach gleichen Normalenvektoren gruppiert. Für jede dieser Gruppen lässt sich mit den Beobachtungen vom Typ Abstand Masche-Masche ein eindimensionales lineares Ausgleichungsproblem formulieren. Man kann sich die Ebenen einer Gruppe auf einer d -Achse angeordnet vorstellen. Die Datumsfestlegung erfolgt, indem einer beliebigen Ebene der Translationsparameter $d=0$ zugeordnet wird. Mit Verbesserungsgleichungen vom Typ

$$l + v = d_i - d_j \quad (6.13)$$

kann nun ein sehr einfacher Ausgleichungsansatz aufgestellt werden. Auf Grund seiner Linearität eignet sich dieser Ansatz hervorragend für die Aufdeckung grober Fehler, die mit Hilfe der normierten Verbesserung als Testkriterium erkannt werden können. Ergebnis der Ausgleichung ist der Vektor der ausgeglichenen Translationsparameter \mathbf{d} und die dazugehörige Kovarianzmatrix \mathbf{C}_{dd} . Sind alle groben Fehler beseitigt, so können benachbarte Ebenen auf Identität getestet werden.

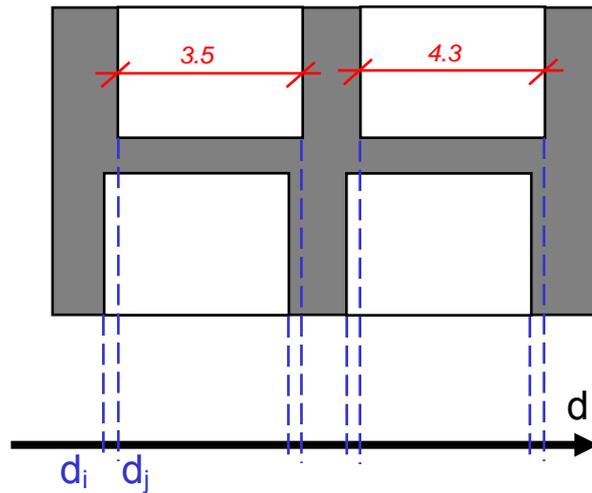
Hypothese: $\Delta = d_i - d_{i+1} = 0$

Alternativhypothese: $\Delta = d_i - d_{i+1} \neq 0$

Testgröße: $u = \frac{\Delta}{\sigma_\Delta} = \frac{|d_i - d_{i+1}|}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_{i+1}^2 - 2 \text{cov}(d_i, d_{i+1})}} \quad u \sim N(0, \sigma_\Delta)$

Schrankenwert: $u_s = \Phi(\alpha/2)$

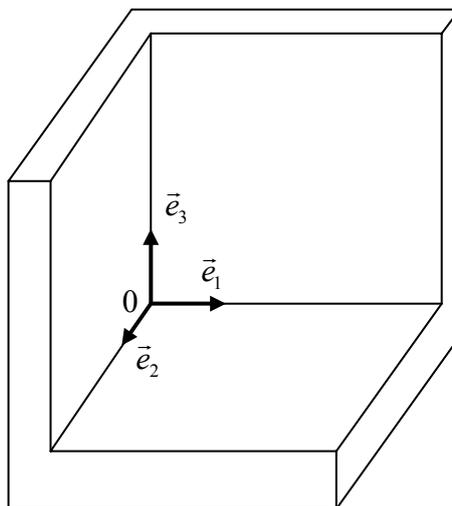
Werden Ebenen als identisch erkannt, so werden sie logisch zu einer Ebene vereinigt und die Verweise der dazugehörigen Maschen werden nachgeführt. Nach jeder Ebenenvereinigung wird die Ausgleichung erneut durchgeführt, solange bis keine identischen Ebenen mehr festgestellt werden. Durch dieses Vorgehen wird eine drastische Reduktion der Zahl der Parameter, die in die anschließende strenge Ausgleichung eingehen, erreicht.



Figur 6-13: Vereinigung von Ebenen

Die Signifikanzschränke u_s kann, muss aber nicht als statistische Größe betrachtet werden. Mit dieser Größe kann auch der Generalisierungsgrad des Ergebnisses gesteuert werden. Oft ist es erwünscht, dass Wände sowohl horizontal als auch vertikal in einer Flucht stehen, Fensterachsen der Fassade sollen kollinear sein usw. Durch eine geeignete Wahl der Signifikanzschränke für die Ebenenvereinigung kann diese Form der Generalisierung automatisch erreicht werden.

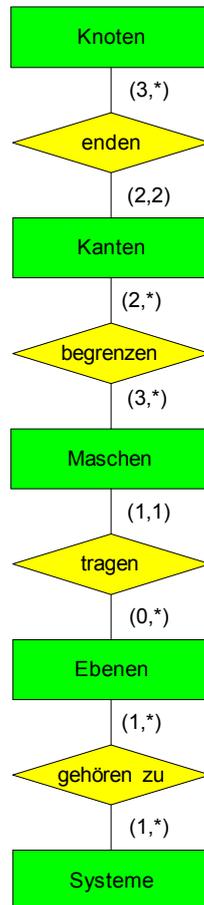
Drei paarweise zueinander orthogonale Ebenen spannen eine orthonormale Basis auf. So zum Beispiel ein Fußboden und zwei zueinander orthogonale Wände (siehe Figur 6-14). Alle Ebenen die auf einen der drei dazugehörigen Normalenvektoren verweisen lassen sich in dem so entstandenen lokalen System parametrisieren.



Figur 6-14: Lokale orthonormale Basis

Im Falle eines Gebäudes, welches ausschließlich aus parallelen und orthogonalen Ebenen besteht erhält man nur ein lokales System und die Bestimmung der Näherungsparameter ist an dieser Stelle abgeschlossen. In allen anderen Fällen müssen die lokalen Koordinatensysteme in ein gemeinsames Datum transformiert werden. Zur Festlegung des globalen Datums wird eines der lokalen Systeme als globales Datum deklariert. Zweckmäßigerweise wählt man für eine solche Datumsfestlegung den Fußboden des Erdgeschosses und zwei zueinander orthogonale Außenwände.

Die Datumsfestlegung der übrigen Systeme geschieht über eine dreidimensionale verkettete Transformation. Der erste Schritt besteht in der Bestimmung von Verknüpfungsknoten, die in mehr als einem lokalen System bestimmt sind. Figur 6-15 zeigt das E-R-Modell der Beziehung von Knoten zu lokalen Koordinatensystemen. Es sei darauf hingewiesen, dass eine Ebene mehreren Systemen angehören kann.



Figur 6-15: E-R-Modell Beziehung Knoten-System

Die Inzidenzmatrix Knoten-Systeme erhält man durch Multiplikation der Inzidenzmatrizen, welche die Relationen *enden*, *begrenzen*, *tragen* und *gehören zu* gegeben sind.

$$\mathbf{I}_{\text{Knoten-Systeme}} = \mathbf{I}_{\text{enden}} \cdot \mathbf{I}_{\text{begrenzen}} \cdot \mathbf{I}_{\text{tragen}} \cdot \mathbf{I}_{\text{gehören zu}} \quad (6.14)$$

Die aus dem Vektor der Zeilensummen $\mathbf{I}_{\text{Knoten-Systeme}} \cdot \mathbf{e}$ ist ersichtlich, an wie vielen Systemen ein Knoten beteiligt ist. Auf diese Weise lassen sich Verknüpfungsknoten für die verkettete Transformation leicht erkennen.

Für diese Verknüpfungsknoten sind nun die lokalen Koordinaten in den einzelnen lokalen Systemen zu berechnen. Hierzu werden nicht nur Beobachtungen vom Typ *Masche-Masche* sondern auch Beobachtungen anderen Typs herangezogen.

Der Transformationsansatz verwendet für die Formulierung der Rotationen Quaternionen. Quaternionen sind eine Verallgemeinerung der komplexen Zahlen. Für die Darstellung sind zwei Schreibweisen üblich:

$$\dot{q} = s + ix + jy + kz \quad \text{oder} \quad \dot{q} = \left[s, \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \right] \quad \text{bzw.} \quad \dot{q} = [s, \mathbf{v}] \quad (6.15)$$

Für die Formulierung von Rotationen ist auch die polare Notation von Bedeutung:

$$\dot{q} = |\dot{q}| \cdot (\cos \Phi + i \sin \Phi + j \sin \Phi + k \sin \Phi) \quad (6.16)$$

Ein Einheitsquaternion hat einen Betrag von Eins.

$$|\dot{q}| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2} = 1 \quad (6.17)$$

Ist \dot{q} ein Einheitsquaternion, so kann man vereinfacht schreiben

$$\dot{q} = [\cos \Phi, \mathbf{n} \cdot \sin \Phi], \quad (6.18)$$

wobei \mathbf{n} ein Vektor der Länge 1 ist. Die Rotation eines Vektors kann durch eine Quaternionenmultiplikation vom Typ

$$\dot{x}' = \dot{q} \cdot \dot{x} \cdot \dot{q}^{-1} \quad (6.19)$$

ausgedrückt werden. Die Komponenten des Vektors \mathbf{x} korrespondieren hierbei mit den Vektorkomponenten des Quaternions \dot{x} . Die skalare Komponente des Quaternions \dot{x} ist null.

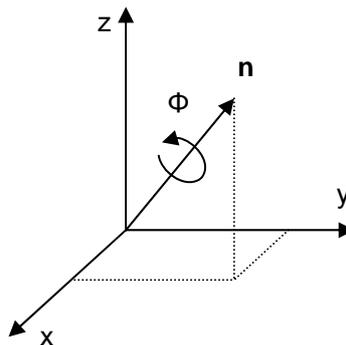
Bei einem Einheitsquaternion ist das inverse Quaternion gleich dem konjugierten Quaternion.

$$\dot{q}^{-1} = \dot{q}^* = [s, -\mathbf{v}] \quad \text{für} \quad |\dot{q}| = 1 \quad (6.20)$$

Unter dieser Voraussetzung vereinfacht sich (6.19) zu

$$\dot{x}' = \dot{q} \cdot \dot{x} \cdot \dot{q}^* \quad \text{mit} \quad |\dot{q}| = 1. \quad (6.21)$$

Vom geometrischen Standpunkt aus betrachtet kann ein Quaternion als Raumvektor und Rotationswinkel interpretiert werden.



Figur 6-16: Geometrische Interpretation eines Rotationsquaternions

Eine ausführliche Darstellung von Quaternionenalgebra und Rotationen mittels Quaternionen findet man unter [KUIPERS 2002].

Im Vergleich zu üblichen Rotationsmatrizen bietet die Verwendung von Quaternionen wesentliche Vorteile. Eine Rotation kann durch nur 4 Parameter beschrieben werden. Es verbleibt lediglich ein Freiheitsgrad, der durch die Normierung des Quaternions eliminiert werden kann. Weiterhin sind die resultierenden Verbesserungs- bzw. Bedingungsgleichungen

bilinear, was es ermöglicht, das Ausgleichsproblem faktisch ohne die Kenntnis von Näherungswerten zu lösen.

Die verkettete Transformation erfolgt nach dem Gauß-Markov-Modell, vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den Unbekannten. Beobachtungen sind die lokalen Koordinaten der Verknüpfungsknoten \vec{x}_l^i . Unbekannte sind die Transformationsparameter für jedes lokale System sowie die globalen Koordinaten der Verknüpfungsknoten.

\vec{t}_l^j :	Translationsvektor des globalen Koordinatenursprungs im lokalen System
$\dot{q}^j = [q_s (q_x \ q_y \ q_z)^T]^j$:	Rotationsquaternion der Transformation global \rightarrow lokal
\vec{x}_g^i :	globale Koordinaten der Verknüpfungsknoten

Die Verbesserungsgleichungen lauten dann in Quaternionenschreibweise

$$\dot{x}_l^i + \dot{v}_l^i = \dot{t}_l^j + \dot{q}^j \cdot \dot{x}_g^i \cdot \dot{q}^{*j}. \quad (6.22)$$

Ausgeschrieben ergeben sich die Verbesserungsgleichungen für die einzelnen Komponenten der lokalen Koordinaten.

$$\begin{aligned} x_l + v_x &= t_{lx} + (q_s^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2) \cdot x_g + 2(q_x q_y - q_s q_z) \cdot y_g + 2(q_x q_z + q_s q_y) \cdot z_g \\ y_l + v_y &= t_{ly} + 2(q_x q_y + q_s q_z) \cdot x_g + (q_s^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2) \cdot y_g + 2(q_y q_z - q_s q_x) \cdot z_g \\ z_l + v_z &= t_{lz} + 2(q_x q_z - q_s q_y) \cdot x_g + 2(q_y q_z + q_s q_x) \cdot y_g + (q_s^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2) \cdot z_g \end{aligned} \quad (6.23)$$

Die Bedingungsgleichungen werden für die Normierung der Quaternionen benötigt.

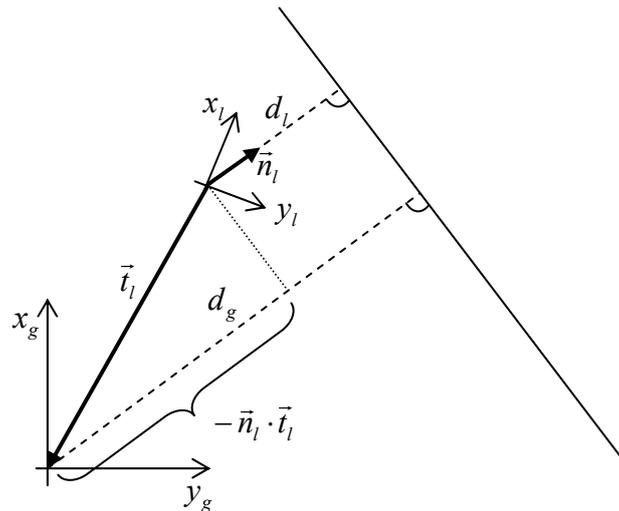
$$|\dot{q}| = 1 \Rightarrow q_s^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1 \quad (6.24)$$

In den Gleichungen (6.23) und (6.24) sind die Unbekannten ausschließlich multiplikativ verknüpft. Diese Struktur erlaubt es, den Iterationsprozess der Ausgleichung mit äußerst groben Näherungswerten zu starten. Die Startwerte für die Translationsvektoren sind die Schwerpunktkoordinaten der Verknüpfungsknoten des globalen Koordinatensystems. Als Startwerte für die Rotationsquaternionen werden Einheitsquaternionen der Struktur $\dot{q} = [0.5(0.5 \ 0.5 \ 0.5)^T]$ verwandt. Trotz dieser groben Näherungen zeigt die Ausgleichung ein günstiges Konvergenzverhalten.

Im Anschluss an diese Ausgleichung werden die lokalen Ebenenparameter in das globale Koordinatensystem transformiert. Die lokalen Normalenvektoren werden mit Hilfe der ausgeglichenen Quaternionen in das globale System gedreht.

$$\dot{n}_g^i = \dot{q}^{*j} \cdot \dot{n}_l^i \cdot \dot{q}^j \quad (6.25)$$

Die Berechnung der globalen Translationsparameter der Ebenen verdeutlicht Figur 6-17. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist das Problem im E^2 dargestellt, die vektoriellen Beziehungen gelten aber analog im E^3 .



Figur 6-17: Berechnung der globalen Ebenentranslation

Daraus lässt sich direkt die Berechnungsformel für die globale Ebenentranslation ableiten:

$$d_g = d_l - \bar{n}_l \cdot \bar{t}_l \quad (6.26)$$

Die so ermittelten globalen Ebenenparameter \bar{n}_g und d_g dienen als Näherungswerte für die strenge Ausgleichung aller Beobachtungen nach (6.2).

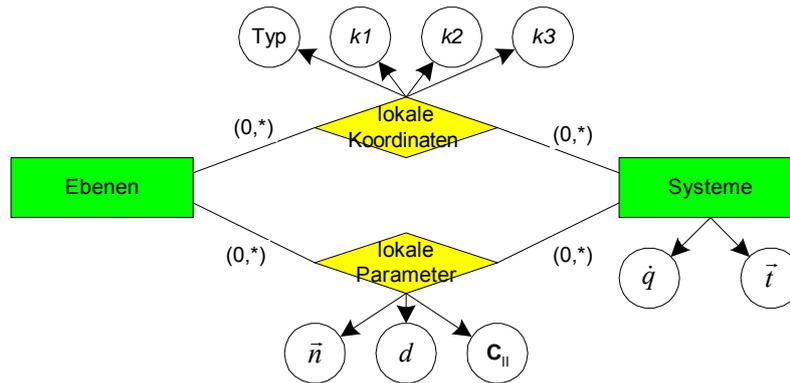
6.2.4 Tachymetrie und Laserscanning

Bei Gebäuden mit komplizierter oder unregelmäßiger Geometrie ist es erforderlich außer dem Handaufmaß andere Aufnahmeverfahren einzusetzen. Neben der Photogrammetrie kommen hier berührungslos messende Tachymeter oder auch Laserscanner zum Einsatz.

Sowohl Tachymeter als auch Laserscanner sind polar messende Systeme. Die durch sie erzeugten Beobachtungen sind Kugelkoordinaten bezogen auf ein instrumenteneigenes System, dessen Stehachse sich, zumindest näherungsweise, in Lotrichtung befindet. Gemessen werden die Horizontalrichtung r , die Zenitdistanz ζ und die Strecke s .

Die Genauigkeit der Streckenmessung ist für beide Arten von Instrumenten vergleichbar. Die Instrumente unterscheiden sich aber wesentlich in ihrer Messgeschwindigkeit sowie in der Genauigkeit und Steuerbarkeit der Richtungsmessung. Ein Tachymeter bietet die Möglichkeit, ausgewählte Punkte mit einer Standardabweichung von 0,3...1 mgon und einer relativ geringen Messgeschwindigkeit von bis zu einem Punkt pro Sekunde zu beobachten. Ein Laserscanner misst Punkte in einem festen Richtungsincrement und einer sehr hohen Messgeschwindigkeit von bis zu 50.000 Punkten pro Sekunde. Die Standardabweichung einer Richtungsmessung beträgt hier etwa 10...20 mgon [RIETDORF 2004].

Um die Zahl der Beobachtungen in der Ausgleichung zu reduzieren, ist es im Falle von Laserscans sinnvoll, die Originalbeobachtungen einer Vorverarbeitung zu unterziehen. Im hier vorgestellten Verfahren sind die Ergebnisse dieser Vorverarbeitung ausgleichende Ebenen, welche im lokalen Instrumentensystem parametrisiert sind. Die vier Parameter einer jeden Ebene (drei Komponenten des Normalenvektors \bar{n}_l und eine Translation d_l) sind untereinander hoch korreliert. Daher ist es erforderlich, deren Kovarianzmatrizen \mathbf{C}_{ll} für die Verwendung in weiteren Ausgleichungsschritten zu speichern. Lokale Ebenenparameter unterschiedlicher Ebenen sind untereinander nicht korreliert (im Gegensatz zu den globalen Ebenenparametern).



Figur 6-18: Lokale Systeme im Datenmodell [CLEMEN 2004]

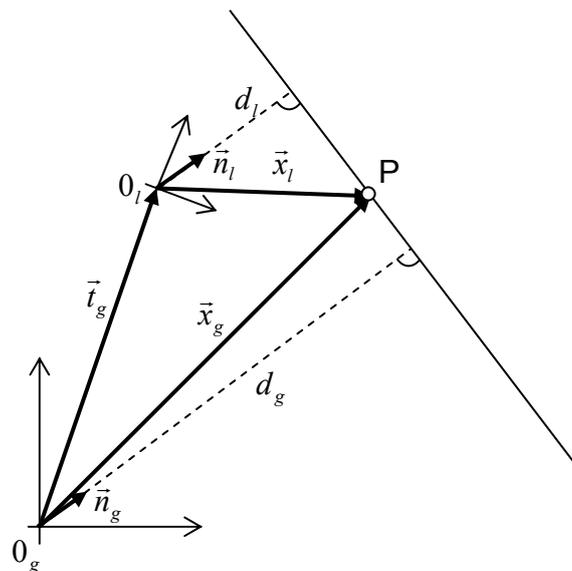
Figur 6-18 zeigt die Abbildung der Beobachtungen von polar messenden Instrumenten im Datenmodell. Der Satz der Unbekannten wird um die Transformationsparameter \vec{q} und \vec{t} der lokalen Instrumentensysteme erweitert. Die Beobachtungswerte sind Attribute einer Relation zwischen lokalem Instrumentensystem und Ebene.

Bei der Relation *lokale Koordinaten* gibt das Attribut *Typ* Auskunft darüber, ob es sich um kartesische, Kugel- oder Zylinderkoordinaten handelt. Die Attribute $k1 \dots k3$ enthalten die einzelnen Komponenten dieser Koordinaten, im Falle von Kugelkoordinaten sind das s , r und ζ .

Die Relation *lokale Parameter* beschreibt die Lage einer ausgleichenden Ebene in einem lokalen Instrumentensystem. Attribute sind neben den lokalen Ebenenparametern \vec{n} und d auch die Elemente der dazugehörigen Kovarianzmatrix \mathbf{C}_{II} .

Der Ausgleichungsansatz entspricht dem einer verketteten Transformation, bei der mehrere lokale Koordinatensysteme simultan in ein globales Koordinatensystem transformiert werden. Im hier vorgestellten Ansatz erfolgt die Verknüpfung der einzelnen Systeme jedoch nicht, wie sonst üblich, über Verknüpfungspunkte, sondern über Verknüpfungsebenen.

Figur 6-19 zeigt die Elemente der Ausgleichung in vektorieller Darstellung. Der Index g kennzeichnet Vektoren, die im globalen System definiert sind, der Index l lokale Vektoren.



Figur 6-19: Vektorielle Darstellung einer Ebene im lokalen und im globalen System

\vec{n}_l :	Normalenvektor der Ebene im lokalen System
d_l :	Translationsparameter der Ebene im lokalen System
\vec{x}_l :	Ortsvektor des Punktes P im lokalen System
\vec{t}_l :	Translationsvektor des globalen Koordinatenursprungs im lokalen System
\vec{n}_g :	Normalenvektor der Ebene im globalen System
d_g :	Translationsparameter der Ebene im globalen System
\vec{x}_g :	Ortsvektor des Punktes P im globalen System
\vec{t}_g :	Translationsvektor des lokalen Koordinatenursprungs im globalen System

Für alle Punkte einer Ebene gilt im globalen System die Formgleichung

$$\vec{n}_g \cdot \vec{x}_g - d_g = 0. \quad (6.27)$$

Die globalen Koordinaten eines Punktes P lassen sich als Funktion seiner lokalen Koordinaten sowie der Transformationsparameter des lokalen Systems darstellen.

$$\dot{x}_g = \dot{t}_g + \dot{q} \cdot \dot{x}_l \cdot \dot{q}^* \quad (6.28)$$

Setzt man (6.28) in (6.27) ein, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$\vec{n}_g \cdot \vec{v} \left[\underbrace{\dot{t}_g + \dot{q} \cdot \dot{x}_l \cdot \dot{q}^*}_{\dot{x}_g} \right] - d_g = 0. \quad (6.29)$$

Diese Gleichung enthält die lokalen kartesischen Koordinaten \vec{x}_l des Punktes P, die wiederum eine Funktion der ursprünglich beobachteten Kugelkoordinaten sind.

$$\vec{x}_l = \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot \cos r \cdot \sin \zeta \\ s \cdot \sin r \cdot \sin \zeta \\ s \cdot \cos \zeta \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Für die Berechnung von Näherungswerten kann man in (6.29) vorausberechnete unkorrelierte kartesische Koordinaten verwenden. In diesem Falle führt der Ansatz zu einem bilinearen Ausgleichsproblem, das ohne Kenntnis von Näherungsparametern gelöst werden kann. In der strengen Ausgleichung werden dann die Kartesischen Koordinaten durch die ursprünglichen Polarkoordinaten ersetzt.

Außerdem ist es notwendig, weitere Bedingungen einzuführen, die für die Normierung der Normalenvektoren und Rotationsquaternionen sorgen.

$$\begin{aligned} n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1 \\ q_s^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 &= 1 \end{aligned} \quad (6.31)$$

Aus Figur 6-19 lassen sich auch die Bedingungsgleichungen für den Beobachtungstyp lokale Ebenenparameter herleiten. Im lokalen System gilt die Beziehung

$$\vec{n}_l \cdot \vec{t}_l + d_g = d_l \Rightarrow \vec{n}_l \cdot \vec{t}_l + d_g - d_l = 0 \quad (6.32)$$

und analog im globalen System

$$d_g - \vec{n}_g \cdot \vec{t}_g = d_l \Rightarrow \vec{n}_g \cdot \vec{t}_g - d_g + d_l = 0. \quad (6.33)$$

Die Gleichungen vom Typ (6.32) vermitteln eine verkettete Translation über identische Ebenen. Führt man die Beobachtungen \vec{n}_l und d_l als Konstante Größen ein, so erhält man ein rein lineares Ausgleichsproblem, das sich nach vermittelnden Beobachtungen lösen lässt. Die Verbesserungsgleichungen lauten:

$$0 + v = \vec{n}_l \cdot \vec{t}_l + d_g - d_l \quad (6.34)$$

Diese lineare Ausgleichung eignet sich hervorragend für die Aufdeckung grober Fehler.

Die Rotation eines Normalenvektors vom lokalen in das globale System wird durch die Quaternionenmultiplikation

$$\dot{n}_g = \dot{q} \cdot \dot{n}_l \cdot \dot{q}^* \quad (6.35)$$

vermittelt. Nach Umformung dieser Gleichung erhält man in Kombination mit den Gleichungen (6.33) die Bedingungsgleichungen für die Gesamtausgleichung.

$$\begin{aligned} \vec{n}_g \cdot \vec{t}_g - d_g + d_l &= 0 \\ \dot{q} \cdot \dot{n}_l - \dot{n}_g \cdot \dot{q} &= 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Auch dieser Ansatz wird ergänzt durch Bedingungen für die Normierung der Normalenvektoren und Quaternionen. Die Gleichungen (6.36) sind wiederum bilinear und lassen sich ohne Kenntnis von Näherungswerten lösen.

7 Zusammenfassung

Geometrische Daten, welche einen Realitätsausschnitt abbilden, werden durch Beobachtung ebendieser Realität gewonnen. Beobachtungen sind aber redundante Zufallsgrößen, daher handelt es sich bei den aus Beobachtungen abgeleiteten Parametern eines geometrischen Modells ebenfalls um Zufallsgrößen. Die derzeit gebräuchlichen Datenmodelle von raumbezogenen Informationssystemen unterstützen die Abbildung der Realität durch Konstruktion. In diesen konstruktiven Datenmodellen sind die Geometrieparameter Konstanten. Diese Betrachtungsweise führt aber bei der Integration heterogener Geometriedaten, bei der Fortführung und bei der Modellierung in mehr als zwei geometrischen Dimensionen zu Problemen. Um diese, in dieser Arbeit aufgezeigten, Probleme zu lösen, ist es erforderlich, von der Perspektive der Konstruktion zu einer solchen der Rekonstruktion zu wechseln.

Der Kern dieser Sichtweise ist die Betrachtung von Beobachtungen als Primärdaten und die der abgeleiteten Geometrieparameter als Sicht auf diese Primärdaten. Das Werkzeug zur Erzeugung von Parametern aus Beobachtungen ist dabei die Ausgleichsrechnung.

Vorraussetzungen für die Realisierung eines rekonstruktiven raumbezogenen Informationssystems ist ein entsprechend angepasstes Datenmodell. Dieses Datenmodell muss die Verwaltung von Beobachtungen und stochastischen Parametern erlauben. Die Parametrisierung der absoluten Geometrie muss redundanzarm möglich sein, was zu der Forderung führt, dass nicht nur Punkte (Dimension 0) sondern p -dimensionale Hyperflächen in n -dimensionalen Räumen abgebildet werden. Ebenfalls notwendig ist die Trennung von geometrischen und topologischen Informationen. Sachdaten dürfen immer nur topologische Objekte referenzieren, da die Topologie invariant gegen Transformationen der Geometrie ist.

Prozesse sind gekennzeichnet durch die Änderung von Objektattributen in der Zeit. Die Abbildung von raumbezogenen Prozessen, und damit der Wechsel von einer statischen zu einer kinematischen bzw. dynamischen Betrachtungsweise wird nur möglich durch die Abbildung der Realität als vierdimensionale Raumzeit und der Einführung einer auf dieser Raumzeit definierten Topologie.

Literatur

- [ADV 2002] *Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Bundesrepublik Deutschland*: Dokumentation zur Modellierung der Geoinformationen des amtlichen Vermessungswesens (GeoInfoDok), Version 1.0, Bonn, 13. Februar 2002
- [ALEXANDROFF 1973] *Alexandroff P.S.*: Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der Reellen Funktionen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973
- [BIEß 1988] *Bieß G.*: Graphentheorie, BSB Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1988
- [BILL 1999] *Bill R.*: Grundlagen der Geo-Informationssysteme, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg 1999
- [BRONSTEIN / SEMENDJAJEW 1985] *Bronstein I.N., Semendjajew K.A.*: Taschenbuch der Mathematik, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1985
- [CLEMEN 2004] *Clemen C.*: Datenmodellierung und Ausgleichung hybrider Beobachtungsdaten für die Gebäudeaufnahme, Diplomarbeit am Fachgebiet Geodäsie und Ausgleichsrechnung der TU Berlin, Berlin 2004
- [DEMIREL 2002] *Demirel H.*: An Integrated Approach to the Conceptual Data Modeling of an Entire Highway Agency Geographic Information System (GIS), Dissertation an der TU Berlin, Berlin 2002
- [FRÄFEL 2003] *Fräfel T.*: Bitemporale Datenhaltung – anspruchsvoll aber keine Hexerei, www.trivadis.ch/publikationen/d/Bitemp.html
- [FRIEDMANN 2002] *Friedmann A.*: Die Welt als Raum und Zeit, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2002
- [GABRIEL / RÖHRS 1994] *Gabriel R., Röhrs H.-P.*: Datenbanksysteme, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1994
- [GIELSDORF 1997] *Gielsdorf F.*: Nachbarschaftstreue Anpassung nach dem Membranmodell, Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 5, 1997
- [GIELSDORF 1998] *Gielsdorf F.*: Datenmodellierung für Gleisnetze und Schaffung eines einheitlichen Raumbezugssystems, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C Dissertationen, Heft Nr.491, München 1998
- [GÖHLER 1980] *Göhler W.*: Höhere Mathematik, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1980
- [GROßMANN 1964] *Großmann W.*: Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1964
- [GRÜNDIG 1988] *Gründig L.*: Datenverwaltungskonzepte für typische Aufgaben aus der Ingenieurgeodäsie, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr.336, 1988

-
- [GRÜNDIG 1993] *Gründig L.*: Vorlesung Statistische Testverfahren, Technische Universität Berlin, Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik, 1993
- [IAI 2003] International Alliance for Interoperability, Industry Foundation Classes 2x Edition 2, Model implementation Guide Version 1.6, 30.06.2003
- [JÄNISCH 1990] *Jänisch K.*: Topologie, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1990
- [JORDAN 1963] *Jordan / Eggert / Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde Band II, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1963
- [KIRCHNER 2002] *Kirchner M.*: Qualitätsmanagement in der Grenzvermessung mit Hilfe Ereignisgesteuerter Prozessketten (EPK) , Diplomarbeit am Fachgebiet Geodäsie und Ausgleichsrechnung der TU Berlin, Berlin 2002
- [KRUSCHWITZ 1996] *Kruschwitz E.*: Euler-Modellierung dreidimensionaler Körper, Dissertation an der TU Berlin, Berlin 1996
- [KUIPERS 2002] *Kuipers J.*: Quaternions and Rotations Sequences, Princeton University Press, Princeton and Oxford 2002
- [MEYER 2002] *Meyer A.*: Topologieprüfung und Ermittlung von Näherungsparametern für die Ausgleichung von Gebäudedaten, Diplomarbeit am Fachgebiet Geodäsie und Ausgleichsrechnung der TU Berlin, Berlin 2002
- [MITTERMAYER 1998] *Mittermayer E.*: Die Kugel, Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin 1998
- [MÜLLER 1984/1] *Müller*: Ingenieurgeodäsie Verkehrsbau Eisenbahnbau, Verlag für Bauwesen, Berlin 1984
- [MÜLLER 1984/2] *Müller*: Ingenieurgeodäsie Verkehrsbau Grundlagen, Verlag für Bauwesen, Berlin 1984
- [OGC 1999] OpenGIS® The OpenGIS™ Abstract Specification, Topic 9: Quality Version 4, Open GIS Consortium Inc., OGC 99-109, 30.03.1999
- [OGC 2001] OpenGIS® The OpenGIS™ Abstract Specification, Topic 1: Feature Geometry (ISO 19107 Spatial Schema) Version 5, Open GIS Consortium Inc., OGC 01-101, 10.05.2001
- [OGC 2003-1] OpenGIS® Geography Markup Language (GML) Implementation Specification, Open GIS Consortium Inc., OGC 02-023r4, 29.01.2003
- [OGC 2003-2] OpenGIS® Interoperability Program Report: Observations and Measurements Version 0.9.2, Open GIS Consortium Inc., OGC 03-022r3, 04.02.2003
- [PFANNMÖLLER 2001] *Pfannmöller N., Oheim F.*: Realisierung eines GIS-Datenmodells für Straßendaten unter besonderer Berücksichtigung von linearen Referenzsystemen, Diplomarbeit an der Technischen Universität Berlin, Fachgebiet Geodäsie und Ausgleichsrechnung, Berlin 2001

- [REIßMANN 1980] *Reißmann G.*: Die Ausgleichsrechnung, Verlag für Bauwesen, Berlin 1980
- [RIEMANN 1854] *Riemann B.*: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Habilitationsrede an der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen, 10. Juni 1854
- [RÖSCH 1998] *Rösch N.*: Topologische Beziehungen in Geo-Informationssystemen, Dissertation an der Universität Karlsruhe, Karlsruhe 1998
- [SCHARFFE 2003] *Scharffe*: Introduction to Temporal Databases, www.cs.colorado.edu/~scharffe/temporal/introduction.html
- [SCHEU 1999] *Scheu M.*: Geo-Informationssysteme mit großmaßstäbigem Anwendungsbezug, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 522
- [SCHÖNE 1978] *Schöne W.*: Differentialgeometrie, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1978
- [SCHRÖDER 1981] *Schröder U.*: Spezielle Relativitätstheorie, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt/Main 1981
- [SCHULZ / PISZACHICH 1988] *Schultz-Piszachich W.*: Tensoralgebra und -analysis, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1988
- [SCHUBERT 1975] *Schubert H.*: Topologie, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1975
- [SNODGRASS 2002] *Snodgrass R.*: TSQL2 Temporal Query Language, www.cs.arizona.edu/people/rts/tsql2
- [THIEMANN 2001] *Thiemann F.*: Modellierung, geometrische Parametrisierung und Ausgleichung von Gebäudedaten. Diplomarbeit am Fachgebiet Geodäsie und Ausgleichsrechnung der TU Berlin, Berlin 2001
- [VORNBERGER 2001] *Vornberger O., Müller O.*: Skript zur Vorlesung Datenbanksysteme, Universität Osnabrück, 2001
- [WALTER 1999] *Walter R.*: Grundbegriffe der Mengenlehre, Skript zur Vorlesung Analysis I, II, Fachbereich Mathematik, Universität Dortmund, 1999
- [WOLF 1981] *Wolf H.*: Multiquadratische Methode und Kollokation, AVN Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Heft 3, 1981
- [WIKIPEDIA 2003] Wikipedia die freie Enzyklopädie, <http://de.wikipedia.org/>, 2003
- [ZDB 2003-1] Analyse und Prognose Bauwirtschaftlicher Bericht 2002/2003, Zentralverband des deutschen Baugewerbes, Berlin 2003
- [ZDB 2003-2] Baumarkt 2002 Ergebnisse, Entwicklungen, Tendenzen; Zentralverband des deutschen Baugewerbes, Berlin 2003