

**Karen Insa Wolf**

**Kombination globaler Potentialmodelle  
mit terrestrischen Schweredaten  
für die Berechnung der zweiten Ableitungen  
des Gravitationspotentials in Satellitenbahnhöhe**

**München 2007**

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**

**ISSN 0065-5325**

**ISBN 3 7696 5042 5**

---

**Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:  
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Universität Hannover  
ISSN 0174-1454, Nr. 264, Hannover 2007**



Kombination globaler Potentialmodelle  
mit terrestrischen Schweredaten  
für die Berechnung der zweiten Ableitungen  
des Gravitationspotentials in Satellitenbahnhöhe

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Geodäsie  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Karen Insa Wolf

München 2007

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISSN 0065-5325

ISBN 3 7696 5042 5

---

Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:  
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Universität Hannover  
ISSN 0174-1454, Nr. 264, Hannover 2007

## Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:

### Deutsche Geodätische Kommission

Alfons-Goppel-Straße 11 • D – 80 539 München

Telefon +49 - (0)89 - 23 031 -0 / -1113 • Telefax +49 - (0)89 - 23 031 -1283 / -1100

E-mail [hornik@dgfi.badw.de](mailto:hornik@dgfi.badw.de) • <http://dgk.badw.de>

### Prüfungskommission

Referent: Prof. Dr.-Ing. Jürgen Müller

Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Bernhard Heck

Prof. Dr.-Ing. Hans-Jörg Kutterer

Tag der mündlichen Prüfung: 13.02.2007

---

© 2007 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,  
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

# Zusammenfassung

Im Rahmen der Satellitenmission GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer), deren Start für das Jahr 2007/2008 geplant ist, werden erstmalig mit Hilfe eines dreiachsigen Gradiometers die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials  $V$  mit nahezu globaler Abdeckung gemessen. Die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials bilden den Tensor  $V_{[ij]}$ , bezogen auf das Störpotential  $T$  ergibt sich der Tensor  $T_{[ij]}$ . Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Berechnung von Referenzwerten  $T_{[ij]}$  für die Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometermessungen. Die höchste Qualität der GOCE-Gradiometermessungen wird in einem spektral begrenzten Bereich (Messband) erreicht. Die angestrebte Genauigkeit der Hauptdiagonalelemente des Tensors von 1 bis 2 mE im Ortsraum stellt hohe Anforderungen an die Qualität der Referenzwerte. Es werden daher globale Potentialmodelle mit terrestrischen Schwereanomalien, die in einem regionalen Gebiet vorliegen, kombiniert. Die Berechnung der Tensorkomponenten erfolgt mit dem Integrationsverfahren mit spektraler Kombination der Daten und der Kollokation nach kleinsten Quadraten. In beiden Verfahren wird die Remove-Restore-Technik angewendet, um den langwelligen Signalanteil auf Basis des globalen Potentialmodells und den kurzwelligen Signalanteil auf Basis der residualen Topographie (RTM-Reduktion) getrennt vom Restsignal in der Berechnung modellieren zu können.

Die Abschätzung der Varianz der Referenzwerte stellt einen wesentlichen Teil der Arbeit dar, ebenso die detaillierte Analyse der Unterschiede und Gemeinsamkeiten beider Berechnungsverfahren im Hinblick auf eine optimale Kombination der Eingangsdaten. Die Genauigkeitsanalyse erfolgt unter Berücksichtigung des Rauschens (korreliert und unkorreliert) und der räumlichen Verteilung der Beobachtungen einerseits durch Bestimmung der Varianz auf Basis von Gradvarianzen und mit Hilfe der Kollokation, andererseits durch die empirische Berechnung der Varianz aus verbleibendem Rauschen in den Zielgrößen unter Anwendung eines synthetischen Erdmodells. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte synthetische Erdmodell beinhaltet ein hochauflösendes globales Potentialmodell und ein digitales Geländemodell zur Modellierung der physikalischen und der geometrischen Figur der Erde. Rauschen wird sowohl für ein abgeleitetes Potentialmodell simuliert, das in der Remove-Restore-Technik eingesetzt wird, als auch für die synthetischen terrestrischen Beobachtungen.

Die Approximationsansätze beider Berechnungsmethoden werden theoretisch und numerisch verglichen. Zur Auswertung des Integrationsverfahrens wird die schnelle FOURIER-Transformation eingesetzt. Die Kollokation wird einerseits auf einem Parallelrechner gelöst, andererseits erfolgt die Berechnung seriell, wenn die Kovarianzmatrix eine Block-TOEPLITZ-Struktur aufweist. Bei gleichen Startannahmen bezüglich der eingehenden Datensätze verbleiben zwischen beiden Methoden zwar Unterschiede in den resultierenden Gewichtungsfaktoren der Beobachtungen, diese können aber bei feiner Auflösung (5' bis 15') der Beobachtungen, ausreichender Gebietsgröße und bei vergleichbarer Modellierung des Rauschens vernachlässigt werden. Alle Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  werden auf Basis realer Daten in Zentral-Europa berechnet. Die realen Schwereanomalien liegen RTM-reduziert vor, als globales Potentialmodell wird das kombinierte Modell EIGEN-GL04C bis zum sphärisch-harmonischen Grad 360 verwendet.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE aus der Kombination aktueller globaler Potentialmodelle und RTM-reduzierter terrestrischer Schwereanomalien mit einer Standardabweichung von 1 bis 2 mE berechnet werden können. Die Auflösung der terrestrischen Daten sollte etwa 5' bis 15' betragen. Das Rauschniveau sollte im Bereich von 1 mgal (korreliert oder unkorreliert) liegen. Die Berechnungspunkte müssen einen Abstand von etwa 3.5° vom Rand des regionalen Datengebietes einhalten. Die Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe ist für Hochgebirgsregionen zu empfehlen. Auf Basis des synthetischen Erdmodells wird gezeigt, dass für das verbleibende Rauschen der Referenzwerte unter diesen Randbedingungen das innerhalb des Messbandes des GOCE-Gradiometers geforderte Genauigkeitsniveau von 11 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  eingehalten werden kann.

## Schlagwörter:

Kollokation, spektrale Kombination, synthetisches Erdmodell, Rauschsimulation, Satellitengradiometrie

# Abstract

The GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) mission, planned to be launched 2007/2008, will be the first satellite mission applying three-dimensional gradiometry in space. Second order derivatives of the gravitational potential  $V$  will be measured globally, except for the polar gaps. The second order derivatives of the gravitational potential build up the tensor  $V_{[ij]}$ , related to the disturbing potential  $T$ , resulting in the tensor  $T_{[ij]}$ . The main objective of this thesis is the computation of reference values  $T_{[ij]}$  for calibration and evaluation of the gradiometer measurements. The highest accuracy of the GOCE gradiometer is reached in a limited spectral range (measurement bandwidth). The corresponding accuracy of 1 to 2 mE in the space domain required for the calibration of the main diagonal components of the tensor is a challenge for the quality of the reference values. In order to reach the accuracy requirement, global potential models are combined with terrestrial gravity data of a regional area. Integration methods with spectral weighting of the input data and least squares collocation are applied for the computation of the reference values. The remove-restore technique is used for modelling the long-wavelength parts from the global potential model and short wavelength parts from the residual topography (RTM reduction) separate from the remaining signal.

The central parts of the thesis are the estimation of the variance of the reference values and the detailed analysis of differences and correspondences of both computation methods with regard to an optimal combination of the input data. Uncorrelated as well as correlated noise and the spatial distribution of the observations are considered in the accuracy analysis. On the one hand, the variance of the reference values is statistically derived from degree variances applying spectral weights and from least squares collocation. On the other hand, the variance is computed empirically based on remaining noise in the reference values derived from data of a synthetic Earth model. The synthetic Earth model, developed within the scope of this thesis, describes the physical and (part of) the geometrical figure of the Earth and consists of a high-resolution global potential model and a digital elevation model. Simulated noise is applied to a deduced synthetic global potential model, which is used in the remove-restore technique, as well as to the synthetic terrestrial data.

The approximation properties of both computation methods are theoretically and numerically compared. The integration method is evaluated using the fast FOURIER transformation. The least-squares collocation runs on a parallel computer and on a serial computer when the covariance matrix has a block TOEPLITZ structure. Differences between the methods remain in the resulting weighting factors for the observations, even if the starting conditions are the same. But they can be neglected when high resolution terrestrial data (5' up to 15') and a sufficiently large area are used. All components of the tensor  $T_{[ij]}$  are computed based on real data in central Europe. The RTM reduction is applied on the gravity anomalies, the EIGEN-GL04C is used as global potential model up to a spherical harmonic degree of 360.

The numerical results show that the components of the tensor  $T_{[ij]}$  can be computed with an accuracy of 1 to 2 mE at GOCE altitude when combining recent global potential models with RTM reduced terrestrial gravity data. The resolution of the terrestrial data should be 5' to 15' and their noise level should reach about 1 mgal (correlated or uncorrelated). The computation points have to keep a distance of about 3.5° from the edges of the regional observation area. Individual point heights should be considered in high mountain regions. Based on the synthetic Earth model it is shown that under these conditions the remaining noise of the computed reference values fall below the accuracy level of  $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  required within the measurement bandwidth of the GOCE gradiometer.

## keywords:

least-squares collocation, spectral combination, synthetic Earth model, noise simulation, satellite gradiometry

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Zielsetzung . . . . .	1
1.2	Gliederung der Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Grundlagen der physikalischen Geodäsie . . . . .	4
2.1.1	Schwerefeld der Erde . . . . .	4
2.1.2	Normalschwerefeld . . . . .	6
2.1.3	Störgrößen des Schwerefeldes . . . . .	7
2.1.4	Kugelfunktionsentwicklung der relevanten Funktionale . . . . .	9
2.1.5	Bildung von Blockmittelwerten . . . . .	11
2.2	Statistische Grundlagen . . . . .	12
2.2.1	Zufallszahlen und eindimensionale stochastische Prozesse . . . . .	12
2.2.2	Kovarianzfunktionen und Gradvarianzen . . . . .	15
2.3	Satellitengradiometrie . . . . .	19
2.3.1	GOCE-Mission . . . . .	19
2.3.2	Grundprinzip der Gradiometrie . . . . .	20
2.3.3	Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometermessung . . . . .	21
2.3.4	Angestrebte Genauigkeit der Tensorkomponenten . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Verfahren zur regionalen Schwerefeldapproximation</b>	<b>25</b>
3.1	Remove-Restore-Technik . . . . .	25
3.2	Atmosphärische Reduktion . . . . .	27
3.3	Reduktion des Effektes der residualen Topographie . . . . .	28
3.4	Integrationsverfahren in regionaler Anwendung . . . . .	29
3.4.1	Grundlagen . . . . .	29
3.4.2	Anwendung der Remove-Restore-Technik . . . . .	31
3.4.3	Modifikation des Integralkerns . . . . .	34
3.4.4	Bestimmung der Varianzen der Zielgrößen . . . . .	37
3.4.5	Ansätze zur spektralen Gewichtung . . . . .	40
3.5	Kollokation nach kleinsten Quadraten . . . . .	42
3.5.1	Prädiktion der Zielgrößen und ihrer Varianzen . . . . .	42
3.5.2	Anwendung der Remove-Restore-Technik . . . . .	44
3.5.3	Kovarianzfunktionen . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Literaturüberblick</b>	<b>48</b>
4.1	Synthetische Erdmodelle zur Evaluierung von Rechenmethoden . . . . .	48
4.2	Berechnung des Gravitationstensors zur GOCE-Kalibrierung und Evaluierung . . . . .	49
4.3	Fortführung und Erweiterungen der besprochenen Arbeiten . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Berechnung der Elemente des Gravitationstensors mittels Integration und Kollokation</b>	<b>54</b>
5.1	Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung . . . . .	54
5.1.1	Ableitung der Kernfunktionen für die Integration . . . . .	54
5.1.2	Festlegung der Begrenzung des Integrationsgebietes . . . . .	56
5.1.3	Wahl der spektralen Gewichtung . . . . .	59

5.1.4	Bestimmung der Varianzen der Zielgrößen auf Basis von Gradvarianzen . . . . .	59
5.1.5	Aspekte der Gewichtung . . . . .	62
5.1.6	Verarbeitung von Punktwerten und Blockmittelwerten . . . . .	64
5.2	Kollokation nach kleinsten Quadraten . . . . .	65
5.2.1	Prädiktion der Zielgrößen und ihrer Varianzen . . . . .	65
5.2.2	Aspekte der Gewichtung . . . . .	67
5.2.3	Verarbeitung von Punktwerten und Blockmittelwerten . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Gegenüberstellung der Methoden</b>	<b>70</b>
6.1	Diskussion der Approximationsansätze . . . . .	70
6.2	Vergleich der Gewichtung . . . . .	73
6.2.1	Grenzfall global und kontinuierlich vorliegender Beobachtungen . . . . .	73
6.2.2	Praxisfall regional begrenzt und diskret vorliegender Beobachtungen . . . . .	75
6.3	Fazit . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Synthetische Daten</b>	<b>77</b>
7.1	Anforderungen an das synthetische Erdmodell . . . . .	77
7.2	Reale Datenbasis . . . . .	78
7.2.1	Globale Potentialmodelle . . . . .	78
7.2.2	Digitale Geländemodelle . . . . .	79
7.3	Aufbau des synthetischen Erdmodells . . . . .	80
7.4	Rauschsimulation . . . . .	80
7.4.1	Berechnung des Rauschens für das globale Potentialmodell . . . . .	81
7.4.2	Berechnung von unkorreliertem Rauschen für terrestrische Daten . . . . .	82
7.4.3	Berechnung von korreliertem Rauschen für terrestrische Daten . . . . .	83
7.5	Erzeugung der synthetischen Daten für verschiedene Testszenarien . . . . .	86
7.5.1	Schwereanomalien . . . . .	86
7.5.2	Tensorkomponenten . . . . .	89
<b>8</b>	<b>Implementierung der Berechnungsverfahren</b>	<b>91</b>
8.1	Numerische Auswertung der Integration auf der Kugel . . . . .	91
8.2	Lösung großer Gleichungssysteme auf Parallelrechnerarchitekturen . . . . .	93
8.3	Faktorisierung und Gleichungslösung bei strukturierten Matrizen . . . . .	98
8.4	Fazit . . . . .	101
<b>9</b>	<b>Numerische Genauigkeitsanalyse</b>	<b>102</b>
9.1	Parameter der Kovarianzfunktionen . . . . .	102
9.2	Spektrale Gewichte . . . . .	105
9.3	Statistische Bestimmung der Varianzen . . . . .	106
9.3.1	Varianzen aus der Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen . . . . .	106
9.3.2	Varianzen aus der Kollokation nach kleinsten Quadraten . . . . .	109
9.3.3	Diskussion und Zusammenfassung der statistischen Berechnungen . . . . .	111
9.4	Berechnung des Rauschens und der Varianzen auf Basis des synthetischen Erdmodells . . . . .	112
9.4.1	Rauschen und Varianzen aus dem Integrationsverfahren . . . . .	113
9.4.2	Rauschen und Varianzen aus der Kollokation nach kleinsten Quadraten . . . . .	116
9.4.3	Diskussion und Zusammenfassung der Ergebnisse aus synthetischen Daten . . . . .	119
9.4.4	Analyse der Spektraldichten des Rauschens . . . . .	121
9.5	Gegenüberstellung und Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	123

---

<b>10 Anwendung auf reale Daten</b>	<b>125</b>
10.1 Verwendete Datensätze . . . . .	126
10.2 Numerische Ergebnisse . . . . .	128
10.2.1 Parameter der Kovarianzfunktionen . . . . .	128
10.2.2 Ergebnisse des Integrationsverfahrens . . . . .	128
10.2.3 Ergebnisse der Kollokation . . . . .	129
10.2.4 Diskussion der Ergebnisse . . . . .	130
10.3 Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	134
<b>11 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>136</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>141</b>
<b>Dank</b>	<b>156</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>157</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Untersuchungskonzept zur Evaluierung der Rechenmethoden . . . . .	2
2.1	Höhenbezugsflächen . . . . .	8
2.2	MEISSL-Schema . . . . .	11
2.3	Korrelationsfunktion eines tiefpassbegrenzten Prozesses . . . . .	15
2.4	Spektraldichtefunktion eines tiefpassbegrenzten Prozesses . . . . .	15
2.5	Anordnung der GOCE-Gradiometerachsen . . . . .	21
2.6	Messanordnung zweier Beschleunigungsmesser . . . . .	21
2.7	Spektraldichten der Rauschwerte zweier $V_{ZZ}^G$ -Zeitreihen (logarithmische Darstellung) . . . . .	23
2.8	Spektraldichten der Rauschwerte zweier $V_{ZZ}^G$ -Zeitreihen (lineare Darstellung) . . . . .	23
3.1	Regionaler Datensatz in einer Kugelkappe $\sigma_0$ mit dem Radius $\psi_0$ . . . . .	26
3.2	Methode I zur Kombination eines GPM mit regionalen terrestrischen Daten . . . . .	26
3.3	Methode II zur Kombination eines GPM mit regionalen terrestrischen Daten . . . . .	27
3.4	Radien der Punkte $P$ und $Q$ in sphärischer Approximation . . . . .	27
3.5	Polarkoordinaten $\psi$ und $\alpha$ . . . . .	32
3.6	Remove-Restore-Technik mit spektraler Kombination . . . . .	37
3.7	Modifizierte Kernfunktion $S^{s_n}$ . . . . .	41
3.8	Abbruchkoeffizienten $Q_n^{s_i}(\psi_0)$ . . . . .	41
5.1	Sphärisches Dreieck $PNQ$ . . . . .	57
5.2	Kernfunktionen $K_{xx}$ , $K_{yy}$ und $K_{zz}$ für $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	57
5.3	Kernfunktionen $K_{xy}$ für $\alpha = 45^\circ$ und $\alpha = 135^\circ$ . . . . .	57
5.4	Kernfunktionen $K_{xz}$ für $\alpha = 180^\circ$ und $K_{yz}$ für $\alpha = 90^\circ$ . . . . .	57
5.5	Integrationsgebiet Kugelkappe gegenüber gesamtem Eingangsdatengebiet . . . . .	58
5.6	Zentrales Vergleichsgebiet . . . . .	58
5.7	Frequenztransferfunktionen zur Berechnung des Störpotentials $T^R$ . . . . .	63
5.8	Frequenztransferfunktionen zur Berechnung der radialen Tensorkomponente $T_{zz}^R$ . . . . .	63
5.9	Dämpfungskoeffizienten $\beta_n$ . . . . .	66
5.10	Kreuzkovarianzfunktionen $C_{T_{ii}^R \Delta g^R}(\psi, \alpha = 0)$ . . . . .	66
5.11	Kreuzkovarianzfunktionen $C_{T_{ij}^R \Delta g^R}(\psi, \alpha)$ . . . . .	67
5.12	Zweidimensionale Anordnung der Gewichtsmatrix $W^{KKQ}$ . . . . .	67
5.13	Implizite Extrapolation im Kollokationsansatz . . . . .	68
5.14	Gewichtsfaktoren $W_{2D}^{KKQ}$ . . . . .	68
6.1	Geometrische Interpretation der kleinsten Norm im Hilbertraum $H$ . . . . .	72
6.2	Geometrische Interpretation der kleinsten Fehlernorm im Dualraum $H^*$ . . . . .	72
6.3	Vergleich der Eingangsinformation bei Anwendung der Kollokation und des Integrationsverfahrens . . . . .	73
6.4	Integralkern und Gewichtsfaktoren der Kollokation (lokale Parameter) . . . . .	76
6.5	Integralkern und Gewichtsfaktoren der Kollokation (globale Parameter) . . . . .	76
7.1	Evaluierung einer indirekten Berechnungsmethode über einen Soll-Ist-Vergleich . . . . .	78
7.2	Indirekte Berechnung von Ist-Werten auf Basis synthetischer Daten. . . . .	78
7.3	Signal- und Fehlergradvarianzen von Schwereanomalien (EIGEN-GRACE02S, EGM96) . . . . .	81
7.4	Signal- und Fehlergradvarianzen von Schwereanomalien (SYNGPM1300S) . . . . .	81

7.5	Konzept zur Erstellung der Eingangsdaten $\Delta g^R$ inklusive Rauschen . . . . .	82
7.6	Generierung des verrauschten Modells SYNGPM360I . . . . .	82
7.7	Gradvarianzen der Koeffizientendifferenzen zwischen dem SYNGPM360S und dem SYNGPM360I . . . . .	83
7.8	Punktschwereanomalien auf Basis des SYNGPM360S, Auflösung des Gitters $6'$ . . . . .	83
7.9	Punktschwereanomalien auf Basis des SYNGPM360I, Auflösung des Gitters $6'$ . . . . .	83
7.10	Differenzen der Punktschwereanomalien auf Basis des SYNGPM360S und des SYNGPM360I . . . . .	83
7.11	Unkorreliertes Rauschen $\varepsilon^{UK}$ im Testgebiet . . . . .	84
7.12	Empirische Kovarianzfunktion des unkorrelierten Rauschens . . . . .	84
7.13	Finite Kovarianzfunktion des korrelierten Rauschens . . . . .	86
7.14	Korreliertes Rauschen $\varepsilon^K$ im Testgebiet . . . . .	87
7.15	Empirische und analytisch vorgegebene Kovarianzfunktion des korrelierten Rauschens . . . . .	87
7.16	Höhen im Testgebiet auf Basis des SYNDGM . . . . .	87
7.17	Residuale Punktschwereanomalien $\Delta g^R$ im Testgebiet . . . . .	87
7.18	Prinzipskizze der arithmetischen Mittelwertbildung zur Berechnung von Blockmittelwerten . . . . .	88
7.19	Residuale Blockmittelwerte $\overline{\Delta g^R}$ im Testgebiet . . . . .	88
7.20	Elemente des Tensors $T_{[ij]}^{1300S}$ im Testgebiet . . . . .	89
7.21	Elemente des Tensors $T_{[ij]}^R$ im Testgebiet . . . . .	90
8.1	Punkte eines regelmäßigen geographischen Gitters mit Gitterweiten $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ . . . . .	94
8.2	Momentaufnahme der blockweisen CHOLESKY-Faktorisierung . . . . .	94
8.3	Bizyklische Aufteilung einer Matrix . . . . .	95
8.4	Prinzipskizze der parallelen Implementierung der Kollokation . . . . .	96
8.5	Zwei Arten der Nummerierung geographischer Gitterdaten . . . . .	100
8.6	Struktur einer symmetrischen Band-Block-TOEPLITZ-Matrix . . . . .	100
9.1	Empirische und analytische Kovarianzfunktionen von $\Delta g^R$ (globale, lokale Parameter) . . . . .	104
9.2	Analytische Kovarianzfunktionen von $\Delta g^R$ (lokale Parameter) . . . . .	104
9.3	Empirische und analytische Kreuzkovarianzfunktionen von $\Delta g^R$ und $T_{zz}^R$ . . . . .	104
9.4	Empirische und analytische Kovarianzfunktion von $T_{zz}^R$ . . . . .	104
9.5	Empirische und analytische Kovarianzfunktion von $\overline{\Delta g^R}$ . . . . .	105
9.6	Empirische und analytische Kreuzkovarianzfunktion von $\overline{\Delta g^R}$ und $T_{zz}^R$ . . . . .	105
9.7	Fehlergradvarianzen der Szenarien 1UK, 1K, 5UK, 5K . . . . .	106
9.8	Kovarianzfunktion aus akkumulierten Fehlergradvarianzen . . . . .	106
9.9	Spektrale Gewichte $s_n$ , Szenarien 1UK, 5UK (mit verschiedenen Auflösungen der Beobachtungen) . . . . .	106
9.10	Spektrale Gewichte $s_n$ , Szenarien 1UK, 1K, 5UK, 5K . . . . .	106
9.11	Kernfunktion $K_{zz}$ mit spektralen Gewichten $s_n$ . . . . .	107
9.12	Standardabweichungen $m_{\varepsilon_{T_{zz}^{IF}}}$ in Abhängigkeit vom Abbruchradius $\psi_0$ . . . . .	107
9.13	Standardabweichungen $m_{\varepsilon_{T_{zz}^{KKQ}}}$ (Punktwerte) . . . . .	110
9.14	Standardabweichungen $m_{\varepsilon_{T_{zz}^{KKQ}}}$ (Blockmittelwerte) . . . . .	111
9.15	Rauschen in $\hat{T}_{zz}$ im gesamten Testgebiet, Integrationslösung . . . . .	114
9.16	Rauschen in $\hat{T}_{xz}$ und $\hat{T}_{yz}$ , Integrationslösung . . . . .	114
9.17	Rauschen in $\hat{T}_{zz}$ und Differenz zweier Integrationslösungen . . . . .	115
9.18	Rauschen in $\hat{T}_{zz}$ und Differenz zweier Kollokationslösungen . . . . .	118
9.19	Differenzen der Lösungen für $\hat{T}_{zz}$ der untersuchten Verfahren . . . . .	120
9.20	Satellitenbahnpuren über dem Testgebiet . . . . .	121
9.21	Spektraldichte simulierten Rauschens in $T_{ZZ}^G$ (GPM-Lösung) . . . . .	122
9.22	Spektraldichte des verbleibenden Rauschens in $T_{ZZ}^G$ (Kombinationslösung, Szenario 1K und 5K) . . . . .	122
10.1	Signal- und Fehlergradvarianzen von Schwereanomalien (EIGEN-GL04C, SYNGPM360S) . . . . .	127
10.2	Residuale Schwereanomalien $\Delta g^R$ im Testgebiet . . . . .	127
10.3	Empirische und analytische Kovarianzfunktion von $\Delta g^R$ . . . . .	129
10.4	Empirische und analytische Kovarianzfunktion von $\overline{\Delta g^R}$ . . . . .	129

10.5	Spektrale Gewichte $s_n$ . . . . .	129
10.6	Lösungen der Kollokation ( $h = 0$ ) aus Punktwerten . . . . .	133
10.7	Differenzen der Lösungen der verschiedenen Verfahren . . . . .	133
10.8	Lösungen der Kollokation ( $h = h_i$ ) aus Punktwerten . . . . .	134
10.9	Differenzen der Integrations- und der Kollokationslösung ( $h = 0$ vs $h = h_i$ ) . . . . .	135

# Tabellenverzeichnis

2.1	Signalinhalte von Schwerefeldfunktionalen in verschiedenen Spektralbereichen . . . . .	18
4.1	Übersicht ausgewählter Untersuchungen zur Berechnung des Tensors $V_{[ij]}$ . . . . .	50
7.1	Quadratwurzeln der akkumulierten Signal- und Fehlergradvarianzen realer GPM und SYNGPM . .	81
7.2	Statistik des Rauschens $\epsilon_{UK}$ und $\epsilon_K$ im Testgebiet . . . . .	86
7.3	Statistik der synthetischen Schwereanomalien (Punkt-, Blockmittelwerte) im Testgebiet . . . . .	88
7.4	Statistik der Elemente des Tensors $T_{[ij]}^{1300S}$ und des Tensors $T_{[ij]}^R$ im Testgebiet . . . . .	88
8.1	Speicherbedarf und Rechenzeiten zur Gleichungslösung auf dem HLRN (Parallel) . . . . .	98
8.2	Speicherbedarf und Rechenzeiten zur Gleichungslösung auf der E10K (Block-TOEPLITZ) . . . . .	101
9.1	Standardabweichungen $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}} (\psi_0 \leq \pi)$ . . . . .	108
9.2	Standardabweichungen $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}} (\psi_0 = \pi, \text{ verschiedene Auflösungen})$ . . . . .	108
9.3	Standardabweichungen $m_{\epsilon_{T_{ij}^{IF}}} (\psi_0 = \pi)$ . . . . .	108
9.4	Standardabweichungen $m_{\epsilon_{T_{zz}^{KKQ}}} (\text{ verschiedene Auflösungen})$ . . . . .	109
9.5	Standardabweichungen $m_{\epsilon_{T_{ij}^{KKQ}}} (\text{ Punktwerte})$ . . . . .	109
9.6	Standardabweichungen $m_{\epsilon_{T_{ij}^{KKQ}}} (\text{ Blockmittelwerte})$ . . . . .	110
9.7	Statistik des Rauschens in $\hat{T}_{[ij]}$ aus dem Soll-Ist-Vergleich, Integrationslösung, Punktwerte . . . .	114
9.8	Statistik der Residuen $r$ der Gleichungslösung in der Kollokation . . . . .	116
9.9	Statistik des Rauschens in $\hat{T}_{zz}$ der untersuchten Verfahren . . . . .	117
9.10	Statistik der Differenzen zwischen Lösungen für $\hat{T}_{zz}$ aus Punkt- und Blockmittelwerten . . . . .	119
9.11	Statistik der Differenzen zwischen Lösungen für $\hat{T}_{zz}$ der untersuchten Verfahren . . . . .	120
10.1	Quadratwurzeln der akkumulierten Signal- und Fehlergradvarianzen (EIGEN-GL04C, -CG03C) . .	126
10.2	Statistik der realen Schwereanomalien und ihrer Reduktionswerte im Testgebiet . . . . .	126
10.3	Statistik der $T_{[ij]}^{RTM}$ - und $T_{[ij]}^M$ -Werte im Auswerteggebiet . . . . .	127
10.4	Statistik der Residuen $r$ der Gleichungslösung in der Kollokation . . . . .	129
10.5	Standardabweichungen $m_{\epsilon_{T_{ij}^{KKQ}}}$ . . . . .	130
10.6	Statistik der Elemente des residualen Tensors $\hat{T}_{[ij]}^R$ . . . . .	130
10.7	Statistik der Elemente des restituierten Tensors $\hat{T}_{[ij]}$ . . . . .	131
10.8	Statistik der Differenzen zwischen Lösungen für $\hat{T}_{zz}$ aus Punkt- und Blockmittelwerten . . . . .	131
10.9	Statistik der Differenzen zwischen Lösungen der untersuchten Verfahren . . . . .	132



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Zielsetzung

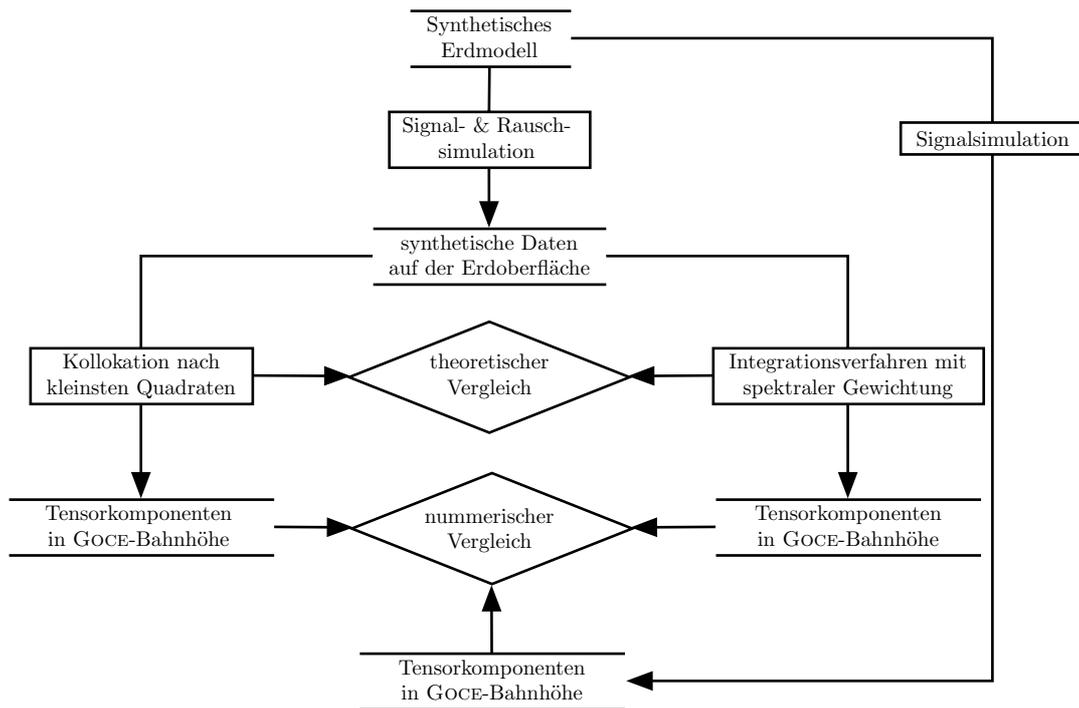
Die Bestimmung der geometrischen Erdfigur und des Erdschwerefeldes sind zentrale Aufgaben in der Geodäsie. Ähnlich den geometrischen Bezugssystemen dient das Schwerefeld als Referenz in der Geodäsie und anderen Fachdisziplinen. So ist das Schwerefeld Grundlage für ein einheitliches Referenzsystem der physikalischen Höhen. In der Ozeanographie werden Strömungsmodelle aus der Meeresoberflächentopographie abgeleitet oder evaluiert; die Meeresoberflächentopographie wird aus der Differenz der mittleren Meeresoberfläche und dem Geoid als eine ausgewählte Äquipotentialfläche des Schwerefeldes berechnet. Die Schwerefeldbeobachtungen werden auch in der Geophysik als zusätzliche Messgröße verwendet, die Analyse der Variation des Schwerefeldes im Hinblick auf Massentransporte in der Erde ist aktueller Gegenstand der Forschung. Zur Verbesserung der Kenntnis des globalen Erdschwerefeldes tragen derzeit aktuelle Satellitenmissionen bei.

Nach den zwei erfolgreichen Schwerefeldsatellitenmissionen CHAMP und GRACE ist der Start der Mission GOCE für das Jahr 2007/2008 geplant. Ziel der Mission ist die Bestimmung des statischen Erdgravitationsfeldes bis zu einer - gerade für Satellitenmissionen - sehr hohen Auflösung von etwa 100 km auf der Erdoberfläche. Der langwellige Signalanteil des Gravitationsfeldes wird durch Analyse der Satellitenbahnen bestimmt. Zur Messung des mittelwelligen Signalanteils wird erstmalig ein dreiachsiges Gradiometer im Satelliten eingesetzt. Über Beschleunigungsdifferenzen der sechs symmetrisch um den Massenmittelpunkt des Satelliten angeordneten Akzelerometer werden die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials  $V$  gemessen, die den Gravitationstensor

$$\frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial i \partial j} = V_{[ij]} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

mit neun Komponenten  $V_{ij}$  ergeben. Der Gravitationstensor ist symmetrisch und es gilt im massefreien Raum die LAPLACE-Gleichung  $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$ . Deshalb enthält der Tensor nur fünf unabhängige Komponenten. Das Gradiometer wird zunächst am Boden und dann im Orbit intern kalibriert. Um den Bezug zum Gravitationsfeld der Erde mit der geforderten Genauigkeit zu gewährleisten, werden die Tensorcomponenten mit Hilfe von externen Daten kalibriert und evaluiert. In verschiedenen Arbeiten (Arabelos und Tscherning, 1995; Visser et al., 2000; Koop et al., 2001b; Pail, 2002; Bouman et al., 2004; Tóth et al., 2005; Arabelos et al., 2007) werden als externe Daten Tensorcomponenten, die aus der Kombination von regional vorliegenden terrestrischen Schweredaten mit aktuellen globalen Potentialmodellen berechnet werden, vorgeschlagen und verwendet. Die berechneten Tensor-elemente werden als Referenz in den Kalibrierungs- oder Evaluierungsprozess eingeführt. Aufgrund der hohen Genauigkeitsanforderung für GOCE ist eine detaillierte Genauigkeitsabschätzung der Referenzwerte erforderlich. Diese Fragestellung gab den konkreten Anlass für die vorliegende Arbeit.

Zur Berechnung der Tensorcomponenten existieren zwei konkurrierende Verfahren: das Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung und die Kollokation nach kleinsten Quadraten. Beide Verfahren werden in dieser Arbeit zur Berechnung aller Komponenten des Tensors eingesetzt. Die Berechnung erfolgt auf Basis regional vorliegender terrestrischer Schwereanomalien in Kombination mit aktuellen globalen Potentialmodellen. Die Unterschiede und Gemeinsamkeiten beider Berechnungsverfahren werden detailliert im Hinblick auf eine optimale Kombination der Eingangsdaten analysiert, die Approximationsansätze werden theoretisch und numerisch verglichen. Zur Evaluierung der Ergebnisse beider Verfahren wird ein synthetisches Erdmodell verwendet, um die Zielgrößen mit exakten Sollwerten vergleichen zu können, wie es in Abb. 1.1 skizziert ist. In dieser Arbeit wird für die synthetischen Beobachtungen Rauschen im Hinblick auf eine realitätsnahe Simulation erzeugt. Damit erlaubt der Soll-Ist-Vergleich auf Basis der synthetischen Daten nicht nur eine formale Überprüfung der Rechenmethoden, sondern auch eine Bewertung hinsichtlich unterschiedlicher Testszenarien, in denen das Rauschniveau und der Grad der Korrelation des Rauschens variiert wird. Ebenso wird die Auswirkung der Vernachlässigung der



**Abbildung 1.1.** Untersuchungskonzept zur Evaluierung der Methoden für die Berechnung des Tensors  $V_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE.

individuellen Punkthöhen der Beobachtungen in der Modellierung analysiert. Durch den Vergleich der Berechnungsergebnisse mit den exakten synthetischen Zielgrößen kann das verbleibende Rauschen abgeleitet und damit die Varianzen der Zielgrößen empirisch ermittelt werden. Diese Ergebnisse werden den Werten aus der statistischen Bestimmung der Varianzen auf Basis spektral gewichteter Gradvarianzen und auf Basis der Kollokation gegenübergestellt. In der Genauigkeitsanalyse wird der Einfluss des Rauschens der Eingangsdaten, aber auch der räumlichen Verteilung (Auflösung, Gebietsgröße) der terrestrischen Daten auf die Varianzen der Zielgrößen untersucht. Mit Hilfe der synthetischen Daten gelingt außerdem eine spektrale Untersuchung des verbleibenden Rauschens in den Referenzwerten. Dies ist von besonderem Interesse, da die hohe Qualität der Gradiometermessungen bei GOCE nur in einem begrenzten spektralen Bereich erreicht wird und überprüft werden muss, ob die Referenzwerte dieser Genauigkeitsanforderung entsprechen können.

Schließlich werden die Methoden auf reale Daten angewendet und alle Komponenten des Tensors (1.1) in der Bahnhöhe von GOCE berechnet. Die Ergebnisse der beiden Berechnungsmethoden werden verglichen.

## 1.2 Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden die grundlegenden Begriffe und Zusammenhänge aus der physikalischen Geodäsie, der statistischen Grundlagen und der Satellitengradiometrie erläutert. Die anzustrebende Genauigkeit für die Referenzwerte des Tensors im Orts- und im Frequenzbereich wird am Ende des Kapitels diskutiert.

Kapitel 3 beschreibt die Grundlagen der eingesetzten Verfahren: das Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung und die Kollokation nach kleinsten Quadraten. Dabei werden die erforderlichen Reduktionen (Gravitationseffekt der Atmosphäre und der Topographie) besprochen, ebenso der Einsatz der Remove-Restore-Technik, um die lang- und kurzwelligen Signalanteile getrennt vom Restsignal, dem residualen Signal, zu behandeln. Die Modellierung des residualen Signals mit Hilfe der genannten Verfahren wird detailliert beschrieben, ebenso die zugehörige Bestimmung der Varianzen der Zielgrößen.

Ein Literaturüberblick zu den Kerngebieten der Arbeit, der Kombination globaler Potentialmodelle und terrestrischer Schweredaten für die Berechnung der Tensorkomponenten in Satellitenbahnhöhe und der Verwendung

synthetischer Modelle zur Methodenevaluierung, wird in Kapitel 4 gegeben. Die Beschreibung der Grundlagen der Berechnungsverfahren aus Kapitel 3 sind diesem Kapitel vorangestellt, um hier auf spezielle Aspekte der Berechnungsmethoden zur Unterscheidung und Abgrenzung der verschiedenen Untersuchungen aus der Literatur eingehen zu können. Die in der vorliegenden Arbeit vorgenommenen Fortführungen und Erweiterungen werden herausgearbeitet.

In Kapitel 5 wird die Berechnung der residualen Tensorkomponenten für beide Verfahren erläutert. Im Integrationsverfahren wird ein stochastisch motivierter Ansatz zur Berechnung der spektralen Gewichte angewendet. Spezielle Aspekte beider Verfahren bezüglich der Gewichtung der Eingangsdaten bei regionaler Auswertung werden diskutiert. Abschließend wird auf Unterschiede in der Behandlung von Punkt- und Blockmittelwerten eingegangen.

Ein detaillierter Vergleich der Approximationsansätze der eingesetzten Berechnungsmethoden erfolgt in Kapitel 6. Dabei wird einerseits von kontinuierlich und global vorliegenden, andererseits von diskret und regional begrenzt gegebenen Beobachtungen ausgegangen.

Der Aufbau des synthetischen Erdmodells wird in Kapitel 7 dargestellt. Die Erzeugung des Rauschens für das globale Potentialmodell und für die terrestrischen Beobachtungen wird erläutert. Detailliert wird auf den Ansatz zur Berechnung von korreliertem Rauschen für zweidimensionale Daten auf der Kugel eingegangen. Das Kapitel schließt mit der Beschreibung der in der Arbeit eingesetzten Testdatensätze, die sich bezüglich der Auflösung und des Rauschens unterscheiden.

Aspekte zur Implementierung der Berechnungsmethoden werden in Kapitel 8 behandelt. Das Integrationsverfahren wird mit Hilfe der schnellen FOURIER-Transformation effizient umgesetzt. Für die Auswertung der Kollokation wurden zwei Implementierungen realisiert. Zur Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe der Beobachtungen erfolgt die Auswertung auf einem Parallelrechner. Wird die Punkthöhe vernachlässigt, ist eine serielle Berechnung durch Ausnutzung besonderer Matrixstrukturen (Block-TOEPLITZ) möglich.

Die numerischen Ergebnisse der Genauigkeitsanalyse werden in Kapitel 9 diskutiert. Es wird auf die Schätzung der Parameter lokaler Kovarianzfunktionen zur Anwendung in der Kollokation und auf die spektralen Gewichte des Integrationsverfahrens eingegangen. Es folgen die Ergebnisse aus der statistischen Bestimmung der Varianzen für die Zielgrößen auf Basis der spektral gewichteten Gradvarianzen und auf Basis der Kollokation. Anschließend werden die Ergebnisse aus den synthetischen Daten analysiert und die Resultate beider Berechnungsverfahren werden verglichen. Das verbleibende Rauschen wird im Frequenzraum analysiert. Die empirisch ermittelten Varianzen werden den Werten aus der statistischen Bestimmung gegenübergestellt.

Im Kapitel 10 erfolgt die Berechnung aller Tensorkomponenten auf Basis realer Daten. Es werden auch hier beide Verfahren eingesetzt und die Auswirkung der Vernachlässigung der Punkthöhe der Beobachtungen wird numerisch bewertet.

Eine Zusammenfassung der Arbeit und einen Ausblick gibt Kapitel 11.

## 2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und Zusammenhänge aus dem Bereich der physikalischen Geodäsie (Abschnitt 2.1) und der Statistik (Abschnitt 2.2) eingeführt. Die statistischen Grundlagen werden bei der Rauschgenerierung und bei der Erläuterung der Verfahren zur Berechnung des Gravitationsensors verwendet. Im Abschnitt 2.3 wird kurz auf die Satellitengradiometrie und die aktuelle Satellitenmission GOCE eingegangen.

### 2.1 Grundlagen der physikalischen Geodäsie

Grundlegende Begriffe und Zusammenhänge zur Modellierung des Schwerefeldes der Erde werden in diesem Abschnitt beschrieben. Das Normalschwerefeld wird als Bezug für die Störgrößen des Schwerefeldes eingeführt, die Kugelfunktionsentwicklungen der für diese Arbeit relevanten Funktionale werden angegeben. Die Berechnung von Blockmittelwerten auf Basis von Punktwerten wird erläutert.

#### 2.1.1 Schwerefeld der Erde

Im Schwerefeld der Erde sind Massen in Punkten der Erdoberfläche der Gravitationskraft der Erdmassen und der Zentrifugalkraft der Erdrotation unterworfen. In Raumpunkten, die nicht an der Erdrotation teilnehmen, wirkt nur die Gravitation. Das Schwerepotential  $W$  der Erde setzt sich aus dem Gravitationspotential  $V$  des Erdkörpers (einschließlich der Ozean- und Eismassen), dem Gravitationspotential  $V_A$  der Atmosphäre und dem Zentrifugalpotential  $Z$  zusammen:

$$W = V + V_A + Z . \quad (2.1)$$

Es wird im Weiteren davon ausgegangen, dass der Effekt der Atmosphärenmassen (ca.  $10^{-6}$  der Erdmassen, Torge, 2001, S. 51) reduziert ist und so keine Massen außerhalb der Erd- bzw. Ozeanoberfläche der Erde, die als Randflächen betrachtet werden, vorhanden sind. Die Reduktion wird in Abschnitt 3.2 beschrieben. Es wird außerdem vorausgesetzt, dass die Schwerebeobachtungen um Gezeiteneffekte von Sonne und Mond und andere zeitabhängige Variationen (z. B. des Luftdrucks) korrigiert sind und die Beobachtungen als zeitunabhängig betrachtet werden können. Die Größenordnung der Korrekturen liegt im Bereich  $10^{-7}W$  (Torge, 2001). Neben der Reduktion des zeitabhängigen Gezeiteneffekts wird auch ein zeitunabhängiger (permanenter) Gezeiteneinfluss reduziert. Sonne und Mond üben einen permanenten Attraktionseinfluss (direkter Effekt) und einen permanenten Deformationseinfluss (indirekter Effekt) auf die Erde aus. Derzeit werden drei verschiedene Methoden zur Reduktion verwendet. Sie unterscheiden sich in der Berücksichtigung des direkten und indirekten Effektes. Der Bezug ist jeweils ein mittleres (*mean-tide*), gezeitenfreies (*tide-free*) oder Null- (*zero-tide*) Geoid, vgl. (Torge, 2001, S. 77). Weiter wird angenommen, dass die Erde ein starrer Körper ist, der mit einer konstanten und bekannten Rotationsgeschwindigkeit um eine feste Achse rotiert, die durch den Massenmittelpunkt der Erde verläuft (Moritz, 1980, S. 330).

Auf einer Niveau- oder Äquipotentialfläche ist das Schwerepotential  $W$  konstant. Ziel der physikalischen Geodäsie ist die Bestimmung derjenigen Niveauläche, die die Ozeane im Ruhezustand ausbilden würden, wenn sie als homogene Flüssigkeit nur der Schwerkraft unterworfen und durch ein System kommunizierender Röhren unter den Kontinenten verbunden wären (Torge, 2001, S. 76). Diese "mathematische Figur der Erde" (C. F. Gauß) wird nach J. B. Listing als "Geoid" bezeichnet und ihrer Fläche wird der Potentialwert  $W = W_0$  zugeordnet. In der Geodäsie und Ozeanographie dient das Geoid als Höhenreferenz. Aufgrund der zeitlichen Variationen, permanenter Gezeiteneinflüsse und des Einflusses nicht-gravitativer Kräfte auf die Ozeane (Wenzel, 1985) ist die Definition von  $W_0$  nicht eindeutig und eine einheitliche Handhabung hat sich noch nicht durchgesetzt, s. a. (Heck und Rummel, 1990; Heck, 2004; Bursa et al., 2004; Roland, 2005).

Das Gravitationspotential  $V$  der Erde lässt sich nach dem NEWTONSchen Gravitationsgesetz durch ein Massenintegral beschreiben:

$$V = G \iiint_{\text{Erde}} \frac{dm}{d}. \quad (2.2)$$

Dabei ist  $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  die Gravitationskonstante und  $d$  der Abstand zwischen dem Berechnungspunkt und dem differentiellen Massenelement  $dm$ . Im massefreien Außenraum des Erdkörpers gilt für das Gravitationspotential die LAPLACE-Gleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (2.3)$$

mit den kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  (z. B. Heiskanen und Moritz, 1967, S. 5). Lösungen der LAPLACE-Gleichung heißen harmonische Funktionen. Zur Approximation des Gravitationspotentials im Außenraum werden daher harmonische Basisfunktionen eingesetzt (vgl. Abschnitt 6.1). Außerdem ist das Potential  $V$  regulär im Unendlichen (Sigl, 1985).

Das durch die Erdrotation verursachte Zentrifugalpotential

$$Z = \frac{\omega^2}{2} p^2 \quad (2.4)$$

ist abhängig von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und dem Abstand  $p$  des Berechnungspunktes von der Erdrotationsachse. Es ist keine harmonische Funktion.

Aufgrund der unbekanntenen Massenverteilung der Erde kann das Gravitationspotential nicht mit Gleichung (2.2) bestimmt werden. Gelingt jedoch eine Trennung von Gravitations- und Zentrifugalpotential, lässt sich die harmonische Funktion  $V$  als konvergierende Reihenentwicklung in sphärisch-harmonische Funktionen (Kugelfunktionen) darstellen (Torge, 2001, S. 66). Die Kugelfunktionsentwicklung (Torge, 2001, S. 70)

$$V(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) + \bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)], \quad (2.5)$$

$$\bar{R}_{n0}(\theta, \lambda) = \sqrt{2n+1} R_{n0}(\theta, \lambda) = \sqrt{2n+1} P_n(\cos \theta),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \end{array} \right\} = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \left\{ \begin{array}{l} R_{nm}(\theta, \lambda) \\ S_{nm}(\theta, \lambda) \end{array} \right\},$$

$$\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda)$$

$$\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \sin(m\lambda) \quad (2.6)$$

eines Punktes mit den Kugelkoordinaten  $\theta$  (sphärische Poldistanz),  $\lambda$  (geographische Länge) und  $r$  (Radius) stellt als harmonische Funktion eine spezielle Lösung der LAPLACE-Gleichung (2.3) dar. Der Querstrich in den Bezeichnungen kennzeichnet die übliche Normierung der Koeffizienten und Funktionen. Die Funktionen  $\bar{R}_{nm}$  und  $\bar{S}_{nm}$  aus (2.6) werden als (normierte) Kugelflächenfunktionen bezeichnet,  $\bar{P}_{nm}$  sind dabei die (normierten) zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art oder LEGENDRE-Funktionen mit dem Grad  $n$  und der Ordnung  $m$ . Die (normierten) harmonischen Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$  sind die Amplituden der auf Basis der Kugelflächenfunktionen dargestellten spektralen Anteile des Gravitationspotentials. Eine Zusammenstellung dieser Koeffizienten und der Konstanten  $GM$  und  $a$  wird als globales Potentialmodell (GPM) bezeichnet. Die Konstante  $a$  kann zunächst willkürlich gewählt werden und wird im Allgemeinen mit dem Wert der großen Halbachse eines Erdellipsoids belegt. Wird der Ursprung des Koordinatensystems in den Massenmittelpunkt der Erde gelegt, entfallen die harmonischen Koeffizienten ersten Grades. Die Kugelfunktionsentwicklung (2.5) konvergiert außerhalb einer Kugel mit dem Radius  $r = a$ , also einer den Erdkörper gerade einschließenden Kugel (BRILLOUIN-Kugel). Nach dem RUNGE-KRARUP-Theorem kann aber in der praktischen Anwendung eine Entwicklung von  $V$  mit Konvergenz im Bereich zwischen der Erdoberfläche und der BRILLOUIN-Kugel verwendet werden, die eine beliebig gute Annäherung an das tatsächliche Außenraumpotential darstellt (Torge, 2001, S. 72). Die Entwicklung des Gravitationsfeldes nach Kugelflächenfunktionen entspricht einer spektralen Zerlegung des Signals in dem beschränkten

Definitionsbereich der Kugeloberfläche. Das Spektrum ist kein kontinuierliches, sondern ein Linienspektrum (Meier und Keller, 1990, S. 108) und besteht aus einer längsten Welle und deren Oberwellen mit Wellenlängen von etwa

$$\text{WL} \approx 360^\circ/n, \quad (2.7)$$

entsprechend einer Auflösung von etwa (Torge, 2001, S. 74)

$$A = \frac{\text{WL}}{2} \approx 180^\circ/n. \quad (2.8)$$

Streng gelten die Beziehungen (2.7) und (2.8) nur eindimensional auf einem Kreis.

Der Vektor der Schwerebeschleunigung  $\mathbf{g}$  ergibt sich als Gradient des Schwerepotentials  $W$  zu

$$\mathbf{g} = \text{grad}(W). \quad (2.9)$$

Die Richtung des Vektors  $\mathbf{g}$  gibt die lokale Lotrichtung an, sein Betrag  $g = |\mathbf{g}|$  die Schwereintensität, die auch als Schwere bezeichnet wird. Die Schwere ist die typische Messgröße terrestrischer Schwerefeldbestimmungen, ihre SI-Einheit ist  $\text{m/s}^2$ , in der Praxis ist die Einheit  $\text{gal}$  noch gebräuchlich ( $1 \text{ mgal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2$ ).

Neben den terrestrischen Schweremessungen sind für diese Arbeit die per Satellitengradiometrie beobachtbaren Schwerefelddaten von Interesse. Mit einem Gradiometer werden die zweiten Ableitungen

$$V_{[ij]} = \text{grad}(\text{grad}(V)) = \frac{\partial^2 V}{\partial i \partial j} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

des Gravitationspotentials  $V$  bestimmt. Das Zentrifugalpotential der Erde entfällt, da die Satelliten nicht an der Erdrotation teilnehmen. Als Bezugssystem wird im Folgenden ein lokales Koordinatensystem mit den Achsausrichtungen  $x$  nach Norden,  $y$  nach Osten und  $z$  radial nach außen gewählt. Die Matrix  $V_{[ij]}$  wird als Gravitationstensor bezeichnet (Rummel, 1985). In der genannten Orientierung wird für die Komponente  $V_{zz}$  häufig der Begriff vertikaler oder radialer Gradient verwendet (Torge, 2001, S. 63). Das Gravitationspotential  $V$  und seine ersten und zweiten Ableitungen sind im massefreien Außenraum stetig, der Gravitationstensor  $V_{[ij]}$  ist symmetrisch (Torge, 2001, S. 56). Da außerdem im massefreien Außenraum die LAPLACESche Differentialgleichung (2.3) gilt, verbleiben lediglich fünf unabhängige Elemente im Tensor  $V_{[ij]}$ . Die SI-Einheit der Tensorelemente ist  $\text{s}^{-2}$ , gebräuchlich ist hier die Einheit Eötvös ( $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ ).

### 2.1.2 Normalschwerefeld

Um die im Allgemeinen nichtlinearen Beziehungen zwischen Schwerefeldbeobachtungen und dem Schwerepotential  $W$  zu linearisieren, wird als Referenz für das Erdschwerefeld ein Normalschwerepotential  $U$  eingeführt (Torge, 2001, S. 214). Hierzu werden neben den geometrischen Größen  $a$  (große Halbachse) und  $f$  (Abplattung) eines Bezugsellipsoids die physikalischen Parameter  $GM$  (geozentrische Gravitationskonstante) und  $\omega$  (Rotationsgeschwindigkeit) eingeführt. In Kombination mit der Forderung, dass die Oberfläche des Bezugsellipsoids eine Niveaufläche mit konstantem Potential sei, legen diese vier Parameter nach dem Theorem von STOKES (z. B. Heiskanen und Moritz, 1967, S. 17) das Schwerepotential im Außenraum des Ellipsoids eindeutig fest. Das Normalschwerefeld kann nach der Theorie von PIZZETTI und SOMIGLIANA (Torge, 2001, S. 103) geschlossen dargestellt werden.

Die Aufteilung des Normalschwerefeldes in einen Gravitations- und Zentrifugalpotentialanteil erfolgt analog zu (2.1) als

$$U = V^N + Z^N. \quad (2.11)$$

Ebenso gilt im Außenraum des Bezugsellipsoids für das dort harmonische Normalgravitationspotential  $V^N$  die LAPLACE-Gleichung (2.3). Das Gravitationspotential  $V^N$  lässt sich neben der geschlossenen Darstellung (z. B. Heiskanen und Moritz, 1967, S. 64-71) auch mit Hilfe einer Kugelfunktionsentwicklung entsprechend (2.5) als

$$V^N(\theta, \lambda, r) = \frac{GM^N}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^N}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{a}_{nm}^N \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) + \bar{b}_{nm}^N \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)] \quad (2.12)$$

beschreiben. Die geozentrische Gravitationskonstante  $GM^N$  schließt die Masse der Atmosphäre mit ein (Torge, 2001, S. 116). Das Normalgravitationsfeld  $V^N$  ist rotationssymmetrisch und symmetrisch zur Äquatorebene, daher entfallen in der Entwicklung (2.12) sowohl die tesseralen ( $0 < m < n$ ) und sektoriellen ( $m = n$ ) als auch die ungeraden zonalen ( $m = 0, n$  ungerade) harmonischen Koeffizienten, die harmonischen Koeffizienten  $\bar{a}_{n0}^N$  mit geradem  $n$  verbleiben. Aufgrund der Wahl des Rotationsellipsoids als einer geometrisch sehr einfach zu beschreibenden Niveaufläche kann die Kugelfunktionsentwicklung zur Darstellung des Gravitationspotentials  $V^N$  bei sehr niedrigen Graden (z. B. Grad 10) abgebrochen werden.

Analog zu (2.9) gilt

$$\boldsymbol{\gamma} = \text{grad } U \quad (2.13)$$

für den Vektor  $\boldsymbol{\gamma}$  der Normalschwerebeschleunigung, sein Betrag  $\gamma = |\boldsymbol{\gamma}|$  wird als Normalschwere bezeichnet.

Derzeit werden von der Internationalen Assoziation für Geodäsie (IAG) die Parameter des Referenzsystems GRS80 (Geodetic Reference System 1980) zur Beschreibung des Normalschwerefeldes empfohlen (Moritz, 2000).

### 2.1.3 Störgrößen des Schwerefeldes

Als Störgrößen des Schwerefeldes werden Abweichungen zwischen Schwerefeldfunktionalen des tatsächlichen Schwerefeldes und des in Abschnitt 2.1.2 eingeführten Normalschwerefeldes bezeichnet. Die Störgrößen sind sehr viel kleiner als die ursprünglichen Größen, daher können die Beziehungen zwischen ihnen linear formuliert werden (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 64). Außerdem können auf Basis der Störgrößen statistische Methoden zur Modellierung des Schwerefeldes eingeführt werden.

Die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  der Erde ist mit hoher Genauigkeit aus Messungen bekannt (Torge, 2001, S. 214). Deswegen wird angenommen, dass die Zentrifugalanteile ( $Z$ ) des tatsächlichen Schwerefeldes und ( $Z^N$ ) des Normalschwerefeldes praktisch identisch sind. Die Differenz zwischen dem tatsächlichen Schwerepotential  $W$  der Erde in einem Punkt  $P$  und dem Normalpotential  $U$  im selben Punkt ist das Störpotential

$$T_P = W_P - U_P, \quad (2.14)$$

das die LAPLACE-Gleichung (2.3) im Außenraum erfüllt. Aus diesem Grund lässt sich das Störpotential als Kugelfunktionsentwicklung schreiben. Unter der Annahme, dass die Masse der Erde und des Normalfeldes sich entsprechen<sup>1</sup> und dass der Nullpunkt des Koordinatensystems im Massenmittelpunkt liegt, entfallen die Terme nullten und ersten Grades dieser Entwicklung. Wird Gleichung (2.5) und (2.12) in Gleichung (2.14) eingesetzt und bezeichnet man die sphärisch-harmonischen Koeffizienten des Störpotentials mit

$$\Delta\bar{a}_{nm} = \left(\frac{GM}{GM^N}\right) \left(\frac{a}{a^N}\right)^n \bar{a}_{nm} - \bar{a}_{nm}^N \quad \text{und} \quad \Delta\bar{b}_{nm} = \left(\frac{GM}{GM^N}\right) \left(\frac{a}{a^N}\right)^n \bar{b}_{nm}, \quad (2.15)$$

ergibt sich für das Störpotential:

$$T(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\Delta\bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) + \Delta\bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)] \quad (2.16a)$$

bzw.

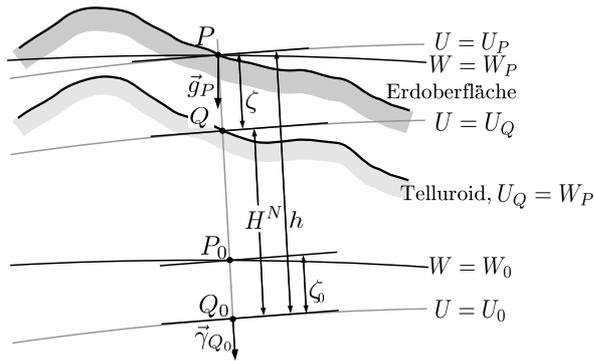
$$T(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [\Delta\bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) + \Delta\bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)]. \quad (2.16b)$$

Basierend auf dem Störpotential werden verschiedene Funktionale definiert. Zur Berechnung der ersten Ableitung des Störpotentials, dem Schwerestörungsvektor, nach

$$\boldsymbol{\delta g}_P = \text{grad}(T_P) = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P \quad (2.17)$$

müssen die Koordinaten  $\theta_P$ ,  $\lambda_P$  und  $r_P$  des Punktes  $P$  im globalen Referenzsystem bekannt sein. Dies konnte, insbesondere in der Zeit vor der Einführung globaler Satellitenpositionierungssysteme, für die ellipsoidische Höhe  $h_P$  und damit für den Radius  $r_P$  nicht vorausgesetzt werden. Für eine große Zahl von Schwerebeobachtungen

<sup>1</sup>Der Effekt des Massenunterschiedes  $\Delta GM = GM - GM^N$  kann andernfalls als  $\Delta GM/r$  in (2.16a) korrigiert werden. Bei Vernachlässigung bezieht sich das Störpotential auf ein mittleres Erdellipsoid mit unbekanntem Parametern, vgl. (Wenzel, 1985, S. 20).



**Abbildung 2.1.** Höhenbezugsflächen zur Festlegung der Normalhöhe  $H^N$ , der Höhenanomalie  $\zeta$  bzw. der Geoidhöhe  $\zeta_0 (= N_0)$  und der ellipsoidischen Höhe  $h$ .

liegt keine Information über die ellipsoidische aber über eine physikalische Punkthöhe (z. B. Normalhöhe) vor. Anstelle des Bezugspunktes  $P$  wird daher für die Normalschweregrößen ein neuer Bezugspunkt  $Q$  definiert. Der Punkt  $Q$  liegt auf der Ellipsoidnormalen, die durch den Punkt  $P$  geht, und erfüllt die Bedingung  $U_Q = W_P$  (Heck, 1987, S. 304; Heiskanen und Moritz, 1967, S. 246). Alle Punkte  $Q$  bilden die Fläche des Telluroids, vgl. Abb. 2.1. Der Abstand vom Telluroid zu dem Oberflächenpunkt  $P$  wird als Höhenanomalie  $\zeta$  bezeichnet, der Abstand zum Referenzellipsoid als Normalhöhe  $H^N$ . Die Normalhöhe  $H^N$  kann aus der Kombination von nivellierten Höhen und Schwerewerten bestimmt werden und gibt die gesuchte Höhe des Punktes  $Q$  an. Wenn das Potential  $W$  in jedem Punkt mit dem Normalpotential  $U$  übereinstimmen würde, dann wäre das Telluroid mit der physischen Erdoberfläche identisch (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 293). Die Höhenanomalie ergibt sich aus der Differenz der ellipsoidischen und der Normalhöhe des Punktes  $P$  (Heck, 1987, S. 323; Torge, 2001, S. 216):

$$\zeta_P = h_P - H_P^N . \quad (2.18)$$

Die Bezugsfläche, die sich ergibt, wenn von Punkten  $P$  der Erdoberfläche die Normalhöhe  $H_P^N$  nach unten abgetragen wird, wird als Quasigeoid bezeichnet und die Höhenanomalie  $\zeta_P$  daher auch als Quasigeoidhöhe. Die Verbindung zwischen der Quasigeoidhöhe  $\zeta_P$  und dem Störpotential  $T_P$  ist (nach Linearisierung) über das Theorem von BRUNS

$$\zeta_P = \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad (2.19)$$

gegeben (Torge, 2001, S. 257). Liegt der Punkt  $P = P_0$  auf dem Geoid und hat daher das Potential  $W = W_0$ , folgt aus (2.19) für die Geoidhöhe  $N_{P_0}$

$$\zeta_{P_0} = N_{P_0} = \frac{T_{P_0}}{\gamma_{Q_0}} . \quad (2.20)$$

Die Normalschwere  $\gamma_{Q_0}$  bezieht sich auf die Ellipsoidoberfläche, für die entsprechend die Beziehung  $U_0 = W_0$  gilt<sup>2</sup>. Die Massen zwischen Geoid und Erdoberfläche sind zur Fortsetzung des Störpotentials und seiner Funktionale zum Geoid zu reduzieren, da andernfalls die LAPLACE-Gleichung ungültig wäre. Dazu ist neben der Festlegung einer geeigneten Reduktion eine Hypothese über die Dichte dieser Massen aufzustellen. Um dies zu vermeiden, wird häufig das Quasigeoid (2.19) bestimmt, das ohne Fortsetzung der Störgrößen nach unten auskommt. Die Differenz zwischen Quasigeoid und Geoid kann mit Hilfe der BOUGUER-Anomalie  $\Delta g_B$  abgeschätzt werden (Torge, 2001, S. 292), die durch Reduktion topographischer Massen aus der im Folgenden einzuführenden Schwereanomalie  $\Delta g_P$  abgeleitet wird.

Nach Einführung des Telluroids über den Bezugspunkt  $Q$  wird analog zum Schwerestörungsvektor  $\delta \mathbf{g}_P$  der Schwereanomalievektor

$$\Delta \mathbf{g}_P = \mathbf{g}_P - \gamma_Q \quad (2.21)$$

als Störgröße definiert.

<sup>2</sup>An dieser Stelle wird deutlich, dass eine Veränderung der Geoidfestlegung über  $W_0$  eine Auswirkung auf das Störpotential und seine Funktionale hat. Dies wird in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Eine Abweichung zwischen  $U_0$  und  $W_0$  kann als Korrektur in der Berechnung der Funktionale berücksichtigt werden, z. B. bei der Geoidberechnung (Roland, 2005, S. 10). Für die praktische Festlegung von  $W_0$  existieren verschiedene Lösungsansätze, s. a. (Heck und Rummel, 1990; Bursa et al., 2004).

Die Differenz der Beträge der Schwerebeschleunigungen wird als (skalare) Schwereanomalie

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_Q = - \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_P + \frac{1}{\gamma_Q} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{n}} \right)_Q T_P \quad (2.22)$$

bezeichnet, wobei  $n$  die Normale auf  $W_P$  und  $\bar{n}$  die Normale auf  $U_Q$  ist (Torge, 2001, S. 259). In (Heck, 1990) ist dargestellt, welche Fehlereinflüsse in die praktische Berechnung der Schwereanomalie einfließen. Lässt man eine sphärische Näherung

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{\gamma}{r} \quad (2.23)$$

durch Vernachlässigung der Exzentrizität des Ellipsoids in (2.22) zu, gilt

$$\Delta g_P = - \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_P - \frac{2}{r} T_P. \quad (2.24)$$

Diese Beziehung wird als Fundamentalgleichung der physikalischen Geodäsie bezeichnet. Da in (2.24) die Exzentrizität des Ellipsoids vernachlässigt wurde, treten relative Fehler in der Größenordnung der Abplattung von 0.3 % auf. Dieser Fehler kann bei heutigen Genauigkeitsanforderungen nur vernachlässigt werden, wenn sich die Schwereanomalie auf ein hochauflösendes Kugelfunktionsmodell anstelle des SOMIGLIANA-PIZZETTI-Normalpotentials bezieht. Der Referenzwert aus dem Kugelfunktionsmodell muss dann in ellipsoidischer Näherung, vgl. Abschnitt 2.1.4, berechnet werden.

In dieser Arbeit werden die Komponenten des Gravitationstensors (2.10) bestimmt. Bezogen auf das Störpotential gilt hier für das in Abschnitt 2.1.1 eingeführte lokale Koordinatensystem entsprechend, ohne Einführung einer sphärischen Näherung,

$$W_{[ij]_P} - U_{[ij]_P} = V_{[ij]_P} - V_{[ij]_P}^N = T_{[ij]_P} = \text{grad}(\text{grad}(T_P)) = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial i \partial j} \right)_P = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}_P. \quad (2.25)$$

### 2.1.4 Kugelfunktionsentwicklung der relevanten Funktionale

Die Schwereanomalie  $\Delta g$  und der Tensor  $T_{[ij]}$  sind für diese Arbeit von Interesse. Die Kugelfunktionsentwicklung dieser beiden Funktionale des Störpotentials  $T$  ergibt sich aus der Anwendung der Beziehungen (2.22) bzw. (2.25) auf die Reihenentwicklung (2.16a). Für die Untersuchungen in dieser Arbeit wird die Schwereanomalie auf Basis von ellipsoidischen Näherungen (1. Ordnung), wie sie in (Wenzel, 1985) angegeben sind, berechnet:

$$\Delta g(\theta_P, \lambda_P, r_P) = \frac{GM}{r_P^2} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r_P} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{a}_{nm} \cos(m\lambda_P) + \Delta \bar{b}_{nm} \sin(m\lambda_P)) \right. \\ \left. \left[ \left( \frac{r_P}{\gamma_Q} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_Q + (n+1) \sin(\varphi_Q + \theta_P) \right) \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) - \cos(\varphi_Q + \theta_P) \frac{d\bar{P}_{nm}(\cos \theta_P)}{d\theta} \right] \right\}. \quad (2.26)$$

Neben den Kugelkoordinaten  $\theta_P$ ,  $\lambda_P$  und  $r_P$  des Berechnungspunktes  $P$  ist die ellipsoidische Breite  $\varphi_Q$  des Punktes  $Q$  erforderlich. Der Gradient  $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$  der Normalschwere kann nach (Wenzel, 1985, S. 19, 20) in Form von Reihenentwicklungen berechnet werden. Rekursionsformeln für die normierten Kugelfunktionen  $\bar{P}_{nm}$  und ihre Ableitungen sind in (Wenzel, 1985) angegeben. Die der Fundamentalgleichung (2.24) entsprechende sphärische Näherung ergibt sich aus (2.26) mit  $\sin(\varphi_Q + \theta_P) \approx 1$ ,  $\cos(\varphi_Q + \theta_P) \approx 0$  und  $\left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_Q \approx -\frac{2\gamma}{r}$ . Dann gilt die einfache Beziehung zwischen den Kugelflächenfunktionen des Störpotentials

$$T_n(\theta_P, \lambda_P, r_P) = \frac{GM}{a} \left( \frac{a}{r_P} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta_P, \lambda_P) + \Delta \bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta_P, \lambda_P)] \quad (2.27)$$

und der sphärisch-harmonischen Entwicklung der Schwereanomalien

$$\Delta g(\theta_P, \lambda_P, r_P) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, r_P) \quad (2.28)$$

mit

$$\Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, r_P) = \left( \frac{1}{r_P}(n+1) - \frac{2}{r_P} \right) T_n(\theta_P, \lambda_P, r_P) = \frac{n-1}{r_P} T_n(\theta_P, \lambda_P, r_P). \quad (2.29)$$

Für die Entwicklung der Kugelfunktionsdarstellung des Tensors  $T_{[ij]}$  werden die zweiten Ableitungen in sphärischen Koordinaten  $\theta$ ,  $\lambda$  und  $r$  geschrieben. In einem lokalen Koordinatensystem ( $x$  nach Norden,  $y$  nach Osten und  $z$  radial nach außen) gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial i \partial j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial i \partial j} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \cot \theta \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \theta} \right) & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r \partial \theta} \\ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \cot \theta \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} & \frac{1}{r \sin \theta} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \lambda} \right) \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r \partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \lambda} \right) & \frac{\partial^2}{\partial r^2} \end{bmatrix},$$

vgl. (Ditmar und Klees, 2002; Moritz, 1971; Tscherning, 1976a). Für die Berechnung der Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  mit Hilfe eines Kugelfunktionsmodells folgt daraus

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r^2} T_{\theta\theta} \\ T_{xy} &= T_{yx} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\cot \theta T_\lambda - T_{\theta\lambda}) \\ T_{xz} &= T_{zx} = \frac{1}{r^2} T_\theta - \frac{1}{r} T_{r\theta} \\ T_{yy} &= \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r^2} \cot \theta T_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} T_{\lambda\lambda} \\ T_{yz} &= T_{zy} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( T_{r\lambda} - \frac{1}{r} T_\lambda \right) \\ T_{zz} &= T_{rr}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Vereinbart man für die Kugelflächenfunktionen und ihre ersten und zweiten Ableitungen die folgende Kurzschreibweise

$$P_{nm} = \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad DP_{nm} = \frac{d\bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{d\theta} \quad \text{und} \quad DDP_{nm} = \frac{d^2\bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{d\theta^2}, \quad (2.31)$$

dann können die in (2.30) verwendeten Ableitungen, ausgehend von der Kugelfunktionsentwicklung (2.16b) des Störpotentials, geschrieben werden als

$$T_r = \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{GM}{a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{a}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{b}_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm} \quad (2.32a)$$

$$T_\theta = \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{GM}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{a}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{b}_{nm} \sin(m\lambda)] DP_{nm} \quad (2.32b)$$

$$T_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{GM}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m [-\Delta \bar{a}_{nm} \sin(m\lambda) + \Delta \bar{b}_{nm} \cos(m\lambda)] P_{nm} \quad (2.32c)$$

$$T_{rr} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{GM}{a^3} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+3} (n+1)(n+2) \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{a}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{b}_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm} \quad (2.32d)$$

$$T_{r\theta} = \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} = -\frac{GM}{a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{a}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{b}_{nm} \sin(m\lambda)] DP_{nm} \quad (2.32e)$$

$$T_{r\lambda} = \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \lambda} = \frac{GM}{a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n m [\Delta \bar{a}_{nm} \sin(m\lambda) - \Delta \bar{b}_{nm} \cos(m\lambda)] P_{nm} \quad (2.32f)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{GM}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{a}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{b}_{nm} \sin(m\lambda)] DDP_{nm} \quad (2.32g)$$

$$T_{\theta\lambda} = \frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial\lambda} = \frac{GM}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m [-\Delta\bar{a}_{nm} \sin(m\lambda) + \Delta\bar{b}_{nm} \cos(m\lambda)] DP_{nm} \quad (2.32h)$$

$$T_{\lambda\lambda} = \frac{\partial^2 T}{\partial\lambda^2} = -\frac{GM}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m^2 [\Delta\bar{a}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta\bar{b}_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm} . \quad (2.32i)$$

Die Ausdrücke unterscheiden sich durch die Einführung von (2.31) von den Angaben in (Ditmar und Klees, 2002, S. 6). Rekursionsformeln für die Kugelfunktionen  $\bar{P}_{nm}$  und ihre erste Ableitung sind in (Wenzel, 1985) angegeben, die der zweiten Ableitung können daraus leicht entwickelt werden. Eine alternative Darstellung von (2.32a)-(2.32i) zur Vermeidung von Singularitäten an den Polen ist in (Petrovskaya und Vershkov, 2006) zu finden.

Aufgrund der horizontalen Ableitungen kann für die Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  mit Ausnahme von  $T_{zz}$  kein direkter Zusammenhang zu den Kugelflächenfunktionen  $T_n$  aus (2.27) angegeben werden. Eine entsprechende Darstellung gelingt auf Basis von tensoriellen Kugelflächenfunktionen für Kombinationen der einzelnen Komponenten  $T_{[ij]}$  (Rummel und van Gelderen, 1992; Thalhammer, 1995; Rummel, 1997), vgl. Abschnitt 5.1.4. Für die radiale Komponente  $T_{zz}$  kann angegeben werden

$$T_{zz}(\theta_P, \lambda_P, r_p) = \sum_{n=2}^{\infty} T_{zz,n}(\theta_P, \lambda_P, r_p) \quad (2.33)$$

mit

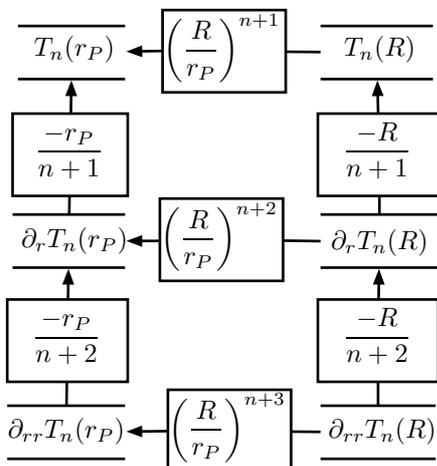
$$T_{zz,n}(\theta_P, \lambda_P, r_p) = \frac{(n+1)(n+2)}{r_p^2} T_n(\theta_P, \lambda_P, r_p) . \quad (2.34)$$

Die Beziehungen der radialen Ableitungen von  $T$  auf Basis der Kugelflächenfunktionen  $T_n$  und deren Fortsetzung nach oben oder unten im Außenraum der Erde lassen sich im so genannten MEISSL-Schema (Abb. 2.2) darstellen, das für die angesprochenen Kombinationen der horizontalen Ableitungen erweitert werden kann (Rummel und van Gelderen, 1995).

### 2.1.5 Bildung von Blockmittelwerten

Zur Reduktion der Datenmenge ist es üblich, aus den Punktwerten Blockmittelwerte abzuleiten. Dabei werden die hohen Frequenzen in den Daten reduziert. Blockmittelwerte können daher größer als Punktwerte abgetastet werden, ohne dass Fehler aufgrund von Aliasing auftreten. In (Jekeli, 1981a) werden verschiedene Verfahren (z. B. GAUSS-Filterung) zur Berechnung eines repräsentativen Blockmittelwertes vorgestellt. Gehen die Punktwerte eines Kompartiments mit gleicher Gewichtung ein, ergibt sich der Blockmittelwert  $\overline{\Delta g}$  als Integral der Punktwerte über die Kompartimentsfläche  $\Delta\sigma$  zu

$$\overline{\Delta g} = \frac{1}{\Delta\sigma} \int_{\Delta\sigma} \Delta g(\varphi, \lambda, h = \text{const.}) d\Delta\sigma . \quad (2.35)$$



**Abbildung 2.2.** MEISSL-Schema nach (Rummel und van Gelderen, 1995). Es sind die spektralen Transformationen auf Basis der Kugelflächenfunktionen  $T_n$  für die ersten und zweiten radialen Ableitungen angegeben; in Pfeilrichtung wird das Signal stets geglättet (mit  $r_P > R$ ).

Ist für hohe Genauigkeitsansprüche die individuelle Punkthöhe der Punkteingangsdaten zu berücksichtigen, sollte vor der Mittelbildung die Reduktion der Eingangsdaten im Sinne der Gradientenmethode der MOLODENSKII-Reihe (s. Abschnitt 3.4.1) auf eine gemeinsame Referenzkugel durchgeführt werden, da in der Mittelbildung (2.35) von einer konstanten Eingangsdatenhöhe ausgegangen wird. Häufig werden für eine einfache Datenspeicherung und -verwaltung winkelgleiche Kompartimente eines geographischen Gitters gewählt, begrenzt durch Linien konstanter Länge und Breite des geographischen Koordinatensystems (Weber, 1984; Wenzel, 1985). Die Flächen der Kompartimente eines Gebietes variieren aufgrund der Meridiankonvergenz.

Das Integral (2.35) kann über die numerische Integration der Punktwerte berechnet werden, wenn die Punktwerte gleichmäßig das gesamte Kompartiment abdecken (Weber, 1984):

$$\overline{\Delta g} = \frac{1}{\Delta\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta g_i \Delta\sigma_i. \quad (2.36)$$

Bei konstanter Größe und geeignet kleiner Ausdehnung der Kompartimentsfläche gilt genähert

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta\sigma}{n} = \text{const.} \quad (2.37)$$

und (2.36) vereinfacht sich zum arithmetischen Mittel der Punktdaten (Behrend, 1999)

$$\overline{\Delta g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta g_i. \quad (2.38)$$

## 2.2 Statistische Grundlagen

Im folgenden Abschnitt werden Begriffe und Zusammenhänge aus dem Bereich der Zufallszahlen und der stochastischen Prozesse eingeführt. Die Erläuterungen zur Rauscherzeugung für das synthetische Erdmodell im Kapitel 7 greifen auf diese Grundlagen zurück. Die Theorie stochastischer Prozesse findet in der stochastischen Interpretation der Schwerefeldfunktionale Anwendung. Dazu werden im zweiten Abschnitt die Kovarianzfunktionen der Funktionale des Erdschwerefeldes definiert. Diese werden in der Kollokation nach kleinsten Quadraten und in der Genauigkeitsabschätzung verwendet. Schließlich werden die Gradvarianzen als spektrale Darstellung der Kovarianzfunktionen eingeführt.

### 2.2.1 Zufallszahlen und eindimensionale stochastische Prozesse

Eigenschaften und Kenngrößen von Zufallszahlen (Pelzer, 1985; Meier und Keller, 1990; Papoulis und Pillai, 2002) werden in diesem Abschnitt eingeführt und auf eindimensionale stochastische Prozesse übertragen (Papoulis, 1977; Papoulis und Pillai, 2002; Bendat und Piersol, 1986; Meier und Keller, 1990).

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße  $X$ , deren Realisierungen

$$\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \quad (2.39)$$

in gewissen Grenzen ungewiss sind, ist definiert als

$$\mu_X = E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right). \quad (2.40)$$

Der Mittelwert  $\bar{x}$  ist eine Schätzung des Erwartungswertes aus  $n < \infty$  Realisierungen  $x_i$  mit  $i = 1, \dots, n$ . Der Erwartungswert wird auch als nichtzentrales Moment der Ordnung 1 der Zufallsgröße bezeichnet (Meier und Keller, 1990, S. 21). Die zufälligen Abweichungen der Realisierungen vom Erwartungswert werden mit  $\varepsilon_i = x_i - \mu_X$  bezeichnet und im Vektor  $\underline{\varepsilon}$  zusammengefasst. Die zugehörige Zufallsgröße wird mit  $\epsilon$  bezeichnet. Die Varianz bzw. das zentrale Moment der Ordnung 2 ist als Erwartungswert der Quadrate der zufälligen Abweichungen  $\varepsilon_i$  definiert:

$$\sigma_X^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right). \quad (2.41)$$

Die Kovarianz bzw. das zentrale Moment der Ordnung  $(1, 1)$  zwischen den Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  ist als Erwartungswert des Produktes der zufälligen Abweichungen

$$\sigma_{XY} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y) \right) \quad (2.42)$$

definiert. Im Folgenden werden die in der Geodäsie üblichen Begriffe Erwartungswert, Varianz und Kovarianz verwendet.

Die Definitionen von Erwartungswert (2.40) und Varianz (2.41) lassen sich für mehrdimensionale Zufallsvektoren

$$\underline{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T \quad (2.43)$$

erweitern. Eine Komponente  $X_i$  enthält  $m$  Realisierungen  $x_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Der Vektor der Erwartungswerte ist

$$\underline{\mu} = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]^T = [E(X_1) \ E(X_2) \ \dots \ E(X_n)]^T. \quad (2.44)$$

Die symmetrische Kovarianzmatrix des mehrdimensionalen Zufallsvektors  $\underline{X}$  enthält Varianzen und Kovarianzen der Komponenten  $X_i$  und ist als Erwartungswert der Produkte der jeweiligen zufälligen Abweichungen des mehrdimensionalen Zufallsvektors  $\underline{\epsilon}$  unter Anwendung von (2.41) bzw. (2.42) auf die Realisierungen  $\epsilon_{ij}$  mit  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, m$  definiert:

$$\underline{C}_{XX} = E(\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Für linear unabhängige Zufallsgrößen  $X_i$  ist die Kovarianzmatrix (2.45) positiv definit (Papoulis und Pillai, 2002, S. 251). Die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(x_i, \Delta x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ h(x_i, \Delta x) = \frac{k_i}{n} \right\} \quad (2.46)$$

als Grenzwert der Häufigkeitsfunktion  $h$ , der relativen Häufigkeit, stellt eine weitere Charakterisierung von Zufallszahlen dar, wobei  $x_i$  die Lage eines Intervalls der Breite  $\Delta x$  angibt, in dem eine Anzahl von  $k_i$  Realisierungen der Grundgesamtheit der Zufallszahl  $X$  enthalten sind. Wird die Funktion mit der Intervallbreite  $\Delta x$  normiert, ergibt sich für "differentiell schmale" Intervalle die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow dx} \left\{ \frac{p(x_i, \Delta x)}{\Delta x} \right\}. \quad (2.47)$$

Das Integral

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \quad (2.48)$$

über die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine Zufallsgröße unterhalb einer Grenze  $x$  liegt, und wird als Verteilungsfunktion bezeichnet. Eine besondere Rolle nimmt dabei die Normalverteilung

$$F^N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\sigma^2}} d\xi \quad (2.49)$$

ein, da zufällige Messfehler im Allgemeinen als normalverteilt angenommen werden. Dies wird mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung begründet, wonach die Fehler als Summe von sehr vielen voneinander unabhängigen Elementarfehlern aufgefasst werden können (Pelzer, 1985, S. 20). Ist eine Zufallsgröße  $X$  normalverteilt, wird dies häufig kurz mit  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  angegeben. In (2.49) wurde der Erwartungswert  $\mu = 0$  angenommen. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung (2.49) lautet dann

$$f^N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}}. \quad (2.50)$$

Gleichung (2.50) beschreibt die GAUSS'sche Glockenkurve.

Ein (kontinuierlicher) stochastischer Prozess ist ein Ensemble von Zufallsgrößen  $X(t)$  in einem Wahrscheinlichkeitsraum, die von einem kontinuierlich laufenden Parameter  $t$  aus der reellen Zahlenmenge  $T$  abhängen (Meier und Keller, 1990, S. 53; Papoulis und Pillai, 2002, S. 373). Einen stochastischen Prozess kann man als mathematische Beschreibung eines physikalischen Prozesses in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  auffassen. Diskrete / digitale Realisierungen des Prozesses zu diskreten Zeitpunkten  $t = t_i$  werden als Zeitreihe bezeichnet. Bei einem stochastischen Prozess lassen sich die Realisierungen im Gegensatz zu einem deterministischen Prozess nicht voraussagen (Bendat und Piersol, 1986). Der Erwartungswert

$$\mu_X(t) = E(X(t)) \quad (2.51)$$

eines stochastischen Prozesses gibt den Grenzwert (2.40) des Mittelwertes über den Wahrscheinlichkeitsraum des Prozesses in Abhängigkeit von dem Parameter  $t$  an (Papoulis und Pillai, 2002, S. 376). Die Autokovarianzfunktion des Prozesses ist entsprechend definiert als

$$C_{XX}(t, \tau) = E((X(t) - \mu_X(t)), (X(t + \tau) - \mu_X(t + \tau))) . \quad (2.52)$$

Hängen Erwartungswert und Autokovarianzfunktion nicht vom jeweiligen Zeitpunkt  $t$  ab, gilt also  $\mu_X(t_1) = \mu_X(t_2) = \mu_X$  und  $C_{XX}(t_1, \tau) = C_{XX}(t_2, \tau) = C_{XX}(\tau)$  für alle  $t_1, t_2 \in T$ , dann bezeichnet man den Prozess als stationär (z. B. Papoulis und Pillai, 2002, S. 388; Bendat und Piersol, 1986, S. 111). Wird die Autokovarianzfunktion mit der Varianz normiert, spricht man von der Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$ . Entsprechend dem Erwartungswert (2.40) bei Zufallszahlen mit zunächst  $n < \infty$  lässt sich ein zeitlicher Mittelwert über eine einzige Realisierung  $x(t)$  eines stationären Prozesses definieren als (vgl. Papoulis und Pillai, 2002, S. 523)

$$\mu_{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x(t) , \quad (2.53)$$

ebenso eine zeitlich definierte Autokovarianzfunktion

$$C_{XX_n}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x(t) - \mu_X(t))(x(t + \tau) - \mu_X(t + \tau)) \quad (2.54)$$

entsprechend der Kovarianz (2.42) für  $n < \infty$ . Die Varianz (2.41) entspricht der Autokovarianzfunktion (2.54) für  $\tau = 0$ . Stationäre Prozesse, bei denen der zeitliche Mittelwert  $\mu_{X_n}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen den Erwartungswert  $\mu_X$ , der über den Wahrscheinlichkeitsraum gebildet wird, konvergiert, heißen ergodisch (Papoulis, 1977, S. 352; Papoulis und Pillai, 2002, S. 524). Diese Prozesse sind von Interesse, da in einer einzigen Realisierung bereits alle Informationen über den Gesamtprozess enthalten sind.

Man spricht von einem GAUSS'schen Prozess, wenn die Realisierungen  $x(t)$  eines stochastischen Prozesses über alle Zeiten  $t$  normalverteilt sind (Hänsler, 2001, S. 101). Seine Eigenschaften werden vollständig von dem Erwartungswert und der Kovarianzfunktion (Momente 1. und 2. Ordnung) beschrieben.

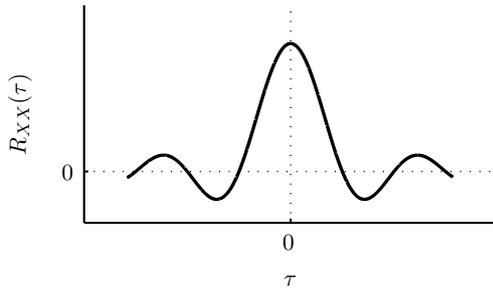
Das WIENER-KHINTSCHIN-Theorem führt die Spektraldichte  $S_X(f)$  (auch Powerspektrum) eines stationären Prozesses als Spektralzerlegung der Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$  ein (Meier und Keller, 1990, S. 64). Die Spektralzerlegung wird mit einer FOURIER-Transformation

$$x^{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ift} x(t) dt ,$$

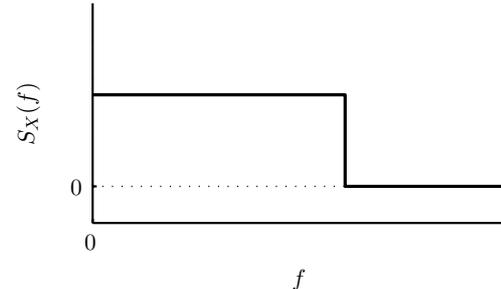
mit der Frequenz  $f$  und  $i = \sqrt{-1}$  durchgeführt. Die Spektraldichte beschreibt die Veränderungsrate der Kovarianz des Prozesses in Abhängigkeit von seiner Frequenz  $f$ , sie ist definiert als (Papoulis, 1977, S. 303)

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-if\tau} d\tau . \quad (2.55)$$

Bei einem reellwertigen, in einem endlichen Intervall  $(-T, T)$  gegebenen Prozess kann die Spektraldichte aus der



**Abbildung 2.3.** Korrelationsfunktion eines tiefpassbegrenzten Prozesses (Bendat und Piersol, 1986).



**Abbildung 2.4.** Spektraldichtefunktion eines tiefpassbegrenzten Prozesses (Bendat und Piersol, 1986).

Realisierung  $x(t)$  des Prozesses abgeschätzt werden als (Papoulis, 1977, S. 380)

$$\tilde{S}_X(f) = \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-ift} dt \right|^2. \quad (2.56)$$

Es existieren verschiedene Ansätze zur diskreten Auswertung von (2.56), häufig verwendet wird die Methode nach (Welch, 1967).

Bei stationären (reellwertigen) Prozessen ist die Kovarianz- bzw. Korrelationsfunktion mit  $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$  eine gerade Funktion (Bendat und Piersol, 1986, S. 113; Hänsler, 2001, S. 75), folglich ist die Spektraldichtefunktion (2.55) eine positive, reellwertige, gerade Funktion (Bendat und Piersol, 1986, S. 122; Hänsler, 2001, S. 87). Ist die Spektraldichtefunktion über alle Frequenzen konstant, spricht man von weißem Rauschen, die Realisierungen des Prozesses sind unkorreliert. Weißes Rauschen kann mit realen Daten nicht verwirklicht werden, da die Varianz des Prozesses gegen Unendlich strebt, s. a. (Rummel und Sansò, 1994). Die Kovarianzfunktion des weißen Rauschens entspricht der Kovarianzfunktion der Ableitung eines WIENER-Prozesses, der ein Modell für die mathematische Beschreibung der BROWNSchen Bewegung eines Partikels in einer Flüssigkeit ist (Papoulis und Pillai, 2002, S. 449). In der stochastischen Modellierung des weißen Rauschens wird daher auch das WIENERSche Wahrscheinlichkeitsmaß (engl. WIENER measure) angewendet, s. a. (Sansò und Sona, 1995). Streng genommen ist demnach für realisiertes unkorreliertes Rauschen von bandlimitiertem oder tiefpassbegrenztem weißem Rauschen zu sprechen, im Weiteren wird der Begriff des unkorrelierten Rauschens bevorzugt. Die Korrelationsfunktion eines tiefpassbegrenzten Prozesses ist in Abb. 2.3 skizziert, die zugehörige Spektraldichtefunktion in Abb. 2.4. Analog wird ein Rauschen, dessen Spektraldichtefunktion nicht konstant ist, als farbiges Rauschen bzw. korreliertes Rauschen bezeichnet.

Bei (zweidimensionalen) stochastischen Prozessen auf der Kugel ist zu beachten, dass sich aufgrund des beschränkten Definitionsbereichs der Kugeloberfläche kein kontinuierliches, sondern ein Linienspektrum ergibt (Meier und Keller, 1990, S. 108). Die Beschränkung des Definitionsbereiches hat außerdem zur Folge, dass ergodische Prozesse auf der Kugel seltener sind, da die Stichprobenmenge höchstens so groß wie die Kugeloberfläche ist und nicht für  $n \rightarrow \infty$  betrachtet werden kann (Meier und Keller, 1990, S. 161).

### 2.2.2 Kovarianzfunktionen und Gradvarianzen

Kovarianzfunktionen und Gradvarianzen werden zur Charakterisierung des statistischen Verhaltens des Schwerefeldes verwendet. Sie werden in der Signalmodellierung und zur Genauigkeitsabschätzung eingesetzt. Die Schwerefeldfunktionale sind dazu als Signale eines stationären stochastischen Prozesses auf der Kugel aufzufassen.<sup>3</sup> Außerdem wird Homogenität und Isotropie vorausgesetzt, um durch die Unabhängigkeit von Ort und Richtung den mehrdimensionalen Prozess (in Abhängigkeit von den geographischen Koordinaten  $\varphi$  und  $\lambda$  der Punkte) auf einen eindimensionalen Prozess (in Abhängigkeit von dem sphärischen Abstand  $\psi$  zwischen den Punkten)

<sup>3</sup>In wieweit dies gerechtfertigt ist, ist zahlreich in der Literatur diskutiert worden, z. B. (Moritz, 1973, 1980, S. 308ff; Moritz und Sansò, 1981). Dabei wird nicht der Einsatz der Terminologie und Methoden der stochastischen Prozesse kritisiert, sondern auf eine sorgfältige Wahl der Startannahmen und eine entsprechende Interpretation der Ergebnisse hingewiesen, z. B. (Krarup, 1969, S. 22; Lauritzen, 1973, S. 92; Tscherning, 1975, S. 109).

zurückzuführen. In der regionalen Schwerefeldapproximation wird diesen Voraussetzungen näherungsweise durch Reduktion der kurz- und langwelligen Signalanteile (vgl. Remove-Restore-Technik in Abschnitt 3.1) entsprochen. Für eine erwartungstreue Schätzung ist außerdem Ergodizität zu unterstellen, da aufgrund der nur einen vorhandenen Realisierung des Erdschwerefeldes der Erwartungswert (2.51) bezüglich des Wahrscheinlichkeitsraums nicht gebildet werden kann (Meier und Keller, 1990, S. 158). Auf die Eigenschaft der Normalverteilung muss verzichtet werden, da ein homogener, isotroper GAUSS'scher Prozess auf der Kugel nicht ergodisch sein kann (Lauritzen, 1973). Für die erwartungstreue Signalmodellierung ist die Eigenschaft der Ergodizität wichtiger als die der Normalverteilung (Moritz, 1973, S. 69). Allerdings ist bei der Anwendung statistischer Tests dieser Verzicht zu berücksichtigen, z. B. (Wei, 1987; Jekeli, 1991). Für die Modellierung des Rauschens gelten andere Voraussetzungen, die am Ende dieses Abschnittes besprochen werden.

In der Signalmodellierung wird für einen homogenen, isotropen und ergodischen Prozess  $f(\theta, \lambda, R)$ , definiert auf der Kugel mit dem Radius  $R$ , der Wahrscheinlichkeitsraum in (2.51) durch den Rotationsgruppenraum ersetzt (Moritz, 1978). Durch zufällige Rotation der homogenen und isotropen Funktion wird ein stochastischer Prozess konstruiert, der ergodisch ist. Der Erwartungswert des stochastischen Prozesses geht über in den Mittelwert (Moritz, 1978, S. 48)

$$M(f(R)) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} f(\theta, \lambda, R) \sin \theta d\theta d\lambda d\alpha = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\theta, \lambda, R) \sin \theta d\theta d\lambda. \quad (2.57)$$

Der Mittelwertoperator besitzt die Eigenschaften der Homogenität und Isotropie bezüglich der Kugel (Moritz, 1980, S. 82). Der Mittelwert (2.57) der Schwerefeldfunktionale wird zu null, wenn ihre Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen keinen Term nullten Grades enthält. Dies wurde bereits in (2.16a) für die Störgrößen des Schwerefeldes vorausgesetzt. Ebenso wird auch im Folgenden vorausgesetzt, dass die Terme ersten Grades entfallen. Die Kovarianzfunktion

$$C_{ff}(\psi, R, R) = M(f(R), f(R)) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} f(\theta_P, \lambda_P, R) f(\theta_Q, \lambda_Q, R) \sin \theta d\theta d\lambda d\alpha \quad (2.58)$$

des homogenen, isotropen und ergodischen Prozesses hängt allein von der sphärischen Distanz  $\psi$  zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$  ab und wird über eine LEGENDRE-Transformation in Gradvarianzen (engl. *degree variances*)

$$\sigma_n^2(f(R), f(R)) = \frac{2n+1}{2} \int_{\psi=0}^{\pi} C_{ff}(\psi, R, R) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \quad (2.59)$$

mit den LEGENDRE-Polynomen  $P_n$  zerlegt (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 257). Diese Zerlegung entspricht der Spektraldichte (2.55) für isotrope Prozesse in der Ebene<sup>4</sup>. Die Gradvarianzen kennzeichnen die mittlere Intensität einer Teilwelle des sphärisch-harmonischen Grades  $n$ . Durch Akkumulation der Gradvarianzen  $\sigma_n^2(f(R), f(R))$  erhält man wieder die Kovarianzfunktion (2.58) mit

$$C_{ff}(\psi, R, R) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2(f(R), f(R)) P_n(\cos \psi). \quad (2.60)$$

Als Kenngrößen einer Kovarianzfunktion werden die Varianz  $C_{ff}(\psi = 0)$ , die Korrelationslänge  $\psi_K$  (Halbwertsbreite) und der Krümmungsparameter  $\chi$  angegeben (Moritz, 1980, S. 174). Für die Korrelationslänge gilt  $C_{ff}(\psi_K) = \frac{1}{2} C_{ff}(\psi = 0)$  und für den Krümmungsparameter  $\chi = \kappa \psi_K^2 / C_{ff}(\psi = 0)$  mit der Krümmung  $\kappa$  der Kovarianzfunktion für  $\psi = 0$ .

Durch Einsetzen der Gleichung (2.58) in (2.59) und Verwendung der Beziehung (2.60) ergeben sich nach (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 258) die Gradvarianzen des Störpotentials  $T$  als Mittel über die Kugelflächenfunktionen  $T_n$  bzw. aus der Summe der quadrierten harmonischen Koeffizienten  $\Delta \bar{a}_{nm}$  und  $\Delta \bar{b}_{nm}$  zu

$$\sigma_n^2(T(R), T(R)) = M(T_n(R), T_n(R)) = \left( \frac{GM}{R} \right)^2 \left( \frac{a}{R} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{a}_{nm}^2 + \Delta \bar{b}_{nm}^2). \quad (2.61)$$

<sup>4</sup>Dabei ist die Frequenz  $f$  in (2.55) nicht mit dem hier verwendeten Funktional  $f$  zu verwechseln.

Außerhalb der Kugel mit dem Radius  $R$  gilt für die harmonische Kovarianzfunktion des Störpotentials

$$C_{TT}(\psi, r_P, r_Q) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2(T(R), T(R)) \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi_{PQ}) \quad (2.62)$$

mit den Radien  $r_P$  und  $r_Q$  der Punkte  $P$  und  $Q$  (Moritz, 1980, S. 84).

Wird für die Darstellung der Gradvarianzen  $\sigma_n^2(f(R), f(R))$  ein geeignetes Modell gewählt, lässt sich die Reihenentwicklung (2.60) bzw. (2.62) in geschlossenen Formeln ausdrücken und effizient berechnen. Ein Beispiel für ein solches Modell ist in (Tscherning und Rapp, 1974) dargestellt, aufgrund seiner weiten Verbreitung wird es häufig kurz als TSCHERNING-RAPP-Modell bezeichnet. Das Modell wurde aus Kugelfunktionskoeffizienten bis zum Grad 10 (Satellitenbeobachtungen) und aus  $1^\circ$  flächengleichen Schwereanomaliedatensätzen abgeleitet (s. a. Torge, 2001, S. 222). Andere Gradvarianzmodelle sind z. B. in (Kaula, 1966, S. 98; Jekeli, 1978; Rapp, 1979) zu finden. Ein Vergleich der genannten Modelle wurde in (Wenzel, 1985; Pail, 2004) durchgeführt. In dieser Arbeit wird das TSCHERNING-RAPP-Modell verwendet, da vergleichbare aktuelle Arbeiten zur Berechnung des Gravitationstensors und zu Genauigkeitsuntersuchungen auf diesem Modell basieren (Bouman und Koop, 2003a; Arabelos et al., 2007; Ellmann, 2005). Die Modellparameter werden dabei an die regionalen Datensätze angepasst, vgl. Abschnitt 3.5.3 und 9.3.2.

Im TSCHERNING-RAPP-Modell werden die Gradvarianzen des Störpotentials wie folgt modelliert

$$\begin{aligned} \sigma_n^2(T(R_B), T(R_B)) &= \frac{A}{(n-1)(n-2)(n+B)} \text{ für } n > 2 \\ \sigma_2^2(T(R_B), T(R_B)) &= 7.5 \text{ mgal}^2 R^2 \left( \frac{R^2}{R_B^2} \right)^3 \\ \text{mit } A &= 425.28 \text{ mgal}^2 R_B^2, \quad B = 24, \quad R_B = R - 1225 \text{ m}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Die Gradvarianzen beziehen sich dabei nicht auf die mittlere Erdkugel mit  $R = 6371$  km sondern auf eine im Inneren der Erde liegende BJERHAMMAR-Kugel mit dem Radius  $R_B < R$ . So ist garantiert, dass die Reihenentwicklung (2.60) bzw. (2.62) für Punkte auf der Erdkugel konvergiert (Heck, 1979, S. 55). Die Gradvarianzen bezogen auf die Radien  $r_P$  und  $r_Q$  zweier Punkte  $P$  und  $Q$  im Außenraum des Erdkörpers können entsprechend (2.62) mit

$$\sigma_n^2(T(r_P), T(r_Q)) = \sigma_n^2(T(R_B), T(R_B)) \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} \quad (2.64)$$

berechnet werden.

Die Kovarianzfunktionen linearer Funktionale  $f$  und  $g$  des Störpotentials  $T$  können durch Anwendung der linearen Operatoren  $L_f^P$  und  $L_g^Q$  für die Punkte  $P$  und  $Q$  aus der Kovarianzfunktion des Störpotentials mit

$$C_{fg}(\psi_{PQ}, r_P, r_Q) = L_f^P L_g^Q C_{TT}(\psi_{PQ}, r_P, r_Q) \quad (2.65)$$

abgeleitet werden (Kovarianz-Fortpflanzungsgesetz, Moritz, 1980, S. 87). Die Kovarianzfunktion für Schwereanomalien (2.24) und für die Elemente des Gravitationstensors (2.25) werden auf diese Weise berechnet, ausgehend von Gleichung (2.60) für die Kovarianzfunktion des Störpotentials.

Aufgrund der Homogenität und Isotropie der Kovarianzfunktionen  $C_{\Delta g \Delta g}(\psi_{PQ}, R, R)$  und  $C_{T_{zz} T_{zz}}(\psi_{PQ}, R, R)$  ergibt sich mit (2.29) bzw. (2.34) ein direkter Zusammenhang zwischen den zugehörigen Gradvarianzen und den Gradvarianzen des Störpotentials mit

$$\sigma_n^2(\Delta g(R), \Delta g(R)) = \left( \frac{n-1}{R} \right)^2 \sigma_n^2(T(R), T(R)) \quad (2.66)$$

und

$$\sigma_n^2(T_{zz}(R), T_{zz}(R)) = \left( \frac{(n+1)(n+2)}{R^2} \right)^2 \sigma_n^2(T(R), T(R)). \quad (2.67)$$

Die spektralen Signalinhalte des Störpotentials, der Schwereanomalien und der radialen Tensorkomponenten auf Basis von Gradvarianzen des TSCHERNING-RAPP-Modells sind in Tabelle 2.1 angegeben.

**Tabelle 2.1.** Signalinhalte der Funktionale Störpotential  $T$ , Schwereanomalie  $\Delta g$  und der radialen zweiten Ableitung  $T_{zz}$  in verschiedenen Spektralbereichen, berechnet nach dem Gradvarianzmodell (2.63) von (Tscherning und Rapp, 1974). Die Bezugsradien sind jeweils angegeben,  $R = 6371$  km.

Schwerefeld- struktur	Wellenlänge [km]	Grad $n_i - n_j$	$T$ ,		$\Delta g$ ,		$T_{zz}$ ,		$T_{zz}$ ,	
			$R$	$R$	$R$	$R$	$R$	$R + 250$ km		
			[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	[%]	[mgal]	[%]	[E]	[%]	[E]	[%]
langwellig	20000-4000	2-10	±291.769	95.60	±12.62	8.88	±0.230	0.00	±0.162	24.07
	4000-1100	11-36	±58.708	3.87	±15.82	13.94	±0.682	0.01	±0.240	52.65
mittelwellig	1100-220	37-180	±21.104	0.50	±22.50	28.19	±3.371	0.20	±0.160	23.28
kurzwellig	220-110	181-360	±4.075	0.02	±15.61	13.58	±6.594	0.61	±0.001	0.00
	110-30	361-1300	±2.180	0.01	±19.98	22.24	±23.815	7.99	±0.000	0.00
	30-20	1300-2000	±0.399	0.00	±9.85	5.41	±25.156	8.92	±0.000	0.00
ultrakurzwellig	20-2	2001-20000	±0.254	0.00	±11.80	7.76	±76.212	81.86	±0.000	0.00
	2-0	20001-∞	±0.000	0.00	±0.15	0.00	±5.391	0.41	±0.000	0.00
gesamt	20000-0	2-∞	±298.400	100	±42.37	100	±84.233	100	±0.331	100

Die Kovarianzfunktionen aller übrigen Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  sind nicht isotrop. Daher können keine Gradvarianzen der Einzelkomponenten angegeben werden, jedoch gelingt eine Darstellung für bestimmte Kombinationen der Tensorkomponenten (Rummel und van Gelderen, 1992; Thalhammer, 1995; Rummel, 1997), vgl. Abschnitt 5.1.4.

Kovarianzfunktionen können empirisch durch diskrete Auswertung von (2.58) berechnet werden, z. B. (Knudsen, 1987; Denker, 1988). Eine empirische Berechnung im Ortsbereich erfolgt durch Aufsummation und Mittelbildung aller Produkte  $f_i f_j$  entsprechend der Entfernung  $\psi_{ij}$  in bestimmten Distanzklassen  $\psi_k$  als

$$\hat{C}_{ff}(\psi_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{\psi_k - \frac{\Delta\psi}{2} \leq \psi_{ij} < \psi_k + \frac{\Delta\psi}{2}} f_i f_j. \quad (2.68)$$

Die Funktion ist in der Praxis allerdings auf einen Bereich  $\psi < \pi$  begrenzt, weil die Daten  $f$  in der Regel nur in regionalen Gebieten vorliegen. So sollte in der diskreten Auswertung von (2.59) zur Berechnung der Gradvarianzen ein geeignetes Fenster zum Ausblenden der empirischen Kovarianzfunktion (2.68) verwendet werden, um den Integrationsfehler zu verringern, z. B. (Wenzel und Arabelos, 1981; Arabelos und Tziavos, 1987). Geht man von einer ebenen Approximation aus, lassen sich Kovarianzfunktion und Gradvarianzen auch im Frequenzraum mittels einer schnellen FOURIER-Transformation (engl. *fast Fourier transform*, FFT) berechnen, vgl. (Forsberg, 1984, 1986; Knudsen, 1987).

Im Gegensatz zur Signalmodellierung ist für die Modellierung des Rauschens die Eigenschaft der Normalverteilung von Interesse, da zufällige Messfehler als normalverteilt angenommen werden. Für das Rauschen kann der Erwartungswert (2.51) für prinzipiell beliebig viele Realisierungen formuliert werden (Moritz, 1980, S. 100). Für zufälliges Rauschen  $\epsilon$  gilt

$$E(\epsilon) = 0. \quad (2.69)$$

Entsprechend ist die Kovarianz des Rauschens der Erwartungswert des quadrierten Rauschens:

$$C_{\epsilon\epsilon} = E(\epsilon, \epsilon), \quad (2.70)$$

wobei  $C_{\epsilon\epsilon}(\psi)$  entsprechend der Autokovarianzfunktion (2.52) der Erwartungswert des Produktes zweier Rauschwerte ist, deren Bezugspunkte im Abstand  $\psi$  zueinander liegen. In dieser Arbeit wird von homogenen und isotropen Kovarianzfunktionen  $C_{\epsilon\epsilon}(\psi)$  des Rauschens ausgegangen, die nach (2.59) in Gradvarianzen spektral zerlegt werden können. Die Gradvarianzen des Rauschens werden als Fehlergradvarianzen (engl. *error degree variances*) bezeichnet. Die Fehlergradvarianzen des Störpotentials  $T$  ergeben sich aus den Varianzen  $\sigma^2(\bar{a}_{nm})$  bzw.  $\sigma^2(\bar{b}_{nm})$  der Kugelfunktionskoeffizienten eines GPM analog zu (2.61) hier als Erwartungswert der Quadrate der spektralen Zerlegung  $\epsilon_n$  des Rauschens  $\epsilon$  zu

$$\sigma_n^2(\epsilon T) = E(\epsilon_n(T), \epsilon_n(T)) = \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\sigma^2(\bar{a}_{nm}) + \sigma^2(\bar{b}_{nm})), \quad (2.71)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass das Rauschen  $\epsilon_n$  mit  $\epsilon_{n'}$  nicht korreliert ist, wenn  $n \neq n'$  gilt.

Für ein Gesamtsystem aus dem Signal  $f$  und dem Rauschen  $\epsilon$  wird sowohl der Erwartungswertoperator aus (2.69) als auch der Mittelwertoperator aus (2.57) angewendet. Das Signal hat dabei (am selben Ort) den Erwartungswert  $E(f) = f$  und für das Rauschen wird der Mittelwert  $M(\epsilon) = \epsilon$  definiert (Moritz, 1980, S. 100). Es gilt daher

$$E\{M(f + \epsilon, f + \epsilon)\} = E\{M(f, f)\} + E\{M(\epsilon, \epsilon)\} = M(f, f) + E(\epsilon, \epsilon) = C_{ff} + C_{\epsilon\epsilon}, \quad (2.72)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass Signal und Rauschen nicht miteinander korreliert sind. Aspekte der stochastischen Modellierung des weißen Rauschens werden auch in (Rummel und Sansò, 1994; Sansò und Sona, 1995) auf Basis des WIENERSchen Wahrscheinlichkeitsmaßes behandelt.

## 2.3 Satellitengradiometrie

Zur genauen und hochauflösenden Bestimmung des Erdschwerefeldes werden in der Regel drei Datenquellen miteinander kombiniert (Rummel, 1989): terrestrische Schweredaten (aus der Absolut- und Relativgravimetrie und im weiteren Sinne aus der See- und Fluggravimetrie), Daten über den Ozeanen aus der Satellitenaltimetrie und Potentialkoeffizienten aus der Analyse von Satellitenbahnen. Die terrestrischen Daten ermöglichen eine hohe Auflösung mit sehr hoher Genauigkeit, allerdings lassen sich Fehler im langwelligen Bereich durch regionale systematische Fehler bisher kaum vermeiden. Qualitativ hochwertige terrestrische Daten mit einer Genauigkeit von wenigen mgal in ausreichend homogener Überdeckung liegen für Kanada, die USA, Teile von Australien und Europa vor. In der Satellitenaltimetrie wird die Höhe der Meeresoberfläche über einem Referenzellipsoid bestimmt. Die mittlere Meeresoberfläche unterscheidet sich vom Geoid, die Differenz wird als Meeresoberflächentopographie bezeichnet. Sie wird durch Meeresströmungen und unterschiedliche Salzgehalte verursacht und ist für die Trennung von Geoid und Meeresoberfläche zu modellieren. Die Berechnung von Schwereanomalien aus Geoidhöhen lässt eine Genauigkeit von einigen mgal bei einer maximalen Auflösung von 1' bis 2' zu (Andersen et al., 2006). Der Vorteil von Daten abgeleitet aus der Analyse von Satellitenbahnen ist deren beinahe globale Überdeckung mit homogener Genauigkeit, nachteilig ist, dass mit zunehmender Bahnhöhe die Feinstrukturen des Schwerefeldes stark geglättet werden, vgl. Abb. 2.2 auf S. 11. Hier setzt die Satellitengradiometrie an: Durch die Messung von Beschleunigungsdifferenzen werden die zweiten Ableitungen des Gravitationsfeldes bestimmt, die wesentlich mehr Detailinformationen enthalten.

### 2.3.1 GOCE-Mission

Im Rahmen der GOCE-Mission (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer Mission) wird erstmalig<sup>5</sup> neben dem Satellite-to-Satellite-Tracking im High-Low-Modus (SST-hl) das Messprinzip der Gradiometrie eingesetzt. Der Start der GOCE-Mission ist für das Jahr 2007/2008 geplant und zählt damit neben den bereits erfolgreich operierenden Satellitenmissionen CHAMP (Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical Research and Application) und GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) zu den aktuellen Schwerefeldsatellitenmissionen. Einen Überblick zu den Zielen und technischen Prinzipien der Schwerefeldmissionen CHAMP, GRACE und GOCE gibt (Rummel et al., 2002). Das GOCE-Projekt ist Teil des "Living Planet"-Programms der europäischen Raumfahrtbehörde ESA.

Das Ziel der Mission ist die Bestimmung des stationären Erdschwerefeldes mit einer räumlichen Auflösung von 100 km und Genauigkeiten von 1...2 cm für das Geoid und 1 mgal für die Schwereanomalien (ESA, 1999, S. 79, 184; Drinkwater und Kern, 2006). Die grundlegenden Zusammenhänge der sphärisch-harmonischen Analyse zur Bestimmung der Kugelfunktionskoeffizienten aus Gradiometriedaten sind z. B. in (Rummel und Colombo, 1985) dargestellt, speziell auf die GOCE-Mission wird in (Müller, 2001) eingegangen.

Für die GOCE-Mission wurde eine geringe Flughöhe von etwa 250 km auf einer nahezu kreisförmigen, sonnensynchronen Bahn gewählt, die Exzentrizität beträgt weniger als 0.001 und die Bahnneigung 96.5°. Für jahreszeitlich festgelegte Startphasen können zwei etwa halbjährige Messphasen ermöglicht werden, in denen die Dauer der Schattenphasen der Bahn möglichst kurz (max. 10 min) ist (ESA, 1999, S. 105). So können die Solar-

<sup>5</sup>Ein kurzer Überblick über zuvor geplante Satellitengradiometriemissionen wird in (Schrama, 1991) gegeben.

kollektoren eine konstante Energieversorgung gewährleisten und mögliche Verformungen des Satelliten durch Temperatureinflüsse werden minimiert.

Die SST-Signale (GPS und GLONASS) werden zur Bestimmung des langwelligen Schwerefeldsignals verwendet (z. B. Gerlach et al., 2003; Reigber et al., 2003a). Zur Bestimmung des mittel- und kurzwelligen Schwerefeldsignals dient ein dreiachsiges Gradiometer. Es besteht aus insgesamt sechs Beschleunigungssensoren, von denen jeweils zwei auf einer Achse angeordnet sind. Die drei Achsen des Gradiometers definieren ein Koordinatensystem, die Achse  $X_G$  zeigt ungefähr in Flugrichtung,  $Z_G$  liegt senkrecht dazu ungefähr in der Bahnebene und weist von der Erde weg und  $Y_G$  komplettiert ein kartesisches Rechtssystem, s. Abb. 2.5. Aus den Gradiometermessungen werden die Elemente des Gravitationstensors (2.10) abgeleitet, s. Abschnitt 2.3.2. In der genannten Orientierung sind die Hauptdiagonalelemente des Tensors bereits durch den Term  $V_0 = \frac{GM}{r}$  des Gravitationspotentials um zwei bis drei Größenordnungen größer als die anderen Elemente (Rummel, 1985; Müller, 2001, S. 15). Ein Sternsensor ermittelt die Orientierung des Satelliten im Raum. Aus den Orientierungsdaten und den Daten der Beschleunigungssensoren des Gradiometers werden nicht-gravitative Störbeschleunigungen, die vor allem durch den Atmosphärenwiderstand verursacht werden, abgeleitet und für die Steuerung des Schubdüsen-Systems (engl. *thruster*) verwendet, um die nicht-gravitativen Störbeschleunigungen in Flugrichtung des Satelliten zu kompensieren. Mit Hilfe einer magnetischen Orientierungssteuerung (engl. *magneto-torquers*) werden außerdem Roll- und Gierbewegungen des Satelliten (Rotationen um die  $X_G$ - und  $Z_G$ -Achse) klein gehalten. Der Beschleunigungseffekt durch die Rotation um die  $Y_G$ -Achse bei Erdorientierung des Satelliten wird in der Nachprozessierung korrigiert (Müller, 2001). Die aktuelle Orientierung des Satelliten ist in der Auswertung zu berücksichtigen. Die Rotation des Gravitationstensors (2.10) von einem System  $a$  in ein System  $b$  ist bei Kenntnis der  $(3, 3)$ -Rotationsmatrix  $R$  zur entsprechenden Transformation eines  $(3, 1)$ -Vektors mit

$$V_{ij}^b = R V_{ij}^a R^T \quad (2.73)$$

möglich (z. B. Rummel und Colombo, 1985; Thompson, 1969, S. 144).

Die Beschleunigungssensoren des Gradiometers nutzen ein kapazitives Messprinzip, s. (ESA, 1999; Müller, 2001). Der Betrag der Kraft, die aufgewendet wird, um eine Testmasse im Zentrum des Beschleunigungssensors zu halten, wird gemessen. Die Testmasse befindet sich in einem elektrischen Feld zwischen Kondensatorplatten, Messgröße ist die Änderung der Kapazität. Durch elektromagnetische Rückkopplung wird die Testmasse immer in Ruhelage gehalten.

### 2.3.2 Grundprinzip der Gradiometrie

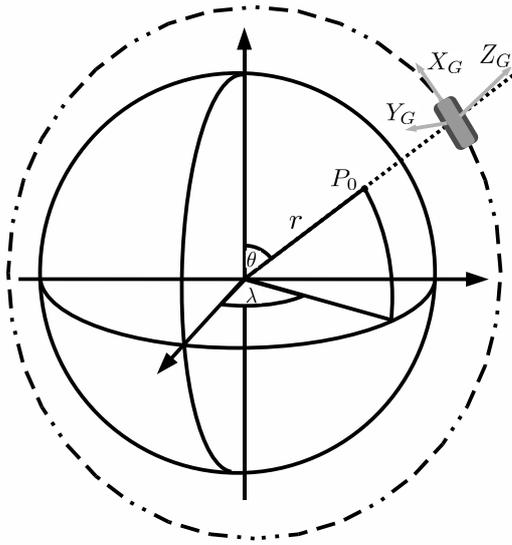
Das Prinzip der Gradiometrie beruht auf der Messung von Unterschieden der Gravitationsfeldstärke zwischen zwei im Satelliten benachbarten Punkten (Rummel, 1985, 1986). Nur im Massenmittelpunkt des Satelliten herrschen tatsächlich Freifallbedingungen. Je nachdem, ob die Messrichtung der beiden gekoppelten Beschleunigungsmesser parallel oder senkrecht zur Basis  $\overline{AB}$  (Abb. 2.6) ausgerichtet ist, können die verschiedenen Elemente des Gravitationstensors (2.10) abgeleitet werden, beispielsweise als

$$V_{YY}^G = \frac{\partial^2 V}{\partial Y_G^2} \approx \frac{V_Y^G(B) - V_Y^G(A)}{\Delta Y_G}, \quad (2.74)$$

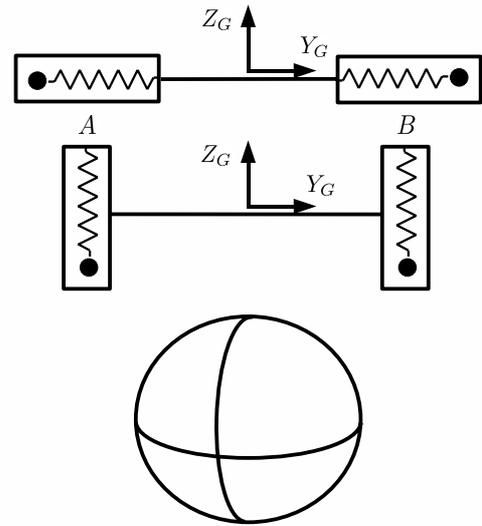
$$V_{YZ}^G = \frac{\partial^2 V}{\partial Y_G \partial Z_G} \approx \frac{V_Z^G(B) - V_Z^G(A)}{\Delta Y_G}. \quad (2.75)$$

Jeder der sechs Beschleunigungsmesser des GOCE-Gradiometers misst die Beschleunigung in drei zueinander senkrecht stehenden Achsrichtungen.

Da neben den rein gravitativen Beschleunigungen auch Störbeschleunigungen, wie Reibungswiderstand und Strahlungsdruck, auf den Satelliten wirken und sich die Basis  $\overline{AB}$  im Raum dreht, wird die Beschleunigungsmessung in einem bewegten Koordinatensystem betrachtet. Neben der gravitativen Beschleunigungsdifferenz wird zusätzlich eine Zentrifugalbeschleunigung und wegen der hohen Änderungsrate des Drehvektors eine Kreiselbeschleunigung gemessen, so dass zunächst in der Summe der Tensor  $\Gamma_{[ij]}^G$  beobachtet wird (Rummel, 1985). Aufgrund der Symmetrie- bzw. Antisymmetrieeigenschaften des Gravitations- und Zentrifugalanteils einerseits und des Kreiselanteils andererseits gelingt eine Trennung von inertialen und gravitativen Signalanteilen zur Ableitung des Gravitationstensors  $V_{[ij]}^G$ . Das Äquivalenzprinzip, das die Untrennbarkeit von inertialer und gravitativer



**Abbildung 2.5.** Anordnung der GOCE-Gradiometerachsen.



**Abbildung 2.6.** Messanordnung zweier Beschleunigungsmesser zur Bestimmung der Tensorkomponente  $V_{Y_Y}^G$  (oben) und der Tensorkomponente  $V_{Y_Z}^G$  (unten), nach (Rummel, 1985).

Beschleunigung postuliert, gilt nur lokal, also mit infinitesimalen Abständen, für endliche Abstände ist eine Trennung möglich (Rummel, 1989). Eine ausführliche Beschreibung dieser Zusammenhänge findet sich in (Rummel, 1986; Müller, 2001).

### 2.3.3 Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometermessung

Um die geforderte Messgenauigkeit der Gradiometermessung im Rahmen der GOCE-Mission zu erreichen, ist eine mehrstufige Kalibrierung erforderlich, z. B. (Müller, 2001). Unter Kalibrierung versteht man die Bestimmung von Parametern und deren Anwendung auf die Messwerte, um physikalische Referenzgrößen mit der geforderten Genauigkeit reproduzieren zu können. Im Zuge der anschließenden Evaluierung werden die Messungen (oder abgeleitete Daten) mit unabhängigen Informationen verglichen, um die Qualität der Datenprodukte und damit die Güte der Messungen, der Genauigkeitsabschätzung und der Kalibrierung zu beurteilen. In der englischsprachigen Literatur wird hierbei von Validierung gesprochen, vgl. (Koop et al., 2001a).

Mögliche Fehlerquellen gradiometrischer Messungen werden ausführlich in (Müller, 2001; SID, 2000, WP 240) beschrieben, neben instrumentellen Fehlerquellen, z. B. Skalierungsfehler, Misalignment der Beschleunigungssensoren, können gravitative Störeinflüsse durch Änderung der Eigengravitation des Satelliten auftreten. Ebenso führen die durch die eingeschränkte Genauigkeit der Lageregelung nicht korrigierten nicht-gravitativen Restbeschleunigungen zu Fehlern.

Die Beschleunigungsmesser werden zunächst am Boden kalibriert. Die gemessenen Spannungen werden in Beschleunigungswerte umgerechnet. Da in Lotrichtung stets die Gravitationsbeschleunigung wirksam ist, gelingt eine hohe Genauigkeit der Kalibrierung nur in den beiden horizontal liegenden Achsen. Die Beschleunigungssensoren werden im Gradiometer so angeordnet, dass die Komponenten auf der Hauptdiagonalen des beobachteten Tensors  $\Gamma_{[ij]}^G$  und seine Komponenten  $\Gamma_{xz}^G$  und  $\Gamma_{zx}^G$  mit hoher Genauigkeit bestimmt werden, die übrigen Komponenten weniger genau. Die Komponenten  $\Gamma_{xz}^G$  und  $\Gamma_{zx}^G$  sind zur Bestimmung der Rotationsbewegung um die  $Y^G$ -Achse wichtig. Die Hauptdiagonalelemente des Gravitationstensors  $V_{[ij]}$  sind, anders als die übrigen Komponenten, weniger stark von der Orientierungsgenauigkeit des erdgerichteten Gradiometersystems beeinflusst, da die Nicht-Diagonalelemente, die bei einer Rotation (2.73) auf die Hauptdiagonalelemente wirken, klein sind. Alle Nicht-Diagonalelemente ergeben sich hingegen mit geringerer Genauigkeit, da die bei einer Rotation auf sie wirkenden Hauptdiagonalelemente groß sind, s. (Müller, 2001, S. 44-45). Aufgrund der unterschiedlichen Beträge und Genauigkeiten der Tensorelemente ist es sinnvoll, die Kalibrierung und Evaluierung der originären Gradiometerdaten im Koordinatensystem des Gradiometers durchzuführen. Eine Rotation des gemessenen Tensors

in ein erdfestes System würde zu einer ‘‘Verschmierung’’ der sehr guten Hauptdiagonal- mit den weniger guten Nebendiagonalkomponenten führen (Müller, 2003). Ein Genauigkeitsverlust könnte dann nur durch das rechen- technisch sehr aufwendige Mitführen der vollständigen Kovarianzinformation des Rauschens vermieden werden. Im Orbit werden die Beschleunigungsmesser kalibriert, indem mit Hilfe des Schubdüsen-Systems bekannte Beschleunigungen initiiert werden, z. B. (Koop et al., 2001a).

Mögliche Vorgehensweisen für eine externe Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometerdaten sind Vergleiche des gemessenen Gravitationstensors mit Tensorwerten abgeleitet aus anderen Datenquellen, wie existierenden globalen Schwerefeldmodellen, terrestrischen Schwerefelddaten, anderen Messdaten von GOCE (z. B. SST) und Daten anderer Satellitenmissionen (Müller, 2001; Koop et al., 2001a).

Im Rahmen dieser Arbeit werden im Hinblick auf die externe Kalibrierung die folgenden Untersuchungen durchgeführt:

- a) Basierend auf einem synthetischen Erdmodell werden die Ergebnisse von zwei unterschiedlichen Verfahren zur Berechnung des Gravitationstensors aus der Kombination von globalen Schwerefeldmodellen und terrestrischen Schwereanomalien evaluiert und verglichen.
- b) Abhängigkeiten der Tensorkomponenten von Genauigkeit, Gebietsgröße und Auflösung der Eingangsdaten werden durch statistische Berechnung der Varianzen untersucht und den Ergebnissen aus (a) gegenübergestellt.
- c) Auf Basis realer Daten werden alle Komponenten des Gravitationstensors mit den in (a) untersuchten Verfahren in der Bahnhöhe von GOCE berechnet.

Die anschließende Kalibrierung und Evaluierung der GOCE-Daten auf Basis dieser Daten ist nicht Teil dieser Arbeit. Aktuelle Arbeiten zu diesen Themen sind beispielsweise (Arabelos und Tscherning, 1998; Arabelos et al., 2007; Bouman und Koop, 2003a, 2004; Bouman et al., 2004, 2005; Haagmans et al., 2003; Jarecki et al., 2006a; Kern et al., 2005; Kern und Haagmans, 2005; Müller et al., 2003; Pail, 2003c; Preimesberger und Pail, 2005; Wolf und Denker, 2005; Zielinski und Petrovskaya, 2003). Einige dieser Arbeiten werden in Abschnitt 4.2 besprochen, soweit sie auch den Aspekt der Berechnung des Gravitationstensors  $V_{[ij]}^G$  aus regionalen terrestrischen Schwerefeldern behandeln. Zum Thema Kalibrierung und Evaluierung von Schwerefelddaten aus Satellitenmissionen wurde für den Zeitraum 2000 bis 2004 auch eine Studiengruppe (engl. *special study group*) der Internationalen Assoziation für Geodäsie (IAG) eingerichtet (Sektion II, Gruppe 2.193).

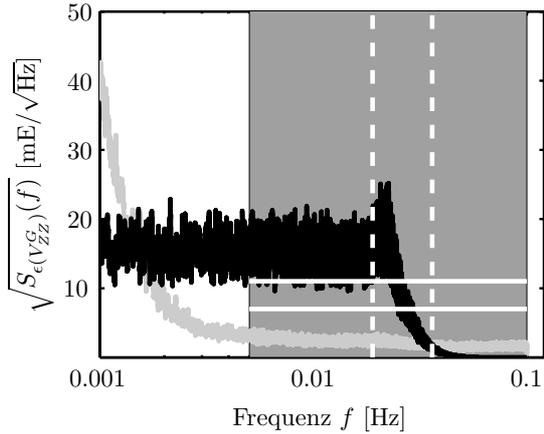
### 2.3.4 Angestrebte Genauigkeit der Tensorkomponenten

Die hohe Messgenauigkeit des GOCE-Gradiometers wird nur innerhalb eines bestimmten Spektralbereiches, dem Messband, mit einer Breite (engl. *measurement bandwidth*, MBW) von 0.005 Hz bis 0.100 Hz erreicht, außerhalb dieses Bereiches ist die Genauigkeit wesentlich schlechter (ESA, 1999, S. 117). Das Signal ist entsprechend zu filtern (Schuh, 2000). Zeitvariable Änderungen des Gravitationssignals sind für die Beobachtungen des Gradiometers nicht signifikant (Abrikosov et al., 2006). Der langwellige Signalanteil des Schwerefeldes wird auf Basis von SST-Beobachtungen bestimmt.

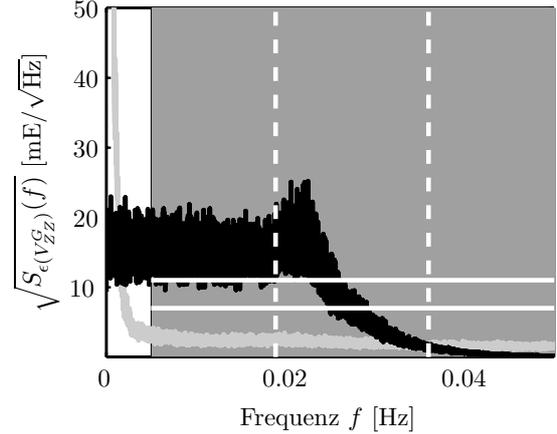
Die Genauigkeit des Gradiometers wird spektral in Form der Quadratwurzel einer Spektraldichte  $S_{\epsilon(V_{ii}^G)}(f)$  des Rauschens  $\epsilon(V_{ii}^G)$  angegeben und beträgt im eingeschränkten Messband (0.020 Hz bis 0.100 Hz) für die Hauptdiagonalkomponenten des Tensors  $V_{[ij]}^G$  etwa 7 bis 11 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  (Bouman und Koop, 2004; Drinkwater und Kern, 2006)<sup>6</sup>. Ein größerer Genauigkeitsabfall im Bereich von 0.005 bis 0.020 Hz wird im Folgenden nicht berücksichtigt.

Zur Vorbereitung der AuswerteprozEDUREN wurden für die GOCE-Mission Testdaten simuliert (Oberndorfer et al., 1999; SID, 2000) und bereitgestellt (SCVII, 2000). Dazu gehören Satellitenbahnen (Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung) und Tensorwerte  $V_{[ij]}^G$  mit dem erwarteten Rauschen als Zeitreihe von 30 Tagen (0.2 Hz und 1 Hz), basierend auf Arbeiten aus (SID, 2000, WP 210-270, 420). Simulationsdaten dieser Art werden im Rahmen der Missionsvorbereitungen gemäß aufdatierter Genauigkeitsanalysen der Sensoren auch im Auftrage der ESA fortwährend aktualisiert. Die Quadratwurzel der Spektraldichte  $S_{\epsilon(V_{ZZ}^G)}^{\text{SCVII}}(f)$  des simulierten Rauschens einer  $V_{ZZ}^G$ -Zeitreihe über 29 Tage mit 0.2 Hz Auflösung aus (SCVII, 2000) ist in Abb. 2.7 in hellgrau dargestellt. Sie

<sup>6</sup>In den Anfangsstudien wurde von etwa 3 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  ausgegangen (ESA, 1999), aufgrund von Systemänderungen der Lageregelung kann dies aber nicht realisiert werden (Pail, 2003b).



**Abbildung 2.7.** Quadratwurzel der Spektraldichten der Rauschwerte zweier  $V_{ZZ}^G$ -Zeitreihen (0.2 Hz; 29 Tage): simuliertes Rauschen des Gradiometers (hellgrau; SCVII, 2000) und Rauschen auf Basis eines verrauschten GPM (schwarz); Genauigkeitsniveaus 7 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  bzw. 11 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  (—, weiß), Messband dunkelgrau hinterlegt, Spektralbereich vom sphärisch-harmonischen Grad 105 bis 200 (- - -, weiß).



**Abbildung 2.8.** Quadratwurzel der Spektraldichten der Rauschwerte der  $V_{ZZ}^G$ -Zeitreihen aus Abb. 2.7, hier mit linearer anstelle der logarithmischen Abtragung der Frequenz; die Messbandbreite des Gradiometers von 0.005 bis 0.1 Hz ist nicht vollständig dargestellt.

wurden durch diskrete Auswertung von (2.56) inklusive Fensterung (Hanning) des Eingangssignals (SID, 2000, WP 615) und Glättung durch einen Mittelwertfilter berechnet. Das Genauigkeitsniveau von 7 bzw. 11 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  ist als weiße Linie eingetragen. Das Rauschverhalten ist nach aktuellem Kenntnisstand zu optimistisch. Die Nebendiagonalkomponenten  $V_{XY}^G$  und  $V_{YZ}^G$  weisen ein etwa tausendfach, die Komponente  $V_{XZ}^G$  ein etwa zehnfach höheres Rauschen auf (Bouman und Koop, 2004).

Die Varianz  $\sigma_{\epsilon}^2$  im Ortsbereich ergibt sich durch Integration der Spektraldichte  $S_{\epsilon}(f)$  des Rauschens über den Frequenzbereich  $[f_{\min}, f_{\max}]$  (Müller, 2001) mit

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S_{\epsilon}(f) df . \quad (2.76)$$

Die Standardabweichung  $\sigma_{\epsilon} = \sqrt{\sigma_{\epsilon}^2}$  im Ortsraum auf Basis der geglätteten Fehlerspektraldichte  $S_{\epsilon}^{\text{SCVII}}(f)$  (Abb. 2.7, hellgrau) beträgt im Messband  $\sigma_{\epsilon(V_{ZZ}^G)}^{\text{SCVII}}(\text{MBW}) = 0.6 \text{ mE}$  und im gesamten Spektrum  $\sigma_{\epsilon(V_{ZZ}^G)}^{\text{SCVII}} = 4.1 \text{ mE}$ , dabei wurde eine mittlere konstante Abweichung von 2308.9 mE reduziert, ohne die Reduktion ergäbe sich  $\sigma_{\epsilon(V_{ZZ}^G)}^{\text{SCVII}} = 401.5 \text{ mE}$ . Das derzeit als realistisch angesehene Genauigkeitsniveau von 7 bzw. 11 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  ergibt eine über der Messbandbreite integrierte Genauigkeit  $\sigma_{\epsilon(V_{ZZ}^G)}(\text{MBW})$  von 2.2 mE bzw. 3.4 mE.

Aktuelle globale Potentialmodelle (GPM) können formale Genauigkeiten für die radialen Tensorkomponenten in der Bahnhöhe von GOCE von etwa 3 bis 7 mE erreichen (vgl. Tabelle 7.1 und 10.1). Die zugehörige spektrale Genauigkeit wird veranschaulicht, indem verrauschte Tensorkomponenten entlang einer GOCE-Bahn (SCVII, 2000) auf Basis eines verrauschten GPM simuliert werden. Die Amplitude des Rauschens wurde in der Größenordnung der Koeffizientengenauigkeiten eines aktuellen GPM (EIGEN-GL04C) gewählt (zur Rauscherzeugung siehe Abschnitt 7.4.1). Die (Quadratwurzel der) Spektraldichte dieses simulierten Rauschens für die radiale Tensorkomponente ist in Abb. 2.7 in schwarz dargestellt. Sie übersteigt das Genauigkeitsniveau von 7 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  bzw. 11 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  in der ersten Hälfte des Messbandes. In dem durch gestrichelte Linien gekennzeichneten Bereich von 0.019 bis 0.036 Hz steigt die Spektraldichte zunächst kurz an, um dann schnell auf null abzufallen, da im sehr hochfrequenten Bereich kein Signal mehr vorhanden ist. Dieser markierte Spektralbereich von 0.019 bis 0.036 Hz ist in etwa der hochauflösende Bereich, der nicht oder nur schlecht mit GRACE-Daten (auf denen u. a. das EIGEN-GL04C basiert, vgl. Abschnitt 10.1) bestimmbar ist und für den eine wesentliche Verbesserung durch GOCE erwartet wird. Die höchste Frequenz  $f_{\max}$ , die für die Schwerefeldanalyse aus Satellitendaten notwendig ist, um Koeffizienten eines GPM bis zu einem maximalen sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max}$  zu bestimmen, kann mit Hilfe der Grundfrequenz  $f_0$  des Satelliten über  $f_{\max} \approx f_0 n_{\max}$  abgeschätzt werden (Müller, 2001). Für

die Grenzen 0.019 bzw. 0.036 Hz ist  $n_{\max} = 105$  (GRACE) bzw. 200 (GOCE) angenommen worden. Zu beachten ist, dass dieser spektrale Ausschnitt aufgrund der logarithmisch gewählten Darstellung in Abb. 2.7 gegenüber dem langwelligen Bereich verhältnismäßig klein erscheint. In Abb. 2.8 wurde daher eine lineare Darstellung der Frequenz gewählt, allerdings wird dann das Messband nicht mehr vollständig abgebildet.

Im Frequenzbereich unterhalb des Messbandes steigt das Rauschen der GOCE-Messungen deutlich an (Drinkwater und Kern, 2006), die Tensorelemente, berechnet aus aktuellen GPM, können deswegen als Referenzwerte für die Kalibrierung im langwelligen Bereich genutzt werden. Die Kalibrierung im langwelligen Bereich ist im Hinblick auf Folgeuntersuchungen auf Basis des GOCE-Tensors  $V_{[ij]}^G$  wichtig (Bouman et al., 2004; Bouman und Koop, 2003b).

Wird das Niveau (der Quadratwurzel) der Spektraldichte des für das EIGEN-GL04C simulierten Rauschens in Abb. 2.8 in Relation zum angestrebten Genauigkeitsniveau betrachtet, kann abgeschätzt werden, dass das Rauschen möglicher Referenzwerte innerhalb des Messbandes um etwa den Faktor 1.5 kleiner sein muss, im oben angesprochenen Spektralbereich, der auf Satellitenniveau ausschließlich von GOCE abgedeckt wird, sogar um etwa den Faktor 2.5. Werden diese Faktoren auf die mit dem EIGEN-GL04C erreichbare Genauigkeit von etwa 3 mE (bezogen auf das gesamte Spektrum) übertragen, ergibt sich eine erforderliche Genauigkeit von etwa 1 bis 2 mE. Um diese Genauigkeitsanforderung bei den als Referenz zu berechnenden Tensorelementen zu erfüllen, werden in der vorliegenden Arbeit globale Potentialmodelle mit hochwertigen regionalen terrestrischen Daten kombiniert.

## 3 Verfahren zur regionalen Schwerefeldapproximation

Die Schwerefeldbestimmung lässt sich als Approximationsaufgabe beschreiben, bei der aus endlich vielen (diskreten) Beobachtungspunkten eine kontinuierliche Zielfunktion abgeleitet wird. In diesem Kapitel werden zwei Verfahren zur Schwerefeldapproximation vorgestellt: das Integrationsverfahren und die Kollokation nach kleinsten Quadraten. Die Zielgröße der Berechnungen auf Basis von Schwereanomalien  $\Delta g$  ist in diesem Kapitel das Störpotential  $T$ , die Übertragung zur Berechnung des Tensors  $T_{[ij]}$  erfolgt in Kapitel 5.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird zunächst die Remove-Restore-Technik zur Kombination verschiedener Datensätze kurz erläutert, da diese Technik bei beiden Verfahren genutzt wird. Es wird außerdem in beiden Methoden vorausgesetzt, dass das Störpotential  $T$  und seine Funktionale im Außenraum des Erdkörpers harmonisch sind. Dazu ist die Gravitationswirkung der Atmosphäre zu reduzieren (Abschnitt 3.2). Zusätzlich wird der Gravitationseffekt der residualen Topographie reduziert, damit die in die Berechnung eingehenden Signale geglättet werden und daher besser zur Interpolation und als Grundlage zur Prädiktion geeignet sind (Abschnitt 3.3). Die theoretischen Grundlagen der Approximationsverfahren werden schließlich in den Abschnitten 3.4 und 3.5 dargestellt.

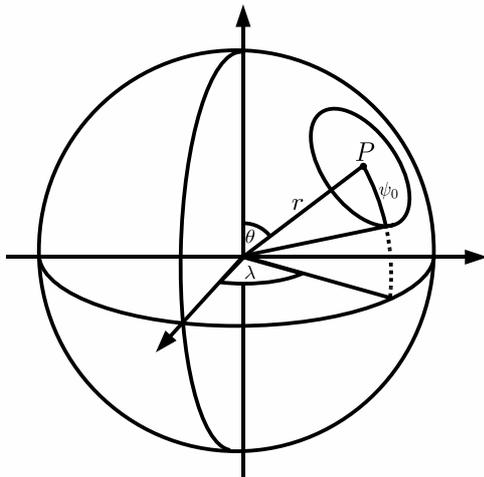
### 3.1 Remove-Restore-Technik

In der regionalen Schwerefeldapproximation wird die Remove-Restore-Technik zur Kombination von Datenquellen eingesetzt, die Unterschiede bezüglich der Auflösung, der räumlichen Verteilung oder des Rauschens aufweisen. Von einer Datenquelle  $A$  werden dazu Daten einer Quelle  $B$  abgezogen (engl. *remove*), um die kleineren residualen Werte in der Berechnung der residualen Zielgröße zu verwenden, die anschließend auf Basis der Datenquelle  $B$  restituiert (engl. *restore*) wird.

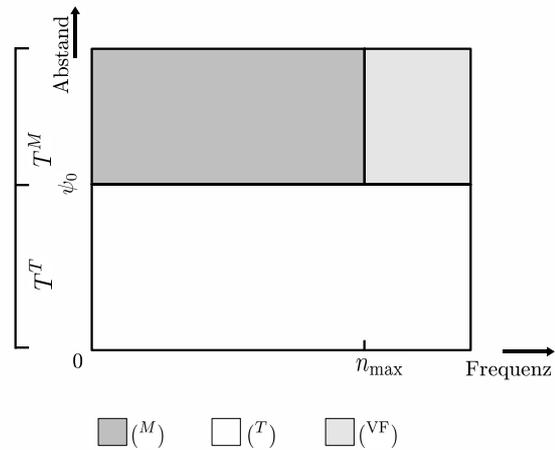
Zur Modellierung des Schwerefeldes stehen folgende Datenquellen zur Verfügung:

1. Globale Potentialmodelle (GPM) basieren vorwiegend auf Beobachtungen von Satellitenbahnen im Schwerefeld der Erde und sind daher auf den lang- und mittelwelligen Spektralbereich (vgl. Tabelle 2.1) des Schwerefeldes beschränkt. Sie liegen in der Regel als harmonische Koeffizienten einer Kugelfunktionsentwicklung (2.5) vor.
2. Für regional begrenzte Gebiete bzw. über den Ozeanen liegen Schwereanomalien vor, die aus terrestrischen Messungen, der Fluggravimetrie und der Satellitenaltimetrie gewonnen wurden. Im Weiteren werden Beobachtungen dieser Gruppe zusammenfassend als terrestrische Daten bezeichnet. Als Punktmessungen beinhalten sie den gesamten Spektralbereich. Aufgrund ihrer Begrenzung auf regionale Gebiete und wachsender Fehler über lange Distanzen lässt sich das langwellige Spektrum des Schwerefeldes im Allgemeinen aus terrestrischen Daten ungenauer als aus aktuellen globalen Potentialmodellen ableiten.
3. Digitale Geländemodelle (DGM) werden aus Laserscan- oder Radardaten abgeleitet und stehen in nahezu globaler Abdeckung in unterschiedlichen Qualitätsstufen zur Verfügung. Sie werden verwendet, um die kurz- bis ultrakurzwelligen Anteile des Schwerefeldes durch Berechnung der Gravitationswirkung der topographischen Massen zu modellieren (Abschnitt 3.3).

Die Daten des GPM werden im Folgenden mit dem Index ( $M$ ) gekennzeichnet, die terrestrischen Daten mit dem Index ( $T$ ). Originäre terrestrische Beobachtungen liegen unregelmäßig verteilt vor. Für eine effiziente Auswertung werden in der Praxis häufig auf Basis der unregelmäßig verteilten Daten Punkt- oder Blockmittelwerte in geographischen Gitterpunkten prädiert (z. B. Denker und Torge, 1998). Die Gebietsbegrenzungen sind dann durch Längen- und Breitenkreise definiert. Der sphärische Mittelwertoperator aus (2.57) wird für ein derart begrenztes Gebiet anisotrop (Heck, 1979, S. 62), für das Gebiet einer Kugelkappe ist er hingegen isotrop, weshalb die zugehörige Darstellung im Frequenzraum nur vom sphärisch-harmonischen Grad  $n$ , nicht jedoch von der Ordnung  $m$  abhängt. Es wird daher zur einfachen Darstellung der folgenden Zusammenhänge davon ausgegangen, dass die



**Abbildung 3.1.** Regionaler Datensatz in einer Kugelkappe  $\sigma_0$  mit dem Radius  $\psi_0$ . Der Mittelpunkt  $P$  wird mit den sphärischen Polarkoordinaten  $\theta$ ,  $\lambda$  und  $r$  beschrieben.



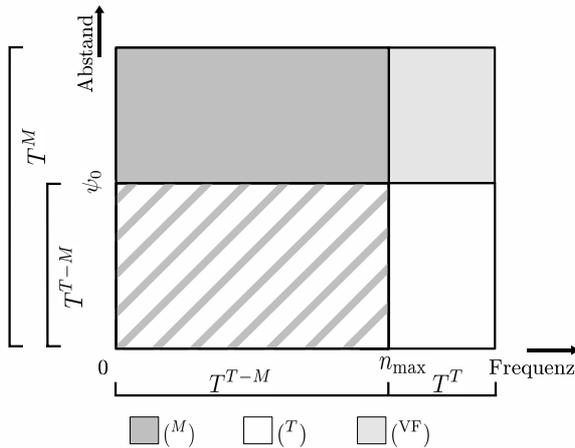
**Abbildung 3.2.** Methode I (Trennung im Ortsraum) zur Kombination eines GPM ( $M$ ) mit regionalen terrestrischen Daten ( $T$ ) einer Kugelkappe  $\sigma_0$  mit dem Radius  $\psi_0$ . Es verbleibt der Vernachlässigungsfehler ( $VF$ ). Die Grafik ist angelehnt an (Haagmans und van Gelderen, 1991).

terrestrischen Daten zur Berechnung eines Schwerefeldfunktionals in einem Punkt  $P$  in einer Kugelkappe mit der Fläche  $\sigma_0$  und dem Radius  $\psi_0$  gegeben sind, in deren Zentrum der Punkt  $P$  liegt, vgl. Abb. 3.1. Darstellungen bezüglich eines beliebig begrenzten Gebietes sind in (Neyman et al., 1996) zu finden.

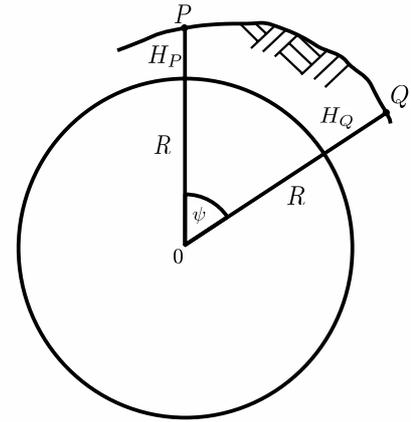
Zur Kombination terrestrischer Schwereanomaliedatensätze  $\Delta g^T$  mit einem GPM existieren zwei Methoden (Rapp und Rummel, 1975). In Methode I (Trennung im Ortsraum) wird das Störpotential  $T$  auf Basis der innerhalb der Kugelkappe  $\sigma_0$  vorliegenden terrestrischen Daten  $\Delta g^T$  berechnet. Diese Teillösung wird um den Signalanteil der Daten außerhalb der Kugelkappe im Bereich  $\sigma - \sigma_0$  auf Basis des GPM ergänzt. Die Aufteilung im Ortsraum ist in Abb. 3.2 dargestellt. Diese und die folgenden Abbildungen dieser Art sind schematisch zu verstehen, da das Spektrum über die gesamte Kugeloberfläche definiert ist, hier aber für Daten einer Kugelkappe dargestellt wird. Die begrenzte spektrale Auflösung bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max}$  des GPM im Außenbereich  $\sigma - \sigma_0$  führt zu einem Vernachlässigungsfehler  $\delta T^{VF}$  (engl. *omission error* oder *truncation error*) in der Approximation von  $T$ .

Bei Methode II (Trennung im Frequenzraum) werden von den regionalen terrestrischen Daten  $\Delta g^T$  niederfrequente Signalanteile  $\Delta g^M$  abgezogen, die bis zu einem maximalen Entwicklungsgrad  $n_{\max}$  aus dem GPM berechnet werden (Vincent und Marsh, 1974), vgl. Abb. 3.3. Es verbleiben residuale Daten  $\Delta g^R$ , auf deren Basis das residuale Störpotential  $T^R$  modelliert wird. Das Signal  $T^M$  des GPM wird anschließend über den gesamten Ortsbereich restituiert. Diese Methode wird als Remove-(Compute-)Restore-Technik bezeichnet (z. B. Forsberg und Tscherning, 1981) und entspricht dem zu Beginn eingeführten Konzept zur Kombination verschiedener Datenquellen. Für die analytische Auswertung des Integrationsverfahrens ohne Modifikation der Kernfunktion gilt formal, dass der Signalanteil innerhalb der Kugelkappe auch hier, wie bei der Methode I, vollständig auf den terrestrischen Daten basiert (Wong und Gore, 1969; Wenzel, 1981; de Min, 1996, S. 57; Sjöberg, 2005), vgl. Abschnitt 3.4.2. Ebenso ergibt sich hier der oben eingeführte Vernachlässigungsfehler  $\delta T^{VF}$ , vgl. Abb. 3.3. Unter der Annahme von rauschfreien Beobachtungen führt die Anwendung der Kollokation nach kleinsten Quadraten zu einem ähnlichen, jedoch aufgrund des diskreten Ansatzes des Verfahrens nicht zu dem identischen Ergebnis, s. a. Kapitel 6.

Die Remove-Restore-Technik, Methode II, hat aber in der Anwendung bei beiden Berechnungsverfahren gegenüber der Methode I den Vorteil, dass die Residualdaten, die in die Modellierung eingeführt werden, kleiner als das Gesamtsignal der terrestrischen Schwereanomalien sind. Die Approximationsfehler der Modellierungsmethoden wirken sich relativ zum Gesamtsignal aus und verringern sich deshalb bei der Anwendung der Remove-Restore-Technik. Es kann auf eine ellipsoidische Korrektur der sphärischen Näherung bei den Berechnungen auf Basis der Residualwerte verzichtet werden, wenn ein genügend hochauflösendes Referenzfeld (ca.  $n_{\max} = 360$ ) im Remove-Schritt eingeführt wird, das ellipsoidische Korrekturen berücksichtigt, s. a. (Denker, 1988).



**Abbildung 3.3.** Methode II (Trennung im Frequenzraum, Remove-Restore-Technik) zur Kombination eines GPM ( $M$ ) mit regionalen terrestrischen Daten ( $T$ ) einer Kugelkappe  $\sigma_0$  mit dem Radius  $\psi_0$ . Es verbleibt der Vernachlässigungsfehler ( $VF$ ).



**Abbildung 3.4.** Radien der Punkte  $P$  und  $Q$  in sphärischer Approximation nach (Heiskanen und Moritz, 1967).

Um diesen Vorteil zu nutzen, wird in den Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Remove-Restore-Technik angewendet. Die Modellierung der Residualwerte wird dabei in sphärischer Näherung ausgeführt. Dies bedeutet, dass die ellipsoidischen Lagekoordinaten  $\varphi$  und  $\lambda$  den sphärischen Koordinaten  $\theta$  und  $\lambda$  gleichgesetzt werden und der Radius  $r$  des Punktes durch Addition der Höhe zu einem mittleren Erdradius  $R$  mit  $r = R + H$  angenommen wird (Moritz, 1980, S. 352), vgl. Abb. 3.4. Eine ausführliche Darstellung der gebräuchlichen Näherungsstufen bei der Modellierung des Störpotentials auf Basis von Schwereanomalien ist in (Heck und Seitz, 2003) zu finden.

Sollen die spektralen Anteile der Datenquellen  $\Delta g^M$  und  $\Delta g^T$  unter Anwendung der Remove-Restore-Technik auch innerhalb der Kugelkappe kombiniert werden, muss dies bei den Modellierungsmethoden berücksichtigt werden. Hierzu ist bei dem Integrationsverfahren der Integralkern zu modifizieren und bei der Kollokation nach kleinsten Quadraten werden Kovarianzen des Rauschens der Beobachtungen eingeführt. Auf die Aspekte der Gewichtung der Datenquellen zueinander wird in den Abschnitten 3.4.3 und 5.1.5 bezüglich des Integrationsverfahrens und in Abschnitt 5.2.2 bezüglich der Kollokation eingegangen. Die in den Verfahren resultierende Gewichtung wird in Abschnitt 6.2 verglichen.

## 3.2 Atmosphärische Reduktion

Der gravitative Effekt der atmosphärischen Massen im Außenraum des Erdkörpers muss vor der Anwendung der Methoden zur Schwerefeldmodellierung reduziert werden, damit die LAPLACE-Gleichung (2.3) für den Außenraum erfüllt ist. Nach Berechnung der Zielgröße wird der Effekt gegebenenfalls restituiert. (Ecker und Mittermayer, 1969) modellierten die atmosphärischen Massen unter Vernachlässigung der Topographie (Fehleranteil etwa 0.2 %, Wenzel, 1985) als ellipsoidische Schalen, deren Dichte mit zunehmender Höhe abnimmt. Nach (Wenzel, 1985) ist aber auch ein sphärisches Schalenmodell mit radialer Dichteveriation ausreichend (Genauigkeit etwa  $0.1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ). Atmosphärenmassen, die oberhalb eines Punktes  $P$  liegen, haben dann, wie aus der Potentialtheorie bekannt (Torge, 2001, S. 49), keine Wirkung auf die Schwere in  $P$ . Es müssen also nur die Atmosphärenmassen unterhalb von  $P$  betrachtet werden. Die Gravitationswirkung der Atmosphärenmassen auf  $P$  beträgt damit

$$g_A(P) = \frac{GM_{A_u}(r_P)}{r_P^2} = \frac{GM_A}{r_P^2} - \frac{GM_{A_o}(r_P)}{r_P^2}, \quad (3.1)$$

mit dem geozentrischen Radius  $r_P$  des Punktes  $P$ , der Atmosphärenmasse  $M_{A_u}(r_P)$  unterhalb und  $M_{A_o}(r_P)$  oberhalb von Punkt  $P$  und der Gesamtmasse  $M_A \approx 5.32 \cdot 10^{18} \text{ kg} \approx 10^{-6} M_E$  der Atmosphäre (Ecker und Mittermayer, 1969; Moritz, 1980, S. 423; Gerlach, 2003, S. 65).

Bei der Reduktion ist allerdings zu berücksichtigen, dass in der Definition geodätischer Referenzsysteme, wie z. B. dem GRS80, die Atmosphärenmasse  $M_A$  in der Gesamtmasse  $M^N$  enthalten ist (Moritz, 2000), die nach (2.12) in die Berechnung des Normalschwerefeldes eingeht, vgl. S. 7. Der Normalschwerewert  $\gamma$  beinhaltet somit den Effekt der Gesamtmasse  $M_A$  der Atmosphäre. In der Berechnung der Schwereanomalie nach (2.22) wird der erste Term der rechten Seite von (3.1) daher bereits implizit reduziert, wobei der Höhenunterschied zwischen Punkt  $P$  und dem Telluroidpunkt  $Q$  aus (2.22) vernachlässigt wird. Es ist also nur noch der zweite Term als atmosphärische Korrektur  $\delta g_A$  zu berücksichtigen, womit für die reduzierte Schwereanomalie gilt:

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_Q - \left( -\frac{GM_{A_o}(r_P)}{r_P^2} \right) = g_P - \gamma_Q + \delta g_A. \quad (3.2)$$

Die Masse  $M_{A_o}(r_P)$  wird durch radiale Integration über die äußeren Atmosphärenschichten (basierend auf Modellen, z. B. COSPAR (Committee on Space Research) International Reference Atmosphere, U.S. Standard Atmosphere) berechnet. Der Gravitationseffekt der Atmosphäre wird üblicherweise bis zu einer Höhe von etwa 50 . . . 60 km berücksichtigt (z. B. Gitlein und Timmen, 2007). Eine Tabellierung der atmosphärischen Reduktion  $\delta g_A$  nach (Ecker und Mittermayer, 1969) ist als IAG-Empfehlung in (Moritz, 2000) für das Referenzsystem GRS80 angegeben. Eine vereinfachte Formel zur Berechnung von  $\delta g_A$  ist in (Wenzel, 1985) zu finden. Die Korrekturwerte sind klein und nehmen mit zunehmender Höhe ab, es ergeben sich z. B. für Punkte in den Höhen 0 km bzw. 20 km Korrekturwerte von 0.87 mgal bzw. 0.05 mgal.

Für die Zielgrößen dieser Arbeit, die Elemente des Tensors  $T_{[ij]}$  des Störpotentials in einem Punkt  $P$  in der Bahnhöhe von GOCE (250 km), wird angenommen, dass sich die gesamte Atmosphäre unterhalb des Punktes befindet. Daher ergibt sich  $M_{A_o} = 0$  und auf eine Restitution der Reduktion entsprechend zu (3.2) wird verzichtet.

### 3.3 Reduktion des Effektes der residualen Topographie

Das hochfrequente Signal der Schwerefeldfunktionale wird vor allem durch die umliegenden topographischen Massen verursacht. Je glatter ein Signal ist, desto besser eignet es sich zur Interpolation und als Grundlage zur Prädiktion, da die lokale Signalveränderung durch Funktionen niedriger Ordnung dargestellt werden kann. Außerdem kann ein glattes Signal gröber abgetastet werden, ohne dass Aliasing-Effekte auftreten. Die Gravitationswirkung der topographischen Massen wird daher für nachfolgende Berechnungen zur Glättung des Signals reduziert. Das residuale Signal erfüllt zudem eher als das ursprüngliche Signal die Bedingung der Homogenität und Isotropie, die im Kollokationsverfahren für das Störpotential vorausgesetzt wird. Schließlich führt die Glättung bei dem Integrationsverfahren zu einer schnelleren Konvergenz der MOLODENSKII-Reihenentwicklung (Abschnitt 3.4.1), so dass topographieabhängige Terme vernachlässigt werden können.

Die Reduktion und die Restitution des hochfrequenten Signals wird in die Remove-Restore-Prozedur (vgl. Abschnitt 3.1) aufgenommen. Bei der Reduktion der Gravitationswirkung der topographischen Massen ist von einem für alle Berechnungspunkte konstanten Massenmodell auszugehen, um die Eigenschaft der Harmonizität für die Reduktionswerte zu wahren (Forsberg und Tscherning, 1981). Prinzipiell könnte ein beliebiges Massenmodell zur Reduktion verwendet werden, die beste Glättung wird jedoch über eine realistische Gelände- und Dichteannahme erreicht. Digitale Geländemodelle (DGM) stehen heutzutage in sehr hoher Auflösung zur Modellierung der Topographie zur Verfügung. Die Dichte der Massen wird zur Berechnung als bekannt vorausgesetzt, vgl. (Denker, 1988, S. 17). Da die Auflösung der DGM im Allgemeinen höher ist als die der Schweredaten, eignet sich die topographische Reduktion, um Aliasing-Fehler zu verringern, die bei zu grob abgetasteten Daten auftreten (Denker, 1989; Sünkel, 1984).

Es ist zu beachten, dass im Rahmen der Remove-Restore-Technik der langwellige Signalanteil durch Daten eines GPM reduziert wird. Daher gilt es zu vermeiden, dass durch eine topographische Reduktion im langwelligen Signalbereich die Reduktion doppelt durchgeführt wird. Die vollständige Reduktion der Topographie (bis zum Geoid) und die topographisch-isostatische Reduktion (Heiskanen und Moritz, 1967; Wild und Heck, 2005) scheiden aus, da zum Teil langwellige Signalinhalte auftreten (Denker, 1988). In (Forsberg und Tscherning, 1981) wird daher eine Reduktion nur der kurzwelligen Anteile vorgeschlagen. Eine mittlere Topographiefläche wird als Referenzfläche ausgewählt, um die davon abweichenden Massendefizite und -überschüsse zu modellieren. Das residuale Massenmodell wird als residuales Terrainmodell (engl. *residual terrain model*, RTM) bezeichnet. Die Reduktionswerte der einzelnen Massenblöcke haben sowohl positive als auch negative Vorzeichen (Forsberg und

Tscherning, 1981; Gerlach, 2003, S. 70), die sich in größerer Entfernung vom Aufpunkt aufheben. Die Berechnung kann daher regional begrenzt werden (Abstände von 50 km bis 1000 km). Je hochfrequenter die Signalstruktur der Referenzfläche ist, desto kleiner kann das Berechnungsgebiet gewählt werden. Ein Nachteil der RTM-Reduktion ist, dass manche Punkte unter Umständen nach der Reduktion innerhalb der Massen der Referenztopographie liegen, denn die Punkte verbleiben in der ursprünglichen Geländehöhe (Gerlach, 2003, S. 70). Die reduzierten Schwerewerte an diesen Punkten repräsentieren daher nicht mehr das harmonische Außenraumpotential. Nach (Forsberg und Tscherning, 1981) kann Abhilfe durch eine harmonische Korrektur geschaffen werden: Die Schwerewerte innerhalb der Massen werden als harmonische Fortsetzung (Freiluftreduktion) von Oberflächenwerten berechnet, wodurch die Schwerewerte dann zur Modellierung des Außenraumpotentials verwendet werden können, s. a. (Gerlach, 2003, S. 71).

Die Gravitationseffekte  $L(T^{\text{RTM}})$  der residualen topographischen Massen mit der Dichteanomalie  $\Delta\rho$  für lineare Funktionale  $L(T)$  des Störpotentials  $T$  können auf Basis des Integrals

$$L(T^{\text{RTM}}) = G \iiint_V \Delta\rho L\left(\frac{1}{d}\right) dv \quad (3.3)$$

berechnet werden. Die Größe  $d$  beschreibt den Abstand zwischen dem Aufpunkt und dem Quellpunkt des differentiellen Volumenelementes  $dv$ . Das Integral kann für rechtwinklige Prismenblöcke (z. B. Forsberg, 1984), aber auch für andere Begrenzungsflächen der Massenelemente (z. B. Tsoulis, 2003; Heck und Seitz, 2007; Jekeli und Zhu, 2006) gelöst werden. Die Integration lässt sich durch geeignete Überführung der Integralformeln in Faltungsoperatoren auch mit Hilfe der FFT lösen (Forsberg, 1985; Sideris, 1985; Tziavos et al., 1988; Sideris und Li, 1993; Peng et al., 1995). In planarer Approximation kann die FFT zweidimensional angewendet werden, wird der Bezug zur Kugel beibehalten wird die FFT eindimensional eingesetzt, s. a. Abschnitt 8.1. Die in dieser Arbeit verwendeten RTM-Reduktionswerte  $\Delta g^{\text{RTM}}$  für Schwereanomalien und  $T_{[ij]}^{\text{RTM}}$  für die Tensorelemente sind mit Hilfe des FORTRAN-Programmes TC (Forsberg, 1984) berechnet worden, s. a. (Denker, 2003). Nähere Angaben zu den verwendeten Parametern finden sich in Abschnitt 10.1. In Abhängigkeit von der Entfernung des Prismas vom Aufpunkt werden Prismenformeln, Reihenentwicklungen und Punktmassenapproximationen verwendet, vgl. auch (Denker, 1988). Für detaillierte Angaben, z. B. zur Behandlung der inneren Zone um den Aufpunkt und zur Berücksichtigung der Erdkrümmung, wird auf (Forsberg, 1984; Denker, 1988) verwiesen. Untersuchungen zur benötigten Auflösung und Genauigkeit der DGM finden sich in (Forsberg, 1984; Grote, 1996). Nach (Denker, 2006) genügt bezüglich der Geoidberechnung im cm-Bereich eine Auflösung von etwa 100 m bis 1000 m für alpines bis flaches Gelände mit einer Genauigkeit von einigen 10 m.

## 3.4 Integrationsverfahren in regionaler Anwendung

### 3.4.1 Grundlagen

Das geodätische Randwertproblem zur Berechnung des Störpotentials  $T$  aus Schwereanomalien  $\Delta g$  wurde schon im Jahre 1849 von STOKES für das Geoid als Randfläche in sphärischer Näherung gelöst (Stokes, 1849):

$$T(\theta_{P_0}, \lambda_{P_0}) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g(\theta_{Q_0}, \lambda_{Q_0}) d\sigma. \quad (3.4)$$

Die STOKES-Funktion  $S(\psi)$  gewichtet die Schwereanomalien  $\Delta g$  entsprechend dem sphärischen Abstand  $\psi$  zwischen dem Aufpunkt  $P_0$  und dem Quellpunkt  $Q_0$ . Die Gewichtung basiert auf dem funktionalen Zusammenhang zwischen Störpotential  $T$  und der Schwereanomalie  $\Delta g$  nach (2.24). In der sphärischen Näherung werden die ellipsoidischen Koordinaten der Punkte den sphärischen Koordinaten (Poldistanz  $\theta$ , Länge  $\lambda$ ) gleichgesetzt, vgl. Abb. 3.1. Der Radius  $R$  ist der mittlere Erdradius. Die Schwereanomalien  $\Delta g_{Q_0}$  und auch die Lösung  $T_{P_0}$  beziehen sich auf das Geoid (in sphärischer Approximation). Mit Hilfe des Theorems von BRUNS (2.20) kann die Geoidhöhe  $N$  aus  $T_{P_0}$  abgeleitet werden. PIZZETTI erweiterte 1911 den Ansatz zur Berechnung des Störpotentials im gesamten Außenraum des Geoids (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 94), die auch als Fortsetzung nach oben (engl. *upward continuation*) bezeichnet wird. Entsprechend lassen sich die Schwerefeldgrößen auch nach unten fortsetzen (engl. *downward continuation*). Allerdings ist diese Berechnung, bei der hohe Frequenzen verstärkt

werden, weniger stabil als die Fortsetzung nach oben, bei der das Signal geglättet wird (vgl. MEISSEL-Schema in Abb. 2.2). Die STOKES-Funktion  $S(\psi)$  mit Erweiterung nach PIZZETTI kann neben der geschlossenen Form auch in Reihenentwicklung

$$S(\psi, r_P, r_Q) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) \quad (3.5)$$

mit Hilfe der LEGENDRE-Polynome  $P_n$  dargestellt werden. Für konstante Radien  $r_P$  und  $r_Q$  ist die Kernfunktion  $S(\psi, r_P, r_Q)$  isotrop.

Zur Lösung von (3.4) müssen die Massen außerhalb des Geoids reduziert werden, da harmonische Funktionen vorausgesetzt werden (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 92). Um auf eine Reduktion der Massen mit der Einführung einer Dichtehypothese verzichten zu können, führte MOLODENSKII 1945 die Lösung des Randwertproblems auf der Erdoberfläche ein (in engl. Übersetzung Molodenskii et al., 1962, Kapitel 5; Heiskanen und Moritz, 1967, S. 291 ff.). Mit Hilfe des Theorems von BRUNS (2.19) kann aus dem Störpotential  $T_P$  die Quasigeoidhöhe oder Höhenanomalie  $\zeta_P$  abgeleitet werden. Dabei wird das die Erdoberfläche annähernde Telluroid (vgl. Abschnitt 2.1.3) als Randfläche eingeführt. Die Integration wird für eine auf dem Telluroid kondensierte einfache Schicht gelöst. Im Gegensatz zur STOKES-Formel (3.4) hängt die Lösung nach MOLODENSKII nicht allein von den Schwereanomalien ab, sondern auch von der Geländeneigung (Torge, 2001, S. 289). Es ergibt sich eine Reihenentwicklung, die häufig als MOLODENSKII-Reihe bezeichnet wird. Als Alternative wird in (Moritz, 1980, S. 377 ff.) die analytische Fortsetzung zur Lösung des MOLODENSKII-Problems angegeben. Die an der Erdoberfläche definierten Schwereanomalien  $\Delta g_Q$  werden dazu zunächst analytisch auf eine einheitliche Referenzhöhe fortgesetzt. Diese reduzierten Schwereanomalien sind theoretische Größen und haben keine physikalische Entsprechung (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 319). Die STOKES-Formel (3.4) kann auf Basis der reduzierten Schwereanomalien in der gewählten Referenzhöhe ausgewertet werden. Das Störpotential bzw. die Höhenanomalie an der Erdoberfläche wird anschließend ebenfalls durch analytische Fortsetzung in der entsprechenden Höhe berechnet. Die Fortsetzung erfolgt über eine TAYLOR-Reihenentwicklung. Dazu werden die radialen Gradienten  $\frac{\partial^n}{\partial r^n}$  der Ordnung  $n$  der Schwereanomalie und der Höhenanomalie eingeführt. Die Lösung mit Beschränkung auf die Ableitung der 1. Ordnung wird auch als Gradientenlösung bezeichnet (Moritz, 1980, S. 387; Torge, 2001, S. 291). Es kann gezeigt werden, dass die Berechnung auf Basis der analytischen Fortsetzung der MOLODENSKII-Reihe entspricht (Moritz, 1980, S. 388; Otero und Auz, 2004).

Die Referenzhöhe kann prinzipiell frei gewählt werden (Sideris und Schwarz, 1988); wird als Referenzhöhe die Punkthöhe  $H_P$  des Berechnungspunktes  $P$  eingeführt, gilt für die Reihe 1. Ordnung zur Berechnung des Störpotentials im Oberflächenpunkt  $P$  (Moritz, 1980, S. 379; Torge, 2001, S. 291)

$$T(\theta_P, \lambda_P, r_P) = \frac{r_P}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi, r_P, r_P) \left( \Delta g(\theta_Q, \lambda_Q, r_Q) - \frac{\partial \Delta g}{\partial H}(H_Q - H_P) \right) d\sigma. \quad (3.6)$$

Der Radius  $r_P$  wird im Vorfaktor  $\frac{r_P}{4\pi}$  üblicherweise durch  $R$  ersetzt (Moritz, 1980, S. 379). Die Schwereanomalien  $\Delta g_Q$  sind an der Erdoberfläche in der Höhe  $H_Q$  definiert. Die Radien der Punkte  $P$  und  $Q$  ergeben sich in sphärischer Näherung zu  $r_P = R + H_P$  bzw.  $r_Q = R + H_Q$ , vgl. Abb. 3.4. Der Term  $-\frac{\partial \Delta g}{\partial H}(H_Q - H_P)$  entspricht dem Term 1. Ordnung der MOLODENSKII-Reihe und wird im Folgenden als MOLODENSKII-Korrekturterm bezeichnet.

Durch Anwendung des MOLODENSKII-Korrekturterms kann die individuelle Punkthöhe der Eingangsdaten bei der Integration über die Kugel berücksichtigt werden. Der MOLODENSKII-Korrekturterm in (3.6) entfällt, wenn alle Punkthöhen  $H_Q$  der Eingangsdaten gleich der Höhe  $H_P$  des Berechnungspunktes angenommen werden. Die topographische Reduktion der Schwereanomalien auf Basis eines RTM (Abschnitt 3.3) führt aufgrund der Signalglättung zu einer Verkleinerung des MOLODENSKII-Korrekturterms und damit insgesamt zu einer schnelleren Konvergenz der MOLODENSKII-Reihe (Forsberg und Sideris, 1989). Untersuchungen von (Denker und Tziavos, 1999) zur Quasigeoidberechnung in den Alpen ergaben eine Größenordnung der Auswirkung des MOLODENSKII-Terms 1. Ordnung von etwa 1 cm im Quasigeoid, wenn das Eingangsdatenfeld auf Basis eines RTM geglättet ist, Terme höherer Ordnung sind deutlich kleiner. In den Studien zur Berechnung des Tensors  $T_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE (Tabelle 4.1 in Abschnitt 4.2) wurde bei Anwendung des Integrationsverfahrens der MOLODENSKII-Korrekturterm bisher vernachlässigt (Denker, 2003; Pail, 2004; Kern und Haagmans, 2005). Daher wird auch hier die MOLODENSKII-Reihe auf die nullte Ordnung begrenzt, so dass sie formal der Lösung (3.4) nach STOKES entspricht. Der Effekt der Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe der Beobachtungen wird in dieser Arbeit mit Hilfe der Kollokation nach kleinsten Quadraten numerisch untersucht.

Mit der Erweiterung nach PIZZETTI wird das Störpotential im Punkt  $P$  bei Vernachlässigung des MOLODENSKII-Korrekturterms mit

$$T(\theta_P, \lambda_P, r_P) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi, r_P, R) \Delta g(\theta_Q, \lambda_Q, R) d\sigma \quad (3.7)$$

aus Schwereanomalien  $\Delta g_Q$  abgeleitet, die an der Erdoberfläche definiert sind.

Die Schwereanomalie  $\Delta g$  ergibt sich nach (2.28) aus der Akkumulation ihrer sphärisch-harmonischen Anteile (Heiskanen und Moritz (1967), S. 30, 258)

$$\Delta g_n(\theta, \lambda, R) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \Delta g(\theta', \lambda', R) P_n(\cos \psi) \sin \theta' d\theta' d\lambda' . \quad (3.8)$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelationen der LEGENDRE-Polynome auf der Kugel gelingt eine einfache spektrale Zerlegung der isotropen Kernfunktion  $S(\psi, r_P, r_Q)$  für konstante Radien  $r_P$  und  $r_Q$  (z. B. Heiskanen und Moritz, 1967, S. 30 bzw. 257):

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{\psi=0}^{\pi} S(\psi, r_P, r_Q) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi = \int_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{2\ell+1}{\ell-1} \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(\cos \psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \\ &= \frac{2}{2n+1} \frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^{n+1} = \frac{2}{n-1} \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^{n+1} . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Für die dabei angewendete Vertauschung von Summation und Integration ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (3.5) Voraussetzung (Bronstein et al., 1996, S. 394). Auf Basis der  $\Delta g_n$  und der spektralen Zerlegung (3.9) des Integralkerns kann (3.7) auch in spektraler Form

$$T(\theta_P, \lambda_P, r_P) = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} S_n \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R) \quad (3.10)$$

geschrieben werden.

In der Integration (3.7) wird formal vorausgesetzt, dass terrestrische Schwereanomalien global und unendlich dicht vorliegen. In der Praxis liegen die Schwereanomalien aber nur diskret in regional begrenzten Gebieten vor. Daher wird die im vorherigen Abschnitt eingeführte Remove-Restore-Technik zur Ergänzung der terrestrischen Daten im Außenbereich durch Informationen eines GPM und zur Glättung der Daten durch Reduktion des hochfrequenten Signals der Topographie angewendet. Ist das residuale Signal ausreichend glatt, genügt eine diskrete Abtastung, um das kontinuierliche Signal zu rekonstruieren.

### 3.4.2 Anwendung der Remove-Restore-Technik

Das Integrationsgebiet  $\sigma$  aus (3.7) wird im Folgenden in das Gebiet einer Kugelkappe  $\sigma_0$  mit dem Radius  $\psi_0$  und dem Berechnungspunkt  $P$  im Zentrum (Abb. 3.1, S. 26) und die restliche Kugeloberfläche  $\sigma - \sigma_0$  zerlegt. Im Gebiet  $\sigma_0$  stehen Schwereanomalien

$$\Delta g^T(\theta, \lambda, R) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n^T(\theta, \lambda, R) \quad (3.11)$$

zur Berechnung der Approximation  $\hat{T}^T$  zur Verfügung, formal entsprechen sie den oben eingeführten Schwereanomalien  $\Delta g$ . Der Index ( $T$ ) wird hier zur Unterscheidung gegenüber den aus einem GPM abgeleiteten Schwereanomalien

$$\Delta g^M(\theta, \lambda, R) = \sum_{n=2}^{n_{\max}} \Delta g_n^M(\theta, \lambda, R) \quad (3.12)$$

eingeführt, deren spektrale Auflösung auf den sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max}$  begrenzt ist. Die spektralen Anteile  $\Delta g_n^M$  entsprechen zunächst ebenfalls formal den spektralen Anteilen  $\Delta g_n$  aus (3.10) bis zum Grad  $n_{\max}$ . Diese Anomalien werden zunächst nur im Außenbereich  $\sigma - \sigma_0$  zur Berechnung der Approximation  $\hat{T}^{MA}$  verwendet. Es ergibt sich in der Summe die Approximation  $\hat{T}_P$  der Lösung (3.7) zu

$$\begin{aligned}\hat{T}_P &= \hat{T}(\theta_P, \lambda_P, r_P) = \hat{T}_P^{MA} + \hat{T}_P^T \quad (3.13) \\ &= \frac{R}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} S(\psi, r_P, R) \Delta g^M(\theta_Q, \lambda_Q, R) \sin \psi \, d\psi d\alpha + \frac{R}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi_0} S(\psi, r_P, R) \Delta g^T(\theta_Q, \lambda_Q, R) \sin \psi \, d\psi d\alpha.\end{aligned}$$

Hierbei muss die Umrechnung der sphärischen Poldistanz  $\theta$  und Länge  $\lambda$  der Quellpunkte  $Q$  in sphärische Polarkoordinaten  $\psi$  und  $\alpha$  (vgl. Abb. 3.5) berücksichtigt werden (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 258). Das Vorgehen zur Kombination der beiden Datenquellen  $\Delta g^T$  und  $\Delta g^M$  entspricht der in Abschnitt 3.1 (S. 26) vorgestellten Methode I. Die Berechnung aus diskret vorliegenden im Gegensatz zu den hier als kontinuierlich angenommenen Beobachtungen wird in Kapitel 8 dieser Arbeit dargestellt. Die kreisförmige Gebietsbegrenzung pro Berechnungspunkt (vgl. Abb. 3.1, S. 26) wird gewählt, um eine einfache spektrale Darstellung von Signal- und Fehlerbeitrag im Innengebiet  $\sigma_0$  und im Außengebiet  $\sigma - \sigma_0$  zu erhalten, wobei ein konstanter Radius  $R$  für alle Beobachtungen  $\Delta g^M$  und  $\Delta g^T$  im Folgenden vorausgesetzt wird, so dass der Integralkern  $S(\psi, r_P, R)$  isotrop ist.

Um die Orthogonalitätseigenschaften der Kugelflächenfunktionen auf der Kugel  $\sigma$  ausnutzen zu können, wird in  $\hat{T}^{MA}$  aus (3.13) die stückweise stetige Funktion

$$\bar{S}(\psi, r_P, R) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ S(\psi, r_P, R) & \text{für } \psi > \psi_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

eingeführt (Heck, 1979). Eine spektrale Darstellung der Integration in  $\hat{T}^{MA}$  aus (3.13) gelingt auf Basis der in (Molodenskii et al., 1962) eingeführten MOLODENSKII-Abbruchkoeffizienten (engl. *truncation coefficients*)  $Q_n$ , die sich aus der LEGENDRE-Transformation der Funktion  $\bar{S}$  zu

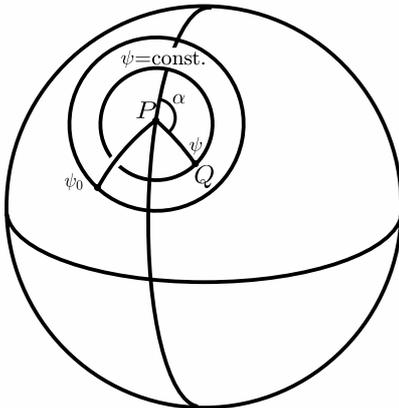
$$Q_n(\psi_0) = \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} S(\psi, r_P, R) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \quad (3.15)$$

ergeben, wobei auf die Angabe der Radien  $r_P$  und  $R$  in den Argumenten von  $Q_n$  verzichtet wurde. Die Summe der spektralen Anteile rekonstruiert die Funktion

$$\bar{S}(\psi, r_P, R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(\psi_0) P_n(\cos \psi). \quad (3.16)$$

Analog ergibt sich für die in  $\hat{T}^T$  aus (3.13) einzusetzende stückweise stetige Funktion

$$\bar{S}(\psi, r_P, R) = \begin{cases} S(\psi, r_P, R) & \text{für } 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ 0 & \text{für } \psi > \psi_0 \end{cases} \quad (3.17)$$



**Abbildung 3.5.** Die Polarkoordinaten  $\psi$  und  $\alpha$  legen Richtung und Strecke von Punkt  $P$  zu Punkt  $Q$  auf der Kugel fest. Der Punkt  $P$  stellt den Berechnungspunkt dar, der Punkt  $Q$  einen Quellpunkt innerhalb der Kugelkappe  $\sigma_0$ , vgl. Abb. 3.1.

mit der spektralen Zerlegung in die Koeffizienten

$$\bar{Q}_n(\psi_0) = \int_{\psi=0}^{\psi_0} S(\psi, r_P, R) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \quad (3.18)$$

die folgende Rekonstruktion

$$\bar{S}(\psi, r_P, R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \bar{Q}_n(\psi_0) P_n(\cos \psi) . \quad (3.19)$$

Mit der spektralen Zerlegung  $Q_n(\psi_0 = 0) = S_n$  der Kernfunktion  $S(\psi, r_P, R)$  nach (3.9) gilt außerdem der Zusammenhang

$$Q_n(\psi_0) = S_n - \bar{Q}_n(\psi_0) . \quad (3.20)$$

Die Integration (3.13) wird mit Hilfe der Abbruchkoeffizienten (3.15) und (3.18) und den Kugelflächenfunktionen  $\Delta g_n$  der Schwereanomalien  $\Delta g^M$  aus (3.12) und  $\Delta g^T$  aus (3.11) als Summe der spektralen Anteile ausgedrückt. Es ergibt sich für die beiden Summanden aus (3.13) unter Verwendung von (3.8)

$$\begin{aligned} \hat{T}_P^{MA} &= \frac{R}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} S(\psi, r_P, R) \Delta g^M(\theta_Q, \lambda_Q, R) \sin \psi d\psi d\alpha \\ &= \frac{R}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \bar{S}(\psi, r_P, R) \Delta g^M(\theta_Q, \lambda_Q, R) \sin \psi d\psi d\alpha \\ &= \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \bar{Q}_n(\psi_0) \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g^M(\theta_Q, \lambda_Q, R) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi d\alpha \\ &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \bar{Q}_n(\psi_0) \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) \end{aligned} \quad (3.21)$$

und

$$\begin{aligned} \hat{T}_P^T &= \frac{R}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi_0} S(\psi, r_P, R) \Delta g^T(\theta_Q, \lambda_Q, R) \sin \psi d\psi d\alpha \\ &= \frac{R}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \bar{S}(\psi, r_P, R) \Delta g^T(\theta_Q, \lambda_Q, R) \sin \psi d\psi d\alpha \\ &= \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \bar{Q}_n(\psi_0) \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g^T(\theta_Q, \lambda_Q, R) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi d\alpha \\ &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{Q}_n(\psi_0) \Delta g_n^T(\theta_P, \lambda_P, R) . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Für die dabei jeweils angewendete Vertauschung von Summation und Integration ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihen (3.16) und (3.19) Voraussetzung (Bronstein et al., 1996, S. 394). Durch Einsetzen in (3.13) folgt

$$\hat{T}_P = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \bar{Q}_n(\psi_0) \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{Q}_n(\psi_0) \Delta g_n^T(\theta_P, \lambda_P, R) . \quad (3.23)$$

Der Beitrag der sphärisch-harmonischen Grade 0 und 1 wird dabei vernachlässigt. Das heißt, dass die Masse des Normalschwerefeldes und der tatsächlichen Erde als gleich angenommen und das Koordinatensystem im

Massenmittelpunkt der Erde gelagert wird (vgl. Abschnitt 2.1.3). Eine Berücksichtigung dieser Signalbeiträge ist in (Heck und Grüninger, 1983) dargestellt.

Der Vernachlässigungsfehler  $\delta T_P^{\text{VF}}$  der Integration (3.13) ergibt sich unter Berücksichtigung der zu Beginn des Abschnittes eingeführten formalen Übereinstimmung der spektralen Anteile  $\Delta g_n^T$ ,  $\Delta g_n^M$  und  $\Delta g_n$  aus der Differenz von (3.10) und (3.23) zu

$$\delta T_P^{\text{VF}} = T_P - \hat{T}_P = \frac{R}{2} \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} Q_n(\psi_0) \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R). \quad (3.24)$$

Wenn Abweichungen zwischen den Anteilen  $\Delta g_n^T$ ,  $\Delta g_n^M$  und  $\Delta g_n$  auftreten, dann ergeben sich in (3.24) weitere Terme. Dies wird in Abschnitt 3.4.4 behandelt. Hier wird nun angenommen, dass die Schwereanomalien  $\Delta g^M$  global vorliegen und in die Lösung

$$\hat{T}_P^M = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} S_n \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) \quad (3.25)$$

einfließen. Außerdem gilt  $\Delta g_n^M = 0$  für  $n > n_{\max}$ . Folglich kann mit (3.25) unter Verwendung von (3.20) die Gleichung (3.23) umformuliert werden zu

$$\begin{aligned} \hat{T}_P &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (S_n - \bar{Q}_n(\psi_0)) \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{Q}_n(\psi_0) \Delta g_n^T(\theta_P, \lambda_P, R) \\ &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} S_n \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{Q}_n(\psi_0) (\Delta g_n^T(\theta_P, \lambda_P, R) - \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R)) \\ &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} S_n \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} S(\psi) (\Delta g^T(\theta_Q, \lambda_Q, R) - \Delta g^M(\theta_Q, \lambda_Q, R)) d\sigma \\ &= \hat{T}_P^M + \hat{T}_P^R. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dies entspricht der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Remove-Restore-Technik (Methode II), vgl. Abb. 3.3. Diese Methode hat, wie bereits erwähnt, den Vorteil, dass die kleineren Residualwerte

$$\Delta g^R = \Delta g^T - \Delta g^M \quad (3.27)$$

geringere Approximationsfehler in der regionalen Integration zur Berechnung von  $\hat{T}^R$  aus (3.26) verursachen als ein unreduziertes Signal  $\Delta g^T$  in der Lösung  $\hat{T}^T$  aus (3.13). In der praktischen Anwendung basieren die Schwereanomalien  $\Delta g^M$  auf einem GPM, daher wurde in (3.26) die Akkumulation der spektralen Anteile  $\Delta g_n^M$  zur Lösung von  $\hat{T}^M$  gewählt. Die Schwereanomalien  $\Delta g^T$  repräsentieren regional vorliegende terrestrische Daten, die durch Integration im Ortsraum in die Lösung einfließen.

Die Umformulierung von (3.23) in (3.26) zeigt, dass die Methoden I und II zur Kombination eines GPM mit terrestrischen Daten, abgesehen von unterschiedlich großen Approximationsfehlern, zu denselben analytischen Ergebnissen führen. Innerhalb der Kugelkappe werden auch bei der Remove-Restore-Technik allein die terrestrischen Daten zur Modellierung herangezogen. Dies wird in der Literatur bei der Interpretation von Ergebnissen aus (3.26) teilweise nicht klar berücksichtigt (Higgins et al., 1998; Featherstone, 1999; Featherstone et al., 2001). Ansteigende Fehler der Approximation von  $T$  bei wachsender Kappengröße können u. a. durch Fehler im langwelligen Bereich der terrestrischen Daten erklärt werden. Bei sehr kleiner Kappengröße werden die Fehler fast vollständig durch das GPM mit geringeren Fehlern im langwelligen Bereich abgefangen, allerdings tragen die terrestrischen Daten dann auch nur wenig zur Lösung bei. Für eine flexiblere spektrale Kombination der Datenquellen kann der Integralkern modifiziert werden. Dies wird im folgenden Abschnitt erläutert. Es sei noch darauf hingewiesen, dass zur Fehlerminimierung bei der regionalen Integration neben einer geeigneten Datenkombination auch der Integralkern an einer günstigen Stelle  $\psi_0$  abgebrochen werden muss. Dieser Zusammenhang wird ausführlicher in Abschnitt 3.4.5 diskutiert.

### 3.4.3 Modifikation des Integralkerns

In der bisher dargestellten Approximation von  $T$  werden innerhalb der Kugelkappe  $\sigma_0$  ausschließlich die terrestrischen Daten  $\Delta g^T$  verwendet. Der langwellige Signalanteil wird aber im Allgemeinen besser durch ein aktuelles

GPM als durch terrestrische Daten repräsentiert. Zum einen können die terrestrischen Daten prinzipiell den sehr langwelligen Signalanteil nicht gut wiedergeben, da sie nur regional begrenzt vorliegen, zum anderen führen Inkonsistenzen in der Datumsfestlegung der Höhennetze und systematische Fehler in den Nivellementsnetzen zu Fehlern im langwelligen Signalbereich (bis etwa zum sphärisch-harmonischen Grad 200) der terrestrischen Daten (Heck, 1990).

Es bietet sich daher an, die Beobachtungen  $\Delta g^M$  und  $\Delta g^T$  innerhalb der Kugelkappe spektral zu kombinieren. Der Integralkern  $S(\psi, r_P, R)$  wird dazu durch Einführung spektraler Gewichte  $s_n$  in der Reihenentwicklung (3.5) modifiziert:

$$S^{s_n}(\psi, r_P, R) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{2} s_n S_n P_n(\cos \psi) . \quad (3.28)$$

Dabei wurde die spektrale Zerlegung  $S_n$  der Kernfunktion aus (3.9) verwendet. Aufgrund der Isotropie des Integralkerns entfällt die Abhängigkeit vom Azimut, die spektralen Gewichte hängen daher allein vom sphärisch-harmonischen Grad  $n$  und nicht von der Ordnung  $m$  ab.

Die Einführung der spektralen Gewichte  $s_n$  in (3.10) führt formal zur spektralen Kombinationslösung

$$T_P = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (1 - s_n) S_n \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} s_n S_n \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R) . \quad (3.29)$$

Gleichung (3.29) kann durch Verwendung der modifizierten Kernfunktion (3.28) und der Beziehung (3.8) umgeformt werden zu

$$T_P = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (1 - s_n) S_n \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S^{s_n}(\psi, r_P, R) \Delta g(\theta_Q, \lambda_Q, R) d\sigma . \quad (3.30)$$

Es werden nun in den beiden Summanden jeweils die Beobachtungen  $\Delta g^T$  aus (3.11) und  $\Delta g^M$  aus (3.12) eingeführt. Die Beobachtungen  $\Delta g^T$  liegen dabei nur im begrenzten Gebiet der Kugelkappe  $\sigma_0$  mit dem Berechnungspunkt  $P$  im Zentrum vor, die Beobachtungen  $\Delta g^M$  sind hingegen global verfügbar, jedoch spektral begrenzt bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max}$ . Es ergibt sich im Integrationsverfahren (IF) mit spektraler Gewichtung die Approximation  $\hat{T}_P^{\text{IF}*}$  zu

$$\hat{T}_P^{\text{IF}*} = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (1 - s_n) S_n \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} S^{s_n}(\psi, r_P, R) \Delta g^T(\theta_Q, \lambda_Q, R) d\sigma . \quad (3.31)$$

Gleichung (3.31) ist eine vorläufige Lösung des Integrationsverfahrens, weshalb das Ergebnis mit (\*) gekennzeichnet wird. Für die terrestrischen Daten  $\Delta g^T$  aus (3.11) werden in  $S^{s_n}(\psi, r_P, R)$  aus (3.28) die spektralen Gewichte

$$s_n = \begin{cases} s_n^T & \text{für } 2 \leq n \leq k_{\max} \\ 1 & \text{für } n > k_{\max} \end{cases} \quad (3.32)$$

eingeführt, für das GPM-Signal  $\Delta g^M$  wird entsprechend (3.31) eine Gewichtung von  $1 - s_n$  gewählt. Es muss  $k_{\max} \leq n_{\max}$  gelten, da das GPM auf Signale der Frequenz  $n \leq n_{\max}$  beschränkt ist. Da die spektralen Gewichte der terrestrischen Daten ab dem Grad  $k_{\max} + 1$  gleich eins sind, ergibt sich die modifizierte Kernfunktion (3.28) auch zu

$$S^{s_n}(\psi, r_P, R) = S(\psi, r_P, R) - \sum_{n=2}^{k_{\max}} \frac{2n+1}{2} (1 - s_n^T) S_n P_n(\cos \psi) . \quad (3.33)$$

Es werden nun analog zu den gewöhnlichen MOLODENSKII-Abbruchkoeffizienten (3.15) und (3.18) die Abbruchkoeffizienten

$$Q_n^{s_\ell}(\psi_0) = \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} S^{s_\ell}(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi = \int_{\psi=\psi_0}^{\pi} \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} s_\ell S_\ell P_\ell(\cos \psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \quad (3.34)$$

und

$$\bar{Q}_n^{s_\ell}(\psi_0) = \int_{\psi=0}^{\psi_0} S^{s_\ell}(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi = \int_{\psi=0}^{\psi_0} \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} s_\ell S_\ell P_\ell(\cos \psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \quad (3.35)$$

der modifizierten Kernfunktion definiert. Die Approximation (3.31) ergibt sich mit (3.35) in spektraler Formulierung zu

$$\hat{T}_P^{\text{IF}^*} = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (1 - s_n) S_n \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{Q}_n^{s_\ell}(\psi_0) \Delta g_n^T(\theta_P, \lambda_P, R). \quad (3.36)$$

Aus der Differenz von (3.10) und (3.36) ergibt sich unter Berücksichtigung der formalen Übereinstimmung der spektralen Anteile  $\Delta g_n$  mit  $\Delta g_n^T$  und  $\Delta g_n^M$  (bis  $n_{\max}$ ) der Vernachlässigungsfehler

$$\begin{aligned} \delta T_P^{\text{VF}, \text{IF}^*} &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} S_n \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R) - \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (1 - s_n) S_n \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R) - \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{Q}_n^{s_\ell}(\psi_0) \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R) \\ &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (s_n S_n - \bar{Q}_n^{s_\ell}(\psi_0)) \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{2} \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} (S_n - \bar{Q}_n^{s_\ell}(\psi_0)) \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Unter Verwendung spektraler Gewichte  $g_n$ , die jeweils durch  $s_n$  bzw. durch  $1 - s_n$  ersetzt werden können, lassen sich mit Hilfe von (3.20) folgende Beziehungen zwischen den Abbruchkoeffizienten (3.34) und (3.35) aufstellen:

$$\bar{Q}_n^{g_\ell}(\psi_0) = g_n S_n - Q_n^{g_\ell}(\psi_0) \quad \text{und} \quad Q_n^{g_\ell}(\psi_0) = Q_n^1(\psi_0) - Q_n^{(1-g_\ell)}(\psi_0). \quad (3.38)$$

Mit (3.38) gelingt eine Umformung von (3.37) zu

$$\delta T_P^{\text{VF}, \text{IF}^*} = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} Q_n^{s_\ell}(\psi_0) \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{2} \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} ((1 - s_n) S_n + Q_n^{s_\ell}(\psi_0)) \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R). \quad (3.39)$$

Berücksichtigt man zudem, dass die spektralen Gewichte  $s_n$  aus (3.32) ab dem harmonischen Grad  $k_{\max} + 1$  den Wert eins annehmen und  $k_{\max} \leq n_{\max}$  gilt, folgt  $1 - s_n = 0$  für  $n > n_{\max}$ . Damit vereinfacht sich (3.39) zu

$$\delta T_P^{\text{VF}, \text{IF}^*} = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n^{s_\ell}(\psi_0) \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R). \quad (3.40)$$

Der Vernachlässigungsfehler (3.40) kann dadurch verringert werden, dass die Beiträge bis zum Grad  $n = n_{\max}$  auf Basis der  $\Delta g_n^M$  aus dem GPM bestimmt und damit nicht vernachlässigt werden. Der Term  $\sum_{n=2}^{n_{\max}} Q_n^{s_\ell}(\psi_0) \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R)$  wird daher zum Beitrag des GPM in (3.31) ergänzt. Es ergibt sich die Approximation  $\hat{T}^{\text{IF}}$  im Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung zu

$$\begin{aligned} \hat{T}_P^{\text{IF}} &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} ((1 - s_n) S_n + Q_n^{s_\ell}(\psi_0)) \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} S^{s_n}(\psi, r_P, R) \Delta g^T(\theta_Q, \lambda_Q, R) \, d\sigma \\ &= \hat{T}_P^{M_A, \text{IF}} + \hat{T}_P^{T, \text{IF}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Es verbleibt der Vernachlässigungsfehler

$$\delta T_P^{\text{VF}, \text{IF}} = \frac{R}{2} \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} Q_n^{s_\ell}(\psi_0) \Delta g_n(\theta_P, \lambda_P, R). \quad (3.42)$$

Der Beitrag  $\hat{T}^{M_A, \text{IF}}$  des GPM zur kombinierten Lösung (3.41) lässt sich unter Verwendung der Beziehungen (3.38) umformen zu

$$\begin{aligned} \hat{T}_P^{M_A, \text{IF}} &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} ((1 - s_n) S_n + Q_n^{s_\ell}(\psi_0)) \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) \\ &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (\bar{Q}_n^{1-s_\ell} + Q_n^1) \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) \end{aligned} \quad (3.43a)$$

$$= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (S_n - \bar{Q}_n^{s_\ell}(\psi_0)) \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R). \quad (3.43b)$$

Der Ausdruck (3.43a) zeigt, dass das GPM innerhalb der sphärischen Kappe mit  $1 - s_n$  gewichtet wird ( $\bar{Q}_n^{1-s_\epsilon}$ ) und im Außenbereich  $\sigma - \sigma_0$  mit dem Gewicht eins eingeht ( $Q_n^1$ ). Es existieren Ansätze, in denen der Vernachlässigungsfehler  $\delta T^{\text{VF}, \text{IF}^*}$  nicht mit Hilfe des GPM zu  $\delta T^{\text{VF}, \text{IF}}$  reduziert wird (z. B. Sjöberg, 1984). Dies kann von Vorteil sein, da Gleichungssysteme zur Bestimmung optimaler spektraler Gewichte zur Minimierung des Vernachlässigungsfehlers auf Basis von (3.40) numerisch stabiler gelöst werden können als auf Basis von (3.42), s. (Smeets, 1994). In den meisten Ansätzen wird aber ausgenutzt, dass sich ein Genauigkeitsgewinn durch die Verwendung des vollständigen GPM-Signals im Außenbereich  $\sigma - \sigma_0$  ergibt (z. B. Heck und Grüniger, 1983; Sjöberg, 1991; Denker, 2003).

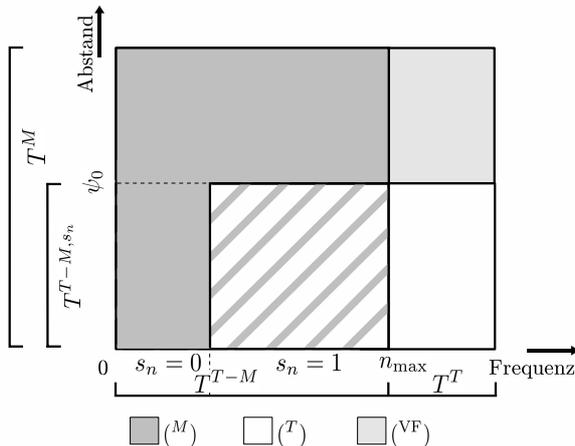
Der Ausdruck (3.43b) eignet sich, um die Kombinationslösung (3.41) im Sinne der Remove-Restore-Technik entsprechend (3.26) zu formulieren (Wenzel, 1982):

$$\begin{aligned}
\hat{T}_P^{\text{IF}} &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} S_n \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) - \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \bar{Q}_n^{s_\epsilon}(\psi_0) \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} S^{s_n}(\psi, r_P, R) \Delta g^T(\theta_Q, \lambda_Q, R) d\sigma \\
&= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} S_n \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) - \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} S^{s_n}(\psi, r_P, R) \Delta g^M(\theta_Q, \lambda_Q, R) d\sigma + \\
&\quad + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} S^{s_n}(\psi, r_P, R) \Delta g^T(\theta_Q, \lambda_Q, R) d\sigma \\
&= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} S_n \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} S^{s_n}(\psi, r_P, R) \Delta g^R(\theta_Q, \lambda_Q, R) d\sigma \\
&= \hat{T}_P^{M, \text{IF}} + \hat{T}_P^{R, \text{IF}}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

In die Integration gehen die residualen Schwereanomalien  $\Delta g^R$  aus (3.27) ein. Die Remove-Restore-Technik wird wegen der in Abschnitt 3.1 genannten Vorteile auch beim Integrationsverfahren mit modifizierter Kernfunktion genutzt. Die spektralen Gewichte  $s_n$  steuern, für welchen spektralen Signalbereich das GPM auch innerhalb der Kugelkappe in die Lösung einfließt, vgl. Abb. 3.6. Der langwellige Signalbereich (bis  $k_{\max} \leq n_{\max}$ ) des GPM kann über den gesamten Ortsbereich  $\psi = 0 \dots \pi$  verwendet werden. Wird der Integralkern nicht wie in (3.33) angegeben modifiziert, kann das GPM nur im Bereich  $\psi_0 \dots \pi$  genutzt werden, vgl. Abb. 3.3 auf S. 27. Ansätze zur Bestimmung der spektralen Gewichte werden im Abschnitt 3.4.5 besprochen.

### 3.4.4 Bestimmung der Varianzen der Zielgrößen

Neben der Approximation der Zielgröße  $T$  interessiert die Genauigkeit, mit der die Zielgröße auf Basis des Integrationsverfahrens (3.44) berechnet werden kann. Bei der Ermittlung der Genauigkeit ist neben dem im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Vernachlässigungsfehler (3.42) das in der Praxis auftretende Rauschen  $\epsilon$  in den Beobachtungen ( $\Delta g^M$  und  $\Delta g^T$ ) zu berücksichtigen. Die Fehlerbeiträge aufgrund des Rauschens der Beobachtungen werden im Englischen als *commission errors* bezeichnet.



**Abbildung 3.6.** Remove-Restore-Technik mit spektraler Kombination eines GPM ( $M$ ) und regionaler terrestrischer Daten ( $T$ ) innerhalb einer Kugelkappe mit dem Radius  $\psi_0$ . Es verbleibt der Vernachlässigungsfehler ( $\text{VF}$ ).

Da weder die tatsächlichen Werte des Rauschens noch die Signalbeiträge  $\Delta g_n$  zur Berechnung des Vernachlässigungsfehlers (3.42) bekannt sind, muss auf statistische Aussagen über die Fehlerquellen zurückgegriffen werden (Heck, 1979). Das Rauschen des Störpotentials und seiner Funktionale wird dazu als stationärer stochastischer Prozess auf der Kugel interpretiert, wobei der Prozess des Signals außerdem ergodisch ist (Abschnitt 2.2.2). Es wird davon ausgegangen, dass die Kovarianzfunktionen des Signals und des Rauschens homogen und isotrop sind, da dann eine spektrale Darstellung der Fehlerbeiträge auf Basis von Gradvarianzen nach (2.59) gelingt.

Im Folgenden wird angenommen, dass die terrestrischen Daten  $\Delta g^T$  gegenüber den rauschfreien  $\Delta g^{T(\epsilon=0)}$  aus (3.11) mit dem Rauschen

$$\epsilon_{\Delta g^T} = \Delta g^{T(\epsilon=0)} - \Delta g^T = \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n(\Delta g^T) \quad (3.45)$$

und die Daten  $\Delta g^M$  des GPM gegenüber den rauschfreien  $\Delta g^{M(\epsilon=0)}$  aus (3.12) mit dem Rauschen

$$\epsilon_{\Delta g^M} = \Delta g^{M(\epsilon=0)} - \Delta g^M = \sum_{n=2}^{n_{\max}} \epsilon_n(\Delta g^M) \quad (3.46)$$

behaftet sind. Durch Anwendung von (3.44) auf  $\Delta g^M$  und  $\Delta g^T$  ergibt sich die Approximation  $\hat{T}^{\text{IF}(\epsilon \neq 0)}$  aus verrauschten Beobachtungen. Aus der Differenz zur Lösung  $T$  aus (3.10) lässt sich formal das verbleibende Rauschen inklusive Vernachlässigungsfehler der Approximation  $\hat{T}^{\text{IF}(\epsilon \neq 0)}$  angeben:

$$\begin{aligned} \epsilon_{T^{\text{IF}}} = T - \hat{T}^{\text{IF}(\epsilon \neq 0)} &= \epsilon_{T^M} + \epsilon_{T^T} + \delta T^{\text{VF, IF}} \\ &= \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} ((1 - s_n)S_n + Q_n^{s_\ell}(\psi_0))\epsilon_n(\Delta g^M) + \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{Q}_n^{s_\ell} \epsilon_n(\Delta g^T) + \frac{R}{2} \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} Q_n^{s_\ell}(\psi_0) \Delta g_n. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Mit Hilfe von (3.38) lässt sich (3.47) umformen zu

$$\epsilon_{T^{\text{IF}}} = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (\bar{Q}_n^{1-s_\ell} + Q_n^1)\epsilon_n(\Delta g^M) + \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{Q}_n^{s_\ell} \epsilon_n(\Delta g^T) + \frac{R}{2} \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} Q_n^{s_\ell} \Delta g_n. \quad (3.48)$$

Die Varianz (oder mittlerer quadratischer Fehler)  $m_{\epsilon_{T^{\text{IF}}}}^2$  für das Gesamtsystem  $\epsilon_{T^{\text{IF}}}$  aus dem vernachlässigten Signal und dem Rauschen wird entsprechend (2.72) berechnet zu

$$m_{\epsilon_{T^{\text{IF}}}}^2 = E\{M(\epsilon_{T^{\text{IF}}}, \epsilon_{T^{\text{IF}}})\} \quad (3.49)$$

(Heiskanen und Moritz, 1967, S. 261; Moritz, 1980, S. 100). Unter der Annahme, dass zwischen den beiden Rauschquellen und dem vernachlässigten Signal keine Korrelation besteht, ergibt sich für (3.48) durch Anwendung von (3.49)

$$\begin{aligned} m_{\epsilon_{T^{\text{IF}}}}^2 &= \frac{R^2}{4} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{n'=2}^{n_{\max}} (\bar{Q}_n^{1-s_\ell} + Q_n^1)(\bar{Q}_{n'}^{1-s_\ell} + Q_{n'}^1) E\{\epsilon_n(\Delta g^M), \epsilon_{n'}(\Delta g^M)\} + \\ &\quad \frac{R^2}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{n'=2}^{\infty} \bar{Q}_n^{s_\ell} \bar{Q}_{n'}^{s_\ell} E\{\epsilon_n(\Delta g^T), \epsilon_{n'}(\Delta g^T)\} + \frac{R^2}{4} \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} \sum_{n'=n_{\max}+1}^{\infty} Q_n^{s_\ell} Q_{n'}^{s_\ell} M\{\Delta g_n, \Delta g_{n'}\}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Für  $n = n'$  ergeben sich die Signalgradvarianzen  $M\{\Delta g_n, \Delta g_n\} = \sigma_n^2(\Delta g)$  und die Fehlergradvarianzen  $E\{\epsilon_n(\Delta g^T), \epsilon_n(\Delta g^T)\} = \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})$  bzw.  $E\{\epsilon_n(\Delta g^M), \epsilon_n(\Delta g^M)\} = \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M})$ . Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft der sphärisch-harmonischen Funktionen ist  $M\{\Delta g_n, \Delta g_{n'}\} = 0$ , wenn  $n \neq n'$  gilt (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 256). Es wird außerdem vorausgesetzt, dass das Rauschen  $\epsilon_n(\Delta g^T)$  bzw.  $\epsilon_n(\Delta g^M)$  für  $n \neq n'$  unkorreliert ist und daher  $E\{\epsilon_n(\Delta g^T), \epsilon_{n'}(\Delta g^T)\} = 0$  bzw.  $E\{\epsilon_n(\Delta g^M), \epsilon_{n'}(\Delta g^M)\} = 0$  für  $n \neq n'$  gilt. Ebenso wird angenommen, dass das Rauschen der Datenquellen untereinander nicht korreliert ist und  $E\{\epsilon_n(\Delta g^M), \epsilon_{n'}(\Delta g^T)\} = 0$  für alle  $n, n'$  gilt. Dies ist sicher erfüllt, wenn terrestrische Schwereanomalien  $\Delta g^T$  mit Daten eines GPM, das ausschließlich auf Satellitendaten beruht, kombiniert werden. Unter diesen Voraussetzungen vereinfacht sich (3.50) zu

$$\begin{aligned} m_{\epsilon_{T^{\text{IF}}}}^2 &= m_{\epsilon_{T^M}}^2 + m_{\epsilon_{T^T}}^2 + m_{\delta T^{\text{VF, IF}}}^2 \\ &= \frac{R^2}{4} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (\bar{Q}_n^{1-s_\ell} + Q_n^1)^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M}) + \frac{R^2}{4} \sum_{n=2}^{\infty} (\bar{Q}_n^{s_\ell})^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T}) + \frac{R^2}{4} \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} (Q_n^{s_\ell})^2 \sigma_n^2(\Delta g). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ein entsprechender Ausdruck für die Varianz der spektralen Kombinationslösung nach (Wong und Gore, 1969), vgl. Abschnitt 3.4.5, ist in (Heck und Grüninger, 1983) zu finden. Zur Berechnung der Varianz (3.51) müssen die Fehlergradvarianzen des GPM und der terrestrischen Daten sowie die Signalgradvarianzen der Schwereanomalien bekannt sein. Ihre Modellierung wird im Folgenden erläutert.

**Fehlergradvarianzen des GPM.** Die Kovarianzmatrix des Rauschens der Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$  der Kugelfunktionsentwicklung (2.5) eines GPM ist für Modelle der aktuellen Schwerefeldmission CHAMP ( $n_{\max} \leq 120$ ) verfügbar (GFZ, 2006b). Auf die Bereitstellung der Kovarianzmatrix des Rauschens wird bei anderen Modellen bisher verzichtet. Für das zukünftige hochauflösende Schwerefeldmodell der GOCE-Mission soll die volle Kovarianzmatrix des Rauschens bis zum sphärisch-harmonischen Grad 200 bereitgestellt werden (Drinkwater und Kern, 2006). Wegen der großen Dimension der Matrix werden für Berechnung und Speicherung spezielle Verfahren eingesetzt (z. B. Alkhatib und Schuh, 2007). Die Ableitung von Kovarianzen des Rauschens von Schwerefeldgrößen aus der Kovarianzmatrix des Rauschens der Koeffizienten ist in (Haagmans und van Gelderen, 1991) dargestellt. Die wegen der großen Datenmenge aufwendige Berücksichtigung der Kovarianzmatrix des Rauschens wird bisher nur in wenigen Arbeiten verwendet (z. B. Pavlis und Saleh, 2005).

Zur Abschätzung der Varianz der Größen berechnet aus einem GPM werden stattdessen häufig die Fehlergradvarianzen

$$\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M}) = \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{2n} \left(\frac{n-1}{R}\right)^2 \sum_{m=0}^n (\sigma^2(\bar{a}_{nm}) + \sigma^2(\bar{b}_{nm})) \quad (3.52)$$

verwendet, vgl. (2.71). Die Standardabweichungen  $\sigma(\bar{a}_{nm})$  und  $\sigma(\bar{b}_{nm})$  der Koeffizienten aktueller (kombinierter) Schwerefeldmodelle stehen bis zu einem sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max} = 360$  zur Verfügung, vgl. Abschnitt 7.2.1. Die aus den Fehlergradvarianzen (3.52) nach (2.60) abgeleitete Kovarianzfunktion des Rauschens ist homogen und isotrop.

Die Abschätzung der Varianz (3.51) der spektralen Kombinationslösung basiert auf den Fehlergradvarianzen (3.52), die gegenüber einer Bestimmung der Varianz auf Basis der vollen Kovarianzmatrix des Rauschens zu einem mittleren Maß über alle Ordnungen führt. Daher kann die Varianz etwas zu groß oder zu klein ausfallen (Haagmans und van Gelderen, 1991).

Es sei darauf hingewiesen, dass bei Nutzung eines GPM, in dessen Lösung auch terrestrische Daten eingeflossen sind (kombinierte Schwerefeldmodelle), die in (3.51) vernachlässigten Korrelationen zwischen dem Rauschen des GPM und dem der terrestrischen Daten nicht auszuschließen sind, s. a. Abschnitt 10.1.

**Fehlergradvarianzen der terrestrischen Daten.** Liegt eine homogene und isotrope Kovarianzfunktion aus korreliertem Rauschen  $\epsilon_{\Delta g^T}^K$  terrestrischer Daten  $\Delta g^{T_K}$  vor, können Fehlergradvarianzen mit Hilfe einer LEGENDRE-Transformation berechnet werden (Wenzel und Arabelos, 1981):

$$\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T}^K) = \frac{2n+1}{2} \int_{\psi=0}^{\pi} C_{\epsilon_{\Delta g}^K \epsilon_{\Delta g}^K}(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi. \quad (3.53)$$

Die Kovarianzfunktion  $C_{\epsilon_{\Delta g}^K \epsilon_{\Delta g}^K}(\psi)$  des korrelierten Rauschens ist durch ein Modell festzulegen. In dieser Arbeit wird für die Modellierung von korreliertem Rauschen ein Modell in Anlehnung an (Weber und Wenzel, 1983; Weber, 1984) gewählt, s. a. (Wolf, 2006):

$$C_{\epsilon_{\Delta g}^K \epsilon_{\Delta g}^K}(\psi) = \sigma^2(\epsilon_{\Delta g^T}^K) e^{-4.0\psi[^\circ]}. \quad (3.54)$$

Die Varianz  $\sigma^2(\epsilon_{\Delta g^T}^K)$  der terrestrischen Daten  $\Delta g^{T_K}$  gibt darin das Rauschniveau an. Das Modell aus (Weber, 1984) wurde aus dem Vergleich gravimetrischer Schwereanomalien ermittelt und unter Anpassung des Rauschniveaus in verschiedenen Arbeiten angewendet, z. B. (de Min, 1996; Behrend, 1999; Denker, 2003). Die modellierte Kovarianzfunktion des Rauschens ist homogen und isotrop, unabhängig vom Azimut zwischen den beteiligten Punkten.

Für die Schwereanomalien  $\Delta g^{T_{UK}}$  mit unkorreliertem Rauschen  $\epsilon_{\Delta g^T}^{UK}$  wird (bandlimitiertes) weißes Rauschen (s. Abschnitt 2.2.1) erzeugt. Das angenommene Rauschniveau  $\sigma^2(\epsilon_{\Delta g^T}^{UK})$  wird dazu gleichmäßig über einen be-

grenzten Spektralbereich verteilt, es ergeben sich die Fehlergradvarianzen:

$$\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T}^{\text{UK}}) = \frac{\sigma^2(\epsilon_{\Delta g^T}^{\text{UK}})}{n_B - 1}. \quad (3.55)$$

Beiträge der harmonischen Grade 0 und 1 werden bei der Fehleraufteilung (3.55) ausgespart. Die Breite  $n_B$  des Spektralbereiches wird entsprechend der Auflösung  $\Delta\lambda_A$  der eingeführten Beobachtungen gemäß (2.8) gewählt:

$$n_B \approx \frac{\pi}{\Delta\lambda_A}. \quad (3.56)$$

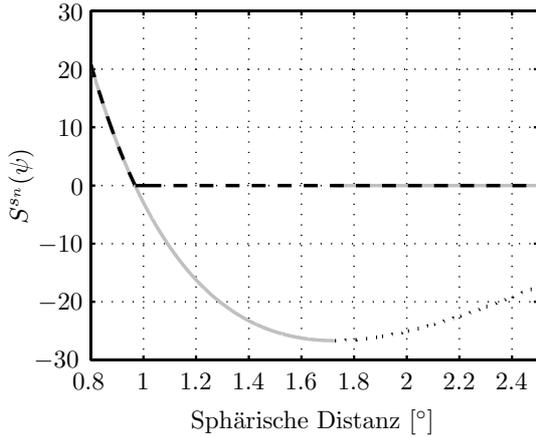
Die Werte der Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T}^{\text{UK}})$  nehmen bei feinerer Auflösung  $\Delta\lambda_A$  ab und würden im Fall kontinuierlicher Daten theoretisch null werden, weshalb die Varianz  $\sigma^2(\epsilon_{\Delta g^T}^{\text{UK}})$  bei nicht bandlimitiertem weißen Rauschen gegen Unendlich strebt. Grenzwertbetrachtungen hierzu werden in (Rummel und Sansò, 1994; Sansò und Sona, 1995) auf Basis des WIENERSchen Wahrscheinlichkeitsmaßes diskutiert.

Die Berücksichtigung von anisotropem Rauschverhalten der terrestrischen Daten durch numerische Integration ortsabhängiger Rauschwerte wird in (Pavlis und Saleh, 2005) erläutert. Für unkorreliertes Rauschen ist eine vereinfachte Integration z. B. in (Arabelos, 1980; Sünkel, 1981) dargestellt. In der vorliegenden Arbeit wird von homogenen und isotropen Kovarianzfunktionen des Rauschens ausgegangen.

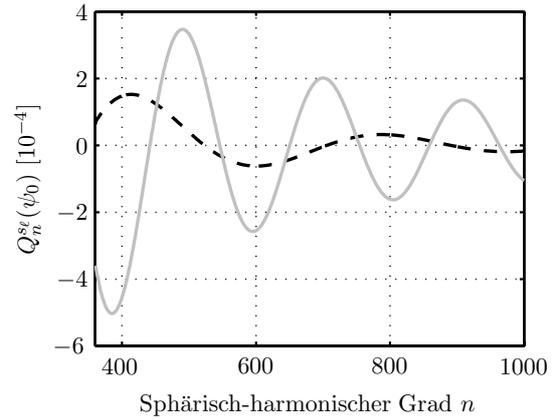
**Signalgradvarianzen.** Der Anteil  $m_{\delta T^{\text{VF, IF}}}^2$  der Varianz in (3.51) resultiert aus dem Vernachlässigungsfehler (3.42) und wird auf Basis von Signalgradvarianzen  $\sigma_n^2(\Delta g)$  abgeschätzt. Zur Modellierung der Signalgradvarianzen wird in dieser Arbeit das Gradvarianzmodell aus (Tscherning und Rapp, 1974) eingesetzt (Abschnitt 2.2.2). Dazu werden mit Hilfe von (2.63) zunächst Gradvarianzen  $\sigma_n^2(T)$  des Störpotentials abgeleitet, die nach (2.66) in Gradvarianzen  $\sigma_n^2(\Delta g)$  der Schwereanomalien transformiert werden.

### 3.4.5 Ansätze zur spektralen Gewichtung

Die Verfahren zur spektralen Kombination können in deterministisch und stochastisch motivierte Ansätze unterteilt werden. Die deterministischen Ansätze haben in erster Linie die Reduktion des Vernachlässigungsfehlers zum Ziel (Heck und Grüninger, 1987). Kleinere Amplituden und bessere Konvergenz der Abbruchkoeffizienten  $Q_n^{s\ell}(\psi_0)$  führen zu kleineren Vernachlässigungsfehlern  $\delta T^{\text{VF, IF}}$  aus (3.42), da der Signalbeitrag  $\Delta g_n$  in (3.42) durch die Abbruchkoeffizienten gewichtet wird. Eine geschickte Wahl des maximalen Integrationsradius  $\psi_0$ , bei dem die Kernfunktion  $S^{s_n}(\psi)$  abgebrochen wird, kann bereits die Schwingungsamplitude der Abbruchkoeffizienten und so den Vernachlässigungsfehler verringern (Heck, 1979). Dieser Einfluss des Abbruchradius  $\psi_0$  auf die Amplituden der Abbruchkoeffizienten  $Q_n^{s\ell}(\psi_0)$  ist beispielhaft in den Abb. 3.7 und 3.8 dargestellt. Die Abbruchkoeffizienten  $Q_n^{s\ell}(\psi_0)$  werden nach (3.34) auf Basis des modifizierten Kerns  $S^{s_n}(\psi)$  berechnet. Die erste Nullstelle der Kernfunktion in  $\psi_{0,N}$  und das erste Minimum in  $\psi_{0,M}$  werden als Abbruchradius  $\psi_0$  gewählt (Abb. 3.7). Ein GPM bis zum Grad  $n_{\text{max}} = 360$  ergänzt in diesem Beispiel die Integrationslösung, die Abbruchkoeffizienten sind ab Grad  $n_{\text{max}} + 1$  zu betrachten, vgl. (3.42). In Abb. 3.8 ist zu erkennen, dass die Amplituden der Abbruchkoeffizienten für den Abbruchradius  $\psi_{0,N}$  kleiner sind als für  $\psi_{0,M}$ . Die Abbruchkoeffizienten  $Q_n^{s\ell}(\psi_0)$  modellieren die in  $\psi_0$  abgebrochene Kernfunktion  $S^{s_n}(\psi)$  im Frequenzraum. Die in  $\psi_{0,M}$  abgebrochene Kernfunktion ist an dieser Stelle unstetig, der Sprung auf null im Ortsraum hat periodische Schwingungen im Frequenzraum zur Folge. Bei Abbruch in  $\psi_{0,N}$  ist die abgebrochene Kernfunktion selbst zwar stetig, nicht aber ihre erste Ableitung. Daher entstehen ebenfalls Schwingungen in der Frequenzraumdarstellung, jedoch mit kleinerer Amplitude als für einen Abbruch in  $\psi_{0,M}$ . Daher zeigt die Varianz  $m_{\delta T^{\text{VF, IF}}}^2$  aus (3.51), die auf dem Vernachlässigungsfehler (3.42) basiert, bei Abbruch der Kernfunktion in der ersten Nullstelle  $\psi_{0,N}$  ein lokales Minimum, s. a. (Heck, 1979; Heck und Grüninger, 1983; Evans und Featherstone, 2000). Dieser Zusammenhang wird in der Modifikation nach (Meissl, 1971b) ausgenutzt: Die Nullstelle des Integralkerns  $S^{s_n}(\psi)$  wird an die Stelle eines beliebigen Abbruchradius  $\psi_0$  verschoben, indem der Wert  $S^{s_n}(\psi_0)$  von der Funktion subtrahiert wird. Dies kann von Vorteil sein, wenn beispielsweise nur ein sehr kleines Eingangsdatengebiet vorliegt und der Abbruchradius  $\psi_0$  unter Umständen nicht günstig gewählt werden kann. Eine deutliche Verkleinerung des Vernachlässigungsfehlers kann mit der Modifikation nach MEISSL erzielt werden, wenn als Abbruchradius das (erste) lokale Minimum der Kernfunktion gewählt wird (Heck und Grüninger, 1987; Wolf und Kieler, 2006). Die Modifikation kann auch mit Hilfe spektraler Gewichte formuliert werden (Heck und Grüninger, 1987).



**Abbildung 3.7.** Modifizierte Kernfunktion  $S^{sn}$ . Dargestellt ist der Abbruch in der ersten Nullstelle (---) und im ersten Minimum (—, grau). Die Wahl der Abbruchstelle  $\psi_0$  hat Auswirkung auf die Abbruchkoeffizienten  $Q_n^{st}(\psi_0)$ , vgl. Abb. 3.8.



**Abbildung 3.8.** Abbruchkoeffizienten  $Q_n^{st}(\psi_0)$  zur Berechnung des Vernachlässigungsfehlers (3.42), dargestellt für den Abbruch des Integralkerns  $S^{sn}$  in der ersten Nullstelle (---) und im ersten Minimum (—, grau), vgl. Abb. 3.7.

Neben der Modifikation nach MEISSL wird häufig auch die Modifikation nach MOLODENSKII eingesetzt (Molodenskii et al., 1962; Vaníček und Kleusberg, 1987; Vaníček und Featherstone, 1998). Die spektralen Gewichte (3.32) werden für einen gegebenen Abbruchradius  $\psi_0$  auf Basis eines Gleichungssystems bestimmt. Bei zu kleinen Abbruchradien  $\psi_0$  kann das Gleichungssystem allerdings numerisch instabil werden (Featherstone, 2003). Bei der Modifikation nach (Wong und Gore, 1969) werden die spektralen Gewichte der niedrigen sphärisch-harmonischen Grade zu null gesetzt und langwellige Signale mit Hilfe eines GPM bestimmt. Der Vernachlässigungsfehler wird bei dieser Methode nur implizit verringert. Die Methode wird daher auch häufig mit der MEISSL-Modifikation kombiniert (Heck und Grüniger, 1987; de Min, 1996). Eine Gegenüberstellung der drei genannten Verfahren findet sich in (Jekeli, 1980, 1981b). Durch Vermeidung eines abrupten Übergangs der spektralen Gewichtung von null auf eins, wie in der WONG-GORE-Methode, kann eine modifizierte Kernfunktion  $S^{sn}(\psi)$  mit kleineren Schwingungsamplituden erzeugt werden (Haagmans et al., 2003; Gitlein et al., 2005). Dies führt ebenfalls zu einer Verringerung des Vernachlässigungsfehlers in der regionalen Integration.

Stochastisch motivierte Ansätze berücksichtigen statistische Angaben des Rauschens der terrestrischen Daten und des GPM (Moritz, 1976; Sjöberg, 1981; Wenzel, 1981, 1982). Auf Basis der Fehlergradvarianzen der Beobachtungen werden spektrale Gewichte (3.32) für eine optimale Kombination der Daten (im Sinne der Methode nach kleinsten Quadraten durch Minimierung der Varianz) abgeleitet. Ein Problem dabei ist, dass Angaben über das Rauschen gerade für die terrestrischen Daten häufig unbekannt sind oder auf Schätzungen basieren, weshalb die stochastisch basierten Methoden von manchen Autoren kritisch betrachtet werden (de Min, 1996; Featherstone, 1999, 2003). Es empfiehlt sich in jedem Fall, die abgeleiteten spektralen Gewichte auf Plausibilität zu überprüfen. Ein Vorteil der stochastisch motivierten Verfahren ist, dass durch die Kopplung der spektralen Gewichte mit den Annahmen über das Rauschen der Beobachtungen beispielsweise die Auswirkung des Genauigkeitsgewinns durch Einsatz der GPM aktueller Satellitenmissionen in der spektralen Kombination direkt verfolgt werden kann (z. B. Denker, 2003; Wolf, 2006). Ein Vergleich der deterministisch motivierten Modifikationen nach MEISSL sowie nach WONG und GORE und dem stochastisch motiviertem Verfahren nach WENZEL (Wenzel, 1981) ist bezüglich der Geoidberechnung in (Gerlach, 2003) zu finden.

Auch die Minimierung der Varianz, die durch den Vernachlässigungsfehler  $\delta T^{\text{VF, IF}}$  aus (3.42) verursacht wird, kann bei der stochastischen Optimierung der Kombination integriert werden (Sjöberg, 1984, 1986, 1991). Die Minimierung der Varianz (3.51) führt dabei zu einem Gleichungssystem zur Bestimmung der spektralen Gewichte (Sjöberg, 1991). Bei kleinen Abbruchradien  $\psi_0$  kann das Gleichungssystem allerdings schon für eine geringe Anzahl spektraler Gewichte numerisch instabil werden, in der Regel gelingt die Bestimmung der Gewichte bis zum harmonischen Grad  $n = 20$  (Despotakis, 1987; Smeets, 1994; Sjöberg und Hunegnaw, 2000), durch Regularisierung des Gleichungssystem auch für höhere Grade ( $n = 67$  in Ellmann, 2005;  $n = 200$  in Agren, 2004). Alternativ wurde in (Wolf und Kieler, 2006) der Ansatz nach WENZEL mit dem Ansatz nach MEISSL zur Reduktion des Vernachlässigungsfehlers kombiniert und für die Geoidberechnung angewendet.

In dieser Arbeit wird der stochastisch motivierte Ansatz nach WENZEL zur Berechnung des Tensors  $T_{[ij]}$  verwendet, wie es in Abschnitt 5.1.3 erläutert wird. Dieser Ansatz wurde bereits in verschiedenen Untersuchungen zur Optimierung der Kombination von GPM und terrestrischen Daten erfolgreich eingesetzt (z. B. Weber, 1984; Wichiencharoen, 1984; Denker, 1988; Smeets, 1994; Denker und Torge, 1998; Behrend, 1999; Roland, 2005; Wolf und Denker, 2005).

## 3.5 Kollokation nach kleinsten Quadraten

### 3.5.1 Prädiktion der Zielgrößen und ihrer Varianzen

Das Verfahren der Kollokation nach kleinsten Quadraten wurde von (Moritz, 1962) in die Geodäsie eingeführt und von (Krarup, 1969) um Aspekte aus der Funktionalanalysis erweitert, es verbindet die Verfahren der Ausgleichung, Filterung und Prädiktion (Moritz, 1980, S. 133). Das mathematische Modell

$$\underline{l} = \underline{A} \underline{x} + \underline{f} + \underline{\epsilon} \quad (3.57)$$

enthält die Beobachtungen  $\underline{l}$ , die durch einen deterministischen Anteil  $\underline{A} \underline{x}$ , den Signalanteil  $\underline{f}$  und das Messrauschen  $\underline{\epsilon}$  modelliert werden. Die Matrix  $\underline{A}$  beschreibt den Zusammenhang zwischen den unbekannt systematischen Parametern  $\underline{x}$  und den Beobachtungen  $\underline{l}$ . In der vorliegenden Arbeit wird die Kollokation nach kleinsten Quadraten zur Prädiktion von Schwerefeldparametern eingesetzt, systematische Parameter werden nicht geschätzt. Im Rahmen dieser Arbeit wird unter dem Begriff der Kollokation stets die Kollokation nach kleinsten Quadraten verstanden.

Im Folgenden wird die Herleitung der Prädiktionsformel der Kollokation nach (Moritz, 1970) dargestellt. Das Störpotential  $T$  ist die Zielgröße, die aus beobachteten Schwereanomalien  $\Delta g$  bestimmt wird. Voraussetzung zur Anwendung der Kollokation ist, dass der Erwartungswert des Signals der Beobachtungen bzw. der Zielgröße null ist (Moritz, 1980, S. 76). Im Fall des Schwerefeldsignals ersetzt der Mittelwertoperator  $M$  nach (2.57) den Erwartungswertoperator (Abschnitt 2.2.2) und es muss daher gelten  $M(T) = 0$ . Diese Forderung ist erfüllt, wenn das Störpotential  $T$  über eine Kugelfunktionsentwicklung definiert ist, deren Term des sphärisch-harmonischen Grades null entfällt (Moritz, 1980, S. 83), vgl. Abschnitt 2.2.2. Als Beobachtungen gehen  $n$  Schwereanomaliewerte  $\Delta g$  ein, die diskret verteilt vorliegen ( $n < \infty$ ). Der Schätzwert  $\hat{T}$  der Zielgröße in einem Punkt  $P$  wird als Linearkombination der Beobachtungen auf Basis der Gewichtungsfaktoren  $\underline{h}$  ermittelt:

$$\hat{T}_{1,1}(P) = \frac{\underline{h}}{1,n}(P) \frac{\Delta g}{n,1}. \quad (3.58)$$

Der Prädiktionsfehler  $\epsilon(\hat{T}(P))$  der Schätzung  $\hat{T}$  ergibt sich aus

$$\epsilon_{1,1}(\hat{T}(P)) = \underline{T}_{1,1}(P) - \hat{T}_{1,1}(P) = \underline{T}_{1,1}(P) - \frac{\underline{h}}{1,n}(P) \frac{\Delta g}{n,1}, \quad (3.59)$$

für das quadratische Produkt des Prädiktionsfehlers gilt

$$\begin{aligned} \epsilon_{1,1}(\hat{T}(P)) \epsilon_{1,1}(\hat{T}(P)) &= \left( \underline{T}_{1,1}(P) - \frac{\underline{h}}{1,n}(P) \frac{\Delta g}{n,1} \right) \left( \underline{T}_{1,1}(P) - \frac{\underline{h}}{1,n}(P) \frac{\Delta g}{n,1} \right) \\ &= \underline{T}_{1,1}(P) \underline{T}_{1,1}(P) - 2 \frac{\underline{h}}{1,n}(P) \frac{\Delta g}{n,1} \underline{T}_{1,1}(P) + \frac{\underline{h}}{1,n}(P) \frac{\Delta g}{n,1} \frac{\Delta g^T}{1,n} \frac{\underline{h}}{n,1}^T(P). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Der Prädiktionsfehler  $\epsilon(\hat{T}(P))$  wird im Folgenden als Rauschen bezeichnet, denn im Hinblick auf das noch einzuführende Messrauschen  $\epsilon(\Delta g)$  der Beobachtungswerte werden dann gleiche Begriffe für Abweichungen von wahren Werten verwendet. Bei Anwendung von (2.72) auf (3.60) ergeben sich die folgenden Kovarianzen:

$$\underline{C}_{TT} = M(\underline{T}, \underline{T}) \quad \text{Autokovarianz der Zielgröße } T, \quad (3.61a)$$

$$\underline{C}_{\Delta g \Delta g} = M(\underline{\Delta g}, \underline{\Delta g}) \quad \text{Autokovarianz der Beobachtungen } \Delta g, \quad (3.61b)$$

$$\underline{C}_{T \Delta g} = M(\underline{T}, \underline{\Delta g}) \quad \text{Kreuzkovarianz zwischen } T \text{ und } \Delta g, \quad (3.61c)$$

$$\underline{C}_{\epsilon_{\hat{T}} \epsilon_{\hat{T}}} = E(\underline{\epsilon}(\hat{T}), \underline{\epsilon}(\hat{T})) \quad \text{Kovarianz des Rauschens der Schätzung } \hat{T}. \quad (3.61d)$$

Die Kovarianzen (3.61a) bis (3.61c) des Signals müssen konsistent aus einer Basiskovarianzfunktion abgeleitet werden, s.a. Abschnitt 6.1. Als Basiskovarianzfunktion wird üblicherweise die homogene und isotrope Kovarianzfunktion (2.62) des Störpotentials gewählt, alle anderen Kovarianzen werden nach dem Kovarianzfortpflanzungsgesetz (2.65) abgeleitet.

Nach Anwendung des Mittelwert- bzw. Erwartungswertoperators nach (2.72) auf (3.60) werden die Kovarianzen (3.61a) bis (3.61d) eingesetzt und es ergibt sich

$$\underline{C}_{\epsilon_{\hat{T}}\epsilon_{\hat{T}}}(P) = \underline{C}_{T(P)T(P)} - 2 \underline{h}(P) \underline{C}_{T(P)\Delta g}^T + \underline{h}(P) \underline{C}_{\Delta g\Delta g} \underline{h}^T(P). \quad (3.62)$$

Die Koeffizienten  $\underline{h}(P)$  werden nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Minimierung der Varianz, also der Kovarianz  $\underline{C}_{\epsilon_{\hat{T}}\epsilon_{\hat{T}}}$  des Rauschens, bestimmt. Das Minimum der Gleichung (3.62) wird dazu durch Nullsetzen der ersten Ableitung ermittelt. Für die Elemente  $h(P, k)$  mit  $k = 1, \dots, n$  des Vektors  $\underline{h}(P)$  ergibt sich

$$\frac{\partial \underline{C}_{\epsilon_{\hat{T}}\epsilon_{\hat{T}}}(P)}{\partial h(P, k)} = -2 \underline{C}_{T(P)\Delta g} + 2 \underline{h}(P) \underline{C}_{\Delta g\Delta g} = \underline{0} \quad (3.63)$$

und schließlich

$$\underline{h}(P) \underline{C}_{\Delta g\Delta g} = \underline{C}_{T(P)\Delta g}. \quad (3.64)$$

Diese Gleichung stellt eine Erweiterung der WIENER-HOPF-Gleichung (Moritz, 1970; Papoulis und Pillai, 2002, S. 587) stochastischer Prozesse dar. Es ist ein Gleichungssystem aus  $n$  linearen Gleichungen. Die Lösung des Gleichungssystems für  $h(P)$  lautet

$$\underline{h}(P) = \underline{C}_{T(P)\Delta g} \underline{C}_{\Delta g\Delta g}^{-1}. \quad (3.65)$$

Setzt man die Lösung (3.65) in Gleichung (3.58) ein, erhält man die Prädiktionsformel der Kollokation. Für  $m$  Prädiktionspunkte ergibt sich entsprechend (Moritz, 1970)

$$\underline{\hat{T}} = \underline{C}_{T\Delta g} \underline{C}_{\Delta g\Delta g}^{-1} \underline{\Delta g}. \quad (3.66)$$

Die Kovarianzmatrix  $\underline{C}_{\Delta g\Delta g}$  ist positiv definit (Krarup, 1969, S. 16; Moritz, 1970, S. 15, 178). Zur Prädiktion der Zielgröße  $\hat{T}$  ist keine vollständige Inversion der Matrix  $\underline{C}_{\Delta g\Delta g}$  erforderlich, es genügt die Lösung des Gleichungssystems

$$\underline{C}_{\Delta g\Delta g} \underline{x} = \underline{\Delta g}, \quad (3.67)$$

um daraus  $\hat{T}$  zu berechnen mit

$$\underline{\hat{T}} = \underline{C}_{T\Delta g} \underline{x}. \quad (3.68)$$

In der Praxis erfordert die Gleichungslösung jedoch schon ab etwa  $n = 10\,000$  Beobachtungen große Speicher- und Rechenkapazitäten, vgl. Abschnitt 8.2 und 8.3.

Das Messrauschen der Beobachtungen  $\Delta g$  wird in Form der Kovarianzmatrix  $\underline{C}_{\epsilon_{\Delta g}\epsilon_{\Delta g}}$  des Rauschens in Gleichung (3.66) eingeführt (Moritz, 1970, S. 22 f.):

$$\underline{\hat{T}} = \underline{C}_{T\Delta g} \left( \underline{C}_{\Delta g\Delta g} + \underline{C}_{\epsilon_{\Delta g}\epsilon_{\Delta g}} \right)^{-1} \underline{\Delta g}. \quad (3.69)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass Signal und Rauschen nicht korreliert sind. Im Folgenden wird auf die Angabe der Dimension der Vektoren und Matrizen verzichtet.

Die Kovarianzen  $\underline{C}_{\epsilon_{\hat{T}}\epsilon_{\hat{T}}}$  des Rauschens der prädierten Zielgrößen  $\hat{T}$  ergeben sich durch Einsetzen von (3.65) in Gleichung (3.62) unter Berücksichtigung der Kovarianzmatrix  $\underline{C}_{\epsilon_{\Delta g}\epsilon_{\Delta g}}$  des Rauschens der Beobachtungen zu

$$\underline{C}_{\epsilon_{\hat{T}}\epsilon_{\hat{T}}} = \underline{C}_{TT} - \underline{C}_{T\Delta g} \left( \underline{C}_{\Delta g\Delta g} + \underline{C}_{\epsilon_{\Delta g}\epsilon_{\Delta g}} \right)^{-1} \underline{C}_{\Delta g,T}. \quad (3.70)$$

Auf der Hauptdiagonalen der Matrix  $\underline{C}_{\epsilon_{\hat{T}}\epsilon_{\hat{T}}}$  stehen die Varianzen von  $\hat{T}$  aus der Kollokation nach kleinsten Quadraten, diese werden im Folgenden mit  $m_{\epsilon_{TKKQ}}^2$  bezeichnet. Die Berechnung der Varianzen ist unabhängig von den tatsächlichen Beobachtungswerten und ist daher für eine à-priori Genauigkeitsanalyse geeignet.

Die Kollokationslösung (3.69) besitzt folgende Eigenschaften (Moritz, 1980, S. 119):

- Das Prädiktionsergebnis ist unabhängig von der Anzahl der Prädiktionspunkte.
- Die Methode ist invariant in Bezug auf lineare Transformationen.
- Mit Kenntnis der entsprechenden Kovarianzwerte können beliebige andere Funktionale als Beobachtungen oder Zielgrößen eingeführt werden.
- Die Lösung ist optimal im Sinne der bestmöglichen Genauigkeit (minimale Varianz) auf Basis der gegebenen Beobachtungen.

Die Kollokation kann als Allgemeinfeld der Ausgleichsrechnung (GAUSS-HELMERT-Modell) und als Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (GAUSS-MARKOV-Modell) formuliert werden (Moritz, 1980, Kapitel 16; Denker, 1988). Das System der zufälligen Veränderlichen hat im Fall der kontinuierlichen Schwerefeldfunktionen die Dimension unendlich (Krarup, 1969) und die Kollokation ist als Ausgleichung in einem unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum (vgl. Abschnitt 6.1) anzusehen (Moritz, 1980, S. 118). Die Trennung von Signal und Messrauschen in dem daher unterbestimmten Modell (3.57) wird dadurch möglich, dass die Kovarianzfunktionen in (3.66) bzw. (3.69) als bekannt vorausgesetzt werden (Denker, 1988, S. 32).

Die Kollokation kann unter zwei Aspekten diskutiert werden: zur Prädiktion diskreter Punkte auf Basis gegebener Beobachtungswerte als Problem endlicher Dimension und zur Modellierung der kontinuierlichen Schwerefeldfunktionale als Problem mit unendlicher Dimension (Krarup, 1969, S. 29). Eine ausführliche theoretische Behandlung der Kollokation ist in (Moritz, 1980) zu finden.

### 3.5.2 Anwendung der Remove-Restore-Technik

Terrestrische Daten können mit einem GPM durch Verwendung residualer Daten im Sinne der Remove-Restore-Technik (Abschnitt 3.1) durch Anwendung einer schrittweisen Kollokation kombiniert werden (Tscherning, 1974). Der Beobachtungsvektor  $\underline{\Delta g}$  wird in zwei Gruppen  $\underline{\Delta g}^T$  und  $\underline{\Delta g}^M$  unterteilt, womit die Matrizen der Kollokationslösung (3.69) folgende Form annehmen:

$$\underline{\Delta g} = \begin{bmatrix} \underline{\Delta g}^M \\ \underline{\Delta g}^T \end{bmatrix}, \quad \underline{C}_{T\Delta g} = \begin{bmatrix} \underline{C}_{T\Delta g^M} & \underline{C}_{T\Delta g^T} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\bar{C}} = \underline{C}_{\Delta g\Delta g} + \underline{C}_{\epsilon_{\Delta g}\epsilon_{\Delta g}} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{C}}_{\Delta g^M\Delta g^M} = \underline{C}_{\Delta g^M\Delta g^M} + \underline{C}_{\epsilon_{\Delta g^M}\epsilon_{\Delta g^M}} & \underline{C}_{\Delta g^M\Delta g^T} \\ \underline{C}_{\Delta g^T\Delta g^M} & \underline{\bar{C}}_{\Delta g^T\Delta g^T} = \underline{C}_{\Delta g^T\Delta g^T} + \underline{C}_{\epsilon_{\Delta g^T}\epsilon_{\Delta g^T}} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Die Größen  $\underline{\Delta g}^M$  basieren auf einem GPM, die Größen  $\underline{\Delta g}^T$  stellen (regional vorliegende) terrestrische Beobachtungen dar. Es wird vorausgesetzt, dass das Rauschen beider Datensätze nicht miteinander korreliert ist. Die Gesamtlösung  $\hat{\underline{T}}$  lässt sich in zwei Teillösungen  $\hat{\underline{T}}^{M*}$  und  $\hat{\underline{T}}^{R*}$  zerlegen:

$$\hat{\underline{T}} = \underline{C}_{T\Delta g}\underline{\bar{C}}^{-1}\underline{\Delta g} = \hat{\underline{T}}^{M*} + \hat{\underline{T}}^{R*}. \quad (3.72)$$

Die Teillösungen werden mit (\*) gekennzeichnet, da die zunächst zu ihrer Berechnung angegebenen Ausdrücke im Zuge der Verfahrensentwicklung durch einfachere ersetzt werden.

Im ersten Schritt des Verfahrens werden nun allein die Beobachtungen  $\underline{\Delta g}^M$  verwendet und man erhält

$$\hat{\underline{T}}^{M*} = \underline{C}_{T\Delta g^M}\underline{\bar{C}}_{\Delta g^M\Delta g^M}^{-1}\underline{\Delta g}^M. \quad (3.73)$$

Im zweiten Schritt wird zunächst  $\underline{\Delta g}^T$  unter Verwendung der Lösung aus (3.73) zu  $\underline{\Delta g}^{R*}$  reduziert:

$$\underline{\Delta g}^{R*} = \underline{\Delta g}^T - \underline{C}_{\Delta g^T\Delta g^M}\underline{\bar{C}}_{\Delta g^M\Delta g^M}^{-1}\underline{\Delta g}^M. \quad (3.74)$$

Die zugehörigen Kovarianzmatrizen des residualen Signals werden durch Anwendung der Gleichung (3.70) abgeleitet:

$$\underline{\bar{C}}_{\Delta g^{R*}\Delta g^{R*}} = \underline{\bar{C}}_{\Delta g^T\Delta g^T} - \underline{C}_{\Delta g^T\Delta g^M}\underline{\bar{C}}_{\Delta g^M\Delta g^M}^{-1}\underline{C}_{\Delta g^M\Delta g^T} \quad (3.75)$$

$$\underline{C}_{T^{R^*}, \Delta g^{R^*}} = \underline{C}_{T \Delta g^T} - \underline{C}_{T \Delta g^M} \bar{C}_{\Delta g^M}^{-1} \underline{C}_{\Delta g^M \Delta g^T}. \quad (3.76)$$

Analog zu (3.73) kann die zweite Teillösung berechnet werden als

$$\hat{\underline{T}}^{R^*} = \underline{C}_{T^{R^*} \Delta g^{R^*}} \bar{C}_{\Delta g^{R^*} \Delta g^{R^*}}^{-1} \underline{\Delta g}^{R^*}. \quad (3.77)$$

Das schrittweise Vorgehen der Methode verringert zwar die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems, da die Anzahl der Beobachtungen verringert wird; durch die sukzessive Bearbeitung in den einzelnen Schritten erhöht sich aber die Anzahl der Multiplikationen, so dass im Allgemeinen keine Reduktion der Rechenzeit eintritt (Tscherning, 1974; Moritz, 1980). Können hingegen die residualen Beobachtungen und die zugehörigen Kovarianzfunktionen analytisch berechnet werden, ist eine Verringerung der Rechenzeit möglich. Die Beobachtungen  $\underline{\Delta g}^M$  werden dazu auf Basis der sphärisch-harmonischen Koeffizienten des GPM in denselben Punkten berechnet, in denen die terrestrischen Beobachtungen  $\Delta g^T$  vorliegen. Entsprechend der Wahl von (2.62) als Basiskovarianzfunktion sind die Kovarianzwerte in der Matrix  $\underline{C}_{\Delta g^M \Delta g^M}$  aus (3.71) zwischen zwei verschiedenen Koeffizienten des GPM gleich null (Tscherning, 1974, S. 16; Denker, 1988, S. 42). Es wird außerdem vorausgesetzt, dass das Rauschen der Koeffizienten untereinander unkorreliert ist (s. a. Abschnitt 3.4.4, S. 39). Die Matrix  $\bar{C}_{\Delta g^M \Delta g^M}$  ist dann eine Diagonalmatrix und die Lösung  $\hat{T}^{M*}$  für einen Punkt  $P$  unter Verwendung der Kugelfunktionsentwicklung (2.16a) ergibt sich zu

$$\hat{T}^{M*}(P) = \frac{GM}{r_P} \sum_{n=2}^{n_{max}} \left( \frac{a}{r_P} \right)^n f_n \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta_P, \lambda_P) + \Delta \bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta_P, \lambda_P)]. \quad (3.78)$$

Der Faktor  $f_n$  ist dabei

$$f_n = \left( 1 + \frac{\sigma_n^2(\epsilon_{TM})}{\sigma_n^2(T)} \right)^{-1}, \quad (3.79)$$

wenn die Standardabweichungen aller sphärisch-harmonischen Koeffizienten des Grades  $n$  als gleich vorausgesetzt werden und die Gradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{TM})$  und  $\sigma_n^2(T)$  daher als mittleres Varianzmaß über alle Ordnungen eingesetzt werden können. Die Signalgradvarianzen  $\sigma_n^2(T)$  werden nach (2.61) mit Bezug auf einen mittleren Erdradius  $r_P = R$  berechnet, die Fehlergradvarianzen entsprechend nach (2.71).

Der vom Signal-Rausch-Verhältnis abhängige Faktor  $f_n$  kann Werte zwischen 0.5 und 1.0 annehmen und zeigt die glättende Eigenschaft der Kollokation. In der Praxis ist der Faktor nur für sehr hohe sphärisch-harmonische Grade des GPM von eins verschieden,  $f_n$  wird in der Regel für alle Grade auf eins gesetzt, s. a. (Tscherning, 1982; Denker, 1988; Tziavos et al., 1996; Bouman et al., 2004). Unter dieser Voraussetzung können die oben mit (\*) gekennzeichneten Größen einfacher berechnet werden. Die Lösung (3.78) vereinfacht sich zu

$$\hat{T}^M(P) = \frac{GM}{r_P} \sum_{n=2}^{n_{max}} \left( \frac{a}{r_P} \right)^n \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{a}_{nm} \bar{R}_{nm}(\theta_P, \lambda_P) + \Delta \bar{b}_{nm} \bar{S}_{nm}(\theta_P, \lambda_P)]. \quad (3.80)$$

Ebenso ergeben sich die residualen Beobachtungen  $\underline{\Delta g}^R$  aus

$$\underline{\Delta g}^R = \underline{\Delta g}^T - \underline{\Delta g}^M, \quad (3.81)$$

wobei die Schwereanomalien  $\underline{\Delta g}^M$  mit Hilfe von (2.26) in denselben Punkten, in denen die Beobachtungen  $\underline{\Delta g}^T$  vorliegen, berechnet werden. Die Kovarianzen der residualen Beobachtungen aus (3.75) und (3.76) können direkt durch Akkumulation von Gradvarianzen berechnet werden. Es gilt für die Kovarianz des residualen Störpotentials zweier Punkte  $P$  und  $Q$

$$C_{T^R(P), T^R(Q)} = \sum_{n=2}^{n_{max}} \sigma_n^2(\epsilon_{TM}) \left( \frac{R_E^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi_{PQ}) + \sum_{n=n_{max}+1}^{\infty} \sigma_n^2(T) \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi_{PQ}). \quad (3.82)$$

Die Kovarianz  $C_{T^R T^R}$  wird auch als lokale Kovarianz bezeichnet und besteht aus zwei Anteilen, der erste Teil repräsentiert die Unsicherheit in den Koeffizienten des GPM, der zweite Teil repräsentiert den verbleibenden Signalanteil der residualen Beobachtungen. Da dieser Anteil auf Basis des Gradvarianzmodells (2.63) aus (Tscherning und Rapp, 1974) modelliert wird, ist hier bereits der Bezugsradius  $R_B$  eingeführt (vgl. Abschnitt 2.2.2). Die

Kovarianzen  $C_{T^R \Delta g^R}$  und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}$  werden gemäß dem Kovarianz-Fortpflanzungsgesetz (2.65) aus (3.82) abgeleitet. In der Kovarianzmatrix  $\bar{C}_{\Delta g^R \Delta g^R}$  ist weiterhin das Rauschen der Beobachtungen  $\Delta g^T$  durch Addition der Kovarianzmatrix  $\underline{C}_{\epsilon_{\Delta g^T} \epsilon_{\Delta g^T}}$  des Rauschens zu berücksichtigen, es gilt

$$\bar{C}_{\Delta g^R \Delta g^R} = \underline{C}_{\Delta g^R \Delta g^R} + \underline{C}_{\epsilon_{\Delta g^T} \epsilon_{\Delta g^T}}. \quad (3.83)$$

Auf Basis der vereinfacht berechneten Größen ergeben sich die residualen Zielgrößen aus (3.77) zu

$$\underline{\hat{T}}^R = \underline{C}_{T^R \Delta g^R} \bar{C}_{\Delta g^R \Delta g^R}^{-1} \underline{\Delta g^R} \quad (3.84)$$

und die Gesamtlösung (3.72) der Zielgrößen zu

$$\underline{\hat{T}} = \underline{\hat{T}}^M + \underline{\hat{T}}^R. \quad (3.85)$$

Durch Einsetzen der Kovarianzmatrizen der residualen Größen in (3.70) ergibt sich die Kovarianzmatrix des Rauschens der Zielgrößen zu

$$\underline{C}_{\epsilon_{\hat{T}} \epsilon_{\hat{T}}} = \underline{C}_{T^R T^R} - \underline{C}_{T^R \Delta g^R} \bar{C}_{\Delta g^R \Delta g^R}^{-1} \underline{C}_{\Delta g^R T^R}. \quad (3.86)$$

Das beschriebene Vorgehen zur Kombination eines GPM und regional vorliegenden terrestrischen Daten wird aufgrund der Reduktion der Beobachtungen  $\underline{\Delta g^T}$  zu  $\underline{\Delta g^R}$  und anschließender Restitution der Lösung  $\underline{\hat{T}}^R$  zu  $\underline{\hat{T}}$  als Remove-Restore-Technik bezeichnet.

Im Gegensatz zur Lösung des Integrationsverfahrens aus Abschnitt 3.4.2 entspricht die Kollokationslösung jedoch nicht streng der in Abschnitt 3.1 beschriebenen Methode II, auch wenn die Beobachtungen als unverrauscht angenommen werden. Bei Anwendung der Kollokation werden implizit an den Rändern des regionalen Datengebietes  $\sigma_0$  extrapolierte Daten eingeführt, der Einfluss der Beobachtungen aus der Kugelkappe  $\sigma_0$  auf die Lösung ist daher nicht streng auf das Gebiet der Kugelkappe beschränkt (Abschnitt 5.2.2). Es erfolgt daher keine räumlich scharfe Trennung zwischen den Beobachtungen  $\Delta g^T$  und  $\Delta g^M$ , weshalb auch die Methode I nicht streng, wie in Abschnitt 3.1 eingeführt, auf Basis der Kollokation formuliert werden kann.

Die Gewichtung des GPM gegenüber den terrestrischen Daten ist im Kollokationsansatz implizit enthalten. Sie ist dabei nicht allein vom Rauschen der Beobachtungen, sondern auch von der räumlichen Verteilung der terrestrischen Beobachtungen abhängig, s. Abschnitt 5.2.2. Ein Vergleich der hieraus resultierenden Gewichtung mit der Gewichtung, die sich aus der explizit gewählten spektralen Kombination im Integrationsverfahren ergibt, wird in Kapitel 6 durchgeführt.

### 3.5.3 Kovarianzfunktionen

Bei Anwendung der Kollokation werden die Kovarianzfunktionen der Störgrößen des Schwerefeldes als bekannt vorausgesetzt, wodurch eine Trennung von Signal und Messrauschen in dem unterbestimmten Modell (3.57) möglich wird (Denker, 1988, S. 32). In der Praxis werden analytische Kovarianzmodelle auf Basis empirischer Kovarianzfunktionen aufgestellt (vgl. Abschnitt 2.2.2). Es wird dabei üblicherweise von der homogenen und isotropen Kovarianzfunktion (2.62)

$$C_{TT}(\psi, r_P, r_Q) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2(T(R)) \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi_{PQ})$$

des Störpotentials  $T$  ausgegangen. Die Kovarianzen aller anderen Funktionale sind durch Anwendung des Kovarianz-Fortpflanzungsgesetzes (2.65) konsistent aus dieser Basiskovarianzfunktion abzuleiten, s. (Tscherning und Rapp, 1974; Tscherning, 1976b; Denker, 1988).

In dieser Arbeit wird die Kollokation zur Kombination eines GPM mit regional vorliegenden terrestrischen Daten entsprechend der Remove-Restore-Technik eingesetzt. Wie im vorhergehenden Abschnitt erläutert, werden dabei lokale Kovarianzen nach (3.82) verwendet, wobei zur Modellierung der Signalgradvarianzen  $\sigma_n^2(T)$  des Störpotentials das TSCHERNING-RAPP-Modell (2.63) angewendet wird. Die Kovarianzen können rechentechnisch effizient mit diesem Modell bestimmt werden, da hierzu geschlossene Formeln statt Reihenentwicklungen genutzt werden können. Für deren Darstellung sei auf (Tscherning und Rapp, 1974; Tscherning, 1976b) verwiesen.

Darüber hinaus werden die Parameter  $A$  und  $R_B$  des TSCHERNING-RAPP-Modells nach der Methode der kleinsten Quadrate zur besseren Anpassung an eine lokale, empirisch berechnete Kovarianzfunktion geschätzt (Knudsen, 1987). Üblich ist auch die Schätzung eines Skalierungsparameters für die Fehlergradvarianzen des GPM (z. B. Knudsen, 1987; de Min, 1995; Grote, 1996). Da die Kovarianzfunktionen der Elemente des residualen Tensors  $T_{[ij]}^R$  in der Bahnhöhe von GOCE fast ausschließlich auf Basis der Fehlergradvarianzen des GPM berechnet werden und der Skalierungsfaktor auf Basis der empirischen Kovarianzfunktionen der Schwereanomalien nicht sicher bestimmt werden kann (Kreitlow, 2004), wird in dieser Arbeit keine Skalierung vorgenommen. Die Ergebnisse der Parameterschätzung zur Anpassung der analytischen an eine empirische Kovarianzfunktion werden in den Abschnitten 9.1 und 10.2.1 diskutiert.

Die Verwendung der aus regionalen Daten geschätzten Parameter  $A$  und  $R_B$  für die lokale Kovarianzfunktion beeinflusst in erster Linie die Prädiktion der Varianz der Zielgröße, weniger hingegen die Prädiktion der Zielgröße selbst (Moritz, 1980, S. 142).

## 4 Literaturüberblick

In diesem Kapitel wird im ersten Abschnitt ein Überblick über Arbeiten zur synthetischen Modellbildung mit dem Ziel der Evaluierung von Rechenmethoden im Bereich der Schwerefeldmodellierung gegeben. Im zweiten Abschnitt ist der Stand der Forschung zur Berechnung des Gravitationsensors  $V_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE (250 km) aus der Kombination regional vorliegender terrestrischer Schweredaten und eines GPM im Hinblick auf die Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometermessungen der GOCE-Mission dargestellt. In den meisten Studien werden dazu Integrationsverfahren oder die Kollokation angewendet. Numerische Vergleiche der beiden Methoden bezüglich der Geoidberechnung finden sich z. B. in (Rapp und Rummel, 1975; Rapp und Agajelu, 1975; Arabelos, 1980; Katsambalos, 1981; Tscherning, 1981; Denker, 1988; Barzaghi et al., 1993; Grote, 1996). Im Folgenden wird ausschließlich Literatur hinsichtlich der Berechnung des Tensors  $V_{[ij]}$  besprochen. Im letzten Abschnitt wird auf die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Fortführungen und Erweiterungen der besprochenen Arbeiten eingegangen.

### 4.1 Synthetische Erdmodelle zur Evaluierung von Rechenmethoden

Der Einsatz synthetischer Erdmodelle für die Evaluierung von Rechenmethoden auf Eignung und Leistungsfähigkeit bezüglich Genauigkeit und Rechenzeit hat den entscheidenden Vorteil, dass die Ergebnisse anhand von Solldaten überprüft werden können. Ein weiterer Vorteil ist, dass der Einfluss einzelner Faktoren, wie beispielsweise das Rauschen oder die Anzahl und die räumliche Verteilung der Beobachtungen, in verschiedenen Simulationsszenarien studiert werden kann. In dieser Arbeit wird unter dem Begriff des synthetischen Erdmodells ein Modell des Erdschwerefeldes und ein Modell der Topographie zusammengefasst, vgl. Kapitel 7.3. Die Modellierung der Topographie ist in diesem Zusammenhang unproblematisch, es stehen DGM zur Verfügung. Problematischer ist die Modellierung des Schwerefeldes, Ansätze hierzu werden im Folgenden behandelt.

Die Ansätze zur Erstellung eines synthetischen Modells des Erdschwerefeldes können in zwei Gruppen gegliedert werden (Featherstone, 2001): die Aufstellung eines möglichst realistischen Massenmodells der Erde zur "Modellierung der Quellen" (engl. *source model*) und die Verfeinerung von vorhandenen Erdschwerefeldmodellen (GPM) zur "Modellierung der Auswirkung" (engl. *effect model*). Die Erweiterung vorhandener GPM durch Berechnung der Gravitationswirkung topographischer und isostatischer Massen verbindet beide Ansätze. Diese Themen werden auch in der Studiengruppe SG 2.2 "Forward Gravity Field Modelling Using Global Databases" in der Subkommission 2.2 (Spatial and Temporal Gravity Field and Geoid Modeling) der Kommission 2 (Gravity Field) der IAG behandelt<sup>1</sup>, s. a. (Kuhn und Tsoulis, 2006).

**Modellierung der Quellen.** Ein verbreitetes synthetisches Erdmodell ist das PREM (Preliminary Reference Earth Model), das physikalische Parameter wie Dichte, Druck und Ausbreitungsgeschwindigkeit seismischer Wellen beinhaltet (Dziewonski und Anderson, 1981). Das PREM ist radialsymmetrisch aufgebaut und ist deswegen zur Erzeugung synthetischer Schweredaten nicht geeignet. Es wird aber als Referenzmodell eingesetzt, um mit kleinen Differenzwerten der Dichte arbeiten zu können (Pail, 1999). Die Berechnung von Punktmassenmodellen zur Modellierung des Erdschwerefeldes wird seit Ende der sechziger Jahre verfolgt, eine kurze Übersicht dazu findet sich in (Pail, 1999). Punktmassenmodelle eignen sich, um mit Hilfe des NEWTONschen Gravitationsgesetzes (2.2) Funktionale des Erdschwerefeldes abzuleiten. Die Bestimmung der Lage und der Dichte der Punktmassen aus Schweredaten ist nicht eindeutig. Bereits in (Schwarz, 1977) wurden in sich konsistente, aus Punktmassenmodellen abgeleitete Schweredaten für die Evaluierung der Methoden zur Fortsetzung von Fluggravimetriedaten nach unten eingesetzt. Die Punktmassenmodellierung wird beispielsweise in (Sünkel, 1983; Vassiliou, 1985; Pail, 1999, 2002; Agren, 2004) behandelt, Untersuchungen zur Berechnung von Schwerefeldfunktionalen auf Basis von Massenverteilungen finden sich in (Nagy et al., 2000; Papp und Benedek, 2000; Allasia, 2002).

---

<sup>1</sup>Vorgänger dieser Studiengruppe vor der Umstrukturierung der IAG war die SSG 3.177 (engl. *special study group*) der Sektion III (Determination of the Gravity Field) unter dem Titel "Synthetic Modelling of the Earth's Gravity Field".

**Modellierung der Auswirkung.** Eine einfache Methode zur Erzeugung synthetischer Daten für die Evaluierung von Rechenmethoden im Rahmen der Schwerefeldapproximation ist die Berechnung von Ein- und Ausgangsdaten auf Basis eines vorhandenen GPM, z. B. (Tscherning, 1988; Gitlein et al., 2005; Kern und Haagmans, 2005). Die auf Basis des GPM berechneten Ausgangsdaten dienen als Sollwerte in der Evaluierung der Ergebnisse der jeweiligen Rechenmethode. Deshalb wird die Datengrundlage als synthetisches Erdmodell bezeichnet. Die maximale Auflösung des GPM wird häufig auf den Bereich bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max}^{\text{syn}} = 360$  beschränkt (Tziavos, 1996; Gitlein et al., 2005; Bouman et al., 2005), der von den Modellen EGM96 und OSU-91A (vgl. Abschnitt 7.2.1) abgedeckt wird. Für höhere Auflösungen können die Modelle GPM98-A, -B oder -C, Erweiterungen des EGM96 auf Basis von Schwereanomaliedaten (Wenzel, 1999), bis Grad und Ordnung 1800 verwendet werden, z. B. (Kern und Haagmans, 2005). Die Berechnung von Modellen bis zu einer Auflösung von Grad und Ordnung 2160 auf Basis realer Schweredaten ist Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten (Pavlis et al., 2005). Auflösungen bis zu Grad und Ordnung 2700 wurden bisher durch Erweiterung der Koeffizienten vorhandener Modelle auf Basis einer analytischen Modellierung unabhängig von realen Schweredaten erreicht (Featherstone, 1999; Novák et al., 2001).

Eine Kombination aus Quellen- und Auswirkungsmodellierung findet sich in der Erweiterung vorhandener GPM derzeit bis zum sphärisch-harmonischen Grad 2160 bzw. 2700 auf Basis des gravitativen Effekts aus topographischen Massen (Haagmans, 2000; Claessens, 2002; Baran et al., 2004, 2006).

Neben der Signalsimulation ist auch die Simulation des Rauschens der Beobachtungen wichtig, um die Evaluierung der Rechenmethoden möglichst realitätsnah zu gestalten und die ermittelte Genauigkeiten für die Anwendung auf reale Daten übertragen zu können. Dabei sind insbesondere im Hinblick auf die Kombination von terrestrischen Daten mit einem GPM in der regionalen Schwerefeldmodellierung Rauschwerte sowohl für die terrestrischen Daten, als auch für die Koeffizienten des GPM zu erstellen. Ansätze zur Erzeugung von Rauschen für die GPM-Koeffizienten finden sich in (de Min, 1996, S. 139; Pail, 2003c; Agren, 2004). In der synthetischen Modellbildung zur Evaluierung von Rechenmethoden wurde synthetisches Rauschen für ein GPM bisher nur in (Agren, 2004) bei der Geoidberechnung und in (Pail, 2003c) bei der sphärisch-harmonischen Analyse (s. Abschnitt 7.2.1) berücksichtigt. In anderen Arbeiten wird das Rauschen des GPM simuliert, indem synthetische Daten auf Basis des EGM96 mit Daten des OSU-91A kombiniert werden (Bouman und Koop, 2003a; Bouman et al., 2004; Zielinski et al., 2005). Wenn Rauschen für die synthetischen terrestrischen Daten eingeführt wird, dann in den meisten Untersuchungen in Form von unkorreliertem Rauschen, z. B. (Kern und Haagmans, 2005; Bouman et al., 2005), nur in (Agren, 2004) wird auch korreliertes Rauschen bei der Evaluierung von Methoden zur Geoidberechnung berücksichtigt.

## 4.2 Berechnung des Gravitationstensors zur GOCE-Kalibrierung und Evaluierung

Im Rahmen der Voruntersuchungen für die GOCE-Mission befassen sich eine Reihe von Arbeiten mit der Berechnung des Gravitationstensors  $V_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE. Die Idee besteht darin, berechnete Tensorelemente zum Vergleich mit den im Rahmen der GOCE-Mission gemessenen Werten bereitzustellen (s. a. Abschnitt 2.3.3). Die Berechnungen basieren auf der Kombination eines GPM mit regional vorliegenden terrestrischen Daten, wobei in der Regel Schwereanomalien verwendet werden.

Die Arbeiten werden im Folgenden kurz besprochen, eine Übersicht ausgewählter Arbeiten, in denen eine Genauigkeit der berechneten Tensorelemente von besser als 10 mE erreicht werden konnte, gibt Tabelle 4.1. Die dort aufgeführten numerischen Angaben sind als grobe Richtwerte zu verstehen, die vielzähligen Teiluntersuchungen der Arbeiten können nicht derart kurz tabellarisch zusammengestellt werden. Es wird jeweils die verwendete Methode (Kollokation nach kleinsten Quadraten (KKQ), Integrationsverfahren (IF)) zur Berechnung der Elemente des Tensors  $V_{[ij]}$  genannt, ebenso, ob radiale Tensorkomponenten ( $zz$ ), Diagonalkomponenten ( $ii$ ) oder alle Tensorkomponenten ( $ij$ ) berechnet wurden. Als Richtwerte sind Gebietsgröße ( $G$ ), Auflösung ( $A$ ) der terrestrischen Schwereanomalien, minimaler Abstand ( $R$ ) der Berechnungspunkte zum Rand des regionalen Eingangsdatengebietes, angenommene Genauigkeit  $\sigma_{\Delta g_T}$  der terrestrischen Schwereanomalien, maximaler Entwicklungsgrad  $n_{\max}$  des GPM und, falls synthetische Daten auf Basis eines GPM verwendet wurden, dessen maximaler Entwicklungs-

**Tabelle 4.1.** Übersicht ausgewählter Untersuchungen zur Berechnung der Komponenten (Komp) des Tensors  $V_{[ij]}$  in Satellitenbahnhöhe (etwa 250 km) aus terrestrischen Daten in Kombination mit einem GPM;  $G$  Gebietsgröße (Breite x Länge),  $A$  Auflösung,  $R$  Randbereich,  $\sigma_{\Delta g^T}$  Niveau des unkorrelierten Rauschens der Beobachtungen,  $\sigma_{V_{ij}}$  abgeschätzte Genauigkeit der berechneten Tensorelemente. Es ist die Methode zur Berechnung der Tensorelemente (Meth  $V_{ij}$ ) und zur Berechnung der Standardabweichung  $\sigma_{V_{ij}}$  (Meth  $\sigma_{V_{ij}}$ ) angegeben, ebenso der maximale Entwicklungsgrad  $n_{\max}$  des GPM und, falls verwendet, des synthetischen Modells ( $n_{\max}^{\text{syn}}$ ).

Literatur	Komp	Meth $V_{ij}$	$G$ [ $^{\circ}$ x $^{\circ}$ ]	$A$ [ $'$ ]	$R$ [ $^{\circ}$ ]	$\sigma_{\Delta g^T}$ [mgal]	$n_{\max}$	$n_{\max}^{\text{syn}}$	Meth $\sigma_{V_{ij}}$	$\sigma_{V_{ij}}$ [mE]
Arabelos und Tscherning, 1998	$ij$	KKQ	5x5 <sup>a</sup>	3	4 <sup>a</sup>	1	360	-	KKQ	2...5
	$zz$	IF	5x5 <sup>a</sup>	3	0 <sup>a</sup>	-	360	-	-	-
Visser et al., 2000	$zz$	-	6x6	15...30	3	1...5	36	360	KKQ	0...12
Pail, 2002, 2003c	$zz$	KKQ	16x28	15	3	1	12	120	KKQ, SYN	3
Bouman und Koop, 2003a	$zz$	KKQ	14x26	15	3...4	1	72	300	KKQ, SYN	1
Denker, 2003	$zz$	IF	50x100	5	5	1...2 <sup>b</sup>	360	-	GDV	1...3
Bouman et al., 2004	$zz$	KKQ	10x15	6	2	1	72	300	KKQ, SYN	2...3
Pail, 2004	$zz$	KKQ	16x28	30	2...3	0	60	360	SYN	9...40
	$zz$	IF	16x28	30	3	0	60	360	SYN	2...14
Arabelos et al., 2007	$ij$	KKQ	12x20	5...20	3...5	1...2	360	-	KKQ	2...5
Bouman et al., 2005	$ii$	KKQ	30x35	15	5...10	1	50	360	KKQ, SYN	1
Kern und Haagmans, 2005	$ij$	IF	16x28	15	3...6	0...2	90	1800	SYN	1...3

<sup>a</sup> Gebiet ist umgeben von 30' Blockmittelwerten, Gesamtgebietsgröße 12 $^{\circ}$ x18 $^{\circ}$ .

<sup>b</sup> Berücksichtigung auch von korreliertem Rauschen

grad  $n_{\max}^{\text{syn}}$  angegeben. Zusätzlich ist die Methode aufgeführt, nach der die Varianz bzw. die Standardabweichung  $\sigma_{V_{ij}}$  der Zielgröße berechnet wurde. Die Varianz wird mit Hilfe der Kollokation (KKQ), durch Abschätzung auf Basis von Gradvarianzen (GDV) oder durch Vergleich der Lösung aus synthetischen Daten mit exakten Solldaten (SYN) ermittelt.

In der folgenden Diskussion wird zunächst auf die Arbeiten eingegangen, die die Varianzen der Zielgrößen in Abhängigkeit vom Rauschen und von der räumlichen Verteilung der terrestrischen Beobachtungen bestimmen, allerdings ohne tatsächliche Beobachtungen einzuführen. Es folgen die Untersuchungen, in denen die Kollokation zur Berechnung der Tensorelemente eingesetzt wird. Arbeiten, in denen sowohl Integrationsverfahren als auch die Kollokation angewendet werden, leiten über zu den Untersuchungen, in denen allein Integrationsverfahren eingesetzt werden. Abschließend werden Beiträge genannt, die neben Schwereanomalien auch andere Funktionale als Beobachtungen verwenden. Einige Arbeiten beinhalten mehrere der genannten Aspekte, hierauf wird an den entsprechenden Stellen hingewiesen.

In (Visser et al., 2000) wurde die Varianz der radialen Tensorkomponente mit Hilfe der Kollokation bestimmt. Die Ergebnisse zeigen die Abhängigkeit der Varianz von Auflösung, Gebietsgröße und Rauschniveau der regional vorliegenden terrestrischen Beobachtungen. Es wurde von einem Signalgradvarianzmodell bis zur maximalen Auflösung vom sphärisch-harmonischen Grad 360 zur Berechnung der Kovarianzwerte für die Kollokation ausgegangen. Das Rauschen der Beobachtungen wurde als unkorreliert angesehen. Die berechnete Genauigkeit von  $V_{zz}$  liegt im Bereich von unter 1 mE (Beobachtungen ohne Rauschen) bis etwa 10 mE (Rauschniveau der Beobachtungen von 5 mgal) bei einer Auflösung von 15' und einer Gebietsgröße von etwa 5 $^{\circ}$ x5 $^{\circ}$ .

Eine weitere Genauigkeitsstudie auf Basis der Kollokation findet sich in (Arabelos et al., 2007). Verschiedene Gebietsgrößen bzw. Abstände der Berechnungspunkte vom Rand (2 $^{\circ}$  bis 5 $^{\circ}$ ) und Auflösungsstufen von 5' bis 20' wurden getestet. Dabei sind Genauigkeiten zwischen 2 und 5 mE für alle Tensorkomponenten bei einem Rauschniveau der Beobachtungen von 1 bis 2 mgal erreicht worden. Auch in dieser Arbeit wurde das Rauschen der terrestrischen Beobachtungen als unkorreliert angenommen.

In (Arabelos und Tscherning, 1998) wurden alle Komponenten des Tensors  $V_{[ij]}$  mit Hilfe der Kollokation berechnet, ebenso ihre Varianzen. Es wurden reale Schwereanomaliedatensätze (über Kanada) verwendet. Das Untersuchungsgebiet hat eine Ausdehnung von  $12^\circ \times 18^\circ$ , die Datenauflösung beträgt im Zentralgebiet (max. Größe  $5^\circ \times 5^\circ$ )  $3'$ , es ist umgeben von Blockmittelwerten der Auflösung  $30'$ . Die Tensorkomponenten wurden im Zentralgebiet berechnet. Die ermittelte Varianz der radialen Komponente bei einer angenommenen Bahnhöhe von 200 km beträgt etwa 6 mE, bei einer Bahnhöhe von 300 km etwa 2 mE. Die radiale Komponente wurde außerdem mit Hilfe von Integrationsverfahren berechnet, die Ergebnisse stimmen im Bereich ihrer dreifachen Standardabweichung mit denen der Kollokation überein.

Ähnliche Untersuchungen auf Basis der Kollokation, allerdings mit synthetischen Eingangsdaten, finden sich in (Bouman und Koop, 2003a; Bouman et al., 2004, 2005). Dabei wurden Gebiete der maximalen Größe von  $30^\circ \times 35^\circ$  bei einer Auflösung von  $15'$  (Bouman et al., 2005) bzw.  $10^\circ \times 15^\circ$  bei einer Auflösung von  $6' \times 9'$  (Bouman et al., 2004) betrachtet. Als Datenbasis der synthetischen terrestrischen Daten diente das EGM96, vgl. Abschnitt 7.2.1. Die simulierten terrestrischen Daten wurden zur Berechnung des Tensors mit einem GPM kombiniert. Als GPM wurde entweder das OSU91A (bis  $n_{\max} = 72$ ) verwendet (Bouman und Koop, 2003a; Bouman et al., 2004) oder es wurde das EGM96 (bis  $n_{\max} = 50$ ) berücksichtigt (Bouman et al., 2005). Aus den Differenzen der berechneten radialen Tensorkomponenten zu den direkt aus dem EGM96 abgeleiteten ergab sich eine Standardabweichung von 1 bis 3 mE, dies stimmt mit der berechneten Varianz aus der Kollokation überein.

In (Pail, 2002, 2003c) wurden verschiedene Verfahren zur Berechnung radialer Tensorelemente  $V_{zz}$  aus synthetischen regionalen Schwereanomalien (mit unkorreliertem Rauschen) eingesetzt: Integrationsverfahren, Kollokation, Schätzung von Punktmassen- und Dichtemodellen und die sphärisch-harmonische Analyse (SHA, vgl. Abschnitt 7.2.1). Das synthetische Modell basiert auf einem Punktmassenmodell und ist durch Kugelfunktionskoeffizienten parametrisiert, es wurde bis zu einem maximalen Entwicklungsgrad  $n_{\max}^{\text{syn}} = 120$  verwendet. Das verbleibende Rauschen in der Lösung wurde durch den Vergleich mit den synthetischen exakten Zielgrößen ermittelt. Das Integrationsverfahren wurde in der Ebene ausgewertet, es ergaben sich Genauigkeiten von schlechter als 10 mE, ebenso wie bei der Schätzung auf Basis von Punktmassen- und Dichtemodellen. Das GPM ging bei der Kollokation im Rahmen der Remove-Restore-Technik (Abschnitt 3.1) ohne Rauschen bis zum Grad  $n_{\max} = 12$  ein. Die Ergebnisse der regionalen Schätzung (Gebietsgröße  $16^\circ \times 28^\circ$ , Auflösung  $15'$ , Rauschniveau 1 mgal) sind mit langwelligem Rauschen behaftet. Es sind Standardabweichungen der Zielgröße auf Basis dieses Soll-Ist-Vergleichs von etwa 3 mE erreicht worden, dies wurde durch die Berechnung der Varianz mit der Kollokation bestätigt. Ähnliche Genauigkeiten wurden mit der dort detaillierter untersuchten SHA erreicht, bei der Koeffizienten eines GPM bis maximal zum Grad und zur Ordnung 190 auf Basis der regional vorliegenden Daten im Rahmen einer Ausgleichung verbessert wurden.

In (Pail, 2004) wurden die Kollokation und Integrationsverfahren bezüglich der Kugel zur Berechnung der radialen Tensorkomponente verwendet. Dabei wurden unterschiedliche Gradvarianzmodelle zur Berechnung der Kovarianzwerte im Rahmen der Kollokation und außerdem zwei (deterministisch motivierte) Kernmodifikationsansätze bei Anwendung des Integrationsverfahrens verglichen. Die Ergebnisse, die mit dem Integrationsverfahren (erreichbare Genauigkeit etwa 2 mE) berechnet wurden, sind in dieser Studie genauer als die der Kollokation (erreichbare Genauigkeit etwa 9 mE).

In (Denker, 2003) wurde das Integrationsverfahren mit spektraler Kombination eines GPM und regionaler terrestrischer Schwereanomalien im Sinne der stochastisch motivierten Kernmodifikation (Abschnitt 3.4.5) nach (Wenzel, 1981) zur Berechnung der radialen Tensorkomponente verwendet. Die Kombination basierte auf realen terrestrischen Daten über Europa (Gebietsgröße  $50^\circ \times 100^\circ$ , Auflösung  $5'$ ) und dem EGM96 bzw. einem CHAMP-GPM. Die erreichbaren Genauigkeiten wurden auf Basis von Fehlergradvarianzen des jeweiligen GPM und für unkorreliertes sowie korreliertes Rauschen der terrestrischen Daten unter der Annahme global vorliegender terrestrischer Daten (Abschnitt 3.4.4) abgeschätzt, sie betragen 1 bis 3 mE. Ein Integrationsradius von  $\psi_0 > 5^\circ$  und ein maximaler Entwicklungsgrad des GPM von  $n_{\max} = 360$  für die Remove-Restore-Technik wird empfohlen, um Vernachlässigungsfehler und Fehler aus der sphärischen Approximation klein zu halten. Aliasing-Fehler werden durch Anwendung der RTM-Reduktion verringert.

Die Herleitungen der Formeln zur Berechnung aller Tensorkomponenten auf Basis der spektralen Darstellung der Kernfunktion sind in (Pail, 2003a; Kern und Haagsmans, 2005) allerdings ohne numerische Untersuchung dargestellt. In (Kern und Haagsmans, 2005) wurden zur numerischen Berechnung aller Komponenten des Tensors  $V_{[ij]}$  geschlossene Formeln, s. a. (Reed, 1973), ohne spektrale Kombination der terrestrischen Daten und des

GPM eingesetzt. Als Grundlage der synthetischen Daten diente das GPM98A (Wenzel, 1999). Die Gebietsgröße betrug  $16^\circ \times 28^\circ$  bei einer Auflösung von  $15'$  und einem konstanten Abbruchradius von  $\psi_0 = 6^\circ$ . Wurde kein Rauschen für die Beobachtungen (Schwereanomalien und Schwerstörungen) berücksichtigt, sind Genauigkeiten der Komponenten im Vergleich zur synthetischen exakten Lösung von  $1 \dots 3$  mE erreicht worden. Eine regional begrenzt vorliegende, systematische Abweichung in den Beobachtungen hat sich in allen Komponenten ausgewirkt, besonders stark in der Komponente  $V_{zz}$ , kaum in der Komponente  $V_{xy}$ . Die Auswirkung von unkorreliertem Rauschen der terrestrischen Beobachtungen wurde als gering bewertet.

Die Fortsetzung der Tensorkomponenten nach oben und unten ist in (Tóth et al., 2006) für Kombinationen der Einzelkomponenten theoretisch dargestellt. In (Tóth et al., 2005) erfolgte die Berechnung für Kombinationen der Komponenten des Tensors in Satellitenbahnhöhe aus realen Schwereanomalien und Kombinationen der Tensorkomponenten an der Erdoberfläche. Die terrestrischen Tensorwerte trugen vor allem im hochfrequenten Signalbereich zu Lösung bei. Es wurden die Kollokation und das Integrationsverfahren mit spektraler Kombination nach (Wenzel, 1981) eingesetzt. Der Vergleich der Ergebnisse mit denen aus (Denker, 2003) ergibt Abweichungen von etwa  $\pm 20$  mE. Ein möglicher Grund dafür ist, dass ein vergleichsweise kleines Gebiet ( $3^\circ \times 7^\circ$ ) verwendet worden ist. Ebenfalls auf Basis von Gradiometermessungen wurde in (Zielinski und Petrovskaya, 2003; Zielinski et al., 2005) die Fortsetzung nach oben von Tensorelementen, die mittels Gradiometer im Flugzeug oder Ballon bestimmt werden sollen, untersucht. Die Genauigkeiten, die auf Basis simulierter Testdaten (EGM96 bzw. OSU91A) ermittelt wurden, übersteigen das Niveau von 10 mE, weshalb die Untersuchung nicht in die Tabelle 4.1 aufgenommen wurde.

Abschließend lässt sich aus den Angaben in Tabelle 4.1 zusammenfassen, dass die angestrebte Genauigkeit der Tensorelemente im Bereich von 1 bis 2 mE (vgl. Abschnitt 2.3.3) in den vorgestellten Untersuchungen sowohl mit Hilfe der Kollokation (Bouman et al., 2004, 2005) als auch durch Anwendung des Integrationsverfahrens erreicht werden kann (Denker, 2003; Kern und Haagmans, 2005). Voraussetzungen hierzu sind Schwereanomalien der Auflösungsstufen  $5'$  bis  $15'$ , ein Abstand der Berechnungspunkte zum Rand des Eingangsdatengebietes von etwa  $3^\circ$  bis  $5^\circ$  und unkorreliertes Rauschen der terrestrischen Beobachtungen mit einem Niveau von 1 bis 2 mgal. Das GPM sollte im Genauigkeitsbereich des EGM96 liegen.

### 4.3 Fortführung und Erweiterungen der besprochenen Arbeiten

In der vorliegenden Arbeit werden die Kollokation und das Integrationsverfahren mit spektraler Kombination der Beobachtungen zur Berechnung aller Tensorkomponenten eingesetzt, s. a. (Müller et al., 2003; Wolf et al., 2003; Müller et al., 2004; Wolf und Müller, 2004; Wolf und Denker, 2005; Wolf, 2006; Jarecki et al., 2006a). Mit dem Ziel einer Genauigkeitsanalyse werden die Methoden zunächst auf synthetische Daten und schließlich auf reale Daten angewendet. Als terrestrische Daten werden Schwereanomalien vorausgesetzt. Der Einsatz von (Quasi-)Geoiddaten ist ebenfalls möglich, wie in (Jarecki et al., 2006b) gezeigt wurde, wird hier aber nicht näher behandelt. Bezüglich der Kollokationsrechnung sind die Untersuchungen vergleichbar mit denen aus (Bouman et al., 2004, 2005), allerdings basieren in der vorliegenden Arbeit die synthetischen Daten auf einem GPM der Auflösung bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max}^{\text{syn}} = 1300$  anstelle von  $n_{\max}^{\text{syn}} = 360$ . Die höhere Auflösung wurde gewählt, um die Beeinträchtigung der Qualität der Lösung durch zu grobes Abtasten ( $> 8'$  anstelle von  $> 30'$ ) der Daten detaillierter untersuchen zu können, ebenso werden Unterschiede in den Lösungen aus Punktwerten und Blockmittelwerten analysiert. Grundsätzlich wäre auch eine noch höhere Auflösung bis zu  $n_{\max}^{\text{syn}} = 1800$  möglich gewesen, wie sie in (Kern und Haagmans, 2005) gewählt wurde. Die Auflösung wird in der vorliegenden Arbeit auf  $n_{\max}^{\text{syn}} = 1300$  beschränkt, da RTM-reduzierte Schwereanomalien simuliert werden, bei denen hochfrequente Signalinhalte fehlen.

Der Unterschied zur Kollokationsberechnung in (Pail, 2002, 2003c, 2004) findet sich ebenfalls in der maximalen Auflösung der synthetischen Daten, außerdem werden dort die Berechnungen auf die radiale Tensorkomponente beschränkt. In (Pail, 2004) wurden die erreichbaren Genauigkeiten der Kollokationslösung mit denen des Integrationsverfahrens verglichen. Für den Integralkern wurde dort eine deterministisch motivierte Modifikation gewählt, im Gegensatz dazu wird hier eine stochastisch motivierte Modifikation angewendet. Diese Modifikation wurde bereits in (Denker, 2003) zur Berechnung der radialen Tensorkomponente aus realen Daten angewendet. Hier werden alle Tensorkomponenten mit diesem Verfahren berechnet und darüber hinaus auf Basis der synthetischen Daten evaluiert (Wolf und Denker, 2005). Alle Tensorkomponenten wurden bereits in (Kern und Haagmans,

2005) auf Basis synthetischer Daten mit Hilfe von Integrationsverfahren berechnet, jedoch ohne Modifikation der Kernfunktion.

Alle in Tabelle 4.1 genannten Arbeiten, deren Qualitätsanalyse auf synthetischen Daten basiert, berücksichtigen ausschließlich unkorreliertes Rauschen der terrestrischen Beobachtungen. In dieser Arbeit wird der Einfluss von korreliertem Rauschen auf die Zielgrößen untersucht, s. a. (Wolf, 2006). Rauschen für die Koeffizienten des GPM wird in den in Tabelle 4.1 angesprochenen Arbeiten nicht berücksichtigt, außer in (Bouman und Koop, 2003a; Bouman et al., 2004), in denen Daten aus dem EGM96 mit dem OSU91A als GPM kombiniert wurden, um Abweichungen des GPM zu den terrestrischen Daten zu simulieren. In dieser Arbeit wird für jeden Koeffizienten des GPM Rauschen erzeugt. Der Vorteil hiervon ist, dass in den Berechnungen das GPM bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max} = 360$  eingesetzt werden kann, wie es in den Untersuchungen auf Basis realer Daten getan wird (Arabelos und Tscherning, 1998; Denker, 2003; Arabelos et al., 2007). Ohne Rauschen des GPM verbliebe kein Signal in den residualen Tensorkomponenten in der Bahnhöhe von GOCE, die Genauigkeit der Lösung kann dann zu optimistisch ausfallen. Ein möglichst hoher Entwicklungsgrad des GPM ist für die Kombinationslösung günstig, um die Approximationsfehler der Modellierungsmethoden (vgl. Abschnitt 3.1) und den Vernachlässigungsfehler  $\delta T^{\text{VF}}$  aus (3.24) bzw. (3.42) klein zu halten. Bei der Nutzung eines hochauflösenden kombinierten GPM, in dessen Lösung auch terrestrische Daten eingeflossen sind, ist aber auf eine mögliche Korrelation zwischen den Datenquellen zu achten, s. a. Abschnitt 10.1.

Die Berechnungen auf Basis synthetischer Daten inklusive Rauschen erlauben eine detaillierte Analyse verschiedener Szenarien, in denen Punktauflösung, Niveau und Korrelation des Rauschens variiert wird. Aus den Differenzen der Ergebnisse zu den synthetischen, exakten Zielgrößen werden empirisch Varianzen zur Genauigkeitsbeurteilung abgeleitet. Die Differenzen werden in der vorliegenden Arbeit außerdem spektral untersucht, um das Rauschverhalten der Tensorelemente im Messband (0.005 Hz bis 0.100 Hz) des Gradiometers von GOCE zu bewerten, vgl. Abschnitt 2.3.4. Die Tensorelemente werden dazu in Punkten einer simulierten Satellitenbahn berechnet. Die Kenntnis über das erreichbare spektrale Genauigkeitsniveau ist wichtig für die Entscheidung über den Einsatz der Tensorwerte zur Kalibrierung oder Evaluierung der GOCE-Daten im Bereich des Messbandes.

In keiner der besprochenen Untersuchungen wird der Effekt der Berücksichtigung bzw. der Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe der Beobachtungen besprochen. Ein Grund dafür könnte bei Auswertung synthetischer Daten sein, dass die Beobachtungen in der Höhe null erzeugt wurden. Für reale Daten gilt dies jedoch nicht. In dieser Arbeit werden die synthetischen Daten in Höhe des DGM berechnet. Der Genauigkeitsgewinn durch Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe wird mit Hilfe der Kollokation analysiert.

Neben der Genauigkeitsanalyse auf Basis der synthetischen Daten wird in dieser Arbeit die Varianz der Zielgrößen über die Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen und mit Hilfe der Kollokation ohne Einführung von Beobachtungen berechnet. Die Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen wurde in (Denker, 2003) für die radiale Komponente eingesetzt, hier wird die Berechnung für alle Tensorkomponenten ausgeführt. Die Kollokation wurde bereits in vielen der besprochenen Arbeiten zur Bestimmung der Varianz verwendet (Arabelos und Tscherning, 1998; Visser et al., 2000; Pail, 2002, 2003c; Bouman und Koop, 2003a; Bouman et al., 2004; Arabelos et al., 2007; Bouman et al., 2005), jedoch wurde dabei stets unkorreliertes Rauschen der terrestrischen Beobachtungen vorausgesetzt. In dieser Arbeit wird auch korreliertes Rauschen im Rahmen der Kollokationsberechnung berücksichtigt.

## 5 Berechnung der Elemente des Gravitationstensors mittels Integration und Kollokation

In diesem Kapitel wird die Anwendung des Integrationsverfahrens (Abschnitt 5.1) und der Kollokation (Abschnitt 5.2) zur Berechnung des Gravitationstensors  $V_{[ij]}$  ( $i, j = x, y, z$  mit der Ausrichtung nach Norden, Osten und radial nach außen) aus der Kombination eines GPM und regionaler terrestrischer Daten erläutert. Neben den zur Berechnung notwendigen Zusammenhängen werden Aspekte der Gewichtung besprochen. Die Formeln sind zur Bestimmung der zweiten Ableitungen  $T_{[ij]}$  des Störpotentials  $T$  dargestellt. Den gesuchten Gravitationstensor  $V_{[ij]}$  erhält man durch Addition der zweiten Ableitungen  $V_{[ij]}^N$  des Normalgravitationspotentials  $V^N$ , vgl. Abschnitt 2.1.3.

### 5.1 Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung

Zur Bestimmung von  $T_{[ij]}$  aus der Kombination eines GPM mit regionalen terrestrischen Daten wird die in Abschnitt 3.1 und 3.4.2 beschriebene Methode der Remove-Restore-Technik angewendet. In der Integration werden residuale Schwereanomalien  $\Delta g^R$  in Elemente des residualen Tensors  $T_{[ij]}^R$  in Satellitenbahnhöhe transformiert, die anschließend mit Hilfe der Information des im Remove-Schritt eingesetzten GPM zu  $T_{[ij]}$  restituiert werden. Die Kombination beider Eingangsdatensätze wird mit Hilfe von spektralen Gewichten verfeinert.

#### 5.1.1 Ableitung der Kernfunktionen für die Integration

Zur Approximation der Elemente des Tensors  $T_{[ij]}$  im Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $\theta$ ,  $\lambda$  und  $r$  werden die Beziehungen aus (2.25) auf Gleichung (3.44) angewendet:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{[ij]}^{\text{IF}}(P) &= \text{grad} \left( \text{grad} \left( \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{n_{\max}} S_n \Delta g_n^M(\theta_P, \lambda_P, R) \right) \right) + \text{grad} \left( \text{grad} \left( \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} S^{s_n}(\psi, r, R) \Delta g^R(\theta_Q, \lambda_Q, R) d\sigma \right) \right) \\ &= \hat{T}_{[ij]}^{M, \text{IF}}(P) + \hat{T}_{[ij]}^{R, \text{IF}}(P). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Auf die Angabe der Koordinaten der Schwereanomalien  $\Delta g^R$  wird im Weiteren verzichtet. Der erste Summand  $\hat{T}_{[ij]}^{M, \text{IF}}$  ergibt sich aus den zweiten Ableitungen des Störpotentials auf Basis des GPM. Die zur Berechnung notwendigen Formeln (2.30) sind bereits in Abschnitt 2.1.4 angegeben. Der zweite Summand  $\hat{T}_{[ij]}^{R, \text{IF}}$  ergibt die zweiten Ableitungen des residualen Störpotentials auf Basis der Integration der residualen Schwereanomalien (3.27). Zur Berechnung sind die zweiten Ableitungen der Kernfunktion  $K(\psi, r, R) := S^{s_n}(\psi, r, R)$  bezüglich der Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  zu bilden (Pail, 2003a; Kern und Haagmans, 2005; Wolf und Denker, 2005). Auf die Kennzeichnung (<sup>IF</sup>) der Lösungen wird im Folgenden verzichtet.

Zunächst werden die in Gleichung (2.30) verwendeten partiellen Ableitungen auf Basis von  $\hat{T}_{[ij]}^R$  gebildet:

$$\begin{aligned} \hat{T}_r^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} K_r(\psi, r, R) \Delta g^R d\sigma, \\ \hat{T}_\theta^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} K_\psi(\psi, r, R) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Delta g^R d\sigma, \\ \hat{T}_\lambda^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} K_\psi(\psi, r, R) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \Delta g^R d\sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{rr}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} K_{rr}(\psi, r, R) \Delta g^R d\sigma, \\
\hat{T}_{r\theta}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} K_{\psi r}(\psi, r, R) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Delta g^R d\sigma, \\
\hat{T}_{r\lambda}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} K_{\psi r}(\psi, r, R) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \Delta g^R d\sigma, \\
\hat{T}_{\theta\theta}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} \left( K_{\psi\psi}(\psi, r, R) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 + K_{\psi}(\psi, r, R) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \Delta g^R d\sigma, \\
\hat{T}_{\theta\lambda}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} \left( K_{\psi\psi}(\psi, r, R) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + K_{\psi}(\psi, r, R) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \lambda} \right) \Delta g^R d\sigma \text{ und} \\
\hat{T}_{\lambda\lambda}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} \left( K_{\psi\psi}(\psi, r, R) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)^2 + K_{\psi}(\psi, r, R) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right) \Delta g^R d\sigma. \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen der Kernfunktion  $S^{s_n}(\psi, r, R)$  lauten

$$\begin{aligned}
K_{\psi}(\psi, r, R) &= \frac{\partial S^{s_n}(\psi, r, R)}{\partial \psi} = \sum_{n=2}^{\infty} s_n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} (-\sin \psi) \frac{\partial P_n(\cos \psi)}{\partial \cos \psi}, \\
K_r(\psi, r, R) &= \frac{\partial S^{s_n}(\psi, r, R)}{\partial r} = \sum_{n=2}^{\infty} s_n \frac{-(n+1)}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi), \\
K_{\psi\psi}(\psi, r, R) &= \frac{\partial^2 S^{s_n}(\psi, r, R)}{\partial \psi^2} = \sum_{n=2}^{\infty} s_n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} \left( \frac{\partial^2 P_n(\cos \psi)}{\partial \cos \psi \partial \cos \psi} \sin^2 \psi - \frac{\partial P_n(\cos \psi)}{\partial \cos \psi} \cos \psi \right), \\
K_{\psi r}(\psi, r, R) &= K_{r\psi}(\psi, r, R) = \frac{\partial^2 S^{s_n}(\psi, r, R)}{\partial \psi \partial r} = \sum_{n=2}^{\infty} s_n \frac{-(n+1)}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} (-\sin \psi) \frac{\partial P_n(\cos \psi)}{\partial \cos \psi} \text{ und} \\
K_{rr}(\psi, r, R) &= \frac{\partial^2 S^{s_n}(\psi, r, R)}{\partial r^2} = \sum_{n=2}^{\infty} s_n \frac{(n+1)(n+2)}{r^2} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi). \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Die Argumente  $(\psi, r, R)$  der abgeleiteten Kernfunktionen werden im Folgenden nicht weiter mitgeführt. Die Ableitungen der LEGENDRE-Polynome  $P_n(\cos \psi)$  in (5.3) werden mit Rekursionsformeln berechnet (Wenzel, 1985). Entsprechend der spektralen Zerlegung  $S_n$  aus (3.9) wird hier die spektrale Zerlegung der Kernfunktion  $K_{rr}$  angegeben. Die Voraussetzung der Wahl eines konstanten Radius ( $R$ ) für die Beobachtungen gilt weiterhin. Es ergibt sich

$$K_{rr,n} = \int_{\psi=0}^{\pi} K_{rr} P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{n-1} \frac{(n+1)(n+2)}{r^2} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1}. \tag{5.4}$$

Für die Ableitungen der sphärischen Distanz  $\psi$  nach den Koordinaten  $\theta$  und  $\lambda$  aus (5.2) ergeben sich aus

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta_Q + \sin \theta \sin \theta_Q \cos(\lambda_Q - \lambda) \tag{5.5}$$

und den Beziehungen im zugehörigen sphärischen Dreieck (Abb. 5.1) die folgenden Zusammenhänge (s. a. Reed, 1973, S. 73)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \cos \alpha, \\
\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} &= -\sin \theta \sin \alpha, \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= -\sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = \cot \psi \sin^2 \alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \lambda} &= -\sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = -\cos \theta \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = -\cos \theta \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \theta \cot \psi \sin(2\alpha) \quad \text{und} \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} &= -\sin \theta \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} \sin(2\theta) \cos \alpha + \sin^2 \theta \cos^2 \alpha \cot \psi .
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Diese Ausdrücke sind in (5.2) einzuführen. Mit Hilfe der Komponenten der Gleichungen (5.2) können schließlich entsprechend den Beziehungen aus (2.30) die Integralformeln zur Berechnung der Elemente des residualen Tensors  $T_{[ij]}^R$  angegeben werden (Wolf und Denker, 2005):

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{xx}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} \left\{ \frac{1}{r} K_r + \frac{1}{2r^2} ((K_{\psi\psi} + K_{\psi} \cot \psi) + (K_{\psi\psi} - K_{\psi} \cot \psi) \cos(2\alpha)) \right\} \Delta g^R d\sigma , \\
\hat{T}_{xy}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} \left\{ \frac{1}{2r^2} (K_{\psi\psi} - K_{\psi} \cot \psi) \sin(2\alpha) \right\} \Delta g^R d\sigma , \\
\hat{T}_{xz}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} \left\{ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} K_{\psi} - K_{\psi r} \right) \cos(\alpha) \right\} \Delta g^R d\sigma , \\
\hat{T}_{yy}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} \left\{ \frac{1}{r} K_r + \frac{1}{2r^2} ((K_{\psi\psi} + K_{\psi} \cot \psi) - (K_{\psi\psi} - K_{\psi} \cot \psi) \cos(2\alpha)) \right\} \Delta g^R d\sigma , \\
\hat{T}_{yz}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} \left\{ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} K_{\psi} - K_{\psi r} \right) \sin \alpha \right\} \Delta g^R d\sigma \quad \text{und} \\
\hat{T}_{zz}^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} K_{rr} \Delta g^R d\sigma .
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Die Terme der Kernfunktionen werden jeweils in einem Ausdruck  $K_{ij}$  mit  $i, j = x, y, z$  zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
K_{xx}(\psi, \alpha, r, R) &= \frac{1}{r} K_r + \frac{1}{2r^2} ((K_{\psi\psi} + K_{\psi} \cot \psi) + (K_{\psi\psi} - K_{\psi} \cot \psi) \cos(2\alpha)) , \\
K_{xy}(\psi, \alpha, r, R) &= \frac{1}{2r^2} (K_{\psi\psi} - K_{\psi} \cot \psi) \sin(2\alpha) , \\
K_{xz}(\psi, \alpha, r, R) &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} K_{\psi} - K_{\psi r} \right) \cos \alpha , \\
K_{yy}(\psi, \alpha, r, R) &= \frac{1}{r} K_r + \frac{1}{2r^2} ((K_{\psi\psi} + K_{\psi} \cot \psi) - (K_{\psi\psi} - K_{\psi} \cot \psi) \cos(2\alpha)) , \\
K_{yz}(\psi, \alpha, r, R) &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} K_{\psi} - K_{\psi r} \right) \sin \alpha , \\
K_{zz}(\psi, r, R) &= K_{rr} ,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

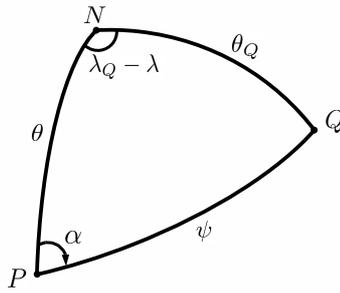
so dass für alle Komponenten

$$\hat{T}_{ij}^R = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma_0} K_{ij} \Delta g^R d\sigma \tag{5.9}$$

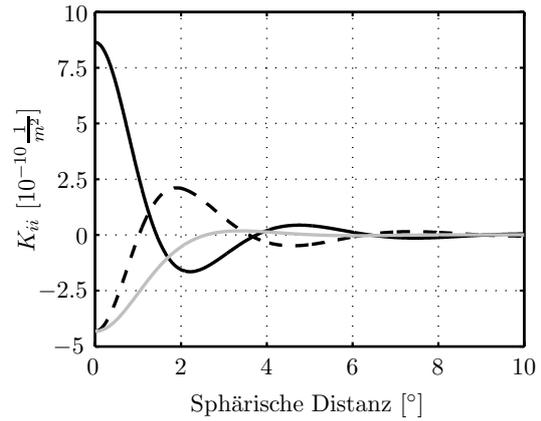
geschrieben werden kann. Alle Kernfunktionen  $K_{[ij]}$  bis auf  $K_{zz}$  hängen nicht nur von der sphärischen Distanz  $\psi$  (und den Radien  $r$  und  $R$ ) sondern auch vom Azimut  $\alpha$  ab und sind daher nicht isotrop. In Abb. 5.2 sind die Kernfunktionen  $K_{ii}$ ,  $i = x, y, z$  zur Berechnung der Hauptdiagonalelemente des Tensors  $T_{[ij]}^R$  exemplarisch für  $\alpha = 0$  dargestellt. Die Kernfunktionen zur Berechnung der übrigen Elemente des Tensors sind ebenfalls für ausgewählte Azimutwerte  $\alpha$ , bei denen sich der in (5.8) vom Azimut abhängige Term zu 1.0 bzw.  $-1.0$  ergibt, in Abb. 5.3 und 5.4 angegeben.

### 5.1.2 Festlegung der Begrenzung des Integrationsgebietes

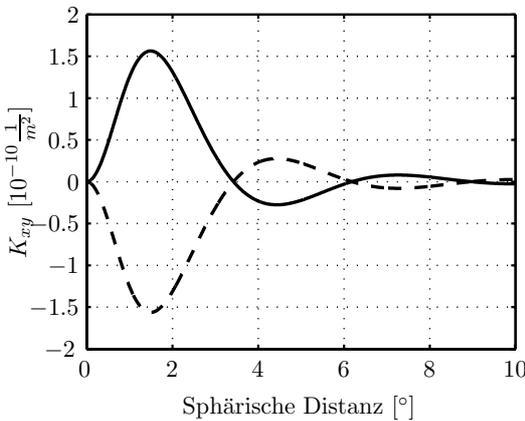
Die Integration zur Berechnung der residualen Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}^R$  wird über einem regional begrenzten Gebiet  $\sigma_0$  ausgeführt. Zur Berechnung der Varianzen der Zielgrößen wird eine Kugelkappe als Integrationsgebiet gewählt. Dies ermöglicht eine Formulierung auf Basis von Gradvarianzen. In der geodätischen Literatur



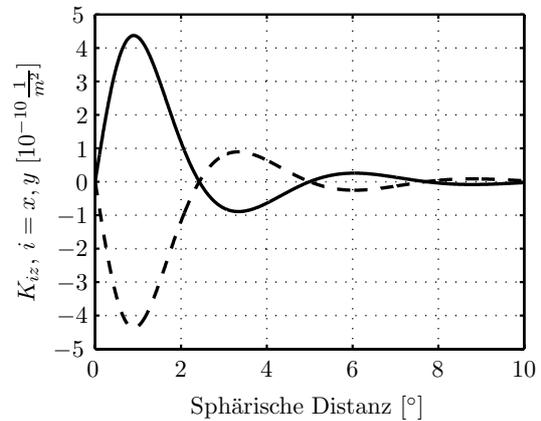
**Abbildung 5.1.** Sphärisches Dreieck  $PNQ$  zur Veranschaulichung der Winkelbeziehungen zwischen den Kugelkoordinaten  $\theta$  und  $\lambda$  der Punkte  $P$  und  $Q$ , der sphärischen Distanz  $\psi$  und dem Azimut  $\alpha$ .



**Abbildung 5.2.** Kernfunktionen  $K_{xx}$  (---),  $K_{yy}$  (—, grau) und  $K_{zz}$  (—) für  $\alpha = 0^\circ$  für die Kombination terrestrischer Daten mit einem GPM.



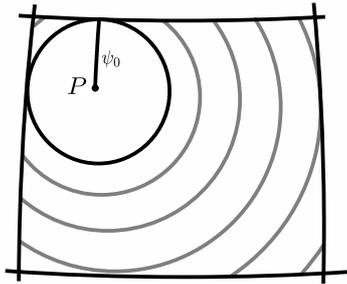
**Abbildung 5.3.** Kernfunktionen  $K_{xy}$  für  $\alpha = 45^\circ$  (—) und  $\alpha = 135^\circ$  (---) für die Kombination terrestrischer Daten mit einem GPM.



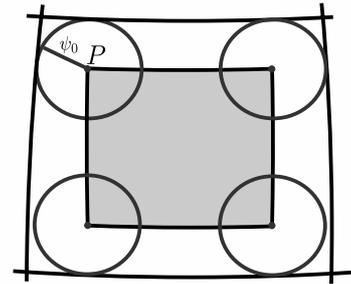
**Abbildung 5.4.** Kernfunktionen  $K_{xz}$  (—) für  $\alpha = 180^\circ$  und  $K_{yz}$  (---) für  $\alpha = 90^\circ$  für die Kombination terrestrischer Daten mit einem GPM.

werden in der praktischen Auswertung des Integrationsverfahrens zwei Arten der Begrenzung des Integrationsgebietes eingesetzt (s. a. Agren, 2004): Entweder wird von einer Kugelkappe  $\sigma_0$  mit dem Radius  $\psi_0$  und dem Berechnungspunkt im Zentrum als Integrationsgebiet ausgegangen oder es werden alle Daten des vorliegenden Gebietes bei festliegender Gebietsbegrenzung für alle Berechnungspunkte verwendet. Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass das Datengebiet dann durch Längen- und Breitenkreise begrenzt ist. Bei der Nutzung des gesamten Datengebietes werden in Abhängigkeit vom Azimut zwischen Berechnungs- und Quellpunkt unterschiedlich große Integrationsradien erreicht, vgl. Abb. 5.5. Für alle Berechnungspunkte außer dem Punkt im Zentrum des Gebietes wird ein asymmetrisches Einzugsgebiet verwendet.

Die zur Berechnung der Elemente des Tensors  $T_{[ij]}^R$  notwendigen Kernfunktionen  $K_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) sind, mit Ausnahme von  $K_{zz}$ , nicht isotrop, s. Abschnitt 5.1.1. Bei der Wahl einer Kugelkappe als Integrationsgebiet sollte die Kernfunktion, wie in Abschnitt 3.4.5 erläutert, an einer geeigneten Stelle  $\psi_0$  (z. B. einer Nullstelle und nicht einem lokalen Extremwert) abgeschnitten werden, um den Vernachlässigungsfehler klein zu halten. Bei den Kernfunktionen  $K_{xx}$  und  $K_{yy}$  variieren jedoch die Nullstellen in Abhängigkeit vom Azimut (Abb. 5.2, wobei  $K_{xx}$  für  $\alpha = 90^\circ$  der Funktion  $K_{yy}$  für  $\alpha = 0^\circ$  entspricht), so dass die Wahl eines konstanten Abbruchradius  $\psi_0$  für diese beiden Komponenten nicht sinnvoll erscheint. Aufgrund der mit wachsendem Abstand  $\psi$  abnehmenden Amplituden der Kernfunktionen ist für lange Distanzen eine ungünstige Abbruchstelle weniger kritisch. Für die Tensorkomponenten  $T_{xx}$  und  $T_{yy}$  wird deshalb bei der Integration stets das gesamte Eingangsdatengebiet verwendet, um eine möglichst lange Distanz bis zum Abbruch der Kernfunktion zu ermöglichen. Für Berechnungspunkte



**Abbildung 5.5.** Bei der Integration über eine Kugelkappe wird ein konstanter maximaler Radius (schwarz) eingehalten. Wird das gesamte Eingangsdatengebiet für jeden Berechnungspunkt genutzt, ist die Größe des maximalen Integrationsradius (grau) vom Azimut zwischen Berechnungs- und Quellpunkt abhängig.



**Abbildung 5.6.** Die Ergebnisse des grau unterlegten Gebietes wurden für den Vergleich der Integration mit wandernder Kugelkappe gegenüber der Nutzung des gesamten Gebietes herangezogen, um ähnliche Abstände zum Gebietsrand zu berücksichtigen (Unterschiede verbleiben aufgrund der Meridiankonvergenz).

nahe am Rand des Gebietes treten dann zwar auch kürzere Distanzen auf, aber nur in einem begrenzten Azimutbereich. Die im Folgenden beschriebene Untersuchung zeigt, dass der insgesamt verursachte Fehlerbeitrag gering ist, wenn ein ausreichender Abstand zum Rand des Eingangsdatengebietes eingehalten wird.

Zur Berechnung der Komponenten  $T_{xy}$ ,  $T_{xz}$ ,  $T_{yz}$  und  $T_{zz}$  könnten die Nulldurchgänge der Kernfunktionen als Abbruchstelle gewählt werden, da diese bei Änderung des Azimuts erhalten bleiben (Abb. 5.3 und 5.4, wobei  $K_{xz}$  für  $\alpha = 0^\circ$  der dargestellten Funktion  $K_{yz}$  für  $\alpha = 90^\circ$  entspricht). Daher könnten prinzipiell beide genannten Arten der Begrenzung des Integrationsgebietes eingesetzt werden. In Vergleichsstudien zu diesen beiden Ansätzen im Rahmen der Geoidberechnung (mit der homogenen und isotropen Kernfunktion  $S^{sn}(\psi)$ ) werden die Ergebnisse häufig mit Hilfe von GPS-Nivellementsdaten evaluiert (z. B. Forsberg und Featherstone, 1998; Featherstone et al., 2001; Omang und Forsberg, 2002). Die Ursache für auftretende Diskrepanzen kann dabei nicht eindeutig geklärt werden, da die Fehleranteile der Schwereanomalien, des Modellierungsverfahrens und der GPS-Nivellementsdaten nicht getrennt werden können. Die Ergebnisse aus (Featherstone, 1999), die auf synthetischen Daten basieren, können hinsichtlich der Begrenzung des Integrationsgebietes nicht eindeutig interpretiert werden, weil verschiedene Kernmodifikationen in Kombination mit unterschiedlichen Begrenzungen des Integrationsgebietes verwendet werden.

Daher wurden Testrechnungen auf Basis der im Rahmen dieser Arbeit erzeugten synthetischen Daten (s. Kapitel 7) mit identischen Kernfunktionen und unterschiedlichen Abbruchradien  $\psi_0$  zur Berechnung der radialen Komponente  $T_{zz}$  und der Quasigeoidhöhe  $\zeta$  durchgeführt (Kieler, 2006; Wolf und Kieler, 2006). Eine vergleichbare Studie bezüglich der Geoidberechnung ist in (Agren, 2004, S. 102) zu finden. Es wird davon ausgegangen, dass der Abbruchradius innerhalb gewisser Grenzen stets frei wählbar ist, so dass günstige Abbruchstellen der Kernfunktion ausgewählt werden können. Als Abbruchstellen  $\psi_0$  der Kernfunktion wurden die erste Nullstelle  $\psi_{0,N1}$  und die zweite Nullstelle  $\psi_{0,N2}$  gewählt. Ebenso wurde das gesamte Datengebiet  $G$  zur Berechnung genutzt. Zur Evaluation der Ergebnisse wurden zwei Teilgebiete ausgewählt, die einen Rand zur Gebietsgrenze von etwa der Breite  $\psi_{0,N1}$  bzw.  $\psi_{0,N2}$  einhalten (Abb. 5.6), um jeweils die Ergebnisse im Fall  $\psi_{0,N1}$  und  $G$  bzw.  $\psi_{0,N2}$  und  $G$  unter ähnlichen Bedingungen vergleichen zu können.

Die Ergebnisse bei der Verwendung des gesamten Datengebietes  $G$  zeigen die kleinsten Differenzen zu der synthetischen, exakten Lösung. Dies bestätigt die Untersuchungen in (Agren, 2004). Ein signifikanter Fehlereinfluss aufgrund der Asymmetrie des Eingangsdatengebietes für Punkte nahe dem Gebietsrand konnte nicht festgestellt werden. Vergleichbare Ergebnisse wurden bei Abbruch des Kerns in  $\psi_{0,N2}$  erreicht, nicht aber bei Abbruch in  $\psi_{0,N1}$ . Aufgrund dieser Ergebnisse wird in der vorliegenden Arbeit auch für die Komponenten  $T_{xy}$ ,  $T_{xz}$ ,  $T_{yz}$  und  $T_{zz}$  stets das gesamte Datengebiet in der Integration verwendet. Durch Auswertung der Integration auf Basis der FFT (siehe Kapitel 8) stellt die durch Nutzung des gesamten Datengebietes erhöhte Anzahl von Beobachtungen kein rechenzeittechnisches Problem dar.

### 5.1.3 Wahl der spektralen Gewichtung

In dieser Arbeit wird ein stochastisch motivierter Ansatz zur Berechnung der spektralen Gewichte  $s_n$  gewählt. Eine Minimierung des Vernachlässigungsfehlers bezüglich eines konstanten Abbruchradius  $\psi_0$  (Abschnitt 3.4.5) wird dabei nicht berücksichtigt, da - wie im vorangegangenen Abschnitt diskutiert wurde - das gesamte Datengebiet für alle Berechnungspunkte genutzt wird. Es wird das Verfahren der spektralen Kombination nach kleinsten Quadraten (Wenzel, 1981, 1982) eingesetzt. Die optimale Gewichtung zwischen GPM und in der Praxis nur regional vorliegenden terrestrischen Daten wird dabei unter der Annahme global vorhandener terrestrischer Daten approximiert. Auf Grundlage der Zusammenhänge aus Abschnitt 3.4.3 und 3.4.4 zur Berechnung des Störpotentials wird dazu die Varianz

$$m_{\epsilon_{T\text{IF}}}^2 = \frac{R^2}{4} \sum_{n=2}^{n_{\max}} (\bar{Q}_n^{1-s_\ell} + Q_n^1)^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M}) + \frac{R^2}{4} \sum_{n=2}^{\infty} (\bar{Q}_n^{s_\ell})^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T}) + \frac{R^2}{4} \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} (Q_n^{s_\ell})^2 \sigma_n^2(\Delta g)$$

aus (3.51) unter der Voraussetzung  $\psi_0 = \pi$  minimiert. In diesem Fall gilt  $\bar{Q}_n^{s_\ell}(\psi_0 = \pi) = s_n S_n$ ,  $\bar{Q}_n^{1-s_\ell}(\psi_0 = \pi) = (1 - s_n) S_n$ ,  $Q_n^1(\psi_0 = \pi) = 0$  und  $Q_n^{s_\ell}(\psi_0 = \pi) = 0$ , woraus für die Varianz folgt:

$$m_{\epsilon_{T\text{IF}}}^2 = \frac{R^2}{4} \left[ \sum_{n=2}^{n_{\max}} ((1 - s_n) S_n)^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M}) + \sum_{n=2}^{\infty} (s_n S_n)^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T}) \right]. \quad (5.10)$$

Zur Ableitung optimaler spektraler Gewichte  $s_n$  ist die Gleichung

$$\frac{\partial m_{\epsilon_{T\text{IF}}}^2}{\partial s_k} = 0$$

für  $k = 2 \dots k_{\max}$  zu lösen. Es ergibt sich (Moritz, 1976; Wenzel, 1981)

$$s_k = \frac{\sigma_k^2(\epsilon_{\Delta g^M})}{\sigma_k^2(\epsilon_{\Delta g^M}) + \sigma_k^2(\epsilon_{\Delta g^T})}. \quad (5.11)$$

Die Fehlergradvarianz  $\sigma_k^2(\epsilon_{\Delta g^M})$  des GPM wird nach (3.52) berechnet, die Fehlergradvarianz  $\sigma_k^2(\epsilon_{\Delta g^T})$  der terrestrischen Daten für korreliertes Rauschen nach (3.53) und für unkorreliertes Rauschen nach (3.55), vgl. Abschnitt 3.4.4. Die spektralen Gewichte (5.11) werden zur Berechnung aller Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}^R$  eingesetzt. Es sei bemerkt, dass für einzelne Komponenten, die horizontale Ableitungen des Störpotentials enthalten, eine Darstellung ihrer Varianz auf Basis von Gradvarianzen entsprechend zu (3.51) lediglich näherungsweise möglich ist, wie es im folgenden Abschnitt diskutiert wird.

### 5.1.4 Bestimmung der Varianzen der Zielgrößen auf Basis von Gradvarianzen

Die Gradvarianzen der radialen Komponente  $T_{zz}$  des Tensors  $T_{[ij]}$  stehen im direkten Zusammenhang (2.67) mit den Gradvarianzen des Störpotentials. Daher lässt sich die in Abschnitt 3.4.4 für das Störpotential dargestellte Varianz (3.51) auf die radiale Komponente  $T_{zz}$  des Tensors  $T_{[ij]}$  übertragen:

$$\begin{aligned} m_{\epsilon_{T_{zz}^{\text{IF}}}}^2 &= m_{\epsilon_{T_{zz}^M}}^2 + m_{\epsilon_{T_{zz}^T}}^2 + m_{\delta T_{zz}^{\text{VF, IF}}}^2 \\ &= \frac{R^2}{4} \left[ \sum_{n=2}^{n_{\max}} (\bar{Z}_n^{1-s_\ell} + Z_n^{1,0})^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M}) + \sum_{n=2}^{\infty} (\bar{Z}_n^{s_\ell})^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T}) + \sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} (Z_n^{s_\ell})^2 \sigma_n^2(\Delta g) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Es gehen die Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M})$  auf Basis der Varianzen der Koeffizienten des GPM ein, die Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})$  der terrestrischen Daten und die Signalgradvarianzen  $\sigma_n^2(\Delta g)$ . Die Abbruchkoeffizienten  $Z_n$  und  $\bar{Z}_n$ , die den Abbruch der Kernfunktion  $K_{zz}$  im Frequenzraum wiedergeben, entsprechen den Koeffizienten  $Q_n$  bzw.  $\bar{Q}_n$  bei der Berechnung von  $m_{\epsilon_{T\text{IF}}}^2$  nach (3.51) und sind definiert als

$$Z_n^{s_\ell}(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} K_{zz}(\psi, r, R) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \quad (5.13)$$

und

$$\bar{Z}_n^{s_\ell}(\psi_0) = \int_0^{\psi_0} K_{zz}(\psi, r, R) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (5.14)$$

Unter Verwendung von (5.4) zur Darstellung der Kernfunktion ergibt sich für (5.13)

$$\begin{aligned} Z_n^{s_\ell}(\psi_0) &= \int_{\psi_0}^{\pi} \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} K_{rr,\ell} s_\ell P_\ell(\cos \psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \\ &= \int_{\psi_0}^{\pi} \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{2\ell+1}{\ell-1} \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} s_\ell P_\ell(\cos \psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Für  $\psi_0 = 0$  folgt aus den Orthogonalitätsrelationen der LEGENDRE-Polynome

$$Z_n^{s_\ell}(\psi_0 = 0) = \frac{2}{n-1} \frac{(n+1)(n+2)}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} s_n = K_{rr,n} s_n. \quad (5.16)$$

Es gilt außerdem entsprechend (3.38)  $\bar{Z}_n^{s_\ell}(\psi_0) = s_n K_{rr,n} - Z_n^{s_\ell}(\psi_0)$ . Die Berechnung der Integrale

$$\int_{\psi_0}^{\pi} P_\ell(\cos \psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi \quad (5.17)$$

über die Produkte der LEGENDRE-Polynome in Gleichung (5.15) wird mit Hilfe von Rekursionsformeln aus (Paul, 1973) durchgeführt, s. a. (Heck, 1979; Iz und Chan, 1991).

Bei der Nutzung des Gesamtgebietes in der Integration ist die Berechnung der Varianz  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{\text{IF}}}}^2$  nach (5.12) nicht mehr streng gültig, da kein konstanter Abbruchradius  $\psi_0$  vorliegt. Da sich der Abbruchradius in der Integration in Abhängigkeit vom Azimut ändert, ist eine dazu konsistente Bestimmung der Varianz auf Basis von Gradvarianzen nicht möglich. Es wird in dieser Arbeit numerisch untersucht, inwieweit und für welchen Abbruchradius  $\psi_0$  die Varianz für die Zielgröße  $T_{zz}$  dennoch mit der auf Grundlage der synthetischen Daten empirisch berechneten Varianz des Integrationsergebnisses übereinstimmt (Kapitel 9).

Die Berechnung (5.12) der Varianz kann in dieser Form nicht auf die übrigen Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  übertragen werden, da ihre Kovarianzfunktionen nicht isotrop sind (s. a. Abschnitt 5.2.1). Eine Darstellung der Varianz einer einzelnen Komponente in Abhängigkeit von Gradvarianzen ist nicht möglich.

Gradvarianzen lassen sich aber für bestimmte Kombinationen der Komponenten  $T_{[ij]}$  angeben, wenn basierend auf den skalaren Kugelflächenfunktionen  $\bar{R}_{nm}$  und  $\bar{S}_{nm}$  aus (2.6) drei tensorielle Kugelflächenfunktionen  $\mathbf{Z}_{nm}^{(0)}$ ,  $\mathbf{Z}_{nm}^{(1)}$  und  $\mathbf{Z}_{nm}^{(2)}$  eingeführt werden (Zerilli, 1970; Rummel und van Gelderen, 1992; Freedon et al., 1994; Rummel, 1997; van Gelderen und Koop, 1997).

Im Folgenden wird für die Kugelflächenfunktionen  $\bar{R}_{nm}$  und  $\bar{S}_{nm}$  die kürzere Schreibweise

$$Y_{nm}(\theta, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \\ \bar{S}_{n|m|}(\theta, \lambda) \end{array} \right\} = \bar{P}_{n|m|}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \cos(m\lambda) \\ \sin(|m|\lambda) \end{array} \right\} \quad \text{für } n \geq 2, \quad -n \leq m \leq n \quad (5.18)$$

verwendet. Die Kugelfunktionsentwicklung (2.16b) des Störpotentials mit  $a = R$  ergibt sich damit zu

$$T(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^{+n} \nu_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda). \quad (5.19)$$

Die sphärisch-harmonischen Koeffizienten  $\nu_{nm}$  ersetzen hier die Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$  aus (2.16b). Die drei

tensoriellen Kugelflächenfunktionen werden eingeführt als (Rummel, 1997)

$$r_P^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_{nm} = (n+1)(n+2) \mathbf{Z}_{nm}^{(0)}, \quad (5.20a)$$

$$\frac{r_P^2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_{nm} = -(n+2) \sqrt{n(n+1)} \mathbf{Z}_{nm}^{(1)} \text{ und} \quad (5.20b)$$

$$\frac{r_P^2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 \\ -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_{nm} = \sqrt{\frac{(n+2)!}{(n-2)!}} \mathbf{Z}_{nm}^{(2)}. \quad (5.20c)$$

Die tensoriellen Kugelflächenfunktionen  $\mathbf{Z}_{nm}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$  bilden wie die skalaren Kugelflächenfunktionen  $Y_{nm}$  ein vollständiges und orthogonales System von Basisfunktionen für die Darstellung tensorwertiger Funktionen. Die Kombinationen  $\mathbf{\Gamma}^{(0)} = (\{T_{zz}\} (= \{-T_{xx} - T_{yy}\}))$ ,  $\mathbf{\Gamma}^{(1)} = (\{T_{xz}\}, \{T_{yz}\})$  und  $\mathbf{\Gamma}^{(2)} = (\{T_{xx} - T_{yy}\}, \{2T_{xy}\})$  der Elemente des Tensors  $T_{[ij]}$  lassen sich auf Basis der tensoriellen Kugelflächenfunktionen  $\mathbf{Z}_{nm}^{(\alpha)}$  schreiben als

$$\mathbf{\Gamma}^{(0)}(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \nu_{nm} \frac{(n+1)(n+2)}{r^2} \mathbf{Z}_{nm}^{(0)}(\theta, \lambda, r), \quad (5.21a)$$

$$\mathbf{\Gamma}^{(1)}(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \nu_{nm} \frac{-(n+2) \sqrt{n(n+1)}}{r^2} \mathbf{Z}_{nm}^{(1)}(\theta, \lambda, r) \text{ und} \quad (5.21b)$$

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)}(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \nu_{nm} \frac{\sqrt{(n-1)n(n+1)(n+2)}}{r^2} \mathbf{Z}_{nm}^{(2)}(\theta, \lambda, r). \quad (5.21c)$$

Mit den Gleichungen (5.21a)-(5.21c) lässt sich eine direkte Beziehung zwischen den Gradvarianzen  $\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(\alpha)})$  und den Gradvarianzen  $\sigma_n^2(T)$  des Störpotentials mit dem Bezugsradius  $R$  aufbauen (Rummel und van Gelderen, 1992; Rummel, 1997). Die Gradvarianzen der tensoriellen Größen beschreiben die mittlere Signalstärke ihrer quadratisch aufsummierten Elemente für den jeweiligen sphärisch-harmonischen Grad  $n$ , vgl. (Rummel, 1997). Es gilt

$$\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(0)}) = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{r^2}\right)^2 \left(\frac{R^2}{r^2}\right)^{n+1} \sigma_n^2(T) = \sigma_n^2(T_{zz}), \quad (5.22a)$$

$$\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(1)}) = n(n+1) \left(\frac{n+2}{r^2}\right)^2 \left(\frac{R^2}{r^2}\right)^{n+1} \sigma_n^2(T), \quad (5.22b)$$

$$\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(2)}) = (n-1)n(n+1)(n+2) \left(\frac{1}{r^2}\right)^2 \left(\frac{R^2}{r^2}\right)^{n+1} \sigma_n^2(T). \quad (5.22c)$$

Abgesehen von der Fortsetzung nach oben unterscheiden sich alle Gradvarianzen der Kombinationen  $\mathbf{\Gamma}^{(\alpha)}$  um einen Faktor in der Größenordnung  $n^4$  von den Gradvarianzen des Störpotentials. Die Gradvarianzen  $\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(0)})$  entsprechen den bereits in (2.67) eingeführten  $\sigma_n^2(T_{zz})$ .

Für die Abschätzung der Gradvarianzen der übrigen Einzelkomponenten werden einige Annahmen getroffen (Thalhammer, 1994, 1995; Rummel, 1997). Beginnend mit

$$\sigma_n^2(T_{xz}) \approx \sigma_n^2(T_{yz}) \quad (5.23)$$

ergibt sich

$$\sigma_n^2(T_{xz}) = \sigma_n^2(T_{yz}) = \frac{1}{2} \sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(1)}). \quad (5.24)$$

Dieser Ausdruck kann mit Hilfe von (5.22b) numerisch ausgewertet werden. Es wird außerdem

$$\sigma_n^2(\{T_{xx} - T_{yy}\}) \approx \sigma_n^2(\{2T_{xy}\}) \quad (5.25)$$

angenommen, so dass sich

$$\sigma_n^2(\{T_{xx} - T_{yy}\}) = \sigma_n^2(\{2T_{xy}\}) = \frac{1}{2}\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(2)}) \quad (5.26)$$

auf Basis von (5.22c) ergibt und damit folgt

$$\sigma_n^2(T_{xy}) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2}\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(2)}) \right) = \frac{1}{8}\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(2)}) . \quad (5.27)$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass die Faktoren beim Herauslösen aus der geschweiften Klammer zu quadrieren sind, da die Gradvarianzen die mittlere Signalstärke der quadratisch aufsummierten Elemente (innerhalb der geschweiften Klammer) beschreiben. Es gilt außerdem

$$\sigma_n^2(\{T_{xx} + T_{yy}\}) = \sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(0)}) = \sigma_n^2(T_{zz}) \quad (5.28)$$

und

$$(T_{xx} - T_{yy})^2 + (T_{xx} + T_{yy})^2 = 2(T_{xx}^2 + T_{yy}^2) . \quad (5.29)$$

Unter Verwendung von (5.26) folgt daraus

$$\begin{aligned} \sigma_n^2(\{T_{xx} - T_{yy}\}) + \sigma_n^2(\{T_{xx} + T_{yy}\}) &= \sigma_n^2(2(\{T_{xx}\} + \{T_{yy}\})) \\ \frac{1}{2}\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(2)}) + \sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(0)}) &= \sigma_n^2(2(\{T_{xx}\} + \{T_{yy}\})) \\ \frac{1}{4}\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(2)}) + \frac{1}{2}\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(0)}) &= \sigma_n^2(\{T_{xx}\} + \{T_{yy}\}) . \end{aligned} \quad (5.30)$$

Mit der weiteren Annahme

$$\sigma_n^2(T_{xx}) \approx \sigma_n^2(T_{yy}) \quad (5.31)$$

ergibt sich schließlich (Rummel, 1997)

$$\sigma_n^2(T_{xx}) = \sigma_n^2(T_{yy}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4}\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(2)}) + \frac{1}{2}\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(0)}) \right) = \frac{1}{8}\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(2)}) + \frac{1}{4}\sigma_n^2(\mathbf{\Gamma}^{(0)}) . \quad (5.32)$$

Die Gleichungen (5.22a), (5.24), (5.27) und (5.32) ermöglichen eine Abschätzung der Varianz  $m_{\epsilon_{T_{ij}^{IF}}}^2$  für den Fall  $\psi_0 = 180^\circ$ , indem die Signalgradvarianzen  $\sigma_n^2(T)$  in den Gleichungen (5.22a)-(5.22c) durch Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_T)$  ersetzt und spektrale Gewichte  $s_n$  berücksichtigt werden. Auf Basis der Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M})$  und  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})$  aus Gleichung (5.12) ergeben sich spektral gewichtete Fehlergradvarianzen des Störpotentials unter Verwendung der Beziehung (2.66) zu

$$\sigma_n^2(\epsilon_{T^{IF}}) = \left( \frac{n-1}{R} \right)^2 \begin{cases} (1-s_n)^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M}) + s_n^2 \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T}) & \text{für } n \leq n_{\max} \\ \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T}) & \text{für } n > n_{\max} . \end{cases} \quad (5.33)$$

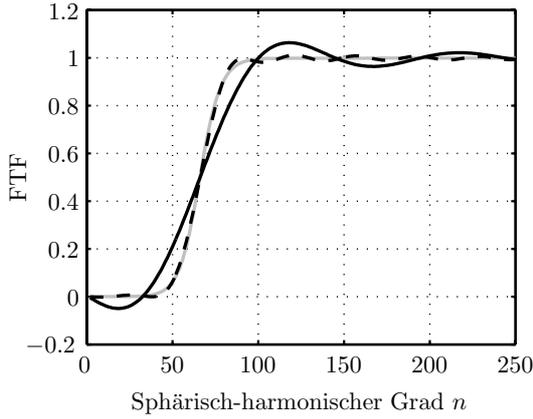
Wird die Gradvarianz  $\sigma_n^2(T)$  nun in den Gleichungen (5.22a) bis (5.22c) durch  $\sigma_n^2(\epsilon_{T^{IF}})$  ersetzt, ergeben sich aus (5.22a), (5.24), (5.27) und (5.32) jeweils die Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{T_{ij}^{IF}})$  der spektralen Kombination. Durch Akkumulation dieser Fehlergradvarianzen ergibt sich schließlich die Varianz der jeweiligen Zielgröße:

$$m_{\epsilon_{T_{ij}^{IF}}}^2 = \frac{R^2}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^2(\epsilon_{T_{ij}^{IF}}) . \quad (5.34)$$

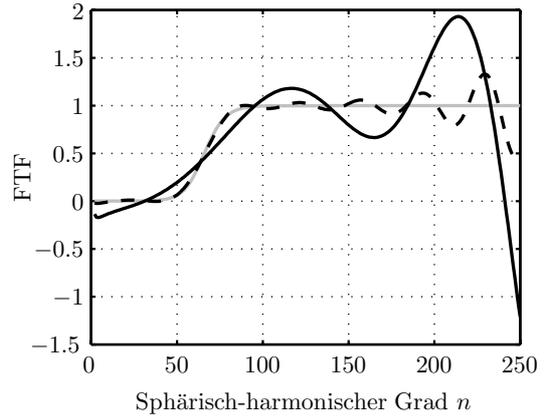
Die Berechnung der Varianz  $m_{\epsilon_{T_{ij}^{IF}}}^2$  für Abbruchradien  $\psi_0 < 180^\circ$  entsprechend (5.12) ist erheblich aufwendiger, s. (Thalhammer, 1994, 1995). Der Einfluss des Kernabbruchs für  $\psi_0 < 180^\circ$  wird in dieser Arbeit nur für die Komponente  $T_{zz}$  untersucht (Abschnitt 9.3.1).

### 5.1.5 Aspekte der Gewichtung

Im Gegensatz zur globalen Auswertung wird bei der regionalen Anwendung des Integrationsverfahrens die Kernfunktion an einer Stelle  $\psi_0$  abgeschnitten. In dieser Arbeit wird bei der Berechnung kein konstanter, sondern



**Abbildung 5.7.** Mit  $\frac{1}{s_n}$  normierte Frequenztransferfunktionen (FTF) zur Berechnung des Störpotentials  $T^R$  am Erdboden, Abbruchradien  $\psi_0 = 3.5^\circ$  (—),  $\psi_0 = 10.0^\circ$  (- -) und  $\psi_0 = 180.0^\circ$  (grau, —, identisch mit spektralen Gewichten  $s_n$ ).



**Abbildung 5.8.** Mit  $\frac{1}{K_{rr,n}}$  normierte Frequenztransferfunktionen (FTF) zur Berechnung der radialen Tensorkomponente  $T_{zz}^R$  in der Bahnhöhe von GOCE für Abbruchradien  $\psi_0 = 3.5^\circ$  (—),  $\psi_0 = 10.0^\circ$  (- -) und  $\psi_0 = 180.0^\circ$  (grau, —, identisch mit spektralen Gewichten  $s_n$ ).

ein vom Azimut abhängiger Abbruchradius  $\psi_0$  verwendet (vgl. Abschnitt 3.4.5). Für die folgende spektrale Betrachtung der regionalen Integration in Abhängigkeit vom sphärisch-harmonischen Grad  $n$  wird dennoch von einem konstanten Abbruchradius  $\psi_0$  ausgegangen. Die Darstellung im Frequenzraum kann daher nicht auf die tatsächlich ausgeführte Integration übertragen werden, sie soll lediglich die Auswirkungen des Abbruchs der Kernfunktion auf die Gewichtung der Beobachtungen verdeutlichen.

Die Zusammenhänge werden zunächst bezogen auf das Störpotential  $T$  dargestellt und anschließend auf die radiale Komponente  $T_{zz}$  übertragen. Die Auswirkung des Abbruchs der Kernfunktion kann im Frequenzraum mit Hilfe der in (3.18) bzw. (3.35) eingeführten Abbruchkoeffizienten  $\bar{Q}_n$  bzw.  $\bar{Q}_n^{s_\ell}$  untersucht werden. Global vorliegende residuale Schwereanomalien  $\Delta g^R$  werden gemäß (3.10) unter Berücksichtigung der spektralen Gewichte  $s_n$  bei der Berechnung des residualen Störpotentials  $T^R$  wie folgt gewichtet:

$$\hat{T}_{\text{global}}^R = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} s_n S_n \Delta g_n^R. \quad (5.35)$$

Für regional vorliegende Beobachtungen gilt nach (3.44) mit  $n_{\text{max}} = \infty$

$$\hat{T}_{\text{regional}}^R = \frac{R}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{Q}_n^{s_\ell}(\psi_0) \Delta g_n^R. \quad (5.36)$$

Die spektralen Faktoren  $s_n S_n$  und  $\bar{Q}_n^{s_\ell}(\psi_0)$  zur Transformation der Beobachtungen werden auch als Frequenztransferfunktionen bezeichnet (Wenzel, 1982). Der Vergleich der beiden Frequenztransferfunktionen zeigt, in welchem Maße die jeweils angesetzten spektralen Gewichte  $s_n$  aufgrund der Beschränkung der Integration auf eine Kugelkappe verändert werden (Weber, 1984). In Abb. 5.7 sind die spektralen Gewichte  $s_n$  den mit  $\frac{1}{s_n} = \frac{n-1}{2}$  normierten Abbruchkoeffizienten  $\bar{Q}_n^{s_\ell}$  für  $\psi_0 = 3.5^\circ$  und  $\psi_0 = 10.0^\circ$  gegenübergestellt. Aufgrund des Abbruchs der Kernfunktion im Ortsraum entstehen Schwingungen im Frequenzraum (vgl. Abschnitt 3.4.5). Für den kleineren Abbruchradius zeigt sich eine höhere Amplitude der Schwingung als für den größeren Abbruchradius, s. a. (Wenzel, 1982). Die Schwingungsamplitude wird außerdem von der Eigenschaft der Kernfunktion an der Abbruchstelle (z. B. Nulldurchgang, lokales Minimum) beeinflusst, entsprechend der Schwingungseigenschaft der zugehörigen Abbruchkoeffizienten, s. a. Abb. 3.8 auf S. 41.

Die Betrachtung der Verformung der spektralen Gewichte  $s_n$  bei regionaler Integration lässt sich auf die Berechnung der residualen radialen Tensorkomponente  $T_{zz}^R$  in der Bahnhöhe von GOCE übertragen, indem in (5.35) der Term  $S_n$  durch die spektrale Zerlegung  $K_{rr,n}$  (5.4) der Kernfunktion  $K_{zz}$  und in (5.36) die Abbruchkoeffizienten  $\bar{Q}_n^{s_\ell}(\psi_0)$  durch die Abbruchkoeffizienten  $\bar{Z}_n^{s_\ell}(\psi_0)$  aus (5.14) ersetzt werden. Die entsprechende Gegenüberstellung der Frequenztransferfunktionen für die Abbruchradien  $\psi_0 = 3.5^\circ$  und  $\psi_0 = 10.0^\circ$  ist in Abb. 5.8 gegeben. Man erkennt, dass die Amplitude der Schwingung jeweils größer ist als bei den Frequenztransferfunktionen zur

Berechnung des Störpotentials. Der Grund dafür ist der schwächer ausgeprägte Abfall der Kernfunktion  $K_{zz}$  zur Berechnung von  $T_{zz}^R$  in der Bahnhöhe von GOCE gegenüber dem der Kernfunktion  $S$  zur Berechnung von  $T$  auf dem Erdboden. Dies hat einen deutlichen Sprung der Kernfunktion  $K_{zz}$  auf null an der Abbruchstelle  $\psi_0$  zur Folge und erzeugt eine höhere Schwingung im zugehörigen Spektrum. Das Ausschwingen der durch die regionale Anwendung deformierten spektralen Gewichte ist trotz seiner Größe für die Berechnung der Tensor-komponenten  $T_{zz}^R$  bei Abbruchradien ab etwa  $3.5^\circ$  (im Bereich des zweiten Nulldurchgangs der Kernfunktion oder größer) unkritisch, da der Signalbeitrag mit wachsender Frequenz sehr schnell abnimmt (vgl. Tabelle 2.1). Kernmodifikationen, die hinsichtlich eines minimalen Vernachlässigungsfehlers optimiert wurden (z. B. Meissl, 1971b; Sjöberg, 1991), können die besprochenen Effekte durch Veränderung der Eigenschaften der Kernfunktion an der Abbruchstelle reduzieren, aber nicht vollständig vermeiden, da stets ein harter Abbruch der Kernfunktion vorliegt.

Zusammenfassend lässt sich für die regionale Anwendung des Integrationsverfahrens sagen, dass der Abbruch der Kernfunktion einen Effekt auf die spektrale Gewichtung der Eingangsdaten hat. Zudem können sich, wie bereits in Abschnitt 3.4.5 erläutert, größere Vernachlässigungsfehler ergeben, wenn die Kernfunktion an einer ungünstigen Stelle abgebrochen wird. Bei Abbruch der Kernfunktion in den Nullstellen ergeben sich lokale Minima in Teilen der Varianz (3.51) bzw. (5.12), s. a. (Heck, 1979; Heck und Grüniger, 1983). Demzufolge führt ein größeres Integrationsgebiet nicht immer zu einer besseren Approximation, dies wird auch von der numerischen Bestimmung der Varianz auf Basis von Gradvarianzen bestätigt, siehe Abb. 9.12 in Abschnitt 9.3.1. Die in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen praktischen Berechnungen zeigen, dass durch Integration über ein Eingangsdatengebiet, das für alle Berechnungspunkte identisch ist, vergleichbare oder sogar bessere Ergebnisse erzielt werden können als bei einer Integration mit konstantem Abbruch der Kernfunktion im ersten oder zweiten Nulldurchgang (Kieler, 2006; Wolf und Kieler, 2006). Ein Abbruch der Kernfunktion an anderer Stelle verschlechtert ohnehin das Ergebnis. Wird als Integrationsgebiet stets das gesamte Eingangsdatengebiet gewählt, hängt die Abbruchstelle  $\psi_0$  vom Azimut ab und die hier dargestellten Zusammenhänge sind formal nicht mehr gültig. Es wird aber angenommen, dass die diskutierten Auswirkungen des Abbruchs der Kernfunktion auf die spektralen Gewichte  $s_n$  in der Berechnung der Elemente des Tensors  $T_{[ij]}^R$  in der Bahnhöhe von GOCE gering sind, wenn für die Berechnungspunkte ein Abstand vom Gebietsrand in der Größenordnung von  $3.5^\circ$  eingehalten wird.

### 5.1.6 Verarbeitung von Punktwerten und Blockmittelwerten

Die dargestellte Berechnung der Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}^R$  setzt aufgrund der Integration theoretisch kontinuierlich vorhandene Punktschwereanomalien  $\Delta g^R$  als Beobachtungen voraus. In der praktischen Umsetzung können hingegen lediglich diskret verteilte Daten eingesetzt werden. Für Beobachtungssätze mit geringer Auflösung (z. B.  $15'$ ) werden Blockmittelwerte  $\overline{\Delta g}^R$  (vgl. Abschnitt 2.1.5) aus höher aufgelösten, diskret verteilten Punktwerten berechnet, um die Signalinformation eines Blockelementes  $\Delta\sigma$  repräsentativ wiederzugeben. Bei ausreichender Auflösung der Beobachtungen können direkt Punktwerte verwendet werden.

In der Integration sind die Kernfunktionen (5.8) bei Verwendung von Blockmittelwerten anzupassen (Torge, 2001, S. 284). Bei der Blockmittelwertbildung wird von Punktwerten in winkelgleichen Kompartimenten eines geographischen Gitters ausgegangen, vgl. Abschnitt 2.1.5. Ein Problem dabei ist, dass der zugehörige sphärische Mittelwertoperator anisotrop ist (Heck, 1979, S. 62) und daher nicht spektral allein in Abhängigkeit vom sphärisch-harmonischen Grad  $n$  dargestellt werden kann. Für die Berechnung der Kernfunktionen für Blockmittelwerte wird daher anstelle der winkelgleichen Kompartimente von einer Kugelkappe (Abb. 3.1) mit gleichem Flächeninhalt ausgegangen, für die der Mittelwertoperator auf der Kugel isotrop ist (Meissl, 1971a). Der Radius  $\psi_0$  der Kugelkappe ergibt sich durch Gleichsetzen der Fläche  $F_{\varphi,\lambda} = \Delta\varphi\Delta\lambda\cos\bar{\varphi}$  (winkelgleiches Kompartiment eines Gebietes mit der mittleren ellipsoidischen Breite  $\bar{\varphi}$ ) mit der Fläche  $F_{\psi_0} = 2\pi(1 - \cos\psi_0)$  der Kugelkappe auf der Einheitskugel zu

$$\cos\psi_0 = 1 - \frac{F_{\varphi,\lambda}}{2\pi}. \quad (5.37)$$

Aufgrund der Isotropie des Mittelwertoperators für die Kugelkappe kann die Glättung der ursprünglichen Punktwerte im Spektralbereich mit Einführung der Kugelflächenfunktionen der residualen Schwereanomalie nach (2.28) folgendermaßen dargestellt werden:

$$\overline{\Delta g}^R = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \Delta g_n^R. \quad (5.38)$$

Die Dämpfungskoeffizienten  $\beta_n$  können nach (Sjöberg, 1980) mit Hilfe von Rekursionsformeln

$$\beta_n(\psi_0) = \frac{2n+1}{n+1} \cos \psi_0 \beta_{n-1}(\psi_0) - \frac{n-2}{n+1} \beta_{n-2}(\psi_0) \quad (5.39)$$

mit den Startwerten  $\beta_0 = 1$  und  $\beta_1 = (1 + \cos \psi_0)/2$  berechnet werden. Abbildung 5.9 zeigt Koeffizienten  $\beta_n$  für verschiedene Kompartimentsgrößen. Die Anwendung von (5.38) zur Berechnung von Blockmittelwerten ist eine Näherung der tatsächlichen Mittelung auf Basis winkelgleicher Kompartimente. Bei ausreichend kleinen Kompartimentsflächen und Vermeidung der Gebietslage in Polnähe ist die Näherung zulässig (Wenzel, 1985).

Die reziproken Koeffizienten  $1/\beta_n$  werden für die Berechnung der Kernfunktionen  $K_{ij}^{\text{BM}}$  in (5.8) eingeführt, um die Verwendung mittlerer Schwereanomalien  $\overline{\Delta g}^R$  in der Integration zu berücksichtigen. Exemplarisch ergibt sich für die Kernfunktion der radialen Tensorkomponente

$$K_{zz}^{\text{BM}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \frac{(n+1)(n+2)}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{\beta_n} s_n P_n(\cos \psi). \quad (5.40)$$

Zur Vermeidung von numerischen Instabilitäten bei der praktischen Berechnung ist darauf zu achten, dass die Koeffizienten  $1/\beta_n$  nur bis zu dem Grad  $n_\beta$  verwendet werden, für den  $\beta_{n_\beta} \gg 0$  gilt. Dies ist bei der Berechnung der Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE unproblematisch, da die hochfrequenten Signale so stark abgeschwächt sind, dass es ausreicht, die Summation in (5.40) auf  $n_{\text{max}} = 500$  zu beschränken. Für die in dieser Arbeit verwendete maximale Blockgröße von 30' gilt dann  $\beta_n > 0.5$ .

Eine Vernachlässigung der Faktoren  $1/\beta_n$  in der Berechnung der Kernfunktion wird auch als Diskretisierungsfehler bezeichnet (Heck, 1979; Heck und Grüniger, 1983, 1987). Testrechnungen für die in Abschnitt 7.5 beschriebenen Szenarien haben ergeben, dass die Vernachlässigung des Faktors  $1/\beta_n$  für Auflösungen von 30' Fehler von etwa maximal 1 mE in der Zielgröße erzeugen. Dieser Zahlenwert wird auch durch die Berechnung des Diskretisierungsfehlers auf Basis der Signalgradvarianzen aus dem TSCHERNING-RAPP-Modell bestätigt.

## 5.2 Kollokation nach kleinsten Quadraten

Die Approximation des Signals mit Hilfe der Kollokation erfolgt auf Basis residualer Daten  $\Delta g^R$  nach (3.81). Die in Abschnitt 3.1 eingeführte und in Abschnitt 3.5.2 im Rahmen der Kollokation angewendete Methode der Remove-Restore-Technik wird dabei zur Kombination eines GPM mit regionalen terrestrischen Daten eingesetzt. Es werden zunächst, wie beim Integrationsverfahren (Abschnitt 5.1), Elemente des residualen Tensors  $T_{[ij]}^R$  berechnet, die anschließend mit Hilfe der Information des im Remove-Schritt eingesetzten GPM zu  $T_{[ij]}$  restituiert werden.

### 5.2.1 Prädiktion der Zielgrößen und ihrer Varianzen

Ausgehend von der Signalprädiktion des Störpotentials wird Gleichung (3.85) für eine Komponente  $T_{ij}$  des Tensors  $T_{[ij]}$  umgeformt zu

$$\hat{T}_{ij} = \hat{T}_{ij}^M + \hat{T}_{ij}^R \quad (5.41)$$

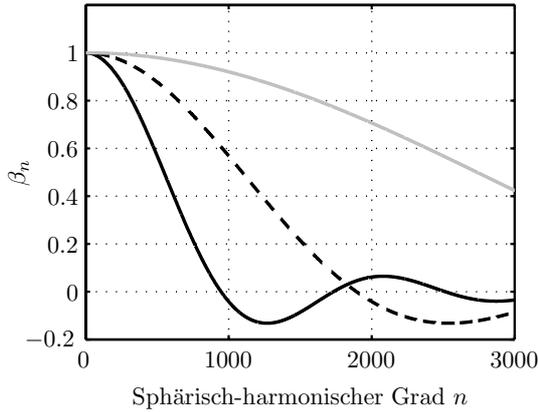
mit

$$\hat{T}_{ij}^R = C_{T_{ij}^R \Delta g^R} \left( C_{\Delta g^R \Delta g^R} + C_{\epsilon_{\Delta g^T} \epsilon_{\Delta g^T}} \right)^{-1} \Delta g^R. \quad (5.42)$$

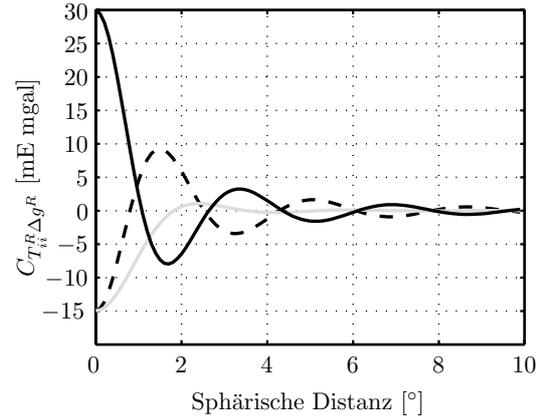
Der Summand  $\hat{T}_{ij}^M$  ergibt sich auf Basis des GPM, wie in Abschnitt 2.1.4 angegeben. Entsprechend Gleichung (3.86) gilt für die Kovarianz des Rauschens einer Komponente  $T_{ij}$

$$C_{\epsilon_{\hat{T}_{ij}} \epsilon_{\hat{T}_{ij}}} = C_{T_{ij}^R T_{ij}^R} - C_{T_{ij}^R \Delta g^R} \left( C_{\Delta g^R \Delta g^R} + C_{\epsilon_{\Delta g^T} \epsilon_{\Delta g^T}} \right)^{-1} C_{\Delta g^R T_{ij}^R}. \quad (5.43)$$

Die Kovarianzen  $C_{T_{ij}^R T_{ij}^R}$ ,  $C_{T_{ij}^R \Delta g^R}$  und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}$  in (5.42) und (5.43) sind lokale Kovarianzfunktionen und werden unter Anwendung des Kovarianz-Fortpflanzungsgesetzes (2.65) aus der Kovarianzfunktion (3.82) des residualen Störpotentials berechnet. Es gehen bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\text{max}}$  die Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{TM})$  des für die Remove-Restore-Technik verwendeten GPM und für höhere Grade  $n > n_{\text{max}}$  Signalgradvarianzen  $\sigma_n^2(T)$  ein, für die eine geeignete Modellierung zu wählen ist. In der vorliegenden Arbeit wird das



**Abbildung 5.9.** Dämpfungskoeffizienten  $\beta_n$  für Blockgrößen der Auflösung von 6' (—, grau), 15' (- - -, schwarz) und 30' (—, schwarz) bei einer ellipsoidischen Breite von  $\bar{\varphi} = 47.5^\circ$ .



**Abbildung 5.10.** Kreuzkovarianzfunktionen  $C_{T_{ii}^R \Delta g^R}(\psi, \alpha = 0)$ ,  $i = x$  (- - -),  $i = y$  (—, grau),  $i = z$  (—), Kombination terrestrischer Daten mit einem GPM.

TSCHERNING-RAPP-Modell (2.63) verwendet, s. a. (Arabelos et al., 2007). Es sei bemerkt, dass für die Berechnung der Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  in der Höhe null die hochfrequenten Signalanteile in der Modellierung der Kovarianzen entscheidend sind, weshalb dann das Signalgradvarianzmodell im Hinblick auf eine geeignete Modellierung zu untersuchen wäre, s. a. (Heck, 1979, S. 67). In dieser Studie kann hierauf verzichtet werden, da die residualen Tensorkomponenten in der Bahnhöhe von GOCE berechnet werden und deshalb die Modellierung des kurzwelligen Signalanteils ( $n > 360$ ) nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Die Parameter  $A$  und  $R_B$  des TSCHERNING-RAPP-Modells (2.63) werden nach der Methode der kleinsten Quadrate für eine bessere Anpassung der analytischen Kovarianzfunktion an die Werte einer empirisch berechneten Kovarianzfunktion bestimmt (Knudsen, 1987), vgl. Abschnitt 9.1. Diese Parameter werden im Gegensatz zu den globalen Parametern aus (2.63) als lokal bezeichnet.

Zur Berechnung der Kovarianzwerte auf Basis des Modells werden geschlossene Ausdrücke eingesetzt (Tscherning und Rapp, 1974; Tscherning, 1976b). Exemplarisch werden hier lediglich die Reihenentwicklungen der Kovarianzfunktion

$$C_{\Delta g \Delta g}(\psi_{PQ}, r_P, r_Q) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{R^2} \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} \sigma_n^2(T(R)) P_n(\cos \psi_{PQ}) \quad (5.44)$$

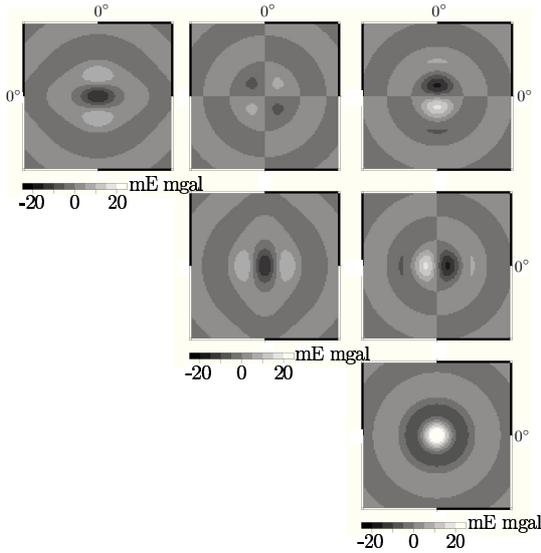
für die Schwereanomalien auf Basis der Signalgradvarianzen  $\sigma_n^2(T(R))$  des Störpotentials und der Kovarianzfunktion

$$C_{T_{zz} T_{zz}}(\psi_{PQ}, r_P, r_Q) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{((n+1)(n+2))^2}{R^4} \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+3} \sigma_n^2(T(R)) P_n(\cos \psi_{PQ}) \quad (5.45)$$

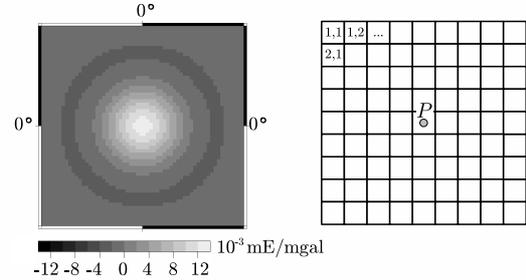
für die radiale Tensorkomponente  $T_{zz}$  angegeben, vgl. Abschnitt 2.2.2. Durch Anwendung des Kovarianzfortpflanzungsgesetzes mit den Beziehungen (2.24) und (2.25) ergibt sich für die Kreuzkovarianzfunktion

$$C_{T_{zz} \Delta g}(\psi_{PQ}, r_P, r_Q) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{R^2 r_P} \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} \sigma_n^2(T(R)) P_n(\cos \psi_{PQ}) . \quad (5.46)$$

Mit Ausnahme von  $T_{zz}$  ergeben sich für alle Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  aufgrund der enthaltenen Ableitungen in horizontaler Richtung anisotrope Kovarianzfunktionen. Deswegen muss bei der Berechnung der Kovarianzwerte von zwei Punkten  $P$  und  $Q$  das Azimut  $\alpha$  der Verbindung zwischen beiden Punkten berücksichtigt werden. Die entsprechenden Kovarianzausdrücke sind in (Tscherning, 1976b; Krarup und Tscherning, 1984) für ein lokales erdfestes System angegeben, die Transformation der Kovarianzausdrücke des Tensors  $T_{[ij]}$  in andere kartesische Referenzsysteme findet sich in (Tscherning, 1993). In Abb. 5.10 sind die Kreuzkovarianzfunktionen zwischen den residualen Hauptdiagonalkomponenten des Tensors  $T_{[ij]}^R$  in der Bahnhöhe von GOCE und den terrestrischen Schwereanomalien  $\Delta g^R$  für  $\alpha = 0$  dargestellt. Als GPM wurde das SYNGPM360I eingesetzt (vgl. Abschnitt 7.3), im TSCHERNING-RAPP-Modell wurden lokale Parameter verwendet (vgl. Abschnitt 9.1). Die Kovarianzfunktion der radialen Tensorkomponente  $T_{zz}$  hat eine deutlich größere Amplitude als die der horizontalen Komponenten. Die



**Abbildung 5.11.** Kreuzkovarianzfunktionen  $C_{T_{ij}^R \Delta g^R}(\psi, \alpha)$  aller Gitterpunkte zum Referenzpunkt im Zentrum, Einheit mE-mgal, Kombination terrestrischer Daten mit dem SYNGPM360I; die sprunghaften Übergänge werden durch die groben Skalierungsschritte verursacht.



**Abbildung 5.12.** Zweidimensionale Anordnung der Gewichtsmatrix  $W^{KKQ}$  für einen zentralen Prädiktionsspunkt P.

Kovarianzfunktionen eines zweidimensionalen Gitters auf der Kugel sind zur Veranschaulichung der auftretenden Anisotropien in Abb. 5.11 dargestellt.

### 5.2.2 Aspekte der Gewichtung

Die Aspekte der Gewichtung, die aus der Anwendung der Kollokation resultieren, werden im Folgenden auf Basis der Berechnung des residualen Störpotentials diskutiert. Die Schlussfolgerungen gelten auch für die Berechnung der Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$ . In der Kollokation werden die residualen Beobachtungen  $\Delta g^R$  entsprechend (3.84) mit der Gewichtsmatrix

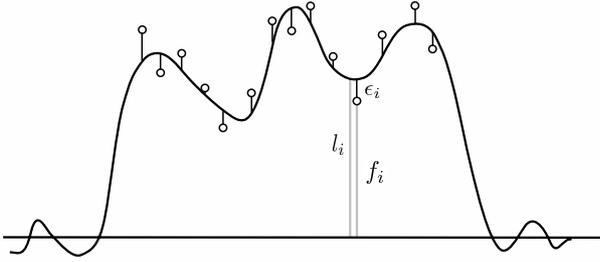
$$W^{KKQ} = C_{T^R \Delta g^R} \left( C_{\Delta g^R \Delta g^R} + C_{\epsilon_{\Delta g^T} \epsilon_{\Delta g^T}} \right)^{-1} \quad (5.47)$$

zur Berechnung des residualen Störpotentials  $\hat{T}^R$  gewichtet. Geht man von Beobachtungen aus, die in einem geographischen Gitter mit  $n_\lambda$  und  $n_\varphi$  Werten in Breiten- und Längensrichtung liegen, lassen sich die  $n = n_\lambda n_\varphi$  Werte der Gewichtsmatrix  $W^{KKQ}$  gemäß dem geographischen Gitter je Berechnungspunkt zweidimensional anordnen. Die umsortierte Gewichtsmatrix  $W_{2D}^{KKQ}$  repräsentiert dann eine zweidimensionale Kernfunktion, mit der die Beobachtungen gefaltet werden. Dies ist in Abb. 5.12 für einen zentralen Berechnungspunkt dargestellt. Die Gewichtsmatrix  $W_{2D}^{KKQ}$  ändert sich, wenn sich die Auflösung, die Gebietsgröße oder die Genauigkeit der Beobachtungen ändert.

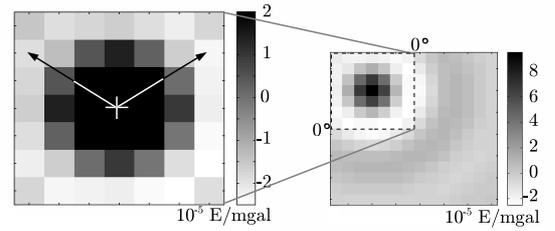
An den Rändern des Beobachtungsgebietes ist bei Anwendung der Kollokation zu beachten, dass implizit extrapolierte Daten in die Berechnung einfließen (de Min, 1995, 1996). Aus regional begrenzt und diskret vorliegenden, residualen Schwereanomalien  $\Delta g_{\text{regional}}^R$  lassen sich mit Hilfe der Kollokation prinzipiell global und kontinuierlich residuale Schwereanomalien  $\hat{\Delta} g_{\text{global}}^R$  schätzen:

$$\hat{\Delta} g_{\text{global}}^R(Q') = C_{\Delta g_{\text{global}}^R \Delta g_{\text{regional}}^R} \left( C_{\Delta g_{\text{regional}}^R \Delta g_{\text{regional}}^R} \right)^{-1} \Delta g_{\text{regional}}^R(Q). \quad (5.48)$$

Ein regionaler Ausschnitt des Ergebnisses ist schematisch in Abb. 5.13 dargestellt, in (5.48) wurde das Rauschen der Beobachtungen nicht berücksichtigt. Durch Extrapolation ist der Übergang auf null an den Rändern des regionalen Gebietes stetig. Dies ergibt sich im Kollokationsansatz durch die Minimierung der Norm des Signals (s. Abschnitt 6.1); die Kollokation hat die Eigenschaft, das Signal zu glätten.



**Abbildung 5.13.** Die Beobachtung  $l_i$  ergibt sich gemäß (3.57) aus dem Signalwert  $f_i$  und dem Rauschwert  $\epsilon_i$ . In der Kollokationslösung werden die Norm des Signals und die Varianz minimiert (s. Abschnitt 6.1), durch implizite Extrapolation ist der Übergang an den Gebietsrändern stetig.



**Abbildung 5.14.** Gewichtungsfaktoren  $W_{2D}^{KKQ}$ , die sich bei Auswertung von (5.47) für einen dezentralen Berechnungspunkt ergeben ( $7^\circ \times 7^\circ$  Gebiet, Auflösung  $0.5^\circ$ , Szenario 1K, vgl. Kapitel 7). Die Gewichte im gleichen sphärischen Abstand vom Berechnungspunkt (+) unterscheiden sich.

Auf die global und kontinuierlich vorliegenden residualen Schwereanomalien (5.48) wird die Integration (3.7) zur Berechnung des residualen Störpotentials  $\hat{T}_P^R$  angewendet, um den Einfluss der extrapolierten Daten in der regionalen Anwendung der Kollokation zu veranschaulichen. Es ergibt sich

$$\hat{T}_P^R = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi_{PQ'}) \hat{\Delta}g_{\text{global}}^R(Q') d\sigma_{Q'} . \quad (5.49)$$

Gleichung (5.49) wird durch Einsetzen der LEGENDRE-Reihen für die STOKES-Funktion nach (3.5) und für die Kovarianzfunktion nach (2.60) entsprechend (de Min, 1995) umgeformt<sup>1</sup> zu

$$\begin{aligned} \hat{T}_P^R &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi_{PQ'}) C_{\Delta g_{\text{global}}^R \Delta g_{\text{regional}}^R} d\sigma_{Q'} \left( C_{\Delta g_{\text{regional}}^R \Delta g_{\text{regional}}^R} \right)^{-1} \Delta g_{\text{regional}}^R(Q) \\ &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi_{PQ'}) \sum_{n'=2}^{\infty} \sigma_{n'}^2(\Delta g^R) P_{n'}(\cos \psi_{Q'Q}) d\sigma_{Q'} \left( C_{\Delta g_{\text{regional}}^R \Delta g_{\text{regional}}^R} \right)^{-1} \Delta g_{\text{regional}}^R(Q) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \sigma_n^2(\Delta g^R) P_n(\cos \psi_{PQ}) \left( C_{\Delta g_{\text{regional}}^R \Delta g_{\text{regional}}^R} \right)^{-1} \Delta g_{\text{regional}}^R(Q) \\ &= C_{T^R \Delta g^R} \left( C_{\Delta g_{\text{regional}}^R \Delta g_{\text{regional}}^R} \right)^{-1} \Delta g_{\text{regional}}^R(Q) . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Die letzte Umformung in (5.50) entspricht der Anwendung des Kovarianz-Fortpflanzungsgesetzes (2.65). Man erhält schließlich die Kollokationsformel zur Berechnung des Störpotentials auf Basis der regional vorliegenden Beobachtungen  $\Delta g_{\text{regional}}^R$ . Diese Herleitung zeigt, dass bei der regionalen Anwendung der Kollokation implizit die in Abb. 5.13 schematisch dargestellten extrapolierten Werte eingehen. In (de Min, 1995, 1996) wird zur Vermeidung der impliziten Extrapolation eine Veränderung der Kreuzkovarianzfunktion vorgeschlagen. Dies verändert aber innerhalb der laufenden Berechnung die Kovarianzbeziehungen (und damit die Norm des Hilbertraumes mit reproduzierendem Kern, vgl. Abschnitt 6.1) und die für die Kollokation vorausgesetzten Eigenschaften sind nicht mehr gewährleistet. Außerdem erzeugt ein abrupter Abbruch der Gewichtsfunktion unerwünschte periodische Fehler in der Lösung, vgl. Abschnitt 5.1.5. Daher wird auf eine solche Modifikation der Kreuzkovarianzfunktion verzichtet. Berechnungspunkte, die zu stark von den extrapolierten Werten beeinflusst werden, also zu nah am Rand des Gebietes liegen, erhalten eine größere Varianz, so dass aus der Bestimmung der Varianz auf Basis verschieden großer Gebiete ermittelt werden kann, wann der Effekt vernachlässigbar ist, vgl. Abschnitt 9.3.2.

<sup>1</sup>Kern der hier nicht im Detail wiedergegebenen Umformung ist die Darstellung der LEGENDRE-Polynome in Abhängigkeit von den Kugelflächenfunktionen (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 33) und die Anwendung ihrer Orthogonalitätsrelationen. Der Ansatz beruht auf der Darstellung der Kovarianzmatrix  $C_{\Delta g_{\text{global}}^R \Delta g_{\text{regional}}^R}$  als Summe von Gradvarianzen. Der Übergang von der diskreten zur kontinuierlichen Anwendung der Kollokation ist hierbei mathematisch nicht vollkommen korrekt dargestellt. Es soll im Wesentlichen die Auswirkung des Verfahrens beschrieben werden.

Im Hinblick auf den Vergleich zwischen dem Integrationsverfahren und der Kollokation lässt sich zusammenfassen, dass in der Gewichtsmatrix  $W_{2D}^{KKQ}$ , die nur auf die regional begrenzt vorliegenden Beobachtungen angewendet wird, Gewichtungsfaktoren zur Modellierung eines glatten Übergangs am Gebietsrand implizit enthalten sind. Es ergeben sich für Beobachtungen, die im gleichen Abstand zum Berechnungspunkt, aber unterschiedlich nahe am Gebietsrand liegen, verschieden große Gewichtungsfaktoren. Dies ist in Abb. 5.14 für einen dezentral liegenden Berechnungspunkt veranschaulicht. Die Gewichtungsfaktoren werden individuell für jeden Berechnungspunkt ermittelt und sind nicht allein vom sphärischen Abstand (und vom Azimut) zum Beobachtungspunkt abhängig, sondern auch von der Datenverteilung der Beobachtungen.

### 5.2.3 Verarbeitung von Punktwerten und Blockmittelwerten

Die bisherigen Betrachtungen wurden für Punktwerte als Beobachtungen durchgeführt. Zur Verarbeitung von Blockmittelwerten sind die Kovarianzfunktionen gegenüber denen der Punktwerte anzupassen. Prinzipiell kann die Berechnung von Kovarianzen für Blockmittelwerte nach (5.1.6) durch numerische Integration erfolgen. Da dies gerade in Anbetracht der Azimutabhängigkeit der Kovarianzfunktionen der Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  sehr rechenzeitintensiv ist (Denker, 1988), bietet es sich an, die Kovarianz der Blockmittelwerte  $\bar{T}$  des Störpotentials entsprechend (5.38) durch Einführung der Dämpfungskoeffizienten  $\beta_n$  aus (5.39) in Gleichung (2.62) wie folgt zu berechnen:

$$C_{\bar{T}\bar{T}}(\psi, r_P = R, r_Q = R) = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n^2 \sigma_n^2(T) \left( \frac{R^2}{R^2} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi_{PQ}). \quad (5.51)$$

Nachteilig dabei ist, dass für diese Reihenentwicklung keine geschlossenen Ausdrücke vorliegen. Zur Berechnung der Kovarianzwerte der Blockmittelwerte muss die Summation (5.51) bis zu einem genügend hohen Grad durchgeführt werden. Hängen die Kovarianzwerte allein vom sphärischen Abstand ab, sollte eine Tabelle der Kovarianzwerte in Abhängigkeit von  $\psi$  zur Interpolation bereitgestellt werden. Aufgrund der in dieser Arbeit für die Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  zu beachtenden Azimutabhängigkeit ist auf eine Tabellierung der Kovarianzwerte in Abhängigkeit von zwei Parametern ( $\psi$  und  $\alpha$ ) bzw. von drei Parametern ( $\psi$ ,  $\alpha$  und  $h$ ) verzichtet worden. Stattdessen ist nach Vorschlag von (Tscherning und Rapp, 1974; Tscherning, 1974) der Kovarianzwert eines Blockmittelwertes durch Berechnung in einer gewissen Höhe  $h_{BM} > 0$  approximiert worden, s. a. (Jekeli, 1981a; Sünkel, 1981; Tsaoussi, 1989). Ein geeigneter Wert der Höhe  $h_{BM}$  kann empirisch ermittelt werden, s. Abschnitt 9.1. Auf diese Weise wird der Faktor  $\beta_n^2$  in Gleichung (5.51) durch den Faktor

$$\beta_n^2 \approx \left( \frac{R^2}{(R + h_{BM})^2} \right)^{n+1} \quad (5.52)$$

angenähert. Allerdings kann mit der bei wachsendem  $n$  monoton abnehmenden Funktion (5.52) nicht das Schwingungsverhalten der  $\beta_n$  aus (5.39) modelliert werden. Eine Gegenüberstellung der aus der Anwendung von (5.39) und (5.52) jeweils resultierenden Kovarianzfunktionen erfolgt in Abschnitt 9.1. Die Approximation (5.52) hat den Vorteil, dass die Kovarianzen von Blockmittelwerten rechentechnisch effizient mit Hilfe der geschlossenen Formeln aus (Tscherning und Rapp, 1974; Tscherning, 1976b) anstelle der Reihenentwicklung (5.51) berechnet werden können. Das Verfahren wurde beispielsweise in (Arabelos, 1980) zur Geoidberechnung aus Blockmittelwerten praktisch umgesetzt.

## 6 Gegenüberstellung der Methoden

Die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden untersuchten Methoden - Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung und Kollokation nach kleinsten Quadraten - zur Berechnung des Tensors  $T_{[ij]}^R$  werden im Folgenden erläutert. Dazu wird das zugrunde liegende Approximationskonzept beider Methoden diskutiert. Die dargestellten Zusammenhänge beziehen sich dabei auf die Berechnung des Störpotentials  $T$ , die Schlussfolgerungen gelten auch für die Berechnung der Elemente des Tensors  $T_{[ij]}^R$ . Die Beobachtungen liegen global und kontinuierlich oder regional und diskret vor, die aus beiden Methoden resultierenden Gewichtungsfaktoren werden jeweils miteinander verglichen.

### 6.1 Diskussion der Approximationsansätze

Die Schwerefeldmodellierung lässt sich im Kontext der Funktionalanalysis als Approximationsaufgabe beschreiben, bei der aus endlich vielen diskreten (Beobachtungs-) Punkten eine kontinuierliche (Ziel-)Funktion, das Störpotential  $T$ , abgeleitet wird, z. B. (Heuser und Wolf, 1986). Die Approximationsaufgabe lässt sich in einem Hilbertraum geometrisch interpretieren. In (Moritz, 1980, S. 25) wird der Hilbertraum als Verallgemeinerung des euklidischen Raumes auf unendlichdimensionale Räume veranschaulicht. Ein Hilbertraum ist ein vollständiger Innenproduktraum, die Norm seiner Elemente ist über die Festlegung des Innenproduktes (Skalarproduktes) definiert (Heuser, 2006, S. 149). Die Definition des Innenproduktes und der Norm erlaubt es, die geometrischen Vorstellungen aus den endlichdimensionalen Räumen auf den unendlichdimensionalen Raum zu übertragen. Eine Verallgemeinerung des Begriffes des Abstandes hilft beispielsweise zu klären, wie gut eine Funktion eine andere approximiert, d. h. wie nah sie der anderen Funktion ist (Heuser und Wolf, 1986, S. 27).

Für die Darstellung einer kontinuierlichen Schwerefeldfunktion werden theoretisch unendlich viele Basisfunktionen benötigt. Die Entwicklung einer Schwerefeldfunktion in Kugelfunktionen (vgl. Abschnitt 2.1.4) bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $\infty$  verdeutlicht dies. Die (normierten) Kugelflächenfunktionen (2.6) bilden dabei die orthonormalen Basisfunktionen des Hilbertraumes (Tscherning, 1978, S. 160), mit denen ein Element des Hilbertraumes dargestellt werden kann.

Eine ausführliche Darstellung des Hilbertraumes findet sich in (Meschkowski, 1962). Die Arbeiten von (Krarup, 1969; Meissl, 1975; Tscherning, 1978; Moritz, 1980) legten die Grundlagen zur Anwendung der Funktionalanalysis in der physikalischen Geodäsie und zur geometrischen Interpretation der Kollokation. Die Kollokationslösung ist in einem Hilbertraum mit reproduzierendem Kern  $K$  definiert, der zwei Bedingungen erfüllt: Der Kern  $K(P, Q)$  selbst, betrachtet als Funktion von  $P$  für einen festen Punkt  $Q$ , ist ein Element des Hilbertraumes. Ein Innenprodukt des Kerns mit einer Funktion des Hilbertraumes, ebenfalls betrachtet für einen festen Punkt  $Q$ , reproduziert die Funktion (Moritz, 1980, S. 196).

Die beiden in dieser Arbeit verwendeten Methoden, Integrationsverfahren und Kollokation, werden im Folgenden bezüglich ihrer Eigenschaft zur Approximation der Zielfunktion diskutiert.

In (Tscherning, 1986) werden die Verfahren zur Schwerefeldapproximation durch Linearkombination bestimmter Funktionen  $B_i (i = 1, \dots, n)$  in drei Gruppen A, B und C unterteilt. Ausgehend von der Approximation

$$\hat{T}_P = \sum_{i=1}^n B_i a_i = \underset{1, n}{\underline{B}} \underset{n, 1}{\underline{a}} \quad (6.1)$$

des Störpotentials wird unterschieden in:

Gruppe A: Eine Anzahl von Funktionen  $B_i$  wird gewählt, die gleich der Anzahl der Beobachtungen oder auch geringer sein kann. Die Koeffizienten  $a_i$  sind zu bestimmen. Dies entspricht der Kugelfunktionsentwicklung des globalen Schwerefeldes mit den Kugelflächenfunktionen als Funktionen  $B_i$ . Die Kugelfunktionskoeffizienten können durch Integration der Beobachtungswerte oder in einer Ausgleichung nach kleinsten

Quadraten, die auch als sphärisch-harmonische Analyse bezeichnet wird, bestimmt werden. Diese Approximationsmethode ist hier lediglich der Vollständigkeit halber genannt und wird im Folgenden nicht weiter besprochen.

Gruppe B: Die Koeffizienten  $a_i$  sind bekannt und die Funktionen  $B_i$  liegen implizit fest. Dieser Fall entspricht dem Integrationsverfahren in diskreter Auswertung. Die Koeffizienten  $a_i$  stellen die  $n$  diskreten Beobachtungswerte dar, die Funktionen  $B_i$  die  $n$  diskreten Funktionswerte der Kernfunktion der Integration.

Gruppe C: Die Funktionen  $B_i$  werden so gewählt, dass die Approximation  $\hat{T}_P$  genau mit den gegebenen Beobachtungen übereinstimmt, wenn diese fehlerfrei sind. Zu dieser Gruppe gehört die Kollokation. Die Koeffizienten  $a_i$  werden in einem Hilbertraum mit reproduzierendem Kern  $K$  unter der Bedingung der minimalen Norm durch Lösung eines Gleichungssystems gefunden (Krarup, 1969; Tscherning, 1978). Die Funktionen  $B_i$  entsprechen den diskreten Realisierungen der reproduzierenden Kernfunktion  $K$  bzw. ihrer Fortpflanzung mit einem linearen Operator  $L$ . In der Kollokation nach kleinsten Quadraten wird  $B_i$  mit den Kovarianzfunktionswerten zwischen Ziel- und Beobachtungsgröße identifiziert.

Bei der Festlegung der Kernfunktionen im Integrationsverfahren aus Gruppe B wird formal vorausgesetzt, dass die Beobachtungen global und unendlich dicht vorliegen. Die Integration kann in der Praxis allerdings nur diskret und aufgrund eingeschränkt vorliegender Daten nur regional begrenzt ausgewertet werden. Eine Anpassung der Kernfunktion für die regionale Auswertung erfolgt in der Regel nicht<sup>1</sup>. Die Datenauflösung der diskret verteilten Punkte wird nur dann berücksichtigt, wenn sie als Blockmittelwerte eingeführt werden und die Kernfunktion beispielsweise nach (5.40) verändert wird. Von dieser Anpassung abgesehen, wird eine identische Kernfunktion, unabhängig von der räumlichen Verteilung der Beobachtungen, verwendet.

Anders verhält es sich bei den Approximationsmethoden der Gruppe C: In Abhängigkeit von der räumlichen Verteilung der Beobachtungen werden Koeffizienten  $a_i$  zur Kombination mit den Werten des reproduzierenden Kerns  $K$  oder seiner linearen Funktionale  $L(K)$  gefunden. Die Konstanten  $a_i$  werden über das Gleichungssystem

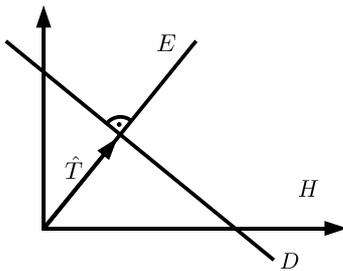
$$\underline{Q} \underline{a} = \underline{f} \quad (6.2)$$

$$\text{mit } \underline{f} = (f_i), \underline{Q} = (Q_{ij}) \quad \text{und} \quad f_i = L_f^i(T), \quad Q_{ij} = L_f^i L_f^j(K)$$

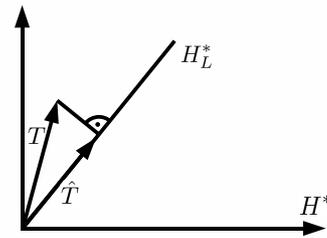
bestimmt. Dabei gehen  $n$  Beobachtungen  $\underline{f}$  als lineare Funktionale  $\underline{L}_f(T)$  des Störpotentials  $T$  ein, dies können z. B. Schwereanomalien sein. Die Kernfunktion  $K$  wird entsprechend bezüglich zweier Beobachtungen  $f_i$  und  $f_j$  linear transformiert. Wird die Lösung von (6.2) in (6.1) eingesetzt und die Funktionen  $B_i$  durch Werte der Kovarianzfunktion  $L_f(K)$  ersetzt, entspricht dies zunächst formal der Kollokationslösung (3.66), allein die Kernfunktion  $K$  ist noch nicht definiert. In der geometrischen Interpretation legen die  $n$  Beobachtungen  $\underline{L}_f(T)$  eine Hyperebene  $D$  der Kodimension  $n$  im unendlichdimensionalen Hilbertraum  $H$  fest (Moritz, 1980, S. 207), vgl. Abb. 6.1. Alle möglichen Approximationslösungen  $\hat{T}$  von  $T$  müssen in dieser Hyperebene liegen, damit die Beobachtungen  $\underline{L}_f(T)$  exakt rekonstruiert werden. Bei Forderung der minimalen Norm der Lösung  $\hat{T}$  liegt die Lösung in der senkrechten Verbindung von Nullpunkt und Hyperebene. Die Lösung  $\hat{T}$  berechnet sich nach (6.1) als Linearkombination des reproduzierenden Kerns  $K$  bzw. seiner linearen Funktionale  $L(K)$ , die einen Unterraum  $E$  mit der Dimension  $n$  im Hilbertraum aufspannen. In (Moritz, 1980, S. 208) ist gezeigt, dass dieser Unterraum orthogonal auf der Hyperebene steht und durch den Nullpunkt geht. Die Lösung  $\hat{T}$  mit minimaler Norm liegt daher im Schnitt der Hyperebene  $D$  und des Unterraumes  $E$ , vgl. Abb. 6.1, und kann mit Hilfe von (6.2) und (6.1) berechnet werden.

Neben den genannten Eigenschaften der kleinsten Norm und der exakten Reproduktion fehlerfreier Beobachtungsdaten besitzt die Lösung  $\hat{T}$  nach (Moritz, 1980) außerdem die kleinste Fehlernorm zur wahren Lösung  $T$ . Die Menge aller linearen Funktionale  $L(T)$  bildet ebenfalls einen Hilbertraum  $H^*$ . Dieser wird als Dualraum zum Hilbertraum  $H$  der Funktion  $T$  bezeichnet. In diesem Dualraum bilden die  $n$  Beobachtungen  $\underline{L}_f(T)$  aus (6.2) einen Unterraum  $H_L^*$  der Dimension  $n$ . Die Approximation  $\hat{T}$  von  $T$  nach (6.2) und (6.1) ist, geometrisch betrachtet, die orthogonale Projektion von  $T$  auf den Unterraum  $H_L^*$  (vgl. Abb. 6.2 und Moritz, 1980, S. 211). Die Approximation besitzt den kleinsten Abstand zur wahren Lösung  $T$  und damit die kleinste Fehlernorm.

<sup>1</sup>Kernmodifikationen mit dem Ziel der Minimierung des Vernachlässigungsfehlers (3.42) können als Anpassung für eine regionale Auswertung verstanden werden, die Kernfunktion wird aber auch hier an der Grenze des Integrationsgebietes abgeschnitten.



**Abbildung 6.1.** Geometrische Interpretation der kleinsten Norm im Hilbertraum  $H$  nach (Moritz, 1980): Die Lösung  $\hat{T}$  mit minimaler Norm liegt im Schnitt der Hyperebene  $D$  und des Unterraumes  $E$ .



**Abbildung 6.2.** Geometrische Interpretation der kleinsten Fehlernorm im Dualraum  $H^*$  nach (Moritz, 1980): Die Lösung  $\hat{T}$  ist die orthogonale Projektion von  $T$  auf den Unterraum  $H_L^*$ .

Die genannten Eigenschaften gelten im Hilbertraum für jeden reproduzierenden Kern  $K$ . Die Minimierung der Fehlernorm einer kontinuierlichen Funktion wird in (Sansò und Sona, 1995) auch auf Basis des WIENERSchen Wahrscheinlichkeitsmaß diskutiert.

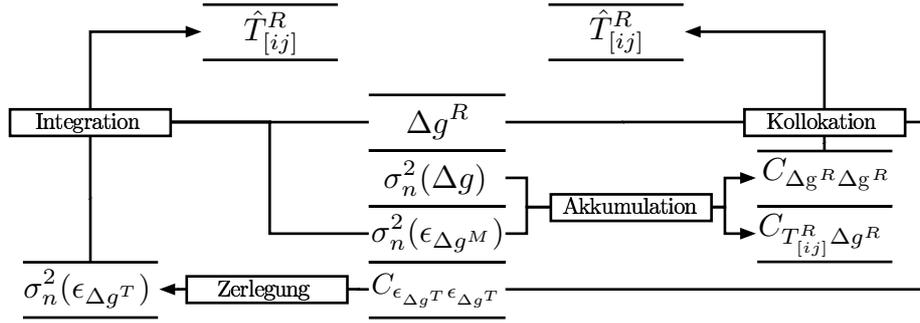
Das Gravitations- bzw. das Störpotential erfüllt im Außenraum die LAPLACE-Gleichung (2.3) und kann daher mit harmonischen Funktionen beschrieben werden. In der physikalischen Geodäsie wird deshalb von Kernfunktionen  $K$  ausgegangen, die harmonisch im Außenraum der BJERHAMMAR-Kugel mit dem Radius  $R_B$  (es gilt  $R_B < R$ , vgl. S. 17) sind. Als eine solche Kernfunktion  $K$  wird

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad (6.3)$$

gewählt (Moritz, 1980, S. 205). Um eine Lösung von (6.2) zu gewährleisten, muss  $k_n \geq 0$  gelten und die Konvergenz der Reihe (6.3) für  $r_P, r_Q \geq R_B$  erfüllt sein. Wird eine ansonsten beliebige Kernfunktion gewählt, spricht man von analytischer Kollokation (Moritz, 1980, S. 93). Über die Wahl der Kernfunktion wird die Metrik und damit die Norm des Hilbertraumes festgelegt. In der Kollokation nach kleinsten Quadraten (3.66) wird die Kernfunktion  $K(P, Q)$  mit der Kovarianzfunktion (2.62) des Störpotentials  $T$  identifiziert, um die Eigenschaft der kleinsten Fehlernorm statistisch interpretieren zu können. Die Kernfunktionen zwischen verschiedenen Schwerefeldfunktionalen wird auf Basis linearer Operatoren  $L$  entsprechend dem Kovarianz-Fortpflanzungsgesetz (2.65) abgeleitet. Die Eigenschaft der minimalen Fehlernorm kann nun als minimale Varianz interpretiert werden. Die Kollokation nach kleinsten Quadraten bietet demnach die beste Approximation im statistischen Sinne.

Um beim Übergang von diskreten zu kontinuierlichen Daten die Konvergenz der Kollokation zur Lösung  $T$  nachzuweisen, ist von global vorliegenden Beobachtungen auszugehen, da andernfalls die Eigenschaft der Homogenität und Isotropie bezüglich der Kugel nicht gegeben ist. Diese Eigenschaft ist zur Auswertung des Mittelwertes (2.57) bezogen auf die gesamte Kugeloberfläche und zur Anwendung der LEGENDRE-Transformation (2.59) für die spektrale Zerlegung der Kovarianzfunktion wichtig. Es ist anzumerken, dass im Konvergenzbeweis aus (Moritz, 1976) implizit vorausgesetzt wurde, dass das Störpotential  $T$  Element desjenigen Hilbertraumes ist, von dessen reproduzierender Kernfunktion die in (6.1) eingesetzten Funktionen  $B_i$  abgeleitet werden (Tscherning, 1977). Wird aber, wie üblich, eine Kovarianzfunktion der Form (6.3) als reproduzierende Kernfunktion gewählt, ergibt sich die Norm des Störpotentials  $T$  zu unendlich. Daher ist  $T$  kein Element dieses Hilbertraumes und die Konvergenz des Kollokationsverfahrens zur Bestimmung der Lösung ist nicht gesichert (Tscherning, 1977). Die Verwendung geglätteter Daten ermöglicht aber eine Konvergenz des Verfahrens (Krarup, 1981; Sansò und Tscherning, 1980; Barzaghi und Sansò, 1986). Die erforderliche Glättung der Daten wird durch Reduktion des RTM-Effektes (Abschnitt 3.3) erreicht (Denker, 1988).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die beiden Methoden, das Integrationsverfahren und die Kollokation, sich hinsichtlich des Approximationsansatzes unterscheiden: In der Herleitung des Integrationsverfahrens wird formal eine globale und kontinuierliche Beobachtungsfunktion vorausgesetzt; die Auswertung erfolgt dann aber auf Basis regional und diskret vorliegender Beobachtungen. Bei der Kollokation hingegen wird bereits im Ansatz von regional und diskret vorliegenden Daten ausgegangen, um die statistisch optimale Lösung mit minimaler Norm und Varianz des Signals zu berechnen.



**Abbildung 6.3.** Vergleich der Eingangsinformation bei Anwendung der Kollokation und des Integrationsverfahrens mit spektraler Gewichtung.

## 6.2 Vergleich der Gewichtung

Im Folgenden werden für das Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung (5.11) und für die Kollokation Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Gewichtung diskutiert, die sich für die Beobachtungen ergibt. Zur Steuerung der Gewichtung der eingehenden Datensätze (GPM, terrestrische Daten) in Abhängigkeit von ihrer Genauigkeit wird für beide Methoden grundsätzlich die gleiche Information verwendet, jedoch in unterschiedlicher Darstellung. Dies ist schematisch in Abb. 6.3 wiedergegeben. Bei Anwendung der Kollokation werden Kovarianzmatrizen des Signals ( $C_{T_{[ij]}^R \Delta g}$ ,  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}$ ) und des Rauschens ( $C_{\epsilon_{\Delta g^T} \epsilon_{\Delta g^T}}$ ) aufgestellt. Die Kovarianzen des (residualen) Signals werden nach (3.82) durch Akkumulation der Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M})$  des GPM und der Signalgradvarianzen  $\sigma_n^2(\Delta g)$  (TSCHERNING-RAPP-Modell) berechnet, die Kovarianzen des Rauschens der terrestrischen Daten werden im Ortsraum bereitgestellt. Bei Anwendung der spektralen Kombination im Integrationsverfahren werden die spektralen Gewichte (5.11) aus den Fehlergradvarianzen des GPM und der terrestrischen Daten ( $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})$ ) ermittelt. Hierzu ist die Kovarianzfunktion des Rauschens der terrestrischen Daten spektral zu zerlegen.

Für den Grenzfall kontinuierlicher, global vorliegender Eingangsdaten lässt sich die Kollokation spektral auf Basis von Gradvarianzen formulieren. Auf diese Weise wird im Abschnitt 6.2.1 die Gewichtung beider Methoden verglichen. Für die Anwendung auf regional begrenzt und diskret vorliegende Daten ist ein spektraler Vergleich auf Basis von Gradvarianzen nicht möglich, deswegen wird die Gewichtung in Abschnitt 6.2.2 im Ortsraum diskutiert.

### 6.2.1 Grenzfall global und kontinuierlich vorliegender Beobachtungen

Die Rechenformeln des Integrationsverfahrens gelten für kontinuierlich und global vorliegende Beobachtungen. Die Herleitung der Kollokationsformeln hingegen basiert auf diskret verteilten Beobachtungen. Im Folgenden werden die Kollokationsformeln für den Grenzfall global und unendlich dicht vorliegender Beobachtungen dargestellt (Moritz, 1976). Für diesen Fall wird die Linearkombination

$$\hat{T}_{1,1}^R(P) = h_{1,n}^R(P, Q) \frac{\Delta g^R(Q)}{n,1} \quad (6.4)$$

aus (3.58) hier auf Basis residualer Daten (3.81) durch die Integration

$$\hat{T}^R(P) = \iint_{\sigma} h^R(\psi_{PQ}) \Delta g^R(Q) d\sigma_Q \quad (6.5)$$

über die Kugelfläche  $\sigma$  mit der homogenen und isotropen Gewichtsfunktion  $h^R$  ersetzt. Werden die Kovarianzwerte in der zugehörigen WIENER-HOPF-Gleichung

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} h^R(\psi_{PQ}) \bar{C}_{\Delta g^R(Q) \Delta g^R(Q')} d\sigma_{Q'} &= C_{T^R(P) \Delta g^R(Q)} \\ \iint_{\sigma} h^R(\psi_{PQ}) (C_{\Delta g^R(Q) \Delta g^R(Q')} + C_{\epsilon_{\Delta g^T}(Q) \epsilon_{\Delta g^T}(Q')}) d\sigma_{Q'} &= C_{T^R(P) \Delta g^R(Q)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

nach (3.64) mit den Kovarianzmatrizen des residualen Signals und des Rauschens aus (3.83) als Summe der Gradvarianzen entsprechend (2.60) geschrieben, ergibt sich

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\sigma_n^2(\Delta g^R) + \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})) \iint_{\sigma} h^R(\psi_{PQ}) P_n(\cos \psi_{QQ'}) d\sigma_{Q'} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \sigma_n^2(\Delta g^R) P_n(\cos \psi_{PQ}) . \quad (6.7)$$

Die Vertauschung der Reihenfolge von der Integration und der Summation ist bei gleichmäßiger Konvergenz der Reihe (2.60) zulässig. Aufgrund der globalen Integration kann die homogene und isotrope Gewichtsfunktion  $h^R$  mittels LEGENDRE-Transformation spektral in  $h_n^R$  zerlegt werden:

$$\iint_{\sigma} h^R(\psi_{PQ}) P_n(\cos \psi_{QQ'}) d\sigma_{Q'} = \frac{4\pi}{2n+1} h_n^R . \quad (6.8)$$

Schließlich ergibt sich durch Einsetzen von (6.8) in (6.7)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} (\sigma_n^2(\Delta g^R) + \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})) h_n^R = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \sigma_n^2(\Delta g^R) P_n(\cos \psi_{PQ}) . \quad (6.9)$$

Die Terme der rechten und linken Seite der Gleichung werden für jeden sphärisch-harmonischen Grad  $n$  getrennt betrachtet (Moritz, 1976). Es ergeben sich die spektralen Anteile  $h_n^R$  der Gewichtsfunktion  $h^R$  zu

$$h_n^R = \frac{R}{4\pi} \frac{2n+1}{n-1} \frac{\sigma_n^2(\Delta g^R)}{\sigma_n^2(\Delta g^R) + \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})} P_n(\cos \psi_{PQ}) . \quad (6.10)$$

Die Gewichtsfunktion  $h^R$  ergibt sich aus der Akkumulation der spektralen Anteile  $h_n^R$  zu

$$h^R(\psi_{PQ}) = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} s_n^{\text{KKQ}} P_n(\cos \psi_{PQ}) . \quad (6.11)$$

Die spektralen Gewichte  $s_n^{\text{KKQ}}$  sind mit

$$s_n^{\text{KKQ}} = \frac{\sigma_n^2(\Delta g^R)}{\sigma_n^2(\Delta g^R) + \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})} \quad (6.12)$$

zu besetzen. Wird auf Basis von (6.11) die Kernfunktion

$$S^{s^{\text{KKQ}}}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} s_n^{\text{KKQ}} P_n(\cos \psi) \quad (6.13)$$

definiert, ergibt sich durch Einsetzen von (6.11) in (6.5)

$$\hat{T}^R(P) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S^{s^{\text{KKQ}}}(\psi) \Delta g^R d\sigma , \quad (6.14)$$

ein Ausdruck, der formal identisch mit  $\hat{T}^{R, \text{IF}}$  aus (3.44) ist, wenn die Integration dort über die gesamte Kugeloberfläche ausgeführt wird. Die Kollokation unterscheidet sich formal also allein in den spektralen Gewichten von der spektralen Kombination mit dem Integrationsverfahren im Fall global und kontinuierlich vorliegender Daten. Die spektralen Gewichte aus (6.12) werden daher nun mit den Gewichten (5.11) verglichen, die in der spektralen Kombination eingesetzt werden.

Die Gradvarianzen der residualen Daten  $\Delta g^R$  aus (6.12) setzen sich entsprechend (3.82) aus den Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M})$  des im Remove-Restore-Verfahren eingesetzten GPM und den Signalgradvarianzen  $\sigma_n^2(\Delta g)$  zusammen:

$$\sigma_n^2(\Delta g^R) = \begin{cases} \sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M}) & \text{für } n \leq n_{\text{max}} \\ \sigma_n^2(\Delta g) & \text{für } n > n_{\text{max}} . \end{cases} \quad (6.15)$$

Damit entspricht die Gewichtung (6.12) bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\text{max}}$  den Gewichten (5.11). Die Identität der Gewichtung ergibt sich aufgrund der Annahme von  $f_n = 1.0$  in (3.78), andernfalls wäre dieser Faktor

in (6.12) zu berücksichtigen, s. a. (Moritz, 1976). Für höhere Grade  $n > n_{\max}$  gilt in der spektralen Kombination des Integrationsverfahrens  $s_n = 1.0$ , wohingegen sich in der Kollokation  $s_n^{\text{KKQ}} < 1.0$  ergibt, da nicht nur die Varianz, sondern auch die Norm des Signals minimiert wird, vgl. Abschnitt 6.1. Ist das Signal-Rausch-Verhältnis allerdings groß, sind die Gewichte  $s_n^{\text{KKQ}}$  für  $n > n_{\max}$  praktisch 1.0.

Im Grenzfall global und kontinuierlich vorliegender Beobachtungen entspricht das Integrationsverfahren mit spektralen Gewichten unter Verwendung der Gewichte (5.11) formal nahezu exakt der Kollokation nach kleinsten Quadraten (falls  $s_n^{\text{KKQ}} \approx 1.0$  für  $n > n_{\max}$ ). Das Integrationsverfahren kann als analytische Lösung der für kontinuierlich vorliegende Beobachtungen unmöglichen Inversion der Kovarianzmatrix und anschließender Multiplikation mit der Kreuzkovarianzmatrix aus der Kollokation betrachtet werden (Moritz, 1976).

### 6.2.2 Praxisfall regional begrenzt und diskret vorliegender Beobachtungen

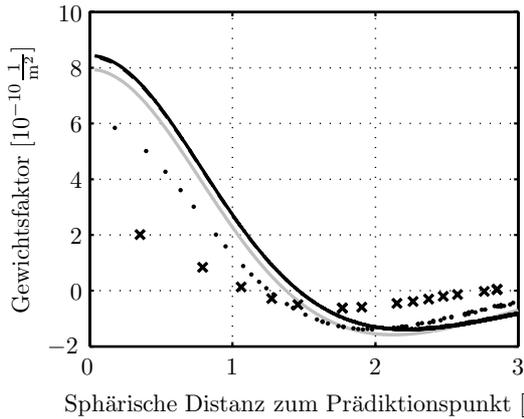
In diesem Abschnitt wird die aus dem Integrationsverfahren und der Kollokation resultierende Gewichtung der Beobachtungen für den in der Praxis vorkommenden Fall miteinander verglichen, in dem die Beobachtungen regional begrenzt und diskret vorliegen. Die numerischen Werte beziehen sich dabei auf die Berechnung der residualen, radialen Tensorkomponente  $T_{zz}^R$ , die Schlussfolgerungen sind auf die Berechnung der übrigen Komponente übertragbar.

Die Gewichtsfunktion wird in der diskreten Auswertung des Integrationsverfahrens nicht an die jeweilige Punktauflösung angepasst, mit Ausnahme der Modifikation (5.40) des Integralkerns zur Berücksichtigung von Blockmittelwerten anstelle von Punktwerten. Wenn die Kernfunktion eine kurze Korrelationslänge aufweist, also eine extreme Steigung besitzt, muss eine entsprechend hohe Datenauflösung vorliegen, damit der diskrete Gewichtswert der Kernfunktion repräsentativ für den Datenblock ist. Eine Verbesserung kann hier durch eine - unabhängig von der Datenauflösung - verfeinerte Abtastung der Kernfunktion und anschließende Mittelwertbildung erzielt werden (Grote, 1996). Aliasing-Fehler durch eine zu grobe Abtastung der Eingangsdaten in Relation zum Signalspektrum würden so jedoch nicht verhindert werden. Der Effekt, der bei dem Integrationsverfahren durch Begrenzung des Integrationsgebietes entsteht, ist in Abschnitt 5.1.5 dargestellt worden. Aufgrund des harten Abbruchs der Kernfunktion entstehen Schwingungen im Frequenzraum. Außerdem ist nicht gewährleistet, dass eine Vergrößerung des Integrationsgebietes zu einer besseren Lösung führt, obwohl mehr Daten einfließen. Wird die Kernfunktion an einer ungünstigen Stelle (z. B. in einem lokalen Extremwert) abgeschnitten, verstärken sich die Amplituden im Frequenzraum und erzeugen einen höheren Vernachlässigungsfehler, s. a. Abschnitt 5.1.2, 5.1.5 und (Heck, 1979; Wolf und Kieler, 2006).

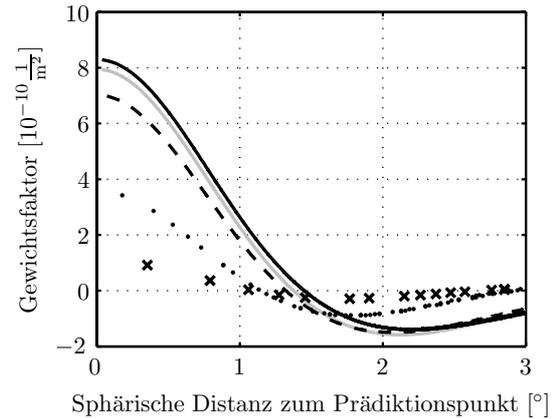
Diese Zusammenhänge stellen sich bei Anwendung der Kollokation grundsätzlich anders dar. Auf Basis der Berechnung der Varianz lässt sich bei Anwendung der schrittweisen Kollokation zeigen, dass bei Vergrößerung des Eingangsdatengebietes und damit der Anzahl der Beobachtungen stets eine Verbesserung, nie eine Verschlechterung der Approximation erzeugt wird (Keller, 1978; Moritz, 1980, S. 154).

Der Grund für das unterschiedliche Verhalten der Methoden ist, dass bei der Entwicklung des Integrationsverfahrens von global und kontinuierlich vorliegenden Eingangsdaten ausgegangen wird, dieser Annahme in der Auswertung aber nicht entsprochen wird. Die Kollokationsformeln hingegen sind auf Basis diskret vorliegender Daten unter der Bedingung der Minimierung der Varianz und der Norm des Signals abgeleitet worden. Dies hat außerdem zur Folge, dass, wie in Abschnitt 5.2.2 erläutert, am Gebietsrand implizit extrapoliert wird, um einen glatten Übergang zu schaffen, s. a. Abb. 5.13. Ebenfalls ist bei der Analyse der Gewichtung zu beachten, dass bei Anwendung der Kollokation die Gewichtsfaktoren individuell für jeden Berechnungspunkt ermittelt werden. Die resultierenden Gewichtsfaktoren hängen nicht allein vom sphärischen Abstand und vom Azimut zum Beobachtungspunkt ab, sondern auch von der räumlichen Verteilung der Beobachtungen, wie es in Abschnitt 5.2.2 diskutiert wurde, s. a. Abb. 5.14. Eine den spektral berechneten Gewichtsfaktoren  $s_n$  entsprechende Darstellung in Abhängigkeit von dem sphärisch-harmonischen Grad  $n$  ist für die resultierenden diskret und regional begrenzt vorliegenden Gewichtsfaktoren nicht möglich.

Die Gewichtung aus der Anwendung der Kollokation und der spektralen Kombination mit dem Integrationsverfahren zur Berechnung der radialen Tensorkomponente  $T_{zz}^R$  in der Bahnhöhe von GOCE wird daher numerisch im Ortsraum für zunehmende Datenaufösungen verglichen, s. a. (Wolf, 2006). Dazu werden die Gewichte  $W^{\text{KKQ}}$  der Kollokation aus (5.47), vgl. Abschnitt 5.2.2, mit dem reziproken Wert des Faktors  $\frac{R}{4\pi}\Delta\sigma = \frac{R}{4\pi}\cos\varphi\Delta\varphi\Delta\lambda$  aus der Integration skaliert, um sie mit der Kernfunktion  $K_{zz}$  vergleichen zu können. In Abb. 6.4 sind die skalierten



**Abbildung 6.4.** Integralkern (grau) und skalierte Gewichtungsfaktoren der Kollokation (schwarz) zur Berechnung von  $T_{zz}$  für die Auflösungen  $0.5^\circ$  (x),  $0.25^\circ$  (.),  $0.1^\circ$  (- - -),  $0.05^\circ$  (—), letzten beiden nahezu identisch; Kombination terrestrischer Daten mit dem SYNGPM360I (Kapitel 7), lokale Kovarianzparameter aus (9.1).



**Abbildung 6.5.** Integralkern (grau) und skalierte Gewichtungsfaktoren der Kollokation (schwarz) zur Berechnung von  $T_{zz}$  für die Auflösungen  $0.5^\circ$  (x),  $0.25^\circ$  (.),  $0.1^\circ$  (- - -),  $0.05^\circ$  (—); Kombination terrestrischer Daten mit dem SYNGPM360I (Kapitel 7), globale Kovarianzparameter aus (2.63).

ten Gewichte der Kollokationslösung für ein  $7^\circ \times 7^\circ$  großes Eingangsdatengebiet mit den Auflösungsstufen  $0.5^\circ$ ,  $0.25^\circ$ ,  $0.1^\circ$  und  $0.05^\circ$  (im Szenario 1K, vgl. Kapitel 7) dargestellt. Die Gewichtungsfaktoren aller Beobachtungspunkte wurden dazu in der Reihenfolge des Abstandes zwischen Beobachtungs- und Berechnungspunkt sortiert. Die ebenfalls abgebildete Kernfunktion des Integrationsverfahrens ist unabhängig von der Auflösung der Eingangsdaten. Man erkennt, dass bei grober Auflösung die residualen Daten in der Kollokation geringer gewichtet werden als bei Anwendung des Integrationsverfahrens. Je feiner die Datenauflösung ist, desto ähnlicher werden die Gewichte der Kollokation und der spektralen Kombination. Eine verbleibende Abweichung der Gewichtung kann durch die begrenzte Gebietsgröße, aber auch durch die Wahl der Parameter des bei der Kollokation eingesetzten Signalgradvarianzmodells verursacht sein. Werden anstelle der lokalen Parameter (9.1) aus Abschnitt 9.1 für das TSCHERNING-RAPP-Modell die globalen Parameter aus (2.63) verwendet, verändern sich die Gewichtswerte in der Kollokation, vgl. Abb. 6.5.

Bei Anwendung der Kollokation spiegelt sich, anders als bei dem Integrationsverfahren, die Datenauflösung in der resultierenden Gewichtung der Beobachtungen wider. Auch die Begrenzung der Beobachtungen auf ein regionales Gebiet wird in der statistisch optimalen Kollokationslösung berücksichtigt. Beim Integrationsverfahren ist in der Anwendung auf einen günstigen Abbruch der Kernfunktion zu achten, um die resultierenden Fehler nicht zu erhöhen.

## 6.3 Fazit

Abschließend kann für den Vergleich des Integrationsverfahrens und der Kollokation gesagt werden, dass auch bei gleichen Startannahmen für die Gewichtung der eingehenden Datensätze (GPM, terrestrische Daten) Unterschiede in den resultierenden Gewichten auftreten. Bei Anwendung der Kollokation werden für jeden Berechnungspunkt in Abhängigkeit von der räumlichen Verteilung der Beobachtungen individuelle Gewichte berechnet und es wird implizit am Gebietsrand ein glatter Übergang erzeugt. Die Kollokation bietet die statistisch optimale Lösung. Bei Anwendung des Integrationsverfahrens wird eine für alle Berechnungspunkte identische Gewichtsfunktion verwendet, die an den Rändern des Gebietes hart abgeschnitten wird. Für ungünstige Abbruchstellen kann dies zu einer Verschlechterung der Lösung führen.

Bei sehr grober Datenauflösung ist daher die Anwendung der Kollokation zu empfehlen. Bei sehr feiner Datenauflösung ist das Integrationsverfahren von Vorteil, da die Anwendung der Kollokation sehr rechenzeit- und speicherintensiv ist und möglicherweise Instabilitäten bei der Gleichungslösung auftreten können (s. a. Kapitel 8). Wird ein ausreichend großer Abstand der Berechnungspunkte zum Rand des Eingangsdatengebietes eingehalten und liegt eine im Verhältnis zum Signalspektrum der Ein- und Ausgangsdaten ausreichende Auflösung vor, kann erwartet werden, dass beide Methoden, die Kollokation und das Integrationsverfahren mit spektralen Gewichten, sehr ähnliche Ergebnisse liefern.

## 7 Synthetische Daten

In dieser Arbeit werden die Methoden, Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung und Kollokation, zur Berechnung der Elemente des Tensors  $T_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE mit Hilfe synthetischer Daten evaluiert. In der Berechnung werden terrestrische Schwereanomalien eines regional begrenzten Gebietes mit einem GPM kombiniert. Die Ergebnisse der indirekten Berechnung des Tensors auf Grundlage der Schwereanomalien (inklusive Rauschen) werden mit den Ergebnissen einer direkten Berechnung auf Grundlage des synthetischen Modells numerisch verglichen, wie es in Abb. 7.1 skizziert ist. Die indirekte Berechnungsmethode liefert Ist-Werte und die direkte Berechnungsmethode exakte Sollwerte, daher wird die Evaluierungsmethode als Soll-Ist-Vergleich (engl. auch *closed loop evaluation*) bezeichnet.

Die Anforderungen, die an das synthetische Erdmodell im Rahmen dieser Arbeit gestellt werden, sind im Abschnitt 7.1 dargestellt. Im darauf folgenden Abschnitt werden die dem synthetischen Erdmodell zugrunde liegenden realen Daten beschrieben. Im dritten Abschnitt wird der Aufbau des synthetischen Erdmodells erläutert. Die verwendeten Verfahren zur Simulation des Rauschens werden im vierten Abschnitt dargestellt. Im letzten Abschnitt werden verschiedene Testszenarien vorgestellt, die sich in der räumlichen Datenauflösung sowie der Amplitude und Korrelation des Rauschens unterscheiden.

### 7.1 Anforderungen an das synthetische Erdmodell

Im Vordergrund steht in dieser Arbeit die Evaluierung der genannten Berechnungsmethoden, insbesondere in Abhängigkeit von verschiedenen Testszenarien bezüglich Datenauflösung und Rauschen. Der Grad der Annäherung des synthetischen Modells an die Realität spielt eine untergeordnete Rolle. Deswegen kann hier eine möglichst einfache Darstellung des synthetischen Erdmodells gewählt werden.

Das synthetische Erdmodell wird genutzt, um die Eingangsdaten (RTM-reduzierte terrestrische Schwereanomalien, GPM) und die (exakten) Ausgangsdaten (Elemente des Tensors  $T_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE) zu simulieren. Die terrestrischen Schwereanomalien  $\Delta g^T$  werden in einem regional begrenzten Testgebiet berechnet, das GPM dient zur Berechnung der Schwereanomalien  $\Delta g^M$  in den identischen Punkten, vgl. Abb. 7.2. Die Differenzen beider Datensätze ergeben nach (3.27) bzw. (3.81) die residualen Schwereanomalien  $\Delta g^R$ , die im Rahmen der Remove-Restore-Technik als Beobachtungsgrößen zur Berechnung des residualen Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  genutzt werden. Die Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  werden durch Addition der Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^M$  aus dem GPM zu  $\hat{T}_{[ij]}^R$  restituiert, um anschließend mit den exakten Sollwerten verglichen zu werden.

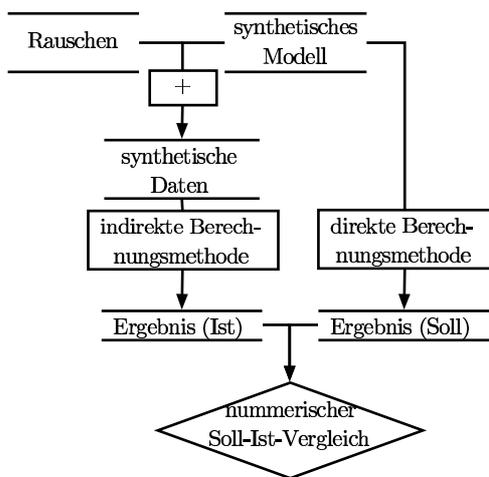
Zur Modellierung der genannten Größen wird im synthetischen Erdmodell ein GPM in Form von Kugelfunktionskoeffizienten gewählt. Als maximaler sphärisch-harmonischer Grad des GPM wird  $n_{\max}^{\text{syn}} = 1300$  gewählt, entsprechend einer Auflösung von  $8'$ . Es wird davon ausgegangen, dass höhere Frequenzen des realen Schwerefeldsignals nicht in den residualen Größen enthalten sind, sondern auf Basis der RTM-Reduktion beseitigt werden. Die Auflösung der Referenztopographie der RTM-Reduktion müsste entsprechend  $8'$  betragen. Die RTM-Reduktion wird nicht im Rahmen des synthetischen Erdmodells simuliert<sup>1</sup>. Wird eine zu niedrige maximale Auflösung des synthetischen GPM gewählt, kann dies zu einer zu optimistischen Genauigkeitsabschätzung führen, da dann mögliche Aliasing-Effekte, die in der Realität bei zu grober Abtastung der Beobachtungen auftreten würden, unberücksichtigt blieben.

Die simulierten terrestrischen Schwereanomalien werden in Höhe der Erdoberfläche berechnet. Neben der synthetischen Modellierung des Erdschwerefeldes, der physikalischen Figur der Erde, ist daher die Modellierung der geometrischen Figur der Erde erforderlich. Hierzu wird ein DGM eingesetzt.

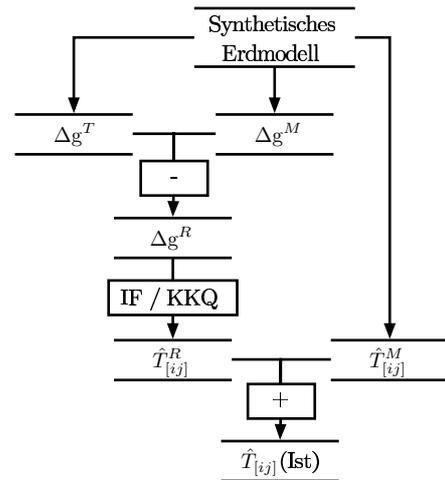
Zusammenfassend besteht das synthetische Erdmodell aus einem hochauflösenden GPM und einem regional begrenzten DGM, um die genannten Modellierungsaufgaben zu erfüllen. Darüber hinaus wird im Hinblick auf eine

---

<sup>1</sup>Topographisch-isostatische Reduktionen wurden in (Agren, 2004) im Rahmen der Geoidberechnung anhand synthetischer Daten (Auflösung  $1'$ ) untersucht.



**Abbildung 7.1.** Evaluierung einer indirekten Berechnungsmethode über einen Soll-Ist-Vergleich mit der direkten Lösung basierend auf einem synthetischen Modell.



**Abbildung 7.2.** Indirekte Berechnung von Ist-Werten auf Basis synthetischer Daten.

realitätsnahe Simulation Rauschen sowohl für das simulierte GPM als auch für die terrestrischen Daten erzeugt. Dieser Aspekt wird getrennt vom Aufbau des synthetischen Erdmodells in Abschnitt 7.4 besprochen.

## 7.2 Reale Datenbasis

Das synthetische Erdmodell enthält ein hochauflösendes GPM zur Modellierung des Schwerefeldes und ein regionales DGM zur geometrischen Modellierung der Erdoberfläche innerhalb des Testgebietes. Die realen Datenquellen beider Modellierungen werden im Folgenden besprochen.

### 7.2.1 Globale Potentialmodelle

Globale Potentialmodelle sind in Form von Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$  der sphärisch-harmonischen Entwicklung (2.5) gegeben. Funktionale des Schwerefeldes werden über die sphärisch-harmonische Synthese (SHS) der Koeffizienten berechnet, vgl. Abschnitt 2.1.4.

Die Koeffizienten des GPM werden in der sphärisch-harmonischen Analyse (SHA) auf Basis von Schwerefeldbeobachtungen ermittelt. Unter Verwendung der Gleichungen der SHS als funktionales Modell können die Koeffizienten des GPM in einer Ausgleichung bestimmt werden. Alternativ lassen sich die Gleichungen der SHS nach den Koeffizienten umstellen. Die Berechnung erfolgt dann durch eine Integration über die Kugeloberfläche (Torge, 2001, S. 272). Der langwellige Signalanteil eines globalen Schwerefeldmodells wird durch die Analyse von Satellitenbahnen bestimmt. Die Satellitenbahnen werden vom Gravitationsfeld der Erde, aber auch von anderen Effekten (z. B. dem Atmosphärenwiderstand) beeinflusst. Die Abweichungen der Satellitenbahn gegenüber einer Bahn im Gravitationsfeld einer der Erdmasse äquivalenten Punktmasse (ungestörte Referenzbahn) werden als Beobachtungen in die Ausgleichung eingeführt (Torge, 2001, S. 274). Die tatsächliche Bahn des Satelliten wird über Satellite Laser Ranging<sup>2</sup> (SLR) oder über Satellite-to-Satellite-Tracking<sup>3</sup> (SST) beobachtet. In der Vergangenheit wurden zur Bestimmung der globalen Modelle SLR-Beobachtungen verschiedener Satelliten über längere Zeiträume (Jahrzehnte) verwendet. Aufgrund der Abschwächung des Gravitationssignals mit der Höhe und der unzureichenden Verteilung der Trackingstationen waren diese Modelle auf eine Auflösung von etwa

<sup>2</sup>Laserentfernungsmessung zwischen einer Bodenstation auf der Erde zu einem Satelliten

<sup>3</sup>Entfernungsmessung zwischen zwei Satelliten: Die Entfernung wird beispielsweise bei der Mission CHAMP in einer High-Low Konfiguration mit Hilfe des GPS (Global Positioning System) zwischen dem CHAMP-Satelliten in niedriger Bahn zu den GPS-Satelliten in höherer Bahn bestimmt, s. a. (Mayer-Gürr, 2006).

300 km (sphärisch-harmonischer Grad 70) begrenzt (Torge, 2001, S. 275). Bei der CHAMP-Mission, gestartet im Jahr 2000, wird die Bahnposition kinematisch per SST bestimmt. Aufgrund der relativ niedrigen Bahn (von Anfangshöhe 460 km sinkend) können allein mit Hilfe der CHAMP-Daten Modelle bis zu einer Auflösung von etwa 300...400 km (sphärisch-harmonischer Grad 40...60) bestimmt werden. Diese stehen als EIGEN-Modelle des GeoForschungszentrums Potsdam (GFZ) zur Verfügung (GFZ, 2006b; Reigber et al., 2003b).

Die im Jahre 2002 gestartete GRACE-Mission nutzt erstmalig SST zwischen zwei niedrigfliegenden Satelliten bei einer Anfangshöhe der Satelliten von etwa 500 km. Mit den Daten der für fünf Jahre geplanten Mission wird eine Modellauflösung von etwa 130...170 km (sphärisch-harmonischer Grad 120...150) erreicht (Reigber et al., 2005; Tapley et al., 2005). Bei der GRACE-Mission steht die Beobachtung der zeitvariablen Anteile des Schwerefeldes im Vordergrund. Hierzu werden aus einer Beobachtungsreihe von jeweils 30 Tagen Dauer Monatslösungen berechnet. Die Beobachtungen der GRACE-Mission werden von verschiedenen Institutionen ausgewertet. Neben den EIGEN-GRACE-Modellen des GFZ stehen die GGM-Modelle des Center for Space Research (CSR in Austin, Texas) zur Verfügung, an der Universität Bonn werden die ITG-Modelle aus der Analyse kurzer Bahnbögen berechnet (Mayer-Gürr, 2006). Ein Vergleich verschiedener GRACE-Modelle ist in (Roland, 2005) zu finden. Eine deutliche Steigerung der Modellauflösung auf Basis von Satellitendaten bis etwa 100 km (sphärisch-harmonischer Grad 200) ist Ziel der GOCE-Mission, vgl. Abschnitt 2.3.

Neben den bisher beschriebenen Modellen, die allein auf Satellitenbeobachtungen beruhen, existieren auch so genannte kombinierte Modelle, bei denen die Satellitenbeobachtungen durch terrestrische Schweredaten und Altimeterbeobachtungen ergänzt werden, beispielsweise das OSU-91A (Rapp et al., 1991) und das EGM96 (Lemoine et al., 1998), beide mit einer Auflösung von etwa 50 km (sphärisch-harmonischer Grad 360). Ähnliche Modelle (z. B. EIGEN-CG03C, EIGEN-GL04C) werden derzeit auf Basis der neuen Satellitendaten der Missionen CHAMP und GRACE und anderer Satellitendaten (z. B. LAGEOS), terrestrischer Daten und Altimetriedaten berechnet (Tapley et al., 2005; Reigber et al., 2006). Das ultra-hochauflösende Modell GPM98C basiert auf dem EGM96, dessen Auflösung durch Integration von terrestrischen Schwereanomalien (Blockmittelwerte mit einer Auflösung von 5') iterativ bis auf etwa 10 km bis Grad und Ordnung 1800 erweitert wurde (Wenzel, 1999). Die weitere Steigerung der Auflösung der GPM bis hin zum Grad 2160 auf Basis von Schweredaten ist ein aktuelles Forschungsthema, siehe z. B. (Pavlis et al., 2005). Derart hochauflösende Modelle sind bisher nur als synthetische Modelle (auf Basis von DGM oder unabhängig von realen Daten) berechnet worden, vgl. Abschnitt 4.1.

## 7.2.2 Digitale Geländemodelle

Die geometrische Erdfigur, die Begrenzung der festen und flüssigen Erdmassen gegenüber der Atmosphäre (Torge, 2001, S. 10), wird üblicherweise mit Hilfe eines DGM in unterschiedlichen Auflösungsstufen dargestellt. Daten aus der Digitalisierung analoger Karten, der Auswertung von Luftbildern, der Befliegung mittels Laserscanner oder Synthetic Apertur Radar (SAR) stellen die Grundlagen für DGM dar. Auflösung und Genauigkeit der DGM variieren in Abhängigkeit von den Mess- und Auswertverfahren.

Global steht das Modell GTOPO30 mit einer Auflösung von 30'' und einer Genauigkeit von 10 m bis einigen 100 m zur Verfügung (USGS, 1996). Ebenfalls global ist das Modell ETOPO5 mit einer Auflösung von 5' verfügbar, die Genauigkeit für Europa liegt im Bereich von einigen Metern (NGDC, 1988). Ebenso steht ein globales (bis zur geographischen Breite von  $\pm 60^\circ$ ) DGM der Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) des Jahres 2000 mit einer Auflösung von etwa 25 m und einer Genauigkeit von  $\pm 16$  m zur Verfügung (DLR, 2000; Rabus et al., 2003). Das Modell wird derzeit zur Nutzung in der Geoidmodellierung aufbereitet und evaluiert (z. B. Denker, 2005). Für das in der vorliegenden Arbeit untersuchte Testgebiet in Zentraleuropa sind außerdem hochauflösendere regionale DGM von den zuständigen nationalen Behörden erhältlich.

Für die Berechnungen in dieser Arbeit werden topographische Informationen der Datenbank des Instituts für Erdmessung (IFE) verwendet, die im Rahmen des Projekts "Europageoid" der IAG zusammengetragen wurden. Aus den etwa 700 Millionen Einzelwerten wurde ein DGM für den gesamten europäischen Kontinent mit einer einheitlichen Auflösung von 7.5'' abgeleitet. Existierende Datenlücken wurden mit Daten aus dem ETOPO5 aufgefüllt (Denker, 1998). Auf Basis dieses Datensatzes wurde durch Berechnung von Blockmittelwerten mit einer Auflösung von 5' ein DGM, das im Folgenden mit EURDGM5 bezeichnet wird, abgeleitet und für die vorliegende Arbeit zur Verfügung gestellt.

### 7.3 Aufbau des synthetischen Erdmodells

Das synthetische Erdmodell besteht aus einem GPM zur physikalischen und einem DGM zur geometrischen Modellierung der Erdfigur. Das in Abschnitt 7.2.2 genannte EURDGM5 wird ohne weitere Modifikation als DGM verwendet und im Kontext des synthetischen Erdmodells als SYNDGM bezeichnet. Es deckt das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Testgebiet ab, vgl. Abschnitt 7.5. Die synthetischen terrestrischen Schwereanomalien werden in Höhe des SYNDGM erzeugt.

Das GPM des synthetischen Erdmodells ist eine Kombination der Koeffizienten des EIGEN-GRACE02S (Reigber et al., 2005), des EGM96 (Lemoine et al., 1998) und des GPM98C (Wenzel, 1999)<sup>4</sup>, s. a. (Wolf und Denker, 2005; Wolf, 2006). Die Kombination der Koeffizienten des EGM96 und anderer aktueller Schwerefeldmodelle wurde bereits in (Denker, 2003; Roland, 2005, S. 52) angewendet. Das Modell EIGEN-GRACE02S liegt maximal bis zum sphärisch-harmonischen Grad 150 vor, das EGM96 bis zum Grad 360 und das GPM98C bis zum Grad 1800. Prinzipiell ließe sich für die Simulationsrechnungen in dieser Arbeit auch das GPM98C allein verwenden, da aber in den Testszenarien der Einfluss der sehr hohen Genauigkeit der aktuellen GRACE-Modelle untersucht werden soll, wurden ebenfalls die zugehörigen Koeffizienten für das synthetische Modell ausgewählt. Die Koeffizienten der genannten Modelle sind entsprechend (2.15) auf das Bezugssystem GRS80 umskaliert worden. Die Masse der Erde wird für das synthetische GPM wie im GRS80 festgelegt angenommen und das Koordinatensystem wird im Massenmittelpunkt gelagert. Die Koeffizienten der sphärisch-harmonischen Grade 0 und 1 entfallen daher bei der Berechnung der Störgrößen des Schwerefeldes.

Es werden zwei synthetische Modelle, das SYNGPM360S und das SYNGPM1300S, erzeugt, die bis zum sphärisch-harmonischen Grad 360 identisch sind. Das SYNGPM360S bleibt auf diesen maximalen Grad beschränkt, das SYNGPM1300S enthält Signalanteile bis zum sphärisch-harmonischen Grad 1300. Bis zum sphärisch-harmonischen Grad 104 werden in den synthetischen GPM die Koeffizienten des EIGEN-GRACE02S verwendet, da in diesem Bereich die Fehlergradvarianzen dieses Modells die Fehlergradvarianzen des EGM96 unterschreiten, vgl. Abb. 7.3. Für das GPM98C liegen keine Angaben zu den Standardabweichungen der Koeffizienten und damit zu den Fehlergradvarianzen vor. Da das Modell durch Erweiterung des EGM96 berechnet wurde, werden im Spektralbereich der sphärisch-harmonischen Grade 105 bis 360 direkt die Koeffizienten des EGM96 verwendet und darüber hinaus die des GPM98C. Da kein großer Sprung in den Koeffizienten beim Wechsel vom EIGEN-GRACE02S zum EGM96 bzw. vom EGM96 zum GPM98C vorliegt, ist auf einen gewichteten Übergang, wie beispielsweise in (Haagmans, 2000) vorgeschlagen, verzichtet worden.

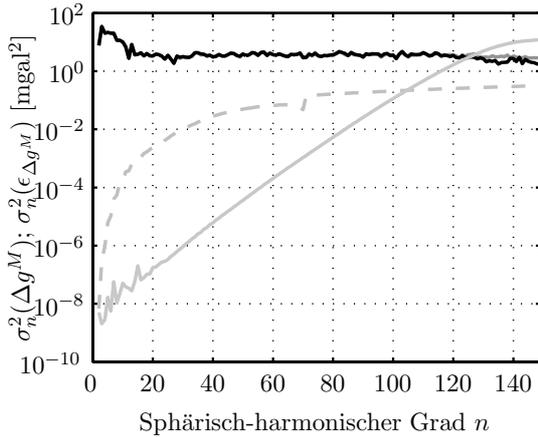
Das GPM98C wird nicht bis zu dem maximal möglichen sphärisch-harmonischen Grad 1800 verwendet, da es im hochfrequenten Bereich eine leicht ansteigende Signalgradvarianzkurve aufweist (Wenzel, 1999). Mit der Beschränkung auf den sphärisch-harmonischen Grad 1300 werden Unstimmigkeiten bezüglich der Modellierung der Signalgradvarianzen auf Basis des TSCHERNING-RAPP-Modells (2.63) vermieden, das von einer stetig abfallenden Signalgradvarianzkurve ausgeht. Die maximale Auflösung bis zum sphärisch-harmonischen Grad 1300 genügt außerdem, wenn das Modell zur Simulation von Daten verwendet wird, deren hochfrequenter Signalanteil durch eine RTM-Reduktion entfernt worden ist. Die Höhen der Punkte bleiben nach einer RTM-Reduktion erhalten (Gerlach, 2003, S. 70), entsprechend enthält das SYNDGM zur Simulation der Punkthöhen Signalanteile höherer Frequenz (bis etwa zum sphärisch-harmonischen Grad 2160). Da für das GPM98C keine Fehlergradvarianzen vorliegen, muss auch für das SYNGPM1300S im Bereich der sphärisch-harmonischen Grade 361 bis 1300 hierauf verzichtet werden. Die Signal- und die Fehlergradvarianzen des synthetischen Modells sind in Abb. 7.4 dargestellt.

In Tabelle 7.1 sind die akkumulierten Signal- und Fehlergradvarianzen der genannten Spektralbereiche der realen Modelle sowie der abgeleiteten Modelle SYNGPM360S und SYNGPM1300S angegeben.

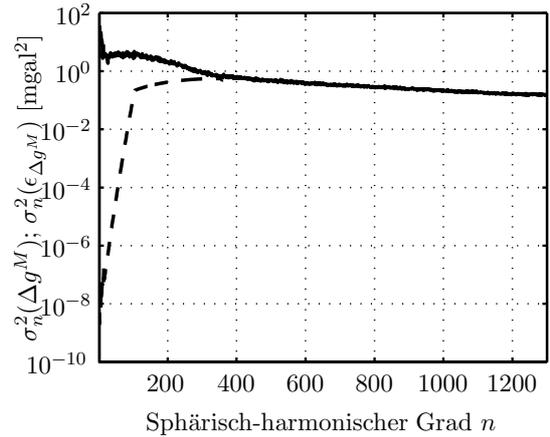
### 7.4 Rauschsimulation

In dieser Arbeit wird für die synthetischen Beobachtungen Rauschen im Hinblick auf eine realitätsnahe Simulation erzeugt. Damit erlaubt der Soll-Ist-Vergleich auf Basis der synthetischen Daten nicht nur eine formale

<sup>4</sup>Zum Zeitpunkt der Erstellung des synthetischen Erdmodells lagen die hochauflösenden kombinierten GPM (z. B. EIGEN-CG03C (Förste et al., 2005), EIGEN-GL04C (GFZ, 2006a; Förste et al., 2006) noch nicht vor.



**Abbildung 7.3.** Signal- und Fehlergradvarianzen von Schwereanomalien auf Basis des EIGEN-GRACE02S (Signal —, schwarz; Fehler —, grau) und des EGM96 (Signal —, dunkelgrau (bis Grad 130 verdeckt vom EIGEN-GRACE02S-Signal); Fehler - - -, grau).



**Abbildung 7.4.** Signalgradvarianzen (—) und Fehlergradvarianzen (- - -) (bis  $n = 360$ ) von Schwereanomalien auf Basis des SYNGPM1300S.

**Tabelle 7.1.** Quadratwurzeln der akkumulierten Signal- und Fehlergradvarianzen realer GPM und SYNGPM für Schwereanomalien auf der Erdoberfläche [mgal] und radiale Tensorcomponenten in der Bahnhöhe von GOCE [mE]. Es sind jeweils die für die Erstellung des SYNGPM360S und SYNGPM1300S wichtigen Spektralbereiche angegeben.

GPM	$n_{\min}$	$n_{\max}$	$\Delta g$	$\epsilon_{\Delta g}$	$T_{zz}$	$\epsilon_{T_{zz}}$
EIGEN-GRACE02S	2	104	22.45	1.22	253.30	4.17
EGM96	105	360	21.56	10.62	20.42	5.56
GPM98C	361	1300	17.05	-	0.00	-
SYNGPM360S	2	360	31.12	10.69	254.12	6.95
SYNGPM1300S	2	1300	35.49	-	254.12	-

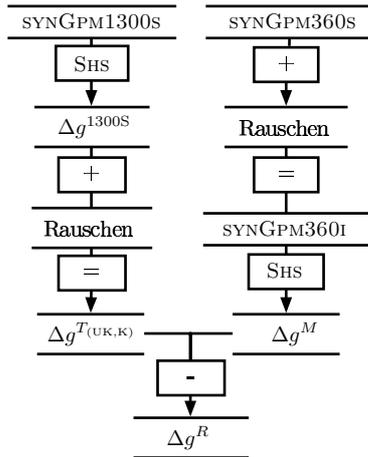
Überprüfung der Rechenmethoden, sondern auch eine Bewertung hinsichtlich unterschiedlicher Testszenarien, in denen Rauschniveau und Rauschtyp (korreliertes und unkorreliertes Rauschen) variiert wird. Ohne Rauschen ließe sich der Effekt einer unterschiedlichen Gewichtung der eingehenden Datensätze in den zu untersuchenden Methoden nur bedingt nachweisen, da stets rauschfreie Information einging. Mit Hilfe der verrauschten synthetischen Daten kann durch den Vergleich mit den exakten synthetischen Zielgrößen das verbleibende Rauschen und damit die Varianz der Zielgröße ermittelt werden. Im Fall realer Daten kann die Varianz der Zielgrößen nur auf Basis statistischer Aussagen über die Fehlerquellen abgeschätzt werden (vgl. Abschnitt 3.4.4 bzw. 3.5.2). Die Ergebnisse beider Berechnungen der Varianz werden im Rahmen der Genauigkeitsanalyse in Kapitel 9 verglichen.

Synthetisches Rauschen wird sowohl für die terrestrischen Beobachtungen  $\Delta g^T$  als auch für das GPM zur Berechnung der Beobachtungen  $\Delta g^M$  erzeugt. In der Differenz beider Datensätze ergeben sich die residualen Beobachtungen  $\Delta g^R$ . Das Vorgehen ist in Abb. 7.5 skizziert. Die Erzeugung des Rauschens wird in den folgenden Abschnitten erläutert. Weitere Verfälschungen der Daten, beispielsweise durch systematische Fehler (Heck, 1990; Pavlis, 2000), wären ebenfalls möglich, werden aber im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht.

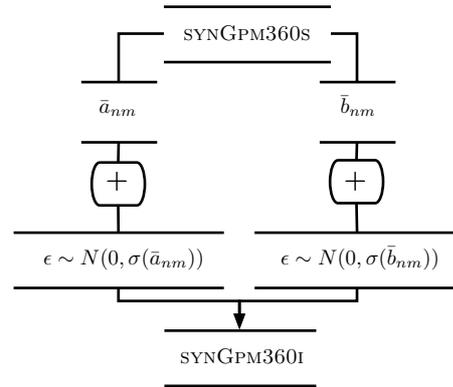
### 7.4.1 Berechnung des Rauschens für das globale Potentialmodell

Das Modell SYNGPM360I wird auf Basis des SYNGPM360S durch Addition von Rauschen zu den Modellkoeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$  berechnet (Abb. 7.6). Die Rauschwerte  $\epsilon$  werden als normalverteilte Werte in Größenordnung der Standardabweichungen  $\sigma(\bar{a}_{nm})$  bzw.  $\sigma(\bar{b}_{nm})$  der Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  bzw.  $\bar{b}_{nm}$  erzeugt (Wolf und Denker, 2005; Wolf, 2006).

Zufallszahlen, die der Normalverteilung (2.49) entsprechen, können näherungsweise auf Basis des zentralen Grenzwertsatzes (vgl. Abschnitt 2.2.1) ausgehend von unabhängigen gleichmäßig verteilten Zufallszahlen mit



**Abbildung 7.5.** Konzept zur Erstellung der Eingangsdaten  $\Delta g^R$  inklusive Rauschen.



**Abbildung 7.6.** Generierung des verrauschten Modells SYNGPM360I auf Basis des SYNGPM360S durch Addition von Rauschen auf die Koeffizienten  $\bar{a}_{nm}$  und  $\bar{b}_{nm}$ .

verschiedenen Verfahren erzeugt werden (Knuth, 1969; Friedrich und Lange, 1999). In dieser Arbeit wurden die normalverteilten Zufallszahlen nach dem in (Forsythe et al., 1977, S. 247) beschriebenen Ansatz berechnet<sup>5</sup>.

Die Fehlergradvarianzen von Schwereanomalien auf Basis des SYNGPM360S werden in Abb. 7.7 den Gradvarianzen gegenübergestellt, die aus der Differenz der Koeffizienten des SYNGPM360S und des SYNGPM360I berechnet wurden. Man erkennt, dass die Fehlergradvarianzen eine mittlere Kurve angeben, um die die Gradvarianzen der Koeffizientendifferenzen aufgrund des zufällig generierten Rauschens streuen.

Neben der Gradvarianzdarstellung lässt sich das im SYNGPM360I erzeugte Rauschen für die Schwerefeldfunktionale auch im Ortsraum darstellen, indem Differenzen zwischen den Daten aus dem SYNGPM360S und dem SYNGPM360I gebildet werden, s. a. (de Min, 1996). Die auf Basis des SYNGPM360S über die SHS berechneten Schwereanomalien  $\Delta g^{360S}$  sind in Abb. 7.8 für das in dieser Arbeit verwendete Testgebiet dargestellt, die Schwereanomalien  $\Delta g^M$  aus dem SYNGPM360I in Abb. 7.9. Die Differenz beider Datensätze ist in Abb. 7.10 angegeben. In den Differenzen sind Signalstrukturen mit einer Auflösung von kleiner  $2^\circ$  zu erkennen. Diese Auflösung entspricht dem sphärisch-harmonischen Grad 90. Die Strukturen ergeben sich aufgrund des deutlichen Anstiegs der Fehlergradvarianzen des SYNGPM360S in diesem Auflösungsbereich, vgl. Abb. 7.7. Die Standardabweichung des Mittelwertes des Rauschens im regionalen Gebiet beträgt 12.4 mgal, die akkumulierten Fehlergradvarianzen des SYNGPM360S ergeben 10.8 mgal. Die Abweichung zwischen den beiden Angaben lässt sich damit erklären, dass es sich bei den akkumulierten Fehlergradvarianzen um einen global gültigen Mittelwert handelt, von dem die regionale Schätzung abweichen kann. Je größer das Testgebiet wäre, desto kleiner sollte die Abweichung sein.

Das SYNGPM360I simuliert das GPM im Rahmen der Remove-Restore-Technik, aus dem die Beobachtungen  $\Delta g^M$  und  $T_{ij}^M$  abgeleitet werden, vgl. Abschnitt 7.5.

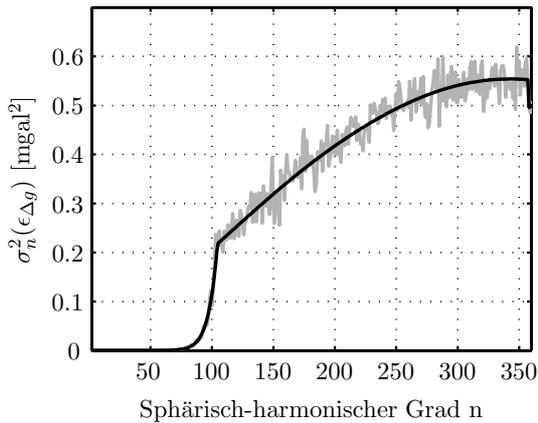
#### 7.4.2 Berechnung von unkorreliertem Rauschen für terrestrische Daten

Zu den auf Basis des SYNGPM1300S simulierten terrestrischen Schwereanomalien  $\Delta g^{1300S}$  wird synthetisch erzeugtes Rauschen addiert. Es werden Szenarien mit unkorreliertem Rauschen  $\varepsilon^{UK}$  untersucht:

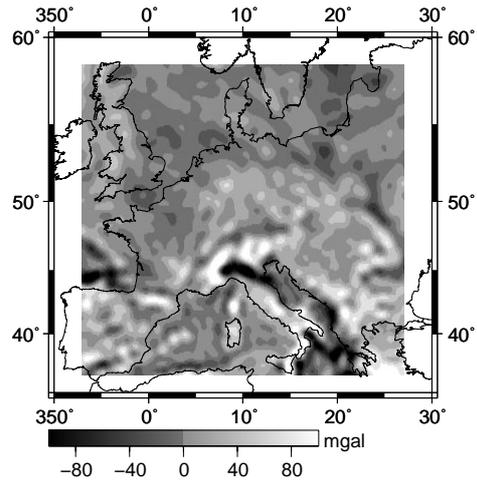
$$\Delta g^{T_{UK}} = \Delta g^{1300S} + \varepsilon^{UK} . \quad (7.1)$$

Die Rauschwerte  $\varepsilon^{UK}$  werden als normalverteilte Zufallszahlen erzeugt und stellen einen stochastischen GAUSS'schen Prozess dar, dessen Eigenschaften über den Erwartungswert (2.51) und die (Auto-)Kovarianz (2.52) festgelegt sind (Abschnitt 2.2.1). Die normalverteilten Zufallszahlen werden so berechnet, wie bereits in Abschnitt 7.4.1 angegeben.

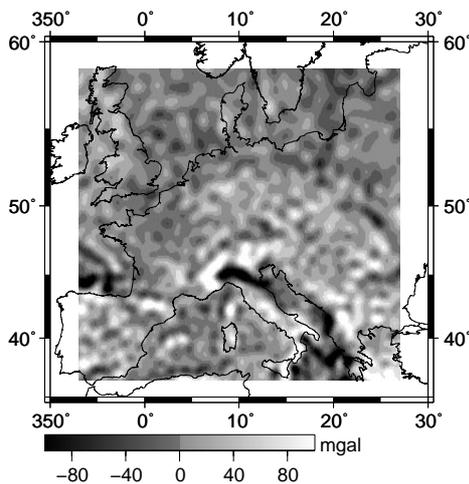
<sup>5</sup>Die Implementierung des Ansatzes ist in der Programmierumgebung MATLAB enthalten.



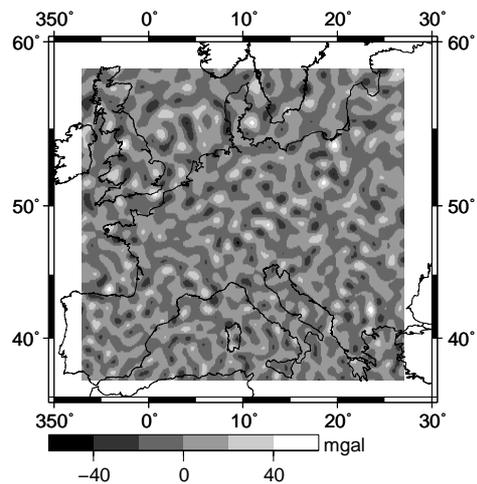
**Abbildung 7.7.** Fehlergradvarianzen der Schwereanomalien auf Basis des SYNGPM360S (schwarz) und entsprechende Gradvarianzen auf Basis der Koeffizientendifferenzen zwischen dem SYNGPM360S und dem SYNGPM360I (grau).



**Abbildung 7.8.** Punktschwereanomalien auf Basis des SYNGPM360S, Auflösung des Gitters 6'.



**Abbildung 7.9.** Punktschwereanomalien auf Basis des SYNGPM360I, Auflösung des Gitters 6'.



**Abbildung 7.10.** Differenzen der Punktschwereanomalien auf Basis des SYNGPM360S und des SYNGPM360I, Auflösung des Gitters 6'.

Im Rahmen der numerischen Berechnungen wird unkorreliertes Rauschen mit einem Niveau von 1 mgal untersucht, das Testszenario wird mit 1UK bezeichnet. Das Rauschen ist in Abb. 7.11 für das Testgebiet dargestellt, die zugehörige empirisch nach (2.68) berechnete Kovarianzfunktion ist in Abb. 7.12 dargestellt. Nur der Autokovarianzwert der Distanzklasse mit  $\psi = 0$  ist deutlich von null verschieden, es treten keine Korrelationen auf. Die Statistik der Rauschwerte ist in Tabelle 7.2 auf S. 86 angegeben.

Es ist zu bemerken, dass in der Praxis unkorreliertes Rauschen nicht streng realisiert werden kann. Aufgrund von ähnlichen Messbedingungen (Instrumentarium, Beobachter, Wetter, Umgebung) kann eine Korrelation zwischen den Messungen nicht ausgeschlossen werden. Aufgrund der Unkenntnis der wahren Korrelation des Rauschens wird die Korrelation aber häufig vernachlässigt.

### 7.4.3 Berechnung von korreliertem Rauschen für terrestrische Daten

In dieser Arbeit wird die Auswirkung von korreliertem Rauschen in den Beobachtungen auf die Zielgröße untersucht. Es werden dazu Szenarien untersucht, in denen korreliertes Rauschen  $\epsilon^K$  auf die terrestrischen Daten  $\Delta g^{1300S}$  addiert wird:

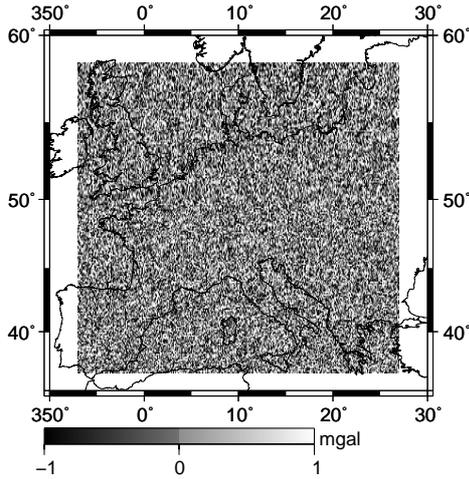


Abbildung 7.11. Unkorreliertes Rauschen  $\varepsilon^{\text{UK}}$  im Testgebiet mit einem Niveau von 1 mgal, Auflösung 6'.

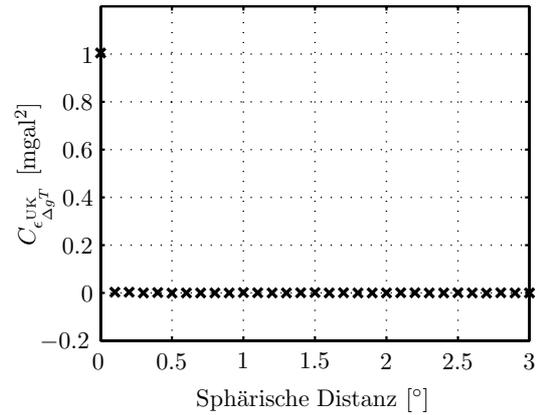


Abbildung 7.12. Empirische Kovarianzfunktion des unkorrelierten Rauschens  $\varepsilon^{\text{UK}}$  mit einem Niveau von 1 mgal, Auflösung 6'.

$$\Delta g^{T_k} = \Delta g^{1300S} + \varepsilon^K. \quad (7.2)$$

Die terrestrischen Daten  $\Delta g^{1300S}$  liegen in einem geographischen Gitter vor. Die Rauschwerte  $\varepsilon^K$  werden entsprechend in sphärischer Näherung für zweidimensionale Daten auf der Kugel erzeugt.

Die Modellierung korrelierter Rauschwerte für zweidimensionale Daten wird in der Literatur seltener behandelt als die Modellierung für eindimensionale Daten, die in der Zeitreihenanalyse Anwendung findet (z. B. Taubenheim, 1969; Papoulis und Pillai, 2002). Die Modellierung korrelierter zweidimensionaler Daten führt in den Bereich der Bildanalyse (Kashyap, 1984), der Signalverarbeitung (Woods, 1972) und der Geostatistik (Journel und Huijbregts, 1978, Kapitel 7; Davis, 1987b; Le Ravalec et al., 2000). Häufig wird dabei von Daten in der Ebene ausgegangen, eine Übersicht verschiedener Methoden zur Rauscherzeugung in der Ebene ist in (Fenton, 1994) zu finden. Im Folgenden wird ein Ansatz aus (Davis, 1987b) und seine Umsetzung zur Erzeugung korrelierten Rauschens für Punkte auf der Kugel erläutert.

**Ansatz zur Erzeugung korrelierten Rauschens auf der Kugel.** Die zu erzeugenden Rauschwerte stellen einen stochastischen GAUSS'schen Prozess dar, dessen Eigenschaften über den Erwartungswert (2.51) und die (Auto-)Kovarianz (2.52) festgelegt sind (Abschnitt 2.2.1).

Die Transformation unkorrelierten Rauschens in korreliertes Rauschen kann in Form eines Moving-Average-Prozesses (MA-Prozess) beschrieben werden. Dabei ergibt sich das Rauschen  $\varepsilon^K$  aus einer Linearkombination von normalverteilten unkorrelierten Werten  $\varepsilon^{\text{UK}}$  zu

$$\varepsilon^K(t) = \sum_{i=1}^q b_i \varepsilon_{t-i}^{\text{UK}}. \quad (7.3)$$

Dies entspricht einem MA-Prozess der Ordnung  $q$  (z. B. Whittle, 1983, S. 21; Hänsler, 2001, S. 119). Die verschiedenen Methoden zur Rauscherzeugung unterscheiden sich in der Festlegung der Faktoren  $b_i$ . Neben einer MA-Modellierung können die Rauschwerte auch mit einem Auto-Regressive-Prozess (AR-Prozess) oder einer Kombination beider (ARMA-Prozess) modelliert werden, wie es in (Mignolet und Spanos, 1992) zur Modellierung zweidimensionaler Prozesse in der Ebene gezeigt wird. Die MA-Modellierung wird in (Spanos und Mignolet, 1992) als stabiler bewertet.

Die Rauschwerte können anstelle des stochastischen Prozesses auch als Zufallszahlen interpretiert werden. Die stochastischen Eigenschaften der Zufallszahlen werden dann mit Hilfe des Erwartungswertes (2.44) und der Kovarianzmatrix  $\underline{C}$  aus (2.45) beschrieben. Bei der Erzeugung von Rauschen werden die Werte der Kovarianzmatrix durch ein Korrelationsmodell vorgegeben. Die Berechnung von  $n$  Werten des korrelierten Rauschens erfolgt mit einem dem MA-Prozess (7.3) ähnlichen Ansatz:

$$\underline{\varepsilon}_{n,1}^K = \underline{L}_{n,n} \underline{\varepsilon}_{n,1}^{\text{UK}}. \quad (7.4)$$

Die Matrix  $\underline{L}$  wird auf Basis der Kovarianzmatrix  $\underline{C}$  des korrelierten Rauschens ermittelt. In dieser Arbeit wird dazu die Kovarianzmatrix nach CHOLESKY faktorisiert (Davis, 1987b):

$$\underline{C} = \underline{L} \underline{L}^T. \quad (7.5)$$

Die Matrix  $\underline{L}$  ist dabei eine untere Dreiecksmatrix, auf die Zerlegung wird in Abschnitt 8.2 näher eingegangen. Andere Strategien zur Zerlegung der Matrix  $\underline{C}$  sind auch möglich, beispielsweise über die Berechnung ihrer Eigenwerte (Davis, 1987a).

Die Matrix  $\underline{C}$  ist die Kovarianzmatrix des Rauschens  $\underline{\epsilon}^K$  mit der Realisierung  $\underline{\epsilon}^K$  aus (7.4), denn es gilt

$$\begin{aligned} E(\underline{\epsilon}_{n,1}^K (\underline{\epsilon}_{n,1}^K)^T) &= E(\underline{L}_{n,n} \underline{\epsilon}_{n,1}^{UK} (\underline{\epsilon}_{n,1}^{UK})^T \underline{L}_{n,n}^T) \\ &= \underline{L}_{n,n} E(\underline{\epsilon}_{n,1}^{UK} (\underline{\epsilon}_{n,1}^{UK})^T) \underline{L}_{n,n}^T \\ &= \underline{L}_{n,n} \underline{I}_{n,n} \underline{L}_{n,n}^T = \underline{C}_{n,n} \end{aligned} \quad (7.6)$$

mit der Einheitsmatrix  $\underline{I}$  als Kovarianzmatrix der Zufallswerte  $\underline{\epsilon}^{UK}$ . Die Beziehung (7.4) wird auch als Fehlerfortpflanzung zufälliger Abweichungen und die Beziehung (7.5) als zugehörige Kovarianzfortpflanzung bezeichnet (Pelzer, 1985, S. 57). Ein Vorteil der Methode (7.4) ist ihre Flexibilität, da beliebige Korrelationseigenschaften und räumliche Verteilungen (auch auf der Kugel) der Größen  $\underline{\epsilon}^K$  berücksichtigt werden können.

Die Faktorisierung (7.5) stellt in der Theorie kein Problem dar, da die Kovarianzmatrix  $\underline{C}$  positiv definit ist, s. Abschnitt 2.2.1. Bei großen Datenmengen kann die Faktorisierung in der Praxis hinsichtlich des Speicherplatzes und der Rechenzeit jedoch zu Problemen führen, weshalb die Berechnung auf kleinere Kacheln beschränkt wird (Alabert, 1987) oder eine spezielle Anordnung der Elemente in der Matrix  $\underline{C}$  ausgenutzt wird (Dietrich, 1993). Bei Verwendung einer homogenen und isotropen Korrelationsfunktion ergibt sich für geographische Gitterdaten auf der Kugel eine Block-TOEPLITZ-Struktur, wie es ausführlich in Abschnitt 8.3 beschrieben wird. Zusätzlich wird eine finite Korrelationsfunktion eingesetzt, die ab einem bestimmten Abstand null ist, um eine Bandstruktur in der Kovarianzmatrix  $\underline{C}$  zu erzeugen. Bei der Berechnung eindimensionalen Rauschens oder zweidimensionalen Rauschens in der Ebene ist auch eine effiziente Faktorisierung der Kovarianzmatrix im Frequenzraum möglich (Le Ravalec et al., 2000). Unter der Voraussetzung einer homogenen und isotropen Korrelationsfunktion lässt sich das Rauschen für Daten auf der Kugel auch im Frequenzraum ausgehend von Fehlergradvarianzen erzeugen (Agren, 2004). Auf vergleichende Untersuchungen der verschiedenen Ansätze zur Rauscherzeugung ist in dieser Arbeit verzichtet worden, da die Rechenzeit zur einmaligen Erzeugung des Rauschens eine untergeordnete Rolle spielt. Es wird der Ansatz (7.4) mit (7.5) eingesetzt.

**Korrelationsmodell.** Zur Modellierung der Korrelation des Rauschens der terrestrischen Daten  $\Delta g^T$  wird das in Abschnitt 3.4.4 eingeführte Modell (3.54) verwendet: Die Kovarianzfunktion

$$C_{\epsilon_{\Delta g}^K \epsilon_{\Delta g}^K}(\psi) = \sigma^2(\epsilon_{\Delta g^T}^K) e^{-4.0\psi[^\circ]}$$

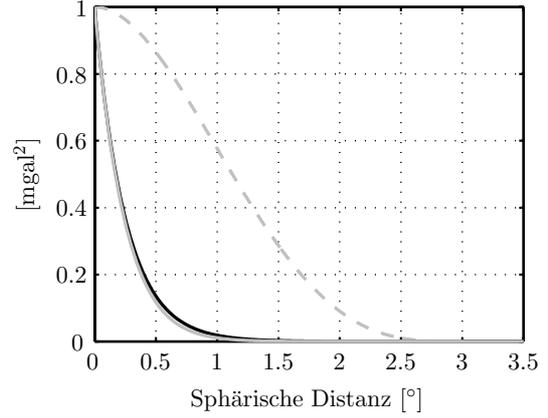
mit einem Rauschniveau von  $\sigma(\epsilon_{\Delta g^T}^K)$  ist homogen und isotrop und fällt mit wachsendem Abstand  $\psi$  zu null ab, erreicht aber nie den Wert null (Abb. 7.13). Wäre die Kovarianzfunktion hingegen finit, könnte in der oben eingeführten Kovarianzmatrix  $\underline{C}$  eine Bandstruktur erzeugt werden. Dies ermöglicht eine Reduktion des Speicherplatzes, aber auch der Rechenzeit zur Faktorisierung der Matrix (Abschnitt 8.3). Auch wenn die Werte der Kovarianzfunktion  $C_{\epsilon_{\Delta g}^K \epsilon_{\Delta g}^K}(\psi)$  ab einer gewissen Distanz  $\psi$  sehr klein sind, dürfen die Werte nicht auf null gesetzt werden, da sonst die Kovarianzmatrix  $\underline{C}$  nicht mehr positiv definit ist (Sansò und Schuh, 1987). Diese Eigenschaft ist Voraussetzung zur Faktorisierung der Kovarianzmatrix.

Um dennoch eine finite Kovarianzfunktion, die ab einer gewissen Distanz  $2\psi_F$  exakt null wird, zu erhalten, wird die Kovarianzfunktion  $C_{\epsilon_{\Delta g}^K \epsilon_{\Delta g}^K}(\psi)$  mit einer positiv definiten und finiten Funktion

$$g(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{3}\psi_F^6\pi - \frac{1}{2}\psi_F^4\psi^2 + \frac{1}{3}(\psi_F^4\psi + \frac{4}{3}\psi_F^2\psi^3 - \frac{1}{12}\psi^5) \sqrt{\psi_F^2 - \left(\frac{\psi}{2}\right)^2} + (\psi_F^4\psi^2 - \frac{2}{3}\psi_F^6) \arcsin \frac{\psi}{2\psi_F} & \text{für } \psi \leq 2\psi_F \\ 0 & \text{für } \psi > 2\psi_F \end{cases} \quad (7.7)$$

**Tabelle 7.2.** Statistik des Rauschens  $\varepsilon_{UK}$  und  $\varepsilon_K$  im Testgebiet (Auflösung des Gitters  $6'$ ), Einheit mgal.

Rauschscenario	1UK	1K	5K
Rauschniveau	1.0	1.0	5.0
Mittelwert (Mtw)	-0.00	-0.02	-0.08
Standardabweichung (Std)	1.00	1.02	5.10
Minimum (Min)	-4.36	-4.28	-21.39
Maximum (Max)	4.22	4.46	22.29



**Abbildung 7.13.** Kovarianzfunktion  $C_{\epsilon_{\Delta_g}^K \epsilon_{\Delta_g}^K}(\psi)$  (—) des Rauschens für ein Rauschniveau von 1 mgal, positiv definite Funktion  $g(\psi)$  (- - -, grau) nach (7.7) und finite Kovarianzfunktion  $C_{\epsilon_{\Delta_g}^K \epsilon_{\Delta_g}^K}^F(\psi)$  (—, grau).

multipliziert (Sansò und Schuh, 1987). Die positiv definite, finite Funktion (7.7) ist das Resultat der Faltung einer parabelförmigen Funktion

$$p(\psi) = \begin{cases} \psi_F^2 - \psi^2 & \text{für } 0 \leq \psi \leq \psi_F \\ 0 & \text{für } \psi > \psi_F \end{cases} \quad (7.8)$$

mit sich selbst. Für die resultierende finite Kovarianzfunktion  $C_{\epsilon_{\Delta_g}^K \epsilon_{\Delta_g}^K}^F(\psi)$  gilt schließlich

$$C_{\epsilon_{\Delta_g}^K \epsilon_{\Delta_g}^K}^F(\psi) = \begin{cases} g(\psi) C_{\epsilon_{\Delta_g}^K \epsilon_{\Delta_g}^K}(\psi) / g(\psi = 0) & \text{für } \psi \leq 2\psi_F \\ 0 & \text{für } \psi > 2\psi_F \end{cases} \quad (7.9)$$

Die Kovarianzfunktion  $C_{\epsilon_{\Delta_g}^K \epsilon_{\Delta_g}^K}(\psi)$ , die positiv definite finite Funktion  $g(\psi)$  und die resultierende Funktion  $C_{\epsilon_{\Delta_g}^K \epsilon_{\Delta_g}^K}^F(\psi)$  sind in Abb. 7.13 für ein Rauschniveau von  $\sigma(\epsilon_{\Delta_g^T}^K) = 1$  mgal dargestellt. Die Abweichungen der ursprünglichen Funktion  $C_{\epsilon_{\Delta_g}^K \epsilon_{\Delta_g}^K}(\psi)$  von der finiten Funktion  $C_{\epsilon_{\Delta_g}^K \epsilon_{\Delta_g}^K}^F(\psi)$  betragen dabei im Bereich  $0 \leq \psi \leq 2\psi_F$  maximal 2% von der Varianz  $C_{\epsilon_{\Delta_g}^K \epsilon_{\Delta_g}^K}(\psi = 0)$ .

In den numerischen Berechnungen auf Basis des synthetischen Erdmodells werden als Rauschniveau  $\sigma(\epsilon_{\Delta_g^T}^K)$  der terrestrischen Daten 1 mgal und 5 mgal gewählt, die jeweiligen Testszenarien werden mit 1K und 5K bezeichnet. Die Statistik des nach dem oben beschriebenen Ansatz erzeugten korrelierten Rauschens ist in Tabelle 7.2 für das Testgebiet angegeben. Für das Rauschniveau von 1 mgal ist das Rauschen in Abb. 7.14 dargestellt. Die zugehörige empirisch nach (2.68) berechnete Kovarianzfunktion ist in Abb. 7.15 gezeigt.

## 7.5 Erzeugung der synthetischen Daten für verschiedene Testszenarien

In diesem Abschnitt werden die auf Grundlage des synthetischen Erdmodells berechneten Daten vorgestellt. Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Testgebiet hat eine Ausdehnung von  $22^\circ$  in der geographischen Breite und  $34^\circ$  in der geographischen Länge. Die Datensätze liegen in einem regelmäßigen geographischen Gitter mit der Begrenzung  $36.5^\circ < \varphi < 58.5^\circ$  und  $-7.0^\circ < \lambda < 27^\circ$  vor. Die Höhen auf Basis des SYNDGM sind für diesen Bereich in Abb. 7.16 dargestellt. Die Hochgebirgsstruktur der Alpen liegt zentral im Testgebiet.

### 7.5.1 Schwereanomalien

Die terrestrischen Daten  $\Delta g^T$  ergeben sich aus den Schwereanomalien  $\Delta g^{1300S}$ , die auf Basis des SYNGPM1300S in der Höhe des SYNDGM über dem GRS80-Ellipsoid nach (2.26) berechnet werden, und jeweils korreliertem oder unkorreliertem Rauschen. Die Testszenarien werden entsprechend nach den in Tabelle 7.2 eingeführten Abkürzungen mit 1UK, 1K und 5K je nach Korrelationsgrad und Niveau des Rauschens bezeichnet. Grundlage

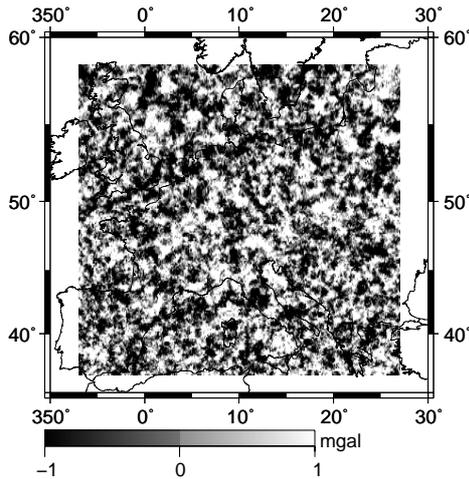


Abbildung 7.14. Korreliertes Rauschen  $\varepsilon^K$  im Testgebiet mit einem Niveau von 1 mgal, Auflösung des Gitters  $6'$ .

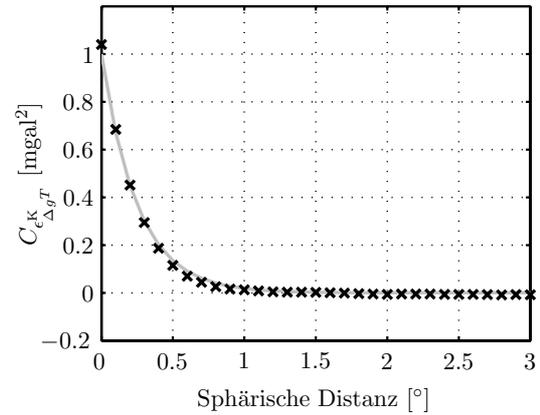


Abbildung 7.15. Empirische (x) und analytisch vorgegebene (—, grau) Kovarianzfunktion des korrelierten Rauschens  $\varepsilon^K$  mit einem Niveau von 1 mgal, Auflösung  $6'$ .

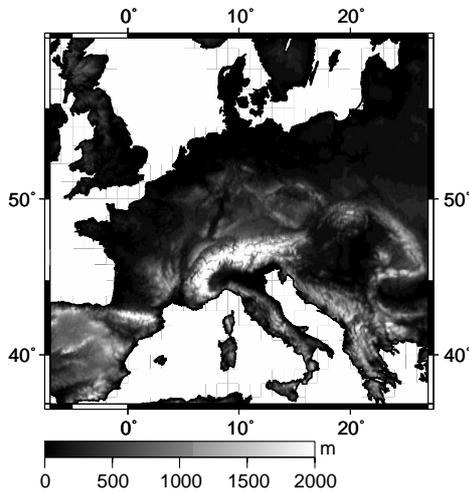


Abbildung 7.16. Höhen im Testgebiet auf Basis des SYNDGM, Auflösung des Gitters  $5'$ .

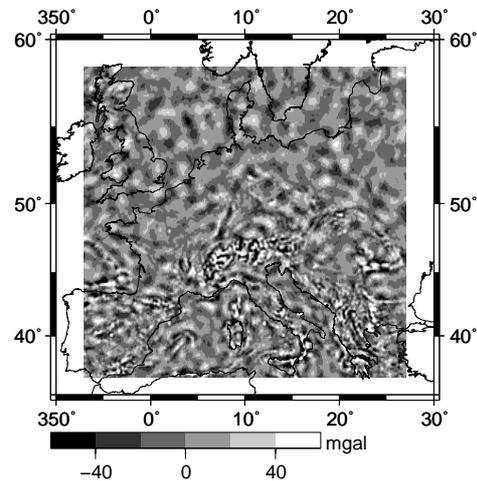
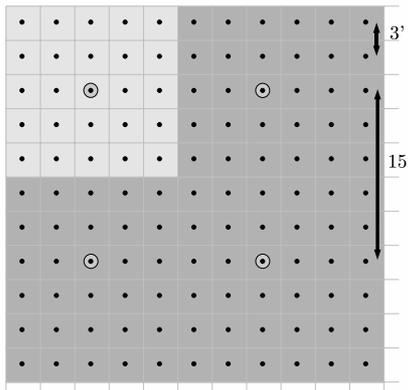


Abbildung 7.17. Residuale Punktschwereanomalien  $\Delta g^R$  im Testgebiet (ohne Rauschen der terrestrischen Daten), Auflösung des Gitters  $6'$ .

der Schwereanomalien  $\Delta g^M$  ist das SYNGPM360I. Aus der Differenz von  $\Delta g^T$  und  $\Delta g^M$  ergeben sich die residualen Beobachtungen  $\Delta g^R$ .

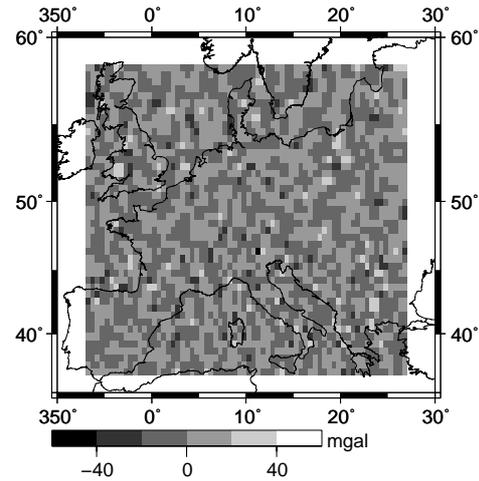
In den Testszenarien wird einerseits das Rauschen der terrestrischen Daten variiert, andererseits aber auch die Datenauflösung. Die feinste Auflösung der Beobachtungen, die zur Berechnung der Tensorkomponenten verwendet werden, beträgt  $6'$ . Diese Auflösung reicht aus, um das ursprüngliche Signal auf Basis des SYNGPM1300S vollständig rekonstruieren zu können. Der maximale sphärisch-harmonische Grad  $n_{\max}^{\text{syn}} = 1300$  des SYNGPM1300S entspricht einer Auflösung von etwa  $8'$ . Die kleinste auftretende Wellenlänge der Länge  $16'$  wird daher mindestens zweimal bei einer Abtastweite von  $6'$  erfasst, wie es nach dem NYQUIST-Theorem (Meier und Keller, 1990) zur vollständigen Signalrekonstruktion erforderlich ist. Die residualen Punktwerte  $\Delta g^R$  sind in Abb. 7.17 dargestellt. Die Signalamplituden der residualen Schwereanomalien variieren stark in Bereichen großer Höhenänderungen (z. B. den Alpen, vgl. Abb. 7.16). Dies findet sich auch in der Signalstruktur realer Daten, vgl. Abb. 10.2, selbst wenn diese RTM-reduziert wurden. Ohne RTM-Reduktion träte noch sehr viel höherfrequentes Signal auf. Neben Punktwerten der Auflösungsstufe  $6'$  werden Gitter aus Punktwerten mit einer Auflösung von  $15'$  und  $30'$  erzeugt. Die Statistik der Datensätze (ohne Rauschen  $\varepsilon^{\text{UK}}$  bzw.  $\varepsilon^K$  der  $\Delta g^T$ ) sind in Tabelle 7.3 angegeben. Die Höhen des geographischen Gitters in der jeweiligen Auflösung wurden auf Basis des SYNDGM mittels kubischem Spline-Ansatz (Bronstein et al., 1996) interpoliert.



**Abbildung 7.18.** Prinzipische Skizze der arithmetischen Mittelwertbildung zur Berechnung von Blockmittelwerten; aus dem Mittelwert von  $5 \times 5$   $3'$ -Blöcken ergeben sich Blockmittelwerte der Auflösung von  $15'$ .

**Tabelle 7.3.** Statistik der Schwereanomalien (Punktwerte, PW; Blockmittelwerte, BM)  $\Delta g^T$ ,  $\Delta g^M$  und residuale Schwereanomalien  $\Delta g^R$  im Testgebiet, hier ohne Rauschen der  $\Delta g^T$ , Einheit mgal.

$\Delta g$	Aufl	Mtw	Std	Min	Max
$\Delta g^T$	6 (PW)	10.07	33.36	-173.11	211.00
	15 (PW)	10.06	33.40	-162.57	206.22
	30 (PW)	9.66	33.21	-145.17	151.38
$\Delta g^M$	6 (PW)	10.14	32.40	-146.72	146.92
	15 (PW)	10.14	32.40	-141.29	143.60
	30 (PW)	10.15	32.40	-133.88	140.05
$\Delta g^R$	6 (PW)	-0.08	19.12	-148.18	152.57
	15 (PW)	-0.08	19.11	-113.57	134.77
	bzw. 30 (PW)	-0.49	18.89	-148.18	72.10
$\overline{\Delta g}^R$	15 (BM)	-0.08	16.24	-81.65	107.34
	30 (BM)	-0.08	12.28	-41.56	50.80



**Abbildung 7.19.** Residuale Blockmittelwerte  $\overline{\Delta g}^R$  (ohne Rauschen der terrestrischen Daten), Auflösung des Gitters  $30'$ .

**Tabelle 7.4.** Statistik der Elemente des Tensors  $T_{[ij]}^{1300S}$  und des Tensors  $T_{[ij]}^R$  in der Höhe  $h = 250$  km im Testgebiet, Einheit mE, Auflösung des Gitters  $6'$ .

$T_{ij}$	Mtw	Std	Min	Max
$T_{xx}^{1300S}$	-82.24	150.67	-666.38	381.25
$T_{xy}^{1300S}$	-31.44	85.67	-246.97	379.60
$T_{xz}^{1300S}$	15.52	188.38	-1123.73	589.40
$T_{yy}^{1300S}$	-54.16	131.52	-478.90	526.91
$T_{yz}^{1300S}$	48.17	159.89	-745.41	578.10
$T_{zz}^{1300S}$	136.40	242.90	-880.26	941.16
$T_{xx}^R$	-0.00	4.04	-13.23	14.62
$T_{xy}^R$	-0.01	2.41	-8.81	10.12
$T_{xz}^R$	-0.08	4.71	-13.74	17.94
$T_{yy}^R$	-0.00	4.77	-17.27	18.14
$T_{yz}^R$	-0.01	5.37	-18.41	20.07
$T_{zz}^R$	0.01	7.20	-27.33	26.19

Zusätzlich zu den Punktwerten werden Blockmittelwerte  $\overline{\Delta g}^R$  berechnet (Abschnitt 2.1.5). Dazu werden residuale Schwereanomalien als Punktwerte mit einer Auflösung von  $3'$  erzeugt. Die feine Auflösung, die keine zusätzliche Signalinformation enthält, wird hier gewählt, um Blockmittelwerte der Auflösungen  $15'$  bzw.  $30'$  aus dem arithmetischen Mittel von  $5 \times 5$  bzw.  $10 \times 10$  Gitterpunkten der Punktwerte bilden zu können, wie es in Abb. 7.18 skizziert ist. Bei einer Auflösungsstufe von  $30'$  wäre auch die Blockmittelwertbildung auf Basis von  $5 \times 5$  Gitterpunkten mit einer Auflösung von  $6'$  möglich. Die residualen Blockmittelwerte der Auflösungsstufe  $30'$  sind in Abb. 7.19 dargestellt, die Statistik beider Datensätze (ohne Rauschen  $\varepsilon^{UK}$  bzw.  $\varepsilon^K$ ) ist in Tabelle 7.3 zu finden. Die Bezugshöhen der Blockmittelwerte wurden durch entsprechende Mittelbildung auf Grundlage des SYNDGM berechnet.

Es ist hierbei zu beachten, dass die Blockmittelwerte aus Punktwerten ohne Rauschen der terrestrischen Daten  $\Delta g^T$  berechnet werden. Im Fall realer Daten ist ein solches Vorgehen natürlich nicht möglich, da das (unbekannte) Rauschen nicht von den Daten getrennt werden kann, s. a. Abschnitt 10.2. Bei den numerischen Untersuchungen auf Basis der synthetischen Daten wurde entschieden, die Ergebnisse auf Basis identischen Rauschens für die Beobachtungen unterschiedlicher Auflösung zu analysieren. Das Rauschen der Szenarien 1UK, 5UK und 5K wurde daher für eine Auflösung von  $6'$  generiert. Das Rauschen für die Datensätze mit größerer Auflösung wurde mittels kubischem Spline-Ansatz im Fall des korrelierten Rauschens und durch Zuweisung des nächstgelegenen (engl. *nearest neighbour*) Rauschwertes im Fall unkorrelierter Daten auf Basis des  $6'$ -Rauschens

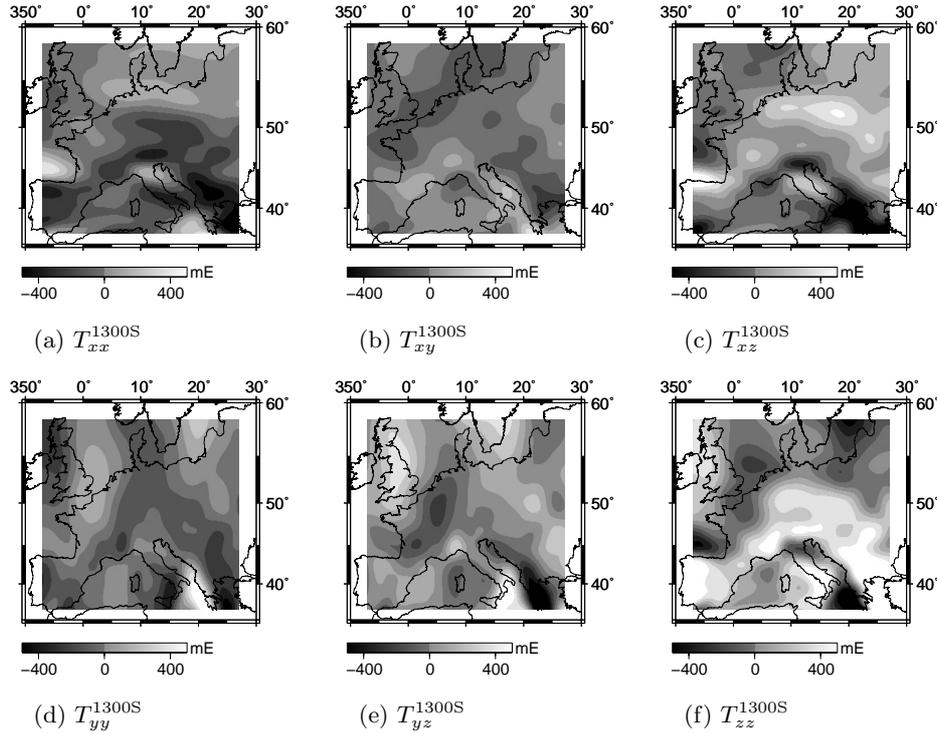


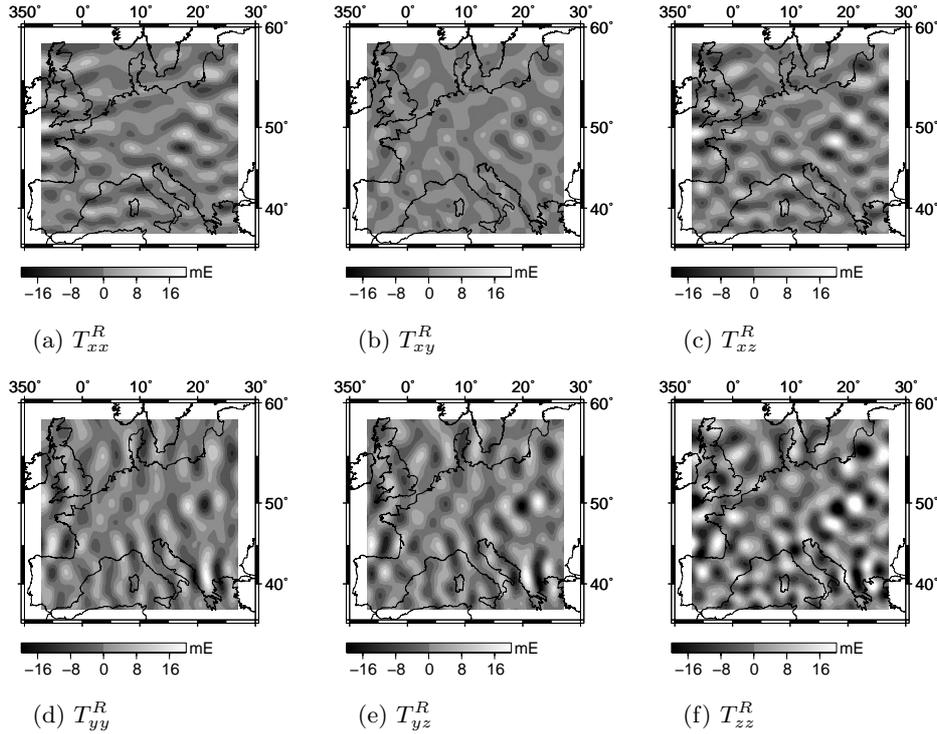
Abbildung 7.20. Elemente des Tensors  $T_{[ij]}^{1300S}$  im Testgebiet, Auflösung des Gitters 6'.

abgeleitet. Das Rauschen auf Basis des SYNGPM360I hingegen wird auch bei den synthetischen Daten in der Blockmittelwertbildung mitgeführt.

## 7.5.2 Tensorkomponenten

Die Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  werden nach (2.30) und (2.32a) bis (2.32i) in der ellipsoidischen Höhe  $h = 250$  km über dem GRS80-Ellipsoid aus dem synthetischen GPM erzeugt. Die Achsen des lokalen Koordinatensystems sind, wie in Abschnitt 2.1.4 angegeben, nach Norden ( $x$ ), Osten ( $y$ ) und radial nach außen ( $z$ ) ausgerichtet. Die Höhe von 250 km entspricht in etwa der geplanten Bahnhöhe von GOCE. Die tatsächliche Höhe variiert im Bereich von etwa  $\pm 20$  km (SCVII, 2000). Die Elemente des Tensors  $T_{[ij]}^{1300S}$  werden auf Basis des SYNGPM1300S berechnet und stellen die exakten Sollwerte dar. Die Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^M$  werden aus dem SYNGPM360I abgeleitet und stehen für die Restitution der residualen Größen zur Verfügung. Die auf Basis der Schwereanomalien berechneten und anschließend restituierten Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  werden in der Evaluierung der Ergebnisse mit den Elementen des exakten Tensors  $T_{[ij]}^{1300S}$  verglichen. Alternativ können die residualen Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  mit den residualen Sollwerten  $T_{[ij]}^R = T_{[ij]}^{1300S} - \hat{T}_{[ij]}^M$  verglichen werden, um die Berechnung der Restitution seitens der Ist-Werte einzusparen.

Die Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  werden in gleicher Auflösung, in der die eingehenden terrestrischen Daten vorliegen, berechnet. Die residualen Werte der größeren Auflösungsstufen (15', 30') werden anschließend auf Punkte eines Gitters mit der Auflösung von 6' interpoliert (siehe Abschnitt 9.4), um alle Ergebnisse miteinander vergleichen zu können. Der Soll-Ist-Vergleich mit dem Tensor  $T_{[ij]}^R$  erfolgt ebenfalls anhand der interpolierten Werte. Daher werden die Elemente der Tensoren  $T_{[ij]}^{1300S}$  und  $T_{[ij]}^M$  nur in der 6'-Auflösungsstufe berechnet. Die Elemente des Tensors  $T_{[ij]}^{1300S}$  über dem Testgebiet sind in Abb. 7.20 dargestellt, ihre Statistik ist in Tabelle 7.4 angegeben. Die Standardabweichung der Mittelwerte liegt im Bereich von 85 mE bis 240 mE. Die radiale Komponente  $T_{zz}^{1300S}$  ist, abgesehen vom Minimalwert der Komponente  $T_{xz}^{1300S}$ , das signalstärkste Element mit der größten Standardabweichung des Mittelwertes. Die Änderung der Gravitationsbeschleunigung in radialer Richtung, zum Massenmittelpunkt der Erde weisend, ist größer als in horizontaler Richtung. Das Signal des Tensors in der Bahnhöhe von GOCE ist gegenüber dem Signal der terrestrischen Schwereanomalien stark geglättet. Der Bereich der Alpen ist hier vor allem in der Komponente  $T_{zz}^{1300S}$  zu erkennen. Die Komponenten  $T_{xx}^{1300S}$  und  $T_{xz}^{1300S}$



**Abbildung 7.21.** Elemente des Tensors  $T_{[ij]}^R$  im Testgebiet, Auflösung des Gitters  $6'$ .

sind besonders empfindlich für Gravitationsänderungen in Nord-Süd-Richtung also für Signalstrukturen mit einer Ausdehnung in Ost-West-Richtung, da die  $x$ -Achse nach Nord gerichtet ist. Dementsprechend zeigen die Komponenten  $T_{yy}^{1300S}$  und  $T_{yz}^{1300S}$  Signalstrukturen mit einer Ausdehnung in Nord-Süd-Richtung an. Die Komponente  $T_{xy}^{1300S}$  ist die schwächste. Die Sollwerte  $T_{[ij]}^R$  der Approximation  $\hat{T}_{[ij]}^R$  sind in Abb. 7.21 dargestellt, ihre Statistik ist in Tabelle 7.4 zu finden. Durch Abzug des langwelligen Signalanteils auf Basis des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^M$  wurden die Standardabweichungen der Mittelwerte auf den Bereich von 2 mE bis 7 mE reduziert. Die radiale Komponente bleibt das signalstärkste Element. Ebenso ist auch hier die typische Ausdehnungsrichtung der Signalstrukturen in den Komponenten mit horizontalen Ableitungen zu erkennen.

## 8 Implementierung der Berechnungsverfahren

In diesem Kapitel werden wichtige Implementierungsaspekte der Berechnungsverfahren besprochen. Der erste Abschnitt behandelt die Auswertung des Integrationsverfahrens mit Hilfe der Fouriertransformation. Bei der Anwendung der Kollokation ist ein Gleichungssystem zu lösen, dessen Dimension gleich der Anzahl der Beobachtungen ist. Das Gleichungssystem enthält die Beobachtungen und ihre Kovarianzmatrix. In dieser Arbeit werden zur Lösung des Gleichungssystems ausschließlich direkte Löser eingesetzt, die eine Faktorisierung der Kovarianzmatrix nutzen. Eine andere Gruppe von möglichen Lösungsverfahren sind indirekte Löser, die startend von einer Näherungslösung iterativ die Lösung approximieren. Indirekte Löser sind günstig für schwach besetzte Matrizen, s. a. (Golub und van Loan, 1990). Die Kovarianzmatrix in der Kollokation ist jedoch voll besetzt, für die direkte Lösung des Gleichungssystems wird die CHOLESKY-Faktorisierung eingesetzt. Der Kovarianzwert zwischen zwei Punkten hängt von dem Abstand und gegebenenfalls vom Azimut zwischen den Punkten ab, aber auch von der Höhe der beiden Punkte (Abschnitt 5.2.1). In der vorliegenden Arbeit wird numerisch untersucht, welche Auswirkung die Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe hat. Wird die individuelle Punkthöhe berücksichtigt, ergibt sich auch für Beobachtungen eines geographischen Gitters keine besondere Anordnung der Elemente in der Kovarianzmatrix, da die Kovarianzwerte sich in der Regel nicht wiederholen. Das Gleichungssystem wird dann auf einer Parallelrechnerarchitektur gelöst (Abschnitt 8.2). Liegen die Beobachtungen des geographischen Gitters jedoch in konstanter Höhe, können die Elemente der Kovarianzmatrix in einer speziellen Struktur (Block-TOEPLITZ) angeordnet werden (Abschnitt 8.3). Durch Ausnutzung dieser Struktur kann Speicherplatz und Rechenzeit gespart werden. Zur Lösung des Gleichungssystems mit der Block-TOEPLITZ-Struktur der Kovarianzmatrix wurden bereits sowohl direkte als auch indirekte Löser eingesetzt (Bottoni und Barzaghi, 1993; Tsaoussi, 1989). In dieser Arbeit wird auch hier die direkte Lösung auf Basis der CHOLESKY-Faktorisierung angewendet. Der CHOLESKY-Faktor der Kovarianzmatrix des Rauschens wird außerdem zur Erzeugung des farbigen Rauschens benötigt.

Im Rahmen der Kollokation werden zur Berechnung der Kovarianzwerte die Routinen COVAX.F, COVBX.F und COVCX.F eingesetzt, für Erläuterungen zu den Routinen sei auf (Tscherning und Rapp, 1974; Tscherning, 1976b) verwiesen. Die Routinen werden von C. C. Tscherning in (Tscherning, 2005) für wissenschaftliche Zwecke zur Verfügung gestellt. In diesem Kapitel steht die Lösung des Gleichungssystems im Vordergrund, die Berechnung der Kovarianzwerte wird nicht behandelt.

### 8.1 Numerische Auswertung der Integration auf der Kugel

In der numerischen Auswertung der Integration im Integrationsverfahren zur Berechnung der Komponenten des residualen Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  werden die Integrale aus (5.7) durch Summen ersetzt:

$$\hat{T}_{ij}^R = \frac{R}{4\pi} \sum_{\varphi_Q=\varphi_1}^{\varphi_{n_\varphi}} \sum_{\lambda_Q=\lambda_1}^{\lambda_{n_\lambda}} K_{ij} \Delta g^R(Q) \cos \varphi_Q \Delta \varphi_Q \Delta \lambda_Q, \text{ für } i, j = x, y, z. \quad (8.1)$$

Es wird von residualen Beobachtungen in Form von Schwereanomalien  $\Delta g^R$  ausgegangen, die in einem regelmäßigen geographischen Gitter in konstanter Höhe mit  $n_\varphi$  Punkten in Meridian- und  $n_\lambda$  Punkten in Breitenkreisrichtung vorliegen. Die Schwereanomalien in den Gitterpunkten können durch Anwendung der Kollokation aus den benachbarten unregelmäßig verteilten Punktwerten berechnet werden, s. a. (Denker und Torge, 1998). Die direkte Anwendung der Integration auf unregelmäßig verteilte Punktwerte kann realisiert werden durch Gewichtung der Eingangsdaten gemäß einer Fläche, die dem Punktwert in einer Dreiecksvermaschung aller Daten zugeordnet wird (Rummel, 1982a,b). Die Auswertung der Integration unregelmäßig verteilter Daten im Frequenzraum wird in (Sideris, 1995) behandelt.

Gleichung (8.1) stellt eine Faltung der Funktion  $\Delta g^R$  mit der Kernfunktion  $K_{ij}$  im Ortsraum in diskreter Form dar. Die Kernfunktion wird in der Faltung von Berechnungspunkt zu Berechnungspunkt verschoben und

elementweise mit den Funktionswerten  $\Delta g^R$  multipliziert, die Produkte werden aufsummiert. Diese Berechnung ist im Ortsraum sehr rechenintensiv, effizienter ist die Berechnung im Frequenzraum. Dazu wird die zu faltende Funktion und die Kernfunktion mit Hilfe der (diskreten) Fouriertransformation in den Frequenzraum überführt. Das gesuchte Ergebnis im Ortsraum erhält man über die inverse Fouriertransformation des Produktes von Beobachtungs- und Kernfunktion im Frequenzraum (Brigham, 1988). Durch Anwendung von Algorithmen für eine schnelle Fouriertransformation (FFT) ist der Berechnungsaufwand erheblich geringer als bei der Faltung im Ortsraum, s. a. (Schwarz et al., 1990).

Eine Voraussetzung zur Anwendung der FFT ist, dass die Daten äquidistante Abstände zueinander haben. Die oben eingeführten Punkte des geographischen Gitters sind entlang der Meridian- und Parallelkreisbögen in konstanten Abständen  $\Delta\varphi$  bzw.  $\Delta\lambda$  angeordnet. Aufgrund der Meridiankonvergenz ist der sphärische Abstand zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten auf verschiedenen Parallelkreisen nicht identisch, vgl. Abb. 8.1 auf S. 94. Eine exakte und effiziente Lösung von (8.1) ist möglich, indem in Parallelkreisrichtung die Faltung durch Anwendung der FFT im Frequenzraum gelöst, die Faltung in Meridianrichtung aber im Ortsraum durchgeführt wird (Haagmans et al., 1993). Die Auswertemethode wird als 1D-FFT bezeichnet, weil die FFT nur entlang der Parallelkreise angewendet wird. Die Methode wird in vielen Arbeiten für die Auswertung von Integrationsverfahren zur Geoidberechnung genutzt, z. B. (Tziavos, 1996; Denker und Torge, 1998; Featherstone, 1999; Omang und Forsberg, 2002; Gerlach, 2003; Roland, 2005).

Neben der 1D-FFT-Methode wird auch häufig die 2D-FFT-Methode (Schwarz et al., 1990; Tziavos, 1993) und die sphärische Multi-Band-FFT-Methode (Forsberg und Sideris, 1993) eingesetzt. Die Berechnungsgeschwindigkeit beider Methoden ist höher als die der 1D-FFT-Methode, jedoch wird die Integration (8.1) nicht exakt berechnet, da die Forderung der Äquidistanz nicht streng erfüllt wird (Haagmans et al., 1993). Die 1D-FFT-Methode wird in dieser Arbeit daher bevorzugt.

Bei der Auswertung der Faltung im Frequenzraum muss beachtet werden, dass für die Transformation in den Frequenzraum die Periodizität des Signals implizit unterstellt wird. Streng gilt dies nur für global vorliegende Datensätze  $\Delta g^R$ , nicht für regional begrenzte Datensätze. Regionale Datensätze werden implizit periodisch fortgesetzt. Dies hat bei der Faltung zur Folge, dass im Randbereich Daten von der im Ortsraum gegenüberliegenden Seite verwendet werden. Diese Verfälschung des Faltungsergebnisses wird vermieden, indem im Falle der 1D-FFT am Ost- und am Westende der Datenreihe je 50% Nullen angefügt werden und die Kernfunktion über die Gesamtlänge ausgedehnt wird (Haagmans et al., 1993). Mit dieser Nullpolsterung (engl. *zeropadding*) entspricht das Ergebnis der 1D-FFT-Methode (im Rahmen der Rechengenauigkeit) der numerischen Integration (8.1).

Die Berechnung der Komponente  $\hat{T}_{zz}^R$  erfolgte mit dem Programm `CFFT1D.F` (Denker, 2003). Zur Berechnung der übrigen Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  wurde das Programm im Rahmen der vorliegenden Arbeit erweitert.

Bei der Berechnung der Kernfunktionen  $K_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) aus (5.8) lassen sich Rechenoperationen einsparen, wenn zunächst die Terme, die nur von der sphärischen Distanz  $\psi$ , aber nicht vom Azimut  $\alpha$  abhängen, wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
 K_1(\psi) &= \frac{1}{2r^2}(K_{\psi\psi} + K_{\psi} \cot \psi) \\
 K_2(\psi) &= \frac{1}{2r^2}(K_{\psi\psi} - K_{\psi} \cot \psi) \\
 K_3(\psi) &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} K_{\psi} - K_{\psi r} \right) \\
 K_4(\psi) &= \frac{1}{r} K_r \\
 K_5(\psi) &= K_{rr} .
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Die Ergebnisse der Ausdrücke (8.2) in Abhängigkeit von  $\psi$  werden abgespeichert, um wiederholte Auswertungen der Reihenentwicklungen (5.3) zu vermeiden. Die Kernfunktionen  $K_{ij}$  aus (5.8) werden dann in Abhängigkeit vom Azimut  $\alpha$  wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
 K_{xx} &= K_4 + K_1 + K_2 \cos(2\alpha) \\
 K_{xy} &= K_2 \sin(2\alpha) \\
 K_{xz} &= K_3 \cos \alpha \\
 K_{yy} &= K_4 + K_1 - K_2 \cos(2\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{yz} &= K_3 \sin \alpha \\ K_{zz} &= K_5 . \end{aligned} \quad (8.3)$$

Die Berechnung der Werte der Kernfunktionen  $K_{[ij]}(\psi, \alpha)$  erfolgt durch Interpolation der tabellierten Werte  $K_i(\psi)$ ,  $i = 1, \dots, 5$  nach (8.2) und nachfolgender Auswertung von (8.3) in Abhängigkeit vom Azimut  $\alpha$ . Dabei werden zusätzlich Symmetrieeigenschaften in Bezug auf das Azimut ausgenutzt. Die Azimutverhältnisse zu den Nachbarpunkten wiederholen sich wie die Abstandsverhältnisse für die Punkte eines Parallelkreises, vgl. Abb. 8.1. Daher kann die Azimutabhängigkeit in die 1D-FFT-Methode integriert werden. Der Verlauf der Funktionen  $K_i(\psi)$ ,  $i = 1, \dots, 5$  ist für kleine Abstände steil, für große Abstände  $\psi$  zunehmend flacher. Die Tabellierung der Werte  $K_i(\psi)$ ,  $i = 1, \dots, 5$  in Abhängigkeit von der sphärischen Distanz  $\psi$  erfolgt daher nicht für linear anwachsende Abstände  $\psi_{\text{intab}} = k\Delta\psi$  als Vielfaches der Abtastweite  $\Delta\psi$ , sondern für Abstände  $\psi_{\text{sintab}} = 2 \arcsin(k^2 \Delta\psi)$ , wodurch eine feinere Abtastung für kleine Abstände und eine gröbere Abtastung für große Abstände erreicht wird. Um für Gitterblöcke nahe des Berechnungspunktes trotz steilem Verlauf der Kernfunktion repräsentative Gewichtswerte zu erhalten, werden für Punkte in einem inneren Bereich  $0 < \psi < \psi_I$  Mittelwerte der Gewichte aus einer feineren Abtastung der Kernfunktion gebildet, vgl. (Grote, 1996).

Anders als bei der Berechnung des Integralkerns in der Geoidberechnung (s. a. Denker und Torge, 1998) ist der Abbruch der Summation in den Reihenentwicklungen (5.3) unproblematisch, wenn, wie hier, die Berechnung in großer Höhe (250 km) erfolgt und dadurch hochfrequente Signalanteile stark gedämpft werden. Die Summationen in (5.3) werden bei  $n_{\text{max}} = 500$  abgebrochen.

Die Berechnungszeiten zur Auswertung von (8.1) mit der hier beschriebenen Vorgehensweise sind gering und betragen für alle in dieser Arbeit verwendeten Datensätze auf einem Standard-PC (AMD Athlon Prozessor, 1.47 GHz) weniger als 30 Sekunden.

## 8.2 Lösung großer Gleichungssysteme auf Parallelrechnerarchitekturen

Parallelrechner werden in verschiedenen Disziplinen (z. B. Meteorologie, Ozeanographie, Chemie) eingesetzt, in der Geodäsie ist die sphärisch-harmonische Analyse des Schwerefeldes ein typisches Anwendungsbeispiel (Pail et al., 2005; Xie, 2005; Baboulin, 2006; Baur und Grafarend, 2006).

In dieser Arbeit wird die Berechnung der Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  mit der Kollokation auf einer Parallelrechnerarchitektur gelöst, um die individuelle Punkthöhe der Eingangsdaten berücksichtigen zu können. Das zu lösende Gleichungssystem als Teil der Auswertung der Kollokationsformeln (5.42) lautet

$$\begin{aligned} \left( C_{\Delta g^R \Delta g^R} + C_{\epsilon_{\Delta g^T} \epsilon_{\Delta g^T}} \right) x &= \Delta g^R \\ \bar{C}_{\Delta g^R \Delta g^R} x &= \Delta g^R . \end{aligned} \quad (8.4)$$

Die Kovarianzwerte aus  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}$  hängen vom sphärischen Abstand, aber auch von der individuellen Punkthöhe ab, vgl. Abschnitt 5.2.1. Daher ergeben sich auch für Daten, die regelmäßig in einem geographischen Gitter angeordnet sind, in der Regel für jedes Punktpaar unterschiedliche Kovarianzwerte. Die Elemente der vollbesetzten (symmetrischen) Kovarianzmatrix  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}$  können demzufolge in keiner speziellen Struktur angeordnet werden, die zur Gleichungslösung ausgenutzt werden kann, vgl. Abschnitt 8.3. Die im Folgenden beschriebene Implementierung kann auch zur Verarbeitung unregelmäßig verteilter Beobachtungen eingesetzt werden, eine Anordnung in einem Raster ist nicht Voraussetzung.

Die Summe  $\bar{C}_{\Delta g^R \Delta g^R}$  aus den Kovarianzmatrizen des Signals und des Rauschens in (8.4) wird im Folgenden kurz mit  $C$  bezeichnet. Die Lösung des Gleichungssystems (8.4) kann mit

$$x = C^{-1} \Delta g^R \quad (8.5)$$

angegeben werden. Zur Lösung der Gleichung (8.4) ist es nicht erforderlich die Matrix  $C$  zu invertieren, es genügt eine Faktorisierung. Die Kovarianzmatrix  $C$  ist symmetrisch und positiv definit und kann nach dem CHOLESKY-Verfahren eindeutig zerlegt werden in

$$C = LL^T . \quad (8.6)$$

Der CHOLESKY-Faktor  $L$  ist eine untere Dreiecksmatrix. Wird die Zerlegung (8.6) in (8.4) eingesetzt und  $y = L^T x$  gesetzt, muss in einem ersten Schritt das Gleichungssystem  $Ly = \Delta g^R$  gelöst werden. Die Lösung wird als

Vorwärtseinsetzen bezeichnet, da bei der Auflösung mit der ersten Zeile aufgrund der Dreiecksstruktur von  $L$  begonnen wird. Die nachfolgende Lösung des Gleichungssystems  $L^T x = y$  wird entsprechend Rückwärtseinsetzen genannt. Die Elemente des CHOLESKY-Faktors werden sukzessiv aus der Matrix  $C$  abgeleitet. Dabei wird zur Berechnung eines neuen Elementes auf bereits berechnete Elemente des CHOLESKY-Faktors zurückgegriffen, Startelement ist das erste Element  $c_{11}$  der Matrix  $C$ , s. a. (Bronstein et al., 1996, S. 1104).

Zur Lösung der Gleichung (8.4) mit der Matrixdimension  $n$  werden mit dem CHOLESKY-Verfahren

$$\text{nops} = \frac{1}{3}n^3 + 2n^2 \quad (8.7)$$

Operationen benötigt.

Sehr große Gleichungssysteme werden blockweise ausgewertet (van der Marel, 1989), entweder um nur Teilblöcke der Gesamtmatrix im Speicher zu halten (out-of-core-Lösung) oder um Teilschritte zu parallelisieren. In Abb. 8.2 ist eine Momentaufnahme einer blockweisen CHOLESKY-Zerlegung dargestellt, bei der die Blockelemente der zu zerlegenden Matrix  $C$  sukzessiv durch die Blockelemente der CHOLESKY-Faktormatrix  $L$  ersetzt werden. Im dargestellten Schritt liegt der Block  $L_0$  der Lösung bereits vor. Es werden die Blöcke

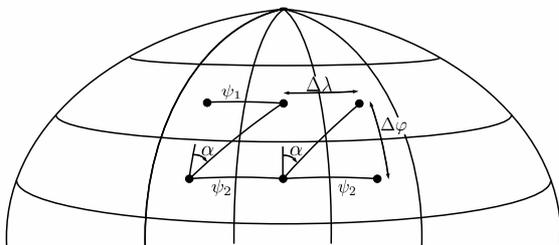
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21}^T \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{11}L_{11}^T & L_{11}L_{21}^T \\ L_{21}L_{11}^T & L_{21}L_{21}^T + L_{22}L_{22}^T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.8)$$

weiter zerlegt, die Einträge  $C_{ij}$  und  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) sind Blockmatrizen. Die Matrix  $L_{11}$  wird über die CHOLESKY-Faktorisierung von  $C_{11}$  berechnet. Mit (8.8) folgt weiter

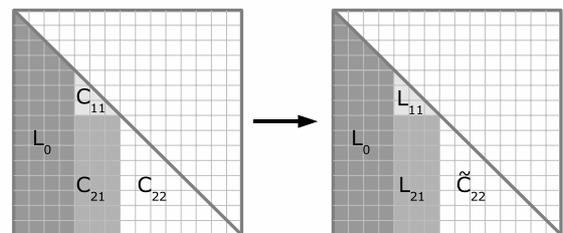
$$\begin{aligned} L_{21} &= C_{21}(L_{11}^T)^{-1} \\ \tilde{C}_{22} &= C_{22} - L_{21}L_{21}^T = L_{22}L_{22}^T. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Die Matrix  $\tilde{C}_{22}$  steht danach für den nächsten Berechnungsschritt bereit. In dieser blockweisen Auswertung ist die CHOLESKY-Faktorisierung für eine parallele Bearbeitung geeignet.

Zur Lösung des Gleichungssystems (8.4) in paralleler Form wird die numerische Bibliothek SCALAPACK (Scalable Linear Algebra Package) eingesetzt, in der die seriellen Bibliotheken BLAS (Basic Linear Algebra Subroutines) und LAPACK (Linear Algebra Package) enthalten sind und zur Kommunikation zwischen den Prozessoren MPI (Message Passing Interface), BLACS (Basis Linear Algebra Subroutines) und PBLAS (Parallel Basic Linear Algebra Subprograms) verwendet wird. ScaLAPACK basiert auf blockweise arbeitenden Algorithmen, damit lassen sich häufige Datenbewegungen zwischen den Speichern (Cache, Arbeitsspeicher) vermeiden, um Rechenzeit zu sparen. Die Bibliothek ist für eine SIMD (Single Instruction, Multiple Data) Architektur geschrieben und nutzt die explizite Kommunikation zwischen den Prozessoren. Das Modell des Message Passing Programming basiert auf der Verwendung mehrerer Prozessoren, die über ihren eigenen Speicherbereich durch koordinierten



**Abbildung 8.1.** Punkte eines regelmäßigen geographischen Gitters mit Gitterweiten  $\Delta\varphi$  und  $\Delta\lambda$ . Aufgrund der Meridiankonvergenz unterscheiden sich die Abstände  $\psi_1$  und  $\psi_2$ , die Abstands- und Azimutrelationen für Punkte eines Breitenkreises bleiben erhalten.



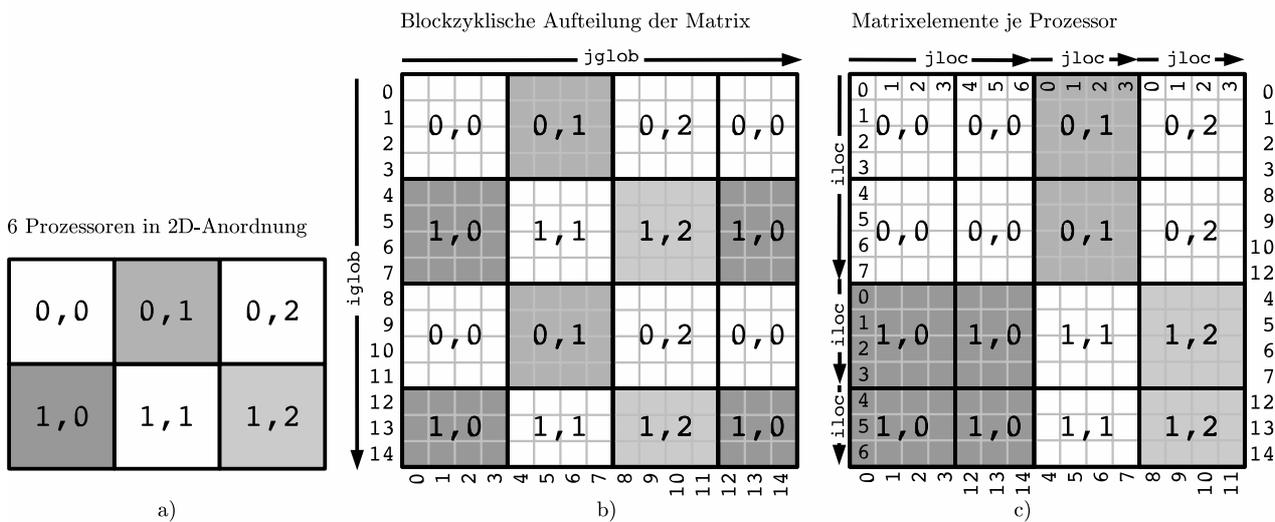
**Abbildung 8.2.** Momentaufnahme der blockweisen CHOLESKY-Faktorisierung.

Datenaustausch miteinander kommunizieren können. Wird eine Variable von  $p$  Prozessoren deklariert, existieren  $p$  verschiedene Variablen mit dem gleichen Namen und mit gegebenenfalls unterschiedlichem Inhalt, aber in jedem Fall mit unterschiedlich adressierten Speicherplätzen. Benötigt ein Prozessor P1 die Daten eines anderen Prozessors P2, müssen diese auf Basis der MPI-Kommunikation von P2 an P1 verschickt und von P2 empfangen werden. Es ist Aufgabe des Programmierers, die Daten auf die einzelnen Prozessoren zu verteilen (Dongarra et al., 1998, S. 21).

Zur Anwendung von ScaLAPACK sind die Matrixelemente blockzyklisch in zwei Dimensionen zu verteilen. Dadurch wird eine gleichmäßige Auslastung der Prozessoren erreicht, die Rechenzeiten für Rechenoperationen, Speicheraustausch und Kommunikation sind ausgeglichen. Ein Beispiel für eine solche zweidimensionale blockzyklische Verteilung ist in Abb. 8.3 für sechs Prozessoren skizziert. Die sechs Prozessoren werden virtuell in zwei Dimensionen als 2,3-Feld angeordnet (Abb. 8.3-a). Die Elemente einer Matrix der Dimension 15,15 werden auf diesen Prozessoren verteilt. Dazu werden Teilblöcke der Größe 4x4 gebildet und diese zyklisch den jeweiligen Prozessoren zugeordnet (Abb. 8.3-b). Ein Matrixelement wird mit dem globalen Zeilen- und Spaltenindex  $iglob$  und  $jglob$  gekennzeichnet. In Abb. 8.3-c ist die Verteilung der Matrixelemente auf den Prozessoren wiedergegeben, auf dem einzelnen Prozessor wird ein Matrixelement mit dem lokalen Zeilen- und Spaltenindex  $iloc$  und  $jloc$  angesprochen. In der parallelen Berechnung wird auf allen Prozessoren der identische lokale Index verwendet, jeder Prozessor bezieht sich aber auf einen anderen globalen Index. Der lokale Index 2,1 entspricht auf dem Prozessor 0,0 dem globalen Element 2,1, auf dem Prozessor 0,1 dem globalen Element 2,5.

Bei der CHOLESKY-Zerlegung (Abb. 8.2) können die Multiplikations- und Additionsschritte parallel ablaufen. Zunächst wird auf dem Prozessor, auf dem die Elemente der Matrix  $C_{11}$  liegen, die CHOLESKY-Zerlegung durchgeführt. Das Ergebnis  $L_{11}$  muss allen Prozessoren, die einen Speicherbereich dieser Matrix und der Matrix  $C_{21}$  verwalten, mit Hilfe von MPI bekannt gemacht werden. Anschließend wird die Matrix  $L_{21}$  nach (8.8) berechnet. Das Ergebnis  $L_{21}$  wird für die Berechnung von  $\tilde{C}_{22}$  allen nachfolgend beteiligten Prozessoren weitergegeben. Die zweidimensionale blockzyklische Verteilung der Matrix hat den Vorteil, dass alle Prozessoren bis zum Ende der Berechnung eingesetzt werden und daher eine effiziente Parallelisierung möglich ist. Für die meisten Rechnerarchitekturen hat sich dabei eine Größe der Teilblöcke von 64x64 (4x4 im Beispiel in Abb. 8.3) bewährt (Brand, 2006).

Der parallelisierte Programmablauf zur Berechnung der Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  mit Hilfe der Kollolation ist in Abb. 8.4 dargestellt. In diesem Beispiel werden, wie oben, sechs Prozessoren eingesetzt und zur Initialisierung der parallelen Berechnung mit der Routine `BLACS_GRIDINIT` in einem zweidimensionalen Prozessorgrid angeordnet. Nach der Gridinitialisierung werden über Schleifen, die auf den Prozessoren parallel laufen,



**Abbildung 8.3.** (a) Sechs Prozessoren in virtueller zweidimensionaler (2,3)-Anordnung. Bizeyklische Aufteilung einer (15,15)-Matrix auf den Speicher dieser Prozessoren aus Sicht der Matrix (b) und aus Sicht der Prozessoren (c). Angegeben sind die Identifikationsnummern der Prozessoren aus (a), globale Zeilen- und Spaltenindizes  $iglob$  und  $jglob$  der Matrix und lokale Zeilen- und Spaltenindizes  $iloc$  und  $jloc$  der Matrixelemente je Prozessor.

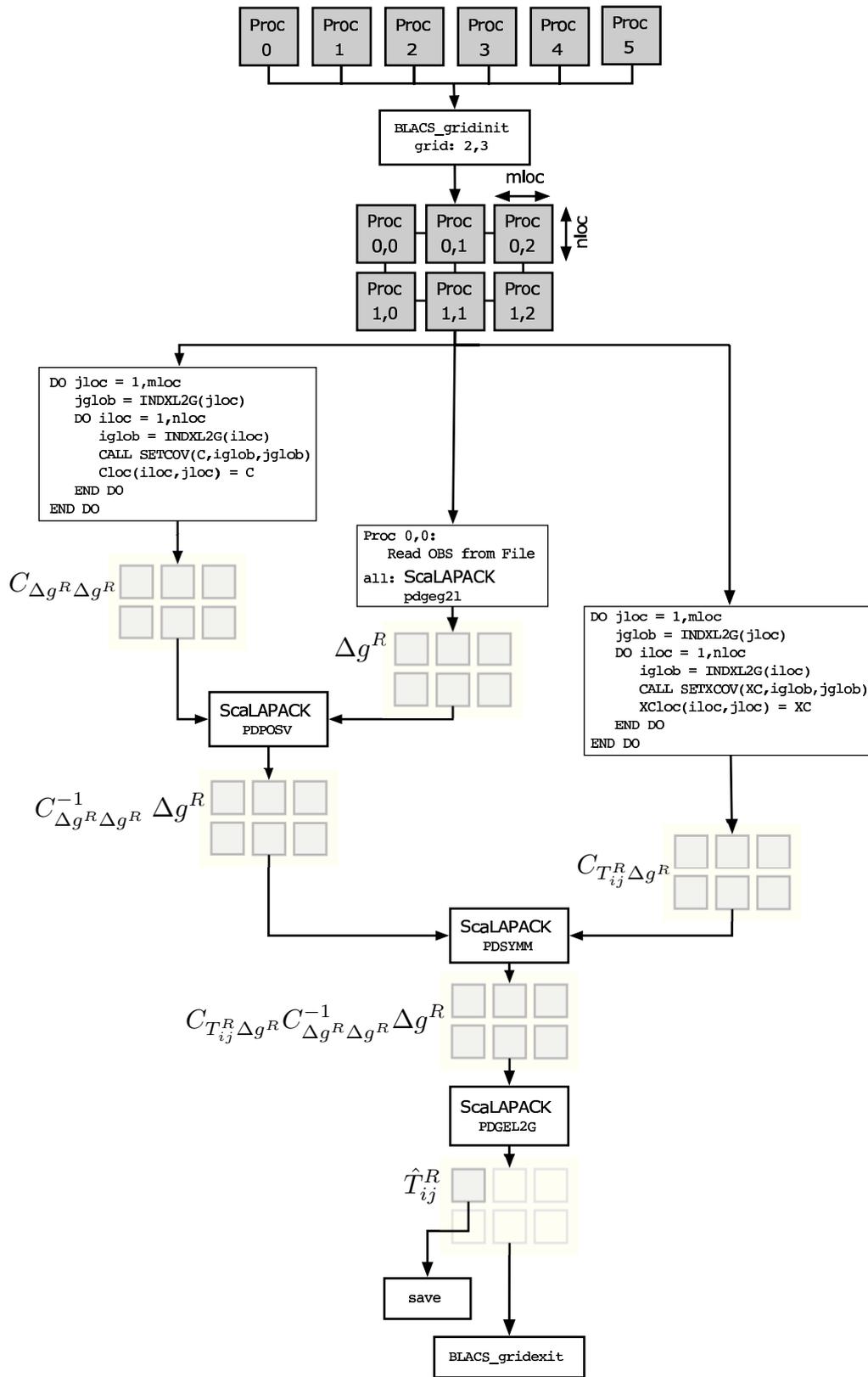


Abbildung 8.4. Prinzipskizze der parallelen Implementierung der Kollokation.

die Matrixelemente der Kovarianzmatrix  $\tilde{C}_{\Delta g^R \Delta g^R}$  belegt. Der lokale Index, der in der Schleife auf jedem Prozessor durchlaufen wird, wird dazu mit der Routine `INDXL2G` in einen globalen Index transformiert. Aus dem globalen Index werden die Informationen (Lage der beteiligten Punkte) zur Berechnung des Kovarianzwertes abgeleitet. Die Beobachtungen  $\Delta g^R$  werden von einem Prozessor aus einer Datei eingelesen und passend zur Aufteilung der Kovarianzmatrix auf die beteiligten Prozessoren verteilt. Nach Belegung der Matrixelemente wird das Gleichungssystem mit Hilfe der `SCALAPACK`-Routine `PDPOSV` gelöst. Die Lösung wird in Abb. 8.4 mit  $\tilde{C}_{\Delta g^R \Delta g^R}^{-1} \Delta g^R$  bezeichnet, auch wenn die Kovarianzmatrix nicht invertiert wurde. In Abhängigkeit von der Anzahl der zu berechnenden Werte  $\hat{T}_{ij}^R$  ( $i, j = x, y, z$ ) werden ebenfalls die Kreuzkovarianzwerte  $C_{T_{ij}^R, \Delta g^R}$  parallel initialisiert. Mit der `SCALAPACK`-Routine `PDSYMM` wird die Kreuzkovarianzmatrix mit dem Ergebnis  $\tilde{C}_{\Delta g^R \Delta g^R}^{-1} \Delta g^R$  in paralleler Form multipliziert. Das Ergebnis sind die Werte  $\hat{T}_{ij}^R$ , sie werden auf einem Prozessor gesammelt und gespeichert. Abschließend wird das Prozessorgrid mit Hilfe der Routine `BLACS_GRIDEXIT` aufgelöst und das Programm wird beendet.

Die Anwendung der `SCALAPACK`-Routinen erlaubt wegen der ausgeglichenen Kommunikations- und Rechenzeit eine gute Skalierbarkeit der Gesamtrechenzeit. Das bedeutet, dass sich die Rechenzeit nahezu linear zum Verhältnis der Anzahl der jeweils verwendeten Prozessoren verändert.

Das vorgestellte Programm zur Berechnung der Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{ij}^R$  auf Basis der Kollokation wurde auf dem Hochleistungsrechner Nord (HLRN) des Norddeutschen Verbundes für Hoch- und Höchstleistungsrechnen implementiert und ausgeführt (HLRN, 2003). Der HLRN besitzt eine MIMD-Architektur (Multiple Instruction, Multiple Data) mit 32 Rechenknoten (IBM pSeries 690) mit jeweils 32 Prozessoren (1.3 GHz Power4). Im Speicherzugriff ist das System hybrid aufgebaut: auf den Knoten selbst greifen die Prozessoren auf denselben Speicher (64 GByte bis 256 GByte) als shared-memory-System (gemeinsamer / globaler Speicherbereich) in Form eines SMP (Symmetric Multi Processing) zu, die Knoten untereinander bilden ein distributed-memory-System (mit lokalen Speicherbereichen je Knoten). Der Austausch zwischen den lokalen Speichern erfolgt über ein Netzwerk (pSeries High Performance Switch), das die Knoten verbindet. Der HLRN ist in jeweils 16 Rechenknoten zwischen dem Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik in Berlin und dem Regionalen Rechenzentrum Niedersachsen in Hannover aufgeteilt, die mit einer 2 Gbit/s Datenleitung verbunden sind. Das Rechnersystem wurde im Jahr 2002 installiert.

Die Rechenzeit  $t_{proc}$  pro Prozessor zur Lösung eines Gleichungssystems (8.4) mit symmetrischer und vollbesetzter Matrix  $C$  der Dimension  $n$  auf Basis der `CHOLESKY`-Zerlegung beträgt entsprechend (8.7) ungefähr

$$t_{proc} = \frac{1/3 n^3}{\text{flops NPR0C}} . \quad (8.10)$$

Dabei ist `NPR0C` die Anzahl der verwendeten Prozessoren und `flops` die auf der Rechnerarchitektur erreichbare Anzahl der Operationen mit reellen Zahlen pro Sekunde (engl. *floating-point operations per second*). Auf dem HLRN kann eine durchschnittliche Rechenleistung von 2...3 Gflops (1 Milliarde flops) erreicht werden. In Tabelle 8.1 sind die zu erwartenden Rechenzeiten für verschieden große Gleichungssysteme unter Nutzung von 16 bzw. 32 Prozessoren aufgelistet.<sup>1</sup> Die Größen orientieren sich an den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen, vgl. Abschnitt 9.4.2 und 10.2.3. Auf dem HLRN stehen in der Regel 1.75 GByte Speicher pro Prozessor zur Verfügung. Zur Lösung eines Gleichungssystems mit der Dimension 74800 wären also 32 Prozessoren notwendig, 16 Prozessoren würden nicht ausreichen. Aufgrund numerischer Instabilitäten wurde die Dimension des Gleichungssystems auf maximal  $n = 25920$  in dieser Arbeit beschränkt (Abschnitt 10.2.3).

Zur Aufdeckung numerischer Instabilitäten muss geklärt werden, mit welcher Genauigkeit das Gleichungssystem gelöst werden kann. Zahlenwerte können in digitaler Form nur mit einer begrenzten Genauigkeit gespeichert werden. Die relative Rechengenauigkeit (oder Maschinengenauigkeit) ist die unterste Fehlergrenze der absoluten Abweichung des Ergebnisses einer Rechenoperation ( $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ ) zweier Zahlen vom Sollergebnis. Sie beträgt bei einer Speicherlänge von 8 Byte pro Zahl etwa  $10^{-16}$  (Blackford et al., 1997). Der relative Fehler  $\epsilon_{rel}$  der Lösung  $\hat{x}$  des Gleichungssystems (8.5) zur Solllösung  $x$  beträgt

$$\epsilon_{rel} = \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} . \quad (8.11)$$

<sup>1</sup>In der derzeitigen parallelen Implementierung ist der Bedarf an Rechenzeit für den Aufbau der Kovarianzmatrizen größer als der für die eigentliche Gleichungslösung. Durch Interpolation der Kovarianzwerte in Abhängigkeit von  $\psi$ ,  $\alpha$  und  $h$  sollte dies zu vermeiden sein; diese Modifikation wird hier nicht weiter behandelt.

**Tabelle 8.1.** Speicherbedarf (Mem), Anzahl Operationen (**nops**) und Rechenzeiten zur Lösung der Gleichung (8.4) auf dem HLRN unter Nutzung von 16 (bzw. 32) Prozessoren. Die Dimension **n** des Gleichungssystem ergibt sich aus dem Produkt der Anzahl Datenelemente  $n_\varphi$  und  $n_\lambda$  in Meridian- und Breitenkreisrichtung des Eingangsdatengebietes. Die Angabe der Speicheremenge bezieht sich auf die vollständige Matrix  $C$ .

$n_\varphi$	$n_\lambda$	<b>n</b>	Mem gesamt [Gbyte]	Mem je Prozessor [Mbyte]	<b>nops</b>	$t_{proc}$ [min]
50	90	4500	0.151	9.6 (4.8)	<b>3e10</b>	0.0 (0.0)
75	135	10125	0.764	48.9 (24.4)	<b>3e11</b>	0.2 (0.1)
100	180	18000	2.414	154.5 (77.2)	<b>2e12</b>	1.0 (0.5)
120	216	25920	5.006	320.4 (160.2)	<b>6e12</b>	3.0 (1.5)
125	225	28125	5.894	377.2 (188.6)	<b>7e12</b>	3.9 (1.9)
144	228	32832	8.031	514.0 (257.0)	<b>1e13</b>	6.1 (3.1)
220	340	74800	41.686	2667.9 (1334.0)	<b>1e14</b>	72.6 (36.3)

Dabei können verschiedene Vektor- bzw. im Folgenden Matrixnormen  $\|\cdot\|$  gewählt werden (z. B. FROBENIUS-Norm, Maximum-Norm), s. a. (Blackford et al., 1997). Mit Hilfe der Konditionszahl  $\kappa(C) = \|C\| \|C\|^{-1}$  und den Residuen  $r = C\hat{x} - \Delta g^R = C\hat{x} - Cx = C(\hat{x} - x)$  kann die untere Fehlergrenze des relativen Fehlers  $\epsilon_{rel}$ , wie folgt, abgeschätzt werden (Bronstein et al., 1996, S. 1105):

$$\frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \leq \|C\| \|C\|^{-1} \frac{\|r\|}{\|b\|} = \kappa(C) \frac{\|r\|}{\|b\|}. \quad (8.12)$$

In der SCALAPACK-Bibliothek liegen Routinen zur effizienten Berechnung der Konditionszahl vor, da aber in der Bibliothek zur Auswertung der Kollokation auf Basis von Block-TOEPLITZ-Matrizen (Abschnitt 8.3) keine vergleichbare Routine vorliegt, wurde auf die Berechnung der Konditionszahl in dieser Arbeit verzichtet. Stattdessen wurden zur Abschätzung der Genauigkeit der Lösung des Gleichungssystems (8.4) die Residuen  $r$  berechnet und für beide Kollokationsimplementierungen verglichen. Die Residuen  $r$  können berechnet werden, indem die Beobachtungen  $\Delta g^R$  als fehlerlos eingeführt werden und mit Hilfe der Kollokation am gleichen Ort reproduziert werden. Es ergeben sich die Residuen

$$r = C_{\Delta g^R \Delta g^R} (C_{\Delta g^R \Delta g^R})^{-1} \Delta g^R - \Delta g^R = \hat{\Delta g^R} - \Delta g^R. \quad (8.13)$$

Die Statistik der Residuen für das in dieser Arbeit auszuwertende Gleichungssystem ist in den Abschnitten 9.4.2 und 10.2.3 angegeben.

Die Berechnung der Kovarianzmatrix des Rauschens der Zielgrößen gemäß (5.43) erfolgt, indem für jeden Prädiktionspunkt eine neue rechte Seite, bestehend aus den Kreuzkovarianzwerten  $C_{\Delta g^R T_{ij}^R}$  anstelle von  $\Delta g^R$ , in (8.4) eingeführt wird.

### 8.3 Faktorisierung und Gleichungslösung bei strukturierten Matrizen

Matrizen, deren Einträge konstant entlang jeder Diagonalen der Matrix sind, heißen TOEPLITZ-Matrizen (Golub und van Loan, 1990, S. 183). Ist die Matrix außerdem symmetrisch, haben diese Matrizen folgendes Aussehen

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{13} & c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{14} & c_{13} & c_{12} & c_{11} \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

Alle Elemente sind bei Kenntnis der ersten Zeile der Matrix bekannt, daher kann der Speicherplatz erheblich reduziert werden. Aufgrund des strukturierten Aufbaus gelingt eine schnelle Faktorisierung einer symmetrischen und positiv definiten TOEPLITZ-Matrix (Eren, 1980; Golub und van Loan, 1990). Die Inverse der Matrix kann ebenfalls schnell mit Hilfe der Fouriertransformation berechnet werden, da sich dabei eine Banddiagonalstruktur ergibt (Eren, 1980, 1982).

Im Folgenden wird die Struktur einer Kovarianzmatrix betrachtet, deren Werte auf einer homogenen und isotropen Kovarianzfunktion basieren und so allein vom sphärischen Abstand abhängen. Die individuelle Höhe der

Punkte wird in diesem Fall bei der Berechnung ihrer Kovarianzwerte vernachlässigt, wie es zu Beginn des Kapitels erläutert wurde. Wenn die Beobachtungen äquidistant in der Ebene zweidimensional angeordnet sind, besteht die Kovarianzmatrix aus Blöcken, die sich in TOEPLITZ-Struktur anordnen und selbst TOEPLITZ-Matrizen sind (Block-TOEPLITZ-TOEPLITZ-Struktur). Diese Struktur kann zur schnellen Inversion der Matrix im Frequenzraum ausgenutzt werden, s. a. (Sideris, 1996; Sansò und Sideris, 1997; Schwarz et al., 1990; Tziavos et al., 1996). Streng ergibt sich die Block-TOEPLITZ-TOEPLITZ-Struktur nur für Daten in der Ebene. Bei einem regelmäßigen geographischen Gitter auf der Kugel ist die Struktur aufgrund der Meridiankonvergenz gestört, aber es tauchen auch hier wiederholt identische sphärische Abstände auf.

Für die Gitterdaten auf der Kugel gibt es zwei Möglichkeiten zur Strukturierung der Matrixelemente in Abhängigkeit von dem Nummerierungsschema der Beobachtungen: Die Beobachtungen können beginnend in West-Ost-Richtung durchnummeriert werden (Abb. 8.5-a) oder beginnend in Nord-Süd-Richtung (Abb. 8.5-b). Im ersten Fall ergibt sich die folgende Struktur der Kovarianzelemente:

$$C^{\text{WO}} = \begin{bmatrix} \boxed{c_{11} & c_{12} & c_{13}} & \boxed{c_{14} & c_{15} & c_{16}} \\ & c_{11} & c_{12} & c_{15} & c_{14} & c_{15} \\ & & c_{11} & c_{16} & c_{15} & c_{14} \\ & & & \boxed{c_{11} & c_{45} & c_{46}} \\ & & & & c_{11} & c_{45} \\ & & & & & c_{11} \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

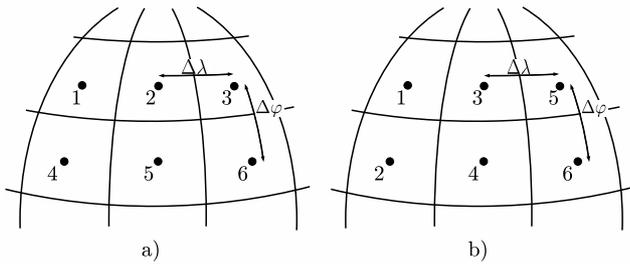
Der symmetrische untere Teil der Matrix wird nicht dargestellt. Ein Wert  $c_{ij}$  beschreibt den Kovarianzwert zwischen den Punkten  $i$  und  $j$ , der für gleichabständige Punkte identisch ist und in (8.15) entsprechend des ersten Vorkommens benannt wurde. Die Matrix besteht aus Blöcken mit TOEPLITZ-Struktur, deren Elemente durch die jeweils erste, markierte Zeile festliegen, die Blöcke selbst wiederholen sich aber nicht. Diese Matrixstruktur bzw. ihre Abweichung von einer Block-TOEPLITZ-TOEPLITZ-Struktur wird zur schnellen iterativen Lösung von Gleichungssystemen in (Bottoni und Barzaghi, 1993; Grote, 1996; Tziavos et al., 1996) angewendet. Sind die Daten über ein geschlossenes Breitenband gegeben, haben die einzelnen Blöcke eine zirkuläre Struktur (periodische TOEPLITZ-Matrix) und lassen sich mit einer Fouriertransformation diagonalisieren und schnell invertieren, s. a. (Colombo, 1979; Schuh, 1996; Sansò und Tscherning, 2001, 2003).

Die Nummerierung der Beobachtungen in Nord-Süd-Richtung ergibt die folgende Struktur der Kovarianzelemente:

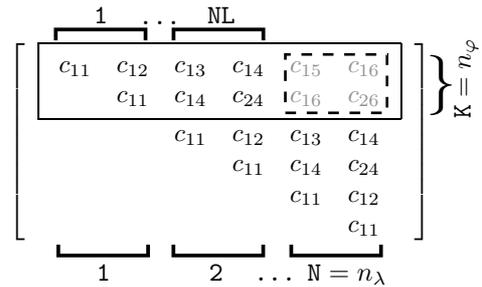
$$C^{\text{NS}} = \begin{bmatrix} \boxed{c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16}} \\ & c_{11} & c_{14} & c_{24} & c_{16} & c_{26} \\ & & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & & & c_{11} & c_{14} & c_{24} \\ & & & & c_{11} & c_{12} \\ & & & & & c_{11} \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

Die Blöcke der Matrix weisen eine TOEPLITZ-Struktur auf, sind aber selbst keine TOEPLITZ-Matrizen, diese Struktur wird im Folgenden als Block-TOEPLITZ-Matrix bezeichnet. Die numerischen Werte aller Elemente der Matrix sind durch die erste, markierte Blockzeile gegeben. Diese Struktur wird in (Tsaoussi, 1989) zur schnellen Inversion der Matrix ausgenutzt, dabei wird ein Algorithmustyp gewählt, bei dem von der Faktorisierung der Inversen der Matrix  $C^{\text{NS}}$  ausgegangen wird und der als LEVINSON-Typ bezeichnet wird (Gallivan et al., 1996). Wird hingegen zur Lösung die Matrix  $C^{\text{NS}}$  selbst faktorisiert, spricht man vom SCHUR-Typ. Es sei bemerkt, dass die Gleichungslösung unter Ausnutzung der Block-TOEPLITZ-Struktur ebenfalls parallelisiert werden kann (Alonso et al., 2005), dies wurde hier nicht weiter verfolgt.

In dieser Arbeit ist zum einen das in (8.4) dargestellte Gleichungssystem für die Berechnung der Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  mit der Kollokation zu lösen. Zum anderen ist aber auch der CHOLESKY-Faktor der Kovarianzmatrix des Rauschens der terrestrischen Daten zu berechnen, um nach (7.4) farbiges Rauschen für die synthetischen Daten zu erstellen. Da die Kovarianzfunktion des Rauschens als homogen und isotrop vorausgesetzt wird, kann die Kovarianzmatrix des Rauschens ebenfalls wie in (8.16) strukturiert werden. In der Implementierung der Gleichungslösung wurde ein Algorithmus des SCHUR-Typs ausgewählt, da dieser auch zur



**Abbildung 8.5.** Zwei Arten der Nummerierung geographischer Gitterdaten: beginnend in West-Ost-Richtung (a) und beginnend in Nord-Süd-Richtung (b).



**Abbildung 8.6.** Struktur einer symmetrischen Band-Block-TOEPLITZ-Matrix, die Elemente in der gestrichelten Box sind null. Die Matrix hat  $K$  Zeilen in der Blockzeile,  $N$  Blockzeilen und  $NL$  Blöcke in der Blockzeile, deren Elemente nicht alle null sind.

CHOLESKY-Faktorisierung (7.5) der Kovarianzmatrix des Rauschens eingesetzt werden kann. Bei der Faktorisierung dieser Kovarianzmatrix wird zusätzlich ihre Bandstruktur (Abb. 8.6) ausgenutzt, die sich aufgrund der finiten Kovarianzfunktion des Rauschens ergibt<sup>2</sup>, vgl. Abschnitt 7.4.3.

Zur CHOLESKY-Faktorisierung (7.5) der Kovarianzmatrix des Rauschens mit einer Band-Block-TOEPLITZ-Struktur der Matrix  $C_{\epsilon_{\Delta g^T} \epsilon_{\Delta g^T}}$  und zur Lösung des Gleichungssystem (8.4) mit einer Block-TOEPLITZ-Struktur der Kovarianzmatrix  $\tilde{C}_{\Delta g^R \Delta g^R}$  wird die SLICOT-Bibliothek (Subroutine Library in Systems and Control Theory) in der FORTRAN-Implementierung<sup>3</sup> eingesetzt (Benner et al., 1999; SLICOT, 2005).

Die Routinen zur CHOLESKY-Faktorisierung verwenden bei der Faktorisierung nach dem SCHUR-Typ eine HOUSEHOLDER-Transformation mit modifizierten hyperbolischen Rotationen, s. a. (Gallivan et al., 1996; Thirumalai, 1996). Der CHOLESKY-Faktor wird durch Umsortierung und Elimination der Matrixelemente im oberen Dreieck berechnet. Die HOUSEHOLDER-Transformation mit hyperbolischen Rotationen dient zur Elimination der Elemente in der Matrix. Mit der HOUSEHOLDER-Transformation werden durch Spiegelung an einer Hyperebene, die als Unterraum durch Linearkombinationen des HOUSEHOLDER-Vektors festgelegt ist (Golub und van Loan, 1990, S. 195), Matrixelemente eliminiert, mit hyperbolischen Rotationen durch Rotation auf Basis von Hyperbelfunktionen (Golub und van Loan, 1990, S. 598). Die Verwendung der hyperbolischen Rotationen ist von Vorteil, da diese numerisch in schnellen Matrix-Vektor-Operationen ausgewertet werden können.

Der Speicherbedarf zur Rauscherzeugung nach (7.4) auf Basis des CHOLESKY-Faktors der Kovarianzmatrix des Rauschens mit der Struktur  $C^{NS}$  ist gering, da sowohl von der Matrix  $C^{NS}$  als auch vom CHOLESKY-Faktor nur eine Blockzeile gespeichert werden muss. Die im Berechnungsgang nachfolgenden Schritte benötigen stets nur Werte einer Blockzeile, die im folgenden Berechnungsschritt aktualisiert werden (Abb. 8.2). Die Multiplikation in (7.4) wird in entsprechenden Teilschritten auf Basis der jeweiligen Blockzeile des CHOLESKY-Faktors ausgeführt.

Für die CHOLESKY-Faktorisierung einer Band-Block-TOEPLITZ-Matrix mit  $K = n_\varphi$  Zeilen in einer Blockzeile,  $N = n_\lambda$  Blockzeilen und  $NL$  Blöcken (Abb. 8.6), die nicht vollständig null sind, werden

$$\text{nops} = K^3 N (NL - 1) \tag{8.17}$$

Operationen mit der SLICOT-Routine `MB02GD` benötigt. Die Gleichungslösung einer Block-TOEPLITZ-Matrix mit der Routine `MB02ED` erfordert

$$\text{nops} = K^3 N^2 + K^2 N^2 \tag{8.18}$$

Operationen. Die Anzahl der Operationen nimmt im Wesentlichen um den Faktor  $3/N$  gegenüber der Anzahl der Operationen (8.7) bei der CHOLESKY-Faktorisierung einer unstrukturierten symmetrischen Matrix ab. Die Größenordnung der Anzahl Operationen ist in Tabelle 8.2 aufgeführt, es werden dieselben Matrixdimension wie in Tabelle 8.1 angesetzt.

<sup>2</sup>Um auch in der Kovarianzmatrix des Signals eine Bandstruktur auf Basis einer finiten Signalkovarianzfunktion zu erzeugen, wäre die Eigenschaft der Harmonizität aufzugeben, s. a. (Sansò und Schuh, 1987; Arabelos und Tscherning, 1996; Moreaux et al., 1999; Moreaux, 2001).

<sup>3</sup>Die SLICOT-Bibliothek ist auch als MATLAB-Implementierung verfügbar.

**Tabelle 8.2.** Speicherbedarf (Mem), Anzahl Operationen (nops) und Rechenzeiten zur Lösung der Gleichung (8.4) auf der E10K unter Ausnutzung der Block-TOEPLITZ-Struktur (8.16). Die Dimension  $\mathbf{n}$  des Gleichungssystems ergibt sich aus dem Produkt der Anzahl der Datenelemente  $n_\lambda$  und  $n_\varphi$  in Breiten- und Längenrichtung des Eingangsdatengebietes. Die Angaben der Speichermenge beziehen sich auf die erste Blockzeile der Matrix  $C^{\text{NS}}$ .

$n_\varphi$	$n_\lambda$	$\mathbf{n}$	Mem [Mbyte]	nops	$t_{\text{proc}}$ [min]
50	90	4500	1.7	1e9	0.6
75	135	10125	5.8	8e9	4.8
100	180	18000	13.7	3e10	31.6
125	225	28125	26.8	1e11	223.8
144	228	32832	36.0	1e11	229.2
220	340	74800	125.5	1e12	3535.4

Die Implementierung der Gleichungslösung auf Basis von Block-TOEPLITZ-Matrizen und die Cholesky-Faktorisierung auf Basis der Band-Block-TOEPLITZ-Matrix wurde auf der SUN ENTERPRISE 10000 (E10K) des Regionalen Rechenzentrums Niedersachsens ausgeführt (RRZN, 2004). Der verwendete Sun Ultra Sparc Prozessor hat eine Taktrate von 400 MHz. In der Praxis werden Rechenleistungen von 200 bis 300 Mflops erreicht. Dennoch kann nicht entsprechend (8.10) die tatsächliche Rechenzeit aus (8.17) bzw. (8.18) abgeleitet werden. Die praktischen Anwendungen zeigten, dass die Rechenzeiten um einen Faktor 5 bis 35 höher liegen können. In Tabelle 8.2 werden die tatsächlich erreichten Rechenzeiten der Gleichungslösung zum Vergleich mit den Angaben der parallelisierten Lösung (Tabelle 8.1) angegeben. Die Beurteilung der numerischen Stabilität der Gleichungslösung erfolgt auf Basis der Residuen (8.13). Die Statistik der Residuen des in dieser Arbeit zu lösenden Gleichungssystems sind in Abschnitt 9.4.2 und 10.2.3 angegeben.

Die Berechnung der Kovarianzmatrix des Rauschens der Zielgrößen auf Basis der Kollokation setzt, wie bei der parallelen Kollokationsimplementierung, auf den gleichen Algorithmen auf, für jeden Prädiktionspunkt ist eine zusätzliche rechte Seite  $C_{\Delta g^R T_{ij}^R}$  in die Gleichungslösung einzuführen.

## 8.4 Fazit

Bei der Auswertung der Kollokation ist ein Gleichungssystem mit der Dimension gleich der Anzahl der Beobachtungen zu lösen, um individuelle Gewichtungsfaktoren zu bestimmen, je nach Genauigkeit und räumlicher Verteilung der Beobachtungen (Abschnitt 5.2.2). Dies macht das Verfahren rechenintensiv, mit Hilfe von leistungsfähigen numerischen Bibliotheken und Rechnern ist aber eine Berechnung möglich: Zur Lösung und Speicherung des Gleichungssystems werden Parallelrechner eingesetzt, wenn die Beobachtungen unregelmäßig verteilt vorliegen oder wenn bei Daten eines geographischen Gitters die individuelle Höhe der Punkte berücksichtigt wird. Bei Vernachlässigung der Höhe ergibt sich in der Kovarianzmatrix eine Block-TOEPLITZ-Struktur und das Gleichungssystem kann seriell gelöst werden. Beide Ansätze erlauben hinsichtlich Speicher- und Rechenkapazität die Verwendung von bis zu 75000 Beobachtungen, Grenzen werden durch auftretende Instabilitäten in der Gleichungslösung gesetzt.

Ein Vorteil des Integrationsverfahrens besteht darin, dass es durch Anwendung der FFT schnell ausgewertet werden kann. Die Bestimmung individueller Gewichte bezüglich der räumlichen Verteilung der Beobachtungen entfällt, die Gewichtungsfaktoren sind allein vom sphärischen Abstand abhängig und gegebenenfalls vom Azimut zum Berechnungspunkt. Die individuelle Punkthöhe wird in der vorliegenden Implementierung vernachlässigt. Bei Berücksichtigung der Punkthöhe mit Hilfe des MOLODENSKII-Korrekturterms (Abschnitt 3.4.1) erhöht sich der Rechenaufwand, die Auswertung über die FFT ist aber weiterhin möglich (Sideris und Schwarz, 1988; Gerlach, 2003), so dass noch stets deutlich kürzere Rechenzeiten als bei Anwendung der Kollokation zu erwarten sind.

Bei dem Vergleich beider Methoden bleibt zu berücksichtigen, dass lange Rechenzeiten im Hinblick auf die Kalibrierung und Evaluierung der GOCE-Daten unkritisch sind, da die berechneten (statischen) Referenzwerte zuvor in einem dreidimensionalen Gitter bereitgestellt werden können, um dann den jeweils benötigten Referenzwert schnell interpolieren zu können. Aufgrund der fehlenden hochfrequenten Signalanteile des Tensors  $T_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE ist eine ausreichend genaue Interpolation möglich. Daher wurden beide Verfahren in der vorliegenden Arbeit zur Berechnung der Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  auf Basis derselben (synthetischen und realen) Beobachtungen eingesetzt, um die Qualität der Ergebnisse zu evaluieren. Bei gleicher Qualität der Zielgrößen ist in der Praxis das Integrationsverfahren im Hinblick auf den Rechenaufwand der Kollokation vorzuziehen.

## 9 Numerische Genauigkeitsanalyse

In diesem Kapitel werden die Varianzen der Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$ , die in der Bahnhöhe von GOCE aus der Kombination eines GPM mit regional vorliegenden terrestrischen Schwereanomalien berechnet werden, mit unterschiedlichen Verfahren numerisch bestimmt. Einerseits werden die Varianzen statistisch durch Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen und durch Anwendung der Kollokation berechnet, andererseits empirisch auf Basis der in Kapitel 7 eingeführten verrauschten synthetischen Daten. Aus dem Vergleich zwischen dem aus den synthetischen Daten berechneten Tensor  $\hat{T}_{[ij]}$  und dem synthetischen rauschfreien Sollwert  $T_{[ij]}$  wird das verbleibende Rauschen bestimmt. Auf Grundlage des Rauschens werden empirisch die Varianzen der Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  bestimmt. Zur Berechnung des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  werden das Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung (5.11) und die Kollokation eingesetzt.

Die angestrebte Genauigkeit für die Hauptdiagonalelemente des Tensors  $T_{[ij]}$  beträgt 1 bis 2 mE im Ortsraum (Abschnitt 2.3.4). Diese Genauigkeit liegt den Diskussionen der numerischen Ergebnisse für alle Tensorkomponenten zugrunde, auch wenn die tatsächlichen Anforderungen im Rahmen der GOCE-Evaluierung für die Nebendiagonalelemente weniger streng sind. Es werden die Randbedingungen analysiert, die erforderlich sind, um das Genauigkeitsziel zu erreichen.

In der Genauigkeitsstudie wird die Abhängigkeit der Varianz von der Gebietsgröße, der Auflösung und dem Rauschen der terrestrischen Beobachtungen untersucht. Bei der Variation der Auflösung werden zudem Unterschiede zwischen Punkt- und Blockmittelwerten (Abschnitt 2.1.5) analysiert. Mit Hilfe der synthetischen Daten wird außerdem die Auswirkung der Vernachlässigung der individuellen Punkthöhen der residualen Beobachtungen evaluiert. Das Rauschen der terrestrischen Daten wird bezüglich des Rauschniveaus (1 mgal, 5 mgal) und des Grades der Korrelation variiert. Die sich daraus ergebenden Rauschenszenarien werden mit den Bezeichnungen 1UK, 1K, 5UK und 5K gekennzeichnet (unkorrelierte und korrelierte Beobachtungen, s. a. Abschnitt 7.5). Das Szenario 5UK wird nur bei der statistischen Bestimmung der Varianz betrachtet. In der Kombinationslösung wird als GPM das SYNGPM360I (Abschnitt 7.4.1) verwendet. Die Genauigkeit des GPM hat zwar Einfluss auf das erreichbare Genauigkeitsniveau der Kombinationslösung, die Szenarien werden hier dennoch ausschließlich bezüglich der Eigenschaften der terrestrischen Daten variiert. Die Aussagen zu den sich daraus ergebenden relativen Änderungen der Genauigkeit sind weitestgehend unabhängig von der Genauigkeit des GPM, s. a. (Wolf, 2006).

Die absolute Genauigkeit hängt auch von der Höhe ab, in der die Elemente des Tensors  $T_{[ij]}$  geschätzt werden. Die Höhe wird in dieser Arbeit durchgängig mit 250 km angenommen. Simulationen der Bahnhöhe von GOCE zeigen einen Schwankungsbereich von etwa  $\pm 20$  km (SCVII, 2000), wobei die hier verwendete Höhe im unteren Bereich liegt. Aufgrund der Signalabschwächung nimmt die Varianz mit wachsender Höhe ab, bei einer Höhe von 270 km verringert sich die Standardabweichung um etwa 20%.

Im Folgenden werden zunächst die in der Kollokation verwendeten Kovarianzfunktionen und die im Integrationsverfahren eingeführten spektralen Gewichte vorgestellt. Anschließend werden die numerischen Ergebnisse für die Varianzen aus den genannten Verfahren diskutiert.

### 9.1 Parameter der Kovarianzfunktionen

Zur Berechnung der Kovarianzen zwischen Beobachtungen und Zielgrößen müssen analytische Kovarianzfunktionen für die Anwendung in der Kollokation bereitgestellt werden. Diese Funktionen basieren auf der Akkumulation von Gradvarianzen entsprechend (2.62). Ausgehend von einer Basiskovarianzfunktion werden die Kovarianzen zwischen unterschiedlichen Funktionalen des Störpotentials entsprechend dem Kovarianzfortpflanzungsgesetz (2.65) konsistent berechnet.

Die Parameter der analytischen Kovarianzfunktionen werden auf Basis des Modells (3.82) einer lokalen Kovarianzfunktion bestimmt. Der langwellige Signalanteil wird durch die Fehlergradvarianzen des GPM und der kurzellige Signalanteil durch ein geeignetes Gradvarianzmodell modelliert. In der numerischen Auswertung

wird das SYNGPM360I (Abschnitt 7.3) bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max} = 360$  als GPM verwendet. Das TSCHERNING-RAPP-Modell (2.63) wird zur Modellierung der Signalgradvarianzen herangezogen. Für die Parameter  $A$  und  $R_B$  des TSCHERNING-RAPP-Modells werden jedoch nicht die in (2.63) angegebenen global gültigen Werte gewählt, sondern lokal angepasste Werte berechnet, um eine bessere Übereinstimmung zwischen den analytischen Kovarianzfunktionen und empirisch berechneten Kovarianzfunktionen zu erhalten. Die lokalen Parameter werden in einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten durch Anpassung der analytischen Kovarianzfunktion an eine empirische Kovarianzfunktion der residualen Schwereanomalien  $\Delta g^R$  ermittelt.

Die empirische Kovarianzfunktion wurde nach (2.68) mit dem Programm EMPCOV.F<sup>1</sup> aus den regional vorliegenden synthetischen residualen Schwereanomalien berechnet. Die Modellierung erfolgt sowohl für Punktwerte  $\Delta g^R$  als auch für Blockmittelwerte  $\overline{\Delta g^R}$ . Zur Schätzung der Parameter  $A$  und  $R_B$  wird das Programm COVFIT.F<sup>1</sup> verwendet (Knudsen, 1987). Es wird dabei kein Skalierungsfaktor für die Fehlergradvarianzen des GPM geschätzt, da dieser Faktor deutlich die Kovarianzfunktionen der Elemente des residualen Tensors  $T_{[ij]}^R$  in der Bahnhöhe von GOCE beeinflusst, er aber auf Basis der empirischen Kovarianzfunktionen der Schwereanomalien nicht sicher bestimmt werden kann (s. a. Abschnitt 3.5.3). Der im Programm dafür vorgesehene Faktor wird auf 1.0 gesetzt. Damit ergeben sich für die synthetischen residualen Punktschwereanomalien des in Zentral-Europa gelegenen Testgebietes die lokalen Parameter  $A$  und  $R_B$  der Kovarianzfunktion wie folgt:

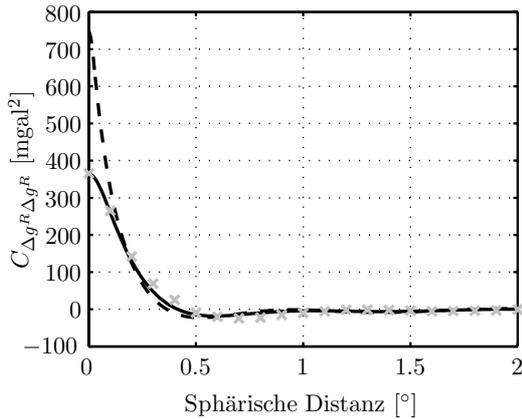
$$A = 524.19 \text{ mgal}^2 R_B^2 \text{ und } R_B = 6\,366\,084.47 \text{ m} . \quad (9.1)$$

Die empirisch berechnete Kovarianzfunktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{emp}}$  der Schwereanomalien, die sich aus den Fehlergradvarianzen des GPM und den Signalgradvarianzen des TSCHERNING-RAPP-Modells mit den Parametern (9.1) ergebende analytische Kovarianzfunktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$  und die analytische Kovarianzfunktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{TR}}$ , deren Signalgradvarianzen mit den globalen Modellparametern aus (2.63) berechnet wurden, sind in Abb. 9.1 dargestellt. Die analytischen Kovarianzfunktionen wurden mit Hilfe geschlossener Ausdrücke nach (Tscherning und Rapp, 1974) berechnet, die die Akkumulation der Gradvarianzen in der unendlichen Reihe ermöglichen. Die globalen Modellparameter erhöhen in erster Linie die Varianz  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{TR}}(\psi = 0)$ . Dies wirkt sich in der Anwendung der Kollokation vor allem auf die Prädiktion der Varianz der Zielgröße aus, kaum auf die Prädiktion des Signals (Moritz, 1980). Die Abweichungen der analytischen Funktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$  von der empirischen Funktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{emp}}$  liegen in ähnlicher Größenordnung wie in vergleichbaren Untersuchungen, z. B. (Arabelos und Tscherning, 1998; Pail, 2004; Arabelos et al., 2007).

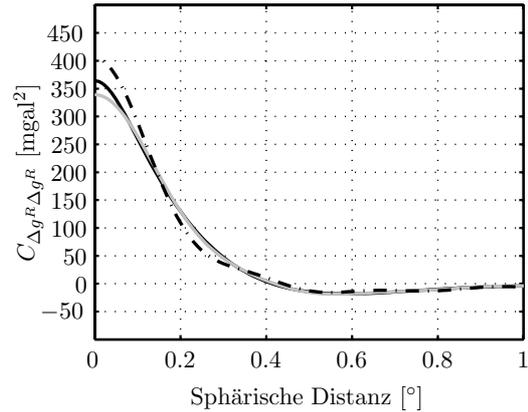
Bezüglich der synthetischen Daten wäre es auch plausibel, die Kovarianzfunktion durch Akkumulation der Gradvarianzen nur bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max} = 1300$  zu berechnen, da die synthetischen Daten kein hochfrequenteres Signal enthalten. Zum Vergleich wurden deshalb zwei weitere Kovarianzfunktionen  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana1300}}$  und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{SYNGPM1300s}}$  berechnet, bei der die Akkumulation der Gradvarianzen bis zum Grad  $n_{\max} = 1300$  ausgeführt wurde (Abb. 9.2). Die Signalgradvarianzen der Funktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana1300}}$  basieren auf dem TSCHERNING-RAPP-Modell mit den lokalen Parametern (9.1). Die Signalgradvarianzen der Funktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{SYNGPM1300s}}$  werden aus den harmonischen Koeffizienten des SYNGPM1300s, aus denen auch die synthetischen Daten abgeleitet wurden, entsprechend (2.61) berechnet. Es ist jedoch dabei zu beachten, dass die Funktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{SYNGPM1300s}}$  global und nicht speziell für das regionale Testgebiet gültig ist. Sie weicht deshalb etwas vom Verlauf der anderen beiden Funktionen  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana1300}}$  und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$  ab. Aufgrund des Abbruchs der Akkumulation der Gradvarianzen bei  $n_{\max} = 1300$  unterscheidet sich auch die Funktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana1300}}$  von der Funktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$ , insbesondere fällt die Varianz  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana1300}}(\psi = 0)$  aufgrund der fehlenden hochfrequenten Signalanteile niedriger aus. Die Ähnlichkeit der Funktionen kann aber als ausreichend angesehen werden, um die in der Berechnung drei- bis vierfach schnellere Variante  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$  auf Basis der geschlossenen Ausdrücke für die Auswertung zu wählen.

Die hier diskutierten Unterschiede der Kovarianzfunktionen in Abhängigkeit von der Modellierung der Signalgradvarianzen sind für die Kovarianzfunktionen  $C_{T_{ij}^R \Delta g^R}$  und  $C_{T_{ij}^R T_{ij}^R}$  bezogen auf Tensorelemente  $T_{ij}^R$  in der Bahnhöhe von GOCE nicht relevant, da diese primär von den Gradvarianzen des langwelligen Spektrums beeinflusst werden, die durch die Fehlergradvarianzen des GPM modelliert werden. Die auf die radiale Tensorkomponente  $T_{zz}$  bezogenen Kovarianzfunktionen sind in Abb. 9.3 bzw. 9.4 dargestellt. Auch hier wird die aus den synthetischen Daten empirisch berechnete Funktion der analytischen Modellierung gegenübergestellt. Die

<sup>1</sup>Die Programme EMPCOV.F und COVFIT.F wurden im Rahmen der "International School for the Determination and Use of the Geoid", Thessaloniki, 2002, von C. C. Tscherning bereitgestellt.



**Abbildung 9.1.** Kovarianzfunktionen  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{emp}}$  (grau, x),  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$  (schwarz, —) und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{TR}}$  (schwarz, - - -).

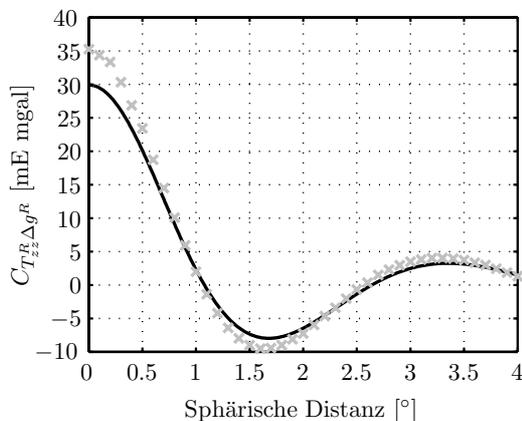


**Abbildung 9.2.** Kovarianzfunktionen  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$  (schwarz, —),  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana1300}}$  (grau, —) und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{SYNGPM1300s}}$  (schwarz, - · -).

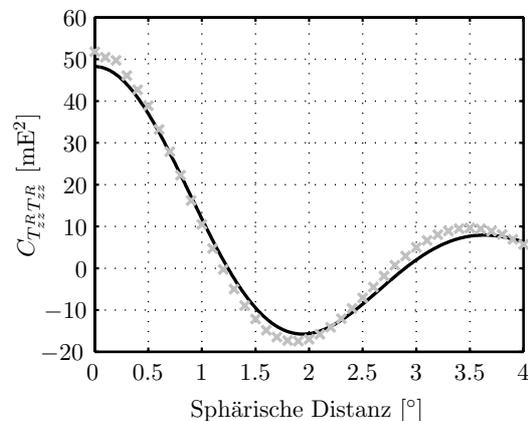
Varianz der empirischen Funktion fällt sowohl für die Kreuzkovarianzfunktion  $C_{T_{zz}^R \Delta g^R}$  als auch für die Kovarianzfunktion  $C_{T_{zz}^R T_{zz}^R}$  etwas höher als die der analytischen Funktionen aus, die Übereinstimmung ist dennoch im Vergleich zur Literatur (Arabelos und Tscherning, 1998; Pail, 2004; Arabelos et al., 2007) akzeptabel.

Im Folgenden wird nun die Modellierung der Kovarianzfunktionen für Blockmittelwerte  $\overline{\Delta g^R}$  erläutert, wobei zunächst angenommen wird, dass die Schwereanomalien in der Höhe null gegeben sind. Die Kovarianzen werden durch die Berechnung der Kovarianzwerte in der Höhe  $h_{\text{BM}} > 0$  approximiert, ausgehend von der Kovarianzfunktion für Punktwerte (Abschnitt 5.2.3). Die erforderliche Höhe  $h_{\text{BM}}$  wurde empirisch ermittelt, indem für verschiedene Höhen  $h_{\text{BM}}$  die sich ergebende analytische Kovarianzfunktion mit der aus den synthetischen Blockmittelwerten berechneten empirischen Kovarianzfunktion verglichen wurde. Mit maximalen Differenzen in den Kovarianzwerten von etwa  $20 \text{ mgal}^2$  (7% von  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{emp}}(\psi = 0)$ ) ergibt sich die Höhe  $h_{\text{BM}}$  zu 1450 m für Blockmittelwerte mit einer Auflösung von  $15'$ . Für  $30'$ -Blockmittelwerte ergibt sich die Höhe  $h_{\text{BM}}$  zu 6300 m mit einer maximalen Abweichung in den Kovarianzwerten von  $10 \text{ mgal}^2$  (6% von  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{emp}}(\psi = 0)$ ). Wird in der Anwendung der Kollokation die individuelle Höhe der Beobachtungen berücksichtigt, werden bei Blockmittelwerten die Höhen  $h_{\text{BM}}$  zu den individuellen Höhen der Blöcke addiert.

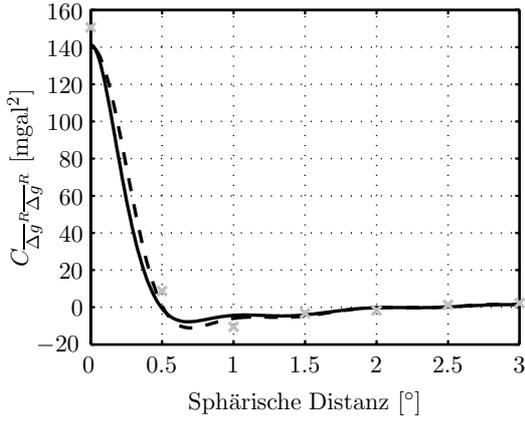
Die empirische Kovarianzfunktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{emp}}$  auf Basis von Blockmittelwerten  $\overline{\Delta g^R}$  mit einer Auflösung von  $30'$ , die analytische Kovarianzfunktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}, h_{\text{BM}}}$  auf Basis der Fehlergradvarianzen des SYNGPM360s und den Signalgradvarianzen des TSCHERNING-RAPP-Modells mit den Parametern (9.1) für eine Punkthöhe der Schwereanomalien von  $h_{\text{BM}} = 6300 \text{ m}$  sind in Abb. 9.5 dargestellt. Alternativ zur Berücksichtigung der Punkthöhe  $h_{\text{BM}}$  kann nach (5.51) die Kovarianzfunktion für Blockmittelwerte durch Einführung der Dämpfungskoeffizienten  $\beta_n$



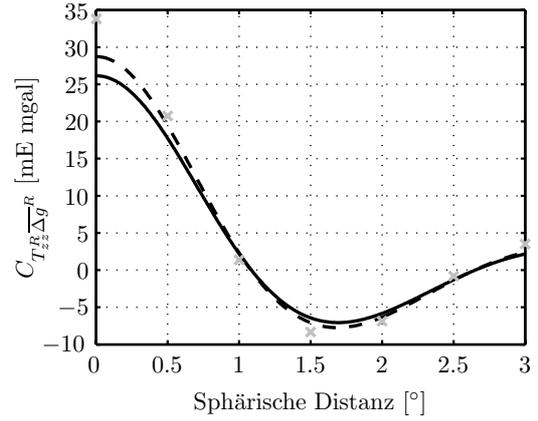
**Abbildung 9.3.** Kovarianzfunktionen  $C_{T_{zz}^R \Delta g^R}^{\text{emp}}$  (grau, x) und  $C_{T_{zz}^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$  (schwarz, durchgezogen).



**Abbildung 9.4.** Kovarianzfunktionen  $C_{T_{zz}^R T_{zz}^R}^{\text{emp}}$  (grau, x) und  $C_{T_{zz}^R T_{zz}^R}^{\text{ana}}$  (schwarz, durchgezogen).



**Abbildung 9.5.** Kovarianzfunktionen  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{emp}}$  (grau, x),  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}, h_{\text{BM}}}$  (schwarz, —) und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana1300}, \beta_n}$  (schwarz, - - -).



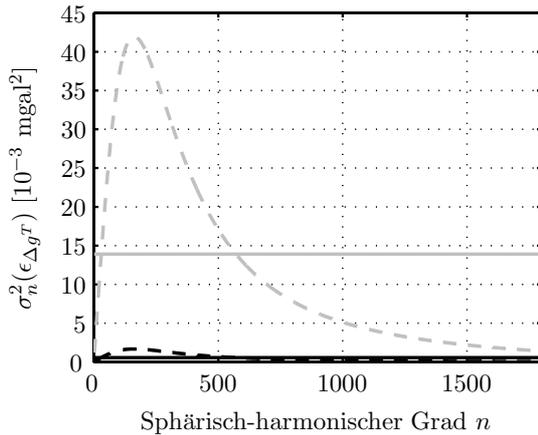
**Abbildung 9.6.** Kovarianzfunktionen  $C_{T_{zz}^R \Delta g^R}^{\text{emp}}$  (grau, x),  $C_{T_{zz}^R \Delta g^R}^{\text{ana}, h_{\text{BM}}}$  (schwarz, —) und  $C_{T_{zz}^R \Delta g^R}^{\text{ana1300}, \beta_n}$  (schwarz, - - -).

(vgl. Abb. 5.9 auf S. 66) berechnet werden. Eine solche analytische Kovarianzfunktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana1300}, \beta_n}$  ist zusätzlich in Abb. 9.5 abgebildet. Der maximale sphärisch-harmonische Grad der Akkumulation der Gradvarianzen betrug dabei  $n_{\text{max}} = 1300$ . Die entsprechende Darstellung der Kreuzkovarianzfunktionen  $C_{T_{zz}^R \Delta g^R}^{\text{emp}}$ ,  $C_{T_{zz}^R \Delta g^R}^{\text{ana}, h_{\text{BM}}}$  und  $C_{T_{zz}^R \Delta g^R}^{\text{ana1300}, \beta_n}$  ist in Abb. 9.6 zu finden. Die Kovarianzfunktionen auf Basis von  $h_{\text{BM}} = 6300$  m und auf Basis der Dämpfungskoeffizienten  $\beta_n$  sind ähnlich, letztere zeigt etwas höhere Amplituden, sowohl in der Kovarianz- als auch in der Kreuzkovarianzfunktion. Für Blockmittelwerte mit einer Auflösung von  $15'$  liegen die beiden Funktionen noch dichter beieinander. Zur numerischen Berechnung der Kovarianzen im Kollokationsverfahren wurden die Kovarianzwerte entsprechend der Berechnung von  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}, h_{\text{BM}}}$  verwendet, da dieses Verfahren die schnelle Berechnung der Kovarianzen über die geschlossenen Ausdrücke ermöglicht.

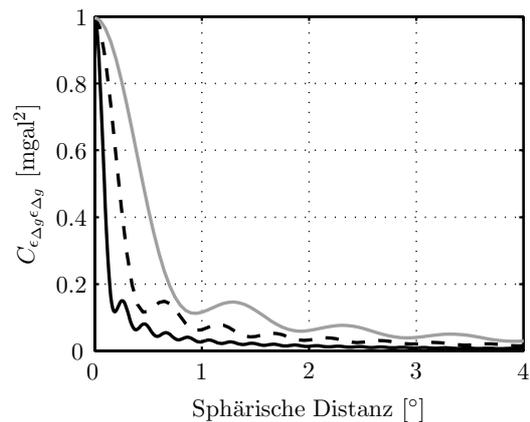
## 9.2 Spektrale Gewichte

Die in der spektralen Kombination mit dem Integrationsverfahren eingesetzten Gewichte  $s_n$  wurden mit Gleichung (5.11) berechnet. Dort gehen die Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M})$  des GPM und die Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})$  der terrestrischen Daten ein. Die Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M})$  werden mit (3.52) aus den Varianzen der Koeffizienten des SYNGPM360I bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\text{max}} = 360$  berechnet. Die Berechnung der Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})$  hängt davon ab, welches Rauschenszenario (1UK, 1K, 5UK, 5K) angenommen wird: für unkorreliertes Rauschen wird (3.55) angewendet, für korreliertes Rauschen der Zusammenhang (3.53). Bei unkorreliertem Rauschen, anders als bei korreliertem Rauschen, ist die Modellierung der Fehlergradvarianzen abhängig von der Datenauflösung. In Abb. 9.7 sind die Fehlergradvarianzen für ein Rauschniveau von 1 mgal bzw. 5 mgal angegeben, bei unkorreliertem Rauschen wurde von einer Auflösung von  $6'$  ausgegangen. Die Fehlergradvarianzen unkorrelierten Rauschens bei größerer Datenauflösung haben einen größeren Wert und sind maximal bis zu dem sphärisch-harmonischen Grad  $n_B$  aus (3.56) entsprechend der Datenauflösung gegeben. Es sei bemerkt, dass mit dieser Modellierung der Fehlergradvarianzen bandlimitiertes weißes Rauschen erzeugt wird (Abschnitt 3.4.4). Bei Akkumulation der Fehlergradvarianzen ergeben sich daher Korrelationen im Abstand der Datenauflösung (Abb. 9.8), die bei streng unkorreliertem Rauschen null sein sollten. Bei der Interpretation der Ergebnisse ist dies zu berücksichtigen.

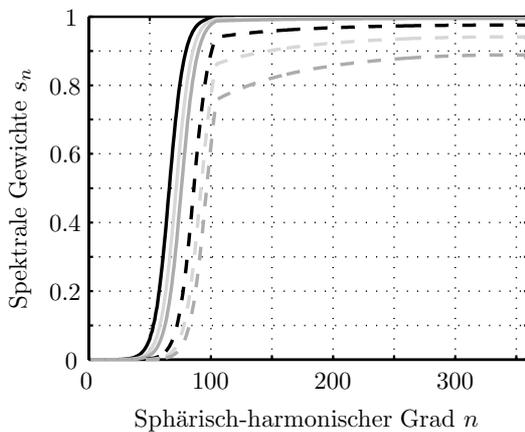
Die spektralen Gewichte  $s_n$  sind demzufolge bei unkorreliertem Rauschen auch von der Datenauflösung abhängig, wie in Abb. 9.9 dargestellt. Das Gewicht der terrestrischen Daten in der Kombinationslösung verringert sich also, wenn eine gröbere Auflösung oder höheres Rauschen zugrunde gelegt wird. Die spektralen Gewichte für korreliertes und unkorreliertes Rauschen der Szenarien 1UK, 1K, 5UK und 5K mit einem Rauschniveau von 1 mgal bzw. 5 mgal sind für eine Auflösung von  $6'$  in Abb. 9.10 dargestellt. Das GPM erhält in der Kombinationslösung ein spektrales Gewicht über 0.5 bis etwa zum sphärisch-harmonischen Grad 70 im Fall eines Rauschniveaus von 1 mgal und bis zum Grad 90 im Fall von 5 mgal Rauschen. Im hochfrequenten Bereich dominieren die terrestrischen Daten.



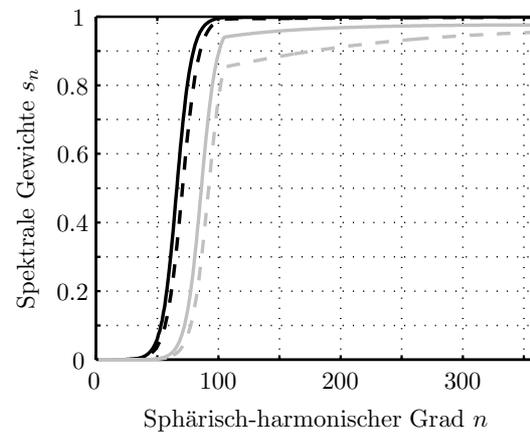
**Abbildung 9.7.** Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})$ , Szenarien 1UK (—), 5UK (—, grau), beide für eine Datenauflösung von 6', und Szenarien 1K (---), 5K (---, grau), unabhängig von der Datenauflösung.



**Abbildung 9.8.** Kovarianzfunktion  $C_{\epsilon_{\Delta g}, \epsilon_{\Delta g}}$  aus akkumulierten Fehlergradvarianzen für unkorreliertes Rauschen der Schwereanomalien, Szenario 1UK, Datenauflösung 6' (—), 15' (---) und 30' (—, grau).



**Abbildung 9.9.** Spektrale Gewichte  $s_n$ , Szenarien 1UK (—) und 5UK (---) in Abhängigkeit von der Datenauflösung: 6' (schwarz), 15' (hellgrau) und 30' (dunkelgrau).



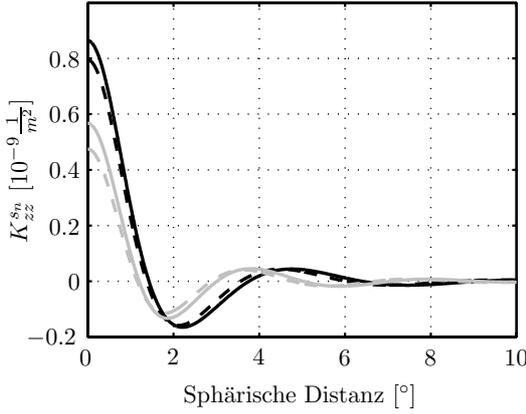
**Abbildung 9.10.** Spektrale Gewichte  $s_n$ , Szenarien 1UK (—), 5UK (—, grau), beide mit einer Datenauflösung von 6', und Szenarien 1K (---), 5K (---, grau), unabhängig von der Datenauflösung.

## 9.3 Statistische Bestimmung der Varianzen

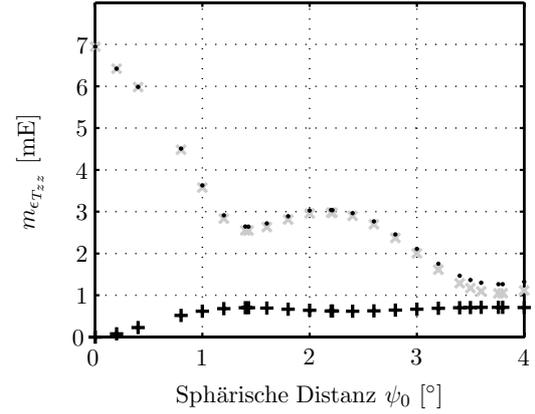
Die Varianzen der Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$ , die aus der Kombination des SYNGPM360I mit terrestrischen Schwereanomalien in der Bahnhöhe von GOCE berechnet werden, werden im Folgenden statistisch bestimmt. Dazu wird zum einen die Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen und zum anderen die Kollokation eingesetzt. Es wird untersucht, welchen Einfluss die Gebietsgröße, die Auflösung und das Rauschen der terrestrischen Daten auf die Varianzen der Tensorelemente haben. Die Ergebnisse beider Verfahren werden verglichen.

### 9.3.1 Varianzen aus der Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen

Zunächst wird die Abhängigkeit der Varianz  $m_{\epsilon_{T_{zz}}}^2$  der radialen Komponente  $T_{zz}$  des Tensors  $T_{[ij]}$  vom Abbruchradius  $\psi_0$ , dem konstanten maximalen Integrationsradius, untersucht (Abschnitt 5.1.4). Es wird die spektrale Kombination unter Verwendung der in Abschnitt 9.2 angegebenen spektralen Gewichte  $s_n$  angewendet. Exemplarisch sind die auf Basis dieser Gewichte modifizierten Kernfunktionen  $K_{zz}$  der radialen Komponente  $T_{zz}$  in Abb. 9.11 dargestellt, im Fall der Szenarien UK ausgehend von einer Datenauflösung von 6'. Zur Berechnung der Kernfunktionen  $K_{ij}$  ist es im Rahmen der Rechengenauigkeit ausreichend, die Summation in (5.3) auf  $n_{\max} = 500$  zu begrenzen. Die Kernfunktionen der Szenarien 5UK und 5K fallen schneller auf null ab als die Kernfunktionen



**Abbildung 9.11.** Kernfunktionen  $K_{zz}$  mit spektralen Gewichten  $s_n$ , Szenarien 1UK (—), 1K (---), 5UK (—, grau) und 5K (---, grau), Szenarien UK ausgehend von einer Auflösung des Gitters von  $6'$ .



**Abbildung 9.12.** Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^M}}$  (x, grau),  $m_{\epsilon_{T_{zz}^T}}$  (+) und  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}}$  (·) aus (5.12) mit spektraler Gewichtung nach (5.11) für wachsende Abbruchradien  $\psi_0$ , Szenario 1UK, Auflösung des Gitters  $6'$ .

der Szenarien 1UK und 1K. Der Grund dafür ist, dass in den Szenarien 5UK und 5K das GPM bis zu einem höheren sphärisch-harmonischen Grad mit hohem Gewicht in die Kombinationslösung eingeht (Abb. 9.10) und die langwellige Information daher in der modifizierten Kernfunktion fehlt, die auf die residualen terrestrischen Daten angewendet wird.

Die Berechnung der Varianz  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}}^2$  erfolgt nach (5.12) für konstante Abbruchradien  $\psi_0$  aus der Summe der Varianzen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^M}}^2$ ,  $m_{\epsilon_{T_{zz}^T}}^2$  und  $m_{\delta T_{zz}^{VF, IF}}^2$ . Die Varianz  $m_{\epsilon_{T_{zz}^M}}^2$  resultiert aus den Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^M})$  des GPM, die Varianz  $m_{\epsilon_{T_{zz}^T}}^2$  aus den Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})$  der terrestrischen Schwereanomalien. Der Vernachlässigungsfehler  $\delta T_{zz}^{VF, IF}$  ist aufgrund der Höhe von 250 km, in der die Tensorelemente berechnet werden, und des hohen sphärisch-harmonischen Grades  $n_{\max} = 360$  des GPM vernachlässigbar klein, die Varianz  $m_{\delta T_{zz}^{VF, IF}}^2$  wird daher nicht berücksichtigt. Zur Berechnung der Abbruchkoeffizienten  $Z_n^{\epsilon}$  aus (5.13) wurden Rekursionsformeln nach (Paul, 1973) eingesetzt. Die Abbruchkoeffizienten wurden für die Approximation der Standardabweichung  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}} = \sqrt{m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}}^2}$  auf  $\pm 0.01$  mE bis zu einem maximalen Summationsgrad von  $n_{\max} = 500$  in (5.12) berücksichtigt. In (Iz und Chan, 1991) werden Probleme mit der numerischen Stabilität bei der Bestimmung der Abbruchkoeffizienten diskutiert, in den Berechnungen für die vorliegende Arbeit gab es bei einer Speichergröße von 8 Byte für eine Fließkommazahl keine Schwierigkeiten.

Für das Szenario 1UK mit einer Auflösung von  $6'$  der terrestrischen Daten sind die Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}}$  der radialen Tensorkomponente in Abb. 9.12 für wachsende Abbruchradien  $\psi_0$  dargestellt. Der Einfluss des Rauschens des GPM und des Rauschens der terrestrischen Daten ist in Form der Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^M}}$  und  $m_{\epsilon_{T_{zz}^T}}$  ebenfalls dargestellt. Die Kurve der Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}}(\psi_0)$  weist in der ersten und in der zweiten Nullstelle ( $\psi_0 = 1.4^\circ$ ;  $\psi_0 = 3.8^\circ$ ) der Kernfunktion lokale Minima und ein lokales Maximum im ersten lokalen Minimum ( $\psi_0 = 2.2^\circ$ ) der Kernfunktion auf, in Übereinstimmung mit der Darstellung in (Heck, 1979) bezüglich der Geoidberechnung. Die Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}}$  für die genannten Abbruchradien sowie für eine globale Integration mit  $\psi_0 = 180^\circ$  sind in Tabelle 9.1 für alle berechneten Szenarien angegeben. Für die dargestellten Fälle mit  $\psi_0 < 180^\circ$  ist der Fehlereinfluss des GPM stets höher als der Fehlereinfluss der terrestrischen Daten, im Bereich der zweiten Nullstelle der Kernfunktion sind die Fehlereinflüsse ähnlich groß und im Fall  $\psi_0 = 180^\circ$  kehren sich die Verhältnisse um.

Das beste Ergebnis wird erwartungsgemäß erreicht, wenn von global vorliegenden terrestrischen Daten ausgegangen wird ( $\psi_0 = 180^\circ$ ). Die Standardabweichungen für die radiale Komponente  $T_{zz}$  betragen dann 0.8 mE, 1.2 mE, 2.5 mE und 3.4 mE in den Szenarien 1UK, 1K, 5UK und 5K. Die Standardabweichung hängt bei unkorreliertem Rauschen von der Datenauflösung ab (Abschnitt 9.2), die hier mit  $6'$  angenommen wurde. Bei einer Datenauflösung von  $15'$  bzw.  $30'$  erhöht sich die Standardabweichung, wie für die Szenarien 1UK und 5UK im Fall  $\psi_0 = 180^\circ$  in Tabelle 9.2 zu sehen ist. Dies ist zwar plausibel, da bei größerer Abtastung der Beobachtungen Aliasing-Fehler die Lösung verschlechtern können, hier erhöht sich die Standardabweichung allerdings ausschließlich aufgrund der Veränderung der Korrelation des Rauschens der terrestrischen Daten, da die Da-

**Tabelle 9.1.** Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}}$  nach (5.12) für die radiale Tensorkomponente  $T_{zz}$ ; der Abbruch der Kernfunktion bei  $\psi_0$  in der Integration erfolgte in der ersten bzw. zweiten Nullstelle (1N bzw. 2N) und im ersten lokalen Minimum (1M) oder gar nicht ( $\psi_0 = 180^\circ$ ), Einheit mE.

Szen.	$\psi_0$ [°]		$m_{\epsilon_{T_{zz}^M}}$	$m_{\epsilon_{T_{zz}^T}}$	$m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}}$
1UK	1.4303	1N	2.55	0.70	2.64
	2.2122	1M	2.97	0.62	3.04
	3.7604	2N	1.04	0.71	1.26
	180		0.46	0.70	0.84
1K	1.3753	1N	2.81	0.78	2.91
	2.1239	1M	2.99	0.80	3.09
	3.5660	2N	1.16	0.93	1.49
	180		0.62	0.96	1.15
5UK	1.2012	1N	3.93	1.85	4.35
	1.8636	1M	3.70	1.62	4.04
	3.0130	2N	2.20	1.97	2.95
	180		1.49	1.96	2.47
5K	1.1562	1N	4.40	1.96	4.82
	1.7950	1M	4.11	2.02	4.58
	2.8803	2N	2.84	2.43	3.74
	180		2.11	2.60	3.35

**Tabelle 9.2.** Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}}$  nach (5.12) der radialen Tensorkomponente  $T_{zz}$  für  $\psi_0 = 180^\circ$  bei unterschiedlicher Auflösung der terrestrischen Daten, Punktwerte, Einheit mE.

Szen.	6'	15'	30'
1UK	0.84	1.16	1.46
5UK	2.47	3.27	3.99

**Tabelle 9.3.** Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{ij}^{IF}}}$  aller Tensorkomponenten  $T_{ij}$  nach (5.34) für verschiedene Szenarien,  $\psi_0 = 180^\circ$ , Auflösung 6' im Fall der Szenarien UK, Punktwerte, Einheit mE.

Szen.	$T_{xx}, T_{yy}$	$T_{xy}$	$T_{xz}, T_{yz}$	$T_{zz}$
1UK	0.51	0.29	0.59	<b>0.84</b>
1K	0.70	0.40	0.81	<b>1.15</b>
5UK	1.50	0.85	1.74	<b>2.47</b>
5K	2.04	1.16	2.36	<b>3.35</b>

tenauflösung in die Berechnung der Fehlergradvarianzen  $\sigma_n^2(\epsilon_{\Delta g^T})$  einfließt. Eine eventuell im Verhältnis zum Signalspektrum der Beobachtungen zu grobe Abtastung wird also nur über die Rauschmodellierung und nicht direkt bei der Berechnung der Varianz berücksichtigt. Hierauf ist bei der Interpretation der Ergebnisse zu achten. Im Fall von korreliertem Rauschen geht die Datenauflösung nicht in die Modellierung ein, es werden implizit unendlich dichte Daten vorausgesetzt. Bei Anwendung des Integrationsverfahrens auf Blockmittelwerte werden die Dämpfungskoeffizienten  $\beta_n$  als reziproke Faktoren in der Berechnung der Kernfunktion (5.40) eingeführt. Wird dies in der Berechnung der Standardabweichungen berücksichtigt, verschlechtert sich die Standardabweichung  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{IF}}}$  bei einer Auflösung von 30' um weniger als 0.1 mE (3% bis 9% je nach Szenario). Dies liegt daran, dass die Tensorkomponenten in der Bahnhöhe von GOCE kaum hochfrequente Signalanteile haben, so dass Blockmittelwerte, bei denen der hochfrequente Signalanteil durch Mittelbildung entfernt wurde, grundsätzlich für die Berechnung der Tensorkomponenten geeignet sind. Blockmittelwerte können zudem gröber abgetastet werden, ohne dass Aliasing-Effekte auftreten. Fehler durch Aliasing werden in dieser Genauigkeitsabschätzung jedoch nicht direkt bzw. gar nicht berücksichtigt. Die Methode ist daher nur bedingt geeignet, um Aussagen über die notwendige Datenauflösung zu treffen, sei es für Punkt- oder für Blockmittelwerte.

Die Standardabweichungen, die sich bei einem Abbruch der Integration an der zweiten Nullstelle der Kernfunktion ergeben, weisen Differenzen von weniger als 0.5 mE zum Idealfall mit  $\psi_0 = 180^\circ$  auf. In den Szenarien mit einem Rauschniveau der terrestrischen Daten von 1 mgal entspricht dies zwar einer Abweichung von 40% bis 50% und für ein Rauschniveau von 5 mgal etwa 15% bis 20%, die absolute Zahl jedoch ist um einen Faktor zwei bis vier kleiner als die letztendlich angestrebte Genauigkeit von 1 bis 2 mE. Numerische Untersuchungen auf Basis der synthetischen Daten haben ergeben, dass bei Nutzung des gesamten Eingangsdatengebietes in der Integration anstelle einer Kugelkappe mit konstantem Abbruchradius  $\psi_0$  die empirisch berechneten Standardabweichungen noch näher am Idealfall liegen. Dabei wurde für die Berechnungspunkte ein Abstand zum Rand des Datengebietes in Größe des Abstandes zur zweiten Nullstelle der Kernfunktion (hier 3° bis 3.8°) eingehalten (Kieler, 2006; Wolf und Kieler, 2006). In der vorliegenden Arbeit wird ebenfalls das gesamte Eingangsdatengebiet in der Integration genutzt, auf eine Untersuchung des Effektes eines konstanten Abbruchradius  $\psi_0$  für alle Tensorkomponenten wird verzichtet. Die Genauigkeiten aller Tensorkomponenten werden für den Idealfall unter der Annahme von  $\psi_0 = 180^\circ$  abgeschätzt.

Die Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{ij}^{IF}}}$  für den Fall  $\psi_0 = 180^\circ$  wurden nach (5.34) für alle Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  in allen Szenarien berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 9.3 aufgeführt, im Fall der Szenarien UK mit unkorreliertem Rauschen für eine Auflösung von 6' der terrestrischen Daten. Die Werte für die Standardabweichungen

chungen der Hauptdiagonalkomponenten  $T_{xx}$  und  $T_{yy}$  liegen für die verschiedenen Rauschsznarien im Bereich von 0.5 mE bis 2.0 mE, die der Nebendiagonalelemente im Bereich von 0.2 mE bis 2.4 mE. Die Standardabweichungen der im Vergleich zu  $T_{zz}$  bezüglich des Signals schwächeren Komponenten liegen erwartungsgemäß stets unterhalb der Standardabweichungen von  $T_{zz}$ . Der Schwerpunkt in der Genauigkeitsstudie wird daher auf die Analyse der radialen Komponente  $T_{zz}$  gelegt.

### 9.3.2 Varianzen aus der Kollokation nach kleinsten Quadraten

Die Varianz  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{KKQ}}}^2$  der radialen Komponente  $T_{zz}$  in der Bahnhöhe von GOCE wird in Abhängigkeit von Auflösung, Gebietsgröße und dem Rauschen der terrestrischen Beobachtungen mit (5.43) auf Basis der Kollokation für einen zentral im Datengebiet liegenden Punkt berechnet. Die in der Kollokation nach (5.43) berechnete Kovarianzmatrix  $C_{\epsilon_{T_{zz}^{KKQ}}}$  enthält in diesem Fall nur einen Wert, nämlich die Varianz  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{KKQ}}}^2$ . Aus der hier verwendeten Gebietsgröße wird abgeleitet, welcher Abstand für die Berechnungspunkte vom Gebietsrand eingehalten werden muss. Der Abstand entspricht der halben Breite bzw. Länge des Datengebietes. Das Datengebiet liegt am Äquator, so kann die Meridiankonvergenz für die Abstandsberechnung vernachlässigt werden. Da keine tatsächlichen Beobachtungen eingehen, ist nicht die Lage des Gebietes, sondern nur die räumliche Verteilung der Beobachtungen relevant. Es wird von Beobachtungspunkten in einem geographischen Gitter mit einer konstanten Höhe ( $h = 0$ ) ausgegangen. Die Kovarianzmatrizen des Signals und des Rauschens haben dann eine Block-TOEPLITZ-Struktur, die in der Auswertung von (5.43) ausgenutzt wird (Abschnitt 8.3). Die Berechnung erfolgt zunächst ausgehend von Punktwerten  $\Delta g^R$  auf Basis der in Abschnitt 9.1 angegebenen Kovarianzfunktionen. Die resultierenden Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{KKQ}}} = \sqrt{m_{\epsilon_{T_{zz}^{KKQ}}}^2}$  sind für die Szenarien 1UK, 1K, 5UK und 5K in Abb. 9.13 dargestellt.

Es fällt auf, dass ab einer Auflösung feiner als 30' eine deutlicher Genauigkeitssteigerung zu erreichen ist, wenn ein Gebiet größer 3°x3° gewählt wird. Bei größeren Gebieten bzw. Abständen der Berechnungspunkte vom Rand des Datengebietes stagniert die Genauigkeitssteigerung. In guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Abschnitt 9.3.1 wird festgestellt, dass für alle Szenarien ein Abstand von  $\psi = 3.5^\circ$  zum Gebietsrand (Gebietsgröße 7°x7°) ausreicht. Die Genauigkeitssteigerung bei Berücksichtigung eines größeren Abstandes beträgt maximal 5% in den Szenarien mit korreliertem Rauschen. Bei unkorreliertem Rauschen kann die prozentuale Genauigkeitssteigerung in einzelnen Fällen höher ausfallen. Da die Genauigkeitsanalyse unter der Voraussetzung von unkorreliertem Rauschen jedoch nicht unproblematisch ist, wie im Folgenden diskutiert wird, werden diese Ausnahmen nicht berücksichtigt.

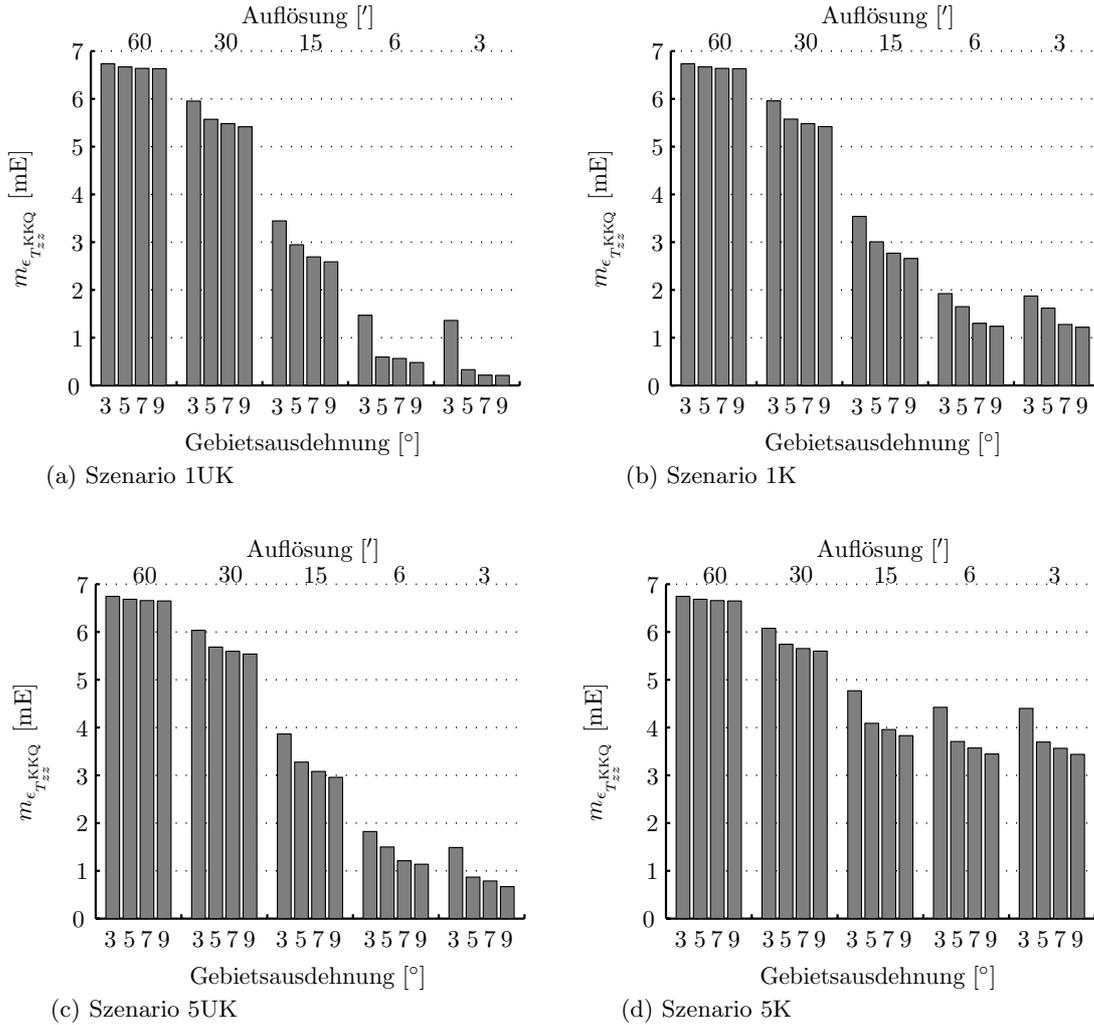
Erwartungsgemäß ergeben sich die kleinsten Standardabweichungen ( $< 1$  mE für Auflösungen  $\leq 6'$ ) im Szenario 1UK. Der Vergleich der Standardabweichungen der Szenarien 1UK und 5UK mit den Szenarien 1K und 5K zeigt, wie groß der Einfluss der Korrelation des Rauschens auf die Varianz ist. Das Rauschniveau hingegen hat im Fall von unkorreliertem Rauschen nur geringen Einfluss auf die Varianz, denn selbst bei Erhöhung des Rauschniveaus auf 5 mgal (5UK) ergeben sich in der Berechnung unter der Annahme der Unkorreliertheit Genauigkeiten von unter 1 mE, wenn nur die Punktauflösung genügend hoch ist (3'). Die Annahme korrelierten Rauschens führt dagegen bei Auflösung von 6' und 3' zu etwa gleich großen Standardabweichungen, der Genauigkeitsgewinn stagniert im Bereich von 0% bis 2%. Bei der Berechnung der Tensorkomponenten sollte daher eine Auflösung von 6' genügen. Der Genauigkeitsverlust bei Verwendung von gröber aufgelösten Punktwerten (15', 30') ist aus Tabelle 9.4 zu ersehen. Es wurde eine Gebietsgröße von 7°x7° in allen Szenarien vorausgesetzt. Eine Auflösung

**Tabelle 9.4.** Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{KKQ}}}$  der radialen Tensorkomponente  $T_{zz}$  für eine Gebietsgröße 7°x7° bei unterschiedlicher Auflösung der terrestrischen Daten, Punktwerte, Einheit mE.

Szen.	6'	15'	30'
1UK	0.56	2.69	5.48
1K	1.30	2.77	5.48
5UK	1.21	3.08	5.59
5K	3.57	3.96	5.65

**Tabelle 9.5.** Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{ij}^{KKQ}}}$  für alle Tensorkomponenten  $T_{ij}$ , Gebietsgröße 7°x7°, Punktwerte, Auflösung 6', Einheit mE.

Szen.	$T_{xx}, T_{yy}$	$T_{xy}$	$T_{xz}, T_{yz}$	$T_{zz}$
1UK	0.40	0.23	0.35	<b>0.56</b>
1K	0.79	0.45	0.96	<b>1.30</b>
5UK	0.74	0.41	0.88	<b>1.21</b>
5K	2.19	1.23	2.48	<b>3.57</b>



**Abbildung 9.13.** Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{KKQ}}}$  der radialen Tensorkomponente  $T_{zz}$  für einen zentralen Punkt in Abhängigkeit von der Gebietsgröße (angegeben ist die Nord-Süd- bzw. Ost-West-Ausdehnung) sowie von Auflösung und Rauschen der Punktwerte  $\Delta g^R$ .

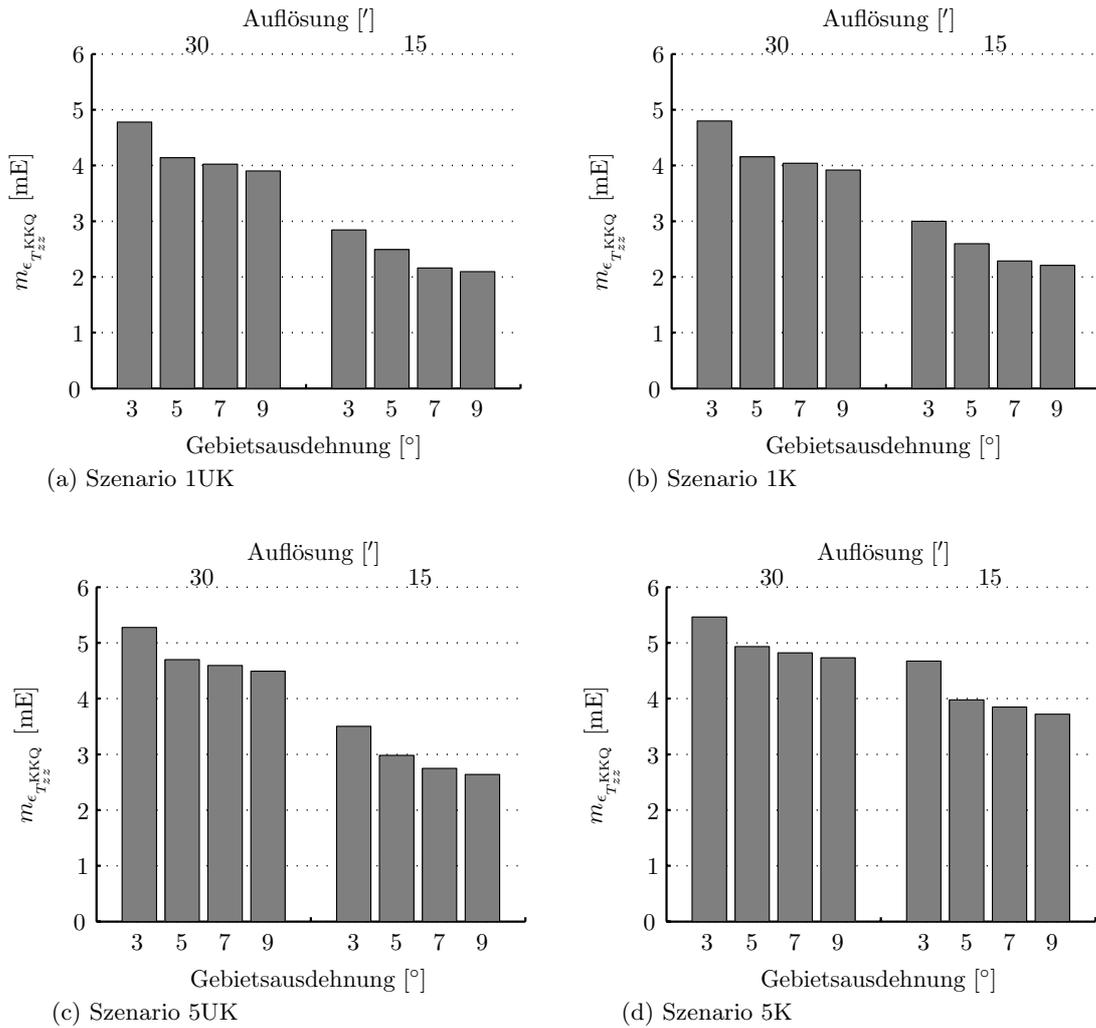
von 30' ist nicht ausreichend, die Standardabweichung steigt deutlich auf über 5 mE in allen Szenarien an, wie auch in Abb. 9.13 zu sehen.

Die Standardabweichungen für alle Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$ , die sich bei einer Gebietsgröße von  $7^\circ \times 7^\circ$  und einer Auflösung der Punktschwereanomalien von 6' ergeben, sind in Tabelle 9.5 angegeben. Es ergeben sich Werte von 0.2 mE bis 3.6 mE für die verschiedenen Tensorkomponenten in den verschiedenen Szenarien. Die Standardabweichung der bezüglich des Signals stärksten Tensorkomponente  $T_{zz}$  ist, wie erwartet, am größten. Die Standardabweichungen im Szenario 5UK sind aufgrund der Annahme unkorrelierten Rauschens kleiner als die im Szenario 1K, obwohl das Rauschniveau deutlich höher ist. Auch dies zeigt, dass die Annahme von unkorreliertem Rauschen ungeeignet ist, um die Auswirkungen des Rauschniveaus auf die Genauigkeit der Zielgrößen abzuschätzen.

**Tabelle 9.6.** Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{ij}^{KKQ}}}$  aller Komponenten  $T_{ij}$ , Gebietsgröße  $7^\circ \times 7^\circ$ , Blockmittelwerte, Einheit mE.

Szen.	Aufl.	$T_{xx}, T_{yy}$	$T_{xy}$	$T_{xz}, T_{yz}$	$T_{zz}$
1UK	30'	2.46	1.38	2.80	<b>4.02</b>
	15'	1.33	0.76	1.55	<b>2.16</b>
1K	30'	2.48	1.39	2.81	<b>4.04</b>
	15'	1.41	0.81	1.63	<b>2.29</b>

Szen.	Aufl.	$T_{xx}, T_{yy}$	$T_{xy}$	$T_{xz}, T_{yz}$	$T_{zz}$
5UK	30'	2.81	1.58	3.21	<b>4.59</b>
	15'	1.69	0.96	1.92	<b>2.75</b>
5K	30'	2.94	1.66	3.38	<b>4.82</b>
	15'	2.36	1.32	2.68	<b>3.85</b>



**Abbildung 9.14.** Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{zz}^{KKQ}}}$  der radialen Tensorkomponente  $T_{zz}$  für einen zentralen Punkt in Abhängigkeit von der Gebietsgröße (angegeben ist die Nord-Süd- bzw. Ost-West-Ausdehnung) sowie von Auflösung und Rauschen der Blockmittelwerte  $\overline{\Delta g^R}$ .

Im Rahmen der numerischen Untersuchungen wurden auch Standardabweichungen ausgehend von Blockmittelwerten auf Basis der in Abschnitt 9.1 angegebenen Kovarianzfunktionen berechnet. Die Ergebnisse sind für die radiale Komponente  $T_{zz}$  in Abb. 9.14 für zwei Auflösungsstufen (15', 30') in den verschiedenen Szenarien dargestellt. Aufgrund der größeren Auflösung ergibt sich hier eine größere Standardabweichung im Szenario 5UK gegenüber dem Szenario 1K. Die Genauigkeitsverschlechterung im Szenarien 5K im Vergleich zu den anderen Szenarien fällt deutlich geringer als bei 6'-Punktwerten aus. Es wird auch hier die Gebietsgröße  $7^\circ \times 7^\circ$  als ausreichend bewertet, in Tabelle 9.6 sind die Standardabweichungen für alle Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  angegeben. Es ergeben sich größere Werte als bei der Berechnung auf Basis von Punktwerten mit einer Auflösung von 6', aber kleinere Werte im Vergleich zu Punktwerten mit entsprechend grober Auflösung (Tabelle 9.4). Die Standardabweichungen für die radiale Komponente  $T_{zz}$  liegen für eine Auflösung von 15' im Bereich von 2.2 mE bis 3.8 mE und für eine Auflösung von 30' im Bereich von 4.0 mE bis 4.8 mE.

### 9.3.3 Diskussion und Zusammenfassung der statistischen Berechnungen

Aus den Ergebnissen beider Verfahren ergibt sich, dass für die Berechnungspunkte ein Abstand von etwa  $3.5^\circ$  oder mehr zum Gebietsrand eingehalten werden sollte, um eine möglichst gute Genauigkeit der Zielgrößen zu erreichen.

Die Standardabweichungen der Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$ , die mit der Kollokation auf Basis von Punktwerten mit einer Auflösung von 6' berechnet wurden (Tabelle 9.5), stimmen mit den Standardabweichungen

aus der Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen (Tabelle 9.3) unter der Annahme korrelierten Rauschens praktisch überein (Abweichungen etwa 0.2 mE). Bei unkorreliertem Rauschen treten Differenzen in den Standardabweichungen von bis zu 1.3 mE auf. Die Abweichungen werden durch die unterschiedliche Modellierung zur Berücksichtigung des unkorrelierten Rauschens verursacht. Bei Anwendung der Kollokation werden die Rauschwerte im Ortsraum anhand der Kovarianzmatrix des Rauschens festgelegt, bei unkorreliertem Rauschen ist die Kovarianzmatrix nur auf der Hauptdiagonalen besetzt (Diagonalmatrix). In der Berechnung der spektralen Gewichte  $s_n$  gehen die Gradvarianzen des Rauschens ein, die bei unkorreliertem Rauschen entsprechend (3.55) durch gleichmäßige Verteilung des Rauschniveaus über den von der Datenauflösung abhängigen Spektralbereich als bandlimitiertes weißes Rauschen berechnet werden. Es verbleiben bei dieser Modellierung Korrelationen zwischen benachbarten Punkten, vgl. Abb. 9.8 und (Wolf, 2006). Daher ergeben sich bei unkorreliertem Rauschen mit den spektral gewichteten Gradvarianzen etwas größere Standardabweichungen als auf Basis der Kollokation. Die Annahme von unkorreliertem Rauschen führt außerdem gerade in der Kollokation dazu, dass das Rauschniveau nur noch geringen Einfluss auf die resultierende Varianz der Zielgröße hat. Die Annahme von unkorreliertem Rauschen ist daher ungeeignet für eine Genauigkeitsanalyse. Aus diesem Grund wird das Szenario 5UK, bei dem von unkorreliertem Rauschen mit einem relativ hohen Rauschniveau von 5 mgal ausgegangen wird, im Folgenden nicht weiter in Betracht gezogen.

Die im Hinblick auf die angestrebte Genauigkeit von 1 bis 2 mE notwendige Datenauflösung wurde auf Basis von korreliertem Rauschen ermittelt, da - anders als bei der Annahme von unkorreliertem Rauschen - die Abnahme der Varianz auch bei feiner werdender Datenauflösung stagniert. So kann ein Varianzwert bestimmt werden, der durch eine feinere Auflösung der Beobachtungen kaum noch verringert werden kann. Die Berechnung der Varianz ist in diesem Fall auf Basis von Gradvarianzen nicht möglich, da die Berechnung bei Punktwerten unabhängig von der Auflösung ist und bei Blockmittelwerten die Auflösung zwar eingeht, ein möglicher Aliasing-Effekt aber nicht berücksichtigt wird. Die notwendige Auflösung wurde deswegen mit Hilfe der Kollokation bestimmt. Das Genauigkeitsziel von 1 bis 2 mE und besser wird bei einer Auflösung der Punktwerte von 6' erreicht, wenn ein Rauschniveau von 1 mgal (korreliert oder unkorreliert) vorliegt. Für den Fall von korreliertem Rauschen mit einem Rauschniveau von 5 mgal wird ein Niveau von 3 mE überschritten. Die Standardabweichungen aus der Kollokation auf Basis von Blockmittelwerten der Auflösungsstufe 15' liegen für die Rauschszenarien 1UK und 1K im Bereich von 2 bis 3 mE, bei einer Auflösung von 30' überschreiten sie ein Niveau von 3 mE.

Die Untersuchung zeigt, dass die Kollokation zur Analyse der Anforderungen an die Beobachtungen im Hinblick auf eine Zielgenauigkeit gut geeignet ist. Ausgehend von Auflösung, Gebietsgröße und dem Rauschen der terrestrischen Daten kann die resultierende Varianz der Zielgröße berechnet werden. Da die Varianz nur für einen zentralen Punkt berechnet werden muss, ist der Rechenaufwand verhältnismäßig gering und es treten keine Stabilitätsprobleme bei der Gleichungslösung auf.

Für die Untersuchung der Auswirkung von unterschiedlichen Rauschniveaus ist auch die Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen zur Berechnung der Varianz geeignet. Die Berücksichtigung des Abbruchs der Kernfunktion erlaubt des Weiteren die Untersuchung bezüglich des notwendigen Abstandes zum Gebietsrand. Zur Ermittlung der Auswirkung unterschiedlicher Auflösungen der Beobachtungen ist die Methode bei unkorreliertem Rauschen bedingt, bei korreliertem Rauschen nicht geeignet. Vorteilhaft ist bei diesem Verfahren, dass die Möglichkeit besteht, den vom Rauschen des GPM und der terrestrischen Daten verursachten Fehlereinfluss getrennt zu beurteilen. Auf Grundlage der spektralen Gewichte ist eine Analyse der Gewichtung der terrestrischen Daten gegenüber dem GPM möglich, allerdings werden die Gewichte im Fall  $\psi_0 < 180^\circ$  verzerrt (Abschnitt 5.1.5). Die Gewichtsverteilung zwischen GPM und terrestrischen Daten ist bei der diskreten Auswertung der Kollokation zwar statistisch optimal, aber die numerischen Werte sind unbekannt.

## 9.4 Berechnung des Rauschens und der Varianzen auf Basis des synthetischen Erdmodells

Auf Basis des synthetischen Erdmodells wird der Tensor  $\hat{T}_{[ij]}$  für verschiedene Szenarien der Eingangsdaten mit dem Integrationsverfahren mit spektralen Gewichten und der Kollokation berechnet. Im synthetischen Erdmodell steht der fehlerfreie Tensor  $T_{[ij]}^{1300S}$  (Soll) für den Soll-Ist-Vergleich bereit (Abschnitt 7.5.2). Die auf Basis der residualen Schwereanomalien berechneten und anschließend restituierten Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  (Ist) werden

mit den Elementen des exakten Tensors  $T_{[ij]}^{1300S}$  verglichen. Alternativ können die residualen Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  mit den residualen Sollwerten  $T_{[ij]}^R = T_{[ij]}^{1300S} - \hat{T}_{[ij]}^M$  verglichen werden, um die Berechnung der Restitution seitens der Ist-Werte mit Hilfe des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^M$  aus dem GPM einzusparen. Die Differenzen  $T_{[ij]}^R - \hat{T}_{[ij]}^R$  stellen das verbleibende Rauschen der Lösung dar, sie werden hier analysiert. Die Standardabweichung der Zielgröße wird als Standardabweichung des Mittelwertes der Differenzen empirisch berechnet.

Die Berechnung der Tensorelemente erfolgt mit Punktwerten  $\Delta g^R$  mit einer Auflösung von 6', 15' und 30' und mit Blockmittelwerten  $\overline{\Delta g}^R$  mit einer Auflösung von 15' und 30'. Bei einer Abtastweite von 6' treten bei den synthetischen Daten keine Aliasing-Fehler auf, da deren Signalinhalt bei einem maximalen sphärisch-harmonischen Grad 1300 spektral auf etwa 8' Auflösung beschränkt ist (Abschnitt 7.5.1). Die Ergebnisse werden in einem inneren Bereich ( $40^\circ < \varphi < 55^\circ$  und  $0^\circ < \lambda < 20^\circ$ ) des Testgebietes ( $36.5^\circ < \varphi < 58.5^\circ$  und  $-7.0^\circ < \lambda < 27^\circ$ ) mit einem Mindestabstand von  $\psi = 3.5^\circ$  vom Rand des Gebietes analysiert.

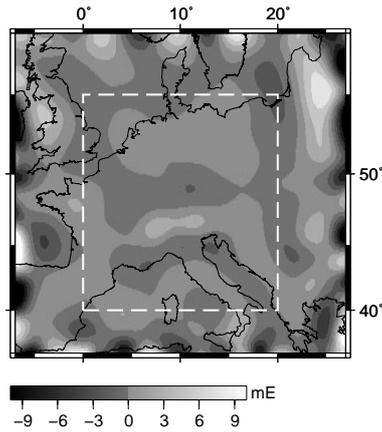
Mit Hilfe der synthetischen Daten wird der Einfluss von Auflösung und Rauschen der Eingangsdaten auf das Rauschen und die Varianz der Zielgröße untersucht. Des Weiteren wird die Auswirkung der Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe seitens der residualen terrestrischen Daten analysiert. Der Schwerpunkt der numerischen Untersuchungen auf Basis der synthetischen Daten liegt auf der Studie der radialen Tensorkomponente  $\hat{T}_{zz}$ . Wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt wurde, ist die Varianz dieser Komponente stets größer als die der übrigen Tensorkomponenten. Es ist jedoch zu beachten, dass die Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe der residualen Beobachtungen sich in den Komponenten mit horizontalen Ableitungen deutlicher als in der radialen Komponente auswirken kann. Dies wird im Detail in Kapitel 10 anhand der realen Daten diskutiert. Die erzielten Genauigkeiten aller Tensorkomponenten werden hier nur im Rahmen des Integrationsverfahrens im Abschnitt 9.4.1 exemplarisch angegeben, für die weiteren Untersuchungen liegt der Fokus auf der Analyse der radialen Tensorkomponente.

Die berechneten Werte der radialen Tensorkomponente  $\hat{T}_{zz}^R$  werden für den Soll-Ist-Vergleich in ein einheitliches 6'-Gitter transformiert. Die Interpolation erfolgt mit einem kubischen Spline-Ansatz (Bronstein et al., 1996). Auf diese Weise können alle Ergebnisse miteinander verglichen werden. Die dabei maximal auftretenden Interpolationsfehler sind im Testgebiet für residuale Tensorkomponenten kleiner als 0.1 mE. Die Berechnung der Lösung an den Punkten des 6'-Gitters wäre im Rahmen der Kollokation auch direkt möglich, aufgrund des insgesamt geringeren Rechenaufwandes und des vertretbaren Interpolationsfehlers wurde der Spline-Ansatz gewählt. Alle angegebenen Statistiken in diesem Abschnitt beziehen sich auf Ergebnisse für dieses 6'-Gitter.

Die Signifikanz der Differenzen zwischen den ermittelten Standardabweichungen wird mit statistischen Tests überprüft, ebenso die Signifikanz der maximal auftretenden Differenzen zwischen den Lösungen. Dazu werden Testverfahren eingesetzt, die eine Normalverteilung der Werte voraussetzen. Diese Voraussetzung wird für das verbleibende Rauschen zwar nicht streng erfüllt, trotzdem ergeben sich bei den Tests plausible Entscheidungen. Die Testentscheidungen helfen, die Ergebnisse in der Diskussion vergleichbar zu bewerten. Zum Vergleich zweier empirischer Varianzen  $s_A^2 > s_B^2$  wird ihr Quotient  $F = \frac{s_A^2}{s_B^2}$  gegen ein Quantil  $q_F$  der FISHER-Verteilung getestet (Pelzer, 1985, S. 73). Die Varianzen werden auf Basis von  $n = 30\,000$  zufälligen Abweichungen, entsprechend der Anzahl Beobachtungen bei einer Datenauflösung von 6' im Auswertebereich, abgeleitet, es liegen jeweils  $n - 1$  Freiheitsgrade vor. Bei einem zweiseitigen Test mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% beträgt der Wert des Quantils  $q_F = 1.023$ , er liegt aufgrund der hohen Anzahl von Freiheitsgraden sehr nahe an 1.0. Die Differenzen zwischen den Lösungen in  $\hat{T}_{[ij]}^R$  werden mit Hilfe eines Quantils  $q_t$  der  $t$ -Verteilung auf Signifikanz getestet (Pelzer, 1985, S. 72). Als Testgröße  $t$  wird die maximale absolute Differenz  $D$  dividiert durch die Standardabweichung der Differenz  $s_D = \sqrt{s_A^2 + s_B^2}$  der beiden Lösungen  $A$  und  $B$  verwendet. Der Wert des Quantils  $q_t$  hängt von der Anzahl Freiheitsgrade ab, die mit dem Näherungsverfahren nach WELSCH in Abhängigkeit von den Varianzen  $s_A^2$  und  $s_B^2$  zu bestimmen wären (Pelzer, 1985, S. 73). Aufgrund der großen Anzahl von Freiheitsgraden beträgt hier der Wert des Quantils aber in allen Fällen  $q_t = 1.96$  für einen zweiseitigen Test mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%. Wird dieser Wert von  $t = \frac{D}{s_D}$  überschritten, wird die Differenz  $D$  als signifikant bewertet.

### 9.4.1 Rauschen und Varianzen aus dem Integrationsverfahren

Bei Anwendung des Integrationsverfahrens werden die in Abb. 9.11 (S. 107) exemplarisch für die radiale Komponente  $T_{zz}$  dargestellten modifizierten Kernfunktionen zur Berechnung der Komponenten des residualen Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  eingesetzt. Es werden dabei die MOLODENSKII-Korrekturterme vernachlässigt und eine konstante Höhe



**Abbildung 9.15.** Rauschen in  $\hat{T}_{zz}$  im gesamten Testgebiet, Szenario 1UK, Punktauflösung  $6'$ , Integrationslösung.

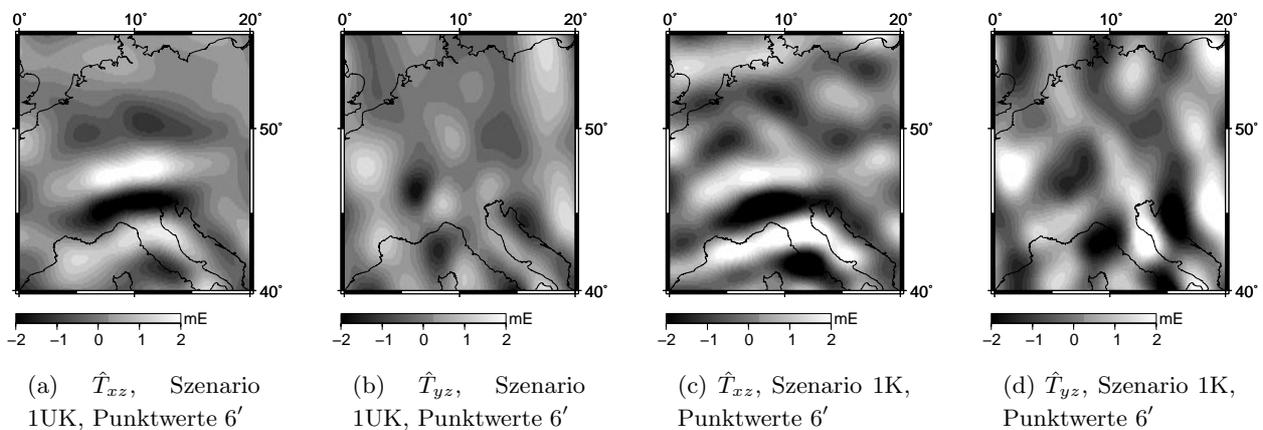
**Tabelle 9.7.** Statistik des Rauschens aus dem Soll-Ist-Vergleich aller Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$ , Integrationslösung, Punktauflösung  $6'$ , Einheit mE.

Differenz in Komponente	Szen.	Mtw	Std	Min	Max
$xx$	1UK	-0.03	0.64	-2.39	1.97
$xy$		-0.00	0.29	-0.81	0.89
$xz$		0.05	0.70	-2.38	2.19
$yy$		0.03	0.51	-1.79	2.20
$yz$		0.08	0.55	-1.74	1.64
$zz$		0.00	0.91	-2.49	3.42
$xx$	1K	-0.02	0.91	-3.09	2.82
$xy$		0.01	0.46	-1.71	1.28
$xz$		0.04	1.00	-3.43	3.14
$yy$		-0.00	0.85	-2.63	2.52
$yz$		0.07	0.98	-2.87	3.22
$zz$		0.03	1.41	-4.03	5.09

( $h = 0$ ) für alle Beobachtungspunkte angenommen. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe der in Abschnitt 8.1 erläuterten 1D-FFT-Methode, die Tensorcomponenten werden in der Auflösung, in der die Beobachtungen vorliegen, berechnet. Das im Soll-Ist-Vergleich ermittelte verbleibende Rauschen wird im Folgenden analysiert.

In Abb. 9.15 ist das in der radialen Komponente  $T_{zz}$  verbleibende Rauschen bezogen auf das gesamte Eingangsdatengebiet exemplarisch für das Szenario 1UK dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass das Rauschen zum Rand des Gebietes hin größer wird. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der statistischen Genauigkeitsanalyse zeigt sich, dass ein Abstand von etwa  $3.5^\circ$  vom Gebietsrand einzuhalten ist (vgl. Abschnitt 9.3.3). Im Folgenden wird daher nur der in Abb. 9.15 markierte innere Bereich ( $40^\circ < \varphi < 55^\circ$  und  $0^\circ < \lambda < 20^\circ$ ) betrachtet, um das verbleibende Rauschen losgelöst von diesem Randeffekt zu beurteilen.

Die Statistik der Differenzen aus dem Soll-Ist-Vergleich aller Tensorcomponenten für Punktwerte mit einer Auflösung von  $6'$  ist für die Szenarien 1UK und 1K in Tabelle 9.7 angegeben. Die radiale Komponente  $\hat{T}_{zz}$  zeigt, wie erwartet, die größten Abweichungen zum Soll. Auch bei den übrigen Tensorcomponenten sind aber maximale Abweichungen über 2 mE möglich. Die Abweichungen treten im Szenario 1UK in Bereichen mit großen Höhenänderungen wie den Alpen auf. Deutlich ist dies im Rauschen der Komponente  $\hat{T}_{xz}$  in der Abb. 9.16 (a) zu sehen. Diese Komponente ist besonders empfindlich für Strukturen mit Ost-West-Ausdehnung. Die Komponente  $\hat{T}_{yz}$  zeigt Strukturen mit Nord-Süd-Ausdehnung an, auch hier treten größere Differenzen im Bereich der Alpen auf, s. Abb. 9.16 (b). Im Szenario 1K ist der Effekt weniger ausgeprägt (Abb. 9.16 (c) und (d)). Im Alpenbereich ist das residuale Signal der Schwereanomalie variationsreich mit großem Amplitudenausschlag (Abb. 7.17, S. 87), dies kann eine Ursache dafür sein, dass das Rauschen in den Tensorelementen in diesem Bereich höher ist. Eine



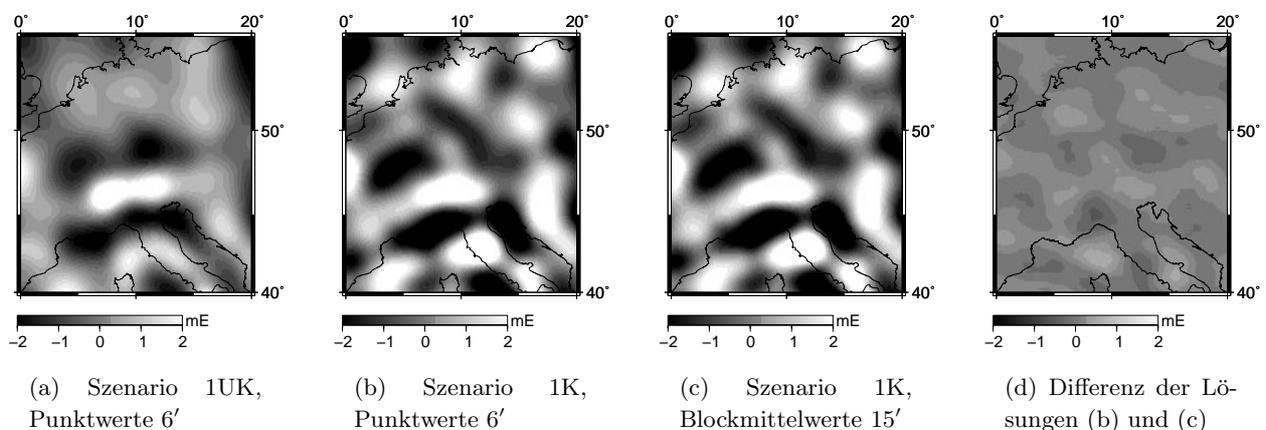
**Abbildung 9.16.** Rauschen in  $\hat{T}_{xz}$  und  $\hat{T}_{yz}$  in den Integrationslösungen mit der Annahme konstanter Höhe.

andere mögliche Ursache ist, dass im Integrationsverfahren die Punkthöhen der residualen Schwereanomalien mit null approximiert wurden, im Übergang zum Hochgebirge, wie den Alpen, aber große Höhenänderungen auftreten. In Hochgebirgslagen treten Punkthöhen von über 1500 m auf. Die Auswirkungen der Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe ist besonders deutlich im Szenario 1UK zu sehen, da die terrestrischen Daten dort gegenüber dem GPM ein hohes Gewicht in der Kombinationslösung haben. Der Effekt ist auch bei den Soll-Ist-Differenzen in der radialen Komponente  $\hat{T}_{zz}$  im Szenario 1UK zu erkennen (Abb. 9.17 (a)), auch hier aufgrund des insgesamt erhöhten Rauschens weniger deutlich im Szenario 1K (Abb. 9.17 (b)). Die Ergebnisse auf Basis der realen Daten (Kapitel 10) zeigen, dass der Effekt der Vernachlässigung der Punkthöhe sich bei den Komponenten mit horizontalen Ableitungen deutlicher als in der radialen Komponente auswirken kann. Dennoch weist die radiale Komponente die größte Varianz auf, daher werden im Weiteren zu den Berechnungen mit synthetischen Daten ausschließlich die Ergebnisse für diese Komponente diskutiert.

Die Standardabweichung der radialen Komponente beträgt im Szenario 1UK 0.9 mE und im Szenario 1K 1.4 mE. Im Szenario 5K (Tabelle 9.9, S. 117) beträgt die Standardabweichung 3.5 mE. Da dieser Wert bereits deutlich das angestrebte Genauigkeitsniveau von 1 bis 2 mE übersteigt, wird der Effekt größerer Datenaufösung im Folgenden nur in den Szenarien 1UK und 1K untersucht.

In den Szenarien 1UK und 1K vergrößern sich die Standardabweichungen von  $\hat{T}_{zz}$  um 0.1 mE (15% bzw. 5%), wenn die Auflösung der Punktwerte von 6' auf 15' erhöht wird, vgl. Tabelle 9.9. Der Anstieg ist laut dem statistischen Test zwar signifikant, der absolute Wert der Abweichung ist aber gering. Bei einer Auflösung der Punktwerte von 30' wächst die Standardabweichung jedoch deutlich auf 9.4 mE (+940%) bis 10.7 mE (+660%) an. Die großen Abweichungen werden primär durch Aliasing-Fehler in Folge der zu groben Abtastung in Relation zum Signalspektrum verursacht, s. a. (Vassiliou, 1987). Radiale Tensorkomponenten auf Basis des SYNGPM360I haben eine formale Genauigkeit von 7.0 mE (Tabelle 7.1). Bei der zu groben Punktauflösung ist also die Kombinationslösung schlechter als die GPM-Lösung, obwohl die Einzelwerte der terrestrischen Daten eine hohe Genauigkeit von 1 mgal aufweisen. Aufgrund des Approximationsansatzes wird im Integrationsverfahren die Abtastweite der terrestrischen Daten unzureichend berücksichtigt. Dies wird auch nicht oder nur bedingt durch die spektralen Gewichte aufgehoben, s. a. Abschnitt 9.3.1. Es muss in der Auswertung darauf geachtet werden, dass mit den Beobachtungen das Signal in Relation zu seinem Spektrum ausreichend abgetastet wird.

Werden anstelle der Punktwerte Blockmittelwerte in den genannten Auflösungen eingesetzt, verringern sich die Standardabweichungen deutlich und sogar bei einer Auflösung von 30' wird eine Standardabweichung von unter 2 mE erreicht, wenn ein Rauschniveau von 1 mgal angesetzt wird (Tabelle 9.9). Aufgrund der Tiefpassfilterung durch die Mittelwertbildung können Blockmittelwerte gröber als Punktwerte abgetastet werden, ohne dass Aliasing-Effekte auftreten. Das Rauschen der Lösung aus 15'-Blockmittelwerten ist in Abb. 9.17 (c) für das Szenario 1K dargestellt. Die Differenzen zwischen den Lösungen mit 6'-Punktwerten und 15'-Blockmittelwerten sind gering (Abb. 9.17 (d)), die Statistik der Differenzen sind in Tabelle 9.10 (S. 119) für die verschiedenen Szenarien angegeben. Die Standardabweichung des Mittelwertes der Differenzen beträgt 0.5 mE bzw. 0.2 mE bei einer



**Abbildung 9.17.** Rauschen in  $\hat{T}_{zz}$  in den Integrationslösungen mit der Annahme konstanter Höhe und die Differenz zweier Integrationslösungen.

Datenauflösung von 15' im Szenario 1UK bzw. 1K und 1.2 mE (1UK) bzw. 1.0 mE (1K) bei einer Datenauflösung von 30'. Die maximalen Abweichungen im Szenario 1UK sind signifikant. Die größeren Differenzen in diesem Szenario sind erklärbar durch die Veränderung der spektralen Gewichte in Abhängigkeit von der Datenauflösung (Abschnitt 9.2). Im Szenario 1K werden die spektralen Gewichte nicht in Abhängigkeit von der Datenauflösung verändert, daher sind die Lösungen auf Basis der 15' Blockmittelwerte und der 6' Punktwerte beinahe identisch, Abb. 9.17 (d) zeigt die verbleibenden Differenzen.

Es lässt sich zusammenfassen, dass mit Hilfe des Integrationsverfahrens die radiale Tensorkomponente  $\hat{T}_{zz}$  mit einer Standardabweichung im Bereich von 1 bis 2 mE berechnet werden kann, wenn Punktwerte der Auflösung 6' bis 15' oder Blockmittelwerte bis zu einer Auflösung von 30' mit einem Rauschniveau von 1 mgal (korreliert oder unkorreliert) vorliegen. Bei einem Rauschniveau von 5 mgal wird ein Genauigkeitsniveau von 3 mE bereits bei Punktwerten der Auflösung 6' überschritten. Vorsicht ist geboten, wenn die Auflösung von Punktwerten zu grob ist, dann kann die Kombinationslösung ungenauer als die Lösung allein auf Basis des GPM sein.

## 9.4.2 Rauschen und Varianzen aus der Kollokation nach kleinsten Quadraten

Die Kollokation wurde in zwei unterschiedlichen Implementierungen angewendet. In der ersten Implementierung (Abschnitt 9.4.2.1) wird wie beim Integrationsverfahren davon ausgegangen, dass die residualen Beobachtungen in einer konstanten Höhe ( $h = 0$ ) liegen. Unter dieser Voraussetzung kann die Kovarianzmatrix der Beobachtungen in einer Block-TOEPLITZ-Struktur organisiert werden und das zu lösende Gleichungssystem (8.4) kann auf einem Standard-PC berechnet werden (Abschnitt 8.3). In der zweiten Implementierung (Abschnitt 9.4.2.2) wird die individuelle Punkthöhe der Beobachtungen ( $h = h_i$ ) berücksichtigt, wodurch die Block-TOEPLITZ-Struktur der Kovarianzmatrix verloren geht. Das Gleichungssystem wird dann auf einem Parallelrechner gelöst (Abschnitt 8.2).

### 9.4.2.1 Rauschen und Varianzen aus der Kollokation bei Annahme konstanter Höhen

Vor Anwendung der Kollokation ist zu prüfen, bis zu welcher Dimension des Gleichungssystems (8.4) eine stabile Lösung möglich ist. Dazu wurden die Residuen (8.13) für verschiedene Gebietsgrößen bei einer Auflösung von 6' berechnet (Tabelle 9.8). Die Residuen nehmen bei den angegebenen Gebietsgrößen um etwa eine Größenordnung zu, die Standardabweichung vom Mittelwert der Residuen bei Nutzung des gesamten Testgebietes ( $22^\circ \times 34^\circ$ ) liegt bei  $2 \cdot 10^{-11}$  mgal. Da die Abweichung in Relation zur Messgenauigkeit der Schwereanomalien gering ist, wird die Kollokationslösung für die Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  in einem Durchlauf auf Basis des gesamten Testgebietes berechnet.

Die Statistik des verbleibenden Rauschens aus der Differenz zum Soll ist für die radiale Komponente in Tabelle 9.9 für die Szenarien 1UK, 1K und 5K angegeben. In allen Szenarien wurde eine Auflösung der Beobachtungen von 6' verwendet, Auflösungen der Stufe 15' und 30' sind mit Punkt- und Blockmittelwerten lediglich in den Szenarien 1UK und 1K untersucht worden. Da die Standardabweichung im Szenario 5K bereits bei einer Auflösung von 6' ein Niveau von 3 mE überschreitet, wurde auf weitere Auswertungen verzichtet.

Die Standardabweichung von  $\hat{T}_{zz}$  beträgt im Szenario 1UK 1.1 mE und im Szenario 1K 1.4 mE bei einer Datenauflösung von 6'. Bei Verwendung größerer Auflösungen wird die Standardabweichung signifikant größer, bis zu 5.2 mE bzw. 5.3 mE bei Punktwerten mit einer Auflösung von 30'. Dennoch kann festgestellt werden, dass auch bei in Relation zum Signalspektrum zu grober Datenauflösung die terrestrischen Daten zur Verbesserung der

**Tabelle 9.8.** Statistik der Residuen  $r$  nach (8.13) zur Abschätzung der Stabilität der Gleichungslösung in den beiden angewendeten Implementierungen, Datenauflösung 6', Einheit mgal.

$n_\varphi \times n_\lambda$	$n$	Gebietsgröße [°]	Block-TOEPLITZ-Implementierung ( $h = 0$ )				Parallelimplementierung ( $h = h_i$ )			
			Mtw	Std	Min	Max	Mtw	Std	Min	Max
50x90	4500	5.0x9.0	$-6 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-12}$	$-4 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{-12}$	$-2 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$-1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$
75x135	10125	7.5x13.5	$6 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-12}$	$-2 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$-1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$
100x180 <sup>a</sup>	18000	10.0x18.0	$-6 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$-1 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-11}$	$7 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$-2 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$
125x225 <sup>a</sup>	28125	12.5x22.5	$-4 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$-1 \cdot 10^{-10}$	$9 \cdot 10^{-11}$	$-7 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{+1}$	$-7 \cdot 10^{+1}$	$8 \cdot 10^{+1}$
225x340	74800	22.5x34.0	$6 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$-1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-10}$				

<sup>a</sup> Statistik bezieht sich im Fall der Parallelimplementierung auf Werte des zentralen Gebietes mit  $n_\varphi = 50$  und  $n_\lambda = 90$ .

**Tabelle 9.9.** Statistik des Rauschens aus dem Soll-Ist-Vergleich in  $\hat{T}_{zz}$ , Lösungen aus Punktwerten (PW) und Blockmittelwerten (BM) unterschiedlicher Auflösung, Einheit mE.

Aufl.	Szen.	Integrationsverf. ( $h = 0$ )				Kollokation ( $h = 0$ )				Kollokation ( $h = h_i$ )			
		Mtw	Std	Min	Max	Mtw	Std	Min	Max	Mtw	Std	Min	Max
6' (PW)	1UK	0.00	<b>0.91</b>	-2.49	3.42	-0.03	<b>1.10</b>	-2.59	5.32	0.06	<b>0.46</b>	-1.33	1.62
	1K	0.03	<b>1.41</b>	-4.03	5.09	0.03	<b>1.40</b>	-4.08	5.18	0.02	<b>1.30</b>	-3.48	5.12
	5K	0.08	<b>3.53</b>	-9.26	11.95	-0.07	<b>3.52</b>	-9.47	12.02	0.11	<b>3.47</b>	-9.32	12.55
15' (PW)	1UK	0.01	<b>1.05</b>	-3.16	4.36	0.04	<b>1.20</b>	-3.90	4.47	0.04	<b>0.94</b>	-3.09	2.64
	1K	0.02	<b>1.48</b>	-4.97	4.74	0.05	<b>1.54</b>	-5.22	4.86	0.05	<b>1.35</b>	-4.40	4.49
30' (PW)	1UK	-0.03	<b>9.45</b>	-45.42	57.12	0.09	<b>5.21</b>	-26.94	26.80	0.08	<b>5.63</b>	-29.37	31.92
	1K	-0.05	<b>10.74</b>	-50.38	64.14	0.08	<b>5.26</b>	-27.09	26.96	0.08	<b>5.66</b>	-29.45	31.91
15' (BM)	1UK	0.01	<b>0.95</b>	-2.65	3.43	0.03	<b>0.97</b>	-3.11	3.50	0.03	<b>0.83</b>	-2.72	2.50
	1K	0.02	<b>1.45</b>	-4.08	4.95	0.04	<b>1.41</b>	-4.54	5.16	0.04	<b>1.32</b>	-4.45	5.12
30' (BM)	1UK	0.05	<b>1.50</b>	-4.80	4.81	0.09	<b>1.73</b>	-5.64	6.09	0.09	<b>1.69</b>	-5.53	5.86
	1K	0.04	<b>1.83</b>	-5.65	6.31	0.08	<b>1.86</b>	-5.80	5.59	0.08	<b>1.81</b>	-5.73	5.31

kombinierten Lösung beitragen, denn die formale Genauigkeit allein auf Basis des GPM beträgt 7.0 mE (Tabelle 7.1). Allerdings ist die Verbesserung trotz niedrigem Rauschniveau der Daten aufgrund ihrer groben Auflösung nur gering.

Der Genauigkeitsverlust ist geringer, wenn anstelle der Punktwerte Blockmittelwerte eingesetzt werden. Die Standardabweichung von  $\hat{T}_{zz}$  beträgt bei Verwendung von Blockmittelwerten mit einer Auflösung von 15' im Szenario 1UK 1.0 mE und im Szenario 1K 1.4 mE. Bei unkorreliertem Rauschen der eingehenden Blockmittelwerte ist das Rauschen der Lösung sogar kleiner als bei 6'-Punktwerten. Bei einer Auflösung von 30' der Blockmittelwerte werden Standardabweichungen von 1.7 mE im Szenario 1UK und 1.9 mE im Szenario 1K erreicht. Alle Standardabweichungen unterscheiden sich signifikant von den Standardabweichungen der Lösung aus 6'-Punktwerten, eine Ausnahme ist die Lösung aus 15'-Blockmittelwerten im Szenario 1K.

Vergleicht man die Lösung aus den 15'-Blockmittelwerten mit der Lösung auf Basis der 6'-Punktwerte, ergibt sich eine Standardabweichung des Mittelwertes der Differenzen von 1.0 mE im Szenario 1UK und 0.5 mE im Szenario 1K (Tabelle 9.10). Die maximal auftretenden Differenzen sind im Szenario 1UK signifikant, in Szenario 1K jedoch nicht. Es wurde eine größere Übereinstimmung der Lösungen erwartet, da die Lösungen jeweils eine ähnliche Qualität aufweisen (1.1 mE und 1.0 mE (1UK) und 1.4 mE (1K), s. Tabelle 9.9). Mögliche Ursachen für die Abweichungen sind, dass verschiedene Kovarianzfunktionen ( $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$  und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}, h_{\text{BM}}}$ , vgl. Abschnitt 9.1) in den Berechnungen eingesetzt werden und dass die in der Kollokation resultierende Gewichtung der Beobachtungen von ihrer Auflösung abhängt. Es bleibt festzuhalten, dass sich die jeweils gleichwertigen Lösungen aus 6'-Punktwerten und 15'-Blockmittelwerten deutlich oder sogar signifikant unterscheiden können. Dieses Ergebnis ist bei der Bewertung der Differenzen zwischen den Lösungen auf Basis realer Daten zu berücksichtigen. Bei einer Auflösung von 30' steigen die Standardabweichungen von  $\hat{T}_{zz}$  auf 1.7 mE (1UK) und 1.9 mE (1K) (Tabelle 9.9). Die Standardabweichungen der Mittelwerte der Differenzen zwischen den 6'-Punkt- und den 30'-Blockmittelwertlösungen betragen 1.8 mE und 1.3 mE in den Szenarien 1UK und 1K. Die maximalen absoluten Differenzen sind in beiden Szenarien signifikant.

Es kann zusammengefasst werden, dass die empirisch berechneten Standardabweichungen für die radiale Tensorkomponente  $\hat{T}_{zz}$  im Bereich von 1 bis 2 mE liegen, wenn Punktwerte mit einer Auflösung von 6' bis 15' bzw. Blockmittelwerte bis zu einer Auflösung von 30' bei einem Rauschniveau von 1 mgal verwendet werden. Punktwerte mit einer Auflösung von 30' führen zu Standardabweichungen von über 5 mE, die GPM-Lösung wird kaum verbessert. Bei korreliertem Rauschen mit einem Niveau von 5 mgal ergeben sich auch aus 6'-Punktwerten Standardabweichungen für  $\hat{T}_{zz}$  von über 3 mE.

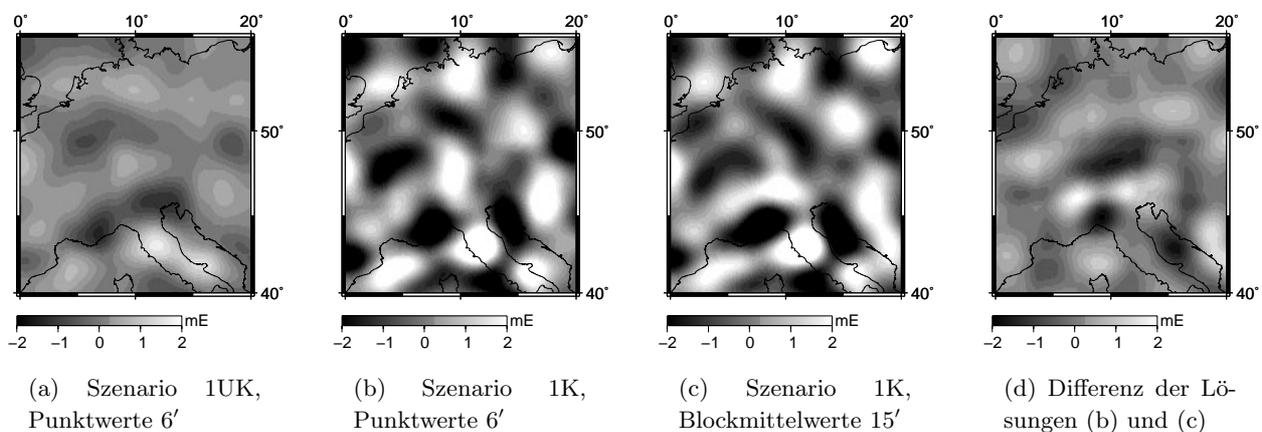
#### 9.4.2.2 Rauschen und Varianzen aus der Kollokation bei Berücksichtigung individueller Höhen

Bei Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe der residualen Beobachtungen  $\Delta g^R$  ergibt sich keine Block-TOEPLITZ-Struktur in der Kovarianzmatrix und das Gleichungssystem (8.4) der Kollokation wird auf einem Parallelrechner gelöst. Vor Anwendung der Kollokation muss auch hier zunächst geklärt werden, bis zu welcher

Dimension des Gleichungssystems (8.4) eine numerisch stabile Gleichungslösung möglich ist. Hierzu wurden die Residuen (8.13) für verschieden große Gebiete bei einer Datenauflösung von  $6'$  berechnet, vgl. Tabelle 9.8. Die Standardabweichungen der Mittelwerte der Residuen sind etwa zwei bis drei Größenordnungen höher als bei der Kollokationslösung auf Basis von Block-TOEPLITZ-Matrizen. Der Hauptgrund dafür ist die höhere Anzahl an Rechenoperationen (vgl. Tabelle 8.1 und 8.2), bei denen sich Rundungsfehler aufsummieren. Die Kollokationslösung mit Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe wird etwa ab einer Gebietsgröße von  $12.5^\circ \times 22.5^\circ$  bei einer Datenauflösung von  $6'$  instabil. Daher werden Teillösungen für das Testgebiet errechnet, jede basierend auf einer Gebietsgröße von  $10.0^\circ \times 18.0^\circ$ . Die Standardabweichung des Mittelwertes der Residuen dieser Teillösungen beträgt  $2 \cdot 10^{-9}$  mgal und ist gegenüber der Messgenauigkeit der Schwereanomalien ausreichend klein. Mit jeder Teillösung kann ein zentrales Berechnungsgebiet der Größe  $3.0^\circ \times 4.0^\circ$  abgedeckt werden, in dem die Berechnungspunkte einen Abstand von mindestens  $\psi = 3.5^\circ$  zum Rand des Teilgebietes haben. Das zentrale Analysegebiet ( $40^\circ < \varphi < 55^\circ$  und  $0^\circ < \lambda < 20^\circ$ ) besteht aus  $5 \times 5$  Teillösungen. Zusätzlich werden die Tensorwerte in einem  $0.5^\circ$  breiten Randbereich um jede Teillösung berechnet, so dass die Teillösungen sich in einem Bereich von  $1^\circ$  überlappen. Innerhalb des Überlappungsbereiches werden die Teillösungen durch lineare Gewichtung einander angepasst. Die  $5 \times 5$  Teillösungen werden danach zu einer Gesamtlösung zusammengefasst.

Die Statistik der Differenzen aus dem Soll-Ist-Vergleich für die radiale Komponente  $\hat{T}_{zz}$  ist in Tabelle 9.9 für die Szenarien 1UK, 1K und 5K aufgeführt. In allen Szenarien werden die Ergebnisse aus  $6'$ -Punktwerten berechnet, in den Szenarien 1UK und 1K werden auch Lösungen aus Punkt- und Blockmittelwerten mit den Auflösungsstufen  $15'$  und  $30'$  berechnet. Die sich aus dem Soll-Ist-Vergleich ergebenden Standardabweichungen von  $\hat{T}_{zz}$  betragen  $0.5$  mE (1UK),  $1.3$  mE (1K) und  $3.5$  mE (5UK) bei einer Datenauflösung von  $6'$ . Das in  $\hat{T}_{zz}$  verbleibende Rauschen ist in Abb. 9.18 (a) und (b) für die Szenarien 1UK und 1K dargestellt. Das Rauschen ist geringer als in der Lösung mit der Annahme konstanter Punkthöhen (Abb. 9.17, Integrationslösung). Besonders deutlich ist dies im Szenario 1UK im Bereich der Alpen, wo große Höhenänderungen auftreten, zu erkennen.

Bei Verwendung von Punkt- und Blockmittelwerten der Auflösungsstufen  $15'$  und  $30'$  verschlechtern sich die Standardabweichungen von  $\hat{T}_{zz}$  signifikant gegenüber der Lösung von  $6'$ -Punktwerten. Im Szenario 1UK ist die Standardabweichung fast um den Faktor 2 schlechter, wenn anstelle der  $6'$ -Punktwerte ( $0.5$  mE) Blockmittelwerte der Auflösung  $15'$  verwendet werden ( $0.8$  mE). Das verbleibende Rauschen der Lösung aus  $15'$ -Blockmittelwerten ist für das Szenario 1K in Abb. 9.18 (c) gezeigt. Die Statistik der zwischen den Lösungen auftretenden Differenzen aus  $6'$ -Punktwerten und Blockmittelwerten unterschiedlicher Auflösung ist in Tabelle 9.10 angegeben. Die maximalen Differenzen zwischen den Lösungen sind in allen Fällen signifikant, außer im Szenario 1K bei einer Auflösung von  $15'$ . Dennoch treten im Vergleich dieser Lösung mit der Lösung aus  $6'$ -Punktwerten deutlich größere Abweichungen (Abb. 9.18 (d)) auf als bei dem Integrationsverfahren (Abb. 9.17 (d)). Die Standardabweichung des Mittelwertes der Differenzen beträgt  $0.6$  mE (Tabelle 9.10). Die Standardabweichung für  $\hat{T}_{zz}$  dieser Lösungen beträgt in beiden Fällen  $1.3$  mE (Tabelle 9.9). Die im Vergleich zum Soll qualitativ ähnlichen Lösungen unterscheiden sich deutlicher als erwartet. Als mögliche Ursachen werden auch hier, wie im Abschnitt 9.1, der Einsatz verschiedener Kovarianzfunktionen ( $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$  und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}, h_{\text{BM}}}$ ) und die Abhängigkeit der in der Kollokation resultierenden Gewichtung von der Datenauflösung (vgl. Abschnitt 9.4.2.1) gesehen.



**Abbildung 9.18.** Rauschen in  $\hat{T}_{zz}$  in den Kollokationslösungen mit Berücksichtigung der Punkthöhen und Differenz zweier Kollokationslösungen.

**Tabelle 9.10.** Statistik der Differenzen zwischen den Lösungen für  $\hat{T}_{zz}$  aus 6'-Punktwerten und aus Blockmittelwerten der Auflösung 15' bzw. 30', interpoliert auf 6', Einheit mE.

Aufl.	Szen.	Integrationsverf. ( $h = 0$ )				Kollokation ( $h = 0$ )				Kollokation ( $h = h_i$ )			
		Mtw	Std	Min	Max	Mtw	Std	Min	Max	Mtw	Std	Min	Max
15' (BM)	1UK	0.01	<b>0.50</b>	-1.68	1.40	0.06	<b>1.05</b>	-4.17	2.81	-0.02	<b>0.74</b>	-2.15	2.75
	1K	-0.01	<b>0.18</b>	-0.55	0.66	0.01	<b>0.47</b>	-1.55	1.22	0.02	<b>0.57</b>	-1.80	1.88
30' (BM)	1UK	0.05	<b>1.22</b>	-4.05	4.14	0.11	<b>1.82</b>	-6.46	6.70	0.03	<b>1.64</b>	-5.57	6.18
	1K	0.01	<b>0.98</b>	-3.42	3.48	0.05	<b>1.34</b>	-3.57	4.62	0.06	<b>1.41</b>	-3.86	5.03

Abschließend ist festzuhalten, dass sich bei Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe ähnliche Standardabweichungen der Komponente  $\hat{T}_{zz}$  wie bei der Annahme konstanter Punkthöhen ergeben. Im Szenario 1UK wird auf Basis von Punktwerten mit einer Auflösung von 6' die insgesamt kleinste Standardabweichung für  $\hat{T}_{zz}$  von 0.5 mE erreicht. Dies macht den positiven Effekt der Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe deutlich. Das angestrebte Genauigkeitsniveau von 1 bis 2 mE kann auf Basis eines Rauschniveaus von 1 mgal und Auflösungen von 6' bis 15' bei Punktwerten bzw. bis zu 30' bei Blockmittelwerten erreicht werden.

### 9.4.3 Diskussion und Zusammenfassung der Ergebnisse aus synthetischen Daten

Im Folgenden werden die Ergebnisse des Integrationsverfahrens mit denen der Kollokation bei Annahme einer konstanten Punkthöhe und bei Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe für die Tensorkomponente  $\hat{T}_{zz}$  verglichen. Die Statistik der Differenzen zwischen den Ergebnissen für Punktwerte mit Auflösungen von 6', 15' und 30' und Blockmittelwerten der Auflösungen 15' und 30' ist in Tabelle 9.11 angegeben.

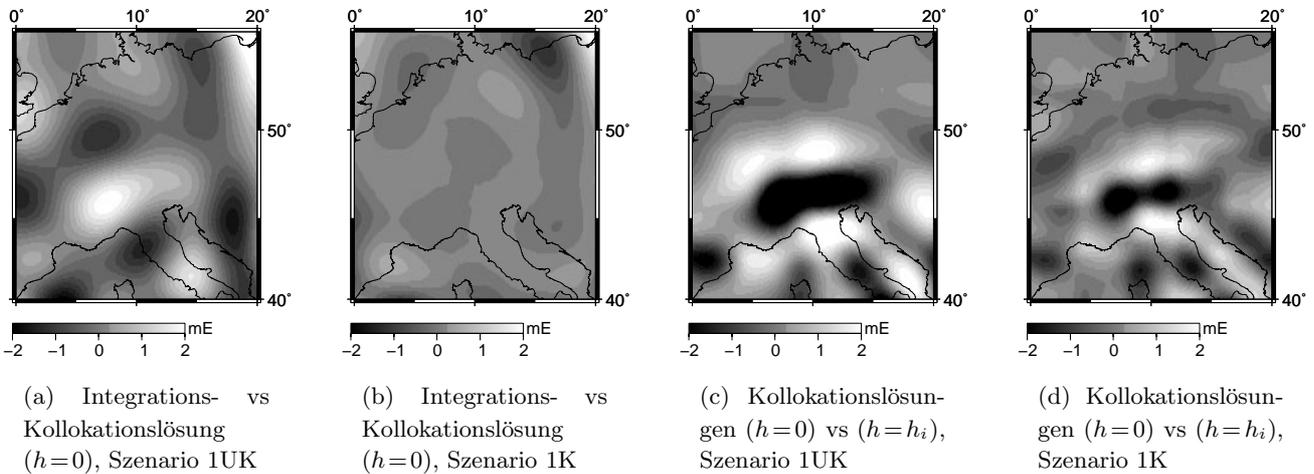
Auffallend sind die großen Abweichungen der Kollokationslösungen zu den Lösungen des Integrationsverfahrens bei Punktwerten der Auflösung 30'. In diesen Fällen war die Kombinationslösung des Integrationsverfahrens sogar schlechter als die allein auf dem GPM basierende Lösung. Die Ursache dafür ist die unzureichende bzw. fehlende Berücksichtigung der Datenauflösung in der Integrationsberechnung (Abschnitt 9.4.1). Das Integrationsverfahren ist bei in Relation zum Signalspektrum zu grob aufgelösten Punktwerten ungeeignet. Die Kollokation liefert hier die statistisch optimale Lösung und verbessert auch bei grob aufgelösten Punktwerten die GPM-Lösung. Bei einer Auflösung von 15' treten die Unterschiede zwischen den Berechnungsverfahren in den Hintergrund, signifikante maximale Differenzen ergeben sich noch im Szenario 1UK zwischen den Lösungen mit und denen ohne Berücksichtigung der Punkthöhe.

Bei der Interpretation der Differenzen in den Szenarien mit unkorreliertem Rauschen ist neben dem Aspekt der Punkthöhe die unterschiedliche Modellierung des Rauschens zu beachten, vgl. Abschnitt 9.3.3. Im Szenario 1UK mit einer Datenauflösung von 6' sind die Differenzen zwischen der Integrations- und der Kollokationslösung deshalb auch dann größer, wenn in beiden Fällen die individuelle Punkthöhe vernachlässigt wird. Für die praktische Anwendung ist zu beachten, dass in der Kollokation die Gewichtung zwischen dem GPM und den terrestrischen Daten kaum noch über das Rauschniveau der terrestrischen Daten gesteuert werden kann, wenn von unkorreliertem Rauschen ausgegangen wird (Abschnitt 9.3.3). Im Fall von korreliertem Rauschen treten Standardabweichungen der Mittelwerte der Differenzen zwischen Integrations- und Kollokationslösung von 0.3 mE (1K) und 0.2 mE (5K) auf. Für die Szenarien 1UK und 1K sind die Differenzen der Ergebnisse des Integrationsverfahrens und der Kollokation ( $h = 0$ ) in Abb. 9.19 (a) und (b) dargestellt. Die Differenzen im Fall 1K sind deutlich geringer als im Fall 1UK.

Der Effekt der Vernachlässigung der Punkthöhe zeigt sich im Vergleich der Kollokationslösungen mit und ohne Berücksichtigung der Punkthöhe besonders deutlich im Szenario 1UK bei einer Datenauflösung von 6' (Abb. 9.19 (c)). Dann erhalten die terrestrischen Daten das höchste Gewicht gegenüber dem GPM, daher wirkt sich die Vernachlässigung der Punkthöhe im Integrationsverfahren und in der Kollokation ( $h = 0$ ) signifikant aus. Auch im Szenario 1K ist der Effekt zu erkennen (Abb. 9.19 (d)). Die größten Abweichungen befinden sich in Hochgebirgsregionen, wie den Alpen, wo große Höhenänderungen auftreten (vgl. DGM in Abb. 7.16). Die Bedeutung der Punkthöhe nimmt mit zunehmendem Rauschen der terrestrischen Daten aufgrund der dann abnehmenden Gewichtung gegenüber dem GPM ab. Daher wird auch nur im Szenario 1UK ein deutlicher Genauigkeitsgewinn durch Berücksichtigung der Punkthöhe erreicht, die Standardabweichung für  $\hat{T}_{zz}$  wird um den Faktor 2 besser,

**Tabelle 9.11.** Statistik der Differenzen zwischen den Lösungen für  $\hat{T}_{zz}$  der untersuchten Verfahren, basierend auf Punktwerten (PW) und Blockmittelwerten (BM) unterschiedlicher Auflösung, Einheit mE.

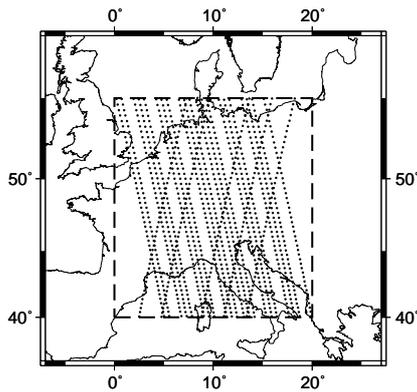
Aufl.	Szen.	Integrationsverf. ( $h = 0$ ) vs Kollokation ( $h = 0$ )				Integrationsverf. ( $h = 0$ ) vs Kollokation ( $h = h_i$ )				Kollokation ( $h = 0$ ) vs Kollokation ( $h = h_i$ )			
		Mtw	Std	Min	Max	Mtw	Std	Min	Max	Mtw	Std	Min	Max
6' (PW)	1UK	-0.03	<b>0.73</b>	-1.88	2.72	0.05	<b>0.87</b>	-3.53	2.66	0.08	<b>1.10</b>	-5.46	2.59
	1K	0.00	<b>0.28</b>	-1.17	2.22	-0.01	<b>0.73</b>	-3.28	2.12	-0.01	<b>0.66</b>	-3.21	1.94
	5K	-0.01	<b>0.16</b>	-1.04	0.64	0.02	<b>0.59</b>	-1.72	1.81	0.04	<b>0.57</b>	-1.72	1.76
15' (PW)	1UK	0.04	<b>0.68</b>	-1.46	2.68	0.04	<b>0.95</b>	-3.38	2.92	0.00	<b>0.68</b>	-3.36	2.09
	1K	0.03	<b>0.78</b>	-1.66	2.67	0.03	<b>0.99</b>	-3.49	3.44	0.00	<b>0.66</b>	-3.32	2.08
30' (PW)	1UK	0.11	<b>0.96</b>	-31.20	23.40	0.10	<b>0.61</b>	-27.41	22.15	-0.01	<b>0.73</b>	-2.45	5.18
	1K	0.14	<b>0.48</b>	-38.09	29.14	0.13	<b>0.19</b>	-34.36	27.98	-0.01	<b>0.69</b>	-2.39	5.02
15' (BM)	1UK	0.02	<b>0.41</b>	-1.20	2.23	0.02	<b>0.49</b>	-1.50	2.23	0.00	<b>0.30</b>	-1.59	0.87
	1K	0.02	<b>0.56</b>	-1.27	2.16	0.02	<b>0.59</b>	-1.55	2.13	0.00	<b>0.29</b>	-1.64	0.77
30' (BM)	1UK	0.04	<b>0.91</b>	-1.93	2.63	0.04	<b>0.85</b>	-1.90	2.49	0.00	<b>0.19</b>	-0.85	1.04
	1K	0.05	<b>1.32</b>	-2.78	4.45	0.05	<b>1.28</b>	-2.39	4.14	0.00	<b>0.18</b>	-0.96	0.87



**Abbildung 9.19.** Differenzen der Lösungen  $\hat{T}_{zz}$  der untersuchten Verfahren, aus Punktwerten der Auflösung 6'.

sie fällt von 0.9 mE bzw. 1.1 mE auf 0.5 mE (Tabelle 9.9). Die Auswirkung der Vernachlässigung der Punkthöhe kann noch deutlicher in den übrigen Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  auftreten, vgl. Abschnitt 9.4.1, detaillierter wird dies in Kapitel 10 auf Basis realer Daten diskutiert.

Bei den Ergebnissen aus Blockmittelwerten ist der Genauigkeitsgewinn durch Berücksichtigung der Punkthöhe nur noch gering. Der Unterschied zwischen den Kollokations- und Integrationslösungen ist größer als der Unterschied zwischen den Kollokationslösungen untereinander, die maximalen absoluten Differenzen sind jedoch nicht signifikant. Da sich stets kleinere Standardabweichungen für  $\hat{T}_{zz}$  aus Blockmittelwerten als aus Punktwerten derselben Auflösungsstufe ergeben (Tabelle 9.9), werden Punktwerte der Auflösungsstufe 15' und 30' im Folgenden nicht weiter betrachtet und auch bei realen Daten nicht zur Lösung verwendet. Die Ergebnisse für  $\hat{T}_{zz}$  aus Blockmittelwerten sind bei allen untersuchten Verfahren qualitativ gleichwertig. Im Fall 1UK mit 30'-Blockmittelwerten fallen die Standardabweichungen der Kollokationslösungen etwas höher aus als die des Integrationsverfahrens. Dies ist zumindest für den Fall unerwartet, in dem die individuelle Punkthöhen seitens der Kollokation berücksichtigt wurden. Eine Ursache dafür könnte eine unzureichende Modellierung der Kovarianzfunktionen für Blockmittelwerte in der Kollokation sein (vgl. Abschnitt 9.1). Der Vergleich der Ergebnisse aus 6'-Punktwerten und aus Blockmittelwerten mit einer Auflösung von 15' bzw. 30' (Tabelle 9.10) zeigt, dass in den Szenarien 1UK und 1K kleinere Differenzen zwischen den Lösungen auf Basis des Integrationsverfahrens als zwischen den Lösungen auf Basis der Kollokation auftreten. Die Gewichtung der Beobachtungen wird demnach bei der Kollokation in Abhängigkeit von der Auflösung der Beobachtungen und durch die Modifikation der Kovarianzfunktionen zur Berücksichtigung der Blockmittelwerte stärker verändert als beim Integrationsverfahren.



**Abbildung 9.20.** Spuren von 26 Bahnstücken einer GOCE-Zeitreihe (0.2 Hz, 29 Tage) über dem markierten Testgebiet, in dem Tensorelemente vorliegen, die aus Schwereanomalien des Gesamtgebietes berechnet wurden.

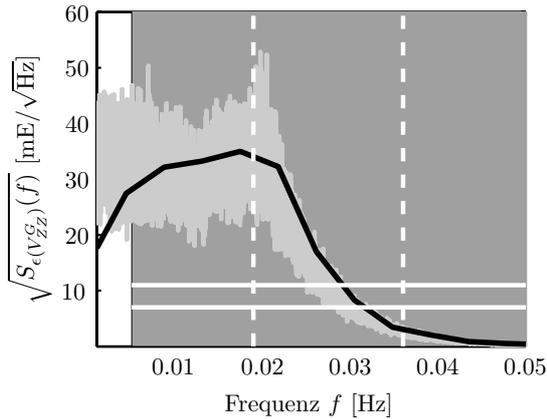
Abschließend lässt sich für die Berechnungen auf Basis synthetischer Daten zusammenfassen, dass der angestrebte Genauigkeitsbereich von 1 bis 2 mE durch Kombination eines GPM mit terrestrischen Schwereanomalien mit den untersuchten Verfahren erreicht werden kann. Die empirisch ermittelten Standardabweichungen der radialen Komponente  $\hat{T}_{zz}$  liegen für alle Szenarien mit Ausnahme des Szenarios 5K in diesem Bereich, wenn Punktwerte mit einer Auflösung von 6' bis 15' oder Blockmittelwerte mit einer Auflösung von 15' bis 30' verwendet werden und ein Abstand von etwa  $3.5^\circ$  der Berechnungspunkte zum Gebietsrand eingehalten wird. Bei besonders hoher Qualität und feiner Auflösung der terrestrischen Daten ist die Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe in Hochgebirgsregionen mit großen Höhenänderungen zu empfehlen. Die Ergebnisse des Integrationsverfahrens haben gezeigt, dass die Varianz der radialen Komponenten im Vergleich zu den Varianzen der übrigen Komponenten am größten ist. Das Genauigkeitsniveau kann daher unter den genannten Randbedingungen für alle Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  eingehalten werden.

#### 9.4.4 Analyse der Spektraldichten des Rauschens

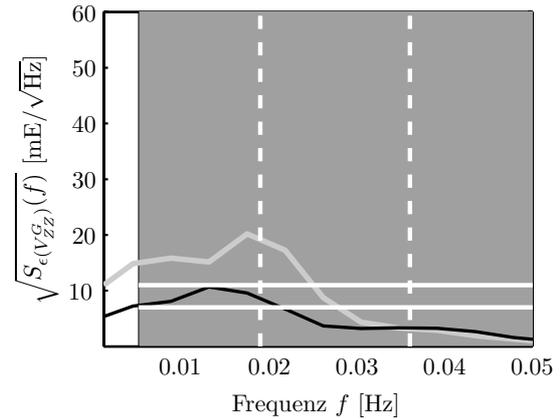
Im Hinblick auf die Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometerdaten der GOCE-Mission ist eine Beurteilung des verbleibenden Rauschens für die Werte des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  im Frequenzraum erforderlich, um sicherzustellen, dass die berechneten Referenzwerte im Messband des Gradiometers die notwendige Genauigkeit von 7 bis 11 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  erreichen, vgl. Abschnitt 2.3.4.

Für die Analyse der Genauigkeiten im Frequenzbereich wurden residuale Tensorwerte  $T_{[ij]}^G$  entlang einer simulierten GOCE-Bahn (SCVII, 2000) berechnet (29 Tage, 0.2 Hz). Die Tensorwerte basieren auf der Differenz aus dem SYNGPM360S und dem SYNGPM360I, sie entsprechen dem im synthetischen Erdmodell simulierten Rauschen des GPM. Die (Quadratwurzel der) Spektraldichte dieses Rauschens ist in Abb. 9.21 in hellgrau für die radiale Komponente  $T_{ZZ}^G$  dargestellt. Die horizontalen weißen Linien geben das Genauigkeitsniveau von 7 bzw. 11 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$  an. Da die synthetischen Daten auf dem EIGEN-GRACE02S basieren und nicht auf dem neueren Modell EIGEN-GL04C ergeben sich hier insgesamt größere Werte als bei der Spektraldichte des simulierten Rauschens des EIGEN-GL04C (Abb. 2.8 in Abschnitt 2.3.4). Die vertikalen gestrichelten Linien in Abb. 9.21 kennzeichnen den Bereich der sphärisch-harmonischen Grade von 105 bis 200 (0.019 bis 0.036 Hz), den für GOCE hinsichtlich der angestrebten hohen Auflösung besonders relevanten Bereich. Ab dem Grad 105 basiert das SYNGPM360S auf dem EGM96, dies ist der Grund für die dort ansteigende (hellgrau dargestellte) Spektraldichte. Die Spektraldichte des simulierten Rauschens fällt für höhere Grade auf null ab, da in der Höhe von 250 km hochfrequentes Signal fehlt.

Bei der Berechnung der Spektraldichten des verbleibenden Rauschens aus dem Soll-Ist-Vergleich auf Basis der Referenzwerte, die aus der Kombination eines GPM mit terrestrischen Daten berechnet wurden, tritt das Problem auf, dass die Zeitreihe nur ausschnittsweise gegeben ist, denn die Referenzwerte des Tensors  $T_{[ij]}^G$  liegen nur in einem regional begrenzten Gebiet vor, wie es in Abb. 9.20 dargestellt ist. Daher kann die Spektraldichte nur für kurze Bahnstücke berechnet werden. Über dem in dieser Arbeit verwendeten Testgebiet verlaufen 26 Bahnstücke des oben verwendeten Testdatensatzes mit jeweils 45 Abtastwerten entsprechend einer Zeitspanne von 225 s (Abb. 9.20). Die aus den Spektraldichten des simulierten Rauschens des GPM der 26 Bahnstücke gemittelte Spektraldichte ist in Abb. 9.21 in schwarz für die radiale Komponente  $T_{ZZ}^G$  dargestellt. Man erkennt, dass innerhalb des grau unterlegten Messbandes die Spektraldichte in etwa der des simulierten Rauschens des GPM der



**Abbildung 9.21.** Quadratwurzel der Spektraldichten simulierten Rauschens in  $T_{ZZ}^G$  (GPM-Lösung) einer GOCE-Zeitreihe (0.2 Hz, 29 Tage): Spektraldichte der globalen Zeitreihe (hellgrau), gemittelte Spektraldichte aus 26 Bahnstücken; Genauigkeitsniveau  $7 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  bzw.  $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  (—, weiß), Spektralbereich sphärisch-harmon. Grad 105 bis 200 (- - -, weiß), Ausschnitt des Messbandes dunkelgrau hinterlegt.



**Abbildung 9.22.** Quadratwurzel der Spektraldichten des verbleibenden Rauschens in  $T_{ZZ}^G$  aus 26 Bahnstücken einer GOCE-Zeitreihe (0.2 Hz, 29 Tage), Kombination der Integrationen, Szenario 5K (hellgrau) und 1K (schwarz); übrige Angaben wie in Abb. 9.21.

vollständigen Zeitreihe (hellgrau) entspricht. Zwar treten im langwelligeren Bereich Abweichungen auf, aber die Länge der Bahnbogenstücke ist ausreichend, um erste Aussagen über die Genauigkeit der regional vorliegenden Referenzwerte im Frequenzbereich zu treffen.

Für die weitergehende Untersuchung wurden Tensorelemente entlang der Bahn auf Basis des Integrationsverfahrens im Szenario 1K aus Punktwerten mit einer Auflösung von  $6'$  berechnet. Dazu wurden die Tensorwerte in einem dreidimensionalen Raster bestimmt. Das Raster besteht aus Flächen, deren Punkte im geographischen Gitter jeweils in gleicher Höhe über dem Referenzellipsoid angeordnet sind. Es wurden elf Flächen in Abständen von  $5 \text{ km}$  generiert, um eine ausreichende Genauigkeit ( $< 0.01 \text{ mE}$ ) in der anschließenden Interpolation (kubischer Spline-Ansatz) der Tensorwerte in den Bahnpunkten zu garantieren. Anschließend wurde durch einen Soll-Ist-Vergleich das verbleibende Rauschen in den Tensorelementen entlang der Bahn berechnet. Die (Quadratwurzel der) Spektraldichte dieses Rauschens ist in Abb. 9.22 in schwarz für die radiale Komponente  $T_{ZZ}^G$  dargestellt. Es ist eine deutliche Verringerung der Spektraldichte im Messband in der kombinierten Lösung gegenüber der GPM-Lösung (Abb. 9.21) zu erkennen. Die mittlere Spektraldichte liegt immer unterhalb von  $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ , innerhalb des Bereiches der sphärisch-harmonischen Grade 105 bis 200 sogar unterhalb von  $7 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ . In Abb. 9.22 ist in hellgrau die Spektraldichte des verbleibenden Rauschens der kombinierten Lösung auf Basis terrestrischer Daten mit korreliertem Rauschen des Niveaus  $5 \text{ mgal}$  dargestellt, hier wird das Genauigkeitsniveau von  $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  überschritten. Dies war zu erwarten, da die Standardabweichung der radialen Tensorkomponente  $T_{zz}$  den in Abschnitt 2.3.4 abgeschätzten anzustrebenden Genauigkeitsbereich von  $1$  bis  $2 \text{ mE}$  auch im Ortsraum überschreiten.

Im Bereich unterhalb des sphärisch-harmonischen Grades von etwa  $120$  ( $0.02 \text{ Hz}$ ) kann eine weitere Verbesserung erzielt werden, wenn als GPM das genauere EIGEN-GL04C eingesetzt wird. Kritisch bleibt aber eine mögliche Überschreitung des Genauigkeitsziels im Bereich von Grad  $120$  bis  $200$ , da auch hier die Spektraldichten des simulierten Rauschens für das EIGEN-GL04C ansteigen, vgl. Abb. 2.8.

Entsprechende Berechnungen auf Basis der Blockmittelwerte mit einer Auflösung von  $30'$  in Kombination mit dem SYNGPM360I zeigen, dass auch bei einem Rauschniveau von  $1 \text{ mgal}$  die Spektraldichte des verbleibenden Rauschens zwar im markierten Bereich der sphärisch-harmonischen Grade von  $105$  bis  $200$  unterhalb von  $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  liegt, diesen Wert im langwelligeren Bereich jedoch überschreitet. Dies kann zwar durch Verwendung des EIGEN-GL04C verbessert werden, zuverlässiger ist aber die Berechnung der Referenzwerte auf Basis höher aufgelöster terrestrischer Blockmittelwerte, da außerdem zusätzliche Fehler durch Unkenntnis der wahren Korrelation des Rauschens der terrestrischen Daten und des wahren Rauschens des GPM in die Kombinationslösung einfließen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass ein Rauschniveau von 1 mgal (korreliert und unkorreliert) der terrestrischen Daten bei einer Datenauflösung von 6' bis 15' in der Kombinationslösung mit einem aktuellen GPM ausreicht, um das angestrebte Genauigkeitsniveau von  $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  im Messband des Gradiometers für die Kalibrierung und Evaluierung der GOCE-Daten einzuhalten. Eine spektrale Analyse von Ausschnitten der Beobachtungszeitreihe ist hinsichtlich des Messbandes des Gradiometers möglich, wenn mindestens eine Zeitspanne von 225 s abgedeckt wird. Zur Evaluierung des Rauschens der Referenzwerte im Messband muss daher das Gebiet, in dem die Tensorwerte vorliegen, ausreichend groß sein. Das Gebiet sollte eine sphärische Distanz von größer  $15^\circ$  in Ost-West- und Nord-Süd-Ausdehnung abdecken. Die tatsächlich notwendige Ausdehnung in Ost-West- und Nord-Südrichtung hängt auch von der Orientierung der Satellitenbahnspur ab, die in dem hier verwendeten Beispiel nur wenig von der Nord-Süd-Richtung abweicht, vgl. Abb. 9.20.

## 9.5 Gegenüberstellung und Zusammenfassung der Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der statistischen Bestimmung der Varianzen ohne die Einführung von konkreten Beobachtungen und der Berechnung der Varianzen auf Basis synthetischer Beobachtungen verglichen.

Für Punktwerte der Auflösung von 6' ergibt sich, dass die Standardabweichungen der radialen Komponente  $T_{zz}$  auf Basis der Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen (Tabelle 9.3) im Vergleich zu den Standardabweichungen auf Basis des verbleibenden Rauschens bei Anwendung des Integrationsverfahrens in allen Szenarien (Tabelle 9.9) zu niedrig sind, maximal um 0.3 mE. Dies ist plausibel, da in der statistischen Berechnung der Idealfall von global vorliegenden terrestrischen Daten angenommen wurde. In der praktischen Anwendung ist genau zu prüfen, ob die tatsächliche Datenkonstellation Genauigkeiten erlaubt, die an das Niveau des Idealfalls heranreichen. Die Standardabweichungen, die auf Basis der Kollokation bestimmt wurden (Tabelle 9.5), sind maximal um 0.1 mE zu groß gegenüber den Standardabweichungen auf Basis des verbleibenden Rauschens bei Anwendung der Kollokation ( $h = h_i$ ). Die statistisch berechneten Standardabweichungen würden größer ausfallen, wenn die Signalgradvarianzen der Kovarianzen in der Kollokation auf Basis der globalen Parameter (2.63) anstelle der lokalen Parameter (9.1) berechnet würden, s. a. (Wolf, 2006). Die lokalen Parameter erlauben eine regional gültige Bestimmung der Standardabweichung. Im Vergleich zu den empirischen Standardabweichungen basierend auf der Kollokation bei Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe der residualen Beobachtungen ( $h = 0$ ) sind die Standardabweichungen aus der statistischen Berechnung im Szenario 1UK um 0.5 mE (50%) zu niedrig abgeschätzt. Der Grund dafür ist, dass der Fehler durch Vernachlässigung der Punkthöhe in der statistischen Bestimmung der Varianz nicht berücksichtigt wird. In den Szenarien 1K und 5K beträgt die Abweichung nur 0.1 mE (10% bzw. 1%), da die individuelle Punkthöhe bei zunehmendem Rauschen der Beobachtungen an Bedeutung verliert. Der mögliche Genauigkeitsverlust bei Vernachlässigung der Punkthöhe ist bei Verwendung der prädierten Genauigkeiten zu berücksichtigen.

Die Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen eignet sich nur bedingt zur Abschätzung des Einflusses der Auflösung der Beobachtungen (Abschnitt 9.3.3). Daher werden bei Auflösungsstufen von 15' und 30' die Varianzen aus der Kollokation zum Vergleich mit den empirisch ermittelten Varianzen herangezogen.

Bei der Verwendung von Blockmittelwerten als Beobachtungen fällt die Standardabweichung aus der Kollokation etwa um den Faktor 2 größer aus als die empirische Standardabweichung auf Basis des verbleibenden Rauschens (vgl. Tabelle 9.6 und 9.9). Bei Punktwerten gilt dieser Faktor auch für Daten mit einer Auflösung von 15', für Punktwerte mit einer Auflösung von 30' stimmt der Wert im Bereich von 0.2 mE (Faktor 0.05) mit der empirischen Standardabweichung aus dem Soll-Ist-Vergleich der Kollokationslösungen überein. Das Integrationsverfahren eignet sich nicht zur Verarbeitung von Punktwerten der Auflösung von 30', deshalb sind die empirischen Standardabweichungen von  $\hat{T}_{zz}$  in diesem Fall um einen Faktor 2 größer als die der statistischen Berechnung.

Die numerischen Ergebnisse auf Basis der synthetischen Daten haben gezeigt, dass Blockmittelwerte bei Auflösungsstufen von 15' und 30' und einem Rauschniveau von 1 mgal zur Berechnung der Tensorkomponenten mit dem Genauigkeitsziel von 1 bis 2 mE geeignet sind. Bei Blockmittelwerten mit einer Auflösung von 30' kann jedoch die angestrebte Genauigkeit von  $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  im Messband des Gradiometers überschritten werden. Bei der Verwendung von Blockmittelwerten ist außerdem auf eine hohe Qualität der Daten zu achten, hier wurden sie aus regelmäßig verteilten residualen Punktwerten mit einer Auflösung von 3' berechnet, deren hochfrequentes Signalspektrum beschränkt ist. Wenn in der praktischen Anwendung die ursprünglichen Punktwerte in größerer

Auflösung oder unregelmäßig verteilt vorliegen, ist es möglich, dass der Blockmittelwert den jeweiligen Block nicht ausreichend gut repräsentiert, s. a. (Weber, 1984). Bereits einzelne Ausreißer können aufgrund der Blockgröße in der Kombinationslösung stark ins Gewicht fallen. Blockmittelwerte mit einer Auflösung von 30' sind deshalb nur mit Vorsicht einzusetzen, auch wenn die Rechenzeit damit erheblich reduziert werden kann.

Die numerischen Untersuchungen bestätigen die Eignung der Kollokation zur Abschätzung der Auswirkungen der Gebietsgröße, der Auflösung und des Rauschens auf die Standardabweichung der Zielgröße ohne Kenntnis der tatsächlichen Beobachtungen. Das synthetische Erdmodell hat sich einerseits bei der Kontrolle der statistischen Bestimmung der Standardabweichung bewährt, andererseits ermöglicht es eine numerische Untersuchung der Unterschiede zwischen dem Integrationsverfahren und der Kollokation hinsichtlich der in den Methoden resultierenden Gewichtung der Beobachtungen. Ohne simuliertes Rauschen ließe sich der Effekt einer unterschiedlichen Gewichtung der eingehenden Datensätze in den zu untersuchenden Methoden nur bedingt nachweisen, da stets rauschfreie Information einginge. Mit Hilfe der synthetischen Daten konnten nicht nur Unterschiede zwischen den Ergebnissen ermittelt werden, sondern es konnte auch die Qualität jeder einzelnen Lösung bewertet werden.

Bei der statistischen Berechnung der Varianzen der Zielgrößen wurden alle Tensorkomponenten einbezogen, erwartungsgemäß ergab sich für die radiale Komponente stets die größte Varianz. Der Fokus der Genauigkeitsanalyse mit synthetischen Daten lag deshalb auf der radialen Komponente  $T_{zz}$ . Exemplarisch wurde gezeigt, dass die ermittelten Genauigkeiten auch für die anderen Tensorkomponenten erreicht werden.

Auf Basis der numerischen Ergebnisse lässt sich zusammenfassen, dass die Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE im angestrebten Genauigkeitsbereich von 1 bis 2 mE aus der Kombination eines aktuellen GPM (EIGEN-GRACE02S und EGM96 mit  $n_{\max} = 360$ ) mit terrestrischen Schwereanomalien berechnet werden können, wenn das Niveau des korrelierten oder unkorrelierten Rauschens der terrestrischen Daten bei etwa 1 mgal liegt. Die statistische Genauigkeitsabschätzung hat ergeben, dass für die Berechnungspunkte ein Abstand von etwa  $3.5^\circ$  oder mehr vom Rand des Eingangsdatengebietes eingehalten werden sollte. Das Gebiet, in dem die Tensorelemente berechnet werden, muss eine Ausdehnung von größer  $15^\circ \times 15^\circ$  haben, damit genügend lange Zeitreihenausschnitte ( $> 225$  s) spektral bezüglich des Messbandes des Gradiometers untersucht werden können. In Hochgebirgsregionen mit großen Höhenänderungen sollte die individuelle Punkthöhe der residualen Beobachtungen bei der Berechnung der Tensorelemente berücksichtigt werden. Bezüglich der Auflösung der terrestrischen Beobachtungen wurde festgestellt, dass eine Auflösung bis zu 15' für Punkt- bzw. Blockmittelwerte ausreicht, wenn deren hochfrequentes Signalspektrum beschränkt ist. Bei realen Daten kann dies durch Anwendung der RTM-Reduktion erreicht werden.

## 10 Anwendung auf reale Daten

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der mit beiden untersuchten Methoden (Integrationsverfahren und Kollokation) durchgeführten Berechnungen zur Bestimmung der Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  aus der Kombination eines GPM mit realen terrestrischen Schwereanomalien  $\Delta g$  dargestellt und diskutiert.

Für die Berechnungen können terrestrisch bestimmte Schwerewerte aus der Relativ- und Absolutgravimetrie ( $\pm 0.01 \dots 0.02$  mgal bzw.  $\pm 0.001 \dots 0.003$  mgal, Torge, 2001) und der See- und Fluggravimetrie ( $\pm 0.5 \dots 2$  mgal bzw.  $\pm 2 \dots 5$  mgal, Torge, 2001) verwendet werden. In Abhängigkeit von der Messmethode werden zunächst geräte- bzw. methodenspezifische Korrekturen an den Messwerten angebracht (Torge, 2001; Roland, 2005). Darüber hinaus wird der Einfluss von Erdzeiten, Polbewegung und Luftdruckänderungen reduziert (z. B. Denker, 1989). Durch Abzug der Normalschwere werden die Schwerewerte  $g$  in Schwereanomalien  $\Delta g$  überführt. Im weiteren Sinn gehören auch die Schwereanomaliedatensätze, die aus Geoidwerten der Altimetrie abgeleitet werden, zu den terrestrischen Datensätzen ( $\pm 3 \dots 14$  mgal, Andersen et al., 2006). Eine Auflistung frei verfügbarer Altimetriemodelle findet sich z. B. in (Roland, 2005).

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass die terrestrischen Datensätze  $\Delta g$  konsistent bezüglich der vorgenommenen Korrekturen sind und im selben Bezugssystem (GRS80) vorliegen. Eine detaillierte Beschreibung der notwendigen Aufbereitung zur Zusammenführung der Daten wird in (Roland, 2005) gegeben.

In den Berechnungen wird die Remove-Restore-Technik angewendet (Abschnitt 3.1), der langwellige Signalanteil  $\Delta g^M$  auf Basis des GPM wird reduziert. Zusätzlich wird bei realen Daten  $\Delta g$  der gravitative Einfluss der Atmosphäre ( $\delta g_A$ , Abschnitt 3.2) reduziert, damit die LAPLACE-Gleichung (2.3) im Außenraum gilt. Diese Reduktion wird im Folgenden stets vorausgesetzt, eine Restitution dieses Anteils ist aufgrund der großen Höhe, in der die Zielgrößen berechnet werden, nicht notwendig, vgl. Abschnitt 3.2. Zur Glättung der Daten wird die in Abschnitt 3.3 besprochene Reduktion des Gravitationseffekts der residualen topographischen Massen ( $\Delta g^{\text{RTM}}$ ) angewendet. In Analogie zu den Bezeichnungen im Kontext der synthetischen Daten wird die RTM-reduzierte Schwereanomalie mit

$$\Delta g^T = \Delta g - \Delta g^{\text{RTM}} \quad (10.1)$$

bezeichnet. Die so reduzierten Schwereanomalien sind vergleichbar mit den auf Basis des synthetischen Erdmodells simulierten Schwereanomalien (vgl. Kapitel 7).

Aus den Untersuchungen mit synthetischen Daten hat sich ergeben, dass für die terrestrischen Daten Genauigkeiten von etwa 1 mgal gefordert werden müssen, um die angestrebte Genauigkeit von 1 bis 2 mE in den Zielgrößen zu erhalten. Eine Genauigkeit von 1 bis 2 mgal wird in Teilen Europas (Denger und Torge, 1998; Roland, 2005) erreicht, für Kanada (ca.  $\pm 2 \dots 8$  mgal, Sideris und She, 1995; Kenyon et al., 2005) und die USA (ca.  $\pm 2 \dots 8$  mgal, Smith und Roman, 2001; Kenyon et al., 2005) werden etwas schlechtere Genauigkeit angegeben. Die Genauigkeit der Schweredaten aus der Altimetrie wird mit  $\pm 3 \dots 14$  mgal beziffert (Andersen et al., 2006). Die Genauigkeitsangaben sind, auch in Anbetracht der Größe der Gebiete, nur ungefähre Einschätzungen der tatsächlichen Genauigkeit der Beobachtungen. Hinsichtlich möglicher systematischer Fehler der Daten besteht Untersuchungsbedarf, s. a. (Heck, 1990; Roland, 2005). In dieser Arbeit werden reale Daten über Zentral-Europa verwendet, es wird das in der Literatur angegebene Genauigkeitsniveau für diese Daten angehalten, eine Genauigkeitsanalyse der terrestrischen Daten wird nicht vorgenommen.

Im Folgenden werden die verwendeten Datensätze und die daraus resultierenden Ergebnisse für die Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE vorgestellt. Die numerischen Ergebnisse des Integrationsverfahrens mit spektralen Gewichten werden den Lösungen aus der Kollokation gegenübergestellt. Außerdem werden die Ergebnisse aus Punkt- und Blockmittelwerten und die Ergebnisse mit und ohne Berücksichtigung der Punkthöhe der residualen Beobachtungen verglichen.

## 10.1 Verwendete Datensätze

Die Begrenzung des Datengebietes in der numerischen Berechnung ist dieselbe wie für die synthetischen Daten:  $36.5^\circ < \varphi < 58.5^\circ$  und  $-7.0^\circ < \lambda < 27^\circ$ . Die Analyse der Ergebnisse erfolgt auch hier im Auswertebereich mit der Begrenzung  $40^\circ < \varphi < 55^\circ$  in der geographischen Breite und  $0^\circ < \lambda < 20^\circ$  in der geographischen Länge, um einen Abstand von mindestens  $3.5^\circ$  zum Rand des Datengebietes einzuhalten. In den Berechnungen werden ein GPM, terrestrische Schwereanomalien und ein DGM verwendet, wie im Folgenden erläutert wird.

Auf Grundlage des GPM werden Schwereanomalien  $\Delta g^M$  nach (2.26) und Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^M$  nach (2.30) berechnet, die für die Reduktion und Restitution des langwelligen Signalanteils im Rahmen der Remove-Restore-Technik bereitstehen. Als GPM wird das EIGEN-GL04C (GFZ, 2006a; Förste et al., 2006) bis zum sphärisch-harmonischen Grad  $n_{\max} = 360$  verwendet. Die Signal- und Fehlergradvarianzen des EIGEN-GL04C und des in den Berechnungen mit synthetischen Daten verwendeten SYNGPM360S (Abschnitt 7.3) sind für Schwereanomalien in Abb. 10.1 dargestellt. In Tabelle 10.1 sind die Quadratwurzeln der akkumulierten Signal- und Fehlergradvarianzen des EIGEN-GL04C für Schwereanomalien und für die radiale Tensorkomponente in der Bahnhöhe von GOCE angegeben. In beiden Funktionalen wird eine Genauigkeitssteigerung um Faktor 2 gegenüber dem SYNGPM360S erreicht, vgl. Tabelle 7.1. In den Berechnungen wird das GRS80 als Referenzsystem gewählt, der Bezug des Koeffizienten  $\bar{a}_{20}$  des EIGEN-GL04C auf ein gezeitenfreies Geoid (s. Abschnitt 2.1.1) wird beibehalten.

Die terrestrischen Schwere- und Topographiedaten entstammen der Datensammlung des Instituts für Erdmessung, sie wurden zusammengetragen und aufbereitet im Rahmen des IAG-Projektes "Europageoid" zur Berechnung des Europäischen Quasigeoids EGG97 (Denker et al., 1997; Denker und Torge, 1998). Aus diesen Daten wurden Schwereanomalien  $\Delta g^T$  in einem geographischen Gitter mit einer Auflösung von  $5'$  abgeleitet. Dieser Datensatz wurde bereits in (Denker, 2003) für die Berechnung der radialen Tensorkomponente  $T_{zz}$  genutzt und stand für die vorliegende Arbeit zur Verfügung. Die Schwereanomalien  $\Delta g^T$  sind bereits um den RTM-Effekt  $\Delta g^{\text{RTM}}$  nach (10.1) reduziert worden, zur Berechnung der RTM-Reduktion (Abschnitt 3.3) wurde ein DGM mit der Auflösung von  $1'$  und eine Referenztopographie mit der Auflösung von  $15'$  verwendet, s. a. (Denker und Torge, 1998). Auf Grundlage desselben Datensatzes wurden im Rahmen der Untersuchungen in (Denker, 2003) auch RTM-Reduktionswerte  $T_{[ij]}^{\text{RTM}}$  für die Tensorkomponenten in der Bahnhöhe von GOCE berechnet. Die RTM-reduzierten Schwereanomalien  $\Delta g^T$  sind als Blockmittelwerte aus Punktwerten höherer Auflösung unregelmäßiger Verteilung berechnet worden. Da im Signalspektrum der RTM-reduzierten Schwereanomalien hochfrequente Anteile fehlen, repräsentieren Punkt- und Blockmittelwerte dieser Auflösungsstufe den gleichen Signalinhalt. In Analogie zu den Bezeichnungen im Kontext des synthetischen Erdmodells werden auch hier die Werte mit einer Auflösung von  $5'$  als Punktwerte bezeichnet. Die Statistik der nicht reduzierten Schwereanomalien  $\Delta g$  und der Reduktionswerte  $\Delta g^{\text{RTM}}$  aus Tabelle 10.2 beziehen sich auf die originären unregelmäßig verteilten Punktwerte, alle übrigen Angaben der Tabelle auf Werte des regelmäßigen Gitters mit der Auflösung von  $5'$ .

Für die Modellierung der Topographie wurde das in Abschnitt 7.2.2 eingeführte EURDGM5 verwendet, s. a. Abb. 7.16. Die Punkthöhe der Schwereanomalien bleibt nach einer RTM-Reduktion unverändert (Gerlach, 2003, S. 70), daher wird die Bezugshöhe der  $5'$ -Gitterwerte aus dem DGM mit der passenden Auflösung von  $5'$  entnommen. Die Schwereanomalien  $\Delta g^M$  aus dem EIGEN-GL04C werden in Höhe des DGM über dem GRS80-Ellipsoid berechnet, ihre Statistik ist in Tabelle 10.2 angegeben.

**Tabelle 10.1.** Quadratwurzeln der akkumulierten Signal- und Fehlergradvarianzen des EIGEN-GL04C für Schwereanomalien auf der Erdoberfläche [mgal] und für radiale Tensorkomponenten in der Bahnhöhe von GOCE ( $h = 250$  km) [mE]. Die spektrale Aufteilung entspricht der in Tabelle 7.1.

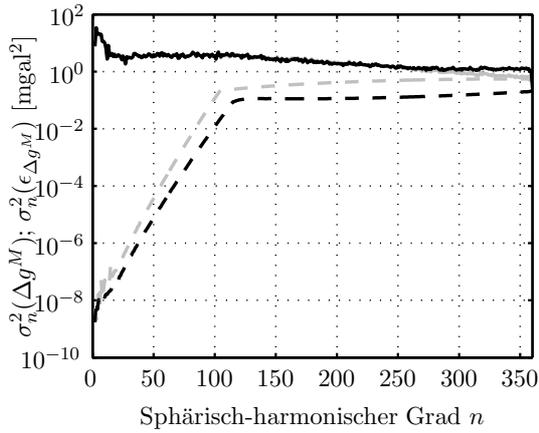
$n_{\min}$	$n_{\max}$	$\Delta g$	$\epsilon_{\Delta g}$	$T_{zz}$	$\epsilon_{T_{zz}}$
2	104	22.45	0.40	253.30	1.39
105	360	22.22	5.77	20.80	3.06
2	360	31.59	5.78	254.15	3.36

**Tabelle 10.2.** Statistik der originären Schwereanomalien  $\Delta g$ , der zugehörigen RTM-Reduktionswerte  $\Delta g^{\text{RTM}}$ , sowie der Eingangsdaten  $\Delta g^T$ ,  $\Delta g^M$  und  $\Delta g^R$  im untersuchten Testgebiet, Einheit mgal.

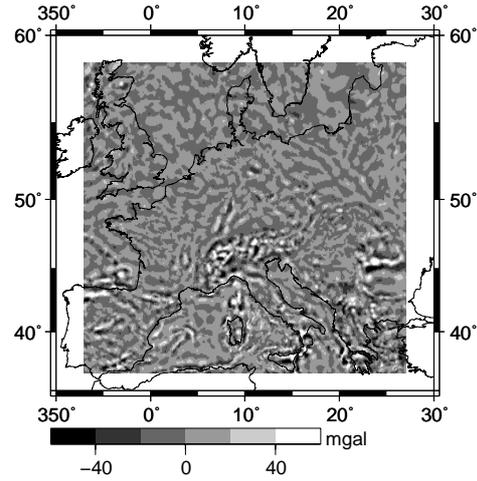
Daten	Mtw	Std	Min	Max
$\Delta g^{(a)}$	7.95	27.99	-182.19	234.51
$\Delta g^{\text{RTM}(a)}$	-2.50	13.14	-219.39	143.95
$\Delta g^T$ (b)	10.61	32.77	-179.76	189.98
$\Delta g^M$ (b)	10.16	30.42	-164.42	148.25
$\Delta g^R$ (b)	0.45	13.51	-102.57	109.01

(a) bezogen auf irregulär verteilte Punktwerte

(b) bezogen auf Gitterpunkte der Auflösung  $5'$



**Abbildung 10.1.** Signalgradvarianzen (—) und Fehlergradvarianzen (- - -) von Schwereanomalien auf Basis des EIGEN-GL04C (schwarz) und des SYNGPM360S (grau).



**Abbildung 10.2.** Residuale Schwereanomalien  $\Delta g^R$  im Testgebiet.

Im Zuge der Remove-Restore-Prozedur werden die residualen Schwereanomalien  $\Delta g^R$  aus der Differenz der Schwereanomalien  $\Delta g^T$  und  $\Delta g^M$  nach (3.27) bzw. (3.81) berechnet. Die residualen Schwereanomalien  $\Delta g^R$  über dem Testgebiet sind in Abb. 10.2 dargestellt, ihre Statistik ist in Tabelle 10.2 angegeben. Sie sind Eingangsdaten für die Berechnung der Elemente des residualen Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$ . Die realen residualen Daten  $\Delta g^R$  haben einen geringeren hochfrequenten Signalanteil als die synthetischen Daten (vgl. Tabelle 7.3, Abb. 7.17). Dies ist grundsätzlich für Interpolationsaufgaben und deshalb auch für die Berechnung der Tensorkomponenten von Vorteil. Der residuale Tensor  $\hat{T}_{[ij]}^R$  wird durch Addition des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^M$  auf Basis des EIGEN-GL04C und des Tensors  $T_{[ij]}^{\text{RTM}}$  zur Lösung  $\hat{T}_{[ij]}$  restituiert. Die Statistik der Elemente der Tensoren  $T_{[ij]}^{\text{RTM}}$  und  $\hat{T}_{[ij]}^M$  für die Daten im Auswertebereich ist in Tabelle 10.3 angegeben. Aufgrund der großen Höhe, in der die Tensorelemente berechnet werden, ergeben sich für die RTM-Reduktion nur kleine Werte.

Es sei noch angemerkt, dass bei der Berechnung der spektralen Gewichte für das Integrationsverfahren und in der Anwendung der Kollokation davon ausgegangen wird, dass keine Korrelationen im Rauschen zwischen dem GPM und den terrestrischen Daten vorhanden sind (Abschnitt 3.4.4 und 3.5.2). Diese Anforderung wäre nur für ein GPM streng erfüllt, das ausschließlich auf Satellitendaten beruht. Verfügbare derartige Modelle haben nur eine maximale Auflösung bis zum sphärisch-harmonischen Grad 120 oder 150. Je höher aber der Entwicklungsgrad des GPM ist, desto eher können Fehler aufgrund der sphärischen Näherungen in der Modellierung der residualen Beobachtungen vernachlässigt werden. In der Kombinationslösung wird deswegen das EIGEN-GL04C mit einer Auflösung bis zum sphärisch-harmonischen Grad 360 als GPM verwendet, s. a. (Denker et al., 2006). Das Modell basiert auf der Kombination von Satellitendaten mit terrestrischen Daten, die etwa ab einem sphärisch-harmonischen Grad 70 in die Lösung einfließen, z. B. (Förste et al., 2005). Bei der Kombination des EIGEN-GL04C mit den regionalen terrestrischen Daten kann deswegen nicht ausgeschlossen werden, dass in beiden Datenquellen zum Teil identische terrestrische Datensätze verwendet werden. Sich daraus ergebende mögliche Korrelationen zwischen den Koeffizienten des GPM und den terrestrischen Daten sind nicht bekannt und werden in den Berechnungen vernachlässigt.

**Tabelle 10.3.** Statistik der RTM-Reduktionswerte  $T_{[ij]}^{\text{RTM}}$  und des Signalanteils  $\hat{T}_{[ij]}^M$  des EIGEN-GL04C im Auswertebereich in der Bahnhöhe von GOCE, Einheit mE.

Daten	Mtw	Std	Min	Max
$T_{xx}^{\text{RTM}}$	-0.03	0.58	-3.10	1.50
$T_{xy}^{\text{RTM}}$	0.00	0.31	-1.00	1.30
$T_{xz}^{\text{RTM}}$	-0.01	0.66	-2.70	2.40
$T_{yy}^{\text{RTM}}$	-0.01	0.38	-2.20	1.30
$T_{yz}^{\text{RTM}}$	-0.01	0.50	-2.10	2.10
$T_{zz}^{\text{RTM}}$	0.04	0.81	-1.70	3.90

Daten	Mtw	Std	Min	Max
$\hat{T}_{xx}^M$	-102.98	136.70	-408.71	203.01
$\hat{T}_{xy}^M$	-30.80	84.84	-165.71	227.45
$\hat{T}_{xz}^M$	56.97	155.13	-561.62	411.11
$\hat{T}_{yy}^M$	-46.34	106.62	-338.92	435.66
$\hat{T}_{yz}^M$	2.17	120.09	-322.53	461.32
$\hat{T}_{zz}^M$	149.32	201.88	-242.82	617.61

## 10.2 Numerische Ergebnisse

Im Folgenden werden die numerischen Ergebnisse für die Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  auf Basis der realen Daten diskutiert. Bei der Berechnung werden Punktwerte der Auflösungsstufe 5' und daraus abgeleitete Blockmittelwerte mit einer Auflösung von 15' und 30' verwendet. Der Diskussion der Ergebnisse liegt auch hier die angestrebte Genauigkeit von 1 bis 2 mE aus Abschnitt 2.3.4 zugrunde.

Für die realen Daten wird von einem Rauschniveau von 1 mgal bei korreliertem Rauschen entsprechend dem Korrelationsmodell aus (3.54) ausgegangen (Denker, 2003; Roland, 2005; Denker et al., 2006). Im Fall realer Daten ist dabei zu beachten, dass das Rauschen nicht von den Daten getrennt werden kann, anders als bei den synthetischen Daten wird hier das Rauschen in der Blockmittelwertbildung mitgeführt, vgl. Abschnitt 7.5.1. Dies hat zur Folge, dass zwar die Korrelationslänge der Kovarianzfunktion des Rauschens in etwa erhalten bleibt, sich das Rauschniveau aber um etwa 30% bei den 30'-Blockmittelwerten senkt. Derartige Schwankungen können auch beim - unbekanntem - wahren Rauschniveau der realen terrestrischen Daten zwischen einzelnen Teilgebieten auftreten. Daher wird auch bei Blockmittelwertdaten das Rauschniveau von 1 mgal in der Berechnung angehalten.

Des Weiteren ist für die Berechnung mit realen Daten die RTM-Reduktion wichtig. Die Ergebnisse auf Basis der synthetischen 30'-Punktwerte haben gezeigt, dass gerade im Integrationsverfahren das Signal in Relation zum seinem Spektrum ausreichend dicht abgetastet werden muss, um Fehler durch Aliasing zu vermeiden. Eine Abtastweite von 5' würde für unreduzierte Schwereanomalien nicht ausreichen, s. a. (Vassiliou, 1987). Erst durch die Glättung des Signals mit der RTM-Reduktion ist diese Abtastweite ausreichend, s. a. (Denker, 2003).

In diesem Abschnitt werden zunächst die in der Kollokation verwendeten Kovarianzfunktionen vorgestellt. Anschließend werden kurz die für die Auswertung der Berechnungsmethoden wichtigen Aspekte besprochen. Schließlich werden die für den Tensor  $\hat{T}_{[ij]}$  erzielten Ergebnisse analysiert und verglichen.

### 10.2.1 Parameter der Kovarianzfunktionen

In der Kollokation werden lokale Kovarianzfunktionen verwendet, die aus der Akkumulation der Fehlergradvarianzen des EIGEN-GL04C für sphärisch-harmonische Grade von 2 bis 360 und der Signalgradvarianzen des TSCHERNING-RAPP-Modells (2.63) für Grade größer als 360 berechnet werden.

Analog zur Vorgehensweise bei den synthetischen Daten (vgl. Abschnitt 9.1) werden lokale Parameter für das TSCHERNING-RAPP-Modell ausgehend von einer empirischen Kovarianzfunktion berechnet. In der Modellierung der Kovarianzfunktion für Punktwerte basiert die empirische Kovarianzfunktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{emp}}$  auf residualen realen Schwereanomalien  $\Delta g^R$  mit einer Auflösung von 5'. Die Parameterschätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab folgende Parameter:

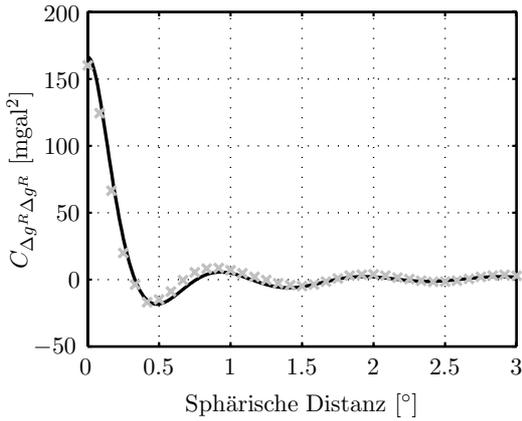
$$A = 592.86 \text{ mgal}^2 R_B^2 \text{ und } R_B = 6\,362\,529.54 \text{ m} . \quad (10.2)$$

Die empirische Kovarianzfunktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{emp}}$  und die mit geschlossenen Ausdrücken aus (Tscherning und Rapp, 1974) berechnete analytische Kovarianzfunktion  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}$  sind in Abb. 10.3 dargestellt. Da der Signalinhalt der realen Schwereanomalien  $\Delta g^R$  etwas weniger hochfrequent ist als bei den synthetischen Daten, ist die Varianz  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{\text{ana}}(\psi = 0)$  hier um einen Faktor 2 kleiner als bei der Kovarianzfunktion der synthetischen Daten (vgl. Abb. 9.1).

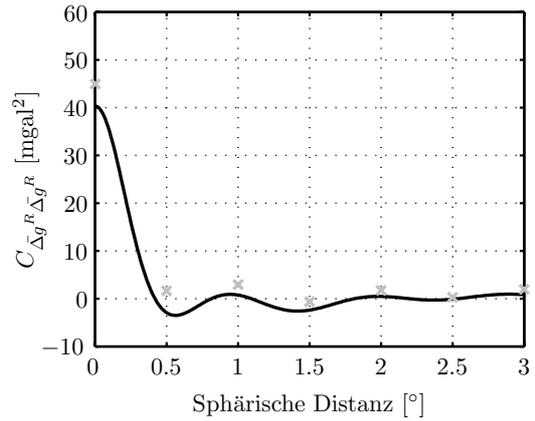
Die Modellierung der Kovarianzfunktionen für Blockmittelwerte  $\overline{\Delta g}^R$  erfolgt durch die Berechnung der Kovarianz in der Höhe  $h_{\text{BM}} > 0$  ausgehend von der Kovarianzfunktion für Punktwerte (Abschnitt 5.2.3). Die Höhe  $h_{\text{BM}}$  wird wie bei den synthetischen Daten empirisch ermittelt (Abschnitt 9.1). Für die Auflösungsstufe 15' wird die Höhe  $h_{\text{BM}}$  mit 1500 m bestimmt, die maximale Differenz zwischen analytischen und empirischen Kovarianzwerten beträgt etwa  $4 \text{ mgal}^2$  (3% der Varianz  $C_{\overline{\Delta g}^R \overline{\Delta g}^R}^{\text{emp}}(\psi = 0)$ ). Bei 30'-Blockmittelwerten ergibt sich die Höhe  $h_{\text{BM}}$  zu 9900 m. Die Kovarianzfunktionen für 30'-Blockmittelwerte sind in Abb. 10.4 dargestellt. Die maximale Differenz zwischen den empirischen und den analytischen Kovarianzwerten beträgt etwa  $5 \text{ mgal}^2$  (10% der Varianz  $C_{\overline{\Delta g}^R \overline{\Delta g}^R}^{\text{emp}}(\psi = 0)$ ), die Unterschiede liegen auf gleichem Niveau wie bei den synthetischen Daten.

### 10.2.2 Ergebnisse des Integrationsverfahrens

Für die Berechnung mit dem Integrationsverfahren werden zunächst die spektralen Gewichte  $s_n$  auf Basis der Fehlergradvarianzen des EIGEN-GL04C und der terrestrischen Daten für korreliertes Rauschen mit einem Niveau



**Abbildung 10.3.** Kovarianzfunktionen  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{emp}$  (grau, x) und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{ana}$  (schwarz, —) für Punktwerte mit einer Auflösung von 5'.



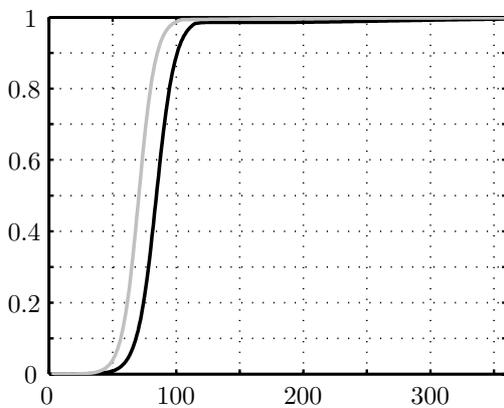
**Abbildung 10.4.** Kovarianzfunktionen  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{emp}$  (grau, x) und  $C_{\Delta g^R \Delta g^R}^{ana, h_{BM}}$  (schwarz, —) für Blockmittelwerte mit einer Auflösung von 30'.

von 1 mgal berechnet, vgl. Abschnitt 9.2. Die resultierenden Gewichte sind in Abb. 10.5 den Gewichten gegenübergestellt, die bei den synthetischen Daten im entsprechenden Szenario 1K verwendet wurden. Das Modell EIGEN-GL04C weist eine höhere Genauigkeit auf als das bei den synthetischen Daten eingesetzte SYNGPM360I. Die terrestrischen Daten fließen deshalb erst ab einem höheren sphärisch-harmonischen Grad in die Kombinationslösung ein. Ein Gewicht von 0.9 für die terrestrischen Daten wird hier erst beim sphärisch-harmonischen Grad 101 überschritten, bei den synthetischen Daten beim Grad 86.

Bei der Auswertung des Integrationsverfahrens wird wie bei den synthetischen Daten angenommen, dass die Beobachtungen in konstanter Höhe ( $h = 0$ ) liegen, die MOLODENSKII-Korrekturterme werden vernachlässigt. Die Ergebnisse für die Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  werden gemeinsam mit den Ergebnissen der anderen Berechnungsmethoden im Abschnitt 10.2.4 besprochen.

### 10.2.3 Ergebnisse der Kollokation

Bei Anwendung der Kollokation ist das Gleichungssystem (8.4) zu lösen. Es muss auch hier die Stabilität der Gleichungslösung überprüft werden, da zum einen eine feinere Auflösung (5' gegenüber 6') und zum anderen eine andere Kovarianzfunktion als bei den synthetischen Daten eingesetzt wird. Dazu wurden die Residuen (8.13) berechnet, s. Tabelle 10.4. Beide Implementierungen (Parallel, Block-TOEPLITZ) der Kollokation wurden eingesetzt, vgl. Abschnitt 8.2 und 8.3. In der Parallelimplementierung wird die individuelle Punkthöhe ( $h = h_i$ ) der residualen Beobachtungen berücksichtigt, die Vernachlässigung der Punkthöhe ( $h = 0$ ) ermöglicht die



**Abbildung 10.5.** Spektrale Gewichte  $s_n$  für terrestrische Daten mit 1 mgal korreliertem Rauschen in Kombination mit dem EIGEN-GL04C (schwarz) und dem SYNGPM360S (grau).

**Tabelle 10.4.** Statistik der Residuen  $r$  nach (8.13) zur Abschätzung der Stabilität der Gleichungslösung, Datenauflösung 5', Einheit mgal. Im Fall der Parallelimplementierung werden die Residuen für das zentrale Gebiet der Größe  $5^\circ \times 9^\circ$  gebildet.

	Block-TOEPLITZ- Implementierung ( $h = 0$ )	Parallelimple- mentierung ( $h = h_i$ )
Gebietsgröße	$12^\circ \times 19^\circ$	$10^\circ \times 18^\circ$
Dimension	$n_\varphi = 144,$ $n_\lambda = 228,$ $\mathbf{n} = 32832$	$n_\varphi = 120,$ $n_\lambda = 216,$ $\mathbf{n} = 25920$
Mtw	$-3 \cdot 10^{-12}$	$-2 \cdot 10^{-8}$
Std	$1 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-7}$
Min	$-8 \cdot 10^{-9}$	$-2 \cdot 10^{-6}$
Max	$6 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-6}$

Anordnung der Kovarianzmatrix in Block-TOEPLITZ-Struktur. Bei der Parallelimplementierung wird, wie bei der Auswertung mit synthetischen Daten, das Testgebiet in Teilgebieten der Größe  $10^\circ \times 18^\circ$  verarbeitet, vgl. Abschnitt 9.4.2.2. Im Vergleich zu den Residuen, die sich bei den synthetischen Daten ergeben (Tabelle 9.8), erhöht sich hier die Standardabweichung des Mittelwertes um zwei Größenordnungen auf  $3 \cdot 10^{-7}$  mgal. Dies wird in erster Linie durch die feinere Auflösung verursacht, denn auch wenn hier die Kovarianzfunktion der synthetischen Daten verwendet wird, ergibt sich bei einer Auflösung von  $5'$  eine Standardabweichung in der genannten Größenordnung. Die Standardabweichung  $3 \cdot 10^{-7}$  mgal liegt unterhalb der Messgenauigkeit für Schwereanomalien von 1 mgal, die Gleichungslösung wird als ausreichend stabil betrachtet. Die Gleichungslösung basierend auf der Block-TOEPLITZ-Matrix verliert ebenfalls aufgrund der höheren Auflösung der Beobachtungen an Stabilität. Es werden deshalb nur Teillösungen auf Basis eines Eingangsdatengebietes der Größe  $12^\circ \times 19^\circ$  berechnet, bei denen die Residuen eine Standardabweichung des Mittelwertes von  $1 \cdot 10^{-9}$  mgal haben.

Mit jeder Teillösung wird ein zentrales Berechnungsgebiet der Größe  $3.0^\circ \times 4.0^\circ$  (Parallelrechnerlösung) bzw.  $5.0^\circ \times 5.0^\circ$  (Block-TOEPLITZ-Lösung) abgedeckt, in dem die Berechnungspunkte einen Abstand von mindestens  $\psi = 3.5^\circ$  zum Rand des Teilgebietes haben. Das zentrale Analysegebiet ( $40^\circ < \varphi < 55^\circ$  und  $0^\circ < \lambda < 20^\circ$ ) besteht aus  $5 \times 5$  Teillösungen im Fall der Parallelrechnerlösung und aus  $3 \times 4$  Teillösungen im Fall der Block-TOEPLITZ-Lösung. Zusätzlich werden auch hier die Tensorwerte in einem  $0.5^\circ$  breiten Randbereich um jede Teillösung berechnet, so dass die Teillösungen sich in einem Bereich von  $1^\circ$  überlappen. Innerhalb des Überlappungsbereiches werden die Teillösungen durch lineare Gewichtung einander angepasst. Die Teillösungen werden danach zu einer Gesamtlösung für die Ergebnisanalyse zusammengefasst.

### 10.2.4 Diskussion der Ergebnisse

Die zu erwartende Genauigkeit der Zielgrößen wird mit Hilfe der Kollokation abgeschätzt. Die numerischen Ergebnisse aus Kapitel 9 haben gezeigt, dass die Kollokation dazu gut geeignet ist. Die Standardabweichungen aller Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  werden in der Bahnhöhe von GOCE ausgehend von der Kombination des EIGEN-GL04C mit terrestrischen Daten berechnet. Für die terrestrischen Daten wird korreliertes Rauschen mit einem Niveau von 1 mgal angesetzt. Wie in Abschnitt 9.3.2 wird die Genauigkeit für einen im Datengebiet zentral gelegenen Punkt bestimmt. Das Datengebiet hat eine Größe von  $7^\circ \times 7^\circ$  und liegt am Äquator, damit die Meridiankonvergenz für die Berechnung der Abstände zum Gebietsrand nicht berücksichtigt werden muss. Für die statistische Bestimmung der Varianz ist nicht die Lage des Gebietes, sondern die räumliche Verteilung der Beobachtungen relevant. Mit der Gebietsgröße von  $7^\circ \times 7^\circ$  wird ein Mindestabstand zum Rand des Datengebietes von  $3.5^\circ$  vorausgesetzt. Dieser Abstand ist ausreichend, da auch bei Erhöhung des Abstandes von  $3.5^\circ$  auf  $4.5^\circ$  sich die Standardabweichung in  $T_{zz}$  nur um 4% verbessert.

Die Genauigkeit der Zielgröße wird sowohl für Lösungen aus Punktwerten mit einer Auflösung von  $5'$  und Blockmittelwerten der Auflösungsstufen  $15'$  und  $30'$  berechnet, es werden die Kovarianzfunktionen aus Abschnitt 10.2.1 zur Berechnung eingesetzt. Die Ergebnisse der Genauigkeitsabschätzung sind in Tabelle 10.5 zusammengestellt. Bei  $5'$ -Punktwerten kann für alle Komponenten eine Standardabweichung von unter 1 mE erwartet werden. In der radialen Komponente  $T_{zz}$  wird eine Verbesserung von etwa 30% gegenüber der Kombinationslösung mit dem SYNGPM360I erreicht, vgl. Tabelle 9.5. Der entsprechende Genauigkeitsgewinn beträgt bei den Blockmittel-

**Tabelle 10.5.** Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{ij}^{KKQ}}}$  aus statistischer Berechnung mit der Kollokation ausgehend von Punktwerten (PW) und Blockmittelwerten (BM), Einheit mE.

Aufl.	Komp.	$m_{\epsilon_{T_{ij}^{KKQ}}}$
5' (PW)	$xx$	0.56
	$xy$	0.32
	$xz$	0.64
	$yy$	0.56
	$yz$	0.64
	$zz$	0.91
15' (BM)	$zz$	1.15
30' (BM)	$zz$	1.87

**Tabelle 10.6.** Statistik der Elemente des residuellen Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  berechnet mit der Kollokation unter Berücksichtigung der Punkthöhe der  $5'$ -Punktwerten, Einheit mE.

Komp.	Mtw	Std	Min	Max
$xx$	-0.05	2.62	-9.31	10.51
$xy$	0.03	1.32	-6.19	4.98
$xz$	-0.09	2.98	-10.22	12.65
$yy$	-0.08	2.57	-7.83	10.09
$yz$	-0.03	2.90	-7.69	11.63
$zz$	0.12	4.15	-15.50	16.14

werten etwa 50%. Die numerischen Ergebnisse für  $T_{zz}$  auf Basis der synthetischen Daten (Szenario 1K) zeigen, dass bei Vernachlässigung der Punkthöhe eine um knapp 10% höhere Standardabweichung zu erwarten ist.

Es ist anzumerken, dass sich für korreliertes Rauschen mit einem Niveau von 5 mgal eine Standardabweichung für  $T_{zz}$  von 2.2 mE ergibt. Das angestrebte Genauigkeitsniveau von 1 bis 2 mE wird dann knapp überschritten. In Abschnitt 9.4.4 wurde bereits angesprochen, dass in diesem Fall die Genauigkeit hinsichtlich des Messbandes des GOCE-Gradiometers nicht ausreichend sein könnte. Für eine im Hinblick auf die Evaluierung der GOCE-Daten ausreichende Genauigkeit sollten daher in der Kombinationslösung auch mit dem EIGEN-GL04C nur terrestrische Schwereanomalien mit einem Rauschniveau kleiner als 5 mgal genutzt werden, wenn im Rauschen auftretende Korrelationen dem hier gewählten Korrelationsmodell (3.54) entsprechen. Treten kurze Korrelationslängen in der Kovarianzfunktion des Rauschens auf, verbessert sich die Kombinationslösung.

Die Analyse der Ergebnisse der Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  erfolgt wie bei den synthetischen Daten im zentralen Gebiet mit  $40^\circ < \varphi < 55^\circ$  und  $0^\circ < \lambda < 20^\circ$ . Die Lösung auf Basis der Blockmittelwerte mit Auflösungen von 15' und 30' sind für Punkte eines 5'-Gitters mittels kubischem Spline-Ansatz interpoliert worden, um die Ergebnisse untereinander vergleichen zu können, s. a. Abschnitt 9.4.

Exemplarisch sind in Tabelle 10.6 die Statistik der Komponenten des residualen Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  der Kollokationslösung für das Auswerteggebiet angegeben. In der Berechnung wurde die individuelle Höhe der residualen 5'-Punktwerte berücksichtigt. Die Statistik der restituierten Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  findet sich in Tabelle 10.7. Im Folgenden werden die Differenzen zwischen den Lösungen der untersuchten Verfahren aus Punkt- und Blockmittelwerten analysiert.

Wie bei der vergleichenden Bewertung der Ergebnisse aus den synthetischen Daten wird auch hier das Ergebnis eines Signifikanztests in der Diskussion zu Hilfe genommen. Die Bewertung der Signifikanz der maximalen absoluten Differenzen erfolgt ebenfalls auf Basis der statistischen Testgröße  $t = \frac{D}{s_D}$ , die sich aus der Differenz  $D$  bezüglich der Standardabweichung  $s_D$  der Differenz ergibt (vgl. Abschnitt 9.4). Wird das Quantil  $q_t = 1.96$  (zweiseitiger Test mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% und mehr als 30 000 Freiheitsgraden) von  $t$  überschritten, sind die Differenzen als signifikant anzusehen. Als Standardabweichung der Einzelgrößen werden die in Tabelle 10.5 angegebenen Standardabweichungen  $m_{\epsilon_{T_{ij}^{\text{KKQ}}}}$  aus der Kollokation für alle Verfahren eingesetzt.

Die Statistik der Differenzen zwischen den Ergebnissen aus 5'-Punktwerten und aus den Blockmittelwerten innerhalb desselben Verfahrens sind in Tabelle 10.8 für die radiale Komponente  $\hat{T}_{zz}$  angegeben. Wie bei den synthetischen Daten ergibt sich, dass die Ergebnisse aus Punkt- und Blockmittelwerten im Integrationsverfahren kleinere Differenzen aufweisen als die entsprechenden Differenzen der Kollokationslösungen, vgl. Abschnitt 9.4.3. Bei der Kollokation wird durch die Abhängigkeit der Gewichtung zwischen GPM und terrestrischen Daten von der Datenauflösung und durch die Modifikation der Kovarianzfunktionen zur Berücksichtigung der Blockmittelwerte die Lösung deutlicher verändert als bei Anwendung des Integrationsverfahrens, bei dem die Datenauflösung im Fall von korreliertem Rauschen allein durch die reziproken Faktoren  $1/\beta_n$  in der Kernfunktion für Blockmittelwerte berücksichtigt wird.

Bei Vernachlässigung der Punkthöhe ist die absolute maximale Differenz zwischen der Kollokationslösung aus 5'-Punktwerten und 30'-Blockmittelwerten im Gegensatz zur entsprechenden Differenz der Lösungen des Integrationsverfahrens signifikant, s. Tabelle 10.8. Die Lösungen bei Berücksichtigung der Punkthöhe unterscheiden

**Tabelle 10.7.** Statistik der Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]} = \hat{T}_{[ij]}^M + \hat{T}_{[ij]}^R + T_{[ij]}^{\text{RTM}}$  berechnet mit der Kollokation unter Berücksichtigung der Punkthöhe der 5'-Punktwerte, Einheit mE.

Komp.	Mtw	Std	Min	Max
$xx$	-103.06	136.81	-409.00	199.33
$xy$	-30.77	84.84	-165.89	227.81
$xz$	56.86	155.33	-557.57	411.28
$yy$	-46.43	106.50	-337.26	440.16
$yz$	2.13	119.87	-319.68	461.43
$zz$	149.48	201.88	-239.07	619.53

**Tabelle 10.8.** Statistik der Differenzen zwischen den Lösungen für  $\hat{T}_{zz}$  aus 5'-Punktwerten und aus Blockmittelwerten mit Auflösungen von 15' bzw. 30', Einheit mE.

Aufl.	Mtw	Std	Min	Max
Integrationsverfahren ( $h = 0$ )				
15' (BM)	0.00	<b>0.04</b>	-0.20	0.18
30' (BM)	0.02	<b>0.57</b>	-2.35	2.28
Kollokation ( $h = 0$ )				
15' (BM)	-0.01	<b>0.61</b>	-2.24	1.82
30' (BM)	-0.03	<b>1.54</b>	-5.97	4.79
Kollokation ( $h = h_i$ )				
15' (BM)	0.05	<b>0.71</b>	-2.55	3.00
30' (BM)	0.03	<b>1.53</b>	-4.87	4.84

**Tabelle 10.9.** Statistik der Differenzen zwischen den Lösungen der untersuchten Verfahren für die Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  aus Punktwerten (PW) und Blockmittelwerten (BM), Einheit mE.

Aufl.	Komp.	Integrationsverf. ( $h = 0$ ) vs Kollokation ( $h = 0$ )				Integrationsverf. ( $h = 0$ ) vs Kollokation ( $h = h_i$ )				Kollokation ( $h = 0$ ) vs Kollokation ( $h = h_i$ )			
		Mtw	Std	Min	Max	Mtw	Std	Min	Max	Mtw	Std	Min	Max
5' (PW)	$xx$	-0.05	<b>0.40</b>	-1.72	1.15	0.01	<b>0.55</b>	-1.86	1.83	0.06	<b>0.46</b>	-1.91	1.75
	$xy$	-0.00	<b>0.14</b>	-0.56	0.76	0.00	<b>0.21</b>	-1.24	0.91	0.00	<b>0.19</b>	-1.26	1.06
	$xz$	0.01	<b>0.40</b>	-1.36	1.66	0.11	<b>0.53</b>	-1.37	3.36	0.10	<b>0.45</b>	-1.26	2.41
	$yy$	0.03	<b>0.22</b>	-0.48	0.72	0.04	<b>0.34</b>	-2.22	2.44	0.01	<b>0.33</b>	-2.40	2.62
	$yz$	-0.01	<b>0.25</b>	-0.99	0.83	-0.03	<b>0.39</b>	-2.90	2.33	-0.02	<b>0.36</b>	-3.02	2.10
	$zz$	0.02	<b>0.49</b>	-1.41	1.78	-0.05	<b>0.64</b>	-2.52	2.39	-0.06	<b>0.56</b>	-2.16	2.37
	15' (BM)	$zz$	0.00	<b>0.44</b>	-1.68	1.72	0.00	<b>0.50</b>	-2.25	1.78	0.00	<b>0.14</b>	-0.61
30' (BM)	$zz$	-0.04	<b>1.43</b>	-5.31	4.30	-0.04	<b>1.42</b>	-5.56	4.28	0.00	<b>0.10</b>	-0.46	0.51

sich auch für eine Auflösung von 15' der Blockmittelwerte signifikant. Dies war bei den synthetischen Daten im Szenario 1K nicht der Fall. Die Ursache für die Signifikanz im Fall der realen Daten könnte in der größeren Relevanz der Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe der Beobachtungen liegen. Dieser Effekt tritt auch in den Differenzen der Ergebnisse aus 5'-Punktwerten zwischen den verschiedenen Verfahren auf, die im Folgenden analysiert werden.

Die Statistik der Differenzen zwischen den Lösungen der Verfahren für alle Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  ist in Tabelle 10.9 angegeben. Die Standardabweichung des Mittelwertes der Differenzen zwischen den Ergebnissen aus dem Integrationsverfahren und der Kollokation bei Vernachlässigung der Punkthöhe ( $h = 0$ ) ist für die radiale Komponente  $\hat{T}_{zz}$  um etwa den Faktor 2 größer als bei den synthetischen Daten, die minimalen und maximalen Differenzen sind jedoch kleiner. Die maximalen absoluten Differenzen wurden in den statistischen Tests nur für die Komponente  $\hat{T}_{xx}$  als signifikant bewertet. Aufgrund der Stabilitätsprobleme in der Gleichungslösung musste die Kollokationslösung hier auch bei Vernachlässigung der Punkthöhe - anders als bei den synthetischen Daten - auf Teilgebiete beschränkt werden. Die Lösung des Gesamtgebietes besteht aus 3x4 Teillösungen (vgl. Abschnitt 10.2.3). Die Integrationslösung hingegen basiert auf dem gesamten Datengebiet. Dies kann eine mögliche Ursache für die größere Standardabweichung des Mittelwertes der Differenzen zu der Integrationslösung sein. Die Lösungen für die Komponenten des residualen Tensors  $T_{[ij]}^R$  aus der Kollokation unter Vernachlässigung der Punkthöhe der Beobachtungen sind in Abb. 10.6 dargestellt. Hier ist keine Kachelstruktur im Signal an den Rändern der Teillösungen zu erkennen. Da jedoch die Differenzen zwischen Integrations- und Kollokationslösung klein sind, wenn in beiden Fällen die Punkthöhe nicht berücksichtigt wird, zeigt sich in der Differenz der Lösungen eine Kachelstruktur an den Rändern der 3x4 Teillösungen der Kollokation. Exemplarisch sind diese Differenzen in den Komponenten  $\hat{T}_{yy}$  und  $\hat{T}_{zz}$  in Abb. 10.7 (a) und (b) dargestellt. In der bezüglich des Signals stärkeren radialen Komponente  $\hat{T}_{zz}$  ist die Kachelstruktur deutlicher zu erkennen. Bei 15'-Blockmittelwerten gelingt auch für die Kollokation die Lösung auf Basis des gesamten Datengebietes. Die Standardabweichung des Mittelwertes der Differenzen zwischen der Integrations- und Kollokationslösung bei  $h = 0$  ist dann kleiner als bei den synthetischen Daten. Die Differenzen sind für die radiale Komponente in Abb. 10.7 (c) dargestellt. Aufgrund der an die Datenauflösung angepasste Gewichtung seitens der Kollokation werden bei größerer Auflösung die Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Integrations- und der Kollokationslösung größer. Die Kollokationslösungen bei Vergleich der Ergebnisse mit und ohne Berücksichtigung der Punkthöhe weisen kleinere Differenzen bei größerer Punktauflösung auf (Abb. 10.7 (d)), da die Berücksichtigung der Punkthöhe aufgrund der geringeren Gewichtung der terrestrischen Daten gegenüber dem GPM an Relevanz verliert.

Die Ergebnisse für die Komponenten des residualen Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$  aus der Kollokation bei Berücksichtigung der Punkthöhe der 5'-Punktwerte sind in Abb. 10.8 dargestellt. Ein Kacheleffekt durch die Aufteilung des Gebietes zur Berechnung der Lösung ist zunächst nicht zu erkennen, der Effekt wird aber in der Differenz zur Integrationslösung in Abb. 10.9 sichtbar. Obwohl die entsprechende Kollokationslösung auch bei den synthetischen Daten aus Teillösungen zusammengesetzt wurde, war in der Differenz zwischen der aus dem Gesamtgebiet berechneten Kollokationslösung und der zusammengesetzten Lösung keine Kachelstruktur zu erkennen (vgl. Abb. 9.19 (c) und (d), S. 120). Eine mögliche Ursache für die hier auftretende Kachelstruktur ist die höhere Genauigkeit der Lösungen aufgrund der Einführung des EIGEN-GL04C anstelle des SYNGPM360I. Die Lösungen weisen insgesamt eine bessere Übereinstimmung auf, der Kacheleffekt in der Kollokationslösung tritt in den kleineren Differen-

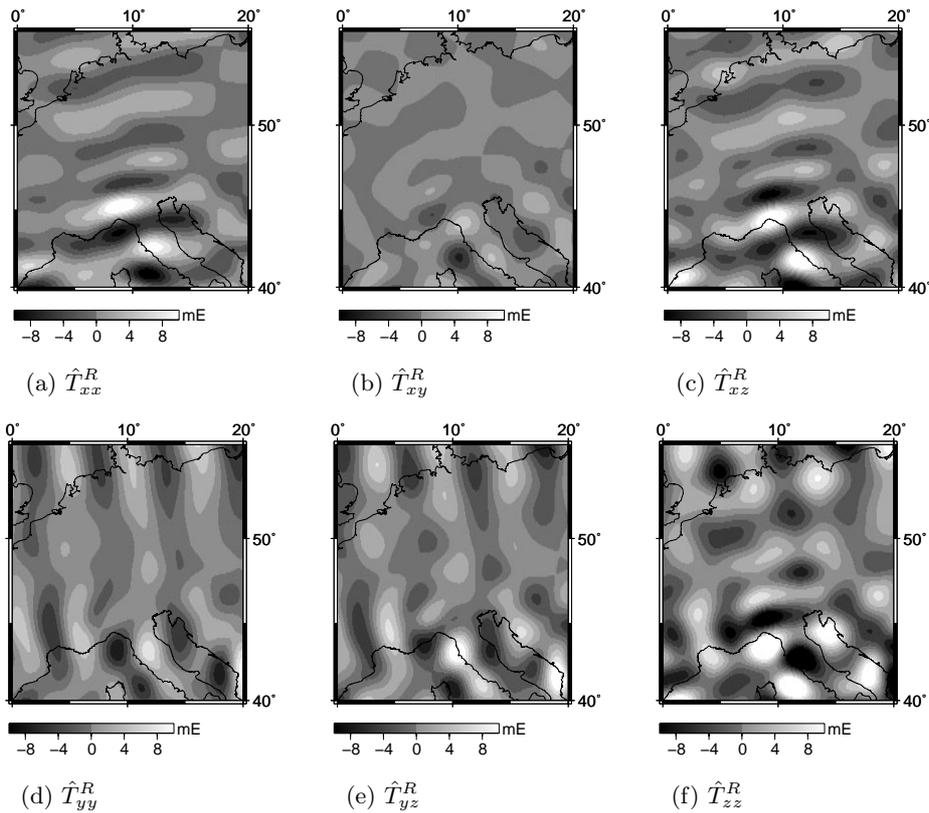


Abbildung 10.6. Lösungen der Kollokation ( $h = 0$ ) aus Punktwerten mit einer Auflösung von  $5'$  für die jeweils angegebene Komponente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$ .

zen deutlicher hervor. Der Kacheffekt sollte durch einen breiteren Überlappungsbereich der Teillösungen der Kollokation verringert werden können.

Abgesehen von diesem Kacheffekt liegen die Differenzen zwischen den Lösungen mit und ohne Vernachlässigung der Punkthöhe in  $\hat{T}_{zz}$  auf dem gleichen Niveau wie bei den synthetischen Daten. Die Standardabweichungen der Mittelwerte der Differenzen in  $\hat{T}_{zz}$  der Lösungen aus  $5'$ -Punktwerten liegen bei  $0.6$  mE, bei den synthetischen Daten waren es  $0.7$  mE, vgl. Tabelle 9.11. Die maximalen absoluten Differenzen sind, wie bei den synthetischen Daten (Szenario 1K), nicht signifikant. Bei allen anderen Tensorkomponenten, die horizontale Ableitungen enthalten, treten signifikante maximale absolute Differenzen auf. Die Auswirkung der Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe war auch in den Soll-Ist-Differenzen bei den synthetischen Daten auf Basis des Ergebnisse

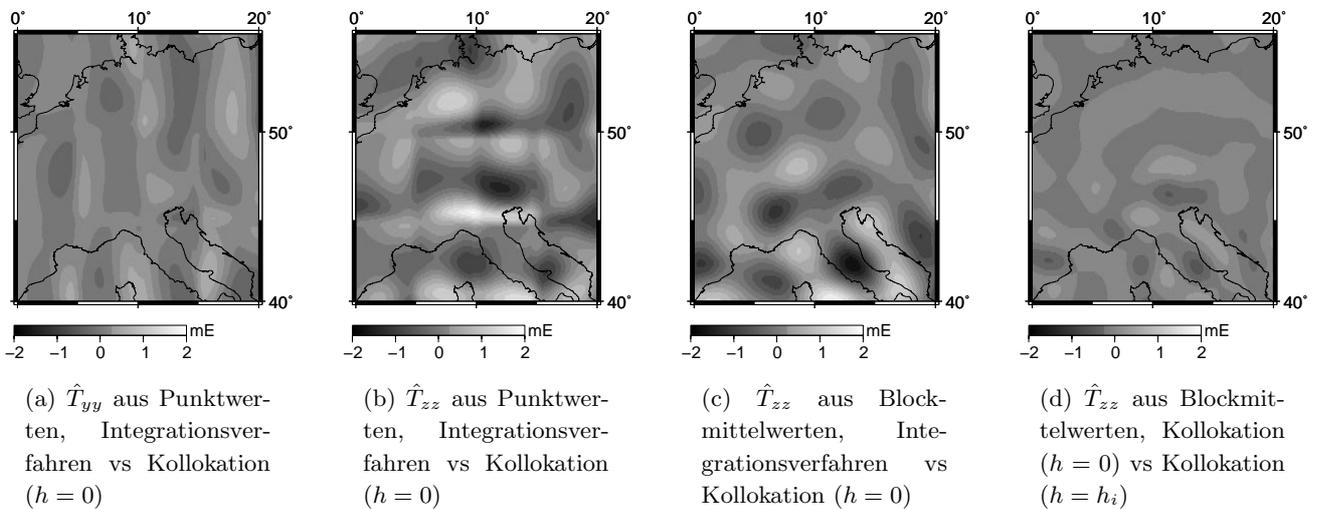
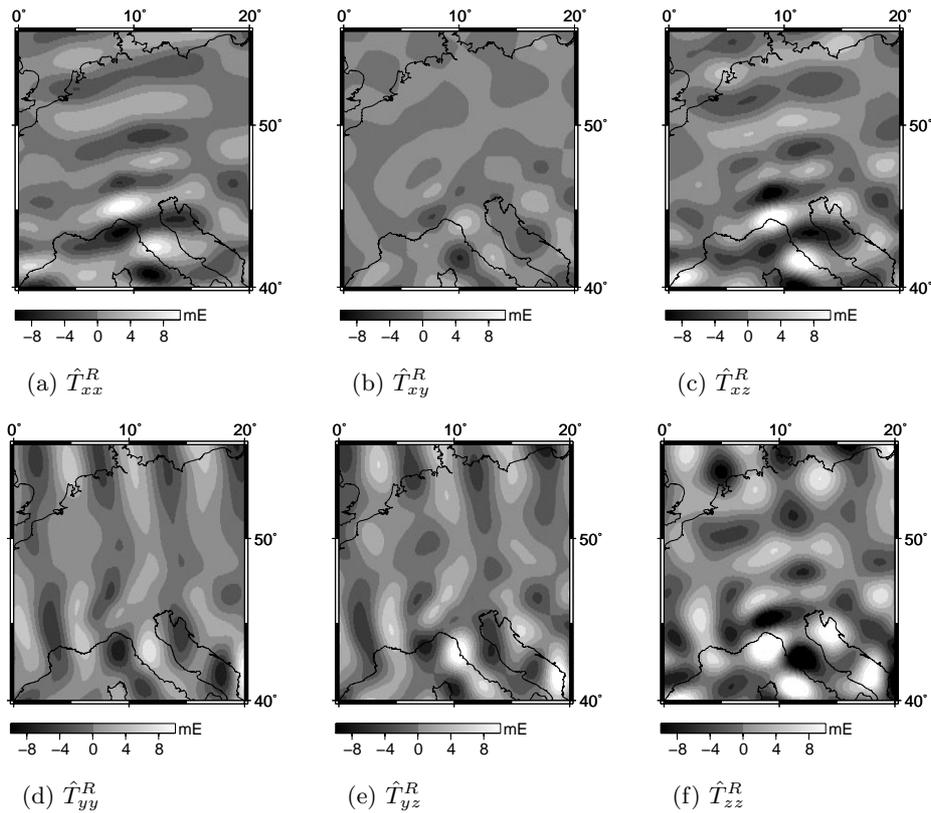


Abbildung 10.7. Differenzen der Lösungen der verschiedenen Verfahren aus Punktwerten mit einer Auflösung von  $5'$  und Blockmittelwerten der Auflösung  $15'$  in der jeweils angegebenen Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$ .



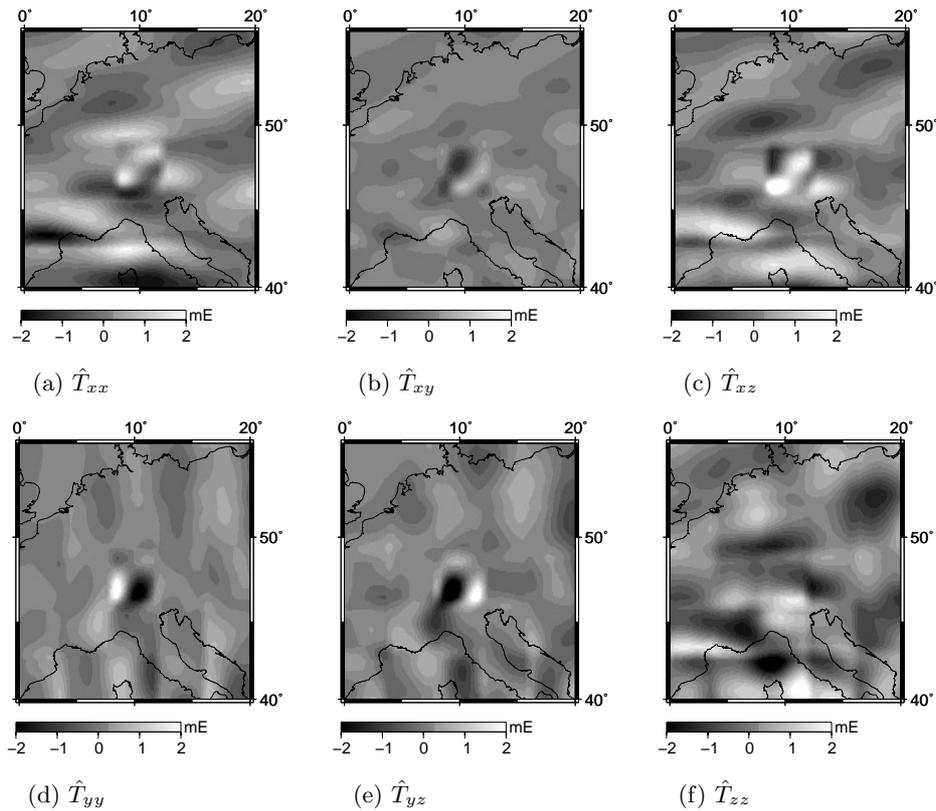
**Abbildung 10.8.** Lösungen der Kollokation ( $h = h_i$ ) aus Punktwerten mit einer Auflösung von  $5'$  für die Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}^R$ .

des Integrationsverfahrens erkennbar, vgl. Abschnitt 9.4.1. Die maximale absolute Differenz von 3.0 mE in  $\hat{T}_{yz}$  übersteigt hier sogar im Absolutwert die maximale Differenz von 2.4 mE in  $\hat{T}_{zz}$ , obwohl die Standardabweichung des Mittelwertes der Differenzen für alle Tensorkomponenten geringer ist als für  $\hat{T}_{zz}$ . Der Grund dafür ist, dass zum Teil nur eine geringe Anzahl extremer Differenzen in diesen Lösungen vorkommt, vgl. Abb. 10.9. Extreme Differenzen liegen im Bereich der Alpen, wo große Höhenänderungen auftreten. Dies ist besonders deutlich in den Abb. 10.9 (d) und (e) für die Komponenten  $\hat{T}_{yy}$  und  $\hat{T}_{yz}$  zu erkennen. In Hochgebirgsregionen wie den Alpen werden Höhen von über 1500 m erreicht, vgl. die Darstellung des DGM in Abb. 7.16. Aufgrund der Signalvariation mit großem Amplitudenausschlag in den Differenzen der Lösungen in diesem Bereich ist hier auch deutlicher die Kachelstruktur der Kollokationslösung zu sehen.

Bei der Interpretation der Differenzen ist zu beachten, dass Komponenten mit der Ableitung in  $y$ -Richtung (Ost) empfindlich für Längsstrukturen mit einer Ausdehnung in Nord-Süd-Richtung und Komponenten mit der Ableitung in  $x$ -Richtung (Nord) empfindlich für Längsstrukturen mit einer Ausdehnung in Ost-West-Richtung sind. Daher ergeben sich unterschiedliche Ausdehnungsbereiche der extremen Differenzen. Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass die Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe der residualen Beobachtungen in Hochgebirgsregionen mit großen Höhenunterschieden gerade für die Tensorkomponenten, die horizontale Ableitungen enthalten, relevant ist. Dies ist plausibel, da eine Kante, an der Massen in horizontaler Richtung mit unterschiedlicher Dichte aufeinander treffen, sich im horizontalen Gradienten deutlich widerspiegelt. Eine Differenz der vertikalen Gradienten im Bereich der Kante zeigt den Übergang weniger scharf an.

### 10.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Differenzen zwischen den Ergebnissen aus den untersuchten Methoden auf Basis realer  $5'$ -Punktschwereanomalien und dem EIGEN-GL04C zeigen maximale Werte von 1.8 mE und eine Standardabweichung des Mittelwertes von kleiner 0.5 mE, wenn in beiden Verfahren die individuelle Punkthöhe der Beobachtungen vernachlässigt wird. Mit Ausnahme der Abweichungen in der Komponente  $\hat{T}_{xx}$  sind die maximalen Differenzen nicht signifikant. Die Standardabweichung des Mittelwertes ist größer als bei den synthetischen Daten, die wahrscheinliche Ursache



**Abbildung 10.9.** Differenzen der Lösungen des Integrationsverfahrens und der Kollokation ( $h = h_i$ ) für die angegebenen Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  aus Punktwerten mit einer Auflösung von  $5'$ .

liegt hier in der notwendigen Aufteilung der Berechnung auf Teilgebiete seitens der Kollokation. Der Effekt müsste kleiner werden, wenn die Teillösungen sich in einem größeren Bereich überlappen. Alternativ kann die Datenauflösung der Beobachtungen auf bis zu  $15'$  erhöht werden, dann ist eine Kollokationslösung auf Basis des Gesamtgebietes möglich und es treten auch hier nur maximale Differenzen von  $1.7 \text{ mE}$  zur Integrationslösung auf. Werden Blockmittelwerte mit größerer Auflösung eingesetzt, werden die Unterschiede in Übereinstimmung mit der Theorie und den Ergebnissen aus synthetischen Daten größer. Die Charakteristiken der Lösungen aus realen Daten sind vergleichbar mit denen aus synthetischen Daten.

Signifikante Unterschiede haben sich in den Komponenten des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  zwischen den Lösungen mit und ohne Berücksichtigung der Punkthöhe ergeben. Besonders deutlich zeigt sich dies in den Komponenten, die horizontale Ableitungen enthalten. Die Bedeutung der Punkthöhe nimmt bei größerer Auflösung der Beobachtungen ab. Für Hochgebirgsregionen mit großen Höhenänderungen wird daher die Berücksichtigung der Punkthöhe der residualen Beobachtungen empfohlen, wenn eine Punktauflösung kleiner  $15'$  vorliegt.

Die statistische Berechnung der Varianz mit Hilfe der Kollokation ergibt für die Kombination der  $5'$ -Punktschwereanomalien mit dem EIGEN-GL04C Genauigkeiten von besser als  $1 \text{ mE}$ , wenn korreliertes Rauschen mit einem Niveau von  $1 \text{ mgal}$  für die terrestrischen Daten angesetzt wird. Auch mit  $15'$ - und  $30'$ -Blockmittelwerten resultieren Genauigkeiten unterhalb des angestrebten Niveaus von  $1$  bis  $2 \text{ mE}$ . Dabei wird in allen Berechnungen ein Mindestabstand von  $3.5^\circ$  zum Rand des Datengebietes vorausgesetzt.

Die Berechnungen mit synthetischen Daten haben gezeigt, dass die Abschätzung mit der empirisch berechneten Varianz aus der besten Lösung im Bereich von  $0.1 \text{ mE}$  übereinstimmt. Eine etwas schlechtere Übereinstimmung zwischen der statistisch berechneten und der - unbekannt - tatsächlichen Varianz wird bei realen Daten erwartet, da das Rauschverhalten der Daten - anders als bei den synthetischen Daten - nicht perfekt modelliert werden kann. Es wird aber davon ausgegangen, dass ein Genauigkeitsniveau von  $1$  bis  $2 \text{ mE}$  eingehalten werden kann. Die auf Basis der realen Daten berechneten Elemente des Tensors  $\hat{T}_{[ij]}$  sind daher geeignete Kandidaten für die Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometermessungen der GOCE-Mission.

# 11 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war die Berechnung von Referenzwerten für die Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometermessungen der ESA-Satellitenmission GOCE, deren Start für das Jahr 2007/2008 geplant ist. Mit Hilfe des Gradiometers werden die Komponenten des Tensors  $V_{[ij]}$ , die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde, gemessen. Bezogen auf das Störpotential ergibt sich der Tensor  $T_{[ij]}$ . Zur Berechnung der Referenzwerte des Tensors  $T_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE (250 km) wurde ein globales Potentialmodell (GPM) mit regional vorliegenden terrestrischen Schwereanomalien kombiniert. Die Remove-Restore-Technik wurde angewendet, um den langwelligen Signalanteil auf Basis des GPM und den kurzwelligen Signalanteil auf Basis der residualen Topographie (RTM-Reduktion) getrennt vom Restsignal in der Berechnung modellieren zu können. Zur Bestimmung residualer Tensorwerte auf Basis des Restsignals wurden zwei Methoden eingesetzt, das Integrationsverfahren mit spektralen Gewichten und die Kollokation nach kleinsten Quadraten.

Die im Rahmen der GOCE-Mission angestrebte Genauigkeit der Hauptdiagonalelemente des Tensors  $V_{[ij]}$  beträgt im Frequenzraum maximal  $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  innerhalb des eingeschränkten Messbandes (0.020 Hz bis 0.100 Hz) des Gradiometers bzw. 1 bis 2 mE im Ortsraum. Dieses Genauigkeitsniveau erfordert eine hohe Qualität der Referenzwerte. Die Abschätzung der Genauigkeit der Referenzwerte stellt daher einen wesentlichen Teil der Arbeit dar, ebenso die detaillierte Analyse der Unterschiede und Gemeinsamkeiten beider Berechnungsverfahren im Hinblick auf eine optimale Kombination der Eingangsdaten. Die Genauigkeitsanalyse erfolgte unter Berücksichtigung des Rauschens und der räumlichen Verteilung der terrestrischen Beobachtungen, statistisch durch Bestimmung der Varianzen auf Basis von Gradvarianzen und mit Hilfe der Kollokation und empirisch durch die Berechnung der Varianzen aus dem verbleibenden Rauschen in den Zielgrößen unter Anwendung eines synthetischen Erdmodells.

Die theoretischen Grundlagen der Methoden zur Berechnung des residualen Tensors  $T_{[ij]}^R$  wurden erläutert und ihre Approximationsansätze theoretisch und numerisch verglichen. In beiden Methoden werden die Beobachtungen mit einer Gewichtsfunktion zur Berechnung des Tensors gefaltet. Auch bei gleichen Startannahmen bezüglich der eingehenden Datensätze (Genauigkeit des GPM und der terrestrischen Daten, Auflösung, Gebietsgröße) treten Unterschiede in der resultierenden Gewichtsfunktion auf. Bei Anwendung der Kollokation werden für jeden Berechnungspunkt in Abhängigkeit von den Genauigkeiten der Eingangsdaten, aber auch von der räumlichen Verteilung der Beobachtungen individuelle Gewichte berechnet und es wird implizit am Gebietsrand ein glatter Übergang erzeugt. Die Kollokation liefert eine statistisch optimale Lösung. Bei Anwendung des Integrationsverfahrens wird eine für alle Berechnungspunkte identische Gewichtsfunktion verwendet, die an den Rändern des Integrationsgebietes abgeschnitten wird; bei ungünstigem Abbruch des Integralkerns kann dies zu einer Verschlechterung der Lösung führen. Im Fall global und kontinuierlich vorliegender Beobachtungen können beide Methoden ineinander überführt werden (Moritz, 1976). Bei Anwendung der stochastisch motivierten Kernmodifikation nach (Wenzel, 1981) entsprechen sich die Gewichte beider Methoden. Die resultierenden Gewichte bei der Anwendung auf regional begrenzt und diskret vorliegende Beobachtungen wurden numerisch im Ortsraum verglichen, bei genügend feiner Auflösung der Beobachtungen und ausreichend großem Abstand zum Rand des Datengebietes können die Unterschiede beider Methoden vernachlässigt werden.

In den Testrechnungen wurden residuale Schwereanomalien verwendet, die auf einem regelmäßigen geographischen Gitter vorlagen. Zur Auswertung des Integrationsverfahrens wurde die 1D-FFT-Methode eingesetzt, wobei die MOLODENSKII-Korrekturterme vernachlässigt wurden. Dies entspricht der Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe im Fall der Kollokation, deren Auswirkung numerisch untersucht wurde. Bei Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe wurde das Gleichungssystem der Kollokation auf einem Parallelrechner gelöst. Bei Vernachlässigung der Punkthöhe ergibt sich eine Block-TOEPLITZ-Struktur in der Kovarianzmatrix, deren Ausnutzung eine serielle Lösung des Gleichungssystems ermöglichte. Bei Datenaufösungen feiner als  $6'$  traten Stabilitätsprobleme in der Gleichungslösung auf, so dass zur Berechnung das Testgebiet in Teilgebiete unterteilt werden

musste. Die Teillösungen wurden mittels linearer Gewichtung innerhalb eines Überlappungsbereiches zu einer Gesamtlösung zusammengefügt. Bei einem zu schmalen Überlappungsbereich kann dies zu einer Kachelstruktur in der Lösung führen. Deutlich wurde dies in der Differenz zur Lösung des Integrationsverfahrens, die auf dem gesamten Testgebiet basierte.

Im ersten Teil der Genauigkeitsanalyse wurden die Varianzen der Zielgrößen einerseits auf Basis von spektral gewichteten Gradvarianzen berechnet, andererseits mit Hilfe der Kollokation ohne Einführung von Beobachtungen. Vorteil der Darstellung in Gradvarianzen ist es, dass die Varianz aus der Summe dreier Anteile, resultierend aus dem Rauschen des GPM, dem Rauschen der terrestrischen Beobachtungen und gegebenenfalls aus dem Vernachlässigungsfehler, angegeben werden kann. Nachteilig ist, dass implizit die Annahme kontinuierlich vorliegender Beobachtungen getroffen wird. Die Kollokation ist daher besser geeignet, um die Abhängigkeit der Varianz der Zielgröße von der räumlichen Verteilung der Beobachtungen zu analysieren. In den Testrechnungen wurde als GPM eine Kombination aus dem EIGEN-GRACE02S und dem EGM96 eingesetzt. Auflösung, Rauschen und Gebietsgröße der terrestrischen Schwereanomalien wurden in den Testrechnungen variiert, zusätzlich wurden Varianzen ausgehend von Punkt- und von Blockmittelwerten berechnet. In beiden Fällen wurde eine lokale Kovarianzfunktion eingesetzt, deren Parameter anhand empirisch berechneter Kovarianzfunktionen angepasst wurden. Die Ergebnisse zeigten die Auswirkung der unterschiedlichen Modellierung unkorrelierten Rauschens seitens der Kollokation im Ortsraum und seitens der spektralen Kombination des Integrationsverfahrens im Frequenzraum. Bei Anwendung der Kollokation waren die Beobachtungen streng unkorreliert, wohingegen bei der Berechnung der spektralen Gewichte eine Restkorrelation verblieb. Das Niveau des Rauschens der terrestrischen Daten hat, wenn die Beobachtungen als unkorreliert angenommen werden, bei Anwendung der Kollokation nur geringe Auswirkung auf die Varianz der Zielgröße. Diese Annahme ist somit für eine Genauigkeitsanalyse ungeeignet, da die Genauigkeit der Zielgröße durch Wahl einer feineren Auflösung nahezu beliebig gesteigert werden kann. Bei der Annahme korrelierten Rauschens stagnierte der Genauigkeitserfolg auch bei feineren Auflösungen; beide Methoden zur Genauigkeitsschätzung lieferten ähnliche Standardabweichungen der Zielgrößen. Die Genauigkeit hängt auch von der Höhe ab, in der die Elemente des Tensors  $T_{[ij]}$  geschätzt werden. Die Höhe wurde in dieser Arbeit durchgängig mit 250 km angenommen und liegt damit im unteren Bereich der in GOCE-Simulationsszenarien auftretenden Höhen. Aufgrund der Signalabschwächung nimmt auch die Varianz mit wachsender Höhe ab, bei einer Höhe von 270 km verringert sich die Standardabweichung um etwa 20%.

Im zweiten Teil der Genauigkeitsanalyse wurde ein im Rahmen dieser Arbeit erstelltes synthetisches Erdmodell eingesetzt. Es besteht aus einem hochauflösenden GPM (SYNGPM1300S mit  $n_{\max} = 1300$ ) und einem digitalen Geländemodell (DGM). Auf Basis des SYNGPM1300S wurde das SYNGPM360I ( $n_{\max} = 360$ ) abgeleitet, auf dessen Koeffizienten ein Rauschsignal addiert wurde. Das SYNGPM360I wurde zur Simulation des GPM in der Kombinationslösung verwendet. Zusätzlich wurde ein korreliertes bzw. unkorreliertes Rauschsignal auf die simulierten terrestrischen Schwereanomalien addiert, die in Höhe des DGM auf der Erdoberfläche aus dem SYNGPM1300S berechnet wurden. Das korrelierte Rauschen wurde auf Basis einer homogenen, isotropen und finiten Kovarianzfunktion durch CHOLESKY-Faktorisierung der Kovarianzmatrix des Rauschens ermittelt. Durch Ausnutzung der Band-Block-TOEPLITZ-Struktur der Kovarianzmatrix konnte für bis zu 74 800 Beobachtungen Rauschen auf der Kugel in serieller Bearbeitung erzeugt werden.

Der Soll-Ist-Vergleich auf Basis der verrauschten synthetischen Daten erlaubte nicht nur eine formale Überprüfung der Rechenmethoden, sondern auch eine Bewertung unterschiedlicher Testszenarien, in denen Rauschniveau und der Grad der Korrelation des Rauschens variierten. Ohne Rauschen ließe sich der Effekt einer unterschiedlichen Gewichtung der eingehenden Datensätze in den zu untersuchenden Methoden nur bedingt nachweisen, da stets rauschfreie Information einging. Mit Hilfe der verrauschten synthetischen Daten wurde durch den Vergleich mit den exakten synthetischen Zielgrößen das verbleibende Rauschen berechnet und damit wurden die Varianzen der Zielgrößen empirisch ermittelt. Das Testgebiet hatte eine Ausdehnung von  $36.5^\circ < \varphi < 58.5^\circ$  und  $-7.0^\circ < \lambda < 27^\circ$ , die Ergebnisse wurden für den Bereich  $40^\circ < \varphi < 55^\circ$  und  $0^\circ < \lambda < 20^\circ$  analysiert.

Aufgrund der hohen Auflösung des synthetischen Modells konnte gezeigt werden, dass signifikante Unterschiede in der Gewichtung der Verfahren auftreten, wenn die Auflösung der Beobachtungen in Relation zum Spektrum ihres Signalinhaltes zu grob ist und Aliasing-Effekte entstehen. Dies wird im Integrationsverfahren unzureichend modelliert, die Kombinationslösung fiel deswegen bei einer Auflösung der Punktwerte von 30' sogar schlechter

als die GPM-Lösung aus. Aufgrund des diskreten Approximationsansatzes wurde bei Anwendung der Kollokation auch bei grober Punktauflösung eine Verbesserung der GPM-Lösung erreicht. Lag eine ausreichend feine Abtastung der Beobachtungen mit korreliertem Rauschen vor, ergaben sich in Übereinstimmung mit der Theorie keine signifikanten Differenzen zwischen den Lösungen beider Verfahren. Wie bei der statistischen Berechnung der Varianzen traten auch hier größere Unterschiede zwischen den Lösungen der Verfahren in den Szenarien mit unkorreliertem Rauschen auf, bedingt durch die unterschiedliche Modellierung. Vorsicht ist bei der Annahme von unkorreliertem Rauschen in der Kollokation geboten, da die Gewichtung zwischen terrestrischen Daten und GPM kaum noch über das Rauschniveau gesteuert werden kann. Aus den Ergebnissen der zu grob aufgelösten Punktwerte wurde geschlossen, dass im Fall echter Daten die RTM-Reduktion der hohen Signalfrequenzen von entscheidender Bedeutung ist.

Mit Hilfe der synthetischen Daten wurde die Auswirkung der Vernachlässigung der individuellen Punkthöhe der residualen Beobachtungen abgeschätzt. Bei qualitativ hochwertigen terrestrischen Daten (Genauigkeit 1 mgal unkorreliert, Auflösung 6') konnten Verbesserungen der empirischen Standardabweichung von bis zu 60% erreicht werden. Im realitätsnäheren Szenario mit korreliertem Rauschen der terrestrischen Daten fiel die Verbesserung deutlich geringer aus.

Die empirische Bestimmung der Varianz auf Basis der synthetischen Daten zeigte im Fall von 6'-Punktwerten eine Übereinstimmung im Bereich von 0.1 mE mit der statistischen Berechnung der Kollokation. Die empirisch ermittelte Standardabweichung der Ergebnisse aus 30'-Blockmittelwerten mit 1 mgal Rauschen lag bei knapp 2 mE und damit um den Faktor 2 kleiner als der Wert aus der statistischen Berechnung. Durch eine bessere Modellierung der lokalen Kovarianzfunktion der Blockmittelwerte könnte eine zutreffendere Übereinstimmung erreicht werden. Es zeigte sich außerdem, dass sich die Lösungen des Integrationsverfahrens und der Kollokation aus 30'-Blockmittelwerten deutlicher unterscheiden, als die gleichwertige Qualität der einzelnen Lösungen im Vergleich zu den synthetischen Sollwerten erwarten ließ. Dies ist bei der Interpretation der Differenzen zwischen den Lösungen dieser Verfahren aus realen Daten zu beachten. Trotz der hier gezeigten hohen Genauigkeit der Ergebnisse aus 30'-Blockmittelwerten ist für die praktische Verwendung derart grober Auflösungsstufen Vorsicht geboten. Die (synthetischen und realen) Blockmittelwerte basierten auf hochaufgelösten (RTM-reduzierten) Punktwerten ( $< 5'$ ). Größere Auflösungen der eingehenden Punktwerte können die Qualität der Blockmittelwerte verschlechtern, außerdem wächst der Einfluss einzelner Ausreißer auf die Zielgröße.

Das synthetische Erdmodell mit simuliertem Rauschen ermöglichte die Analyse des verbleibenden Rauschens der Zielgrößen im Frequenzraum. Es konnte gezeigt werden, dass innerhalb des Messbandes des GOCE-Gradiometers das Rauschen unterhalb der geforderten  $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  bleibt, wenn das Rauschniveau der terrestrischen Daten etwa 1 mgal (korreliert oder unkorreliert) beträgt. Verbesserungen sind durch die Nutzung der neuesten, u. a. auf GRACE-Daten basierenden, kombinierten GPM zu erwarten, allerdings erfordert der für GOCE relevante hochfrequente Bereich ( $n = 120 \dots 200$ ) weiterhin eine Kombinationslösung mit regionalen terrestrischen Daten, um für die Referenzwerte auch in diesem Spektralbereich die angestrebte Genauigkeit zu erreichen.

Alle Komponenten des Tensors  $T_{[ij]}$  wurden auf Basis realer Daten in einem Testgebiet in Zentral-Europa berechnet. Die realen Schwereanomalien lagen RTM-reduziert vor, als GPM wurde das kombinierte Modell EIGEN-GL04C bis zum sphärisch-harmonischen Grad 360 verwendet. Bei einer Auflösung von 5' betragen die Standardabweichungen der Mittelwerte der Differenzen zwischen der Integrations- und der Kollokationslösung weniger als 0.5 mE, wenn in beiden Fällen die individuelle Punkthöhe vernachlässigt wurde. Die größte Abweichung betrug 1.8 mE. Der Vergleich zwischen den Lösungen aus 30'-Blockmittelwerten ergab in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus synthetischen Daten größere Abweichungen. Die Differenzen der Lösungen mit und ohne Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe der residualen Beobachtungen zeigten in Hochgebirgsregionen signifikante Differenzen ( $> 3 \text{ mE}$ ) bei einer Datenauflösung von 5'. Von der Vernachlässigung der Punkthöhe sind besonders die Tensorkomponenten betroffen, die eine horizontale Ableitung enthalten. Die Berücksichtigung der Punkthöhe wird daher bei feiner Datenauflösung für Hochgebirgsregionen mit großen Höhenänderungen auch bei RTM-reduzierten Daten empfohlen. Im Integrationsverfahren kann dies durch Einführung der von der Topographie abhängigen MOLODENSKII-Korrekturterme realisiert werden, wie es in (Sideris und Schwarz, 1988; Gerlach, 2003, S. 77) im Rahmen der Geoidberechnung gezeigt wurde. Die Berechnungen auf Basis des synthetischen Erdmodells haben sich als hilfreich für die Genauigkeitsanalyse und für die Beurteilung der Ergebnisse auf Basis

der realen Daten erwiesen. Die realitätsnahe Simulation durch Verrauschen der Eingangsdaten hat sich bewährt. Natürlich konnten hier nicht alle in der Realität auftretenden Szenarien möglicher Fehler (z. B. Heck, 1990; Pavlis, 2000) durchgespielt werden, aber der Nutzen eines synthetischen Erdmodells unter Berücksichtigung von Rauschen zur Methodenevaluierung konnte aufgezeigt werden.

Hinsichtlich der Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometermessungen der GOCE-Mission kann zusammengefasst werden, dass auf Grundlage der Kombination aktueller GPM (z. B. EIGEN-CG03C, EIGEN-GL04C) mit RTM-reduzierten terrestrischen Daten die Komponenten des Tensors  $V_{[ij]}$  in der Bahnhöhe von GOCE mit einer Standardabweichung von 1 bis 2 mE berechnet werden können. Die Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe der residualen Beobachtungen wird für Hochgebirgsregionen mit großen Höhenänderungen empfohlen. Die terrestrischen Daten sollten eine Auflösung im Bereich von 5' bis 15' und ein Rauschniveau von etwa 1 mgal aufweisen. Das Rauschen kann unkorreliert, aber auch korreliert vorliegen (Korrelationslänge entsprechend dem Modell (3.54)). Ebenso sollte für die Berechnungspunkte ein Abstand vom Rand des Eingangsdatengebietes von mindestens  $3.5^\circ$  eingehalten werden. Es konnte außerdem auf Basis des synthetischen Erdmodells gezeigt werden, dass die Genauigkeit unter diesen Randbedingungen das innerhalb des Messbandes des GOCE-Gradiometers geforderte Niveau von  $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$  erreicht. Für die spektrale Analyse hinsichtlich des Messbandes muss das Gebiet, in dem die Tensorelemente berechnet werden, eine Ausdehnung von größer  $15^\circ \times 15^\circ$  haben, damit genügend lange Zeitreihenausschnitte ( $> 225 \text{ s}$ ) vorliegen. Die genannten Voraussetzungen sind für terrestrische Daten in Zentral-Europa gegeben.

Im Hinblick auf weitere Entwicklungen und zukünftige Arbeiten wird vorgeschlagen, die in dieser Arbeit realisierten Implementierungen der Berechnungsmethoden in den folgenden Punkten zu verbessern bzw. zu ergänzen: Die Implementierung des Integrationsverfahrens sollte um die MOLODENSKII-Korrekturterme erweitert werden, die Berechnung der Kovarianzwerte in der Kollokation kann durch Interpolation tabellierter Werte beschleunigt werden. Schließlich kann der auftretende Kacheffekt bei der Zusammenführung der Teillösungen der Kollokation durch größere Überlappungsbereiche verringert werden.

Zur Vorbereitung der Evaluierung der GOCE-Daten sollten hinsichtlich einer Analyse im Frequenzraum zukünftig größere Gebiete als das hier verwendete Testgebiet eingesetzt werden, für ausgewählte Bereiche in Europa liegen entsprechende Daten vor. Weitere Kandidaten für Evaluierungsgebiete wären Daten aus Teilen Kanadas, den USA und über den Ozeanen.

Die in dieser Arbeit vorgestellte Kombination eines GPM mit terrestrischen Daten basierte auf den Genauigkeitsangaben der Eingangsdaten, deren Kenntnis vorausgesetzt wurde. Das Abschätzen der Qualität der Eingangsdaten und der tatsächlich vorliegenden Korrelation des Rauschens ist ein sehr wichtiger Aspekt für die optimale Kombination verschiedener Datensätze und bedarf einer gesonderten Untersuchung. Ansätze hierzu finden sich bezüglich der terrestrischen Daten z. B. in (Weber, 1984; Roland, 2005).

Dank der aktuellen Schwerefeldsatellitenmissionen und des Zuwachses qualitativ hochwertiger Daten aus der Altimetrie, der Fluggravimetrie und terrestrischen Messungen sowie der Entwicklungen im Bereich der Auswertetechnik wurden die Genauigkeiten in der Schwerefeldmodellierung in den letzten zehn Jahren weiter verbessert: Die Standardabweichung von Schwereanomalien auf Basis des EIGEN-GL04C ist um 50% kleiner als die Standardabweichung auf Basis des EGM96. Neben der angesprochenen Qualitätsanalyse der verschiedenen Beobachtungen gewinnt deshalb die detaillierte Analyse der Berechnungsverfahren hinsichtlich auftretender Fehler und Vernachlässigungseffekte für die optimale Kombination der verschiedenen Datenquellen zunehmend an Bedeutung.



# Literaturverzeichnis

- Abrikosov, O., Jarecki, F., Müller, J., Petrovic, S. und Schwintzer, P. (2006). The Impact of Temporal Gravity Variations on GOCE Gravity Field Recovery. In J. Flury, R. Rummel, C. Reigber, M. Rothacher, G. Boedecker, und U. Schreiber, (Hrsg.), *Observation of the Earth System from Space*, S. 255–269. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Agren, J. (2004). *Regional Geoid Determination Methods for the Era of Satellite Gravimetry - Numerical Investigations Using Synthetic Earth Gravity Models*. Dissertation, Royal Institute of Technology, Department of Infrastructure, Stockholm. <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kth:diva-55> (15.12.2006).
- Alabert, F. (1987). The Practice of Fast Conditional Simulations through the LU Decomposition of the Covariance Matrix. *Mathematical Geology*, 19(5):369–386.
- Alkhatib, H. und Schuh, W.-D. (2007). Integration of the Monte Carlo Covariance Estimation Strategy into Tailored Solution Procedures for Large-Scale Least Squares Problems. *J Geod*, 81:53–66.
- Allasia, G. (2002). Approximating Potential Integrals by Cardinal Basis Interpolants on Multivariate Scattered Data. *Computers and Mathematics with Applications*, 43(3):275–287.
- Alonso, P., Badía, J. M. und Vidal, A. M. (2005). Solving the Block-Toeplitz Least-Squares Problem in Parallel. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 17:49–67.
- Andersen, O. B., Knudsen, P., Berry, P. A. M. und Kenyon, S. (2006). Marine Gravity from Satellite Altimetry - Ongoing Improvements. In P. Knudsen, J. Johannessen, T. Gruber, S. Stammer, und T. van Dam, (Hrsg.), *Proc GOCINA Workshop*, April, 13-15, 2005, Band 25, Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie, S. 19–23. Luxembourg.
- Arabelos, D. (1980). Untersuchungen zur gravimetrischen Geoidbestimmung, dargestellt am Testgebiet Griechenland. *Wiss Arb Uni Hannover*, Nr. 98, Institut für Erdmessung, Hannover.
- Arabelos, D. und Tscherning, C. C. (1995). Regional Recovery of the Gravity Field from Satellite Gravity Gradiometer and Gravity Vector Data Using Collocation. *JGR*, 100(B11):22009–22015.
- Arabelos, D. und Tscherning, C. C. (1996). Collocation with Finite Covariance Function. In *International Geoid Service Bulletin*, Nr. 5, S. 117–135. International Geoid Service.
- Arabelos, D. und Tscherning, C. C. (1998). Calibration of Satellite Gradiometer Data Aided by Ground Gravity Data. *J Geod*, 72:617–625.
- Arabelos, D. und Tziavos, I. N. (1987). A Comparison of Two Methods to Compute Degree Variances of the Gravity Field. *Man Geod*, 12:223–237.
- Arabelos, D., Tscherning, C. C. und Veichert, M. (2007). External Calibration of GOCE SGG Data with Terrestrial Gravity Data: A Simulation Study. In *Proc Joint IAG/IAPSO/IABO Assembly "Dynamics Planet"*, Cairns, Australia, Aug 22-26, 2005, Band 130, IAG Symposia, S. 337–344. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Baboulin, M. (2006). *Solving Large Dense Linear Least Squares Problems on Parallel Distributed Computers - Application to the Earth's Gravity Field Computation*. Dissertation, Nr. 2331, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, France.
- Baran, I., Kuhn, M., Claessens, S. J., Featherstone, W. E. und Holmes, S. A. (2004). First Results of Australian Synthetic Earth Gravity Field Model (AusSEGM) - a Regional Earth Gravity Field Model. Presented at IAG International Symposium "Gravity, Geoid and Space Missions", Aug. 30 - Sept. 3, 2004 (on CD).
- Baran, I., Kuhn, M., Claessens, S. J., Featherstone, W. E., Holmes, S. A. und Vaníček, P. (2006). A Synthetic Earth Gravity Model Designed Specifically for Testing Regional Gravimetric Geoid Determination Algorithms. *J Geod*, 80:1–16.
- Barzaghi, R. und Sansò, F. (1986). New Results on Convergence Problem in Collocation Theory. In *IAG Proc I Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy*, Roma, Italy, 3-6 June 1985, Vol. 1/2, S. 417–455, Milano.
- Barzaghi, R., Brovelli, M., Denker, H. und Sansò, F. (1993). The European Geoid: a Comparison Between Fast Fourier and Fast Collocation Approaches. *Intern. Geoid Service Bulletin*, 2:66–72.

- Baur, O. und Grafarend, E. W. (2006). High-Performance GOCE Gravity Field Recovery from Gravity Gradient Tensor Invariants and Kinematic Orbit Information. In J. Flury, R. Rummel, C. Reigber, M. Rothacher, G. Boedecker, und U. Schreiber, (Hrsg.), *Observation of the Earth System from Space*, S. 239–253. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Behrend, D. (1999). Untersuchungen zur Schwerefeldbestimmung in den europäischen Randmeeren. *Wiss Arb Uni Hannover*, Nr. 229, Institut für Erdmessung, Hannover.
- Bendat, J. S. und Piersol, A. G. (1986). *Random Data – Analysis and Measurement Procedures*. John Wiley & Sons, New York, 2. Auflage.
- Benner, P., Mehrmann, V., Sima, V., Van Huffel, S. und Varga, A. (1999). SLICOT – A Subroutine Library in Systems and Control Theory. NICONET Technical Report 97-3.
- Blackford, L. S., Choi, J., Cleary, A., D’Azevedo, E., Demmel, J., Dhillon, I., Dongarra, J., Hammarling, S., Henry, G., Petitet, A., Stanley, K., Walker, D. und Whaley, R. C. (1997). *ScalAPACK Users’ Guide*. <http://www.netlib.org/scalapack/slug/index.html> (9.10.2006).
- Bottoni, G. P. und Barzaghi, R. (1993). Fast Collocation. *Bull Géod*, 67:119–126.
- Bouman, J. und Koop, R. (2003a). Calibration of GOCE SGG Data Combining Terrestrial Gravity Data and Global Gravity Field Models. In I. N. Tziavos, (Hrsg.), *Proc IAG International Symposium "Gravity and Geoid"*, Thessaloniki, Greece, Aug 26 - 30, 2002, S. 275–280. Zeta Publ.
- Bouman, J. und Koop, R. (2003b). Geodetic Methods for Calibration of GRACE and GOCE. In G. Beutler, M. R. Drinkwater, R. Rummel, und R. Steiger von, (Hrsg.), *Earth Gravity Field from Space - From Sensors to Earth Sciences*, Band 17, Space Science Series of ISSI, S. 293–303. International Space Science Institute (ISSI).
- Bouman, J. und Koop, R. (2004). Gravity Gradients and Spherical Harmonics - a Need for Different GOCE Products? In *Proc Second International GOCE User Workshop, "GOCE, The Geoid and Oceanography"*, March, 8-10, 2004, Frascati, Italy. (on CD).
- Bouman, J., Koop, R., Tscherning, C. C. und Visser, P. N. A. M. (2004). Calibration of GOCE SGG Data using High-low SST, Terrestrial Gravity Data and Global Gravity Field Models. *J Geod*, 78:124–137.
- Bouman, J., Koop, R., Haagmans, R., Müller, J., Sneeuw, N., Tscherning, C. C. und Visser, P. N. A. M. (2005). Calibration and Validation of GOCE Gravity Gradients. In F. Sansò, (Hrsg.), *A Window on the Future of Geodesy*, Proc 36th IAG General Assembly, 23rd IUGG General Assembly, Sapporo, Japan, 2003, Band 128, IAG Symposia, S. 265–270. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Brand, G. (2006). Persönliche Kommunikation, Regionales Rechenzentrum Niedersachsen, Hannover, Feb 2006.
- Brigham, E. O. (1988). *The Fast Fourier Transform and its Application*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K., Hackbusch, W., Schwarz, H. R. und Zeidler, E. (1996). *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- Bursa, M., Kenyon, S., Kouba, J., Sima, Z., Vatrt, V. und Vojtiskova, M. (2004). A Global Vertical Reference Frame Based on Four Regional Vertical Datums. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 48:493–502.
- Claessens, S. J. (2002). A Synthetic Earth Model. Diplomarbeit, Delft University of Technology, Department of Physical, Geometrical and Space Geodesy, Delft, The Netherlands.
- Colombo, O. L. (1979). Optimal Estimation From Data Regularly Sampled on a Sphere with Applications in Geodesy. *OSU Rep* 291.
- Davis, M. W. (1987a). Generating Large Stochastic Simulations – The Matrix Polynomial Approximation Method. *Mathematical Geology*, 19(2):99–107.
- Davis, M. W. (1987b). Production of Conditional Simulations via the LU Triangular Decomposition of the Covariance Matrix. *Mathematical Geology*, 19(2):91–98.
- de Min, E. (1995). A Comparison of Stokes’ Numerical Integration and Collocation, and a New Combination Technique. *Bull Géod*, 69:223–232.
- de Min, E. (1996). *De Geoide voor Nederland*. Dissertation, Technische Universiteit Delft, The Netherlands.
- Denker, H. (1988). Hochauflösende regionale Schwerefeldbestimmung mit gravimetrischen und topographischen Daten. *Wiss Arb Uni Hannover*, Nr. 156, Institut für Erdmessung, Hannover.

- Denker, H. (1989). A New Gravimetric Quasigeoid for the Federal Republic of Germany. Reihe B 291, DGK, München.
- Denker, H. (1998). Evaluation and Improvement of the EGG97 Quasigeoid Model for Europe by GPS and Leveling Data. In Reports of the Finnish Geodetic Institute, Proc Second Continental Workshop on the Geoid in Europe, Budapest, Hungary, March 10-14, 1998, Band 98, S. 53-61. Masala, Finland.
- Denker, H. (2003). Computation of Gravity Gradients Over Europe For Calibration/Validation of GOCE Data. In I. N. Tziavos, (Hrsg.), Proc IAG International Symposium "Gravity and Geoid", Thessaloniki, Greece, Aug 26 - 30, 2002, S. 287-292. Zeta Publ.
- Denker, H. (2005). Evaluation of SRTM3 and GTOPO30 Terrain Data in Germany. In C. Jekeli, L. Bastos, und J. Fernandes, (Hrsg.), Proc IAG International Symposium "Gravity, Geoid and Space Missions", Porto, Portugal, Aug. 30 - Sept. 3, 2004, Band 129, IAG Symposia, S. 218-223. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Denker, H. (2006). Das Europäische Schwere- und Geoidprojekt (EGGP) der Internationalen Assoziation für Geodäsie. *ZfV*, 131(6):335-344.
- Denker, H. und Torge, W. (1998). The European Gravimetric Quasigeoid EGG97 - An IAG Supported Continental Enterprise. In R. Forsberg, M. Feissel, und R. Dietrich, (Hrsg.), Proc IAG Scientific Assembly "Geodesy on the Move - Gravity Geoid, Geodynamics, and Antarctica", Rio de Janeiro, Brazil, Sept. 3-9, 1997, Band 119, IAG Symposia, S. 249-254. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Denker, H. und Tziavos, I. N. (1999). Investigation of the Molodenskii Series Terms for Terrain Reduced Gravity Field Data. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 40(3-4):195-203.
- Denker, H., Behrend, D. und Torge, W. (1997). The European Gravimetric Quasigeoid EGG96. In J. Segawa, H. Fujimoto, und S. Okubo, (Hrsg.), Proc International Symposium "Gravity, Geoid and Marine Geodesy", Tokyo, Japan, Sept. 30 - Okt. 5 1996, Band 117, IAG Symposia, S. 532-539. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Denker, H., Barriot, J.-P., Barzaghi, R., Forsberg, R., Ihde, J., Kenyeres, A., Marti, U. und Tziavos, I. N. (2006). The European Gravity and Geoid Project EGGP. In Proc IAG First International Symposium of the International Gravity Field Service, 28. Aug - 1. Sept 2006, Istanbul, Turkey. (submitted).
- Despotakis, V. K. (1987). Geoid Undulation Computations at Laser Tracking Stations. OSU Rep 383.
- Dietrich, C. R. (1993). Computationally Efficient Generation of Gaussian Conditional Simulations over Regular Sample Grids. *Mathematical Geology*, 25(4):439-451.
- Ditmar, P. und Klees, R. (2002). A Method to Compute the Earth's Gravity Field from SGG / SST Data to be Acquired by the GOCE Satellite. Technical Report, Delft University, The Netherlands.
- DLR (2000). Shuttle Radar Topography Mission (SRTM). Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR). <http://www.dlr.de/srtm/mission/mission.htm> (23.6.2006).
- Dongarra, J. J., Duff, I. S., Sorensen, D. C. und van der Vorst, H. A. (1998). Numerical Linear Algebra for High-Performance Computers. SIAM, Philadelphia.
- Drinkwater, M. und Kern, M. (2006). Calibration and Validation Plan for L1b Data Products. Technical Report EOP-SM/1363/MD-md, ESA ESTEC, Noordwijk, The Netherlands. [http://www.esa.int/esaLP/ESAJL1VMOC\\_LPgoce\\_0.html](http://www.esa.int/esaLP/ESAJL1VMOC_LPgoce_0.html)
- Dziewonski, A. M. und Anderson, D. L. (1981). Preliminary Reference Earth Model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25:297-356.
- Ecker, E. und Mittermayer, E. (1969). Gravity Corrections for the Influence of the Atmosphere. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, XI(41-42):70-80.
- Ellmann, A. (2005). Computation of Three Stochastic Modifications of Stokes' s Formula for Regional Geoid Determination. *Computers and Geosciences*, 31(1-2):742-755.
- Eren, K. (1980). Spectral Analysis of GEOS-3 Altimeter Data and Frequency Domain Collocation. OSU Rep 297.
- Eren, K. (1982). Toeplitz Matrices and Frequency Domain Collocation. *Man Geod*, 7:85-116.
- ESA (1999). The Four Candidate Earth Explorer Core Missions - Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer Mission. Technical Report SP-1233(1), Earth Sciences Division, Earth Observation Preparatory Programme, Noordwijk, The Netherlands.

- Evans, J. D. und Featherstone, W. E. (2000). Improved Convergence Rates for the Truncation Error in Gravimetric Geoid Determination. *J Geod*, 74:239–248.
- Featherstone, W. E. (1999). Tests of Two Forms of Stokes's Integral Using a Synthetic Gravity Field Based on Spherical Harmonics. In F. Krumm und V. S. Schwarze, (Hrsg.), *Quo Vadis Geodesia - Festschrift für E. W. Grafarend*, Nr. 1999.6, S. 101–111. Schriftenreihe der Institute des Studienganges Geodäsie und Geoinformatik, Universität Stuttgart.
- Featherstone, W. E. (2001). Report of IAG Special Study Group 3.177 "Synthetic Modelling of the Earth's Gravity Field" (1999–2001). <http://www.cage.curtin.edu.au/~will/iagssg3177.html> (17.6.2005).
- Featherstone, W. E. (2003). Software for Computing Five Existing Types of Deterministically Modified Integration Kernel for Gravimetric Geoid Determination. *Computers & Geosciences*, (29):183–193.
- Featherstone, W. E., Kirby, J. F., Kearsley, A. H. W., Gilliland, J. R., Johnston, G. M., Steed, J., Forsberg, R. und Sideris, M. G. (2001). The AUS-Geoid98 Geoid Model of Australia: Data Treatment, Computations and Comparisons with GPS-Levelling Data. *J Geod*, 75:313–330.
- Fenton, G. A. (1994). Error Evaluation of Three Random Field Generators. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 120(12):2487–2497.
- Forsberg, R. (1984). Local Covariance Functions and Density Distributions. OSU Rep 356.
- Forsberg, R. (1985). Gravity Field Terrain Effect Computation by FFT. *Bull Géod*, 59:342–360.
- Forsberg, R. (1986). Spectral Properties of the Gravity Field in the Nordic Countries. In *Proc International Symposium on the Definition of the Geoid*, S. 295–324, Florenz, Italy.
- Forsberg, R. und Featherstone, W. E. (1998). Geoids and Cap Sizes. In R. Forsberg, M. Feissel, und R. Dietrich, (Hrsg.), *Proc IAG Scientific Assembly "Geodesy on the Move - Gravity Geoid, Geodynamics, and Antarctica"*, Rio de Janeiro, Brazil, Sept. 3–9, 1997, Band 119, IAG Symposia, S. 194–200. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Forsberg, R. und Sideris, M. G. (1989). On Topographic Effects in Gravity Field Approximation. In E. Keilso, K. Poder, und C. C. Tscherning, (Hrsg.), *Festschrift to Torben Krarup*, Band 58, S. 129–148. Geodaetisk Institut, Kopenhagen, Denmark.
- Forsberg, R. und Sideris, M. G. (1993). Geoid Computation by the Multi-Band Spherical FFT Approach. *Man Geod*, 18:82–90.
- Forsberg, R. und Tscherning, C. C. (1981). The Use of Height Data in Gravity Field Approximation by Collocation. *JGR*, 86(B9):7843–7854.
- Förste, C., Flechtner, F., Schmidt, R., Meyer, U., Stubenvoll, R., Barthelmes, F., König, R., Neumayer, K.-H., Rothacher, M., Reigber, C., Biancale, R., Bruinsma, S., Lemoine, J.-M. und Raimondo, J. C. (2005). A New High Resolution Global Gravity Field Model Derived from Combination of GRACE and CHAMP Mission and Altimetry / Gravimetry Surface Gravity Data. Poster presented at European Geosciences Union, General Assembly 2005, Vienna, Austria, 24–29 April 2005. [http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/results/grav/g004\\_eigen-cg03c.html](http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/results/grav/g004_eigen-cg03c.html) (25.10.2006).
- Förste, C., Flechtner, F., Schmidt, R., Stubenvoll, R., Biancale, R. und Lemoine, J.-M. (2006). Global Gravity Field Models from Combination of Satellite Mission and Altimetry/Gravimetry Surface Data. Presented at the IAG First International Symposium of the International Gravity Field Service, 28. Aug - 1. Sept 2006, Istanbul, Turkey.
- Forsythe, G. E., Malcolm, M. A. und Moler, C. B. (1977). *Computer Methods for Mathematical Computations*. Automatic Computation. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Freeden, W., Gervens, T. und Schreiner, M. (1994). Tensor Spherical Harmonics and Tensor Spherical Splines. *Man Geod*, 19(2):70–100.
- Friedrich, H. und Lange, C. (1999). *Stochastische Prozesse in Natur und Technik: Modellierung, Simulation, Zuverlässigkeit*. Harri Deutsch, Frankfurt am Main.
- Gallivan, K. A., Thirumalai, S., Van Dooren, P. und Vermaut, V. (1996). High Performance Algorithms for Toeplitz and Block Toeplitz Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 241/243(1–3):343–388.
- Gerlach, C. (2003). *Zur Höhensystemumstellung und Geoidberechnung in Bayern*. DGK, Reihe C, Nr. 571, Technische Universität München, München.
- Gerlach, C., Sneeuw, N., Visser, P. N. A. M. und Svehla, D. (2003). CHAMP Gravity Field Recovery Using the Energy Balance Approach. *Advances in Geosciences*, 1:73–80.

- GFZ (2006a). Combined Gravity Field Model EIGEN-GL04C. [http://www.gfz-potsdam.de/GRACE/results/grav/g005\\_eigen-gl04c.html](http://www.gfz-potsdam.de/GRACE/results/grav/g005_eigen-gl04c.html) (25.10.2006).
- GFZ (2006b). Earth Gravity Field Mission CHAMP. [http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/index\\_CHAMP.html](http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/index_CHAMP.html) (24.4.2006).
- Gitlein, O. und Timmen, L. (2007). Atmospheric Mass Flow Reduction for Terrestrial Absolute Gravimetry in the Fennoscandian Land Uplift Network. In Proc Joint IAG/IAPSO/IABO Assembly "Dynamics Planet", Cairns, Australia, Aug 22-26, 2005, Band 130, IAG Symposia, S. 461–466. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Gitlein, O., Denker, H. und Müller, J. (2005). Local Geoid Computation by the Spectral Combination Method. In C. Jekeli, L. Bastos, und J. Fernandes, (Hrsg.), Proc IAG International Symposium "Gravity, Geoid and Space Missions", Porto, Portugal, Aug. 30 - Sept. 3, 2004, Band 129, IAG Symposia, S. 179–184. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Golub, G. H. und van Loan, C. F. (1990). Matrix Computations. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, USA, 2. Auflage.
- Grote, T. (1996). Regionale Quasigeoidmodellierung aus heterogenen Daten mit "cm"-Genauigkeit. Wiss Arb Uni Hannover, Nr. 212, Institut für Erdmessung, Hannover.
- Haagmans, R. (2000). A Synthetic Earth for Use in Geodesy. *J Geod*, 74:503–511.
- Haagmans, R., de Min, E. und van Gelderen, M. (1993). Fast Evaluation of Convolution Integrals on the Sphere Using 1D FFT, and a Comparison with Existing Methods for Stokes' Integral. *Man Geod*, 18:227–241.
- Haagmans, R., Prijatna, K. und Omang, O. D. (2003). An Alternative Concept for Validation of GOCE Gradiometry Results Based on Regional Gravity. In I. N. Tziavos und M. Vermeer, (Hrsg.), Proc IAG International Symposium "Gravity and Geoid", Thessaloniki, Greece, Aug 26 - 30, 2002, S. 281–286. Zeta Publ.
- Haagmans, R. H. N. und van Gelderen, M. (1991). Error Variances-Covariances of GEM-T1: Their Characteristics and Implications in Geoid Computation. *JGR*, 96(B12):20 011–20 022.
- Hänsler, E. (2001). Statistische Signale - Grundlagen und Anwendungen. Springer, Berlin Heidelberg New York, 3. Auflage.
- Heck, B. (1979). Zur lokalen Geoidbestimmung aus terrestrischen Messungen vertikaler Schweregradienten. DGK, Reihe C, Nr. 259, Universität Karlsruhe, München.
- Heck, B. (1987). Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Heck, B. (1990). An Evaluation of Some Systematic Error Sources Affecting Terrestrial Gravity Anomalies. *Bull Géod*, 64:88–108.
- Heck, B. (2004). Problems in the Definition of Vertical Reference Frames. In F. Sansò, (Hrsg.), V Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, June, 17-21, 2002, Matera, Italy, Band 127, IAG Symposia, S. 164–173. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Heck, B. und Grüninger, W. (1983). Zur Genauigkeit gravimetrisch bestimmter absoluter und relativer Geoidhöhen. Reihe A 97, DGK, München.
- Heck, B. und Grüninger, W. (1987). Modification of Stokes' Integral Formula by Combining two Classical Approaches. In Advances in Gravity Field Modelling, Proceedings XIX General Assembly, IAG Symposia, Vancouver, Canada, August 10-22, 1987, S. 319–337.
- Heck, B. und Rummel, R. (1990). Strategies for Solving the Vertical Datum Problem Using Terrestrial and Satellite Geodetic Data. In H. Sünkel und T. Baker, (Hrsg.), Proc IAG International Symposium "Sea Surface Topography and the Geoid", Edinburgh, Scotland, Aug. 10-11, 1989, Band 104, IAG Symposia, S. 116–128. Springer, New York, USA.
- Heck, B. und Seitz, K. (2003). Solutions of the Linearized Geodetic Boundary Value Problem for an Ellipsoidal Boundary to Order  $e^3$ . *J Geod*, 77:182–192.
- Heck, B. und Seitz, K. (2007). A Comparison of the Tesseroid, Prism and Point-Mass Approaches for Mass Reductions in Gravity Field Modelling. *J Geod*, 81(2):121–136.
- Heiskanen, W. A. und Moritz, H. (1967). Physical Geodesy. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1. Auflage.
- Heuser, H. (2006). Funktionalanalysis - Theorie und Anwendung. Teubner Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 4. Auflage.
- Heuser, H. und Wolf, H. (1986). Algebra, Funktionalanalysis und Codierung. Teubner, Stuttgart.

- Higgins, M. B., Forsberg, R. und Kearsley, A. H. W. (1998). The Effect of Varying Cap Sizes on Geoid Computations Experiences with FFT and Ring Integration. In R. Forsberg, M. Feissel, und R. Dietrich, (Hrsg.), Proc IAG Scientific Assembly "Geodesy on the Move - Gravity Geoid, Geodynamics, and Antarctica", Rio de Janeiro, Brazil, Sept. 3-9, 1997, Band 119, IAG Symposia, S. 201–206. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- HLRN (2003). Norddeutscher Verbund für Hoch- und Höchstleistungsrechnen (HLRN). [www.hlrn.de](http://www.hlrn.de) (13.10.2006).
- Iz, H. B. und Chan, J. (1991). The Influence of Zones Outside of a Cap on the Radial Component of the Gravitational Tensor as Measured by Spaceborne Gradiometer. *Man Geod*, 16:54–62.
- Jarecki, F., Wolf, K. I., Denker, H. und Müller, J. (2006a). Quality Assessment of GOCE Gradients. In J. Flury, R. Rummel, C. Reigber, M. Rothacher, G. Boedecker, und U. Schreiber, (Hrsg.), *Observation of the Earth System from Space*, S. 271–285. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Jarecki, F., Wolf, K. I., Biskupek, L., Haupt, M. und Kneschke, M. (2006b). Reference Gravity Gradients from Geoid Data for GOCE Validation. In presented at IAG First International Symposium of the International Gravity Field Service, 28. Aug - 1. Sept 2006, Istanbul, Turkey. Presented at IAG First International Symposium of the International Gravity Field Service, 28. Aug - 1. Sept 2006, Istanbul, Turkey.
- Jekeli, C. (1978). An Investigation of Two Models for the Degree Variances of Global Covariance Functions. OSU Rep 275.
- Jekeli, C. (1980). Reducing the Error of Geoid Undulation Computations by Modifying Stokes' Function. OSU Rep 301.
- Jekeli, C. (1981a). Alternativ Methods to Smooth the Earth's Gravity Field. OSU Rep 327.
- Jekeli, C. (1981b). Modifying Stokes' Function to Reduce the Error of Geoid Undulation Computations. *JGR*, 86(B8):6985–6990.
- Jekeli, C. (1991). The Statistics of the Earth's Gravity Field, revisited. *Man Geod*, 16:313–325.
- Jekeli, C. und Zhu, L. (2006). Comparison of Methods to Model the Gravitational Gradients From Topographic Data Bases. *Geophysical Journal International*, 166:999–1014.
- Journal, A. G. und Huijbregts, C. J. (1978). *Mining Geostatistics*. Academic Press, London - New York - San Francisco.
- Kashyap, R. L. (1984). Characterization and Estimation of Two-Dimensional ARMA Models. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-30(5):736–745.
- Katsambalos, K. E. (1981). Simulation Studies on the Computation of the Gravity Vector in Space From Surface Data Considering the Topography of the Earth. OSU Rep 314.
- Kaula, W. M. (1966). *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts.
- Keller, W. (1978). Zum Konvergenzverhalten der Kollokationsverfahren. *Vermessungstechnik*, 26(12):420–422.
- Kenyon, S., Factor, J., Pavlis, N., Saleh, J. und Holmes, S. (2005). Towards the Next Earth Gravitational Model to Degree 2160: Status and Progress. Presented at Joint IAG/IAPSO/IABO Assembly "Dynamics Planet", August, 22-26, 2005, Cairns, Australia. <http://wwwx.cs.unc.edu/Research/compgeom/twiki/pub/TModeling/GravityMeetingSept05/EGM06-IAGCairnsFinal-sm.ppt> (25.10.2006).
- Kern, M. und Haagmans, R. (2005). Determination of Gravity Gradients from the Terrestrial Gravity Data for Calibration and Validation of Gradiometric GOCE data. In C. Jekeli, L. Bastos, und J. Fernandes, (Hrsg.), Proc IAG International Symposium "Gravity, Geoid and Space Missions", Porto, Portugal, Aug. 30 - Sept. 3, 2004, Band 129, IAG Symposia, S. 95–100. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Kern, M., Preimesberger, T., Allesch, M., Pail, R., Bouman, J. und Koop, R. (2005). Outlier Detection Algorithms and their Performance in GOCE Gravity Field Processing. *J Geod*, 78:509–519.
- Kieler, B. (2006). Zur Berechnung von Schwerefeldfunktionalen aus regionalen Schweredaten mit Hilfe von Integralformeln. Diplomarbeit, Institut für Erdmessung, Universität Hannover. (unveröffentlicht).
- Knudsen, P. (1987). Estimation and Modelling of the Local Empirical Covariance Function Using Gravity and Satellite Altimeter Data. *Bull Géod*, 61(2):145–160.
- Knuth, D. E. (1969). *Seminumerical Algorithms: The Art of Computer Programming*, Band 2,

- Computer Science and Information Processing. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- Koop, R., Visser, P. N. A. M. und Tscherning, C. C. (2001a). Aspects of GOCE Calibration. In Proc First International GOCE User Workshop, Noordwijk, Netherlands, 23-24 April 2001, S. 51–56, Noordwijk, The Netherlands. ESA/ESTEC.
- Koop, R., Bouman, J., Schrama, E. J. O. und Visser, P. N. A. M. (2001b). Calibration and Error Assessment of GOCE Data. In Ádám und Schwarz, (Hrsg.), *Vistas for Geodesy in the New Millennium*, Band 125, IAG Symposia, S. 167–174. Budapest.
- Krarup, T. (1969). A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy. Technical Report 44, Geodaetisk Institut, Kopenhagen, Denmark.
- Krarup, T. (1981). A Convergence Problem in Collocation Theory. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, S. 225–240. (auch in Proc VII Symposium on Mathematical Geodesy, IV Hotine Symposium, Assisi, Italien, 8.-11.Juni 1978, pp. 263-278).
- Krarup, T. und Tscherning, C. C. (1984). Evaluation of Isotropic Covariance Functions of Torsion Balance Observations. *Bull Géod*, 58:180–192.
- Kreitlow, S. (2004). Untersuchung von Kovarianzfunktionen von Erdschwerefeldfunktionalen im Hinblick auf die Satellitengradiometriemission GOCE. Diplomarbeit, Institut für Erdmessung, Universität Hannover. (unveröffentlicht).
- Kuhn, M. und Tsoulis, D. (2006). International Association of Geodesy Study Group 2.2., Forward Gravity Modelling Using Global Databases. [http://users.ath.gr/~tsoulis/IAG\\_SG2.2/](http://users.ath.gr/~tsoulis/IAG_SG2.2/) (17.8.2006).
- Lauritzen, S. L. (1973). The Probabilistic Background of some Statistical Methods in Physical Geodesy. Technical Report 48, Geodaetisk Institut, Kopenhagen, Denmark.
- Le Ravalec, M., Noetinger, B. und Hu, L. H. (2000). The FFT Moving Average (FFT-MA) Generator: An Efficient Numerical Method for Generating and Conditioning Gaussian Simulation. *Mathematical Geology*, 32(6):701–723.
- Lemoine, F. G., Kenyon, S. C., Factor, J. K., Trimmer, R. G., Pavlis, N. K., Chinn, D. S., Cox, C. M., Klosko, S. M., Luthcke, S. B., Torrence, M. H., Wang, Y. M., Williamson, R. G., Pavlis, E. C., Rapp, R. H. und Olson, T. R. (1998). The Development of the Joint NASA GSFC and NIMA Geopotential Model EGM96, NASA/TP-1998-206861. Technical Report, NASA, Greenbelt, Maryland.
- Mayer-Gürr, T. (2006). Gravitationsfeldbestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE. Dissertation, Universität Bonn. [http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss\\_online/landw\\_fak/2006/mayer-guerr\\_torsten/](http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online/landw_fak/2006/mayer-guerr_torsten/)
- Meier, S. und Keller, W. (1990). *Geostatistik - Einführung in die Theorie der Zufallsprozesse*. Springer, Wien - New York.
- Meissl, P. (1971a). A Study of Covariance Functions Related to the Earth's Disturbing Potential. OSU Rep 151.
- Meissl, P. (1971b). Preparations for the Numerical Evaluation of Second Order Molodenskii-type Formulas. OSU Rep 163.
- Meissl, P. (1975). Elements of Functional Analysis. In B. Brosowski und E. Martensen, (Hrsg.), *Mathematical Geodesy*, Band 12, Methoden und Verfahren der mathematischen Physik, S. 19–78. B. I. - Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien Zürich.
- Meschkowski, H. (1962). *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion*, Band 113, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin Göttingen Heidelberg.
- Mignolet, M. P. und Spanos, P. D. (1992). Simulation of Homogeneous Two-Dimensional Random Fields: Part I - AR and ARMA Models. *Journal of Applied Mechanics*, 59:260–269.
- Molodenskii, M. S., Eremeev, V. F. und Yurkina, M. I. (1962). *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem. Übersetzung aus dem Russischen, Metod Izucheniya vneshnego gravitatsionnogo polya i figury zemli, 1960.
- Moreaux, G. (2001). Some Preconditioners for Harmonic Spherical Spline Problems. *Inverse Problems*, 17:157–177.
- Moreaux, G., Tscherning, C. C. und Sansò, F. (1999). Approximation of Harmonic Covariance Functions on the Sphere by Non-Harmonic Locally Supported Functions. *J Geod*, 73:555–567.
- Moritz, H. (1962). Interpolation and Prediction of Gravity and Their Accuracy. OSU Rep 24.
- Moritz, H. (1970). Least-Squares Estimation in Physical Geodesy. OSU Rep 130.

- Moritz, H. (1971). Kinematical Geodesy II. OSU Rep 165.
- Moritz, H. (1973). Least-Squares Collocation. Reihe A 75, DGK, München.
- Moritz, H. (1976). Integral Formulas and Collocation. *Man Geod*, 1:1–40.
- Moritz, H. (1978). Statistical Foundations of Collocation. OSU Rep 272.
- Moritz, H. (1980). Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Moritz, H. (2000). Geodetic Reference System 1980. *J Geod*, 74:128–133.
- Moritz, H. und Sansò, F. (1981). A Dialogue on Collocation. In Proc VII Symposium on Mathematical Geodesy (IV Hotine Symposium), 8-10 Juni 1978, S. 83–85, Firenze, Italy. Commissione Geodetica Italiana.
- Müller, J. (2001). Die Satellitengradiometriemission GOCE. Reihe C 541, DGK, München.
- Müller, J. (2003). GOCE Gradients in Various Reference Frames and Their Accuracies. *Advances in Geosciences*, 1:33–38.
- Müller, J., Jarecki, F. und Wolf, K. I. (2003). External Calibration and Validation of GOCE Gradients. In I. N. Tziavos, (Hrsg.), Proc IAG International Symposium "Gravity and Geoid", Thessaloniki, Greece, Aug 26 - 30, 2002, S. 268–274. Zeta Publ.
- Müller, J., Denker, H., Jarecki, F. und Wolf, K. I. (2004). Computation of Calibration Gradients and Methods for In-orbit Validation of Gradiometric GOCE Data. In Proc Second International GOCE User Workshop, "GOCE, The Geoid and Oceanography", March, 8-10, 2004, Frascati, Italy. ESA-ESRIN (SP-569). (on CD).
- Nagy, D., Papp, G. und Benedek, J. (2000). The Gravitational Potential and its Derivatives for the Prism. *J Geod*, 74:552–560.
- Neyman, Y. M., Li, J. und Liu, Q. (1996). Modification of Stokes and Vening-Meinesz Formulas for the Inner Zone of Arbitrary Shape by Minimization of Upper Bound Truncation Errors. *J Geod*, 70:410–418.
- NGDC (1988). ETOPO5 - Data Announcement 88-MG-02, Digital Relief of the Surface of the Earth. National Geophysical Data Center, Boulder, Colorado. <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/etopo5.html> (24.4.2006).
- Novák, P., Vaníček, P., Véronneau, M., Holmes, S. und Featherstone, W. (2001). On the accuracy of Modified Stokes's Integration in High-Frequency Gravimetric Geoid Determination. *J Geod*, 74:644–654.
- Oberndorfer, H., Dorobantu, R., Gerlach, C., Müller, J., Rummel, R., Sneeuw, N., Koop, R., Visser, P. N. A. M., Hoyng, P., Selig, A. und Smit, M. (1999). GOCE Sensor Combination and Error Analysis. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 40(3-4):303–307.
- Omang, O. C. D. und Forsberg, R. (2002). The Northern European Geoid: a Case Study on Long-wavelength Geoid Errors. *J Geod*, 76:369–380.
- Otero, J. und Auz, A. (2004). A Formal Comparison Between Marych-Moritz's Series, Sansò's Change of Boundary Method and a Variational Approach for Solving Some Linear Geodetic Boundary Value Problems. In F. Sansò, (Hrsg.), V Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, June, 17-21, 2002, Matera, Italy, Band 127, IAG Symposia, S. 226–233. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Pail, R. (1999). Synthetic Global Gravity Model for Planetary Bodies and Applications in Satellite Gravity Gradiometry. Dissertation, Technische Universität Graz, Austria.
- Pail, R. (2002). In-orbit Calibration and Local Gravity Field Continuation Problem. In From Eötvös to Milligal+ Final Report, Contract 14287/00/NL/GD, S. 9–112. ESA/ESTEC, Noordwijk, The Netherlands.
- Pail, R. (2003a). GOCE Data Archiving and Processing Center (DAPC) Graz, Phase Ia Phase, Final Report. Technical Report, Technische Universität Graz, Graz, Austria. <http://www.inas.tugraz.at/forschung/DAPC/projectIa.html> (14.6.2006).
- Pail, R. (2003b). Impact of the Dismission of the Micro-Propulsion System on the GOCE Gravity Field Solution Applying QL-GFA. Technical Note, Technische Universität Graz.
- Pail, R. (2003c). Local Gravity Field Continuation for the Purpose of In-Orbit Calibration of GOCE SGG Observations. *Advances in Geosciences*, 1:11–18.
- Pail, R. (2004). GOCE Data Archiving and Processing Center (DAPC) Graz, Austrian Space Application Programme, Bridging Phase, Final Report. Technical Report, Technische Universität Graz, Graz, Austria. <http://www.inas.tugraz.at/forschung/DAPC/projectIb.html> (14.6.2006).

- Pail, R., Schuh, W.-D. und Wermuth, M. (2005). GOCE Gravity Field Processing. In C. Jekeli, L. Bastos, und J. Fernandes, (Hrsg.), Proc IAG International Symposium "Gravity, Geoid and Space Missions", Porto, Portugal, Aug. 30 - Sept. 3, 2004, Band 129, IAG Symposia, S. 36–41. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Papoulis, A. (1977). Signal Analysis. McGraw-Hill, New York, USA.
- Papoulis, A. und Pillai, S. U. (2002). Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. McGraw-Hill, New York, 4. Auflage.
- Papp, G. und Benedek, J. (2000). Numerical Modeling of Gravitational Field Lines - the Effect of Mass Attraction on Horizontal Coordinates. *J Geod*, 73:648–659.
- Paul, M. K. (1973). A Method of Evaluating the Truncation Error Coefficients for Geoidal Height. *Bull Géod*, 110:413–425.
- Pavlis, N. K. (2000). On the Modeling of Long Wavelength Systematic Errors in Surface Gravimetric Data. In K.-P. Schwarz, (Hrsg.), *Geodesy Beyond 2000 - The Challenges of the First Decade*, Band 121, IAG Symposia, S. 131–136. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Pavlis, N. K. und Saleh, J. (2005). Error Propagation with Geographic Specificity for Very High Degree Geopotential Models. In Proc IAG International Symposium "Gravity, Geoid and Space Missions", Porto, Portugal, Aug. 30 - Sept. 3, 2004, Band 129, IAG Symposia, S. 149–154. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., Schmidt, D. und Trimmer, R. (2005). A Preliminary Gravitational Model to Degree 2160. In Proc IAG International Symposium "Gravity, Geoid and Space Missions", Porto, Portugal, Aug. 30 - Sept. 3, 2004, Band 129, IAG Symposia, S. 18–23. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Pelzer, H. (1985). Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung: Grundlagen der mathematischen Statistik und der Ausgleichsrechnung, Band 13, Vermessungswesen bei Konrad Wittwer, Kapitel 1, S. 3–120. Konrad Wittwer, Stuttgart.
- Peng, M., Li, Y. C. und Sideris, M. G. (1995). First Results on the Computation of Terrain Corrections by the 3D FFT Method. *Man Geod*, 20:475–488.
- Petrovskaya, M. S. und Vershkov, A. N. (2006). Non-singular Expressions for the Gravity Gradients in the Local North-Oriented and Orbital Reference Frames. *J Geod*, 80:117–127.
- Preimesberger, T. und Pail, R. (2005). Detectability of Systematic Effects in GOCE Gradiometer Measurements. In Proc IAG International Symposium "Gravity, Geoid and Space Missions", Porto, Portugal, Aug. 30 - Sept. 3, 2004. (on CD).
- Rabus, B., Eineder, M., Roth, A. und Bamler, R. (2003). The Shuttle Radar Topography Mission - A new Class of Digital Elevation Models Acquired by Spaceborne Radar. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 57:241–262.
- Rapp, R. H. (1979). Potential Coefficient and Anomaly Degree Variance Modelling Revisited. OSU Rep 293.
- Rapp, R. H. und Agajelu, S. I. (1975). Comparison of Upward Continued Anomalies Computed by the Poisson Integral and by Collocation. OSU Rep 227.
- Rapp, R. H. und Rummel, R. (1975). Methods for the Computation of Detailed Geoids and their Accuracy. OSU Rep 233.
- Rapp, R. H., Wang, Y. M. und Pavlis, N. K. (1991). The Ohio State 1991 Geopotential and Sea Surface Topography Harmonic Coefficient Models. OSU Rep 410.
- Reed, G. B. (1973). Application of Kinematical Geodesy for Determining the Short Wave Length Components of the Gravity Field by Satellite Gradiometry. OSU Rep 201.
- Reigber, C., Balmino, G., Schwintzer, P., Biancale, R., Bode, A. Lemoine, J.-M., König, R., Loyer, S., Neumayer, H., Marty, J.-C., Barthelmes, F., Perosanz, F. und Zhu, S. Y. (2003a). Global Gravity Field Recovery Using Solely GPS Tracking and Accelerometer Data from CHAMP. *Space Science Reviews*, 108:55–66.
- Reigber, C., Balmino, G., Schwintzer, P., Biancale, R., Bode, A. Lemoine, J.-M., König, R., Loyer, S., Neumayer, H., Marty, J.-C., Barthelmes, F., Perosanz, F. und Zhu, S. Y. (2003b). New Global Gravity Field Models from Selected CHAMP Data Sets. In C. Reigber, H. Lühr, und P. Schwintzer, (Hrsg.), *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*, S. 120–127. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Reigber, C., Schmidt, R., Flechtner, F., König, R., Meyer, U., Neumayer, K.-H., Schwintzer, P. und Zhu, S. Y. (2005). An Earth Gravity Field Model Complete to Degree and Order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE02S. *Journal of Geodynamics*, 39(1):1–10.

- Reigber, C., Schwintzer, P., Stubenvoll, R., Schmidt, R., Flechtner, F., Meyer, U., König, R., Neumayer, H., Förste, C., Barthelmes, F., Zhu, S. Y., Balmino, G., Biancale, R., Lemoine, J.-M., Meixner, H. und Raimondo, J. C. (2006). A High Resolution Global Gravity Field Model Combining CHAMP and GRACE Satellite Mission and Surface Gravity Data: EIGEN-CG01C. [http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/results/grav/g003\\_eigen-cg01c.html](http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/results/grav/g003_eigen-cg01c.html) (25.10.2006).
- Roland, M. (2005). Untersuchungen zur Kombination terrestrischer Schweredaten und aktueller globaler Schwerefeldmodelle. Wiss Arb Uni Hannover, Nr. 254, Institut für Erdmessung, Hannover.
- RRZN (2004). Sun Enterprise 10000. <http://www.rrzn.uni-hannover.de/e10000.html> (23.6.2006).
- Rummel, R. (1982a). Gravity Parameter Estimation from Large and Densely Spaced Homogeneous Data Sets. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 2:149–160.
- Rummel, R. (1982b). Gravity Parameter Estimation from Large Data Sets Using Stabilized Integral Formulas and a Numerical Integration Based on Discrete Point Data. OSU Rep 339.
- Rummel, R. (1985). Satellitengradiometrie. *ZfV*, 6:242–257.
- Rummel, R. (1986). Satellite Gradiometry. In *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy (IV Int Summer School in the Mountains, Austria, 1986)*, Band 7, Lecture Notes in Earth Sciences. Springer.
- Rummel, R. (1989). Satellitengradiometrie, eine neue geodätische Meßtechnik kurz vor ihrer Realisierung. *ZfV*, 114:346–352.
- Rummel, R. (1997). Spherical Spectral Properties of the Earth's Gravitational Potential and its First and Second Derivatives. In F. Sansò und R. Rummel, (Hrsg.), *Geodetic Boundary Value Problems in View of the One Centimeter Geoid*, Band 65, Lecture Notes in Earth Sciences, S. 359–404. Springer.
- Rummel, R. und Colombo, O. L. (1985). Gravity Field Determination from Satellite Gradiometry. *Bull Géod*, 59(3):233–246.
- Rummel, R. und Sansò, F. (1994). A Discussion on the Correct Way of Representing White Noise on the Sphere and its Propagation from Measured to Estimate Quantities. Section IV Bulletin, General Theory and Methodology, IAG, 1:3–16.
- Rummel, R. und van Gelderen, M. (1992). Spectral Analysis of the Full Gravity Tensor. *Geophysical Journal International*, 111:159–169.
- Rummel, R. und van Gelderen, M. (1995). Meissl Scheme - Spectral Characteristics of Physical Geodesy. *Man Geod*, 20:379–385.
- Rummel, R., Balmino, G., Johannessen, J., Visser, P. N. A. M. und Woodworth, P. (2002). Dedicated Gravity Field Missions - Principles and Aims. *Journal of Geodynamics*, 33:3–20.
- Sansò, F. und Schuh, W.-D. (1987). Finite Covariance Functions. *Bull Géod*, 61:331–347.
- Sansò, F. und Sideris, M. G. (1997). On the Similarities and Differences between Systems Theory and Least-squares Collocation in Physical Geodesy. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 56:173–206. XXI IUGG General Assembly, Boulder, Colorado, July 2-14, 1995.
- Sansò, F. und Sona, G. (1995). The Theory of Optimal Linear Estimation for Continuous Fields of Measurements. *Man Geod*, 20:204–230.
- Sansò, F. und Tscherning, C. C. (1980). Notes on Convergence in Collocation Theory. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 3:221–252. (auch in Proc VII Symposium on Mathematical Geodesy, IV Hotine Symposium, Assisi, Italien, 8.-11.Juni 1978, pp. 215-246).
- Sansò, F. und Tscherning, C. C. (2001). Fast Spherical Collocation: A General Implementation. In Ádám und Schwarz, (Hrsg.), *Vistas for Geodesy in the New Millennium*, Band 125, IAG Symposia, S. 131–137. Budapest.
- Sansò, F. und Tscherning, C. C. (2003). Fast Spherical Collocation: Theory and Examples. *J Geod*, 77:101–112.
- Schrama, E. J. O. (1991). Gravity Field Error Analysis: Applications of Global Positioning System Receivers and Gradiometers on Low Orbiting Platforms. *JGR*, 96(B12):20041–20051.
- Schuh, W.-D. (1996). Tailored Numerical Solution Strategies for the Global Determination of the Earth's Gravity Field. Technical Report 81, Graz, Austria.
- Schuh, W.-D. (2000). Scientific Data Processing Algorithms (WP3). In: From Eötvös to mGal, Final Report, ESA ESTEC Contract No. 13392/98/NL/GD, S. 105-156, Graz, Austria.

- Schwarz, K. P. (1977). Airborne Inertial Systems for Gravity Determination in Ocean Areas. In First International Symposium on Inertial Technology for Surveying and Geodesy, Ottawa, Canada, 12-14 October, 1977, S. 351–360.
- Schwarz, K. P., Sideris, M. G. und Forsberg, R. (1990). The use of FFT Techniques in Physical Geodesy. *Geophysical Journal International*, 100:485–514.
- SCVII (2000). Simulationsszenarien aktueller Satellitenmissionen. IAG Special Commission VII. <http://www.geod.uni-bonn.de/apmg/lehrstuhl/simulationsszenarien/sc7/satellitenmissionen.php> (13.07.2006).
- SID (2000). GOCE End-to-End Performance Analysis. Final report of ESTEC Contract 12735/98/NL/GD, National Institute for Space Research (SRON, Netherlands), Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie (IAPG), Delft Institute for Earth-Oriented Space Research (DEOS, Netherlands), Noordwijk, The Netherlands.
- Sideris, M. G. (1985). A Fast Fourier Transform Method for Computing Terrain Corrections. *Man Geod*, 10(1):66–73.
- Sideris, M. G. (1995). Fourier Geoid Determination with Irregular Data. *J Geod*, 70:2–12.
- Sideris, M. G. (1996). On the use of Heterogeneous Noisy Data in Spectral Gravity Field Modeling Methods. *J Geod*, 70:470–479.
- Sideris, M. G. und Li, Y. C. (1993). Gravity Field Convolutions without Windowing and Edge Effects. *Bull Géod*, 67:107–118.
- Sideris, M. G. und Schwarz, K. P. (1988). Advances in the Numerical Solution of the Linear Molodenskii Problem. *Bull Géod*, 62:59–69.
- Sideris, M. G. und She, B. B. (1995). A New, High-Resolution Geoid for Canada and Part of the U.S. by the 1D-FFT Method. *Bull Géod*, 69:92–108.
- Sigl, R. (1985). Introduction to Potential Theory. Abacus Press, Wichmann Verlag, Tunbridge Well, Kent.
- Sjöberg, L. E. (1980). A Recurrence Relation for the  $\beta_n$ -Function. *Bull Géod*, 54:69–72.
- Sjöberg, L. E. (1981). Least-Squares Combination of Satellite and Terrestrial Data in Physical Geodesy. *Ann. Géophys.*, 1:25–30.
- Sjöberg, L. E. (1984). Least Squares Modification of Stokes' and Vening Meinesz' Formulas by Accounting for Truncation and Potential Coefficient Errors. *Man Geod*, 9:209–229.
- Sjöberg, L. E. (1986). Comparison of Some Methods of Modifying Stokes' Formula. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 3:229–248.
- Sjöberg, L. E. (1991). Refined Least Squares Modification of Stokes' Formula. *Man Geod*, 16:367–375.
- Sjöberg, L. E. (2005). A Discussion of the Approximations Made in the Practical Implementation of the Remove-Compute-Restore Technique in Regional Geoid Modelling. *J Geod*, 78:645–653.
- Sjöberg, L. E. und Hunegnaw, A. (2000). Some Modifications of Stokes' Formula that Account for Truncation and Potential Coefficient Errors. *J Geod*, 74:232–238.
- SLICOT (2005). The Control and Systems Library SLICOT. <http://www.slicot.de> (12.10.2006).
- Smeets, I. (1994). An Error Analysis for the Height Anomaly Determined by Combination of Mean Terrestrial Gravity Anomalies and a Geopotential Model. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 1:57–96.
- Smith, D. A. und Roman, D. R. (2001). GEOID99 and G99SSS: 1-arc-minute Geoid Models for the United States. *J Geod*, 75:469–490.
- Spanos, P. D. und Mignolet, M. P. (1992). Simulation of Homogeneous Two-Dimensional Random Fields: Part II - MA and ARMA Models. *Journal of Applied Mechanics*, 59:270–277.
- Stokes, G. G. (1849). On the Variation of Gravity on the Surface of the Earth. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:672–695.
- Sünkel, H. (1981). Feasibility Studies for the Prediction of the Gravity Disturbance Vector in High Altitudes. OSU Rep 311.
- Sünkel, H. (1983). The Generation of a Mass Point Model from Surface Gravity Data. OSU Rep 353.
- Sünkel, H. (1984). On the Reduction of Gravity Data for the Prediction of the Gravity Disturbance Vector at Altitudes. OSU Rep 359.
- Tapley, B., Ries, J., Bettadpur, S., Chambers, D., Cheng, M., Condi, F., Gunter, B., Kang, Z., Nagel, P., Pastor, R., Pekker, T., Poole, S. und Wang, F. (2005). GGM02 - An Improved Earth Gravity Field Model from GRACE. *J Geod*, 79:467–478.

- Taubenheim, J. (1969). Statistische Auswertung geophysikalischer und meteorologischer Daten. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig.
- Thalhammer, M. (1994). The Geographical Truncation Error in Satellite Gravity Gradiometer Measurements. *Man Geod*, 19:45–54.
- Thalhammer, M. (1995). Regionale Gravitationsfeldbestimmung mit zukünftigen Satellitenmissionen (SST und Gradiometrie). DGK, Reihe C, Nr. 437, Technische Universität München, München.
- Thirumalai, S. (1996). High Performance Algorithms to Solve Toeplitz and Block Toeplitz Matrices. Dissertation, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Thompson, E. H. (1969). An Introduction to the Algebra of Matrices with some Applications. Adam Hilger, London.
- Torge, W. (2001). *Geodesy*. de Gruyter, Berlin New York, 3. Auflage.
- Tóth, G., Ádám, J., Földváry, L., Tziavos, L. N. und Denker, H. (2005). Calibration / Validation of GOCE Data by Terrestrial Torsion Balance Observations. In F. Sansò, (Hrsg.), *A Window on the Future of Geodesy*, Proc 36th IAG General Assembly, 23rd IUGG General Assembly, Sapporo, Japan, 2003, Band 128, IAG Symposia, S. 214–219, Berlin Heidelberg New York. Springer.
- Tóth, G., Földvári, L., Tziavos, I. N. und Ádám, J. (2006). Upward / Downward Continuation of Gravity Gradients for Precise Geoid Determination. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 41(1):21–30.
- Tsaoussi, L. S. (1989). A Simulation Study of the Overdetermined Geodetic Boundary Value Problem Using Collocation. OSU Rep 398.
- Tscherning, C. C. (1974). A FORTRAN IV Program for the Determination of the Anomalous Potential Using Stepwise Least-squares Collocation. OSU Rep 212.
- Tscherning, C. C. (1975). Application of Collocation Determination of a local Approximation to the Anomalous Potential of the Earth using "exact" Astro-Gravimetric Collocation. In B. Brosowski und E. Martensen, (Hrsg.), *Mathematical Geodesy, Part III*, Band 14, Methoden und Verfahren der mathematischen Physik, S. 83–110. B. I. - Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien Zürich.
- Tscherning, C. C. (1976a). Computation of the Second-Order Derivatives of the Normal Potential Based on the Representation by a Legendre Series. *Man Geod*, 1:71–92.
- Tscherning, C. C. (1976b). Covariance Expressions for Second and Lower Order Derivatives of the Anomalous Potential. OSU Rep 225.
- Tscherning, C. C. (1977). A Note on the Choice of Norm When Using Collocation for the Computation of Approximations to the Anomalous Potential. *Bull Géod*, 51:137–147.
- Tscherning, C. C. (1978). Introduction to Functional Analysis with a View to Its Applications in Approximation Theory. In H. Draheim, (Hrsg.), *Approximation Methods in Geodesy*, Band 10, Sammlung Wichmann, S. 157–191. Wichmann, Karlsruhe.
- Tscherning, C. C. (1981). Comparison of Some Methods for the Detailed Representation of the Earth's Gravity Field. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 19:213–221. Presented at General Assembly of the International Association of Geodesy and XVII General Assembly of IUGG, Canberra, Australia, Dec. 1979.
- Tscherning, C. C. (1982). Geoid Determination for the Nordic Countries Using Collocation. In Proc General Meeting of the IAG, S. 472–483, Kyoto.
- Tscherning, C. C. (1986). Current Problems in Gravity Field Approximation. In IAG Proc I Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, Roma, Italy, 3-6 June 1985, Vol. 1/2, S. 363–383, Milano.
- Tscherning, C. C. (1988). A Study of Satellite Altitude Influence on the Sensitivity of Gravity Gradiometer Measurements. In *Festschrift Rudolf Sigl*, Nr. 287, S. 218–223. DGK.
- Tscherning, C. C. (1993). Computation of Covariances of Derivatives of the Anomalous Gravity Potential in a Rotated Reference Frame. *Man Geod*, 18:115–123.
- Tscherning, C. C. (2005). Software Documentation Geocol17. <http://www.gfy.ku.dk/~cct/> (6.12.2006).
- Tscherning, C. C. und Rapp, R. H. (1974). Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree Variance Models. OSU Rep 208.

- Tsoulis, D. (2003). Terrain Modeling in Forward Gravimetric Problems: a Case Study on Local Terrain Effects. *Journal of Applied Geophysics*, 54:145–160.
- Tziavos, I. N. (1993). Numerical Considerations of FFT Methods in Gravity Field Modelling. Nr. 188 in *Wiss Arb Uni Hannover. Institut für Erdmessung, Hannover*.
- Tziavos, I. N. (1996). Comparisons of Spectral Techniques for Geoid Computations over Large Regions. *J Geod*, 70:357–373.
- Tziavos, I. N., Sideris, M. G., Forsberg, R. und Schwarz, K. P. (1988). The Effect of The Terrain on Airborne Gravity and Gradiometry. *JGR*, 93(B8):9173–9186.
- Tziavos, I. N., Sideris, M. G. und Li, J. (1996). Optimal Spectral Combination of Satellite Altimetry and Marine Gravity Data. In I. N. Tziavos und M. Vermeer, (Hrsg.), *Techniques for Local Geoid Determination*, Band 96, Reports of the Finnish Geodetic Institute, S. 41–56. Finnish Geodetic Institute.
- USGS (1996). GTOPO30 - Global Topographic Data. U. S. Geological Survey. <http://edc.usgs.gov/products/elevation/gtopo30/gtopo30.html> (24.4.2006).
- van der Marel, H. (1989). Algorithmic Aspects of Solving Large Systems of Equations. In Tutorial on "Mathematical Aspects of Data Analysis", S. 49–103, Pisa. International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Intercommission Working Group III / IV.
- van Gelderen, M. und Koop, R. (1997). The Use of Degree Variances in Satellite Gradiometry. *J Geod*, 71:337–343.
- Vaniček, P. und Featherstone, W. E. (1998). Performance of Three Types of Stokes' Kernel in the Combined Solution for the Geoid. *J Geod*, 72:684–697.
- Vaniček, P. und Kleusberg, A. (1987). The Canadian Geoid - Stokesian Approach. *Man Geod*, 12:86–98.
- Vassiliou, A. A. (1985). The Use of Spectral Methods for the Spatial Modelling of Gravity Data. *Man Geod*, 10:235–244.
- Vassiliou, A. A. (1987). The Computation of Aliasing Effects in Local Gravity Field Approximation. *Bull Géod*, 62:41–58.
- Vincent, S. und Marsh, J. G. (1974). Global Detailed Gravimetric Geoid. In G. Veis, (Hrsg.), *Proc Int Symp on The Use of Artificial Satellites for Geodesy and Geodynamics*, Athen, May 14–21, 1973, Athen, Greece. National Technical University Athen.
- Visser, P. N. A. M., Koop, R. und Klees, R. (2000). Scientific Data Production Quality Assessment. In *From Eötvös to Milligal+ Final Report*, Contract 14287/00/NL/GD, S. 157–177. ESA/ESTEC. Study Team 1 - WP 4.
- Weber, G. (1984). Hochauflösende mittlere Freiluftanomalien und gravimetrische Lotabweichungen für Europa. *Wiss Arb Uni Hannover*, Nr. 135, Institut für Erdmessung, Universität Hannover.
- Weber, G. und Wenzel, H.-G. (1983). Error Covariance Functions of Sea Gravity Data and Implications for Geoid Determination. *Marine Geodesy*, 75(1-4):199–226.
- Wei, M. (1987). Statistical Problems in Collocation. *Man Geod*, 12:282–289.
- Welch, P. D. (1967). The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, AU-15(2):70–73.
- Wenzel, H.-G. (1981). Zur Geoidbestimmung durch Kombination von Schwereanomalien und einem Kugelfunktionsmodell mit Hilfe von Integralformeln. *ZfV*, 3:102–111.
- Wenzel, H.-G. (1982). Geoid Computation by Least-Squares Spectral Combination Using Integral Kernels. In *Proc General Meeting of the IAG*, Tokyo, May 7–15, 1982, S. 438–453, Berlin Heidelberg New York. Springer.
- Wenzel, H.-G. (1985). Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde. Nr. 137 in *Wiss Arb Uni Hannover. Institut für Erdmessung, Hannover*.
- Wenzel, H.-G. (1999). Schwerefeldmodellierung durch ultra hochauflösende Kugelfunktionsmodelle. *ZfV*, 124(5):144–154.
- Wenzel, H.-G. und Arabelos, D. (1981). Zur Schätzung von Anomalie-Gradvarianzen aus lokalen Kovarianzfunktionen. *ZfV*, 106(5):234–243.
- Whittle, P. (1983). *Prediction and Regulation by Linear Least-Square Methods*. Basil Blackwell, Oxford, 2. Auflage.

- Wichiencharoen (1984). A Comparison of Gravimetric Undulations Computed by the Modified Molodenskii Truncation Method and the Method of Least Squares Spectral Combination by Optimal Integral Kernels. *Bull Géod*, 58:494–509.
- Wild, F. und Heck, B. (2005). A Comparison of Different Isostatic Models Applied to Satellite Gravity Gradiometry. In C. Jekeli, L. Bastos, und J. Fernandes, (Hrsg.), *Proc IAG International Symposium "Gravity, Geoid and Space Missions"*, Porto, Portugal, Aug. 30 - Sept. 3, 2004, Band 129, S. 230–235. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Wolf, K. I. (2006). Considering Coloured Noise of Ground Data in an Error Study for External GOCE Calibration / Validation. In P. Knudsen, J. Johannessen, T. Gruber, S. Stammer, und T. van Dam, (Hrsg.), *Proc GOCINA Workshop*, April, 13-15, 2005, Band 25, Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie, S. 85–92. Luxembourg.
- Wolf, K. I. und Denker, H. (2005). Upward Continuation of Ground Data for GOCE Calibration / Validation Purposes. In C. Jekeli, L. Bastos, und J. Fernandes, (Hrsg.), *Proc IAG International Symposium "Gravity, Geoid and Space Missions"*, Porto, Portugal, Aug. 30 - Sept. 3, 2004, Band 129, IAG Symposia, S. 60–65. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Wolf, K. I. und Kieler, B. (2006). Error Evaluation for Regional Geoid Computation Using Varying Integration Cap Sizes in a Synthetic Environment. In *Proc IAG First International Symposium of the International Gravity Field Service*, 28. Aug - 1. Sept 2006, Istanbul, Turkey. (accepted).
- Wolf, K. I. und Müller, J. (2004). Prediction of Gravitational Gradients Using Simulated Terrestrial Data for GOCE Calibration. In B. Meurers und R. Pail, (Hrsg.), *Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, Proc 1st Workshop on International Gravity Field Research*, May, 8-9, 2003, Band 31, S. 31–36, Graz, Austria. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.
- Wolf, K. I., Denker, H., Müller, J. und Jarecki, F. (2003). Prediction of Gravitational Gradients Using Terrestrial Data for GOCE Calibration. In *Geotechnological Science Report*, Nr. 3, S. 188–192. Potsdam.
- Wong, L. und Gore, R. (1969). Accuracy of Geoid Heights from Modified Stokes Kernels. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 18(1):81–91.
- Woods, J. W. (1972). Two-Dimensional Discrete Markovian Fields. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-18(2):232–240.
- Xie, J. (2005). Implementation of Parallel Least-Squares Algorithms for Gravity Field Estimation. OSU Rep 474.
- Zerilli, F. J. (1970). Tensor Harmonics in Canonical Form for Gravitational Radiation and Other Applications. *Journal of Mathematical Physics*, 11(7):2203–2208.
- Zielinski, J. B. und Petrovskaya, M. S. (2003). The Possibility of the Calibration / Validation of the GOCE data with the Balloon-Borne Gradiometer. *Advances in Geosciences*, 1:149–153.
- Zielinski, J. B., Latka, J. K. und Kuzmicz-Cieslak, M. (2005). Upward Continuation of Gravity Gradients for Validation of the GOCE Measurements. *Artificial Satellites*, 40(4):229–249.

## Verwendete Abkürzungen:

Bull Géod	Bulletin Géodésique, Springer
DGK	Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
IAG	International Association of Geodesy
J Geo	Journal of Geodesy, Springer
JGR	Journal of Geophysical Research, American Geophysical Union
Man Geod	Manuscripta Geodaetica, Springer
OSU Rep	Reports of the Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus (Ohio) USA
Wiss Arb Uni Hannover	Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover bzw. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover
ZfV	Zeitschrift für Vermessungswesen bzw. Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement

# Dank

Diese Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Assistentin am Institut für Erdmessung der Leibniz Universität Hannover im Rahmen der Verbundprojekte “GOCE Gravitationsfeldanalyse Deutschland (GRAND) I & II” des GEOTECHNOLOGIEN-Programms (Forschungsschwerpunkt “Beobachtung des Systems Erde aus dem Weltraum”) der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) und des Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) entstanden.

An dieser Stelle möchte ich all den Menschen danken, die mir auf dem Weg zur Fertigstellung dieser Arbeit geholfen haben.

Prof. Dr. Jürgen Müller danke ich für seine Unterstützung und dafür, dass er mir die Möglichkeit und die Freiräume für das Erstellen der Arbeit gab. Die Zusammenarbeit mit ihm am Institut war stets motivierend und geprägt durch seinen beneidenswerten Optimismus. Prof. Dr. Bernhard Heck danke ich für die Übernahme des Korreferates und für die Anregungen und Kommentare gerade in der Anfangsphase. Dies hat mir sehr geholfen, die theoretischen Darstellungen in dieser Arbeit auf das Wesentliche zu fokussieren. Prof. Dr. Hansjörg Kutterer danke ich ebenfalls für die Übernahme des Korreferates und für die fachlichen Hilfestellungen.

Allen meinen IFERianer Kollegen, Diplomanden und studentische Hilfskräfte eingeschlossen, danke ich für die Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit. Mein besonderer Dank gilt Focke Jarecki für die gute Zusammenarbeit in Forschung und Lehre in den letzten fünf Jahren. Die vielzähligen, spontanen Diskussionen haben mir sehr geholfen, erst beim Erklären des Problems wurde der Kern desselben klar. Außerdem danke ich Dr. Heiner Denker für seine Hilfe bei fachlichen Problemen sowie für die Bereitstellung von Daten und Programmen.

Für die fachliche, technische und moralische Unterstützung bedanke ich mich - in alphabetischer Reihenfolge - bei Hamza Alkhatib, Prof. Dr. Volker Böder, Dr. Gerd Brand, Ulrike Dobratz, Dr. Birgit Elias, Olga Gitlein, Jonathan Haig, Boris Kargoll, Birgit Kieler, Dr. Torsten Mayer-Gürr, Dr. Guilhem Moreaux, Wolfgang Paech, Ann-Kathrin Röwer, Dr. Markus Roland, Katja Schmalkuche, Prof. Dr. Günter Seeber, Nadine Terwort, Prof. Dr. Carl Christian Tscherning und Franziska Wild-Pfeiffer.

Den Organisatoren und Teilnehmern des Mentoring Programms für Wissenschaft und Wirtschaft der Leibniz Universität Hannover bin ich sehr dankbar für den von ihnen ausgelösten großen Motivationsschub. Den Mitarbeitern der Technischen Informationsbibliothek Hannover, des Regionalen Rechenzentrums Niedersachsen und des Norddeutschen Verbundes für Hoch- und Höchstleistungsrechnen möchte ich für die technische Unterstützung im wissenschaftlichen Leben danken. Ebenso gilt mein Dank den Entwicklergruppen der Freien Softwarepakete  $\LaTeX$ ,  $\text{LyX}$ , Octave und OpenOffice.org für ihre gute Arbeit.

Allen meinen Freunden und Verwandten danke ich, dass sie das Habe-keine-Zeit-muss-arbeiten-Syndrom über einen langen Zeitraum toleriert und mich trotzdem nicht vergessen haben.

Meinen Eltern danke ich, dass Sie mich immer, bei Allem und mit aller Kraft unterstützen.

Und schließlich möchte ich mich sehr bei meinem Mann Dr. Bernd-Michael Wolf alias Benz bedanken, für seine Unterstützung, für das unermüdliche Korrekturlesen, für die vielen Diskussionen zwischen Photogrammeter und Erdmesser, fürs Mut machen und fürs Vorbild sein. In diesem Sinne erlaube ich mir den letzten Absatz seiner Dissertation zu übernehmen:

Dank der vielen Zeit, die Freunde, Kollegen und vor allem die Referenten in das Lesen, Korrigieren und Verbessern dieser Arbeit investiert haben, enthält sie weniger Fehler und Unklarheiten als jede von mir allein erstellte Version hätte haben können. Alle noch vorhandenen Fehler, Unklarheiten und Argumentationslücken in dieser Arbeit sind allein auf meine eigene Nachlässigkeit zurückzuführen und ich möchte mich dafür bei allen Lesern entschuldigen.

# Lebenslauf

seit 2002	Wissenschaftliche Assistentin am Institut für Erdmessung, Leibniz Universität Hannover
2001 - 2002	Leibniz Universität Hannover, Studienfach: Geodäsie, Abschluss Diplom
2000 - 2001	Hogeschool van Amsterdam, Niederlande, Studienfach: Hydrographie
1996 - 2000	Leibniz Universität Hannover, Studienfach: Geodäsie
1995 - 1996	Christian-Albrechts-Universität Kiel, Studienfach: Humanmedizin
1989 - 1995	Mariengymnasium, Jever, Abitur
1985 - 1989	Deutsche Schule Paris, St Cloud, Frankreich
1982 - 1985	Grundschule Harlingerweg Jever
seit 2004	Verheiratet mit Bernd-Michael Wolf, geb. Straub
24. März 1976	Geboren in Jever