

**Ingo Neumann**

**Zur Modellierung  
eines erweiterten Unsicherheitshaushaltes  
in Parameterschätzung und Hypothesentests**

**München 2009**

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**

**ISSN 0065-5325**

**ISBN 978-3-7696-5056-4**

---

**Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:  
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover  
ISSN 0174-1454, Nr. 277, Hannover 2009**





**DGK** Deutsche Geodätische Kommission  
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

---

Reihe C

Dissertationen

Heft Nr. 634

**Zur Modellierung  
eines erweiterten Unsicherheitshaushaltes  
in Parameterschätzung und Hypothesentests**

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Geodäsie  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von

**Dipl.-Ing. Ingo Neumann**  
geboren am 15.12.1977 in Thedinghausen

**München 2009**

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISSN 0065-5325

ISBN 978-3-7696-5056-4

---

Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:  
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover  
ISSN 0174-1454, Nr. 277, Hannover 2009

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:



Deutsche Geodätische Kommission

Alfons-Goppel-Straße 11 • D – 80 539 München

Telefon +49 – 89 – 23 031 1113 • Telefax +49 – 89 – 23 031 -1283 / - 1100

e-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://www.dgk.badw.de>

Prüfungskommission

Referent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. H. Kutterer

Korreferenten: Univ.-Prof. Dr.-Ing. S. Schön

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Reinhard Viertl

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Mai 2009

---

© 2009 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,  
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

ISSN 0065-5325

ISBN 978-3-7696-5056-4

## Kurzfassung

Bei der Erhebung von Daten mittels Beobachtungen und der Zusammenführung dieser mit Modellen spielt die Wechselwirkung zwischen Information und Unsicherheit eine wesentliche Rolle. Zur Beschreibung von verschiedenen Arten von Unsicherheit stehen verschiedene Arten von Mathematik zur Verfügung. Um zu beurteilen, ob die aus Beobachtungen abgeleiteten Informationen als statistisch signifikant zu bewerten sind, ist die methodisch korrekte und realistische Unsicherheitsmodellierung bei der (geodätischen) Datenanalyse von besonderer Bedeutung.

Ziel dieser Arbeit ist die signifikante Erweiterung bisheriger Ansätze zu einem erweiterten Unsicherheitshaushalt bei der (geodätischen) Datenanalyse, insbesondere auch vor dem Hintergrund der Deformationsanalyse. Es wird motiviert, dass sich der (geodätische) Unsicherheitshaushalt mit zufälliger Variabilität und systematischen Abweichungen zwischen Modell und Beobachtung (Impräzision) beschreiben lässt. Die Impräzision stellt dabei eine nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch begründete Komponente der Gesamtunsicherheit dar, die als ein Spezialfall unscharfer Daten behandelt werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit werden beide Arten von Unsicherheit gemeinsam mit Hilfe von unscharfen Zufallsvariablen modelliert. Dieser Ansatz kann nicht die Richtigkeit eines aus Beobachtungen abgeleiteten Ermittlungsergebnisses im Bezug auf die Realität verbessern, sondern es wird eine realistischere Beschreibung der auftretenden Unsicherheiten von Ermittlungsergebnissen angestrebt.

Zu Beginn der Arbeit erfolgt eine Erläuterung der in der Datenanalyse und in den Beobachtungen auftretenden Arten von Unsicherheit. Des Weiteren wird die Charakteristik der Unsicherheiten für die aus Beobachtungen abgeleiteten Ermittlungsergebnisse und Parameter diskutiert. Basierend auf der Charakteristik der Unsicherheiten von Beobachtungen und Ermittlungsergebnissen werden die theoretischen Grundlagen der verwendeten mathematischen Ansätze zur Beschreibung der Unsicherheiten vorgestellt. Im Speziellen handelt es sich um die Wahrscheinlichkeitstheorie, die Intervallmathematik und die Fuzzy-Theorie sowie um kombinierte Ansätze (unscharfe Zufallsvariablen). Im Weiteren wird die Ableitung der Unsicherheiten von Beobachtungsergebnissen und Parametern bei Vorliegen von zufälliger Variabilität und Unschärfe erläutert.

Der zentrale Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Weiterentwicklung von Hypothesentests bei Vorliegen des erweiterten Unsicherheitshaushaltes aus zufälliger Variabilität und Unschärfe. Dies stellt eine zentrale Aufgabe in allen Bereichen der Geo- und Ingenieurwissenschaften dar, in denen auf Annahmen (Modellen) beruhende Aussagen mittels Daten validiert werden sollen. Ein einführender Teil erläutert den Übergang von den klassischen Hypothesentests auf Hypothesentests mit unscharfen Daten. Nach der Herleitung eines generellen Entscheidungskriteriums erfolgt dessen Anwendung auf den eindimensionalen Fall. Für spezielle Referenzfunktionen von unscharfen Größen werden geschlossene mathematische Formeln angegeben, sodass eine einfache Anwendung der Methoden möglich ist. Die Behandlung des mehrdimensionalen Falles beruht auf der Abbildung der Testentscheidung in das Eindimensionale, wodurch ein grundlegendes Werkzeug für Hypothesentests zur Verfügung steht. Abschließend wird die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. und 2. Art im unscharfen Fall hergeleitet. Die entwickelten Hypothesentests werden anschließend auf die Standardmodelle der Geo- und Ingenieurwissenschaften (Geodäsie) übertragen. Dies umfasst im Wesentlichen den Globaltest einer Ausgleichung und die Formulierung der Allgemeinform einer Hypothese in der linearen Parameterschätzung. Einzelne spezielle Anwendungen der linearen Hypothese, wie die Ausreißeruntersuche, die Modellwahl und die Sensitivitätsanalyse, runden diesen Teil der Arbeit ab.

Der letzte zentrale Teil der Arbeit widmet sich der Einbettung der unscharfen Hypothesentests, bei Toleranzbereichen für den Annahmehereich, in die Nutzentheorie. Auf diese Weise können Konsequenzen im Entscheidungsprozess durch Verlustfunktionen berücksichtigt werden. Nach einer kurzen Schilderung der klassischen Vorgehensweise bei der Entscheidungsfindung im Rahmen der Nutzentheorie werden Vorschläge für eine Erweiterung auf unscharfe Daten vorgestellt. Das letzte Kapitel der Arbeit spannt den Bogen hin zur Anwendung der entwickelten Methoden auf die Deformationsanalyse. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der statischen und kinematischen Deformationsanalyse, die anhand von simulierten und realen Beispielen mit dem erweiterten Unsicherheitshaushalt analysiert werden. Als Ergebnis der erweiterten Modellierung ist eine verfeinerte Interpretation der aus Beobachtungen abgeleiteten Parameter und insbesondere der Signifikanzniveaus zur Beschreibung und Detektion von Deformationen möglich. Dies ermöglicht realistischere Aussagen, ob getroffene Annahmen durch die Daten validiert werden konnten.

Die vorliegende Arbeit bildet einen vollständigen Ablauf der (geodätischen) Datenanalyse von den originären Beobachtungen hin zu den Ergebnisgrößen einer Parameterschätzung im Falle eines erweiterten Unsicherheitshaushaltes ab. Dies schließt insbesondere die Verträglichkeitsuntersuchungen zwischen den Be-

obachtungen und den im Modell getroffenen Annahmen (unscharfen Hypothesentests) mit ein. An simulierten und realen Beispielen wird gezeigt, dass eine Berücksichtigung von verschiedenen Unsicherheiten eine verfeinerte Interpretation der Daten erlaubt. Zudem sind die entwickelten Methoden auf viele Aufgabenstellungen der Geo-, Ingenieurwissenschaften und Geodäsie anwendbar.

Suchbegriffe: Unsicherheitsmodellierung, unscharfe Daten, Parameterschätzung, Hypothesentests

## Abstract

Uncertainty plays a key role within the process of information collection by means of observations and its interaction with mathematical models. Different types of mathematics are known to describe different types of uncertainty. In order to evaluate if the information obtained by the observations is statistically significant, it is necessary to use realistic and correct uncertainty models in (geodetic) data analysis.

The goal of this thesis is a significant extension of known proposals to an extended uncertainty budget in (geodetic) data analysis, especially in the field of geodetic deformation analysis. It is motivated that the (geodetic) uncertainty budget can be modeled using random variability and systematic deviations between the model and the observations (imprecision). Imprecision is a non-probabilistic component of the whole uncertainty budget which can be modeled as a special case of non-precise data. In this thesis both types of uncertainty are treated in a comprehensive way using fuzzy-random-variables (FRVs). The proposed ansatz cannot improve the correctness of the results with respect to reality, but it is rather a more realistic description of the occurring uncertainties of measurement results.

The thesis starts with an explanation of the occurring uncertainties in data analysis and in the observations. Additionally, the characteristic of the uncertainties of measurement results and of parameters is discussed. Based on the discussed characteristics of the observations and the parameters suitable mathematical procedures were introduced to deal with the uncertainties. In particular, the probability theory, interval mathematics, Fuzzy-theory and combined approaches (FRVs) are of interest. Furthermore, the propagation of the uncertainties to the measurement results and the parameters of interest is derived.

The main part of this thesis deals with the development of hypotheses tests for data having random variability and fuzzy uncertainty (imprecision). This is a central task in the areas of geo- and engineering science where assumptions should be validated with empirical data. In the first part the difference between classical hypotheses tests and hypotheses tests with fuzzy uncertainty is shown. A general test criterion is derived and applied to the one-dimensional case. For special reference functions of fuzzy-sets mathematical closed solutions were developed and allow an easy application of the proposed methods. The multi-dimensional case is treated within a mapping to the one-dimensional case. For this reason, a general tool for hypotheses tests is available. Finally, the determination of the probability of a type I and type II error in the fuzzy case is obtained. The developed hypotheses tests are transferred to the standard cases of geo- and engineering sciences. In particular, the global test of an adjustment and the formulation of a general linear hypothesis in parameter estimation are shown. The application of a linear hypothesis to outlier detection, model selection, and to the sensitivity analysis of geodetic networks complete the first main part of the thesis.

The next chapter is devoted to the development of hypotheses tests with fuzzy uncertainty in case of regulatory thresholds in the context of the utility-theory. This allows the consideration of utility functions within the decision process. After introducing the classical concept in the decision process, suggestions for the extensions to fuzzy uncertainty are made. The last chapter leads over to the applications of the developed methods in deformation analysis. The focus lies on a few examples of the static and kinematic deformation analysis, that are analyzed with the extended uncertainty budget. As a result of the developed methods, a refined interpretation of the measurement results, the parameters, and especially of the significance levels of the deformations is possible. This allows more realistic and refined statements if the hypotheses can be validated by the collected data.

It can be highlighted that this thesis shows the complete chain of (geodetic) data analysis from the original observations to the parameters of interest within an adjustment. This includes in particular the compatibility analysis between the observations and the assumptions made in the model (fuzzy hypotheses tests). With the aid of simulated and real examples it is shown that the consideration of the different uncertainty components leads to a refined interpretation of the data. Additionally, the developed methods are applicable to many tasks in geo-, engineering and geodetic science.

Key-Words: Uncertainty modeling, imprecise data, parameter estimation, hypotheses tests

# Inhaltsverzeichnis

<b>KURZFASSUNG.....</b>	<b>3</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>4</b>
<b>INHALTSVERZEICHNIS.....</b>	<b>5</b>
<b>1 EINLEITUNG.....</b>	<b>9</b>
1.1    MOTIVATION UND ZIELSETZUNG .....	9
1.2    AUFBAU DER ARBEIT.....	11
1.3    EIGENE BEITRÄGE FÜR DIE BEANTWORTUNG DER KERNFRAGSTELLUNGEN.....	12
<b>2 CHARAKTERISTIKA VON UNSICHERHEITEN IN DER DATENANALYSE.....</b>	<b>15</b>
2.1    MOTIVATION UND ÜBERBLICK.....	15
2.2    GENAUIGKEITS- UND UNSICHERHEITSBEGRIFFE IN DER (GEODÄTISCHEN) DATENANALYSE .....	17
2.2.1 <i>Charakteristika von zufälligen und systematischen Abweichungen</i> .....	20
2.2.2 <i>Beispiele für eine zu optimistische Beurteilung von Unsicherheiten</i> .....	23
2.3    VERTRÄGLICHKEIT ZWISCHEN THEORIE (MODELL) UND EXPERIMENT (BEOBACHTUNG).....	26
2.3.1 <i>Modelle, Beobachtungen, Seiteninformationen und Vorkenntnisse</i> .....	27
2.3.2 <i>Unsicherheit von Beobachtungen, Modellen, Seiteninformationen und Vorkenntnissen</i> .....	28
2.3.3 <i>Charakteristik von Beobachtungsergebnissen und freien Modellparametern</i> .....	31
<b>3 MODELLIERUNG DER ZUFÄLLIGEN VARIABILITÄT UND DER IMPRÄZISION.....</b>	<b>35</b>
3.1    MOTIVATION .....	35
3.2    MATHEMATISCHE THEORIEN ZUR BESCHREIBUNG VON UNSICHERHEITEN.....	36
3.2.1 <i>Wahrscheinlichkeitstheorie und Bayes' Theorem</i> .....	36
3.2.2 <i>Intervallmathematik</i> .....	38
3.2.3 <i>Fuzzy-Theorie</i> .....	40
3.2.3.1    Grundlagen der Fuzzy-Theorie .....	41
3.2.3.2    Rechenoperationen mit unscharfen Größen .....	42
3.2.3.3    LR-, LL- und L-unscharfe Zahlen und Intervalle.....	43
3.2.4 <i>Integration von Expertenwissen / Nested-Sets</i> .....	45
3.2.5 <i>Fuzzy-Randomness</i> .....	47
3.3    BEOBACHTUNGSERGEBNISSE UND DIE PARAMETERSCHÄTZUNG BEI IMPRÄZISION .....	48
3.3.1 <i>Bestimmung von unscharfen Beobachtungsergebnissen</i> .....	49
3.3.2 <i>Parameterschätzung bei Impräzision</i> .....	52
3.3.2.1    Ausgangssituation .....	52
3.3.2.2    Das Gauß-Markov-Modell bei Impräzision .....	53
3.3.2.3    Ein erweitertes Gauß-Markov-Modell bei Impräzision .....	54
3.3.2.4    Das Gauß-Helmert-Modell bei Impräzision.....	56
3.3.3 <i>Wertebereiche von Beobachtungsergebnissen und freien Parametern</i> .....	58
<b>4 HYPOTHESENTESTS MIT UNSCHARFEN DATEN.....</b>	<b>61</b>
4.1    GRUNDLAGEN.....	61
4.1.1 <i>Übergang von den klassischen Hypothesentests auf Hypothesentests bei Unschärfe</i> .....	62
4.1.2 <i>Grundlegende Ablauf von Hypothesentests bei unscharfen Daten</i> .....	64
4.1.3 <i>Theorie für eine generelle Testentscheidung auf Basis von Übereinstimmungen</i> .....	65
4.1.4 <i>Anwendung der generellen Testentscheidung</i> .....	67
4.2    EINDIMENSIONALE HYPOTHESENTESTS MIT UNSCHARFEN DATEN .....	67
4.2.1 <i>Das height-Kriterium</i> .....	67
4.2.1.1    Das <i>height</i> -Kriterium für klassische Annahmebereiche.....	68
4.2.1.2    Das <i>height</i> -Kriterium für einen unscharfen Annahmebereich.....	69

4.2.2	<i>Das card-Kriterium</i> .....	70
4.2.2.1	<i>Das card-Kriterium für klassische Annahmebereiche</i> .....	71
4.2.2.2	<i>Anwendung eines numerischen Integrationsverfahren für die Lösung des card-Kriteriums</i> .....	72
4.2.3	<i>Vergleich zwischen dem card- und height-Kriterium</i> .....	73
4.3	MEHRDIMENSIONALE HYPOTHESENTESTS MIT UNSCHARFEN DATEN .....	76
4.3.1	<i>Grundsätzliche Vorgehensweise</i> .....	76
4.3.2	<i>Praktische Bestimmung der Teststatistik mittels Optimierung</i> .....	76
4.4	FEHLER 1. UND 2. ART IM UNSCHARFEN FALL .....	77
4.4.1	<i>Der Fehler 1. Art im unscharfen Fall</i> .....	78
4.4.1.1	<i>Der Fehler 1. Art bei klassischen Annahmebereichen und dem height-Kriterium</i> .....	79
4.4.1.2	<i>Der Fehler 1. Art bei unscharfen Annahmebereichen und dem height-Kriterium</i> .....	79
4.4.2	<i>Der Fehler 2. Art und der Nichtzentralitätsparameter im unscharfen Fall</i> .....	79
4.4.2.1	<i>Der Fehler 2. Art bei klassischen Annahmebereichen und dem height-Kriterium</i> .....	81
4.4.2.2	<i>Der Fehler 2. Art bei unscharfen Annahmebereichen und dem height-Kriterium</i> .....	81
<b>5</b>	<b>ÜBERTRAGUNG DER HYPOTHESENTESTS AUF DIE MODELLE DER GEODÄSIE.....</b>	<b>83</b>
5.1	QUADRATISCHE FORMEN .....	83
5.1.1	<i>Erwartungswert und Verteilung quadratischer Formen</i> .....	83
5.1.2	<i>Optimierung quadratischer Formen</i> .....	84
5.1.3	<i>Unabhängigkeit von der Orientierung des Koordinatenrahmens</i> .....	85
5.2	GLOBALTEST DER AUSGLEICHUNG FÜR EIN GAUß-MARKOV-MODELL BEI UNSCHÄRFE .....	85
5.3	ALLGEMEINFORM EINER LINEAREN HYPOTHESE MIT UNSCHARFEN DATEN.....	87
5.3.1	<i>Testablauf und Testentscheidung bei einer allgemeinen linearen Hypothese</i> .....	88
5.3.2	<i>Die lineare Hypothese in einem Standard GMM mit unscharfen Daten</i> .....	89
5.3.3	<i>Die lineare Hypothese in einem erweiterten GMM mit unscharfen Daten</i> .....	91
5.3.3.1	<i>Gemeinsamer Test von ursprünglichen und zusätzlichen Parametern</i> .....	92
5.3.3.2	<i>Test der zusätzlichen Parameter</i> .....	93
5.4	ANWENDUNG DER LINEAREN HYPOTHESE AUF SPEZIELLE FRAGESTELLUNGEN .....	94
5.4.1	<i>Ausreißersuche bei Unschärfe</i> .....	94
5.4.2	<i>Modellwahl bei Unschärfe</i> .....	96
5.4.3	<i>Sensitivitätsanalyse bei Unschärfe</i> .....	97
5.4.3.1	<i>Die Sensitivitätsanalyse im rein stochastischen Fall</i> .....	97
5.4.3.2	<i>Die Sensitivitätsanalyse mit unscharfen Daten</i> .....	98
<b>6</b>	<b>HYPOTHESENTESTS BEI TOLERANZWERTEN FÜR DEN ANNAHMEBEREICH.....</b>	<b>99</b>
6.1	ALLGEMEINE TESTENTSCHEIDUNGEN IM KONTEXT DER NUTZENTHEORIE.....	99
6.2	TESTENTSCHEIDUNGEN BEI ZUFÄLLIGER VARIABILITÄT .....	101
6.3	TESTENTSCHEIDUNG BEI INTERVALLEN FÜR DIE BEOBACHTUNGEN .....	101
6.3.1	<i>Das Hurwicz-Kriterium</i> .....	102
6.3.2	<i>Eine Alternative zum Hurwicz-Kriterium</i> .....	102
6.3.3	<i>Vergleich des Hurwicz-Kriteriums mit dem alternativen Ansatz</i> .....	103
6.4	TESTENTSCHEIDUNG BEI FUZZY-SETS FÜR DIE BEOBACHTUNGEN.....	104
6.5	TESTENTSCHEIDUNGEN BEI FRVS FÜR DIE BEOBACHTUNGEN .....	105
6.6	ZUSAMMENFASSUNG .....	107
<b>7</b>	<b>ANWENDUNG DER ANSÄTZE IN DER GEODÄTISCHEN DEFORMATIONSANALYSE ....</b>	<b>109</b>
7.1	DIE UNTERSUCHTEN DATENSÄTZE.....	109
7.1.1	<i>Die Datensätze für das Kongruenzmodell der Deformationsanalyse</i> .....	109
7.1.1.1	<i>Reale Daten der Schleuse Uelzen</i> .....	110
7.1.1.2	<i>Ein theoretisches Überwachungsnetz für die Bestimmung der Länge einer Maschinenachse</i> .....	111

7.1.2	<i>Die Datensätze für die kinematische Deformationsanalyse</i> .....	111
7.1.2.1	Reale Daten für Aufweitungsmessungen an der Schleuse Uelzen .....	111
7.1.2.2	Identifikation eines dynamischen Deformationsmodells mittels adaptiver Kalmanfilterung .....	112
7.1.3	<i>Das verwendete Modell und die Einflussfaktoren auf die Impräzision</i> .....	113
7.2	DER KONGRUENZFALL DER GEODÄTISCHEN DEFORMATIONSANALYSE .....	114
7.2.1	<i>Die Vorgehensweise im klassischen Fall</i> .....	114
7.2.2	<i>Der Kongruenztest im Falle impräziser Daten</i> .....	117
7.2.3	<i>Zusammenhänge zwischen dem „Punktrauschen“ und der Impräzision</i> .....	118
7.2.4	<i>Auswertung und Analyse der beiden Beispiele</i> .....	119
7.2.4.1	Analyse realer Daten der Schleuse Uelzen I .....	120
7.2.4.2	Analyse des theoretischen Netzes für die Maschinenachse .....	128
7.2.5	<i>Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick</i> .....	130
7.3	KINEMATISCHE DEFORMATIONSANALYSEN BEI IMPRÄZISION .....	130
7.3.1	<i>Das Kalmanfilter im rein stochastischen Fall</i> .....	131
7.3.2	<i>Das Kalmanfilter mit unscharfen Daten</i> .....	133
7.3.2.1	Auflösung der Rekursion .....	133
7.3.2.2	Integration der Unschärfe in den Auswerteprozess .....	134
7.3.3	<i>Auswertung und Analyse der beiden Beispiele</i> .....	135
7.3.3.1	Durchführung einer kinematischen Deformationsanalyse bei Unschärfe .....	135
7.3.3.2	Identifikation des dynamischen Deformationsmodelles mittels adaptivem Kalmanfilter .....	139
7.3.4	<i>Zusammenfassung und Ausblick zum Kalmanfilter mit impräzisen Daten</i> .....	141
7.4	WEITERE ANWENDUNGSGEBIETE DER VORGESTELLTEN ANSÄTZE .....	141
7.4.1	<i>Verwendung des Ansatzes im Kontext des GUM</i> .....	141
7.4.2	<i>Anwendung der Ansätze zur Beschreibung der Objektunschärfe</i> .....	142
<b>8</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK</b> .....	<b>145</b>
8.1	ZUSAMMENFASSUNG .....	145
8.2	AUSBLICK .....	146
	<b>LITERATURVERZEICHNIS</b> .....	<b>149</b>
	<b>ABBILDUNGS- UND TABELLENVERZEICHNIS</b> .....	<b>157</b>
	<b>VERWENDETE ABKÜRZUNGEN UND NORMEN</b> .....	<b>159</b>
	<b>DEFINITIONEN UND SYMBOLVERZEICHNIS</b> .....	<b>160</b>
	<b>DANK</b> .....	<b>163</b>
	<b>LEBENS LAUF</b> .....	<b>165</b>



You can never imagine how uncertain reality can be until you have tried to make it precise.<sup>1</sup>

## 1 Einleitung

### 1.1 Motivation und Zielsetzung

Gewöhnlich werden interessierende Zielgrößen (Parameter) aus Beobachtungen abgeleitet, die durch geeignete Beobachtungseinrichtungen in einem Messprozess gewonnen werden. In fast allen Fällen können die interessierenden Zielgrößen nicht direkt beobachtet werden, sondern sie stehen in einem allgemeinen funktionalen Zusammenhang zu den Beobachtungen. Um grobe Fehler in den Beobachtungen aufdecken zu können, werden mehr Beobachtungen durchgeführt als für die Bestimmung der Zielgrößen notwendig sind. Die gesuchten Zielgrößen und deren Unsicherheiten werden dann mit Ausgleichungsverfahren geschätzt. Gleichzeitig wird im Rahmen von Hypothesentests versucht, Ausreißer unter den Beobachtungen zu identifizieren, die mit den Modellvorstellungen nicht übereinstimmen.

Ob die durch die geschätzten Zielgrößen gewonnene Information als signifikant beurteilt werden kann, hängt von Größenordnung und Art der auftretenden Unsicherheiten während des Messprozesses und in der Modellbildung ab. Bisher werden im Bereich der Geo- und Ingenieurwissenschaften die Unsicherheiten zumeist mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen beschrieben oder für sie sogar Normalverteilung postuliert, eine Unterstellung die zu erheblichen Konsequenzen bei der Aussage über die statistische Signifikanz von Zielgrößen führen kann. Bei der Re-Analyse alter Datensätze und dem Vergleich der geschätzten Konfidenzbereiche mit den quasi wahren Werten treten Diskrepanzen auf, die allein mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen nicht oder nur unzureichend erklärt werden können.

Des Weiteren ist die Charakteristik heutiger Messsysteme immer mehr auch von systematischen Abweichungen während des Messprozesses geprägt. Dies gilt insbesondere für polare Messsysteme wie terrestrische Laserscanner (TLS) und Mobile-Mapping-Systeme. Eine Variation des Beobachtungsrahmens ist bei diesen Sensoren zumeist nicht möglich und aus wirtschaftlicher Sicht auch nicht gewünscht. Um trotzdem die Unsicherheit der Daten und damit deren Verwendungsmöglichkeiten adäquat beurteilen zu können, ist eine adäquate Modellierung systematischer Abweichungen notwendig. Eine neue Sichtweise ist daher bei der Datenanalyse, insbesondere bei deren Unsicherheitsmodellierung und bei Signifikanzuntersuchungen, notwendig.

Eine bekannte, wenn auch nicht streng klassifizierende Unterteilung von Unsicherheiten ist die Unterscheidung in *aleatorische* (engl.: aleatory) und *epistemische* (engl.: epistemic) Unsicherheit (MÖLLER und BEER, 2008). Bei der aleatorischen Komponente handelt es sich um nicht reduzierbare Unsicherheiten, die durch die zufällige Variabilität des zu beschreibenden Systems / Objektes begründet sind. Die epistemische Unsicherheit beschreibt die reduzierbare Komponente der Unsicherheit, die sich aus dem fehlenden Wissen über das System / Objekt ergibt. Durch Erwerb detaillierterer Informationen kann die epistemische Unsicherheit reduziert werden, ohne sie jedoch vollständig eliminieren zu können. Überträgt man diesen Gedanken auf das TLS kann die Unschärfe (z. B. systematische Fehler) durch Informationsgewinnung reduziert werden, wenn z. B. die Eigenschaften der gescannten Oberfläche bekannt sind. Aleatorische Unsicherheit ist zumeist durch eine nicht eindeutig objektive Beschreibung („die Messgröße kann nicht beliebig präzise bestimmt werden“) begründet. Die epistemische Unsicherheit wird als Kombination aus nicht eindeutigen objektiven und subjektiven („es ist nicht klar, was genau gemeint ist“) Gesichtspunkten angesehen.

Diese Argumentation legt es nahe, dass die aleatorische Unsicherheit mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen behandelt wird, während zumindest die subjektiven Anteile der epistemischen Unsicherheit durch nicht-stochastische Ansätze realistischer beschrieben werden können. Durch die Einführung von Verteilungsfunktionen werden ansonsten tlw. völlig unbegründbare Annahmen getroffen. Die subjektiven Anteile der epistemischen Unsicherheit von Beobachtungen werden im Rahmen dieser Arbeit als Unschärfe beschrieben und beinhalten u. A. systematische Abweichungen zwischen Beobachtung und Modell. Eine detaillierte Diskussion erfolgt im Rahmen dieser Arbeit.

Es werden Lösungsvorschläge für eine neue Sichtweise der Unsicherheitsmodellierung und bei Signifikanzentscheidungen unterbreitet. Dies umfasst zum einen die Erarbeitung einer verfeinerten Modellierung der auftretenden Unsicherheiten und zum anderen eine adäquatere Fortpflanzung der auftretenden Unsicherheiten

<sup>1</sup> Nach B. Russell (1956): „everything is vague to a degree you do not realise until you have tried to make it precise“

ten zu den Zielgrößen. Die zu optimistische Beurteilung der vorliegenden Unsicherheiten wird in dieser Arbeit durch die folgenden Auswirkungen begründet:

- I. Unsicherheiten, aus äußeren Einflussfaktoren auf die Messung, werden nicht hinreichend berücksichtigt
- II. Nicht-stochastische Unsicherheiten (z. B. systematische Abweichungen) werden nicht realitätsnah auf die Zielgrößen fortgepflanzt.
- III. Des Weiteren werden Unsicherheiten durch das Objekt verursacht, die bisher nicht in den Auswertemodellen berücksichtigt werden können.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Vorschläge unterbreitet, wie die Punkte I. und II. behoben werden können. Für den Unterpunkt III. sind die entwickelten Ansätze direkt anwendbar. Es sind jedoch noch weitere Forschungsarbeiten erforderlich, um diesen Punkt abschließen zu können.

Für die realitätsnahe Modellierung der Unsicherheiten kommen aus den oben genannten Gründen gemischt wahrscheinlichkeitstheoretische und nicht-stochastische Ansätze zum Einsatz. Eine rein wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung der Unsicherheiten ist ein Spezialfall der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Modellierung. Für die Klassifizierung und für die Quantifizierung der Unsicherheiten werden zwei verschiedene Wege verfolgt. Zum einen wird die wahrscheinlichkeitstheoretisch begründbare Unsicherheit aus der redundanten Anzahl von Beobachtungen mittels Ausgleichsmodellen abgeschätzt, zum anderen wird auf Experten zurückgegriffen, die die Unschärfe identifizieren und quantifizieren und mittels geeigneten Einflussfaktoren auf die Zielgrößen fortpflanzen.

Die zufälligen Unsicherheiten und die Unschärfe haben unterschiedliche Auswirkungen auf die Zielgrößen. Es wird gezeigt, dass das Vorhandensein von nur geringer Unschärfe zu stark unterschiedlichen Signifikanzentscheidungen führen kann, wenn die Fortpflanzung des unscharfen Anteils sehr ungünstig ist. In der Gesamtheit ermöglichen die entwickelten Methoden eine wesentlich verfeinerte Interpretation der Daten.

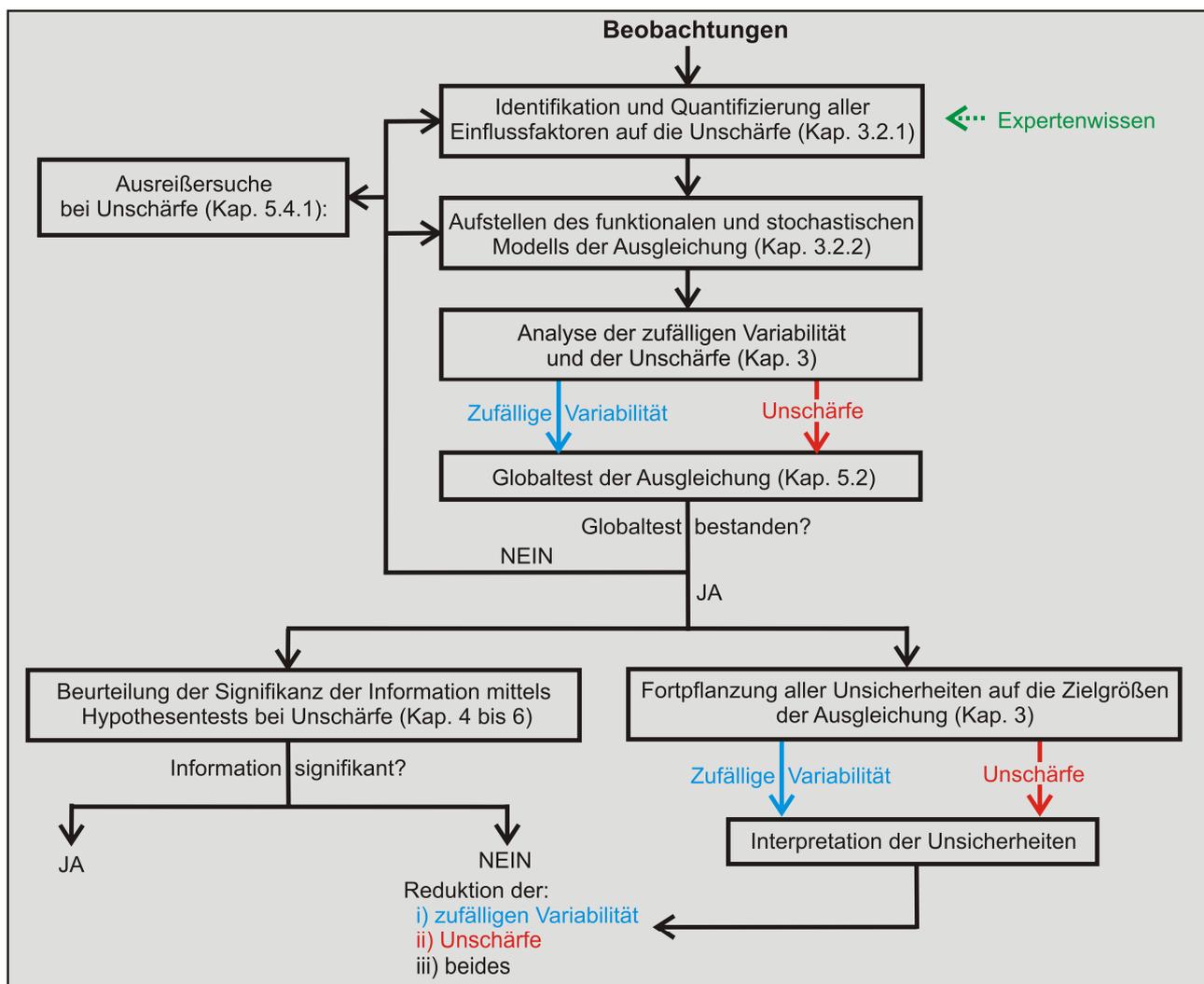


Abbildung 1.1: Der Ablauf der Datenanalyse bei Unschärfe für den in dieser Arbeit gewählten Ansatz.

Neben der Interpretation der Daten ist die Entscheidung über die Signifikanz der Zielgrößen von besonderer Bedeutung. Der erweiterte Unsicherheitshaushalt macht eine neue Art von Hypothesentests notwendig, deren Weiterentwicklung den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit darstellt. Mittels der neuen Hypothesentests ist es möglich, Beobachtungen und Parameter zu testen, die sowohl Träger von wahrscheinlichkeitstheoretischen Unsicherheiten als auch von nicht-stochastischen Unsicherheiten (Unschärfe) sind. Auf diese Weise ist der komplette Ablauf der Datenanalyse in den Geo- und Ingenieurwissenschaften abgedeckt. Es wird die Diskrepanz zwischen der inneren und äußeren Genauigkeit von Ausgleichungsverfahren erklärt. Nicht die Daten selbst werden verbessert, sondern es kann besser beurteilt werden, ob die Daten signifikante Information tragen. Der im Rahmen dieser Arbeit gewählte Ansatz mit dem kompletten Ablauf der Datenanalyse in den Geo- und Ingenieurwissenschaften ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Die wesentlichen Unterschiede bestehen in der Identifikation und bei der Bestimmung der Größenordnung aller Einflussfaktoren auf die Unschärfe. Durch die Berücksichtigung der Unschärfe müssen alle anderen Datenverarbeitungsschritte erweitert werden. Sollte eine benötigte Information nicht signifikant aus den Beobachtungen ableitbar sein, kann aus der Interpretation der zufälligen Variabilität und der Unschärfe der Zielgrößen beurteilt werden, welche der Unsicherheiten (sofern möglich) reduziert werden sollte.

Die entwickelten Methoden werden auf Standardauswertemodelle (lineare Ausgleichsmodelle) der Geo- und Ingenieurwissenschaften übertragen und auf simulierte und reale Beispiele für die Detektion von Deformationen angewandt. Dies betrifft eine der Hauptaufgaben der Ingenieurgeodäsie, die Überwachung von Bauwerken, Rutschhängen und rezenten Krustenbewegungen. Ob bau- oder geotechnische Sicherungsmaßnahmen dort schnell und verlässlich eingeleitet werden können, hängt wesentlich von der Qualität der Mess- und Auswertemethodik ab. Diese benötigt ein Signifikanzniveau, das den Unsicherheitshaushalt adäquat berücksichtigt. Bislang wird jedoch nur von zufälligen Variationen der Messwerte bzw. der äußeren Bedingungen ausgegangen, obwohl in der Praxis die Unschärfe der Messwerte durch nicht eliminierbare Restsystematiken sowie Unschärfen der Messobjekte eine wichtige Rolle spielen. Mit dem im Vorhaben verfolgten Ansatz werden alle genannten Unsicherheitskomponenten gleichzeitig und spezifisch von den originären Beobachtungen bis zu den Zielgrößen verarbeitet und analysiert. Dadurch wird eine verfeinerte Interpretation der Resultate ermöglicht. Über den Rahmen des Vorhabens hinaus wird ein wesentlicher Beitrag zum Qualitätsmanagement bei geodätischen Mess- und Auswerteprozessen geleistet. Eine detailliertere Übersicht über die Arbeit wird im folgenden Teilkapitel gegeben.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Zu Beginn der Arbeit erfolgt eine Erläuterung der in der Datenanalyse und in den Beobachtungen auftretenden Arten von Unsicherheit. Des Weiteren wird die Charakteristik der Unsicherheiten für die aus Beobachtungen abgeleiteten Ermittlungsergebnisse und Parameter diskutiert. Basierend auf der Charakteristik der Unsicherheiten von Beobachtungen und Ermittlungsergebnissen werden in Kapitel 3 die theoretischen Grundlagen der verwendeten mathematischen Ansätze zur Beschreibung von Unsicherheiten vorgestellt. Im Speziellen handelt es sich um die Wahrscheinlichkeitstheorie, die Intervallmathematik, die Fuzzy-Theorie sowie um kombinierte Ansätze (unscharfe Zufallsgrößen). Der zweite Teil des Kapitels erläutert daraufhin die Ableitung der Unsicherheiten von Beobachtungsergebnissen und Parametern bei Vorliegen von zufälliger Variabilität und Unschärfe.

Mit Kapitel 4 beginnt der zentrale Teil der Arbeit, der sich mit der Weiterentwicklung von Hypothesentests bei Vorliegen des erweiterten Unsicherheitshaushaltes aus zufälliger Variabilität und Unschärfe beschäftigt. Dies stellt eine zentrale Aufgabe in allen Bereichen der Geo- und Ingenieurwissenschaften dar, in denen auf Annahmen (Modellen) beruhende Aussagen mittels Daten validiert werden sollen. Ein einführender Teil erläutert den Übergang von den klassischen Hypothesentests auf Hypothesentests mit unscharfen Daten. Nach der Herleitung eines generellen Entscheidungskriteriums erfolgt dessen Anwendung auf den eindimensionalen Fall. Für spezielle Referenzfunktionen von unscharfen Größen werden geschlossene mathematische Formeln angegeben, sodass eine einfache Anwendung der Methoden möglich ist. Die Behandlung des mehrdimensionalen Falles beruht auf der Abbildung der Testentscheidung in das Eindimensionale, sodass ein grundlegendes Werkzeug für Hypothesentests zur Verfügung steht. Abschließend wird die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. und 2. Art im unscharfen Fall hergeleitet. In Kapitel 5 werden die in Kapitel 4 entwickelten Hypothesentests auf die Standardmodelle der Geo- und Ingenieurwissenschaften (Geodäsie) übertragen. Dies umfasst im Wesentlichen den Globaltest einer Ausgleichung und die Formulierung der Allgemeinform einer Hypothese in der linearen Parameterschätzung. Einzelne spezielle Anwendungen der linearen Hypothese, wie die Ausreißersuche, die Modellwahl und die Sensitivitätsanalyse, runden das Kapitel ab.

Kapitel 6 widmet sich der Einbettung von Hypothesentests mit unscharfen Daten und Toleranzbereichen für den Annahmebereich in die Nutzentheorie, wodurch Konsequenzen im Entscheidungsprozess durch Verlustfunktionen berücksichtigt werden können. Nach einer kurzen Schilderung der klassischen Vorgehensweise bei der Entscheidungsfindung im Rahmen der Nutzentheorie werden Vorschläge für eine Erweiterung auf unscharfe Daten vorgestellt. Das letzte Kapitel der Arbeit spannt den Bogen hin zur Anwendung der entwickelten Methoden auf die Deformationsanalyse von z. B. Oberflächendformationen. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der statischen und kinematischen Deformationsanalyse, die anhand von realen und simulierten Beispielen mit dem erweiterten Unsicherheitshaushalt analysiert werden. Als Ergebnis der erweiterten Modellierungsmethode ist eine verfeinerte Interpretation der aus Beobachtungen abgeleiteten Zielgrößen (Parameter) und Signifikanzniveaus zur Beschreibung und Detektion von Deformationen möglich. Dies ermöglicht realistischere Aussagen, ob getroffene Annahmen durch die Daten validiert werden konnten.

Die vorliegende Arbeit bildet einen vollständigen Ablauf der (geodätischen) Datenanalyse von den originären Beobachtungen hin zu den Ergebnisgrößen einer Parameterschätzung ab. Dies schließt insbesondere die Verträglichkeitsuntersuchungen zwischen den Beobachtungen und den im Modell getroffenen Annahmen (unscharfen Hypothesentests) mit ein. An simulierten und realen Beispielen wird gezeigt, dass die Berücksichtigung von verschiedenen Unsicherheiten eine verfeinerte Interpretation der Daten erlaubt. Zudem sind die entwickelten Methoden auf viele Aufgabenstellungen der Geo-, Ingenieurwissenschaften und Geodäsie anwendbar.

### 1.3 Eigene Beiträge für die Beantwortung der Kernfragstellungen

Ziel dieser Arbeit ist die signifikante Erweiterung bisheriger Aufsätze zu einem erweiterten Unsicherheitshaushalt bei der (geodätischen) Datenanalyse (vgl. z. B. KUTTERER 2002a/b, SCHÖN 2003 sowie SCHÖN und KUTTERER 2006a/b/c), insbesondere auch vor dem Hintergrund der geodätischen Deformationsanalyse. Dabei wird in dieser Arbeit vorausgesetzt, dass sich der Unsicherheitshaushalt mit zufälliger Variabilität und systematischen Abweichungen zwischen Modell und Beobachtung (Impräzision bzw. Unschärfe) beschreiben lässt. Die *Impräzision* (engl.: imprecision) bzw. Unschärfe beschreibt dabei z. B. den subjektiven Anteil der epistemischen Unsicherheit. Da sich die Realität in ihrer Komplexität einer exakten Betrachtung entzieht, kann natürlich auch mit den besten Methoden nicht sichergestellt werden, dass bei der Unsicherheitsangabe für ein Ermittlungsergebnis in jedem Fall auch der reale Wert realistisch beschrieben ist.

Die genannten Ziele fordern einige Neuentwicklungen im Rahmen der Datenanalyse. Die wichtigsten eigenen Beiträge der Arbeit können dabei wie folgt zusammengefasst werden:

- Integration von Expertenwissen bei der Identifikation und Quantifizierung von Unschärfe (vgl. Kapitel 3.2.4).
- Anwendung der Parameterschätzung auf ein erweitertes Gauß-Markov-Modell und ein Gauß-Helmert Modell (Kapitel 3.3.2).
- Eindimensionale und mehrdimensionale Verträglichkeitsuntersuchungen der Daten mit den im Modell getroffenen Annahmen unter Berücksichtigung des erweiterten Unsicherheitshaushaltes und bei bekannter Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese (vgl. Kapitel 4).
- Entwicklung eines allgemein anwendbaren Werkzeuges für die Analyse der unscharfen Daten in der linearen Parameterschätzung (lineare Hypothese, vgl. Kapitel 5).
- Einbettung der Nutzentheorie in Hypothesentests mit unscharfen Daten bei Toleranzbereichen für den Annahmebereich (vgl. Kapitel 6). Diese Fragestellung stellt auch eine Erweiterung der klassischen Vorgehensweise bei der geodätischen Datenanalyse mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen dar.
- Vorstellung von Alternativen zum Hurwicz-Kriterium bei Intervallen für die Teststatistiken (vgl. Kapitel 6.3.2).
- Abbilden der kompletten Datenanalyse von den Beobachtungen zu den Zielgrößen bei einem erweiterten Unsicherheitshaushalt (inkl. mehrdimensionaler Verträglichkeitsuntersuchungen der Daten mit den im Modell getroffenen Annahmen).
- Übertragung der entwickelten Ansätze auf die statische geodätische Deformationsanalyse (vgl. Kapitel 7.2).
- Übertragung der entwickelten Ansätze auf die kinematische Deformationsanalyse (vgl. Kapitel 7.3).

Alle oben genannten Punkte stellen aufgrund der Berücksichtigung der Unschärfe eine Erweiterung der klassischen geodätischen Datenanalyse dar. Bei den fächerübergreifenden eigenen Beiträgen sind insbesondere die allgemeine Anwendbarkeit der Hypothesentests in linearen Modellen hervorzuheben und der vollständige Ablauf einer unscharfen Datenanalyse zu nennen. Alle Punkte werden noch einmal in den spezifischen Kapiteln herausgestellt, wenn der Leser einen tieferen Einblick in die Materie gewonnen hat. Die entwickelten Methoden sind grundsätzlich verträglich mit den internationalen Standards, wie dem „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)“. Der wesentliche Unterschied liegt in der Behandlung und Fortpflanzung des unscharfen (systematischen) Anteils des Unsicherheitshaushaltes. Des Weiteren wird bei allen Vorgehensweisen die jeweilige Überschätzungsproblematik auf ein Minimum reduziert bzw. dieser Effekt vollständig eliminiert, da eine Abbildung der Größen ins Eindimensionale erfolgt.



## 2 Charakteristika von Unsicherheiten in der Datenanalyse

In der Geodäsie und Geoinformation befasst man sich mit der Vermessung und Abbildung (von Teilen) der Erde, der Bestimmung ihrer Figur und des äußeren Schwerfeldes sowie der Erdrotationsparameter. Im Allgemeinen schließt dies die zeitliche Beschreibung von Objekten in (erdgebundenen) Koordinatensystemen mit ein (KAHMEN, 2006, S. 1) oder kann sogar eine zentrale wissenschaftliche Fragestellung darstellen. Dies erfordert eine Herstellung der Beziehungen zwischen den Objekten und den Koordinatensystemen unter Berücksichtigung sämtlicher Einflussfaktoren. Hierfür müssen die notwendigen Parameter mit Hilfe von (indirekten) Beobachtungen messtechnisch bestimmt werden. Am Ende dieser Prozesskette steht sowohl die Darstellung und Abspeicherung der gewonnenen Informationen in digitalen Informationssystemen oder Karten, als auch deren weitergehende Analyse. Bei der Erhebung von Daten und der Zusammenführung dieser mit Modellen spielt Unsicherheit eine wesentliche Rolle (KUTTERER, 2002b). Ob die aus Beobachtungen gewonnenen Informationen als gesichert gelten, bzw. für welche Aussagen sie sich eignen, kann nur beurteilt werden, wenn eine adäquate Modellierung aller Unsicherheiten bei den Beobachtungen, dem Objekt und den angesetzten Modellen (inkl. deren festen Modellparametern) erfolgt (vgl. Abbildung 2.1).

Die Ableitung der auftretenden Unsicherheiten für die Beobachtungen und die Modelle mit allen notwendigen Definitionen soll Hauptaufgabe der nächsten beiden Kapitel sein. Nach einer anfänglichen Motivation (Kapitel 2.1) folgen grundlegende Definitionen (Kapitel 2.2) für die im Rahmen der Arbeit wichtigen Unsicherheiten. Das Kapitel 2.3 enthält die Begründung für die in dieser Arbeit modellierten Arten der Unsicherheiten, anschließend werden in Kapitel 3.2 die dafür notwendigen mathematischen Grundlagen vorgestellt. Abschließend erfolgt im Kapitel 3.3.1 eine Erläuterung der mathematischen Vorgehensweise für die Ableitung der Unsicherheiten für die vollständig korrigierten und reduzierten Beobachtungen sowie für die freien Parameter (Kapitel 3.3.2) bei Standardausgleichsproblemen. Die Betrachtung der Unsicherheiten des (auch zeitlich veränderlichen) Objektes muss jedoch aufgrund der Komplexität weiteren (auch interdisziplinären) Arbeiten vorbehalten bleiben.

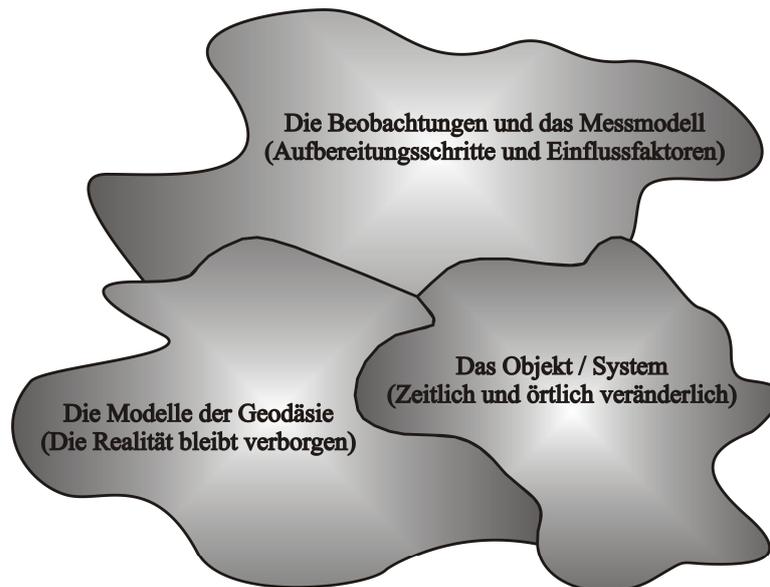


Abbildung 2.1: Die wesentlichen Komponenten der Unsicherheit bei der (geodätischen) Datenanalyse.

### 2.1 Motivation und Überblick

Eine der wichtigsten Informationsquellen für ein besseres Verständnis der realen Welt sind Beobachtungen. Beobachtungen können auf zweierlei Arten von Bedeutung sein. Zum einen sind sie als Werkzeug zu verstehen, um mittels eines physikalischen Experimentes eine Theorie über die reale Welt im Rahmen der zu erwartenden Genauigkeiten signifikant nachzuweisen (Validierung einer Theorie; epistemische Interpretation). Zum anderen wird versucht, aus Beobachtungen gewonnene Informationen bzw. Ergebnisse bestmöglich zu nutzen, um Modelle für die reale Welt zu entwickeln und zu konkretisieren (Modellwahl durch optimale Approximation des Modells an die Daten sowie die Konkretisierung des Modelles durch Bestimmung freier Modellparameter; physikalische Interpretation).

Beobachtungen stellen in jedem Falle ein physikalisches Experiment dar, dessen Ausgang in einem gewissen Rahmen als unsicher einzustufen ist, siehe z. B. (RABINOVICH, 2005). Ein Irrtum bei der Validierung oder

Modellwahl kann daher nie ausgeschlossen werden; man kann lediglich eine für die Praxis erträgliche Häufigkeit der Irrtümer durch genügend genaue (sofern dies möglich ist) Beobachtungen ermöglichen. Ob die theoretisch zu erwartende Häufigkeit der Irrtümer dabei in der Realität zutrifft, kann nur durch eine hinreichend gute Beschreibung der mit der Beobachtung und ihren Einflussfaktoren verbundenen Unsicherheiten ermöglicht werden. Eine Validierung oder Modellwahl ist also nur auf Basis einer realistischen Unsicherheitsbeschreibung der Beobachtungen erfolgsversprechend. Eine rein pragmatische Anpassung eines Modells an die Beobachtungen ohne Berücksichtigung ihrer Unsicherheiten greift zu kurz.

In der vorliegenden Arbeit sollen dabei sämtliche Größen als Beobachtung verstanden werden, die Aussagen über eine gewisse Eigenschaft eines Objektes treffen (BANDEMER, 2005, S. 18). Damit wird u. A. auch das Expertenwissen als Beobachtung eingestuft. Eine Unterscheidung wird nur getroffen, wenn Experten eine Einschätzung über die Unsicherheit anderer Beobachtungen liefern (vgl. Kapitel 3.2.3 und 3.2.4).

Eng verknüpft mit der Unsicherheit von Beobachtungen ist die Unsicherheit von Modellen. Denn zum einen werden Modelle und deren Modellparameter aus Beobachtungen abgeleitet, zum anderen werden häufig feste Modellparameter in Modelle eingeführt, die zuvor aus Beobachtungen abgeleitet wurden. Es ist daher naheliegend die Unsicherheiten von Beobachtungen und Modellen in einem gemeinsamen Ansatz zu behandeln. Wie in diesem Kapitel ausführlich dargestellt werden wird, kann die Unsicherheit dabei verschiedene Ursachen haben und damit auch verschiedene Charakteristika aufweisen. Verschiedene Arten von Unsicherheit erfordern verschiedene jeweils adäquate mathematische Beschreibungen (KUTTERER, 2002b, S. 16). In dieser Arbeit wird für die Beschreibung der Unsicherheiten auf drei Bereiche von Mathematik zurückgegriffen, die im Vorgriff auf die noch folgenden Ausführungen nicht widersprüchlich zueinander sein müssen, sondern sich vielmehr sinnvoll ergänzen bzw. kombiniert werden können:

- Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik, vgl. Kapitel 3.2.1)
- Intervallmathematik (vgl. Kapitel 3.2.2)
- Fuzzy-Theorie und Nested-Sets (vgl. Kapitel 3.2.3 und 3.2.4)
- Kombinierte Verfahren (vgl. Kapitel 3.2.5)

Während die Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Beschreibung von Glücksspielen zurück geht (JAYNES, 2003), war die ursprüngliche Idee der Intervallmathematik Rundungsungenauigkeiten zu beschreiben (MOORE, 1959 und 1979). Die ersten Aufsätze über unscharfe Mengen („ensembles flous“) gehen zurück auf MENGER (1951). Erst später führte ZADEH (1965) diese unscharfen Mengen unter dem Namen Fuzzy-Sets ein und nutzte sie zur Modellierung von linguistischen Unsicherheiten mittels der Fuzzy-Theorie. In den beiden letzten Jahrzehnten haben sich zusätzlich kombiniert wahrscheinlichkeitstheoretische und nicht-stochastische Ansätze in der Beschreibung von Unsicherheiten etabliert, die vornehmlich im Rahmen dieser Arbeit von Interesse sein werden.

Obwohl die Modellierung von Unsicherheiten eine zentrale Bedeutung besitzt, finden sich bisher in der geodätischen Literatur fast ausschließlich wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibungen der auftretenden Unsicherheiten. In verschiedenen anderen Fachbereichen haben sich alternative oder erweiterte Methoden zur rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Beschreibung von Unsicherheiten schon in größerem Umfang verbreitet. Beispiele hierfür finden sich in Mathematik, Informatik, den Wirtschaftswissenschaften und in verschiedenen Geowissenschaften. So veröffentlichten FERSON ET AL. (2007) einen umfangreichen Grundlagenbericht zur Behandlung von Unsicherheiten von Beobachtungen mit der Intervallmathematik, in dem auch zahlreiche Anwendungsgebiete aufgezählt werden. JAULIN ET AL. 2001 beschäftigen sich mit intervallmathematischen Methoden. Grundlagenwerke sind die Bücher von VIERTL (2003), AYYUB und MCCUAN (2003), AYYUB und KLIR (2005) sowie KLIR (2006), die sowohl wahrscheinlichkeitstheoretische, intervallmathematische, fuzzy sowie kombinierte Ansätze vorstellen. In FERSON ET AL. (2002) wird eine kombinatorische Behandlung von Unsicherheiten bei Beobachtungen und die Integration von Expertenwissen bei der Auswertung beschrieben. Intervallmathematische und Fuzzy-Methoden für inverse Probleme in der Geophysik werden in KREINOVICH ET AL. (2006) vorgestellt. Auch im Bauingenieurwesen sind in den Büchern von FELLIN ET AL. (2005) und MÖLLER und BEER (2004) sowie MÖLLER und REUTER (2008) kombinierte Ansätze aus wahrscheinlichkeitstheoretischen mit Fuzzy-Methoden dokumentiert. Einen Kurzüberblick über verschiedene Möglichkeiten zur Behandlung von Unsicherheiten im Bauingenieurwesen bietet sich dem Leser in MÖLLER und BEER (2008). Die zuvor genannten Veröffentlichungen sollen nur exemplarisch für eine größere Anzahl an Beiträgen stehen. Besonders erwähnenswert sind noch die Lehrbücher von VIERTL (1996) und BANDEMER (1997) und die Arbeit von KUTTERER (1994), die alle mehr oder weniger parallel entstanden sind.

Die bedeutendsten Arbeiten in der Geodäsie zur Behandlung eines erweiterten Unsicherheitshaushaltes findet man in KUTTERER (2002b), SCHÖN (2003) und WIESER (2002). WIESER gibt einen Überblick über verschiedene Methoden der Fuzzy-Theorie und der robusten Parameterschätzung. In KUTTERER (2002b) wird angeregt, dass die Unsicherheit in der geodätischen Datenanalyse durch systematisch (Impräzision) und zufällig wirkende Unsicherheiten beschrieben werden kann. Diese Unterteilung wird von SCHÖN (2003) bei der Analyse und Optimierung geodätischer Messanordnungen vertieft und konkretisiert und soll auch in der vorliegenden Arbeit übernommen werden. Die klassische Modellierung der Unsicherheiten (lineares VKFG mit ausschließlich zufälliger Variabilität) stellt dabei einen Spezialfall der erweiterten impräzisen Analyse aus KUTTERER (2002b) und SCHÖN (2003) dar. Auch in aktuellen Arbeiten wird zunehmend die Tendenz deutlich, dass bestehende Methoden zur Modellierung von Unsicherheiten ergänzt bzw. erweitert werden müssen. Dies erfordert nach HENNES und HEISTER (2007) eine umfassende Berücksichtigung aller signifikanten Einflüsse auf ein Ermittlungsergebnis, die für jede Aufgabenstellung i. A. individuell identifiziert werden müssen. Des Weiteren sind die Arbeiten von JOOS (2000) und GLEMSER (2001) bei der Unsicherheitsbeschreibung von Geodaten zu nennen.

Im folgenden Kapitel werden die Genauigkeits- und Unsicherheitsbegriffe eingeführt, die sich in der geodätischen Datenanalyse etabliert haben. Daraufhin werden Defizite der bestehenden Modellierung der Unsicherheiten aufgezeigt, die sich durch eine zu optimistische Beurteilung der vorhandenen Unsicherheit eines Ermittlungsergebnisses bemerkbar machen. Eine umfangreiche Diskussion aller zur Unsicherheit beitragenden Einflussfaktoren (vgl. Kapitel 2.3) und deren charakteristische Fortpflanzung auf das Ermittlungsergebnis soll die Ursache für die zu optimistische Beurteilung der Unsicherheiten verdeutlichen. Abschließend wird verbal motiviert, wie eine adäquate Modellierung und Fortpflanzung der Unsicherheiten aussehen kann.

## 2.2 Genauigkeits- und Unsicherheitsbegriffe in der (geodätischen) Datenanalyse

In den vergangenen Jahren hat die Diskussion von Qualitäts- und Unsicherheitsbegriffen wieder an Bedeutung gewonnen. Dies liegt daran, dass das Aufkommen neuer Sensoren und neuer Aufgabenfelder in der Messtechnik auch eine Überarbeitung und/oder zumindest eine Erweiterung des bisherigen Vokabulars/Wortschatzes erforderlich macht. Weitere Gründe für die Notwendigkeit eines überarbeiteten Vokabulars sind neue Ermittlungsmethoden für die Qualität und Unsicherheit von Messergebnissen und nicht zuletzt trägt auch die Forderung nach einer einheitlichen Sprache unter den verschiedenen Fachdisziplinen dazu bei.

Um die Konsistenz der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Begriffe zu gewährleisten, werden zu Beginn dieses Unterkapitels kurz die wesentlichen allgemein anerkannten Begriffe definiert. Am Ende des Unterkapitels wird dann auf neue und erweiterte Qualitäts- und Unsicherheitsbegriffe eingegangen und tlw. auf bestehende Defizite bei der Verwendung der Definitionen hingewiesen. Die folgende Zusammenstellung basiert im Wesentlichen auf zwei Normen (DIN 18709, DIN 18710), die speziell auf die Geodäsie hin ausgelegt sind und drei Normen, die aus einer interdisziplinären und/oder internationaler Zusammenarbeit entstanden sind (DIN 1319, DIN V ENV 13005 und DIN 55350). Die DIN 1319 ist als Grundlagenwerk zu verstehen und führt alle allgemeingültigen Begriffe ein. Darauf aufbauend werden in der DIN 18709 umfassend alle notwendigen Rahmenbegriffe und Messgrößen aus der Geodäsie erläutert. Die DIN 18710 spannt den Bogen hin zu Anwendungen, Anforderungen und konkreten Aufgabenstellungen in der Ingenieurgeodäsie. Derzeit befindet sich die DIN 18710 in der Überarbeitung (KLEIN und HEUNECKE, 2006). Das interdisziplinäre und internationale Gegenstück zur DIN 18709 ist der „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM, DIN V ENV 13005)“. Der GUM wurde ursprünglich als ISO/BIPM veröffentlicht und erschien unter dem deutschen Titel „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“. Inzwischen ist auch eine Erweiterung des GUM erschienen, der eine Fortpflanzung der Unsicherheiten mit Monte-Carlo-Verfahren empfiehlt (ISO, 2007). Eine wichtige Ergänzung für die Geodäsie stellt die DIN 55350 dar, die Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik erläutert.

Die klassischen Grundbegriffe in der (geodätischen) Datenanalyse sind Genauigkeit, Präzision und Auflösung (vgl. DIN 1319 und DIN 55350, Teil 13). Unter der **Genauigkeit** (engl.: accuracy) versteht man die Annäherung eines (originären) Wertes  $x_i$  an seinen wahren Wert, richtigen Wert oder an den **Erwartungswert** (engl.: expected value / expectation). Der **wahre Wert**  $\hat{x}$  (engl.: true value) ist der tatsächliche Merkmalswert. Da es sich nur um einen ideellen Wert handelt, ist zumeist der **richtige Wert** (engl.: conventional true value) von größerer Bedeutung, dessen Abweichung vom wahren Wert für Vergleichszwecke vernachlässigbar ist. Man spricht in diesem Falle auch vom „quasi“ wahren Wert. Der Erwartungswert  $E[x] = \bar{x}$  ist das „...mittlere Ermittlungsergebnis, das aus unablässig wiederholten Anwendungen des unter vorgegebenen Bedingungen angewendeten Ermittlungsverfahren gewonnen werden könnte.“ (DIN 55350, Teil 13, Abs. 1.5). Ein Ermittlungsverfahren kann je nach Anwendung eine Beobachtungs-, Mess-, Berechnungs-

oder Schätzverfahren sein. Die **Präzision** (engl.: precision) ist ein Maß für die gegenseitige Annäherung von unabhängigen Ermittlungsergebnissen bei mehrfacher Anwendung ein und desselben Ermittlungsverfahrens. Man kann die Präzision in zwei Unterkategorien unterscheiden:

- Wiederholpräzision: Präzision bei gleichen Ermittlungsbedingungen (z.B.: gleicher Beobachter, gleiches Instrument, gleiche äußere Einflüsse, etc.)
- Vergleichspräzision: Präzision bei wechselnden Ermittlungsbedingungen (z.B.: wechselnde Beobachter, wechselndes Instrument, wechselnde äußere Einflüsse, etc.)

Da die qualitative Definition der Präzision keinen unmittelbaren Bezug zum wahren oder richtigen Wert eines Ermittlungsergebnisses enthält, ist unmittelbar erkennbar, dass eine hohe Präzision nicht zwingend mit einer hohen Genauigkeit des Messergebnis in Verbindung gebracht werden kann (vgl. auch Abbildung 2.2). In älteren Definitionen werden die Präzision auch mit „innerer Genauigkeit“ und die Genauigkeit als „äußere Genauigkeit“ bezeichnet.

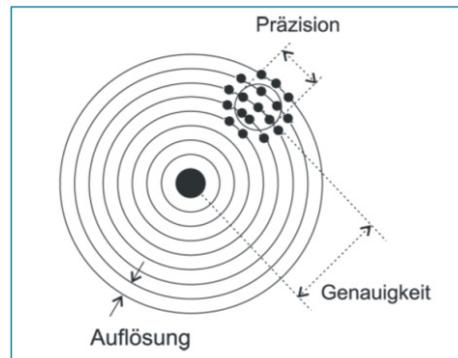


Abbildung 2.2: Zusammenspiel von Genauigkeit, Präzision und Auflösung nach HENNES (2007) und SCHMIDT (2003).

Im Allgemeinen setzt sich die Genauigkeit eines Ermittlungsergebnisses aus zwei Arten von auftretenden Unsicherheiten zusammen, den **zufälligen**  $\varepsilon$  und **systematischen**  $\delta$  **Abweichungen/Fehlern** (engl.: random and systematic errors). Zufällige Abweichungen sind als Abweichungen zwischen dem Erwartungswert  $\bar{x}$  und dem Ermittlungsergebnis  $x_i$  zu verstehen:

$$\varepsilon_i = x_i - \bar{x}, \quad (2.1)$$

mit Erwartungswert  $E[\varepsilon_i] = E[x_i - \bar{x}] = 0$ . Weder ihre Größenordnung noch ihr Vorzeichen können vorhergesagt werden. Alle theoretisch möglichen zufälligen Abweichungen eines Ermittlungsergebnisses werden daher über **Zufallsvariablen**  $x$  (engl.: random variables) mit Erwartungswert  $E[x] = \bar{x}$  und einer zugehörigen **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**  $\rho_0$  (engl.: probability density function, pdf) definiert.

Eine systematische Abweichung ist über den Unterschied zwischen Erwartungswert  $\bar{x}$  und wahren Wert  $\bar{x}$  definiert:

$$\delta = \bar{x} - \bar{x}. \quad (2.2)$$

Die **Unsicherheit** (engl.: uncertainty) eines Wertes  $x_i$  setzt sich aus der Summe ihrer mittleren zufälligen und systematischen Abweichung zusammen:

$$x_i = \bar{x} + \delta + \varepsilon_i. \quad (2.3)$$

Bei der Unsicherheit kann es sich je nach Ermittlungsverfahren um eine Beobachtungs-, Mess-, Berechnungs- oder Schätzunsicherheit handeln. Die systematische Abweichung setzt sich aus einem bekannten  $\delta_b$  und einem unbekanntem  $\delta_u$  Anteil zusammen:

$$\delta = \delta_b + \delta_u. \quad (2.4)$$

Wie beispielsweise in der DIN 18710 (Teil 1, A.2.3) gefordert, sind sämtliche Ermittlungsergebnisse um alle bekannten systematischen Abweichungen im Rahmen von Korrekturen und Reduktionen bestmöglich zu korrigieren. Dieser Schritt wird auch als Aufbereitungsprozesses der Messungen bezeichnet (vgl. auch Kapitel 2.3.1). Nach erfolgtem Aufbereitungsprozess ist der vollständig korrigierte und reduzierte Wert  $x_i^*$  nur noch von den unbekanntem systematischen Abweichungen und den zufälligen Abweichungen verfälscht:

$$x_i^* = \bar{x} + \delta_u + \varepsilon_i. \quad (2.5)$$

Die Ermittlung der Genauigkeit über den Erwartungswert setzt nach DIN 55350, Teil 3 also implizit voraus, dass das Ermittlungsergebnis keine systematischen Abweichungen enthält. Um mögliche Missverständnisse mit dieser Definition in der hier vorliegenden Arbeit zu vermeiden, wird der Begriff Genauigkeit immer nur dann verwendet, wenn als Referenz für ein Ermittlungsergebnis wahre oder richtige Werte vorliegen.

Die **Auflösung** (engl.: resolution) ist die kleinste anzeigbare oder digitalisierbare Messwertänderung. Tritt keine Systemträgheit oder Hysterese auf, so ist der reziproke Wert der Auflösung identisch mit der **Empfindlichkeit** (engl.: sensitivity), die das Verhältnis zwischen der physikalischen Eingangsgröße eines Messsignals und der elektrischen Ausgangsgröße beschreibt (HENNES, 2007).

Bei allen bis hier eingeführten Begriffen handelt es sich laut DIN 55350 (Teil 13) um qualitative Angaben. Als quantitative Angaben werden für die Präzision Standardabweichungen eingeführt. Die entsprechenden mehrdimensionalen Erweiterungen zu den folgenden quantitativen Aussagen werden, sofern benötigt, in den jeweiligen Kapiteln eingeführt. Eine Varianz  $\sigma_x^2$  bzw. eine Standardabweichung  $\sigma_x$  sind über den Erwartungswert der quadrierten zufälligen Abweichungen  $\varepsilon$  definiert (z. B. KOCH, 2004):

$$\sigma_x^2 = E[(\varepsilon_i)^2] = E[(x_i - \bar{x})^2] \quad \text{und} \quad \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}. \quad (2.6)$$

Laut DIN 18710 (Teil 1, A.4.3) und WELSCH ET AL. (2000) kann eine quantitative Angabe der Unsicherheit aus Formel (2.3) durch die quadratische Addition der systematischen und zufälligen Abweichungen definiert werden (DIN 18709):

$$\sigma_{MSE}^2 = \sigma_\delta^2 + \sigma_x^2 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{MSE} = \sqrt{\sigma_\delta^2 + \sigma_x^2}, \quad (2.7)$$

wobei die exakte Definition von  $\sigma_\delta^2$  offen bleibt und lediglich auf das VKFG aus der DIN 18709 (Teil 4) mit den Worten „Die Komponente  $\sigma_\delta$  kann aus den Unsicherheiten bei der Erfassung der Einflussfaktoren für die systematischen Messabweichungen  $\delta$  abgeschätzt werden.“, verwiesen wird. Fälschlicherweise wird in diesem Zusammenhang auch der Begriff Varianz für die Größe  $\sigma_{MSE}^2$  verwendet. Varianzen sind jedoch, wie SCHMIDT (2003) bemerkt, über den Erwartungswert der quadrierten zufälligen Abweichungen definiert (vgl. auch Formel (2.6)). Einen Zugang zu der Formel (2.7) als quantitatives Maß für die Unsicherheit findet man als Erwartungswert über die quadratische Abweichung zwischen wahren Wert  $\bar{x}$  und des Ermittlungsergebnisses  $x_i$  (HARTUNG ET AL., 2005, S. 125) mit dem **mittleren quadratischen Fehler** (engl.: mean square error, *MSE*):

$$\begin{aligned} MSE &= E[(\hat{x} - x_i)^2] = E[(\hat{x} - \bar{x} + \bar{x} - x_i)^2] = E[(\hat{x} - \bar{x})^2 + (x_i - \bar{x})^2 + 2(\hat{x} - \bar{x})(x_i - \bar{x})] \\ &= E[(\hat{x} - \bar{x})^2 + (x_i - \bar{x})^2] = E[(\hat{x} - \bar{x})^2] + \sigma_x^2 \quad \text{und} \quad E[(\hat{x} - \bar{x})(x_i - \bar{x})] = E[(\delta)(\varepsilon)] = \delta E[(\varepsilon)] = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Führt man den Term  $E[(\hat{x} - \bar{x})^2]$  aus Formel (2.8) mit  $\sigma_\delta^2$  ein, so erkennt man die mathematische Äquivalenz zwischen  $\sigma_{MSE}^2$  und dem *MSE*. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die hier eingeführte Definition lediglich ein Maß für die Quantifizierung der Unsicherheit darstellt und damit keine Aussage über die Fortpflanzung von systematischen Abweichungen trifft (vgl. auch DIN 18709, Teil 4, 2.9.6). Nach Ansicht des Autors ist der mittlere quadratische Fehler nicht für die Berechnung von Konfidenzbereichen für Unsicherheitsmaße (Konfidenzbereich für den wahren Wert) geeignet, wie es in der DIN 18710 (Teil 1, A.4.5) vorgeschlagen wird. Eine ausführliche Begründung für diese These wird in Kapitel 2.2.2 aufgezeigt.

Die Einführung eines **Konfidenzbereiches für den Erwartungswert** (engl.: confidence interval for the expected value), der bei gegebenem **Schätzwert** (engl.: estimated value)  $\hat{x}$  aus einer Stichprobe für  $x$  den Erwartungswert mit einer Wahrscheinlichkeit  $P = 1 - \alpha$  überdeckt, kann wie folgt aufgestellt werden:

$$P\{C_u \leq \bar{x} \leq C_o\} = 1 - \alpha. \quad (2.9)$$

Die Größen  $C_u$  und  $C_o$  bezeichnen die untere und obere Vertrauensgrenze und  $\alpha$  die **Irrtumswahrscheinlichkeit** (engl.: significance level). Eine vertafelte Berechnung des Konfidenzbereiches ist nur möglich, wenn man für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\rho_0$  von  $x$  eine Normalverteilung  $x \sim N(\bar{x}, \sigma_x^2)$  annimmt (DIN 18710-1):

$$P\{\hat{x}_i - k \cdot \sigma_x \leq \bar{x} \leq \hat{x}_i + k \cdot \sigma_x\} = P\{C_u \leq \bar{x} \leq C_o\} = 1 - \alpha, \quad (2.10)$$

wobei die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung definiert ist durch:

$$\rho_0(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma_x^2}} = N(\bar{x}, \sigma_x^2). \quad (2.11)$$

Die Wahl des Faktors  $k$  hängt direkt von der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  ab. Standardwerte für  $k$  können für gegebene Irrtumswahrscheinlichkeiten z. B. der DIN 18710-1 entnommen werden.

In der Geodäsie wird i. d. R. davon ausgegangen, dass man durch redundante Information in Form von überschüssigen Beobachtungen die Messunsicherheit mittels Ausgleichsalgorithmen hinreichend gut genug abschätzen kann. Dies setzt voraus, dass durch Korrekturen und Reduktionen die Annahme  $\hat{x} = \bar{x}$  zumindest hinreichend genau erfüllt wird, was jedoch nicht immer der Fall sein muss. So findet SCHÖN (2003, S. 13-14) Unterschiede zwischen verschiedenen Ansätzen zur Modellierung der Korrekturen und Reduktionen von elektrooptischen Distanzmessungen. Dies modifiziert unabdingbar auch den modellierten Anteil der systematischen Abweichung zwischen wahren und dem vollständig korrigierten und reduzierten Messwert. Eine Thematik, die bereits in KUTTERER (2002b, S. 63ff) erkannt wurde.

In der aktuellen Literatur zählen auch HENNES und HEISTER (2007, S. 142) eine Reihe von Beispielen auf, in denen die abgeschätzte Unsicherheit (als Maß für die Genauigkeit; Annäherung an den wahren Wert) eher die Präzision des Messergebnisses widerspiegelt und für viele Anwendungen keine realistische Abschätzung der Unsicherheiten ermöglicht. In HEISTER (2005a/b, S. 604) heißt es, dass die unvollständige Kenntnis über einen Messwert heute nicht mehr nur über die zufällige Abweichungen der Beobachtungen begründet ist, sondern auch durch die unvollständige Definition der Messgröße und durch zusätzliche Einflüsse bei der Bestimmung der Messgröße hervorgerufen wird. Auch in HENNES (2007, S. 137f) wird argumentiert, dass der Begriff der Unsicherheit als verlässliches Kriterium für die Qualität der Messung zudem beinhaltet, unter welchen Bedingungen ein Messwert gewonnen wurde (vgl. auch Kapitel 2.3.2). Eine ausführliche Darstellung der wirkenden Einflussfaktoren auf ein Beobachtungsergebnis und deren Unsicherheit wird in Kapitel 2.3 motiviert und zusammengestellt.

Die DIN 18710-1 (A.2.2) nennt die Bedingung, dass für die Auswertung von Messwerten alle relevanten Einflussfaktoren erfasst werden müssen und der Messwert um deren Auswirkungen korrigiert werden muss. Ein Vorschlag zur Modellierung der Unsicherheit, die durch die Korrekturen begründet ist, wird nicht gemacht. Des Weiteren verbleiben auch nach den Korrekturen und Reduktionsschritten unvermeidliche unbekannte systematische Abweichungen zwischen dem Beobachtungsergebnis und dem wahren Wert (vgl. Formel (2.5)). Aus diesem Grund wird vorgeschlagen, dass in folgenden Arbeiten eine Modellierung der Unsicherheiten nach den Vorgaben der internationalen Norm DIN V ENV 13005, dem sogenannten „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)“ erfolgt.

Neue Qualitätsbegriffe, die im Rahmen interdisziplinärer Projekte immer mehr an Bedeutung gewinnen, sind die **Linearität** (engl.: linearity) und der **Maximum Permissible Error (MPE)**. Die Linearität quantifiziert die maximale Abweichung vom linearen Verhalten und wird typischer Weise als Prozentwert des Anzeigebereiches definiert. Der MPE ist eine Angabe der maximal zulässigen Messabweichung eines Messgerätes bei Einhaltung vorgeschriebener Verhaltensregeln. Die Bedeutung der beiden Genauigkeitsbegriffe für den Geodäten ergibt sich unmittelbar aus den Forderungen nach einer Berücksichtigung aller Einflussfaktoren auf die Unsicherheit des Beobachtungsergebnisses. So sind häufig die Genauigkeitsangaben von Temperatursensoren oder Luftdrucksensoren, die die Einflussfaktoren Temperatur und Luftdruck bestimmen, auf Basis der Linearität zu finden. In HENNES (2007) wird zusätzlich darauf hingewiesen, dass der MPE zur Spezifikation der Genauigkeit von Laserscannern unter Berücksichtigung von verschiedenen Einflussfaktoren verwendet wird.

### 2.2.1 Charakteristika von zufälligen und systematischen Abweichungen

Die im vorangegangenen Unterkapitel eingeführten zentralen Genauigkeits- und Unsicherheitsbegriffe sollen im vorliegenden Unterkapitel anhand von drei aufeinander aufbauenden Beispielen erläutert werden. Das Augenmerk liegt dabei auf den Definitionen und der praktischen Interpretation von zufälligen und systematischen Abweichungen. Man stelle sich folgenden Ausgangspunkt vor:

**Beispiel 1:** Für eine hochgenaue Distanzmessung einer ca. 1 km langen Strecke  $s_{\text{ges}}$  steht ein Laserinterferometer zur Verfügung, das jedoch nur einen Messbereich von ca. 40 m hat. Für die Bestimmung der ca. 1 km

langen Strecke sind insgesamt 25 Einzelstreckenmessungen  $s_i$  erforderlich. Der funktionale Zusammenhang für die Gesamtstrecke  $s_{\text{ges}}$  ergibt sich mit dieser Vorgabe zu:

$$f_1(\mathbf{x}_1) = s_{\text{ges}} = s_1 + s_2 + \dots + s_{25} = \sum_{i=1}^{25} s_i. \quad (2.12)$$

Die Genauigkeit der Entfernungsmesseinheit ist vom Hersteller aus langen Versuchsreihen mit einer Standardabweichung von  $\sigma_{s_i} = 5 \mu\text{m} + 1 \text{ ppm}$  bekannt. Dies entspricht bei einer Teilstreckenlänge von 40 m einer Standardabweichung von  $\sigma_s(40 \text{ m}) = 45 \mu\text{m}$ .

Für eine einfache Darstellung des Beispiels kann von unkorrelierten Messungen und von einer Normalverteilung für die Einzelstrecken  $s_i \sim N(\bar{s}_i = 40 \text{ m}, \sigma_s^2)$  ausgegangen werden. Nach dem VKFG nach DIN 18709 (Teil 4, 2.9.9) ergibt sich die Varianz für die Gesamtstrecke durch:

$$\Sigma_{f_1 f_1} = \mathbf{F}_1 \Sigma_{x_1 x_1} \mathbf{F}_1^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}_1 = \left( \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} \right)_{x_1 = \bar{x}_1} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \quad (2.13)$$

$$\text{und } \Sigma_{x_1 x_1} = \begin{bmatrix} \sigma_{s_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{s_{25}}^2 \end{bmatrix} \quad \text{zu} \quad \Sigma_{f_1 f_1} = \sigma_{s_{\text{ges}}}^2 = (225 \mu\text{m})^2.$$

**Beispiel 2:** Leider konnte bei der Streckenmessung nicht sichergestellt werden, dass alle Anfangs- und Endpunkte sich genügend exakt auf einer Geraden befinden. Dies bewirkt, dass nicht die kürzeste Verbindung (Kathete) zwischen zwei Punkten erfasst wird, sondern lediglich die Hypotenuse gemessen werden kann. Eine geometrische Darstellung der Situation ist in Abbildung 2.3 zu sehen. Der funktionale Zusammenhang für die Gesamtstrecke ergibt sich mit dieser Vorgabe zu:

$$f_2(\mathbf{x}_2) = s_{\text{ges}} = \sqrt{s_1^{*2} - \Delta q_1^2} + \sqrt{s_2^{*2} - \Delta q_2^2} + \dots + \sqrt{s_{25}^{*2} - \Delta q_{25}^2} = \sum_{i=1}^{25} \sqrt{s_i^{*2} - \Delta q_i^2}, \quad (2.14)$$

wobei die  $s_i^*$  den gemessenen Hypotenusen entsprechen und  $\Delta q_i$  die Querabweichungen aus der Geraden sind. Bei  $\Delta q_i$  handelt es sich um eine zufällige Abweichung mit dem Erwartungswert  $E[\Delta q_i] = \Delta \bar{q}_i = 0$  und der Varianz  $E[(\Delta q_i)^2] = \sigma_{\Delta q_i}^2 = 0.0025 \text{ m}^2$ . Die Größe  $\Delta q_i$  ist nicht unmittelbar realisierbar, stellt jedoch eine Unsicherheitsquelle dar. Um eine einfache Darstellung zu haben, wird für die  $\Delta q_i$  eine Normalverteilung angenommen.

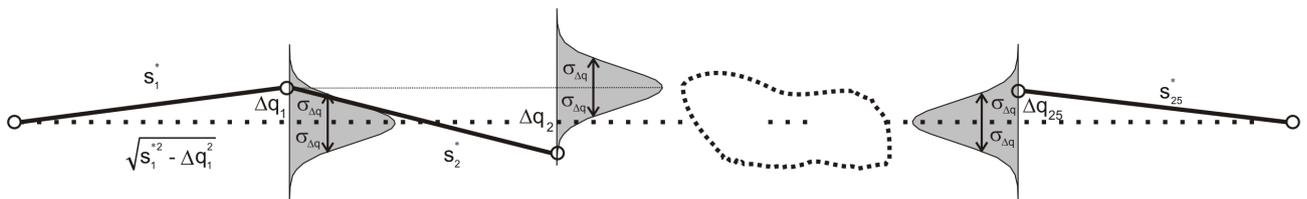


Abbildung 2.3: Teilstreckenmessungen mit einem Laserinterferometer.

Da bei Vorliegen einer Abweichung aus der Geraden die gesuchte Strecke immer zu lang gemessen wird, handelt es sich in diesem Fall um eine einseitige aber zufällige Abweichung. Die Größenordnung der Abweichung der gesuchten Strecke ist nicht reproduzierbar. Dies darf auf keinen Fall mit einem systematischen Fehler oder Abweichung verwechselt werden, der eine reproduzierbare Größe darstellt.

Denn während die zufälligen Abweichungen (Variabilität) sich als nicht vorhersehbare Abweichung zu ihrem „mittleren Wert“ (Erwartungswert) bemerkbar machen, wirken systematische Fehler und Abweichungen einseitig und sind als Unterschied zwischen Erwartungswert und wahren Wert zu verstehen. Systematische Fehler und Abweichungen können verschiedenster Ausprägung sein (SCHÖN 2003, S. 13ff), haben jedoch gemein, dass sie das Beobachtungsergebnis (vgl. auch 2.3.3) einseitig mit gleicher aber unbekannter Größenordnung verfälschen. Ein wichtiger zweiter Punkt zu dem Verständnis von systematischen Abweichungen und zufälliger Variabilität liegt in der Überlegung zur Wiederholbarkeit für deren Realisierungen. Bei gleichen vorherrschenden äußeren Bedingungen und Einflussfaktoren wären das Vorzeichen und die

Größenordnung des systematischen Fehlers bzw. Abweichung auch bei mehreren Realisierungen identisch (die Wiederholbarkeit ist gewährleistet), während die Größenordnung der zufälligen Abweichung zum Erwartungswert für jede Realisierung verschieden ist und das Vorzeichen zufällig wechselt. In der Praxis kann jedoch nur schwer direkt zwischen zufälliger Variabilität und systematischer Verfälschung der Beobachtungen unterschieden werden (SCHÖN 2003, S. 13). Aus diesem Grund werden die Auswirkungen systematischer Effekte in dieser Arbeit während des Aufbereitungsprozesses der Beobachtungen abgeschätzt (vgl. Kapitel 3.3.1).

In dem hier vorliegenden Beispiel ist die zweite Charakteristik einer systematischen Abweichung (die Wiederholbarkeit) nicht gegeben; es handelt sich bei der Abweichung aus der Geraden demnach um eine zufällige Abweichung, die das Ermittlungsergebnis lediglich einseitig verfälscht. Unter Anwendung des VKFG erhält man die Varianz für die Gesamtstrecke für das zweite Beispiel:

$$\Sigma_{f_2} = \mathbf{F}_2 \Sigma_{x_2} \mathbf{F}_2^T \text{ mit } \mathbf{F}_2 = \left( \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_2} \right)_{x_2 = \bar{x}_2}$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \frac{E[s_1^*]}{\sqrt{E[s_1^*]^2 - E[\Delta q_1]^2}} & \frac{-E[\Delta q_1]}{\sqrt{E[s_1^*]^2 - E[\Delta q_1]^2}} & \dots & \frac{E[s_{25}^*]}{\sqrt{E[s_{25}^*]^2 - E[\Delta q_{25}]^2}} & \frac{-E[\Delta q_{25}]}{\sqrt{E[s_{25}^*]^2 - E[\Delta q_{25}]^2}} \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\text{und } \Sigma_{x_2} = \begin{bmatrix} \sigma_{s_1}^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\Delta q_1}^2 & & & & \dots \\ 0 & & \dots & & & \dots \\ \dots & & & & & 0 \\ \dots & & & & \sigma_{s_{25}}^2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \sigma_{\Delta q_{25}}^2 \end{bmatrix} \text{ zu } \Sigma_{f_2} = \sigma_{s_{\text{ges}}}^2 = (225 \mu\text{m})^2.$$

Bei der Berechnung der Varianz für die Gesamtstrecke  $s_{\text{ges}}$  fallen zwei Defizite in der Modellierung auf:

- Es bleibt unberücksichtigt, dass die gesuchte Gesamtstrecke immer zu lang gemessen wird.
- Die Varianz für die Gesamtstrecke durch die Abweichung aus der Flucht muss zunehmen, da es sich um eine zweite Unsicherheitsquelle (neben der Streckenmessung selber) handelt.

Beide Ursachen begründen sich durch eine unzureichende Berücksichtigung der Nicht-Linearitäten bei der Berechnung der Erwartungswerte für die Gesamtstrecke  $E[s_{\text{ges}}] = \bar{s}_{\text{ges}}$  und ihrer Varianz

$E[(s_{\text{ges}} - \bar{s}_{\text{ges}})^2] = \sigma_{s_{\text{ges}}}^2$ . Eine Tatsache, auf die auch schon Hennes und Heister (2007) aufmerksam machen.

Diese Defizite können durch eine adäquate Berücksichtigung der Nicht-Linearitäten, z. B. durch Monte-Carlo-Verfahren behoben werden. Dies stellt jedoch nicht den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit dar. Dieses Beispiel soll lediglich für eine anschauliche Darstellung der Unterschiede zwischen zufälligen und systematischen Abweichungen dienen. Eine mathematisch strenge Lösung erhält man durch die integrale Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz von  $s_{\text{ges}}$  (siehe Kapitel 3.2.1).

**Beispiel 3:** Bei nachträglichen Untersuchungen hat sich herausgestellt, dass das Laserinterferometer einen Nullpunktfehler  $k_0$  aufweist, der durch Messanordnung zu  $k_0 = 15 \mu\text{m}$  bestimmt wurde (vgl. auch Abbildung 2.4). Leider kann nicht sichergestellt werden, dass sich der Nullpunktfehler seit der durchgeführten Streckenmessung nicht verändert hat. Aus diesem Grund soll lediglich die durch den Nullpunktfehler verursachte Unsicherheit bei der Streckenmessung berücksichtigt werden. Es kann davon ausgegangen werden, dass ein während der Messung vorhandener Nullpunktfehler seine Größenordnung nicht verändert und jede gemessene Teilstrecke immer um denselben Betrag verfälscht; eine Reproduzierbarkeit ist gewährleistet. In diesem Fall handelt es sich um eine systematische Abweichung und der funktionale Zusammenhang für die Gesamtstrecke ergibt sich zu:

$$f_3(\mathbf{x}_3) = s_{\text{ges}} = \sqrt{(s_1^* + k_0)^2 - \Delta q_1^2} + \sqrt{(s_2^* + k_0)^2 - \Delta q_2^2} + \dots + \sqrt{(s_{25}^* + k_0)^2 - \Delta q_{25}^2} = \sum_{i=1}^{25} \sqrt{(s_i^* + k_0)^2 - \Delta q_i^2}. \quad (2.16)$$

An dieser Stelle der Arbeit kann nur eine genäherte Abschätzung der durch den Nullpunktfehler verursachten Unsicherheit erfolgen. Jede Teilstrecke wird um  $15\ \mu\text{m}$  zu lang oder zu kurz gemessen und die Gesamtabweichung  $\delta_{k_0}$  summiert sich zu:

$$\delta_{k_0} = \sum_{i=1}^{25} k_0 = 25 \cdot 15\ \mu\text{m} = 375\ \mu\text{m}. \quad (2.17)$$

Kapitel 2.3.3 und 3.3.1 sowie 3.3.2 zeigen eine (mathematisch) fundierte Ableitung für die Auswirkung von systematischen Effekten auf ein Beobachtungsergebnis und auf freie Parameter einer Ausgleichung. Streng genommen bewirkt die Berücksichtigung des Nullpunktfehlers in der Modellierung der Streckenmessung eine stärkere bzw. geringere Abweichung des Endpunktes der Strecke aus der Flucht (vgl. Abbildung 2.4). Man kann diesen Effekt in einen zufälligen Anteil durch  $\Delta q$  und einen systematischen Anteil durch  $k_0$  aufspalten. Da dieser Effekt jedoch sehr gering ist und nicht zu einem besseren Verständnis der Thematik beiträgt, soll nicht genauer darauf eingegangen werden.

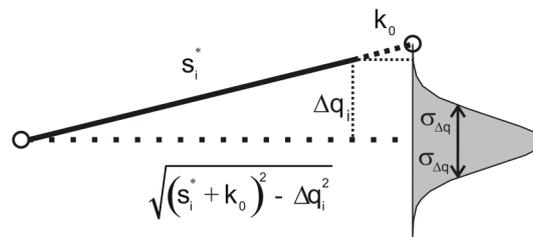


Abbildung 2.4: Auswirkung des Nullpunktfehlers auf eine der Teilstreckenmessungen.

Häufig wird versucht, die systematisch wirkenden Fehler durch mehrere Realisierungen unter Vergleichsbedingungen zu verzufälligen. Als Beispiel sei ein Zentrierfehler bei der Horizontalrichtungsmessung in mehreren Sätzen genannt, der bei einer Aufstellung das Ergebnis systematisch verfälscht. Wird jedoch zwischen den zu messenden Sätzen das Instrument neu zentriert, so wechseln im Rahmen des Zufalls Vorzeichen und Größenordnung des Fehlers; er ist jetzt als zufällig zu betrachten. An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Vorgehensweise u. U. trotzdem zu einer einseitigen Verfälschung des Ergebnisses führen kann. Dafür soll ein weiteres Beispiel betrachtet werden:

**Beispiel 4:** Bei der Basislattenmessung bewirkt eine nicht senkrechte Ausrichtung dieser zum Instrument eine zu lange Streckenmessung. Durch eine häufige Ausrichtung kann der Fehler verzufällig werden, beeinflusst das Ergebnis jedoch weiterhin einseitig, da die Strecke immer zu lang gemessen wird.

Es bleibt festzuhalten, dass eine Aneinanderreihung von systematischen Fehlern zur Verzufälligung dieser führen kann, jedoch muss von Fall zu Fall geprüft werden, ob das wahre Ergebnis weiterhin einseitig aber zufällig verfälscht wird. Es existiert eine Vielzahl an Beispielen, bei denen eine Verzufälligung von Effekten nicht möglich ist, bzw. bei denen die Komplexität der Modelle (Modellannahmen) eine umfassende Wiederholbarkeit nicht zulässt. Des Weiteren sind durch den logistischen und finanziellen Rahmen bei der Verzufälligung in der Praxis Grenzen gesetzt (KUTTERER, 2002b, S. 24). Die Betrachtung dieser Beispiele, bei denen eine wahrscheinlichkeitstheoretische Aussage über ihre Unsicherheiten nicht möglich ist, soll Schwerpunkt dieser Arbeit sein. In Kapitel 2.3.3 werden die Auswirkungen der verschiedenen Unsicherheiten auf die Beobachtungsergebnisse und freien Parameter detailliert diskutiert.

## 2.2.2 Beispiele für eine zu optimistische Beurteilung von Unsicherheiten

Wie in Kapitel 2.3 noch gezeigt wird, kann eine zu optimistische Beurteilung von Unsicherheiten durch eine Vielzahl von Ursachen hervorgerufen werden. Als erste grobe Untergliederung dieser Ursachen kann man in eine nicht angepasste Methodik und in der Vernachlässigung von Einflussfaktoren für die aus Beobachtungen abgeleiteten Ermittlungsergebnisse unterscheiden. Dies soll vorerst an einigen Beispielen herausgestellt werden. Bei den im Folgenden analysierten Beispielen wurden rein wahrscheinlichkeitstheoretische Ansätze zur Beschreibung der auftretenden Unsicherheiten von den jeweiligen Autoren angewandt.

Die ersten beiden Beispiele beschäftigen sich mit den historischen Messungen der Lichtgeschwindigkeit (MCNISH, 1962) und der Länge einer astronomischen Einheit (AE; STIGLER, 1996). Abbildung 2.5 zeigt Messungen der Lichtgeschwindigkeit ( $299.792.458\ \text{m/s}$ ) mit den dazu gehörigen Konfidenzbereichen. Leider ist nicht durch mehrere unabhängige Quellen eindeutig nachweisbar, um welche Konfidenzbereiche es sich handelt. HENRION und FISCHHOFF (1986, S. 793) sagen, dass es sich um einen Konfidenzbereich mit

$1 - \alpha = 68,3\%$  handelt. In diesem Fall sind die angegebenen Wertebereiche keineswegs realistisch, sondern viel zu optimistisch, was HENRION und FISCHHOFF (1986) auch statistisch belegen.

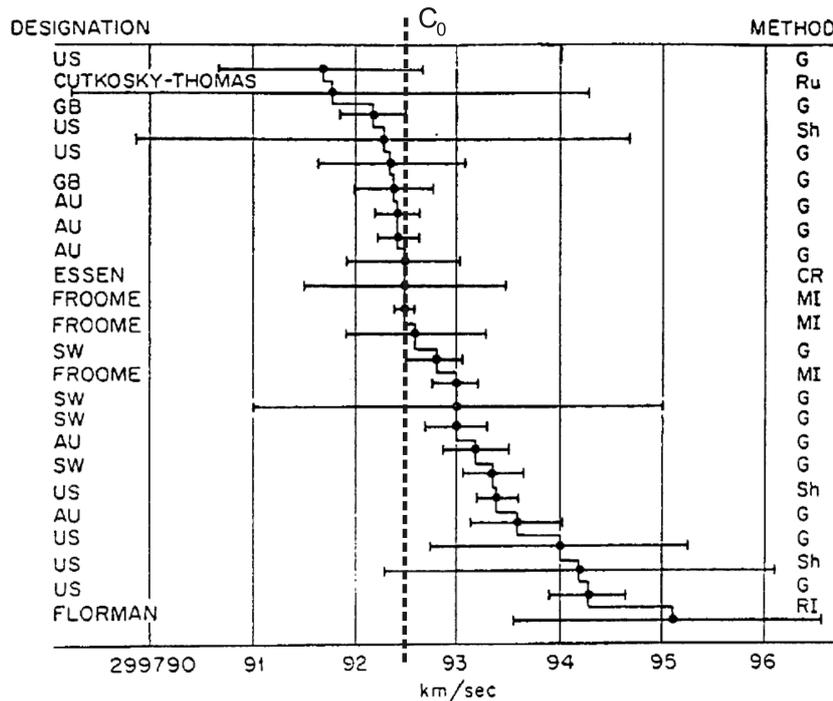


Abbildung 2.5: Messungen der Lichtgeschwindigkeit mit Angabe der Konfidenzbereiche (McNISH, 1962).

Die Tabelle 2.1 zeigt die Entfernungsbestimmungen für eine AE (Entfernung zwischen Sonne und Erde) mit den zugehörigen Konfidenzbereichen (STIGLER, 1996 und YODEN, 1972). Wie auch bei der Lichtgeschwindigkeit lässt sich eine klare Unterschätzung des Konfidenzbereiches im Bezug auf die verschiedenen Ermittlungsergebnisse aufdecken. Besonders auffällig sind die Ermittlungsergebnisse 1, 9, 12 und 15. Darüber hinaus fällt auf, dass lediglich zwei Konfidenzbereich den richtigen Wert von 92,956 Millionen Meilen enthalten.

Nummer	Quelle und Datum	AE in Millionen Meilen	Experimentelle Abschätzung des Konfidenzbereiches
1	Newcomb, 1895	93,28	93,20–93,35
2	Hinks, 1901	92,83	92,79–92,87
3	Noteboom, 1921	92,91	92,90–92,92
4	Spencer Jones, 1928	92,87	92,82–92,91
5	Spencer Jones, 1931	93,00	92,99–93,01
6	Witt, 1933	92,91	92,90–92,92
7	Adams, 1941	92,84	92,77–92,92
8	Brouwer, 1950	92,977	92,945–93,008
9	Rabe, 1950	92,9148	92,9107–92,9190
10	Millstone Hill, 1958	92,874	92,873–92,875
11	Jodrell Bank, 1959	92,876	92,871–92,882
12	S. T. L., 1960	92,9251	92,9166–92,9335
13	Jodrell Bank, 1961	92,960	92,958–92,962
14	Cal. Tech., 1961	92,956	92,955–92,957
15	Soviets, 1961	92,813	92,810–92,816

Tabelle 2.1: Verschiedene Werte für eine Astronomisch Einheit (AE) mit experimenteller Abschätzung des Konfidenzbereiches nach STIGLER (1996) und YODEN (1972).

Weitere aussagekräftige Beispiele für die Messung der Schwere/Erdbeschleunigung (YODEN, 1972) und einigen weiteren Naturkonstanten (inkl. statistisch begründeter Aussagen) finden sich z. B. in HENRION und FISCHHOFF (1996). Eine guter Überblick über weitere Literaturquellen erhält man auch in FERSON ET AL. (2007, S. 127ff).

Der Berechnungsweg für die gegebenen Konfidenzbereiche ist nicht in allen Beispielen klar nachvollziehbar, sodass im Nachhinein nicht eindeutig nachgewiesen werden kann, in welchem Umfang methodische Defizite und nicht berücksichtigte Unsicherheitsquellen auf die mangelnde Abschätzung des Konfidenzbereiches eine Rolle spielen. YOUNDEN (1972, S. 4) macht das unzureichende Wissen über systematische Fehler für die großen Diskrepanzen verantwortlich. HENRION und FISCHHOFF (1986, S. 794) fällt auf, dass zeitlich benachbarte Ermittlungsergebnisse aufgrund gleicher Versuchsaufbauten zu ähnlichen Ermittlungsergebnissen kommen, die jedoch weit vom richtigen Wert abweichen.

Ein weiteres Beispiel soll die Defizite einer nicht angepassten Methodik bei der Behandlung von Unsicherheiten für Ermittlungsergebnisse aufzeigen. Grundlage der Überlegungen ist die Berechnung eines Konfidenzbereiches eines skalaren Ermittlungsergebnisses auf Basis des mittleren quadratischen Fehlers (vgl. Formel (2.8)), wie es in der DIN 18710 (Teil 1, A.4.5) vorgeschlagen wird. Der wahre Wert eines Ermittlungsergebnisses  $\bar{x} = 1$  ist um eine (unbekannte) systematische Abweichung  $\delta_u$  gemäß Formel (2.4) und um eine normalverteilte zufällige Abweichung  $\varepsilon_i$  gemäß Formel (2.1) verfälscht. Die (theoretische) Varianz  $\sigma_x^2 = 1$  von  $\varepsilon_i$  aus Formel (2.6) wird in diesem Beispiel als konstant vorausgesetzt. Abbildung 2.6 zeigt eine geometrische Interpretation des Grundgedanken:

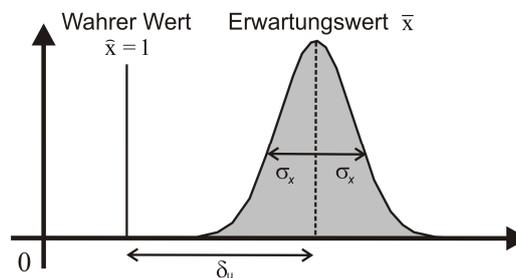


Abbildung 2.6: Ein um systematische und zufällige Abweichungen verfälschter wahrer Wert  $\bar{x}$ .

Ziel bei der Berechnung des Konfidenzbereiches ist die Einschließung des wahren Wertes mit einer Wahrscheinlichkeit von 84,13%. Folgt man den Empfehlungen der DIN 18710 (Teil 1, A.4.5) kann dies bei einseitiger Fragestellung mit der folgenden Formel durchgeführt werden:

$$P\{\hat{x}_i - k \cdot \sigma_{MSE} \leq \bar{x}\} = P\{C_u \leq \bar{x}\} = 1 - \alpha \quad \text{mit} \quad \hat{x}_i \rightarrow E[x_i] = \bar{x} + \delta_u, \quad (2.18)$$

wobei für  $\alpha = 0,159$  und bei Normalverteilung  $k = 1,0$  folgt. Der mittlere quadratische Fehler und die daraus abgeleiteten unteren Vertrauensgrenzen  $C_u$  sind für verschiedene unbekannt systematische Abweichungen in Tabelle 2.2 dargestellt und  $\sigma_{MSE}$  wurde gemäß Formel (2.7) berechnet. Der Schätzwert  $\hat{x}_i$  für die Zufallsvariable  $x_i$  konvergiert bei einer unendlich großen Stichprobe gegen den Erwartungswert:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_i \rightarrow E[x_i] = \bar{x} + \delta_u$ .

Systematische Abweichung: $\delta_u$	Varianz für die zufällige Abweichung $\varepsilon_i$ : $\sigma_x^2$	$\sqrt{MSE}$ bzw. $\sigma_{MSE}$	Untere Vertrauensgrenze gemäß DIN 18710 (Teil 1, A.4.5): $C_u$	Korrekte Wahrscheinlichkeit: $1 - \alpha = P_{\text{kor}}\{C_u \leq \bar{x}\}$
0	1	1.0000	0.0000	0.8413
0,1	1	1.0050	0.0950	0.8173
0,2	1	1.0198	0.1802	0.7938
0,3	1	1.0440	0.2560	0.7716
0,5	1	1.1180	0.3820	0.7317
0,7	1	1.2207	0.4793	0.6987
1,0	1	1.4142	0.5858	0.6606
1,5	1	1.8028	0.6972	0.6190
2,0	1	2.2361	0.7639	0.5933
3,0	1	3.1623	0.8377	0.5645
5,0	1	5.0990	0.9010	0.5394
10,0	1	10.0499	0.9501	0.5199
100,0	1	100.0050	0.9950	0.5020

Tabelle 2.2: Angabe des mittleren quadratischen Fehlers und die berechnete untere Vertrauensgrenze  $C_u$ .

Der mittlere quadratische Fehler ist nur für eine genäherte Berechnung von Konfidenzbereichen zur Einschließung des wahren Wertes geeignet, da der „Shift / Offset“ zwischen Erwartungswert der Zufallsvariable  $x$  und wahren Wert nicht korrekt berücksichtigt wird. Wie auch schon KUTTERER und SCHÖN (2004) argumentieren, wird der Unterschied zwischen der korrekten und gemäß DIN 18710 berechneten Lösung mit wachsender Größe systematischer Restfehler immer bedeutender. Die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ , dass der wahre Wert außerhalb des Konfidenzbereiches liegt, konvergiert mit wachsender systematischen Restabweichung gegen 50%:

$$\lim_{\delta_u \rightarrow \infty} P\{\hat{x}_i - k \cdot \sigma_{MSE} \leq \bar{x}\} = P\{C_u \leq \bar{x}\} \Rightarrow 50\% \quad \text{für } k=1. \quad (2.19)$$

Ähnlich schlechte Approximationen erhält man für kleine Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha$ , mit dem Unterschied, dass in diesem Fall für große systematische Abweichungen viel zu große Konfidenzbereiche erhalten werden (vgl. auch KUTTERER und SCHÖN, 2004).

Die korrekten Ergebnisse für die Wahrscheinlichkeit, mit der der wahre Wert im berechneten Konfidenzbereich (siehe letzte Spalte von Tabelle 2.2) liegt, wurden durch eine verteilungsfreie Berücksichtigung der systematischen Abweichungen wie folgt berechnet:

$$P_{\text{korr}}\{\hat{x}_i - \delta_u - k \cdot \sigma_x \leq \bar{x}\} = P_{\text{korr}}\{C_u \leq \bar{x}\} = 1 - \alpha \quad \text{mit } \hat{x}_i \rightarrow E[x_i] = \bar{x} + \delta_u. \quad (2.20)$$

In KUTTERER und SCHÖN (2004) ist darüber hinaus eine Behandlung von systematischen Abweichungen mittels verschiedener Verteilungsfunktionen (z.B. Gleichverteilung) dargestellt, wie es auch im GUM (ISO, 1995) vorgeschlagen wird. Darüber hinaus werden die verschiedenen Ansätze kritisch miteinander verglichen.

Abschließend sollen in diesem Kapitel noch einige aktuelle Literaturquellen genannt werden, die auf eine zu optimistische Beurteilung von auftretenden Unsicherheiten hinweisen. So nennt HENNES (2007) eine Reihe von Faktoren, die bei Abschätzung der auftretenden Unsicherheiten vernachlässigt werden. Dazu gehören fehlende Informationen, wie das Ermittlungsergebnis zustande gekommen ist und fehlende Einflussfaktoren bei der Definition von Messgrößen und Ermittlungsergebnissen. Des Weiteren wird bei HENNES (2007, S. 142) darauf hingewiesen, dass bekannte Auswertverfahren oftmals zu optimistische Abschätzungen der Genauigkeit liefern. Dies wird auch durch die Aussagen von HENRION und FISCHHOFF (1986, S. 794) gestützt, denn zumeist fließen in die Ermittlungsergebnisse die (originären) Beobachtungen des selben oder gleichen Sensors ein, was dazu führt, dass systematische Abweichungen unerkannt bleiben und nicht korrigiert werden können. SCHÖN (2003) macht darauf aufmerksam, dass für Streckenmessungen in Lehrbüchern verschiedene Korrekptions- und Reduktionsformeln vorhanden sind und belegt dies mit den Büchern von RUEGER (1996) sowie JOECKEL und STÖBER (1999). Bei kinematisch messenden Systemen sind oftmals Latenzzeiten zu berücksichtigen, die einseitig und damit systematisch auf die Ergebnisse wirken (HENNES und HEISTER, 2007).

Weitere Beispiele in der Geodäsie findet man insbesondere bei der Zusammenführung der Ergebnisse aus verschiedenen Messmethoden, wie z. B. GPS und Tachymetrie. Es liegt nahe, dass die fehlende Berücksichtigung von systematischen Abweichungen und eine nicht angepasste Methodik der Grund für die zu optimistische Beurteilung der Unsicherheiten von Ermittlungsergebnissen ist. Dies soll im Rahmen von Verträglichkeitsuntersuchungen der Beobachtungen mit den im Modell getroffenen Annahmen im Folgenden untersucht werden.

### 2.3 Verträglichkeit zwischen Theorie (Modell) und Experiment (Beobachtung)

Im Unterkapitel 2.2 wurden einige für die Arbeit wichtige Begriffe bei der Modellierung von Unsicherheiten eingeführt. Daran anschließend soll jetzt der Prozess der (geodätischen) Datenanalyse vorgestellt werden, um darauf aufbauend die Unsicherheitsbegriffe den einzelnen Arbeitsschritten der (geodätischen) Datenanalyse zuordnen zu können. Die Darstellungen orientieren sich an BANDEMER (1997, 2005), KUTTERER (2002b) und SCHÖN (2003). In dieser Arbeit wird eine Untergliederung der Beobachtungen in (originäre) Beobachtungen, Vorkenntnisse und Seiteninformationen eingeführt, um einen besseren Zugang zu den Unsicherheiten von aus Beobachtungen und Modellen abgeleiteten Ermittlungsergebnissen zu haben. In Anlehnung an BANDEMER (2005) folgt in diesem Kapitel eine Diskussion der Wechselwirkungen zwischen der theoretischen Erklärung der Realität (dem Modell) und dem physikalischen Experiment (der Beobachtung).

### 2.3.1 Modelle, Beobachtungen, Seiteninformationen und Vorkenntnisse

Für die Bestimmung der geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Erde ist es notwendig, diese in Form von Parametern und deren funktionalen Zusammenhängen in Modellen zu beschreiben. Dabei wird zwischen *freien* und im Vorhinein verfügbaren *festen Modellparametern* unterschieden. Der Begriff der Modelle und festen Modellparameter wird hier mit theoretischem Hintergrund eingeführt, da ein Erklärungsversuch für die Realität bereits vor dem eigentlichen Experiment (der Beobachtung) existiert. Diese Definition schließt nicht aus, dass das Modell bzw. einzelne fest im Modell verankerte Parameter durch die Verknüpfung verschiedener Experimente und Datensätze im Vorhinein bestimmt wurden (vgl. SCHÖN, 2003, S. 34). Während die Bestimmung der freien Modellparameter für die geometrische bzw. physikalische Beschreibung (von Teilen) der Erde gerade das Ziel einer Analyse darstellt, werden die festen Parameter benötigt, um die unter tatsächlich vorherrschenden Bedingungen (experimentell) gewonnenen Daten an die Modellvorstellungen anzupassen. Während die (originäre) Beobachtung die Realität beschreibt, wird in den Modellen eine vorgefundene oder erwünschte Situation beschrieben. Für die Bestimmung der freien Parameter wird dann im Allgemeinen eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadratsumme durchgeführt. Soll im Rahmen der Ausgleichung die Verfügung über feste Parameter verbessert werden, so werden diese als freie Parameter in die Ausgleichung eingeführt und geschätzt.

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass ein mathematisches Modell bereits vorliegt. Dies kann i. d. R. vorausgesetzt werden (KUTTERER, 2002b, S. 15). Es existieren aber auch Ansätze, bei denen das nicht der Fall sein muss. So beschreibt HEINE (2000) die Modellierung von Deformationsprozessen durch Volterra- und Fuzzy-Modelle sowie Neuronale Netze. Des Weiteren beschreiben BOEHM und KUTTERER (2006) sowie MARTIN und KUTTERER (2007) die Deformationen einer Schleuse mit Hilfe von ANFIS (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference Systems). Losgelöst von der Voraussetzung der mathematischen Modellbildung stellt die Parametrisierung und die Sensitivität von Modellen und Parametern in der Geodäsie eine wichtige Fragestellung dar. Diese Themen werden in Kapitel 5.4.2 und 5.4.3 ausführlich diskutiert. Eine reine Anpassung der Modelle an die Beobachtungen ohne Berücksichtigung ihrer Unsicherheiten greift zu kurz.

Für die weiteren Betrachtungen bietet sich an dieser Stelle eine Unterteilung des Begriffes „Modell“ in *Modelle der Geodäsie* und *Messmodelle* (KUTTERER, 2002b, S. 11) an. Die Modelle der Geodäsie, die Vorgänge und Zustände der realen Welt in einem allgemeinen Kontext beschreiben, verlangen die Festlegung von Modellvoraussetzungen, wie z. B. bestimmter atmosphärischer Bedingungen. Dem gegenüber ist es gerade Aufgabe der Messmodelle, die physikalischen Voraussetzungen in den Modellen der Geodäsie durch Korrekturen an die experimentell gewonnenen Daten (Beobachtungen) zu berücksichtigen. Aus diesem Grund sind die festen Parameter zumeist dem Messmodell zuzuordnen, während die freien Parameter den Modellen der Geodäsie zugeschrieben werden müssen. Eine ausführliche Diskussion über das Wechselspiel zwischen den Modellen der Geodäsie und den Messmodellen kann in SCHÖN (2003, S. 11ff) nachgelesen werden<sup>2</sup>.

Im Wesentlichen kann das verfolgte Ziel der Geodäsie darauf beschränkt werden, die physikalisch-geometrische Realität durch die freien und festen Modellparameter und deren funktionale Zusammenhänge (Modelle der Geodäsie) bestmöglich zu approximieren. In diesem Zusammenhang kann bestmöglich je nach Aufgabe auch bedeuten, mit einer geringen Anzahl an Parametern auszukommen, um den Modellierungs- und Auswerteaufwand möglichst effizient gestalten zu können. Dies ist gleichbedeutend mit einer hinreichenden und geeigneten Beschreibung der Realität für die spezifische Aufgabenstellung. Ist die Anzahl der Modellparameter gering und deren funktionale Zusammenhänge einfach, so wird von einer geringen Komplexität des Modells gesprochen. Folglich ist der Aufwand für deren Bestimmung geringer, was jedoch zumeist eine stärkere Diskrepanz zwischen Realität und Modell folgert. Bei steigender Anzahl an Parametern wird die Annäherung zwischen Realität und Modell i. d. R. verbessert, was jedoch wiederum eine steigende Komplexität des Modells deduziert. In Kapitel 2.3.2 und 2.3.3 werden die damit induzierten Unsicherheiten für die freien Modellparameter diskutiert. Die Diskussion, ob es sich bei komplexeren Modellen immer um die „besseren“ Modelle handelt, soll in dieser Arbeit nicht geführt werden. Es wird jedoch davon ausgegangen, dass ein einfacheres Modell jederzeit aus einem komplexeren Modell durch Streichen von Parametern und durch Vereinfachung funktionaler Zusammenhänge gewonnen werden kann. Dies ermöglicht in Kapitel 5.4.2 eine Diskussion einer Modellwahl bei Vorliegen von Impräzision, siehe z. B. KOCH (2004) für den rein stochastischen Fall.

In der Geodäsie werden die freien Parameter zumeist durch eine (hoch) redundante Anzahl von Beobachtungen mithilfe von Ausgleichungsmodellen bestimmt. In der vorliegenden Arbeit sollen dabei sämtliche Größen als Beobachtung verstanden werden, die Aussagen über eine gewisse Eigenschaft eines Objektes treffen

<sup>2</sup> In SCHÖN (2003) wird für „Modelle der Geodäsie“ der Begriff „geodätische Modelle“ verwendet

(BANDEMER, 2005, S. 18). Damit gehört u. A. auch Expertenwissen als Beobachtung eingestuft. Eine Unterscheidung wird nur getroffen, wenn Experten eine Einschätzung über die Unsicherheit anderer Beobachtungen liefern (vgl. Kapitel 3.2.3). Bei der Anwendung der allgemein entwickelten Ansätze in Kapitel 7 liegt das Hauptaugenmerk in dieser Arbeit wie in SCHÖN (2003) auf der Bestimmung von Punktkoordinaten als freie Parameter. Die Überlegungen werden im Rahmen der kinematischen Deformationsanalyse (vgl. Kapitel 7.3) aber auch auf andere Fragestellungen, wie z. B. auf das Übertragungsverhalten von Bauwerken, angewandt. Da die freien Parameter jedoch nicht direkt beobachtet werden können, handelt es sich um indirekte Beobachtungen, die mit Hilfe von *Seiteninformationen* (zusätzlichen Informationen), den *festen Modellparametern*, *Sensorparametern* und den *Vorkenntnissen* über die Messmodelle auf die in den Modellen der Geodäsie vorherrschenden Voraussetzungen angepasst werden (vgl. Abbildung 2.7). Anpassen bedeutet in diesem Zusammenhang die Anbringung von Korrekturen, für die Beseitigung von bekannten systematisch wirkenden Einflüssen  $\delta_b$  zwischen beiden Modellen (vgl. auch Kapitel 3.3.1). Nach Anbringung der Korrekturen und Reduktionen verbleiben nur noch die unbekannt systematischen Abweichungen  $\delta_u$  gemäß Formel (2.5).

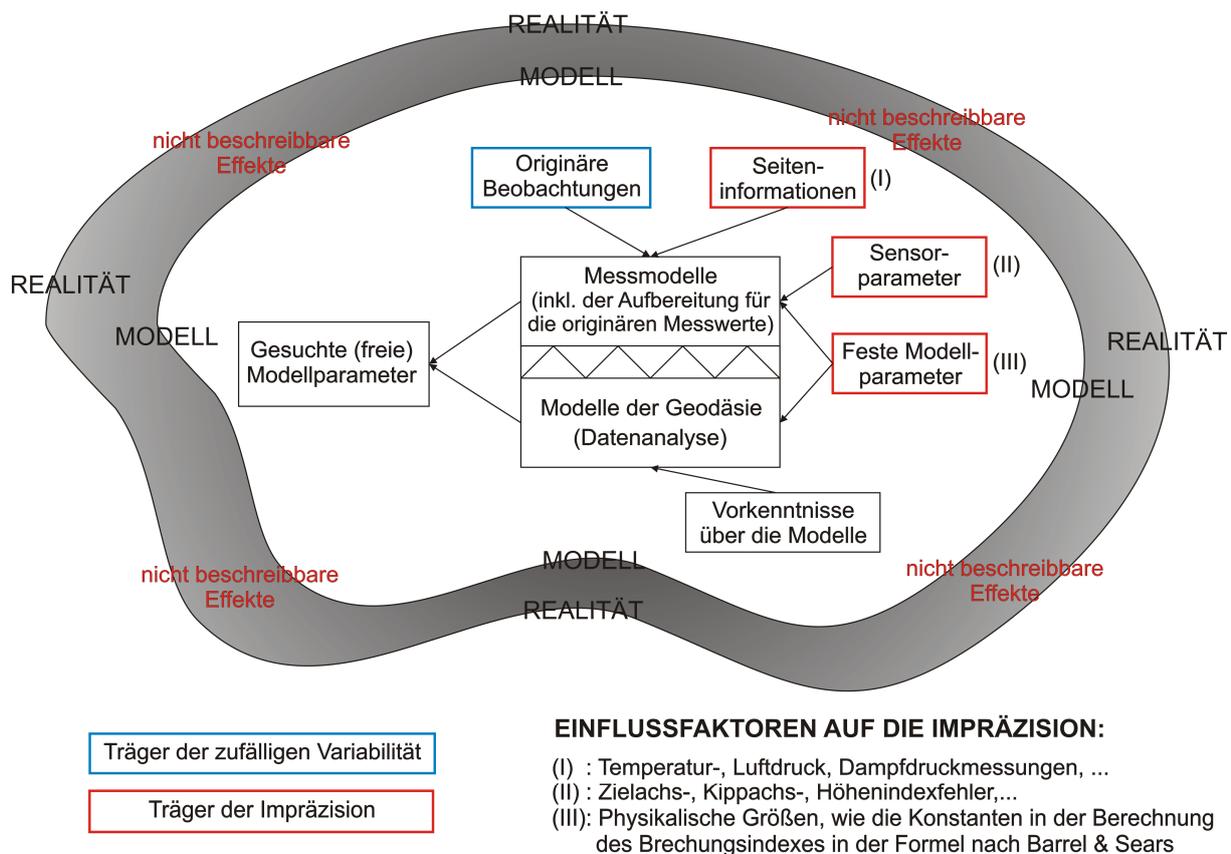


Abbildung 2.7: Zusammenspiel zwischen dem Modell der Geodäsie, dem Messmodell, dem Experiment, den Seiteninformationen und den Vorkenntnissen.

Ein Beispiel sind die aktuell vorherrschenden atmosphärischen Bedingungen bei der elektrooptischen Distanzmessung. Seiteninformationen sind die Temperatur, der Luftdruck, der Dampfdruck sowie die Wellenlänge des EDM. Feste Parameter stellen die Modellkonstanten in der Formel von Barrel und Sears dar (vgl. KAHMEN 2006, S. 170f). Messmodelle und Modelle der Geodäsie haben eine gemeinsame Komponente, da beide Festlegungen auf den bereits verfügbaren (festen) Modellparametern für die Korrekturen basieren.

### 2.3.2 Unsicherheit von Beobachtungen, Modellen, Seiteninformationen und Vorkenntnissen

In BANDEMER (2005, S. 38ff) wird die Unsicherheit<sup>3</sup> von Beobachtungen durch Vagheit, zufälliger Variabilität und Unschärfe beschrieben. Als Vagheit wird die Komponente der Unsicherheit bezeichnet, die aufgrund sprachlicher Schwierigkeiten entstehen kann („Es ist ungewiss, was gemeint ist“). Des Weiteren handelt es sich in metrischen Skalen um vage Beobachtungen, wenn nicht sichergestellt werden kann, ob es sich um

<sup>3</sup> In BANDEMER (2005) wird der Begriff Ungewissheit verwendet, der jedoch hier im geodätischen Kontext als Unsicherheit benannt bleiben soll.

einen groben Irrtum (Fehler) handelt. Kennzeichnend für vage Beobachtungen ist die fehlende oder nicht durchführbare Wiederholbarkeit. In der Geodäsie ist es zwar grundsätzlich denkbar, dass man es mit vagen Beobachtungen zu tun hat, jedoch muss es generell durch ausreichend unabhängige Wiederholungsmessungen, bzw. ausreichende Plausibilitätskontrollen der Beobachtung möglich sein, die Vagheit ausschließen zu können. Spätestens im Rahmen der Plausibilitätskontrollen zwischen den Beobachtungen und den im Modell getroffenen Annahmen (Hypothesentests, vgl. Kapitel 4) ist die Identifikation eines groben Irrtums vonnöten. Auf Modellebene weist KUTTERER (2002b, S. 25) darauf hin, dass die Modelle der Geodäsie immer hinreichend spezifisch sind, sodass die Vagheit von Modellen im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter diskutiert werden soll. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass sprachliche und messtechnische Irrtümer bereits im Rahmen der Vorverarbeitung der Daten, bzw. durch ausreichende Kontrollen während der Datenverarbeitung und Modellidentifikation auf Messebene erkannt und damit ausgeschlossen werden können. Eine detaillierte Diskussion der aus den Beobachtungsergebnissen (Kapitel 2.3.3) induzierten Unsicherheiten für die freien Parameter in den Modellen der Geodäsie kann in Kapitel 3.3.2 nachgelesen werden.

Die zufällige Variabilität ist ein Postulat der Stochastik und wird a-priori allen originären Beobachtungen unterstellt, die aufgrund einer Messung oder eines Experimentes für die Beobachtung eines bestimmten Phänomens gewonnen wurden (KOCH, 2004, S. 81f). In BANDEMER (2005, S. 23) wird die zufällige Charakteristik der Beobachtungsergebnisse damit erklärt, dass man durch zeitliche oder örtliche Variabilität unter anscheinend (im Wesentlichen) gleichen Bedingungen auf unterschiedliche Erscheinungen stößt. Dies setzt voraus, dass die Beobachtungen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegen, für die aus der Häufigkeit der Realisierungen, Kenngrößen abgeleitet werden können. Für die weitere Analyse der Daten wird die oft akzeptierte Annahme getroffen, dass die Daten normalverteilt sind. In diesem Fall ist die Standardabweichung ein Maß für die zufällige Streuung der Messwerte um ihren Erwartungswert. Eine Begründung für die Normalverteilung der Beobachtungen liefert das Elementarfehlermodell nach BESSEL (1837) und HAGEN (1837). Dieses besagt, dass sich eine zufällige Abweichung aus der Summe sehr vielen kleiner Elementarfehler zusammensetzt, die etwa gleich groß sind, aber mit unterschiedlichem Vorzeichen auftreten. Der Grundgedanke wird in mehreren geodätischen Arbeiten aufgegriffen. So entwickelt z. B. SCHWIEGER (1999) aufbauend auf PELZER (1985, S. 127ff) ein Elementarfehlermodell für GPS-Überwachungsmessungen. Er begründet die Elementarfehler mit Einflussfaktoren auf die Beobachtungen. Die Identifikation von Einflussfaktoren ähnelt der Vorgehensweise in dieser Arbeit. In Schwieger wird jedoch eine rein zufällige Variation der Beobachtungsergebnisse durch die Einflussfaktoren modelliert.

Üblicherweise kann die zufällige Streuung bei der Beobachtung von Phänomenen bei gleichen Instrumenten als konstant vorausgesetzt werden, sofern das zu beobachtende Objekt eine ausreichende zeitliche und örtliche Stabilität (Identität) aufweist (BANDEMER 2005, S. 41). Dies soll im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorausgesetzt werden. Für zukünftige Arbeiten auf dem Gebiet der Modellierung von Unsicherheiten muss jedoch darüber nachgedacht werden, ob eine Veränderung des zu beobachtenden Phänomens bzw. Objektes nicht zu einer Beeinflussung für die Charakteristik der Beobachtungen und der Beobachtungsergebnisse (Kapitel 2.3.3) führt. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die originären Beobachtungen (vor der Anbringung von Korrekturen) stets einen zufälligen Charakter haben, sofern die Auflösung der Ablese skala geeignet gewählt wurde.

Die Unschärfe von Beobachtungen ist durch die Repräsentativität dieser für die reale Welt (durch das gewählte Modell) und deren Reichtum an Information definiert. Dies soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

**Beispiel:** Bei der Bestimmung der atmosphärischen Bedingungen für die Korrekturen bei der elektrooptischen Distanzmessung wird die mittlere Temperatur entlang des Ausbreitungsweges der elektromagnetischen Strahlung benötigt. In der Praxis wird jedoch bestenfalls die Temperatur am Anfang und Ende der zu messenden Strecke erfasst. Dies führt zu einigen Unzulänglichkeiten, die eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation nicht erlauben (vgl. auch SCHÖN 2003, S. 15f):

- Aufgrund der geringen Anzahl an vorliegenden Realisierungen für die Temperatur können die Kenngrößen einer Verteilung nicht zuverlässig berechnet werden.
- Die gemessenen Temperaturen sind für die mittlere Temperatur entlang des Ausbreitungsweges nur bedingt repräsentativ.
- Die letzte Stelle der Temperatur ist von Rundungsungenauigkeiten beeinflusst. U. U. kann das eingesetzte Thermometer auch nur auf volle °C abgelesen werden (der Maßstab wurde zu groß gewählt), sodass die Beobachtung nicht weiter spezifiziert werden kann. Beide Effekte sind in der Wirkung auf die freien Parameter des Ausgleichsproblems äquivalent (Kapitel 2.3.3 und 3.3.2).

Neben dem kurz skizzierten Beispiel existiert im Rahmen des Aufbereitungsprozesses der originären Beobachtungen eine Reihe von weiteren Einflussgrößen, die Unschärfe für die Beobachtungen induzieren (vgl. SCHÖN 2003, S. 28ff). Im Folgenden sollen kurz die dafür nötigen Begrifflichkeiten eingeführt werden, eine ausführliche Diskussion dieser Punkte kann in SCHÖN (2003) nachgelesen werden, sodass im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter darauf eingegangen werden soll. SCHÖN (2003, S. 28 und S. 34f) benennt vier Gruppen von Einflussgrößen:

- I. Feste Modellparameter, die vom physikalischen Modell abhängen.
- II. Sensorparameter, die die Eigenschaften des jeweiligen Sensors genauer kennzeichnen. Hierzu gehören z. B. Resteffekte der Instrumentenfehler, etc.
- III. Zusätzliche Messungen, wie die Temperatur und der Luftdruck (Seiteninformationen).
- IV. Restfehler zwischen Modell und Realität sowie Rundungsfehler und die Vernachlässigung von bekannten Korrekturen aufgrund von Modellvereinfachungen (nicht modellierbare/modellierte Effekte).

Den Beitrag einzelner Einflussgrößen auf die Unschärfe der Beobachtungen ist für jeden Sensor individuell festzulegen und kann durch geeignete Messmethoden reduziert werden. Detaillierte Informationen dazu sind in den Kapiteln 3.2.4 und 3.3.1 zusammengestellt.

Es bleibt festzuhalten, dass die Unschärfe auf die Seiteninformationen und die festen Modellparameter zu trifft, während die zufällige Variabilität gerade in der Natur der Sache bei den originären Beobachtungen zu finden ist. Ein Überblick über „quasi“ alle Faktoren, die Unsicherheiten bei Beobachtungen induzieren ist in Abbildung 2.8 zusammengestellt, wobei kein Anspruch auf Vollständigkeit besteht. Über die Vorkenntnisse und Seiteninformationen hinaus induzieren auch die beiden anderen Gruppen von Einflussparametern (Sensorparameter sowie Restfehler zwischen Modell und Realität) Unschärfe bei den Beobachtungen. Streng genommen wird in den rein stochastischen Ansätzen für die festen Modellparameter keine Unsicherheit berücksichtigt, da für sie im stochastischen Modell der Ausgleich keine Unsicherheit berücksichtigt wird. Die Unsicherheit des Objektes, bleibt aufgrund der Komplexität der Unsicherheitsmodellierung jedoch weiteren (interdisziplinären) Arbeiten vorbehalten.

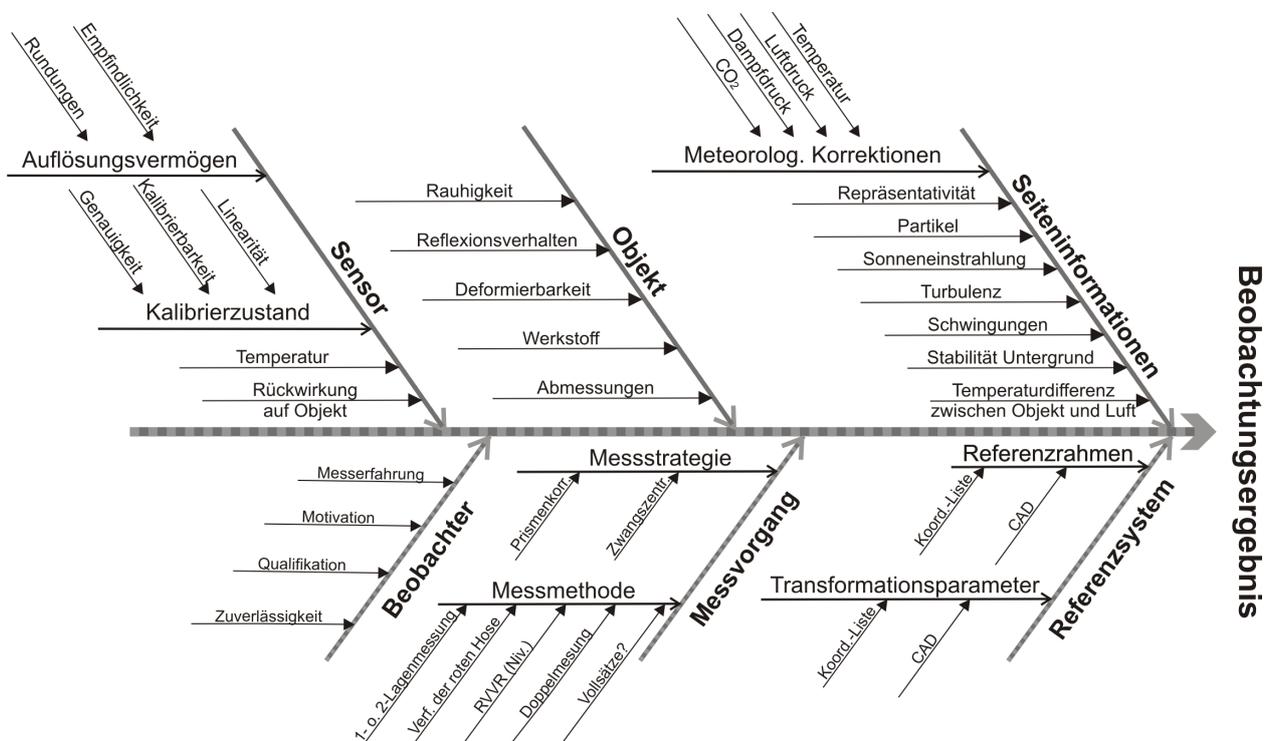


Abbildung 2.8: Ishikawa-Diagramm nach HENNES (2007).

Alle vier Gruppen von Einflussparametern können dem Aufbereitungsprozess der originären Beobachtungen zugeordnet werden (SCHÖN, 2003, S. 32ff), wobei die festen Modellparameter u. U. auch in den Modellen der Geodäsie zu finden sind. Mit ihrer Hilfe sollen die deterministischen Abweichungen zwischen den durchgeführten (originären) Beobachtungen und ihrer Modellierung in den Modellen der Geodäsie beseitigt werden. Aufgrund der deterministischen Wirkung der Korrekturen werden bei falschen Einflussgrößen auch die korrigierten Beobachtungen systematisch verfälscht sein. Bleibt man bei der strengen Trennung zwischen

Messmodellen und den Modellen der Geodäsie, ist damit klar ersichtlich, dass die vollständig korrigierten Beobachtungen (Beobachtungsergebnisse) Träger der zufälligen Variabilität und der Unschärfe sind (vgl. Kapitel 2.3.3). In Anlehnung an KUTTERER (2002b) soll im Folgenden die Impräzision eine spezielle Form der Unschärfe darstellen, die als ein Maß für die systematische Abweichung zwischen Beobachtung und Modell zu verstehen ist. Dies ist leicht zu verstehen, wenn man bedenkt, dass der Aufbereitungsprozess der Beobachtungen gerade die systematischen Fehler zwischen den originären Beobachtungen und den Annahmen in den Modellen der Geodäsie beseitigen soll. Dies gelingt jedoch nur teilweise, sodass systematische Abweichungen zwischen Beobachtungen und den Modellen der Geodäsie nach dem Aufbereitungsprozess verbleiben. Eine ausführliche Diskussion der Fortpflanzung der Unsicherheiten auf die Beobachtungsergebnisse und die freien Modellparameter kann den Kapiteln 2.3.3 und 3.3.2 entnommen werden.

Nach der Erörterung zu den Unsicherheiten von Beobachtungen, Modellen und deren Einflussgrößen wird noch einmal kurz diskutiert, ob durch eine Erweiterung der Modelle der Geodäsie und eine Verringerung der Komplexität für die Messmodelle nicht zu einer Reduktion der Impräzision führen kann. Eine Erweiterung der Modelle der Geodäsie wird zu einer höheren Anzahl an Parametern und zu einer komplexeren Modellierung der funktionalen Zusammenhänge führen; die Komplexität des Modells steigt an. Komplexere Modelle führen aber wiederum dazu, dass die Schärfe der Modellvoraussetzungen abnimmt (SCHÖN, 2003, S.11), da Unsicherheiten sowohl durch Informationsmangel als auch durch Komplexität (Informationsüberfluss) entstehen können (SEISING, 1999, S. 290ff). Des Weiteren erfolgt eine Verschiebung der jeweiligen Unsicherheiten vom Messmodell und dem Aufbereitungsprozess in die Modelle der Geodäsie. Die Impräzision zwischen den Beobachtungen und den Modellannahmen kann nicht reduziert werden. Zudem verlieren die Modelle der Geodäsie ihre Allgemeingültigkeit und müssen u. U. für spezielle Aufgaben individuell angepasst werden. An dieser Stelle soll noch einmal darauf hingewiesen werden, dass es eben gerade das Ziel einer Modellierung oder Modellbildung sein kann, ein einfaches Modell für die Beschreibung verschiedener Phänomene oder Objekteigenschaften zu erstellen. Ist man an einfachen Modellen interessiert, so sind an die originären Messungen Korrekturen anzubringen (vgl. Kapitel 2.3.1).

Allgemein ist der Übergang zwischen den Modellen der Geodäsie und den Messmodellen fließend (KUTTERER, 2002b, S. 11 sowie SCHÖN, 2003, S. 12f) und damit ist auch der Übergang von der Datenaufbereitung zu der Datenanalyse fließend. Für die Beschreibung der Impräzision sind die Unsicherheiten der festen Modellparameter aus den Modellen der Geodäsie und aus den Messmodellen zu berücksichtigen. Eine Erweiterung der Modelle der Geodäsie führt dazu, dass einzelne feste Modellparameter (Vorkenntnisse) von den Messmodellen in die Modelle der Geodäsie verlagert werden. Dies entspricht einer Verschiebung der Unsicherheiten vom Messmodell in die Modelle der Geodäsie. Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer Modellierung der Impräzision zwischen den Modellen der Geodäsie und den Beobachtungen. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Unsicherheiten von den Modellen der Geodäsie oder den Messmodellen induziert werden. SCHÖN (2003) weist zudem darauf hin, dass oftmals mit einfachen und gut überschaubaren Modellen der Geodäsie gearbeitet wird, in denen die Bedingungen des Messmodells auf die Voraussetzungen der Modelle der Geodäsie überführt werden.

Werden die Modelle der Geodäsie um die Modellierung der atmosphärischen Bedingungen erweitert, so sind sowohl Modellkonstanten aus der Formel von Barrel und Sears (vgl. KAHMEN, 2006, S. 170f) mit als feste Modellparameter aufzunehmen, als auch die Temperatur-, Luftdruck- und Dampfdruckmessungen als Beobachtungen aufzufassen und für sie ist eine Komponente im stochastischen Modell der Ausgleichung zu berücksichtigen. Dies führt, wie bereits in Kapitel 2.3.2 beschrieben, zu Unzulänglichkeiten, da sowohl die festen Modellparameter als auch die Beobachtungen nicht rein zufällig variieren, sondern Unschärfe induzieren. Es ist ausdrückliche Meinung des Autors, dass eine Erweiterung der Modelle der Geodäsie auf Kosten weniger komplexerer Messmodelle die Impräzision zwischen Beobachtung und Modell nicht zu reduzieren vermag. Lediglich eine Verbesserung der Modelle im Bezug auf die „Richtigkeit“ zu beschreibender Phänomene oder Objekte führt zu einer Verringerung der Impräzision. Dies soll im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter diskutiert werden, da es eine eigene umfangreiche Fragestellung darstellt.

### 2.3.3 Charakteristik von Beobachtungsergebnissen und freien Modellparametern

Die Charakteristik der Beobachtungsergebnisse ist abhängig von den auftretenden Arten der Unsicherheiten in den originären Beobachtungen und in den Einflussgrößen auf die Korrekturen in den Messmodellen. Als Beobachtungsergebnisse werden die vollständig korrigierten Beobachtungen verstanden, die bereits ein Ermittlungsergebnis darstellen oder in den Ausgleichungsmodellen weiterverarbeitet werden. In Kapitel 2.3.2 wurde bereits diskutiert und postuliert, dass die originären Beobachtungen (vor der Anbringung von Korrekturen), aufgrund der zeitlichen oder örtlichen Variabilität unter anscheinend (im Wesentlichen) gleichen Bedingungen, einen zufälligen Charakter aufweisen. Des Weiteren wurde festgestellt, dass die Einflussgrößen

ßen (Vorkenntnisse, Seiteninformationen, Sensorparameter und Restfehler zwischen Modell und Realität) nicht oder nur unzureichend wahrscheinlichkeitstheoretisch erklärt werden können; sie sind unscharf.

Üblicherweise werden im Rahmen der Korrekturen für die originären Beobachtungen die Seiteninformationen und Vorkenntnisse sowie Sensorparameter genutzt, um die unter tatsächlich vorherrschenden Bedingungen (experimentell) gewonnenen Daten an die Modellvorstellungen in den Modellen der Geodäsie anzupassen. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die originären Beobachtungen mit Hilfe unscharfer Zusatzinformationen korrigiert werden. Es findet eine Überlagerung der zufälligen Variabilität mit Unschärfe statt. Grundsätzlich könnte überlegt werden, ob aus praktischer Sicht nicht eine der beiden Unsicherheitsmaße, unscharf oder zufällig, sinnvoll bevorzugt werden kann (BANDEMER 2005, S. 44). Es ist jedoch nicht immer voraussehbar, welche der beiden Komponenten maßgeblich für die Gesamtunsicherheit ist. Zudem ist die Fortpflanzung der beiden Unsicherheitskomponenten auf die Beobachtungsergebnisse (Kapitel 3.3.1) und die freien Modellparameter (vgl. Kapitel 3.3.2) im gewählten Ansatz dieser Arbeit unterschiedlich, sodass eine geringe Größe einer der beiden Unsicherheiten spätestens im Rahmen der mathematischen Modellbildung in den Modellen der Geodäsie einen sehr ungünstigen Einfluss auf die freien Modellparameter haben kann. Aus diesem Grund erfolgt eine gemeinsame Erfassung der beiden Komponenten in Form einer unscharfen Zufallsgröße (Kapitel 3).

Durch den einseitig wirkenden Aufbereitungsprozess (Korrekturen) der originären Beobachtungen wird die Impräzision der Einflussgrößen direkt auf die Beobachtungsergebnisse fortgepflanzt, die somit Träger von zufälliger Variabilität und von Impräzision sind (vgl. KUTTERER, 2002b). Die Charakteristik der Beobachtungsergebnisse wird auch durch verschiedene Softwarepakete und Auswerter beeinflusst (KUTTERER ET AL., 2008). Darüber hinaus werden durch die numerischen Eigenschaften der Algorithmen und durch die Zuverlässigkeit und Präzision der Hardware (z. B. Rundungsungenauigkeiten) Unsicherheiten für die Beobachtungsergebnisse induziert (BANDEMER, 2005, S. 44). Für die Abschätzung des maximalen Einflusses von Rundungsungenauigkeiten auf die Zielgrößen stehen inzwischen verschiedene Softwarepakete zur Verfügung, z. B. INTLAB (**I**nterval **L**aboratory; RUMP, 2008) und VSDP (**V**erified **S**emidefinite **P**rogramming; JANSSON, 2006). Beide Softwarepakete ermöglichen die Abschätzung einer extremalen oberen Grenze und unteren Grenze für die gesuchten Zielgrößen. Dies stellt jedoch eine eigene Fragestellung dar und soll im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter behandelt werden.

Im GUM (ISO, 1995, S. 10) wird darauf hingewiesen, dass das Beobachtungsergebnis<sup>4</sup> neben den originären Beobachtungen auch Einflussgrößen enthält, die nur ungenau bekannt sind. Dieser epistemische Informationsmangel (vgl. auch Kapitel 2.3.2) trägt zur Unsicherheit, im Speziellen zur Unschärfe des Beobachtungsergebnisses bei. Die Annahme, „...“, daß das Ergebnis einer Messung hinsichtlich aller erkannten signifikanten systematischen Einflüsse korrigiert wurde, und daß alle Anstrengungen unternommen wurden, um solche Einflüsse zu erkennen...“ (DIN, 1999, S. 11) ist jedoch alles andere als allgemeingültig und streng genommen sogar für viele Aufgaben in hohem Maße unwirtschaftlich. Nach dem Prinzip „nur so genau wie nötig und nie so genau wie möglich“ werden für das Erreichen von im Vorhinein spezifizierten Größenordnungen für die Gesamtunsicherheit möglichst einfache Modelle angesetzt (Kapitel 2.3.1), um die Wirtschaftlichkeit der Modellbildung und des Messverfahrens zu gewährleisten. Aus diesem Grund sind vernachlässigte Korrekturen während des Aufbereitungsprozesses der originären Beobachtungen ein wichtiger Bestandteil des erweiterten Unsicherheitshaushaltes aus zufälliger Variabilität und Impräzision bzw. Unschärfe.

Die Modelle der Geodäsie stellen eine mathematische Struktur da, die eine Verbindung zu dem gegebenen Sachverhalt schafft. In Kapitel 2.3.2 wurde bereits erklärt, dass die Vagheit für die Modelle der Geodäsie dadurch behoben werden kann, dass man eine Klasse von Modellen zulässt. Diese Klasse von Modellen wird über die freien Parameter des Modells genauer spezifiziert, wobei die Beobachtungsergebnisse den speziellen Sachverhalt charakterisieren, der mit den freien Modellparametern beschrieben werden soll. Zumeist sind nur die durch die freien Modellparameter beschriebenen Sachverhalte von besonderem Interesse. In der geodätischen Datenanalyse handelt es sich dabei, um z. B. Punktkoordinaten, Deformationen, Schwerewerte, das Übertragungsverhalten von Gebäuden und vieles mehr.

Im Sinne dieser Argumentation sind die auf die freien Modellparameter wirkenden Unsicherheiten aus der Diskrepanz zwischen den Beobachtungen mit den in den Modellen getroffenen Annahmen begründet (SCHÖN, 2003). Aufgabe ist die Ableitung freier Modellparameter aus Beobachtungsergebnissen (Kapitel 3.3.2), deren Unsicherheit sich aus zufälliger Variabilität und Impräzision bzw. Unschärfe zusammensetzt. In der Mathematik wird diese Art der Berechnung „Mathematische Statistik mit unscharfen Daten“ bezeichnet.

<sup>4</sup> In der deutschen Übersetzung des GUM (DIN, 1999) wird der äquivalente Begriff Messergebnis verwendet.

Als wichtigste Lehrbücher auf diesem Gebiet sind VIERTL (1996 und 2003) sowie KRUSE und MEYER (1987) zu nennen. Diese Vorgehensweise führt zu einem scharfen Modell mit unscharfen (freien) Parametern (BANDEMER, 2005, S. 99). Eine detaillierte Erläuterung der mathematischen Modellierung wird in Kapitel 3 gegeben.

Zusammenfassend kann daher festgehalten werden, dass für eine adäquate Modellierung aller Unsicherheiten sowohl die Beobachtung mit ihren Einflussfaktoren, das zu beobachtende Objekt oder System als auch die Modellbildung vollständig in die Überlegungen einbezogen werden müssen (vgl. auch Abbildung 2.1 auf Seite 15). Der Übergang zwischen den verschiedenen Unsicherheitskomponenten ist im Allgemeinen fließend und daher sind die auftretenden Unsicherheiten nicht immer einer der drei genannten Komponenten zuzuordnen. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher ein Ansatz mit einer kombinierten Modellierung aller Unsicherheiten verfolgt.



### 3 Modellierung der zufälligen Variabilität und der Impräzision

#### 3.1 Motivation

In diesem Kapitel werden die wichtigsten mathematischen Methoden für die gemeinsame Modellierung der zufälligen Variabilität und der Impräzision (Unschärfe) eingeführt. Als grundlegende Basis dienen die **Wahrscheinlichkeitstheorie** (engl.: probability-theory, ein Teilgebiet der Stochastik), die **Intervallmathematik** (engl.: interval mathematics) und die **Fuzzy-Theorie** (engl.: fuzzy-theory). Die Wahrscheinlichkeitstheorie eignet sich hervorragend zur Beschreibung der zufälligen Variabilität und die Intervallmathematik und Fuzzy-Theorie zur Modellierung von Impräzision (Unschärfe). Kombiniert man beide zu sogenannten unscharfen Zufallsvariablen oder zu zufälligen unscharfen Variablen so bietet sich die Möglichkeit einer gemeinsamen Modellierung der Unsicherheiten aus zufälliger Variabilität und Impräzision.

Nach einer Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (Kapitel 3.2.1), die Intervallmathematik (Kapitel 3.2.2) und in die Fuzzy-Theorie (Kapitel 3.2.3) wird die Integration von Expertenwissen über die Impräzision diskutiert (Kapitel 3.2.4). Bevor jedoch der im Rahmen dieser Arbeit gewählte mathematische Zugang zu einer gemeinsamen Modellierung der zufälligen Variabilität und der Impräzision (Unschärfe) am Ende des Kapitels im Detail erläutert wird, sollen die wichtigsten mathematischen Ansätze einander gegenüber gestellt werden.

Einen Überblick für eine gemeinsame Modellierung der zufälligen Variabilität und der Impräzision findet man in KUTTERER (2002b) und BANDEMER (2005), die die Wahl der Modellierung vom jeweiligen Kontext abhängig machen. Nach KUTTERER (2002b, S. 64ff) existieren drei wesentliche Zugänge: Eine epistemisch motivierte Modellierung (**Unscharfe zufällige Variablen, FRV**, engl.: fuzzy-random variables), eine physikalisch motivierte Modellierung (**Zufällige unscharfe Variablen, RFV**, engl.: random-fuzzy variables) und eine Modellierung mittels **hybriden Zahlen** (engl.: hybrid numbers). Für diese Arbeit sind insbesondere die beiden erstgenannten Ansätze von Interesse.

Eine sehr bekannte, wenn auch nicht streng klassifizierende Unterteilung von Unsicherheiten ist die Unterscheidung in **aleatorische** (engl.: aleatory) und **epistemische** (engl.: epistemic) Unsicherheit (MÖLLER und BEER, 2008). Bei der aleatorischen Komponente handelt es sich um nicht reduzierbare Unsicherheiten, die durch die zufällige Variabilität des zu beschreibenden Systems / Objektes begründet sind. Die epistemische Unsicherheit beschreibt die reduzierbare Komponente der Unsicherheit, die sich aus dem fehlenden Wissen über das System / Objekt ergibt. Durch Erwerb detaillierterer Informationen kann die epistemische Unsicherheit reduziert werden, ohne sie jedoch vollständig eliminieren zu können. Aleatorische Unsicherheit ist zumeist durch eine nicht eindeutig objektive Beschreibung („die Messgröße kann nicht beliebig präzise bestimmt werden“) begründet. Die epistemische Unsicherheit wird als Kombination aus nicht eindeutigen objektiven und subjektiven („es ist nicht klar, was genau gemeint ist“) Gesichtspunkten angesehen.

Diese Argumentation legt es nahe, dass die aleatorische Unsicherheit mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen behandelt wird (MÖLLER und BEER, 2008), während zumindest die subjektiven Anteile der epistemischen Unsicherheit durch nicht-stochastische Ansätze realistischer beschrieben werden, da durch die Einführung von Verteilungsfunktionen tlw. völlig unbegründbare Annahmen getroffen werden. Die subjektiven Anteile der epistemischen Unsicherheit von Beobachtungen und deren Auswirkungen auf ein Ermittlungsergebnis wurde im Rahmen von Kapitel 2.3 detailliert diskutiert und anhand von Einflussfaktoren auf die Impräzision (Unschärfe) beschrieben.

In der epistemisch begründeten Unsicherheitsmodellierung geht man davon aus, dass die Realität einen zufälligen Charakter hat, der nur unscharf beobachtet werden kann. Unschärfe ist damit kein Bestandteil der eigentlichen Realität, sondern ist Ausdruck der unvollkommenen Möglichkeiten für die Beobachtung der Realität (GIL ET AL., 2006). Die Standardlehrbücher auf dem Gebiet der mathematischen Statistik mit unscharfen Daten sind (VIERTL, 1996 und 2003), BANDEMER und NÄTHER (1992) sowie KRUSE und MEYER (1987). In der physikalisch motivierten Vorgehensweise ist die Unschärfe Bestandteil der Realität (KUTTERER, 2002b, S. 65). Dies führt zur Statistik für unscharfe Daten, z. B. zur Varianz einer unscharfen Zufallsvariablen. Umfangreiche Studien im Kontext von RFV in linearen Modellen finden sich in KÖRNER (1997) und NÄTHER (1997). Inzwischen wurde in TERÁN (2007) auch ein Ansatz für eine gemeinsame Modellierung von epistemischer und physikalisch motivierter Unschärfe vorgestellt. Dies kann und soll jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht vertieft werden.

Für Anwendungen im Bereich der Ingenieurwissenschaften ist aus wissenschaftlicher Sicht ein richtiger Wert für eine Messung quasi immer vorstellbar. Diese Tatsache legt es nahe, die Unschärfe bei der Beobach-

tungseinrichtung und dem Aufbereitungsprozess der Beobachtungen selber zu suchen (vgl. auch KUTTERER 2002b, S. 67). Die physikalische Ansicht der Unsicherheitsmodellierung, die postuliert, dass die Unschärfe der Realität selber entstammt, ist damit nur schwer zu motivieren. Erst wenn die Beobachtungseinrichtung die Wirklichkeit (zumindest in der Quantentheorie) verändern kann (HEISENBERG, 1979), wäre eine sinnvolle Argumentation in diese Richtung möglich. Die Diskussion, ob es sich bei der von Heisenberg postulierten „Heisenberg’schen Unschärferelation“ um Unschärfe oder um zufällige Variabilität handelt, soll und kann im Rahmen dieser Arbeit nicht beantwortet werden. Im Vorgriff auf die in diesem Kapitel noch folgenden Ausführungen, bietet die epistemische Interpretation der Unsicherheit auch in mathematischer Hinsicht gegenüber der physikalisch motivierten Interpretation einige Vorteile:

- Die stochastische Interpretation der (i. A. nicht symmetrischen) Spannweiten der RFV führt bei der Parameterschätzung nicht streng zu einer „besten linearen erwartungstreuen Schätzung (BLUE)“.
- Für die Berechnung der Varianz einer RFV wird eine Metrik (z. B. Hausdorffmetrik) benötigt. Somit ist die Klasse der Funktionen zur Berechnung der Varianzen hinsichtlich der Metrik nicht streng abgeschlossen.
- Bei den FRV basiert die Erweiterung der klassischen Statistik bei allen Problemstellungen rein auf dem Zadeh’schen Erweiterungsprinzip (vgl. z. B. BANDEMER und NÄTHER, 1992 und Kapitel 3.2.3.2).

Die streng genommen auch mit dem Zadeh’schen Erweiterungsprinzip zu berechnenden unscharfen Varianzen der FRV sollen nicht berücksichtigt werden, da in dem hier gewählten Ansatz die Unschärfe allein durch die Zugehörigkeitsfunktionen für die FRV beschrieben wird (vgl. Kapitel 3.2.5). Die Berücksichtigung der unscharfen Varianzen ist jedoch grundsätzlich im vorgestellten Ansatz möglich.

## 3.2 Mathematische Theorien zur Beschreibung von Unsicherheiten

### 3.2.1 Wahrscheinlichkeitstheorie und Bayes’ Theorem

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein Teilgebiet der Stochastik, die für die Modellierung von Zufallsereignissen entwickelt wurde. Ausgangsbasis der Wahrscheinlichkeitstheorie sind Ereignisse  $E$ , denen jeweils eine gewisse Wahrscheinlichkeit  $P(E)$  für deren Auftreten zugeordnet wird (JAYNES, 2003). Die Summe aller möglichen Ergebnisse wird als Ergebnismenge  $\Omega$  bezeichnet. Die Zuordnung dieser Wahrscheinlichkeiten erfolgt in einem Mengensystem, dem Ereignisraum  $B$ , wobei die Wahrscheinlichkeiten eine Abbildung  $P$  des Ereignisraums in das Intervall  $[0,1]$  darstellen  $P: B \rightarrow [0,1]$ . Eine solche Abbildung bezeichnet man als Wahrscheinlichkeitsmaß und das Tripel aus  $(\Omega, B, P)$  wird als **Wahrscheinlichkeitsraum** (engl.: probability space) bezeichnet (VIERTL, 2003, S. 7f). Die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten basiert auf einem Ereignissystem, der sogenannten  $\sigma$ -Algebra.

Die axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie geht zurück in die 1930er Jahre, in denen A. KOLMOGOROW die drei Axiome eines Wahrscheinlichkeitsmaßes formulierte:

1. Für jedes Ereignis  $E$  aus  $B$  ist die Wahrscheinlichkeit eine reelle Zahl zwischen 0 und 1:  $0 \leq P(E) \leq 1$
2. Das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1:  $P(\Omega) = 1$
3. Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung  $P(E_1 \& E_2 \& \dots \& E_n)$  vieler paarweise disjunkter Ereignisse  $E_i$  entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse:

$$P(E_1 \& E_2 \& \dots \& E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

Die Abbildung  $\mathbf{x}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird als **Zufallsvariable oder Zufallsvektor** (engl.: random variable or random vector) bezeichnet und die Funktion  $\pi_o(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ist ihre zugeordnete **Wahrscheinlichkeitsfunktion** (Verteilungsfunktion, engl.: cumulative distribution function, cdf) für die gilt:

$$\pi_o(\mathbf{x}) = P(\{\mathbf{a} \in \mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x}\}). \quad (3.1)$$

Eng verwandt mit der cdf ist die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** (Dichtefunktion, engl.: probability density function, pdf) einer Zufallsvariablen, für die gilt:

$$\rho_o(\mathbf{x}) = \frac{\partial \pi_o(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad (3.2)$$

sofern die cdf (zumindest) stückweise stetig differenzierbar ist. Um auszudrücken, dass dem Zufallsvektor  $\mathbf{x}$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\rho_o(\mathbf{x})$  zugeordnet ist, schreibt man auch:  $\mathbf{x} \sim \rho_o(\mathbf{x})$ .

Das  $k$ -te **Moment** (engl.: k-th moment)  $E^{M^k}[x_i] = \bar{x}_i^{M^k}$  der  $i$ -ten Komponente des Zufallsvektors  $\mathbf{x}$  ist über seine Dichtefunktion  $\rho_o(\mathbf{x})$  definiert zu (KOCH, 2004, S. 104f):

$$E^{M^k}[x_i] = \bar{x}_i^{M^k} = \int_{\mathbb{R}^n} x_i^k \rho_o(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.3)$$

Für  $k=1$  erhält man den Erwartungswert  $E^{M^1}[x_i] = \bar{x}_i$  der  $i$ -ten Komponente von  $\mathbf{x}$  (KOCH, 2004, S. 101f):

$$E^{M^1}[x_i] = \bar{x}_i = \int_{\mathbb{R}^n} x_i \rho_o(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.4)$$

Die Momente in Bezug auf den Erwartungswert  $E^k[x_i] = \bar{x}_i^k$  werden als zentrale Momente bezeichnet:

$$E^k[x_i] = \bar{x}_i^k = \int_{\mathbb{R}^n} (x_i - \bar{x}_i^{M^1})^k \rho_o(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.5)$$

Das zentrale Moment zweiter Ordnung wird auch als Varianz  $\sigma_{x_i}^2$  von  $x_i$  bezeichnet (vgl. Formel (2.6)):

$$E^2[x_i] = \bar{x}_i^2 = \sigma_{x_i}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (x_i - \bar{x}_i^{M^1})^2 \rho_o(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.6)$$

Ein wichtiger Bestandteil der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die **Transformation von Dichtefunktionen** (engl.: transformation of random variables): Sei  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  ein Zufallsvektor mit bekannter Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\mathbf{y} \sim \rho_o(\mathbf{y}) = \rho_o(y_1, \dots, y_n)$ , so stellt sich oftmals die Frage nach der Verteilung des transformierten Zufallsvektors  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und der Abbildung  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Es wird vorausgesetzt, dass eine eindeutige Umkehrfunktion zu der festen Funktion  $\mathbf{f}$  existiert. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\rho_o(\mathbf{x})$  von  $\mathbf{x}$  ergibt sich dann zu (KOCH, 2004, S. 101):

$$\rho_o(\mathbf{x}) = \rho_o(x_1, \dots, x_n) = \rho_o(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \left| \det \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right|. \quad (3.7)$$

Soll ein mehrdimensionalen Zufallsvektor  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$  auf einen Zufallsvektor  $\mathbf{x}_{\text{neu}} = [x_{n-i+1}, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^i$  geringerer Dimension  $i < n$  reduziert werden, so muss die **Randverteilung** (engl.: marginal distribution)  $\rho_{\text{rand}}(\mathbf{x}_{\text{neu}}) = \rho_{\text{rand}}(x_{n-i+1}, \dots, x_n)$  von  $\mathbf{x}_{\text{neu}}$  berechnet werden. Dies erreicht man durch Integration über die zu eliminierenden Zufallsvariablen von  $\mathbf{x}$  (KOCH, 2004, S. 98f):

$$\rho_{\text{rand}}(\mathbf{x}_{\text{neu}}) = \rho_{\text{rand}}(x_{n-i+1}, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \rho_o(x_1, \dots, x_{n-i}, x_{n-i+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{n-i}. \quad (3.8)$$

Mit Hilfe der Randverteilung lässt sich also die Dichte mehrdimensionaler Zufallsvariablen auf die Dichte von Zufallsvariablen niedriger Dimension zurückführen, was bei der Herleitung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Testgrößen insbesondere in Kapitel 4 noch genutzt werden wird.

**Der Erwartungswert**  $E[f(\mathbf{x})] = \bar{f}$  **einer Funktion**  $f(\mathbf{x})$  (engl.: expected value of  $f$ ) mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ist definiert über das Integral der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (HARTUNG ET AL., 2005, S. 113):

$$E[f(\mathbf{x})] = \bar{f} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \rho_o(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.9)$$

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** (engl.: probability of an event)  $P(E)$  ist als Integral über die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$P(E) = \int_E \rho_o(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.10)$$

definiert, sofern die erste Ableitung der Abbildung  $P: B \rightarrow [0,1]$  stückweise konstruiert werden kann (bzw.  $\rho_o(\mathbf{x})$  stückweise stetig ist).

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** (engl.: conditional probability)  $P(E_1|E_2)$  zweier Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  ist definiert durch:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}. \quad (3.11)$$

Es beschreibt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $E_1$  unter der Voraussetzung, dass Ereignis  $E_2$  bereits eingetreten ist. Umgekehrt ist die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(E_2|E_1)$  gegeben durch:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}. \quad (3.12)$$

Zwei Ereignisse werden als **stochastisch unabhängig** (engl.: stochastic independent) betrachtet, wenn für sie gilt:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2). \quad (3.13)$$

Ist die Formel (3.13) nicht erfüllt, gelten sie als **stochastisch abhängig** (engl.: stochastic interactive). Durch Einsetzen von (3.11) in (3.12) folgt unmittelbar das **Bayes' Theorem** (engl.: Bayes' theorem):

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2|E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2)}, \quad (3.14)$$

das die Beziehung zwischen zwei bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(E_1|E_2)$  und  $P(E_2|E_1)$  herstellt.

### 3.2.2 Intervallmathematik

Im Rahmen dieser Arbeit wird die **Intervallmathematik** (engl.: interval-mathematics) als Werkzeug zur Beschreibung der nach dem Aufbereitungsprozess der originären Beobachtungen verbleibenden (unbekannten) systematischen Abweichungen (vgl. Formel (2.5)) verwendet. Die Rechenregeln für Intervalle stellen eine passende Methodik für die Fortpflanzung dieser Unschärfe bzw. Impräzision (systematische Abweichungen) zwischen Beobachtung und Modell auf die Beobachtungsergebnisse und die freien Modellparameter dar (SCHÖN, 2003, S. 15f). An dieser Stelle sollen die Darstellungen auf die in dieser Arbeit benötigten Definitionen beschränkt werden. Für eine detaillierte Darstellung wird z. B. auf ALEFELD und HERZBERGER (1974 und 1983) und auf NEUMAIER (1990) verwiesen. Beschreibungen im geodätischen Kontext können in KUTTERER (1994) und SCHÖN (2003) nachgelesen werden.

Ein abgeschlossenes reelles **Intervall** (engl.: closed interval) ist über die abgeschlossene Menge

$$[a] = [\underline{a}, \bar{a}] = \{t \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq t \leq \bar{a}, \underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}\} \quad (3.15)$$

definiert, wobei  $\underline{a}$  und  $\bar{a}$  die **untere und obere Intervallgrenze** (engl.: lower and upper interval bound) darstellen. Eine reelle Zahl  $a$  ist ein Intervall mit identischer oberer und unterer Intervallgrenze:  $a = [a, a]$ .

Die Menge aller abgeschlossenen reellen Intervalle wird als  $\mathbb{I}\mathbb{R}$  bezeichnet. Eine alternative Definition eines Intervalles erhält man über seinen **Mittelpunkt** (engl.: midpoint)  $a_m$  und den **Radius** (engl.: radius)  $a_r$ :

$$a_m = \frac{\bar{a} + \underline{a}}{2} \quad \text{und} \quad a_r = \frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}. \quad (3.16)$$

Die obere und untere Intervallgrenze geben dabei den Bereich an, in dem „...ein Wert maximal variieren kann. Diese Variationsmöglichkeit drückt gerade die Impräzision, das fehlende Wissen über den konkreten Wert, aus.“ (SCHÖN, 2003, S.15). Nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch interpretierbare Größen, die für die systematischen Abweichungen zwischen Beobachtung und Modell verantwortlich gemacht werden (vgl. Kapitel 2.3.2), können auf diese Weise mit Intervallen beschrieben werden. Dies gilt insbesondere für Rundungenauigkeiten (vgl. Kapitel 2.3.2).

Die Rechenregeln (Verknüpfung  $\circ$ ) für Intervalle stellen eine Abbildung des  $\mathbb{I}\mathbb{R} \times \mathbb{I}\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{I}\mathbb{R}$  dar. Die vier Grundrechenarten sind:

$$[a] + [b] := [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \quad (3.17)$$

$$[a] - [b] := [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}], \quad (3.18)$$

$$[a] \cdot [b] := \left[ \min(\underline{a} \underline{b}, \underline{a} \bar{b}, \bar{a} \underline{b}, \bar{a} \bar{b}), \max(\underline{a} \underline{b}, \underline{a} \bar{b}, \bar{a} \underline{b}, \bar{a} \bar{b}) \right], \quad (3.19)$$

$$[a] / [b] := [a] \cdot \left[ \frac{1}{\bar{b}}, \frac{1}{\underline{b}} \right] \quad \text{wenn } 0 \notin [b]. \quad (3.20)$$

Bei der Multiplikation einer reellen Zahl  $a \in \mathbb{R}^+$  mit einem Intervall  $[b] \in \mathbb{IR}$  kann Formel (3.19) vereinfacht werden:

$$[c] = a \cdot [b] := [\underline{a} \underline{b}, \bar{a} \bar{b}] \quad \text{bzw. } c_m = a b_m, \quad c_r = a b_r. \quad (3.21)$$

Auf die Abbildungseigenschaften der Grundrechenarten soll nicht eingegangen werden, der interessierte Leser sei an dieser Stelle auf ALEFELD und HERZBERGER (1974) verwiesen.

Die Darstellung von Intervallen im  $\mathbb{IR}$  soll im Folgenden auf Intervallvektoren im  $\mathbb{IR}^n$  und Intervallmatrizen im  $\mathbb{IR}^{n \times m}$  erweitert werden. Ein Intervallvektor  $[\mathbf{a}]$  und eine Intervallmatrix  $[\mathbf{A}]$  sind definiert durch:

$$[\mathbf{a}] := ([a_1], \dots, [a_n])^T, \quad (3.22)$$

$$[\mathbf{A}] := ([\mathbf{a}]_1, \dots, [\mathbf{a}]_m). \quad (3.23)$$

Die Addition (3.17) und Subtraktion von Intervallvektoren und -matrizen ist ebenso wie die Multiplikation eines Intervallvektors mit einem Intervall komponentenweise durchzuführen. Weitere Algorithmen für Berechnungen mit Intervallvektoren und Intervallmatrizen finden sich in ALEFELD und HERZBERGER (1974).

Die funktionale Beziehung zwischen den originären Beobachtungen und den Beobachtungsergebnissen sowie den freien Modellparametern wird über Funktionen  $f(\dots)$  hergestellt. Handelt es sich aus den in Kapiteln 2.3.2 und 3.2.2 genannten Gründen bei den Eingabeparametern um Intervalle, muss folglich auch eine Bestimmung eines Wertebereichs von  $f$  durchgeführt werden.

Im Eindimensionalen ist die Bestimmung des **Wertebereiches** (engl.: range of values)  $W_{f([a])}$  einer Funktion  $f$  als stetige Abbildung  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[a] \subseteq D$  mit dem Intervall  $[a]$  definiert zu (ALEFELD und HERZBERGER, 1983):

$$\begin{aligned} W_{f([a])} &:= \{f(a) \mid a \in [a]\} \\ &= \left[ \min_{a \in [a]} (f(a)), \max_{a \in [a]} (f(a)) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Bei i. A. nichtlinearen, nichtkonvexen Funktionen stellt die Bestimmung des Wertebereiches eine globale Optimierungsaufgabe dar, siehe z. B. GRAY ET AL. (2008). Speziell angepasste Methoden aus der Intervallmathematik werden in JAULIN ET AL. (2001) vorgestellt.

Alternativ kann eine Intervallauswertung der Funktion  $f$  durchgeführt werden, was zu einem Ergebnisintervall  $f([a])$  führt. Dies geschieht durch die Zerlegung der in der Funktion verwendeten Rechenoperationen in die Grundrechenarten aus den Formeln (3.17) bis (3.20) mit anschließender Intervallauswertung. I. A. ist eine Intervallauswertung jedoch eine echte Obermenge des Wertebereiches (vgl. ALEFELD und HERZBERGER, 1983):

$$W_{f([a])} \subseteq f([a]). \quad (3.25)$$

Der Grund für die Überschätzung ist in der Methodik der Intervallmathematik begründet, in der dieselbe Variable, die mehrmals in einer Funktion vorkommt, als unabhängig behandelt wird. Ausnahmen bilden die meisten Funktionen, in denen dieselbe Variable nur einmal vorkommt. Weitere Beispiele, in denen der Wertebereich einer Intervallauswertung entspricht, finden sich in ALEFELD und HERZBERGER (1974).

Die in Formel (3.24) eingeführte Definition kann auf eine stetig differenzierbare Funktion  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[\mathbf{a}] \subseteq D$  mit einem Intervallvektor  $[\mathbf{a}]$  erweitert werden. Zu einer Überschätzung des Wertebereiches kommt es wiederum, wenn mindestens eine der Komponenten  $[a_i]$  des Intervallvektors mehr als nur einmal in der Funktion auftaucht. Dies ist im Rahmen der geodätischen Datenanalyse i. d. R. der Fall. Die Anwendung der globalen Optimierung von Formel (3.24) zur Bestimmung des exakten Wertebereiches

$W_{f([\mathbf{a}])}$  oder  $W_{f([\mathbf{a}])}$  ist zumeist rechentechnisch sehr aufwendig (JAULIN ET AL., 2001), sodass im Folgenden die in SCHÖN (2003) empfohlene Approximation des exakten Wertebereiches für die (geodätische) Datenanalyse kurz wiedergegeben werden soll.

Nach SCHÖN (2003, S. 23f) muss sich eine approximative Auswertung  $f_A([\mathbf{a}])$  zum einen für nicht erfahrene Auswerter eignen und eindeutige Ergebnisintervalle liefern. Zum anderen muss die Approximation natürlich den Anforderungen entsprechend genau genug sein. Er schlägt aus diesem Grund vor, die Funktion  $f(\dots)$  an den jeweiligen Intervallmitten  $\mathbf{a}_m$  in eine Taylorreihe erster Ordnung zu entwickeln und dann intervallmathematisch auszuwerten:

$$f_A([\mathbf{a}]) = f(\mathbf{a}_m) + \left( \frac{\partial f(\dots)}{\partial \mathbf{a}} \right)_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_m}^T [-\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_r]. \quad (3.26)$$

Eine ausführliche Untersuchung der Stärken und Schwächen der Approximationseigenschaften ist in SCHÖN (2003, S. 23f und S. 56ff) zusammengestellt.

Die vorgestellte Vorgehensweise der approximativen Auswertung kann auf vektorwertige Funktionen  $\mathbf{f}$  erweitert werden, wenn die Auswertung (3.26) komponentenweise erfolgt. Bei diesem Übergang ist eine Einschließung des Wertebereiches nur komponentenweise exakt möglich. Durch die Abhängigkeit zwischen den Variablen in Bezug auf die Zielgrößen entsteht eine funktionale Abhängigkeit, die zu der eigentlichen Überschätzung des Wertebereiches  $W_{f([\mathbf{a}])}$  führt. Auf diese Problemstellung wird im Rahmen der Bestimmung der Beobachtungsergebnisse und der freien Parameter noch einmal eingegangen (vgl. Kapitel 3.3.3).

Weitere Berechnungen, insbesondere für die Lösung von linearen Gleichungssystemen mit Intervallvektoren und Intervallmatrizen, können in NEUMAIER (1990) nachgelesen werden. Ein guter Überblick über die Behandlung von nichtlinearen Funktionen mit Intervallen als Variablen findet sich in JAULIN ET AL. (2001).

### 3.2.3 Fuzzy-Theorie

Die *Fuzzy-Theorie* (engl.: fuzzy-theory) stellt im Vergleich zur Intervallmathematik eine erweiterte Methodik zur Beschreibung von Unschärfe dar. Bei der Einschätzung der Intervallmathematik kann als Schwierigkeit hervorgehoben werden, exakte Grenzen derjenigen Mengen festzulegen, in denen die möglichen Werte der betrachteten Variablen gerade noch liegen. Das Problem besteht darin, dass der Übergang von im absoluten Sinne möglichen zu im absoluten Sinne unmöglichen Werten abrupt erfolgt, sodass Werte aus beiden Kategorien infinitesimal benachbart sein können. Dies ist im praktischen Fall mit der Ausnahme von Rundungsungenauigkeiten wenig einleuchtend (BANDEMER 1997, S. 65). Die Möglichkeit, die Impräzision (Unschärfe) eines Einflussfaktors durch eine unscharfe Menge / Fuzzy-Set  $\tilde{A}$  zu erfassen, beseitigt dieses Dilemma in seinem wesentlichen Inhalt. Es bleibt jedoch das subjektive Problem des Experten, die Zugehörigkeitsfunktion für die jeweilige Variable festzulegen.

Unschärfe wird im Sinne der Fuzzy-Theorie klassifiziert, indem man jeden möglichen exakten Wert mit einer Zahl zwischen 0 und 1 bewertet, die den Akzeptanzgrad angibt, zu dem dieser Wert als Repräsentant der Aussage dienen kann (BANDEMER 1997, S. 63). Diese Bewertung kann anhand eines oder mehrerer Experten erfolgen. Auf diese Thematik wird in Kapitel 3.2.4 eingegangen.

**Beispiel:** In einem Raum soll die repräsentative mittlere Raumtemperatur erfasst werden. Aufgrund eines offenen Fensters zirkuliert die Luft sehr stark, sodass zwischen der Heizung und dem Fenster ein großer Temperaturunterschied besteht. Für die Temperaturmessung steht nur ein Thermometer zur Verfügung, das die Messung an einem diskreten Punkt ermöglicht. Damit ist klar, dass die Ablesegenauigkeit der Temperatur eine untergeordnete Rolle gegenüber den Temperaturschwankungen in dem Raum spielen kann (BANDEMER 1997, S. 63). Die Raumtemperatur ist aufgrund der fehlenden Repräsentativität der gemessenen Temperatur für die mittlere Raumtemperatur somit eine unscharfe Menge.

Für alle Größen, die gemäß Kapitel 2.3.1 und 2.3.2 Träger von Impräzision (Unschärfe) sind und somit eine Abweichung zwischen Modell und Beobachtung erklären, wird im Folgenden die unscharfe Komponente der Unsicherheit mit Methoden der Fuzzy-Theorie beschrieben. Es spielt keine Rolle, ob die Unschärfe einzelner Größen (z. B. Rundungsungenauigkeiten) dabei eine klassische Menge darstellt. Dies soll nur aus Darlegungsgründen unterschieden werden, kann im Folgenden mathematisch aber mit Methoden der Fuzzy-Theorie beschrieben werden, da Intervalle ein Spezialfall von Fuzzy-Sets sind. Die folgende Zusammenstellung basiert vornehmlich auf BANDEMER und NÄTHER (1992) sowie KUTTERER (2002b).

### 3.2.3.1 Grundlagen der Fuzzy-Theorie

Ein **Fuzzy-Set** (engl.: fuzzy-set, eine unscharfe Menge)  $\tilde{A}$  ist eindeutig durch seine **Zugehörigkeitsfunktion** (engl.: membership function)  $m_{\tilde{A}}(x)$  mit  $x \in M$  beschrieben, die über die folgende Abbildung  $m_{\tilde{A}}(x) : M \rightarrow [0,1]$  spezifiziert werden kann (vgl. auch Abbildung 3.1):

$$\tilde{A} := \{(x, m_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in M\} \quad \text{mit} \quad m_{\tilde{A}}(x) : M \rightarrow [0,1]. \quad (3.27)$$

Die Gesamtheit der Fuzzy-Teilmengen in  $M$  bezeichnet man mit  $\mathfrak{F}(M)$ . Ein Spezialfall einer Zugehörigkeitsfunktion ist die **Indikatorfunktion** (engl.: characteristic function)  $i_A(x)$ , die eine Menge  $N$  aus der Grundmenge  $M$  selektiert:

$$i_A(x) := m_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in N \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.28)$$

Eine Indikatorfunktion  $i_A(x)$  ist somit eine äquivalente Definition eines Intervalles aus Formel (3.15). Der **Träger** (engl.: support) eines Fuzzy-Sets ist über eine positive Zugehörigkeitsfunktion definiert:

$$\text{supp}(\tilde{A}) := \{x \in M \mid m_{\tilde{A}}(x) > 0\}. \quad (3.29)$$

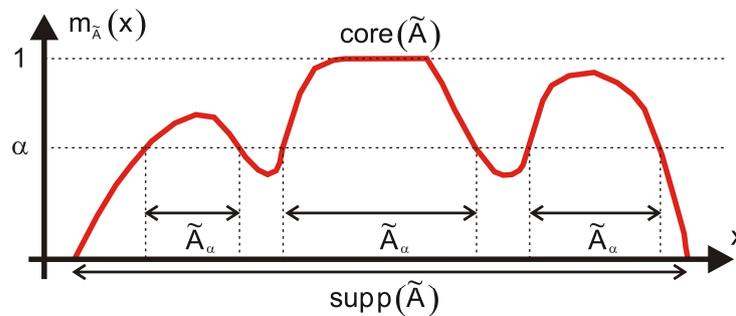


Abbildung 3.1: Ein Fuzzy-Set.

Weitere wichtige Kenngrößen eines Fuzzy-Sets sind deren **Höhe** (engl.: height; vgl. auch Abbildung 4.3 auf Seite 68):

$$\text{height}(\tilde{A}) := \sup_{x \in M} m_{\tilde{A}}(x), \quad (3.30)$$

sowie die **Mächtigkeit** (Kardinalität, engl.: cardinality; vgl. auch Abbildung 4.4 auf Seite 70), die der Unschärfe besser Rechnung trägt:

$$\text{card}(\tilde{A}) := \int_M m_{\tilde{A}}(x) dx. \quad (3.31)$$

In dieser Arbeit werden nur **normalisierte Fuzzy-Sets** (engl.: normalized fuzzy-sets) verwendet, bei denen für mindestens ein Element der Wert der Zugehörigkeitsfunktion identisch 1 ist:  $\exists x$  mit  $\text{height}(\tilde{A}) = 1$ .

Des Weiteren ist ein  $\alpha$ -**Schnitt** (engl.:  $\alpha$ -cut) mit  $\alpha \in [0,1]$  von Bedeutung:

$$\begin{aligned} \alpha\text{-Schnitt:} \quad \tilde{A}_\alpha &:= \{x \in M \mid m_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \\ \text{strenger } \alpha\text{-Schnitt: } \tilde{A}_\alpha^> &:= \{x \in M \mid m_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Alle  $\alpha$ -Schnitte sind klassische Mengen. Den  $\alpha$ -Schnitt  $\tilde{A}_{\alpha=1}$  bezeichnet man als **Kern** (engl.: core) von  $\tilde{A}$ :  $\text{core}(\tilde{A}) = \tilde{A}_{\alpha=1}$ . Die **Sammlung aller  $\alpha$ -Schnitte** (engl.: collection of all  $\alpha$ -cuts) ist definiert mit:

$$C_{\tilde{A}} := \{\tilde{A}_\alpha \mid \alpha \in (0,1]\}. \quad (3.33)$$

Von besonderer Bedeutung ist, dass die Fuzzy-Theorie anstelle auf den Zugehörigkeitsfunktionen auch auf den  $\alpha$ -Schnitten aufgebaut werden kann (KAUFMANN und GUPTA, 1985):

$$m_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\tilde{A}_\alpha}(x) \quad \forall x \in M. \quad (3.34)$$

Dies wird im Rahmen der Arbeit mehrmals genutzt. Nach BANDEMER UND GOTTWALD (1993, S. 24) lässt sich der Teilmengenbegriff der klassischen Mengenlehre auf Fuzzy-Sets erweitern:

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow m_{\tilde{A}}(x) \leq m_{\tilde{B}}(x) \quad \forall x \in M, \quad (3.35)$$

wobei die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \emptyset \subseteq \tilde{A} \subseteq \mathbb{R} & \text{v)} \quad \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A}_\alpha \subseteq \tilde{B}_\alpha, \tilde{A}_\alpha^> \subseteq \tilde{B}_\alpha^> \\ \text{ii)} \quad \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \wedge \tilde{B} \subseteq \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} = \tilde{B} \text{ Gleichheit} & \text{vi)} \quad \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Rightarrow \text{supp}(\tilde{A}) \subseteq \text{supp}(\tilde{B}) \\ \text{iii)} \quad \tilde{A} \subseteq \tilde{A} & \text{vii)} \quad \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Rightarrow \text{height}(\tilde{A}) \leq \text{height}(\tilde{B}) \\ \text{iv)} \quad \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \wedge \tilde{B} \subseteq \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{C} & \text{viii)} \quad \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Rightarrow \text{card}(\tilde{A}) \leq \text{card}(\tilde{B}) \end{array} \quad (3.36)$$

Die **Vereinigung** (engl.: union), die **Schnittmenge** (engl.: intersection) und das **Komplement** (engl.: complement) können in der Fuzzy-Theorie über die Zugehörigkeitsfunktionen ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{l} \text{Vereinigung: } \tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B} \Leftrightarrow m_{\tilde{C}}(x) = m_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{B}}(x)) \quad \forall x \in M, \\ \text{Schnitt: } \tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \Leftrightarrow m_{\tilde{C}}(x) = m_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{B}}(x)) \quad \forall x \in M, \\ \text{Komplement: } \tilde{C} = \tilde{A}^c \Leftrightarrow m_{\tilde{C}}(x) = m_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - m_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in M. \end{array} \quad (3.37)$$

Alle mengentheoretischen Operationen aus den Formeln (3.35) bis (3.37) lassen sich entsprechend auch über ihre  $\alpha$ -Schnitte berechnen. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass weitere konsistente Erweiterungen für Mengenoperationen existieren (vgl. z. B. BANDEMER und NÄTHER, 1992), die in dieser Arbeit aber nicht benötigt werden.

Die in Formel (3.27) eingeführte Definition eines Fuzzy-Sets kann auf n-dimensionale unscharfe Mengen  $\tilde{A}$  und ihre Zugehörigkeitsfunktionen  $m_{\tilde{A}}(\mathbf{x})$  mit  $\mathbf{x} \in M^n$  über die folgende Abbildung  $m_{\tilde{A}}(\mathbf{x}): M^n \rightarrow [0,1]$  erweitert werden:

$$\tilde{A} := \left\{ (\mathbf{x}, m_{\tilde{A}}(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in M^n \right\} \quad \text{mit } m_{\tilde{A}}(\mathbf{x}): M^n \rightarrow [0,1], \quad (3.38)$$

wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind (VIERTL, 1996, S. 33f):

$$\begin{array}{l} \exists \mathbf{x}_0 \in M^n : m_{\tilde{A}}(\mathbf{x}_0) = 1 \quad \text{und} \\ \tilde{A}_\alpha(\mathbf{x}) := \left\{ \mathbf{x} \in M^n : m_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) \geq \alpha \right\} \quad \text{ist } \forall \alpha \in (0,1] \end{array} \quad (3.39)$$

eine kompakte klassische Menge.

### 3.2.3.2 Rechenoperationen mit unscharfen Größen

Die grundlegende Auswertung von Funktionen von Fuzzy-Sets basiert auf dem von ZADEH (1965) vorgeschlagenen **Erweiterungsprinzip** (engl.: extension principle). Eine Funktion  $g: \mathbf{x} \in M^n \rightarrow y \in M$  kann auf Fuzzy-Sets erweitert werden  $\tilde{g}: \mathfrak{Z}(M^n) \rightarrow \mathfrak{Z}(M)$ , indem man mit  $\text{sup}(\emptyset) = 0$  schreibt:

$$\tilde{B} = \tilde{g}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = \tilde{g}(\tilde{A}) := m_{\tilde{B}}(y) = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \dots \times M_n \\ y = g(x_1, \dots, x_n)}} \min(m_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, m_{\tilde{A}_n}(x_n)) \quad \forall y \in M. \quad (3.40)$$

Im Allgemeinen ist die Abbildung  $y = g(\mathbf{x})$  im Falle der unscharfen Erweiterung nicht eindeutig. Aus diesem Grund wird für jede mögliche Kombination  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , die denselben scharfen Funktionswert  $y$  liefert, das Minimum der beteiligten Zugehörigkeitsfunktionen genommen. Die endgültige Zugehörigkeitsfunktion des Funktionswertes  $y$  ergibt sich als Supremum der Minimalwerte aller möglichen Kombinationen von  $\mathbf{x}$  (KUTTERER, 2002b, S. 41). Alternativ kann die Funktionsauswertung von Formel (3.40) auf Basis der  $\alpha$ -Schnitte durchgeführt werden (BANDEMER und NÄTHER, 1992, S. 26):

$$\tilde{B}_\alpha = g(\tilde{A}_{1,\alpha}, \dots, \tilde{A}_{n,\alpha}) = g(\tilde{A}_\alpha) \quad \forall \alpha \in (0,1]. \quad (3.41)$$

Die hauptsächlich Schwierigkeit der mengentheoretischen Operationen mit unscharfen Größen ist deren mögliche Mehrdeutigkeit. Dieses Problem kann umgangen werden, wenn man auf das Konzept der **t-Normen** (engl.: triangular norms) bzw. **s-Normen** (engl.: triangular conorms) übergeht. Unter einer t-Norm versteht man eine binäre Operation  $t$  in  $[0,1]$ , die kommutativ, assoziativ und monoton wachsend ist und die 1 als neutrales Element  $t(x,1) = x$  hat und 0 als Nullelement, d. h.  $t(x,0) = 0$ . Eine s-Norm ist eine binäre Operation  $s$  in  $[0,1]$ , die ebenfalls kommutativ, assoziativ und monoton wachsend ist und für die  $s(x,1) = 1$  sowie  $s(x,0) = x$  gilt. Die Verknüpfungen, die für die Platzhalter  $t$  und  $s$  eingesetzt werden können, müssen dabei die folgenden Bedingungen (T1) bis (T4) und (S1) bis (S4) erfüllen:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(T1)} & t(x,y) = t(y,x) & \text{(S1)} & s(x,y) = s(y,x) \\
 \text{(T2)} & t(x,t(y,z)) = t(t(x,y),z) & \text{(S2)} & s(x,s(y,z)) = s(s(x,y),z) \\
 \text{(T3)} & u_1 \leq u_2 \Rightarrow t(x,u_1) \leq t(x,u_2) & \text{(S3)} & u_1 \leq u_2 \Rightarrow s(x,u_1) \leq s(x,u_2) \\
 \text{(T4)} & t(x,1) = x, \quad t(x,0) = 0 & \text{(S4)} & s(x,1) = 1, \quad s(x,0) = x
 \end{array} \tag{3.42}$$

mit  $x, y, z, u_1, u_2 \in [0,1]$ . Beispiele für t- und s-Normen sind (vgl. auch HARTUNG ET AL., 2005, S. 379):

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimum:} & t_0(x,y) = \min(x,y) & \text{Maximum:} & s_0(x,y) = \max(x,y) \\
 \text{algebraisches Produkt:} & t_1(x,y) = xy & \text{algebraische Summe:} & s_1(x,y) = x + y - xy \\
 \text{beschränktes Produkt:} & t_2(x,y) = \max(x + y - 1, 0) & \text{beschränkte Summe:} & s_2(x,y) = \min(x + y, 1)
 \end{array} \tag{3.43}$$

Eine Verallgemeinerung des Erweiterungsprinzips aus Formel (3.40) für t- und s-Normen existiert, es ist jedoch dann nicht möglich, dass die Funktionsauswertung auf Basis der  $\alpha$ -Schnitte durchgeführt werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Verallgemeinerung des Erweiterungsprinzips bezüglich der t- und s-Normen nicht benötigt, sodass an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen werden soll. Der interessierte Leser sei auf BANDEMER und GOTTWALD (1993) sowie auf KUTTERER (2002b) verweisen. Rechenregeln, die für unscharfe Maße und Maße für Unschärfe speziell in Kapitel 4 benötigt werden, werden erst in den jeweiligen Teilkapiteln eingeführt.

### 3.2.3.3 LR-, LL- und L-unscharfe Zahlen und Intervalle

Die in den vorangegangenen Unterkapiteln eingeführten Definitionen von Fuzzy-Sets sind für beliebige Zugehörigkeitsfunktionen gültig. Im Folgenden soll nun dazu übergegangen werden, einige spezielle Formen von Fuzzy-Sets einzuführen, die für die Anwendungen in dieser Arbeit von Bedeutung sind. Dazu gehören die sogenannten **unscharfen Intervalle** (engl.: fuzzy-intervals) und **unscharfen Zahlen** (engl.: fuzzy-numbers), die auf **konvexen unscharfen Mengen** (engl.: convex fuzzy-sets) basieren. Eine unscharfe Menge heißt konvex, wenn für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \in [0,1]$  gilt (VIERTL, 1996, S. 21):

$$m_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{A}}(y)). \tag{3.44}$$

Diese Definition besagt, dass jeder  $\alpha$ -Schnitt  $\tilde{A}_\alpha$  eine kompakte klassische Menge ist. Eine normalisierte konvexe unscharfe Menge wird i. A. als unscharfes Intervall bezeichnet. Existiert bei einem unscharfen Intervall genau ein  $x_m \in \mathbb{R}$  mit  $m_{\tilde{A}}(x_m) = 1$ , so bezeichnet man es auch als unscharfe Zahl. Im Weiteren soll  $x_m$  als **Mittelpunkt** (Gipfelpunkt, engl.: midpoint) einer unscharfen Zahl und  $[x]$  als Kern eines unscharfen Intervalles bezeichnet werden.

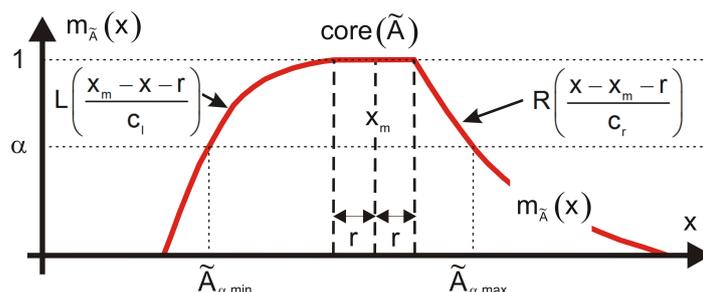


Abbildung 3.2: LR-unscharfes Intervall mit konvexen Zugehörigkeitsfunktionen.

Die Zugehörigkeitsfunktion von unscharfen Intervallen vom LR-Typ (vgl. Abbildung 3.2) wird von einer rechten  $R(x)$  und linken  $L(x)$  **Referenzfunktion** (engl.: reference function) mit  $x \in \mathbb{R}$  folgendermaßen definiert:

$$m_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{x_m - x - r}{c_l}\right), & x < x_m - r \\ 1, & x_m - r \leq x \leq x_m + r \\ R\left(\frac{x - x_m - r}{c_r}\right), & x > x_m + r. \end{cases} \quad (3.45)$$

mit  $x_m$  dem Mittelpunkt,  $r$  dem Radius und  $c_l > 0, c_r > 0$  die **Spannweiten** (Spreizung, engl.: spread parameters) der streng monoton fallenden Referenzfunktionen. In dieser Arbeit werden unscharfe Intervalle vom LR-Typ mit  $\tilde{A} = [x_m, r, c_l, c_r]_{LR}$  bezeichnet. Ist  $r = 0$ , handelt es sich um eine unscharfe Zahl vom LR-Typ:  $\tilde{A} = [x_m, c_l, c_r]_{LR}$ . Als Referenzfunktionen kommen in der Anwendung z. B. die folgenden Typen in Frage (Kutterer, 2002b, S. 44):

$$\begin{aligned} \text{Dreiecktyp:} & \begin{cases} L\left(\frac{x_m - x - r}{c_l}\right) = \max\left(0, \frac{x_m - x - r}{c_l}\right) \text{ mit } x < x_m - r, \\ R\left(\frac{x - x_m - r}{c_r}\right) = \max\left(0, \frac{x - x_m - r}{c_r}\right) \text{ mit } x > x_m + r, \end{cases} \\ \text{Exponentieller Typ:} & \begin{cases} L\left(\frac{x_m - x - r}{c_l}\right) = \exp\left(-\left|\frac{x_m - x - r}{c_l}\right|\right) \text{ mit } x < x_m - r, \\ R\left(\frac{x - x_m - r}{c_r}\right) = \exp\left(-\left|\frac{x - x_m - r}{c_r}\right|\right) \text{ mit } x > x_m + r, \end{cases} \\ \text{Gauß'scher Typ:} & \begin{cases} L\left(\frac{x_m - x - r}{c_l}\right) = \exp\left(-\left|\frac{x_m - x - r}{c_l}\right|^2\right) \text{ mit } x < x_m - r, \\ R\left(\frac{x - x_m - r}{c_r}\right) = \exp\left(-\left|\frac{x - x_m - r}{c_r}\right|^2\right) \text{ mit } x > x_m + r. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sind die linke und rechte Referenzfunktion vom gleichen Funktionstyp (vgl. Formel (3.46)), handelt es sich um unscharfe Zahlen  $\tilde{A} = [x_m, c_l, c_r]_{LL}$  oder Intervalle  $\tilde{A} = [x_m, r, c_l, c_r]_{LL}$  vom LL-Typ. Eine weitere Vereinfachung von unscharfen Zahlen und Intervallen vom LL-Typ ist für identische Funktionstypen und identische Spannweiten gegeben; bei ihnen handelt es sich mit  $c = c_l = c_r$  um unscharfe Zahlen  $\tilde{A} = [x_m, c]_L$  und Intervalle  $\tilde{A} = [x_m, r, c]_L$  vom L-Typ. Ist die linke und rechte Referenzfunktion vom Dreiecktyp spricht man von L-unscharfen Intervallen vom Trapeztyp. Als Verallgemeinerung der Intervalle aus Kapitel 3.2.2 kann jedem Wert eines Intervalles ein Gewicht zugeordnet werden, etwa von der Mitte nach links und rechts fallend oder von einem Kern ausgehend fallend. Damit erhält man unscharfe Zahlen oder Intervalle für die weitere Datenanalyse (BANDEMÉR 2005, S. 30). Die Bewertung und die praktische Konstruktion der in diesem Unterkapitel eingeführten Referenzfunktionen sind Thema des folgenden Unterkapitels.

Für  $\alpha$ -Schnitte von LR-unscharfen Intervallen kann aufgrund der streng monotonen Funktionen geschrieben werden (vgl. auch Abbildung 3.2):

$$\tilde{A}_\alpha = [\tilde{A}_{\alpha, \min}, \tilde{A}_{\alpha, \max}] = [x_m - r - L^{-1}(\alpha), x_m + r + R^{-1}(\alpha)], \quad (3.47)$$

wobei  $L^{-1}$  und  $R^{-1}$  die Umkehrfunktionen von  $L$  und  $R$  sind. Auf Grund der Verwendung von kompakten unscharfen Intervallen vom LR-Typ mit streng monoton fallenden Referenzfunktionen kann das Erweiterungsprinzip nach Zadeh aus Formel (3.40) zu einer Wertebereichssuche über alle  $\alpha$ -Schnitte vereinfacht werden (NGUYEN, 1978 sowie DUBOIS und PRADE, 1980, S. 37):

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{\alpha,\min} &= \min(g(x_1, x_2, \dots, x_n)), \\ \tilde{B}_{\alpha,\max} &= \max(g(x_1, x_2, \dots, x_n)),\end{aligned}\tag{3.48}$$

mit  $\tilde{B}_\alpha = [\tilde{B}_{\alpha,\min}, \tilde{B}_{\alpha,\max}]$  und  $x_1 \in \tilde{A}_{1,\alpha}, x_2 \in \tilde{A}_{2,\alpha}, \dots, x_n \in \tilde{A}_{n,\alpha}$ . Mit dieser Definition ist das Zadeh'sche Erweiterungsprinzip auf Ebene der  $\alpha$ -Schnitte vollständig auf eine Wertebereichssuche der Eingangsintervalle zurückgeführt worden. Die in Kapitel 3.2.2 vorgestellten Abbildungseigenschaften und Wertebereichsprobleme sind für jeden  $\alpha$ -Schnitt gültig. Handelt es sich um nicht-konvexe Zugehörigkeitsfunktionen, so liefert die Optimierungsaufgabe aus Formel (3.48) die **konvexe Einschließung** (engl.: convex hull) von  $m_{\tilde{B}}$  (VIERTL, 1996, S. 20).

Die vorliegende Zusammenstellung der Fuzzy-Theorie und ihrer Arithmetik wurde aus Platzgründen auf ein Mindestmaß beschränkt. Lediglich die für die Arbeit notwendigen Definitionen sind eingeführt worden. Für weitere Betrachtungen muss der Leser auf weiterführende Literatur zurückgreifen. Dabei muss unterschieden werden, vor welchem Hintergrund die Fuzzy-Theorie als mathematisches Werkzeug verwendet wird. Dies kann auf zweierlei Arten geschehen. Zum einen wird sie zur Modellierung der auftretenden Unsicherheiten in den Daten verwendet. Zum anderen kann sie bei der Modellbildung und in der Regelung mittels linguistischen Variablen eingesetzt werden (zur Modellierung der Unsicherheiten in den Modellen), bei denen die Gründe für die Unschärfe bzw. Vagheit in einer nicht genügend (sprachlich) diskreten Abgrenzung möglicher Zustände zu suchen sind (vgl. auch BANDEMER, 2005). Die Fuzzy-Theorie hat auf beiden Gebieten beachtliche Erfolge erzielt. Als Überblickswerke bieten sich die Bücher von AYYUB und KLIR (2005), KLIR (2006) sowie KLIR und YUAN (1995) an.

Im Rahmen der geodätischen Arbeiten von KUTTERER (2002b) und SCHÖN (2003) sowie in der vorliegenden Arbeit wird die Fuzzy-Theorie zur Beschreibung von Unsicherheiten in den Daten verwendet. HEINE (2000), HABERLER-WEBER (2005), CHEMLINA ET AL. (2006) und HABERLER-WEBER ET AL. (2006) nutzen die Fuzzy-Theorie im Sinne der unscharfen Logik für die Systemidentifikation und bei der Modellbildung für Deformationsprozesse. Des Weiteren verwenden AKYILMAZ ET AL. (2003), AKYILMAZ und KUTTERER (2004), BOEHM und KUTTERER (2006) sowie MARTIN und KUTTERER (2007) ANFIS (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference Systems) für die kausale funktionale Modellierung des Zusammenhanges zwischen Einflussgrößen und den Deformationen einer Schleuse. MIIMA (2002a,b) und FLETTLING (2007) nutzen die Fuzzy-Theorie und die unscharfe Cluster-Analyse für die Identifikation und Beschreibung von Deformationsprozessen.

### 3.2.4 Integration von Expertenwissen / Nested-Sets

Für die Bestimmung der freien Parameter einer Ausgleichung ist i. d. R. ein recht komplexer Ablauf von Berechnungsschritten notwendig, in denen eine Reihe von Einflussfaktoren (vgl. Kapitel 2.3.1) berücksichtigt werden müssen. Die in dieser Arbeit modellierten Unsicherheiten wurden in Kapitel 2.3.2 mit zufälliger Variabilität und Impräzision (Unschärfe) klassifiziert. Während die zufällige Variabilität den originären Beobachtungen zugeordnet wurde, ist die Impräzision in den Einflussfaktoren auf die Aufbereitungsschritte und in den Aufbereitungsschritten selber zu suchen. Zufällige Variabilität kann aus den originären Beobachtungen abgeschätzt werden. Dies ist für die Impräzision nur schwer möglich. Die Variation von Beobachtungskonfigurationen kann einen Aufschluss über gewisse systematische Komponenten ermöglichen, dies kann jedoch nicht für alle signifikant auf ein Ermittlungsergebnis wirkenden Einflüsse geschehen (KUTTERER, 2002b, S. 60). Des Weiteren bleibt das Problem der Abspaltung der systematischen Effekte von der zufälligen Variabilität der Messwerte. Aus praktischer und wirtschaftlicher Sicht ist eine Variation von Beobachtungskonfigurationen in der dafür erforderlichen Form und Häufigkeit oftmals nicht möglich oder erwünscht.

Aus diesem Grund soll im Rahmen dieses Unterkapitels diskutiert werden, wie auf Expertenwissen zurückgegriffen werden kann, um die Impräzision der Einflussfaktoren zu identifizieren und zu quantifizieren. Ziel ist es, möglichst unabhängig voneinander wirkende und ursprüngliche Einflussfaktoren auf die Beobachtungen zu identifizieren und separieren. Des Weiteren müssen Approximationsfehler durch fehlende Korrektions- oder Reduktionsschritte sowie die Vernachlässigung von Einflussfaktoren abgeschätzt werden. KUTTERER (2002b, S. 60) schlägt vor, für die Qualifizierung der Impräzision einen Fragebogen zu entwickeln, der von Experten ausgefüllt wird, „...um den Gesamt Ablauf einer Datenanalyse in Bezug auf die Ungewissheit<sup>5</sup> zu analysieren.“ Dies umfasst im Wesentlichen die Schritte der Datengewinnung, der Bestimmung von Beobachtungsergebnissen und die Schätzung der freien Parameter (Kapitel 2.3.3). Für weitere Details wird auf KUTTERER (2002b, S. 60ff) verwiesen.

<sup>5</sup> In Kutterer (2002b) wird der Begriff Ungewissheit für Unsicherheit verwendet.

Auf Basis solcher Fragebögen kann eine Identifikation der für die Unsicherheit, im Speziellen für die Impräzision wirkenden Einflüsse und Einflussfaktoren erfolgen. Als sinnvolle Unterstützung können die sogenannten Ishikawa-Diagramme (vgl. Abbildung 2.8) eingesetzt werden, wie es von HENNES (2007) vorgeschlagen wurde. Auch im GUM wird gefordert die Einflussfaktoren für die Unsicherheit zu protokollieren und in zufällig und systematisch wirkende Komponenten zu unterscheiden (ISO, 1995). In einem zweiten Schritt ist die Variation der Einflüsse (z. B. vernachlässigte Korrekturen oder Reduktionen) und der Einflussfaktoren zu quantifizieren. In Kapitel 3.2.3 wurde bereits beschrieben, dass sich die Fuzzy-Theorie für die Beschreibung der möglichen Variationsbreite und Fortpflanzung von Impräzision (Unschärfe) eignet. Es gilt demnach, die Form (die Referenzfunktionen gemäß Formel (3.45)) eines Fuzzy-Sets zu bestimmen, die den Akzeptanzgrad für ein mögliches Auftreten des Wertes am besten widerspiegelt. Die Spannweiten und der Radius der Referenzfunktionen für die in der Praxis relevanten unscharfen Intervalle vom LR-Typ beschreiben die mögliche Variation der Impräzision. Der Akzeptanzgrad ist gleichbedeutend mit dem Niveau des jeweiligen  $\alpha$ -Schnitts. Für  $\alpha = 0$  ist ein Auftreten des Wertes scheinbar nicht möglich, während für den Kern einer unscharfen Menge ( $\alpha = 1$ ) jeder Wert vollständig plausibel erscheint. Auf diese Weise erhält man etwa von der Mitte nach links und rechts fallend oder von einem Kern ausgehend fallende unscharfe Zahlen oder Intervalle für die weitere Datenanalyse (BANDEMÉR 2005, S. 30).

Zwei Vorgehensweisen bieten sich für die Festlegung der zugehörigen Referenzfunktionen an:

- a) Ein Experte gibt die Referenzfunktionen an, die seine Präferenzen im Sinne eines Akzeptanzgrades für den Wertebereich der Impräzision am besten widerspiegeln.
- b) Experten geben jeweils einen Wertebereich (Intervallradius) für die Variation der Impräzision an. Auf deren Grundlage wird anschließend die zugehörige Referenzfunktion konstruiert.

Bei der in a) geschilderte Vorgehensweise wird jeder mögliche exakte Wert mit einer Zahl zwischen 0 und 1 bewertet, die den Akzeptanzgrad angibt, zu dem dieser Wert als Repräsentant der Aussage dienen kann (BANDEMÉR 1997, S. 63). Die Festlegung der Referenzfunktionen hat als Basismenge lediglich die Aussage bzw. Einschätzung eines Experten und ist damit streng genommen vage (BANDEMÉR, 2005, S. 39). Erst mit dem Übergang auf eine Basismenge von Aussagen / Einschätzungen kann die Vagheit beseitigt werden. Dies wird im Folgenden genauer untersucht und mathematisch beschrieben.

Für die Konstruktion der Zugehörigkeitsfunktionen stehen insgesamt  $i = 1 \dots d$  Experten zur Verfügung. Jeder dieser  $d$  Experten spezifiziert über einen Intervallradius  $a_{i,r}$  ein Intervall  $[a_i] = [\underline{a}_i, \bar{a}_i] = [a_{i,m} - a_{i,r}, a_{i,m} + a_{i,r}]$ , das nach seinem Ermessen den Wertebereich für die Variation der Impräzision am besten repräsentiert. Im Vorgriff auf das nächste Unterkapitel (Kapitel 3.2.5) erfolgt die Festlegung des Mittelpunktes  $a_m$  der unscharfen Zahlen und Intervalle getrennt auf Basis der originären oder abgelesenen Beobachtungen. Da es sich bei dem Intervallradius um eine skalare Größe handelt, existiert eine eindeutige Sortierung der Intervallradien in der Form:

$$a_{d,r} \leq a_{d-1,r} \leq \dots \leq a_{2,r} \leq a_{1,r}. \quad (3.49)$$

Der optimistischste Experte  $i = d$  hat den kleinsten Intervallradius und der pessimistischste Experte  $i = 1$  hat den größten Intervallradius. Es sei  $A = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_d\}$  eine klassische endliche Menge und die Elemente  $\alpha_i$  von  $A$  heißen Akzeptanzgrade. Des Weiteren ist  $\mathbb{IR}$  die Grundmenge der Intervalle, dann wird die Abbildung  $\vec{X}: A \rightarrow \mathbb{IR}$ :

$$\vec{X} := \{[a(\alpha_d)], [a(\alpha_{d-1})], \dots, [a(\alpha_2)], [a(\alpha_1)] \mid \alpha \in A\}, \quad (3.50)$$

für die gilt:

$$[a(\alpha_d)] \subseteq [a(\alpha_{d-1})] \subseteq \dots \subseteq [a(\alpha_2)] \subseteq [a(\alpha_1)] \subset \mathbb{IR}, \quad (3.51)$$

als **Nested-Set**  $\vec{X}$  bezeichnet (vgl. auch NGUYEN und KREINOVICH, 1996). Durch die Angabe eines Intervallradius durch jeden Experten wird sichergestellt, dass es sich immer um symmetrische Nested-Sets handelt. Abbildung 3.3 verdeutlicht die Vorgehensweise bei der Konstruktion eines Nested-Sets mit Hilfe von fünf Experten.

In dieser Arbeit wird vorausgesetzt, dass ein Fuzzy-Set  $\tilde{A} \in \mathfrak{F}(\mathbb{IR})$  existiert, für das mit den Formeln (3.32) und (3.33) die folgende Beziehung gilt (NEGOITA und RALESCU, 1975):

$$\tilde{A}_\alpha = C_{\tilde{A}_\alpha} \quad \forall \quad \alpha \in A. \quad (3.52)$$

Eine strengere Darstellung von Formel (3.52) ist nach RALESCU (1992) die Voraussetzung, dass ein Fuzzy-Set  $\tilde{A} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$  und eine Funktion  $f: [0,1] \rightarrow [1,0]$  existiert, für die die Beziehung gilt:

$$\tilde{A}_{f(\alpha)} = C_{\tilde{A}_\alpha} \quad \forall \alpha \in A. \quad (3.53)$$

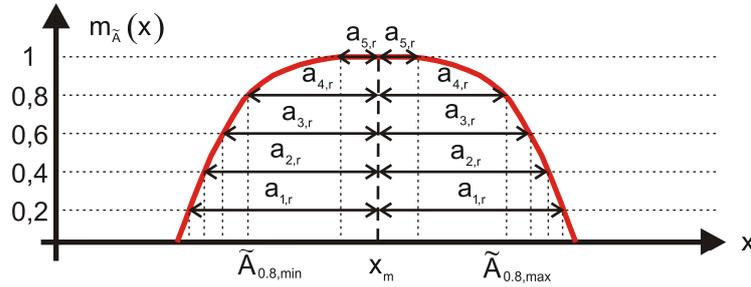


Abbildung 3.3: Konstruktion eines Nested-Set mit Hilfe von fünf Experten (Expertenwissen).

Auf die notwendigen und hinreichenden Bedingungen inkl. deren Beweise für die Überführung von Nested-Sets zu Fuzzy-Sets kann im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen werden. Eine Zusammenstellung findet sich für den Leser in SAIDI und JABALLAH (2008). Im Rahmen weiterer Arbeiten wird in KREINOVICH (1995), KREINOVICH (2007) sowie NGUYEN und KREINOVICH (1996) die Konstruktion von Intervallen und nicht symmetrischen Nested Sets motiviert sowie mathematisch hergeleitet.

### 3.2.5 Fuzzy-Randomness

Die epistemisch motivierte, gemeinsame Modellierung der Unschärfe (Impräzision) und der zufälligen Variabilität mit Hilfe von FRV wird auch als **Fuzzy-Randomness** (MÖLLER und BEER, 2004) bezeichnet; sie wurde von KWAKERNAAK (1978, 1979) eingeführt. Sie soll als Grundlage zur Beschreibung der im Rahmen dieser Arbeit modellierten Komponenten der Unsicherheit dienen. Bei den FRV handelt es sich um eine unscharfe Erweiterung der klassischen (scharfen) Wahrscheinlichkeitstheorie. Sei  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum gemäß Kapitel 3.2.1, dann wird die unscharfe Abbildung  $\tilde{A}: \Omega \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$  mit:

$$\tilde{A}: \Omega \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n), \quad \tilde{A}(\omega) = \tilde{A}, \quad \omega \in \Omega, \quad \tilde{A} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) \quad (3.54)$$

als unscharfe Zufallsvariable oder -vektor bezeichnet, wenn für alle  $\omega_i \in \Omega$  und für alle  $\alpha \in (0,1]$  die Menge  $(\tilde{A}(\omega))_\alpha$  beschränkt ist und mit

$$\begin{aligned} \inf(\tilde{A}(\omega))_\alpha &:= \inf \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : m_{\tilde{A}(\omega)}(\mathbf{x}) \geq \alpha \} \\ \sup(\tilde{A}(\omega))_\alpha &:= \sup \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : m_{\tilde{A}(\omega)}(\mathbf{x}) \geq \alpha \} \end{aligned} \quad (3.55)$$

gilt (KWAKERNAAK, 1978, S. 7):  $\tilde{A}(\omega)$  ist für jedes  $\omega_i \in \Omega$  eine normale unscharfe Menge mit (mindestens) stückweise stetiger Zugehörigkeitsfunktion. Die Werte  $\inf(\tilde{A}(\omega))_\alpha$  sowie  $\sup(\tilde{A}(\omega))_\alpha$  sind endliche Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . In der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie wird jedem  $\omega_i \in \Omega$  genau eine reelle Zahl zugeordnet, während für FRV jedes  $\omega_i \in \Omega$  eine Zugehörigkeitsfunktion durch die unscharfe Abbildung  $\omega_i \rightarrow m_{\omega_i}$  zugeordnet wird. Wie aus Formel (3.54) und (3.55) ersichtlich ist, basiert die unscharfe Erweiterung der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie auf dem von ZADEH (1965) vorgeschlagenen Erweiterungsprinzip. Alle statistischen Methoden sind somit unscharf zu erweitern und alle statistischen Kenngrößen sind per Definition unscharfe Größen (vgl. auch KUTTERER, 2002b, S. 64f).

Die im Folgenden verwendete Beschreibung von FRVs mittels Zugehörigkeitsfunktionen ermöglicht, dass die in Kapitel 3.2.3 eingeführten Definitionen der Fuzzy-Theorie im Rahmen dieser Arbeit beibehalten werden können. Lediglich der Mittelpunkt  $x_m$  oder der Vektor aller Mittelpunkte  $\mathbf{x}_m$  ist als zufällige Größe zu interpretieren und wird im Falle von FRV in der Notation einer Zufallsvariablen kursiv und mit Unterstrich bezeichnet ( $x_m \rightarrow \underline{x}_m$  und  $\mathbf{x}_m \rightarrow \underline{\mathbf{x}}_m$ ). Für die im Rahmen dieser Arbeit interessierenden FRV mit Referenzfunktionen vom Typ der LR-unscharfen Intervalle ist deren Mittelpunkt Träger der zufälligen Variabilität,

während die linken und rechten Referenzfunktionen/Spannweiten und der Radius Träger der Impräzision (Unschärfe) sind. FRVs werden in dieser Arbeit kursiv und mit Unterstrich geschrieben ( $\tilde{A}$  bzw.  $m_{\tilde{A}}(x)$ ), während Fuzzy-Sets aufrecht und ohne Unterstrich geschrieben werden ( $\tilde{A}$  bzw.  $m_{\tilde{A}}(x)$ ). Handelt es sich um eine Realisierung einer FRV, so wird die Variable aufrecht geschrieben. Eine graphische Darstellung findet sich in Abbildung 3.4.

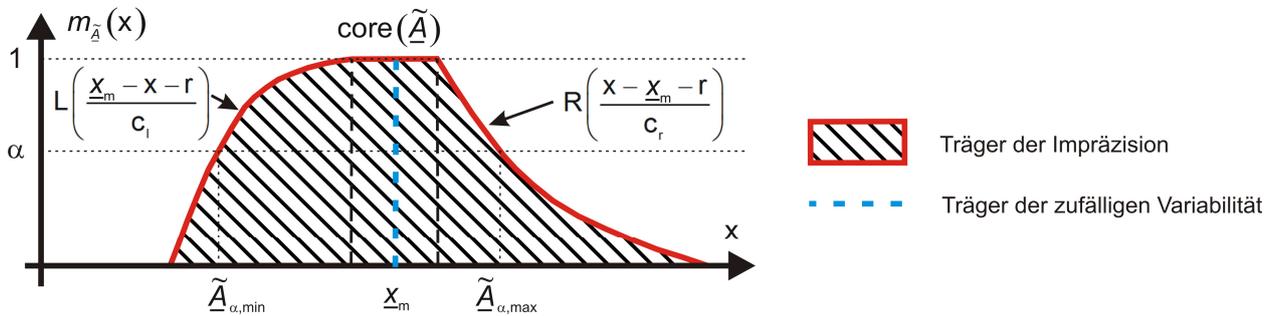


Abbildung 3.4: Eine unscharfe Zufallsvariable (FRV, engl.: fuzzy-random variable).

Die zufällige Komponente einer FRV ist mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden zu behandeln und die Referenzfunktionen bzw. Spannweiten sowie der Radius mit Methoden der Fuzzy-Theorie (Erweiterungsprinzip). Im Rahmen dieser Arbeit wird nur der Mittelpunkt einer FRV als zufällige Komponente behandelt. Wie schon ausführlich in Kapitel 2.3.2 diskutiert, ist die originäre Beobachtung Träger der zufälligen Variabilität. Erst durch die Aufbereitung der originären Beobachtungen hin zu vollständig korrigierten und reduzierten Beobachtungen (Beobachtungsergebnisse) wird Impräzision induziert. Es ist somit naheliegend, den Mittelpunkt durch den Wert der originären Beobachtung bzw. abgelesenen Beobachtungen zu repräsentieren. Die weitere mathematische Vorgehensweise zur Ermittlung der zufälligen Variabilität und Impräzision von Beobachtungsergebnissen und freien Parametern in den Standardmodellen der Ausgleichung wird in Kapitel 3.3 behandelt.

### 3.3 Beobachtungsergebnisse und die Parameterschätzung bei Impräzision

Diese Kapitel behandelt die vollständige mathematische Beschreibung des Wissens und der damit verbundenen Unsicherheit über die Entstehung und Weiterverarbeitung der originären Beobachtungswerte. In der (geodätischen) Datenanalyse ist man an den aus (originären) Beobachtungen  $y_i^*$  und deren Einflussfaktoren  $p_i$  abgeleiteten Parametern interessiert. Dabei kann es sich sowohl um Beobachtungsergebnisse  $y_i$ , als auch um freie Modellparameter  $\theta_i$  der Modelle der Geodäsie handeln (Kapitel 2.3.3). Dies setzt eine vektorwertige funktionale Beziehung  $\mathbf{f}$  zwischen den (originären) Beobachtungen und den daraus abgeleiteten Parametern voraus. Die Messmodelle bzw. die Modelle der Geodäsie stellen die dafür notwendige mathematische Struktur bereit, die eine Verbindung zu dem gegebenen Sachverhalt schafft. Die funktionale Beziehung wird als bekannt und fest vorausgesetzt. Fasst man sie in einer vektoriellen Schreibweise zusammen, so erhält man für die

$$\text{Beobachtungsergebnisse aus den Messmodellen: } \mathbf{y} = \mathbf{f}_1(\mathbf{y}^*, \mathbf{p}), \quad (3.56)$$

$$\text{freien Parameter aus den geodätischen Modellen: } \boldsymbol{\theta} = \mathbf{f}_2(\mathbf{y}, \mathbf{p}) = \mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(\mathbf{y}^*, \mathbf{p}), \mathbf{p}). \quad (3.57)$$

Die Charakteristik der Unsicherheiten der Beobachtungsergebnisse  $\mathbf{y}$  und der freien Parameter  $\boldsymbol{\theta}$  ist abhängig von den auftretenden Arten der Unsicherheiten in den originären Beobachtungen  $\mathbf{y}^*$  und in den Einflussgrößen  $\mathbf{p}$ . Sowohl die Beobachtungsergebnisse als auch die freien Parameter aus den geodätischen Modellen sind gemäß Kapitel 2.3.3 Träger von zufälliger Variabilität und Impräzision.

Ausgehend von einer streng mathematischen Vorgehensweise für die Fortpflanzung von Impräzision wird in Kapitel 3.3.1 die Impräzision von Beobachtungsergebnissen abgeschätzt. Diese Abschätzung basiert auf der Anpassung der originären Beobachtungen an die im Modell gültigen Voraussetzungen (Aufbereitungsprozess). Darauf folgend wird die Berechnung der Impräzision der Schätzwerte der freien Parameter der Modelle der Geodäsie aufgezeigt. Der wesentliche Unterschied zwischen den in Formel (3.56) und (3.57) dargestellten funktionalen Zusammenhängen ist die Tatsache, dass die Beobachtungsergebnisse streng aus dem

funktionalen Zusammenhang abgeleitet werden können, während für die Bestimmung der freien Parameter eine Schätzfunktion entwickelt werden muss (vgl. Kapitel 3.3.2.2 bis 3.3.2.4). Standardlehrbücher in der Mathematik auf diesem Gebiet sind VIERTL (1996); VIERTL und HARETER (2006) sowie KRUSE und MEYER (1987). Weitere Abhandlungen sind die Arbeiten von KRÄTSCHMER (2001 und 2006) und der Beitrag von STEINMETZ (1998). Im Bereich der Ingenieurwissenschaften beschäftigen sich vor allem KUTTERER (2002b) sowie MÖLLER und BEER (2004) mit dieser Thematik.

### 3.3.1 Bestimmung von unscharfen Beobachtungsergebnissen

Die im Folgenden dargestellte Ableitung von unscharfen Beobachtungsergebnissen basiert auf SCHÖN (2003, S. 27ff), der Intervalle als Unsicherheitsmaße für die Einflussgrößen der Impräzision verwendet. Da jeder  $\alpha$ -Schnitt eines Fuzzy-Sets bei den im Rahmen dieser Arbeit verwendeten konvexen Zugehörigkeitsfunktionen ein Intervall darstellt, kann die in SCHÖN (2003) verwendete Betrachtungsweise einfach auf Fuzzy-Sets erweitert werden (vgl. auch Formel (3.34)).

Ausgangspunkt ist die formale mathematische Formulierung der in Kapitel 2.3 nur verbal beschriebenen Zusammenhänge (vgl. auch Abbildung 2.7). Dafür soll zunächst eine Aufteilung aller Einflussfaktoren

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_M^T & \mathbf{p}_S^T & \mathbf{p}_Z^T \end{bmatrix}^T$  aus Formel (3.56) in drei Untergruppen erfolgen:

- I. Einflussfaktoren, die den festen Modellparameter zugeordnet werden:  $\mathbf{p}_M$
- II. Einflussfaktoren, die den Sensorparametern zugeordnet werden:  $\mathbf{p}_S$
- III. Einflussfaktoren, die den Seiteninformationen (zusätzliche Messungen) zugeordnet werden:  $\mathbf{p}_Z$

Ausgehend von Formel (3.56) lassen sich die Beobachtungsergebnisse  $\mathbf{y}$ , bei einer detaillierteren Betrachtung des Aufbereitungsprozesses der originären Beobachtungen  $\mathbf{y}^*$ , in zwei Komponenten aufspalten. Zum einen in die originären Beobachtungen selber und zum anderen in deren entsprechende Korrekturen und Reduktionen  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{y}^*, \mathbf{p}) = \mathbf{y}^* + \mathbf{k}. \quad (3.58)$$

Die Korrektions- und Reduktionsschritte während des Aufbereitungsprozesses können nach Schön (2003, S. 32) unterschieden werden in:

- I. Geräteinterne Korrekturen:  $\mathbf{k}_s$
- II. Physikalische Korrekturen:  $\mathbf{k}_p$
- III. Korrekturen und Reduktionen für die Anpassung an das Modell der Geodäsie:  $\mathbf{k}_G$

Der Mess- und Aufbereitungsprozess kann damit auch als Verkettung  $\circ$  der obigen Korrekturen und Reduktionen zusammengefasst werden zu (SCHÖN, 2003, S. 32):

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}(\mathbf{M}_s \mathbf{y}^* \circ \mathbf{k}_s \circ \mathbf{k}_p) \circ \mathbf{k}_G = \mathbf{M}(\mathbf{y}^* \circ \mathbf{k}_p) \circ \mathbf{k}_s, \quad (3.59)$$

wobei  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{M}_s$  Matrizen für die jeweilige Messmethode darstellen, die angewandt wurde. Die originäre Beobachtung  $\mathbf{y}^*$  ist die geräteinterne, zumeist physikalisch gemessene Größe und  $\mathbf{y}'$  ist der am Gerät abgelesene Beobachtungswert.  $\mathbf{M}_s$  sind Messmethoden, die geräteintern (Mittlung der Strecke bzw. des Teilkreisabgriffes über viele Einzelmessungen etc.) stattfinden und  $\mathbf{M}$  ist die Matrix der Messmethode für die Messanordnung. Bei einer solchen Messanordnung kann es sich bspw. um eine Zwei-Lagen-Messung bei der Horizontalrichtungsmessung handeln. Der Term  $\mathbf{M}_s \mathbf{y}^* \circ \mathbf{k}_s$  ist dem Auswerter zumeist nicht zugänglich, da es sich insbesondere bei Instrumenten neuer Bauart nur um Black-Box-Systeme handelt. Aus diesem Grund kann die Impräzision der abgelesenen Beobachtungen nur abgeschätzt werden. Dies ist kein Defizit der vorgestellten Methodik, sondern durch den mangelnden Informationsfluss durch die Gerätehersteller begründet.

Über die in Formel (3.59) hinausgehenden Faktoren wird die Impräzision durch Inkonsistenzen zwischen Modell und Realität (vgl. Abbildung 2.7) sowie Rundungsfehler und die Vernachlässigung von bekannten Korrekturen aufgrund von Modellvereinfachungen verursacht. Diese nicht modellierten bzw. nicht modellierbaren Effekte werden mit  $\Delta$  bezeichnet. Der Vektor der Einflussfaktoren erweitert sich somit zu:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_M^T & \mathbf{p}_S^T & \mathbf{p}_Z^T & \Delta^T \end{bmatrix}^T. \quad (3.60)$$

Ausgangspunkt für die Ableitung unscharfer Beobachtungsergebnisse ist die Zusammenfassung aller Einflussfaktoren auf die Abweichung zwischen Modell und Beobachtungen zu einem unscharfen Vektor  $\mathbf{p} \rightarrow m_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ . Für diesen Schritt wird folgender Ablauf vorgeschlagen:

- Identifikation aller in Frage kommenden signifikanten Einflussfaktoren auf Basis eines Fragebogens oder Ishikawa-Diagramms (vgl. Abbildung 2.8).
- Durchführung einer Expertenbefragung für die Konstruktion der Zugehörigkeitsfunktionen  $p_i \rightarrow m_{\tilde{p}_i}(x)$  bzw.  $p_i \rightarrow \tilde{p}_i$  für jeden signifikanten Einflussfaktor gemäß Kapitel 3.2.4. Als Mittelpunkt der unscharfen Intervalle wird der klassisch verwendete Wert der Einflussfaktoren verwendet. Die Mittelpunkte  $\tilde{p}_{m, \Delta_i}$  der nicht modellierten bzw. nicht modellierbaren Effekte  $\Delta_i$  werden mit Null angesetzt (SCHÖN, 2003, S. 35):  $\tilde{p}_{m, \Delta_i} = 0$ .
- Zusammenfassung aller signifikanten Einflussfaktoren zu einem unscharfen Vektor  $\tilde{\mathbf{p}}$  bzw.  $m_{\tilde{\mathbf{p}}}(\mathbf{x})$  (vgl. Kapitel 3.2.3.1).

Der unscharfe Vektor aller signifikanten Einflussfaktoren stellt bis zu diesem Punkt eine deterministische Größe dar, die im Folgenden zur Ableitung der Impräzision der mit einem unscharfen Zufallsvektor beschriebenen Beobachtungsergebnisse verwendet werden soll. Da die originären Beobachtungen insbesondere bei modernen Geräten nicht immer zugänglich sind, geschieht die Zusammenfassung der Beobachtungsergebnisse zu einem unscharfen Zufallsvektor in diesen Fällen auf Basis der abgelesenen Beobachtungen  $\mathbf{y}'$ .

Für die durch die Verknüpfung  $\mathbf{M}_s \mathbf{y}' \circ \mathbf{k}_s$  induzierte Impräzision erfolgt lediglich eine Abschätzung ihrer Größenordnung. Die im Folgenden vorgestellte Methode wird als *Sensitivitätsanalyse* (engl.: sensitivity analysis; KUTTERER, 2002b, S. 67) des Aufbereitungsprozesses bezeichnet.

Im Rahmen der Sensitivitätsanalyse kommt es bei der Unsicherheit der Beobachtungsergebnisse zu einer Überlagerung von zufälliger Variabilität und Impräzision. Die zufällige Variabilität beschreibt die Unsicherheit der originären Beobachtungen, und die Impräzision wird durch die Einflussfaktoren nach Formel (3.60) induziert. Streng genommen muss damit die Abschätzung der zufälligen Variabilität und der Impräzision im Ansatz der unscharfen Zufallsvariablen mit Formel (3.54) durch Anwendung des Zadeh'schen Erweiterungsprinzips erfolgen. Es wird das Minimum und das Maximum der Beobachtungsergebnisse gesucht, das man durch Variation der Einflussfaktoren und Einhaltung der Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie gewinnt:

$$\underline{\tilde{\mathbf{y}}} := m_{\underline{\tilde{\mathbf{y}}}}(\mathbf{y}) = \sup_{\substack{(p_1, \dots, p_j) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_j \text{ und } (y_1^*, \dots, y_n^*) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_n \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(p_1, \dots, p_j, y_1^*, \dots, y_n^*)}} \min(m_{\tilde{p}_1}(p_1), \dots, m_{\tilde{p}_j}(p_j), y_1^*, \dots, y_n^*), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.61)$$

Beide Eingangsgrößen stellen einen Spezialfall der unscharfen Zufallsvariablen dar. Für die Einflussfaktoren ist die Varianz Null und die originären Beobachtungen haben eine verschwindende Referenzfunktion. Durch die gemeinsame Betrachtung der originären Beobachtungen in dem Funktionsausdruck werden entsprechende Nichtlinearitäten der Funktion (3.58) im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie korrekt berücksichtigt. Die Auswertung des Ausdruckes (3.61) kann aufgrund der Komplexität des Erweiterungsprinzips bei hochdimensionalen Problemen einen für die Praxis nicht vertretbaren Rechenumfang erfordern. Des Weiteren ist die über das Minimum-Prinzip konstruierte Zugehörigkeitsfunktion für die Beobachtungsergebnisse nur schwer komponentenweise zu interpretieren. Um diesen Mangel zu beheben wird im Folgenden davon ausgegangen, dass die Funktionen im Auswertebereich ausreichend linear sind und der Approximationsfehler vernachlässigt werden kann. Dies kann i. d. R. für geodätische Fragestellungen vorausgesetzt werden, in denen die Korrekturen und Reduktionen sowie die Einflussfaktoren sehr klein sind gegenüber den originären Beobachtungen.

Da zufällige Variabilität und Impräzision in verschiedenen Eingangsgrößen vorkommen, wird im Rahmen dieser Arbeit eine zweigeteilte Konstruktion der unscharfen Zufallsvariablen für die Beobachtungsergebnisse angewandt (vgl. auch Kapitel 3.2.5). Zum einen erfolgt für die Bestimmung ihrer Referenzfunktionen eine Anwendung des Erweiterungsprinzips (Formel (3.40)) auf den Aufbereitungsprozess der originären Beobachtungen. Dies würde formal für  $j$  Einflussfaktoren dem folgenden Ansatz entsprechen:

$$\tilde{\mathbf{y}} := m_{\tilde{\mathbf{y}}}(\mathbf{y}) = \sup_{\substack{(p_1, \dots, p_j) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_j \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(p_1, \dots, p_j)}} \min(m_{\tilde{p}_1}(p_1), \dots, m_{\tilde{p}_j}(p_j)) = \sup_{\substack{(p_1, \dots, p_j) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_j \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(p_1, \dots, p_j)}} m_{\tilde{\mathbf{p}}}(\mathbf{p}), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^j, \quad (3.62)$$

wobei der unscharfe Vektor für die Beobachtungsergebnisse noch keine zufällige Komponente besitzt. Zum anderen erfolgt für die Bestimmung ihres zufälligen Mittelpunktes durch die Auswertung des Ausdruckes (3.58) für alle Mittelpunkte der unscharfen Einflussfaktoren:

$$\underline{y}_m = \mathbf{f}(\mathbf{y}^*, \mathbf{p}_m). \quad (3.63)$$

Nach der getrennten Fortpflanzung beider Unsicherheitskomponenten werden sie wieder zu einer unscharfen Zufallsvariable kombiniert (Abbildung 3.5). Streng mathematisch betrachtet ist die kombinierte Konstruktion einer unscharfen Zufallsvariablen und eines unscharfen Zufallsvektors nur für lineare Funktionen zulässig. Für nichtlineare Funktionen wird der Bias bei der Transformation von Zufallsvariablen durch nichtlineare Funktionen (BAR-SHALOM ET AL., 2001) nicht korrekt berücksichtigt.

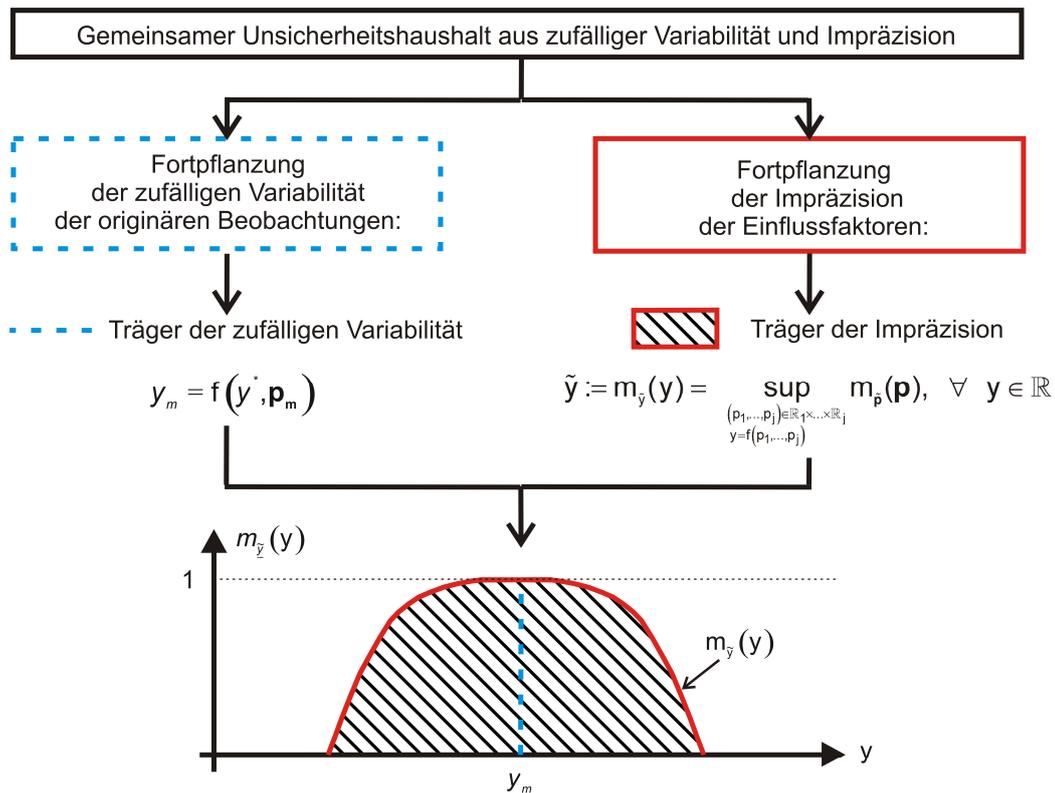


Abbildung 3.5: Zweigeteilte Konstruktion einer eindimensionalen unscharfen Zufallsvariablen.

Im Falle ausreichend linearer Zusammenhänge zwischen den Beobachtungsergebnissen und den Einflussfaktoren empfiehlt sich eine komponentenweise Fortpflanzung der Unsicherheiten mittels Linearisierung. Bei der in Kapitel 3.2.4 vorgestellten Vorgehensweise für die Konstruktion der Zugehörigkeitsfunktionen handelt es sich immer um L-unscharfe Intervalle, sodass die Formel (3.26) für eine hinreichende Anzahl von  $\alpha$ -Schnitten der unscharfen Einflussfaktoren ausgewertet werden kann (z. B. für die Anzahl der befragten Experten bei der Konstruktion der Zugehörigkeitsfunktionen gemäß Kapitel 3.2.4). Der Mittelpunkt der unscharfen Beobachtungsergebnisse wird mit Formel (3.63) berechnet und das Minimum  $\underline{\tilde{y}}_{\alpha, \min}$  und Maximum  $\underline{\tilde{y}}_{\alpha, \max}$  jedes  $\alpha$ -Schnittes  $\underline{\tilde{y}}_{\alpha} = [\underline{\tilde{y}}_{\alpha, \min}, \underline{\tilde{y}}_{\alpha, \max}]$  mit:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{y}}_{\alpha, \min} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}^*, \mathbf{p}_m) - |\mathbf{MF}|(\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r}), \\ \underline{\tilde{y}}_{\alpha, \max} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}^*, \mathbf{p}_m) + |\mathbf{MF}|(\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Die Matrix der partiellen Ableitungen der Beobachtungsergebnisse nach den Einflussfaktoren an der Stelle ihrer Mittelpunkte ist  $\mathbf{F} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y}^*, \mathbf{p}_m)}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_m}$  und  $|\cdot|$  steht für den elementweisen Absolutbetrag. Die Matrix  $\mathbf{M}$  steht für die Matrix der Messmethoden aus Formel (3.59). Die Zugehörigkeitsfunktionen für jede einzelne Komponente des unscharfen Vektors der Beobachtungsergebnisse wird dann über die  $\alpha$ -Schnitte konstruiert (vgl. Formel (3.34)):

$$m_{\tilde{y}_i}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\tilde{y}_i, \alpha}(x) \quad \text{und} \quad i_{\tilde{y}_i, \alpha} = [\underline{\tilde{y}}_{i, \alpha, \min}, \underline{\tilde{y}}_{i, \alpha, \max}]. \quad (3.65)$$

Im Falle linearer Referenzfunktionen kann die Formel (3.64) nur für die  $\alpha$ -Schnitte mit  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 1$  ausgewertet werden. Andernfalls ist eine ausreichende Anzahl von  $\alpha$ -Schnitten bei der Konstruktion der Zugehörigkeitsfunktionen zu berücksichtigen. An dieser Stelle sei angemerkt, dass der Wertebereich nur komponentenweise exakt ist, die tatsächliche Lösungsmenge aufgrund der Interaktivität der einzelnen Komponenten jedoch überschätzt wird. Eine ausführlichere Diskussion dieser Problematik erfolgt in Kapitel 3.3.3.

Die vorangegangene Zusammenstellung bezieht sich auf die Fortpflanzung von zufälliger Variabilität und Impräzision im Falle von unscharfen Zufallsvariablen. Zu Beginn des Kapitels 3.3 wurden einige Standardwerke auf diesem Gebiet aufgezählt. Für die gemeinsame Modellierung von zufälliger Variabilität und Unschärfe existiert eine Reihe von weiteren methodischen Vorgehensweisen, die jedoch nicht Thema dieser Arbeit sein können und kurz in Kapitel 3.2 genannt werden. Im geodätischen Bereich sind die Arbeiten von KUTTERER (2002b) und von SCHÖN (2003) hervorzuheben, die über den obigen Ansatz hinaus einige methodische Vorgehensweisen behandeln und diskutieren.

### 3.3.2 Parameterschätzung bei Impräzision

#### 3.3.2.1 Ausgangssituation

In der (geodätischen) Datenanalyse wird zumeist zweistufig gearbeitet. In einem ersten Schritt werden die originären Beobachtungen mittels der Beobachtungsmodelle einem Aufbereitungsprozess unterzogen, um dann die so gewonnenen Beobachtungsergebnisse für die Bestimmung von freien Parametern in den Modellen der Geodäsie nutzen zu können. Für die Bestimmung der freien Parameter liegen zumeist eine redundante Anzahl von Beobachtungen vor, sodass für eine optimale Bestimmung der freien Parameter eine **Parameterschätzung** (engl.: parameter estimation) angewandt wird. Dieses Teilkapitel wird die notwendige Methodik vorstellen, um zum einen die Parameterschätzung durchzuführen und zum anderen die in dieser Arbeit modellierten Arten von Unsicherheit von den Beobachtungsergebnissen auf die freien Parameter fortzupflanzen. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Unsicherheit der Beobachtungsergebnisse aus zufälliger Variabilität und Impräzision besteht.

Als klassische Parameterschätzung (Punktschätzung) bezeichnet man die Schätzung von Parametern  $\theta \in \Theta$  aus einer redundanten Anzahl von stochastischen Beobachtungsergebnissen  $\mathbf{y} \sim \rho_o(\mathbf{y})$ . Die klassische Schätzung ist definiert durch die Abbildung des Stichprobenraumes  $M_y^n \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $\mathbf{y}$  in den Parameterraum  $\Theta$ , wobei  $\mathfrak{S}$  die vektorwertige Schätzfunktion darstellt (VIERTL und HARETER, 2006, S. 76f):

$$\mathfrak{S} := M_x^n \rightarrow \Theta \quad \text{mit} \quad \mathfrak{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^u. \quad (3.66)$$

Die Anzahl der Beobachtungen ist  $n$  und die Anzahl der Parameter  $u$ . Jeder konkreten Stichprobe  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in M_y^n$  wird dabei ein Schätzwert  $\hat{\theta} = \mathfrak{S}(y_1, \dots, y_n) \in \Theta$  zugeordnet.

Liegt anstelle eines präzisen Zufallsvektors ein unscharfer Zufallsvektor  $\tilde{\mathbf{y}}$  für die Beobachtungsergebnisse vor, muss mit der Wahrscheinlichkeitstheorie (Kapitel 3.2.1) zunächst eine Schätzfunktion  $\mathfrak{S}(y_1, \dots, y_n)$  für die Parameter  $\theta$  aufgestellt werden. Mit der Anwendung des Erweiterungsprinzips gemäß Formel (3.40) auf diese Schätzfunktion kann dann der unscharfe Vektor der Parameter  $\tilde{\theta}$  bestimmt werden:

$$\tilde{\theta} := m_{\tilde{\theta}}(\theta) = \sup_{\substack{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_n \\ \theta = \mathfrak{S}(y_1, \dots, y_n)}} \min(m_{\tilde{y}_1}, \dots, m_{\tilde{y}_n}), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^u. \quad (3.67)$$

Diese Definition eines unscharfen Vektors der Parameter  $\tilde{\theta}$  ist sowohl für lineare als auch für nichtlineare Fragestellungen geeignet, da evtl. vorhandene Nichtlinearitäten entsprechend korrekt in einer optimalen Schätzfunktion berücksichtigt werden. Liegen gemäß Kapitel 3.3.1 jedoch scharfe originäre Beobachtungen vor und wird die Impräzision durch die unscharfen Einflussfaktoren induziert, hat die Schätzung streng genommen auf Ebene der originären Beobachtungen und Einflussfaktoren zu erfolgen (vgl. Formel (3.61)):

$$\tilde{\theta} := m_{\tilde{\theta}}(\theta) = \sup_{\substack{(p_1, \dots, p_j) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_j \text{ und } (y_j^*, \dots, y_n^*) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_n \\ \theta = \mathfrak{S}(p_1, \dots, p_j, y_j^*, \dots, y_n^*)}} \min(m_{p_1}(p_1), \dots, m_{p_j}(p_j), y_j^*, \dots, y_n^*), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^u. \quad (3.68)$$

In den folgenden Unterkapiteln wird die praktische Vorgehensweise der Parameterschätzung und der Unsicherheitsfortpflanzung an den beiden in der Geodäsie am meisten verwendeten Ausgleichungsmodellen aufgezeigt.

### 3.3.2.2 Das Gauß-Markov-Modell bei Impräzision

Liegt zwischen den Beobachtungsergebnissen und den zu schätzenden Parametern der funktionale Zusammenhang:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.69)$$

vor, so kann die Parameterschätzung in einem **Gauß-Markov-Modell** (GMM, engl.: Gauss-Markov model, KOCH, 2004, S. 166) durchgeführt werden. Dies setzt voraus, dass die Funktion  $\mathbf{f}$  in Gleichung (3.69) hinreichend gut durch eine Taylorreihenentwicklung erster Ordnung an der Stelle der Näherungswerte  $\boldsymbol{\theta}_0$  der Parameter  $\boldsymbol{\theta}$  approximiert werden kann. Für die weitere Vorgehensweise unterscheidet man in ein linearisiertes funktionales Modell (3.70) und ein stochastisches Modell (3.71):

$$E[\mathbf{y}] \approx \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}d\boldsymbol{\theta}, \quad (3.70)$$

$$D[\mathbf{y}] = \boldsymbol{\Sigma}_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{P}_{yy}^{-1}, \quad (3.71)$$

mit

$E[\dots], D[\dots]$	dem Erwartungswert- bzw. Dispersionsoperator,
$\mathbf{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}$	der $n \times u$ Designmatrix (Jakobimatrix) an der Stelle $\boldsymbol{\theta}_0$ ,
$\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0)$	dem $n \times 1$ Vektor der Näherungswerte der Beobachtungsergebnisse $\mathbf{y}$ an der Stelle $\boldsymbol{\theta}_0$ ,
$\boldsymbol{\Sigma}_{yy}$	der $n \times n$ Kovarianzmatrix der Beobachtungsergebnisse $\mathbf{y}$ ,
$\mathbf{Q}_{yy}$	der $n \times n$ Kofaktormatrix der Beobachtungsergebnisse $\mathbf{y}$ ,
$\mathbf{P}_{yy}$	der $n \times n$ Gewichtsmatrix der Beobachtungsergebnisse $\mathbf{y}$ ,
$d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0$	dem $u \times 1$ Vektor der Zuschläge für die Parameter $\boldsymbol{\theta}$ ,
$\sigma_0^2$	dem a-priori Varianzfaktor.

In dem linearisierten GMM lassen sich die Beobachtungen als Linearkombination der Parameter darstellen. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Linearisierung und Lösung auch noch auf anderen Wegen geschehen kann (LENZMANN und LENZMANN, 2007), was jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht diskutiert werden kann. Da Gleichung (3.70) aufgrund der zufälligen Variation der Beobachtungsergebnisse inkonsistent ist, führt man den sogenannten zufälligen Verbesserungsvektor  $\mathbf{v}$  ein und erhält die Verbesserungsgleichungen zu:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}d\boldsymbol{\theta} - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = \mathbf{A}d\boldsymbol{\theta} - d\mathbf{y}, \quad \text{mit } E[\mathbf{v}] = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad D[\mathbf{v}] = D[\mathbf{y}] = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} \quad (3.72)$$

sowie  $d\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$  dem gekürzten Beobachtungsvektor. Die Schätzung wird nach der Methode der kleinsten Quadrate (MkQ, KOCH 2004, S. 164f) durchgeführt, was gleichbedeutend mit der Minimierung der gewichteten Verbesserungsquadratsumme ist:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{v} \rightarrow \min. \quad (3.73)$$

Aus dieser Forderung ergibt sich die Schätzfunktion  $\mathfrak{S}$  für die aus einer Stichprobe  $\mathbf{y} \in M_y^n$  geschätzten Parameter  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  mit den Normalgleichungen  $(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}) d\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} d\mathbf{y}$  zu:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0 + d\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathfrak{S}_{\text{GMM}}(dy_1, \dots, dy_n) = \boldsymbol{\theta}_0 + (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} d\mathbf{y}. \quad (3.74)$$

Das Zeichen (+) steht für eine Pseudoinverse (KOCH, 2004, S. 55ff). Aufgrund von Konfigurationsdefekten oder nicht vollständigen Datumsfestlegungen (JÄGER ET AL., 2005 und NIEMEIER, 2008) kann es zu nicht spaltenregulären Designmatrizen kommen, wodurch die Normalgleichungen nicht den vollen Rang

$\text{rg}(\mathbf{N}) < u$  haben. Der Schätzer ist erwartungstreu und hat minimale Varianz (KOCH, 2004). Die wichtigsten Kenngrößen und ihre Kofaktormatrizen berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \text{Geschätzte Parameter:} \quad & \hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0 + d\hat{\boldsymbol{\theta}}, & \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+, \\ \text{Ausgeglichene Beobachtungen:} \quad & d\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{y} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{y}_0, & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}} &= \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{A}^T, \\ \text{Verbesserungen:} \quad & \hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{P}_{yy} d\mathbf{y}, & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}} &= \mathbf{Q}_{yy} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Eine erwartungstreue Schätzung  $\hat{\sigma}_0^2$  des a-priori Varianzfaktors  $\sigma_0^2$  ergibt sich aus der Verbesserungsquadratsumme:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_{yy} \hat{\mathbf{v}}}{\text{rg}(\mathbf{N})} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_{yy} \hat{\mathbf{v}}}{f} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_{yy} \hat{\mathbf{v}}}{n - u + d}, \quad (3.76)$$

mit  $d$  der Anzahl an Datumsdefekten. Für ein GMM mit vollem Rang ist die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  der Ausgleichung  $f = n - u$ . Auf statistische Tests für die Überprüfung der Verträglichkeit zwischen Beobachtungen und Modell, insbesondere auch im Falle unscharfer Daten, wird in den Kapiteln 4 und 5 ausführlich eingegangen.

Der Übergang auf die Auswertung des GMM bei Impräzision kann unmittelbar durch Einsetzen der Schätzfunktion aus (3.74) in (3.67) erfolgen:

$$\underline{\hat{\boldsymbol{\theta}}} := m_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) = \sup_{\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0 + (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} d\mathbf{y}} \min(m_{\hat{y}_1}, \dots, m_{\hat{y}_n}), \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^u. \quad (3.77)$$

KUTTERER (2002b, S. 48 und S. 69) weist darauf hin, dass die Konstruktion unscharfer Vektoren eine Obermenge der tatsächlichen Lösungsmenge ist und empfiehlt die nur einmalige Abbildung eines unscharfen Zufallsvektors (KUTTERER, 2002b, S. 69). Da bereits der unscharfe Zufallsvektor der Beobachtungsergebnisse mit dem Erweiterungsprinzip konstruiert wurde, würde sich bei direkter Anwendung der Formel (3.77) die Überschätzung fortpflanzen. Aus diesem Grund wird im Folgenden eine zweigeteilte Konstruktion des unscharfen Zufallsvektors der Parameter vorgeschlagen, wie sie auch schon bei den Beobachtungsergebnissen in Kapitel 3.3.1 (vgl. Abbildung 3.5) durchgeführt wurde. Dies ermöglicht eine direkte Rückführung auf die die Impräzision hervorrufenden unscharfen Einflussfaktoren (vgl. Kapitel 3.3.1). Aufgrund der linearen Schätzfunktion (3.74) ergibt sich der Mittelpunkt  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$  für den unscharfen Zufallsvektor  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  der Parameter mit (3.63) unmittelbar zu:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\theta}_0 + (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0). \quad (3.78)$$

Das Minimum  $\tilde{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\alpha, \min}$  und Maximum  $\tilde{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\alpha, \max}$  jedes  $\alpha$ -Schnittes wird durch Einsetzen von (3.64) in (3.74) mit:

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\alpha, \min} &= \hat{\boldsymbol{\theta}} - \left| (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \right| (\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r}), \\ \tilde{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\alpha, \max} &= \hat{\boldsymbol{\theta}} + \left| (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \right| (\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r}), \end{aligned} \quad (3.79)$$

komponentenweise exakt berechnet. Der korrekte Wertebereich wird aufgrund der Interaktivität der einzelnen Vektorkomponenten jedoch überschätzt (SCHÖN und KUTTERER, 2005b). Die Zugehörigkeitsfunktionen für jede einzelne Komponente des unscharfen Vektors der Parameter wird dann über die  $\alpha$ -Schnitte konstruiert, vgl. auch Formel (3.34):

$$m_{\hat{\theta}_i}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\hat{\theta}_i, \alpha}(x) \quad \text{und} \quad i_{\hat{\theta}_i, \alpha} = \left[ \tilde{\hat{\theta}}_{i, \alpha, \min}, \tilde{\hat{\theta}}_{i, \alpha, \max} \right]. \quad (3.80)$$

### 3.3.2.3 Ein erweitertes Gauß-Markov-Modell bei Impräzision

Erweitert man die funktionale Beziehung der Gleichung (3.69) um zusätzliche Parameter  $\mathbf{z}$ :

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{z}), \quad (3.81)$$

so kann die Parameterschätzung in einem erweiterten GMM durchgeführt werden. Rein formal könnten natürlich beide Parametergruppen zu einem gemeinsamen Parametervektor zusammengefasst werden, um mit

den Formeln aus Kapitel 3.3.2.2 behandelt zu werden. Aus zwei Gründen ist dies nicht sinnvoll. Zum einen kann es von Interesse sein, zusätzliche Parameter, wie zu schätzende Instrumentenfehler oder Orientierungsunbekannte, zu eliminieren. Zum anderen wird bei den Hypothesentests in Kapitel 5 noch gezeigt werden, dass das erweiterte GMM der Schlüssel für eine effiziente Vorgehensweise bei der Ausreißersuche, der Modellwahl und der Sensitivitätsanalyse ist (vgl. Kapitel 5.3 bis 5.4.3). Es wird wiederum vorausgesetzt, dass die Funktion (3.81) hinreichend gut durch eine Taylorreihenentwicklung erster Ordnung an der Stelle der Näherungswerte  $\boldsymbol{\theta}_0$  und  $\mathbf{z}_0$  der Parameter  $\boldsymbol{\theta}$  und  $\mathbf{z}$  approximiert werden kann. Im Vergleich zum GMM aus Kapitel 3.3.2.2 verändert sich lediglich das funktionale Modell (3.82), das stochastische Modell in (3.83) behält im Vergleich zu (3.71) seine Gültigkeit:

$$E[\mathbf{y}] \approx \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{z}_0) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0 \\ \mathbf{z}=\mathbf{z}_0}} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right)_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0 \\ \mathbf{z}=\mathbf{z}_0}} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) = \mathbf{y}_{0,E} + \mathbf{A}_1 d\boldsymbol{\theta}_E + \mathbf{A}_2 d\mathbf{z}, \quad (3.82)$$

$$D[\mathbf{y}] = \boldsymbol{\Sigma}_{yy} = \sigma_{0,E}^2 \mathbf{Q}_{yy} = \sigma_{0,E}^2 \mathbf{P}_{yy}^{-1}, \quad (3.83)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0 \\ \mathbf{z}=\mathbf{z}_0}} && \text{der } n \times u_1 \text{ Designmatrix (Jakobimatrix) für die Parameter } \boldsymbol{\theta}, \\ \mathbf{A}_2 &= \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right)_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0 \\ \mathbf{z}=\mathbf{z}_0}} && \text{der } n \times u_2 \text{ Designmatrix (Jakobimatrix) für die Parameter } \mathbf{z}, \\ \mathbf{y}_{0,E} &= \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{z}_0) && \text{dem } n \times 1 \text{ Vektor der Näherungswerte der Beobachtungsergebnisse } \mathbf{y}, \\ d\boldsymbol{\theta}_E &= \boldsymbol{\theta}_E - \boldsymbol{\theta}_0 && \text{dem } u_1 \times 1 \text{ Vektor der Zuschläge für die Parameter } \boldsymbol{\theta}_E, \\ d\mathbf{z} &= \mathbf{z} - \mathbf{z}_0 && \text{dem } u_2 \times 1 \text{ Vektor der Zuschläge für die zusätzlichen Parameter } \mathbf{z}, \\ \sigma_{0,E}^2 &&& \text{dem a-priori Varianzfaktor im erweiterten Modell.} \end{aligned}$$

Im Folgenden soll vorausgesetzt werden, dass das Standard GMM durch streichen von Parametern des erweiterten GMM erhalten werden kann. In diesem Falle gilt:  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_0)$ , sodass die Entwicklungsstelle für die Taylorreihe bei beiden Modellen identisch ist und  $\mathbf{y}_{0,E} = \mathbf{y}_0$  gesetzt werden kann. Die Anzahl der Unbekannten in  $\boldsymbol{\theta}$  ist  $u_1 = u$  und die Anzahl der zusätzlichen Unbekannten in  $\mathbf{z}$  ist  $u_2$ . Der Verbesserungsvektor  $\mathbf{v}_E$  im erweiterten GMM ergibt sich mit dem gekürzten Parametervektor im erweiterten Modell<sup>6</sup>  $d\boldsymbol{\theta}_E = \boldsymbol{\theta}_E - \boldsymbol{\theta}_0$  zu:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{A}_1 d\boldsymbol{\theta}_E + \mathbf{A}_2 d\mathbf{z} - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = \mathbf{A}_1 d\boldsymbol{\theta}_E + \mathbf{A}_2 d\mathbf{z} - d\mathbf{y} \quad \text{mit } E[\mathbf{v}_E] = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad D[\mathbf{v}_E] = D[\mathbf{y}] = \sigma_{0,E}^2 \mathbf{Q}_{yy}. \quad (3.84)$$

Die Schätzung wird wie in Kapitel 3.3.2.2 mit der MkQ durchgeführt, was gleichbedeutend mit der Minimierung der Verbesserungsquadratsumme ist:

$$\mathbf{v}_E^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{v}_E \rightarrow \min. \quad (3.85)$$

Aus der Minimierungsforderung lassen sich die Normalgleichungen ableiten:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\hat{\boldsymbol{\theta}}_E \\ d\hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

womit die geschätzten zusätzlichen Parameter  $\hat{\mathbf{z}}$  und ihre Kofaktormatrix  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}$  sich mit der Schätzfunktion  $\boldsymbol{\vartheta}_{\text{GMM},E}(y_1, \dots, y_n)$  bestimmen lassen (KOCH, 2004, S. 227):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} &= \boldsymbol{\vartheta}_{\text{GMM},E}(y_1, \dots, y_n) = \mathbf{z}_0 + \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{P}_{yy} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0), \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}} &= \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Durch die Einführung der zusätzlichen Parameter müssen die ursprünglichen Parameter aufdatiert werden:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_E = \boldsymbol{\vartheta}_{\text{GMM},E}(y_1, \dots, y_n) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + \left( \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 \right)^{-1} \left[ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} d\mathbf{y} - \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 d\hat{\mathbf{z}} \right]. \quad (3.88)$$

<sup>6</sup> Der Index E bei  $\mathbf{v}_E$  und  $\boldsymbol{\theta}_E$ , etc. steht für ein „E“rweitertes GMM.

Das Zeichen  $(-)$  steht für eine generalisierte Inverse (KOCH, 2004, S. 55ff). Sie soll im Folgenden verwendet werden, wenn es zu Fällen kommen kann, in denen eine korrekte Verwendung einer Pseudoinversen oder einer Inversen nicht eindeutig sichergestellt werden kann. Der Leser muss sich in diesen Fällen selber Gedanken über die Art der zu verwendenden Inversen machen. Eine erwartungstreue Schätzung des a-posteriori Varianzfaktors  $\hat{\sigma}_{0,E}^2$  im erweiterten Modell ergibt sich aus der Verbesserungsquadratsumme zu:

$$\hat{\sigma}_{0,E}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}_E^T \mathbf{P}_{yy} \hat{\mathbf{v}}_E}{\text{rank} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \right)} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_E^T \mathbf{P}_{yy} \hat{\mathbf{v}}_E}{f_E} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_E^T \mathbf{P}_{yy} \hat{\mathbf{v}}_E}{n - u - u_2 + d}. \quad (3.89)$$

Zum Abschluss des Kapitels soll die Auswertung des erweiterten GMM bei Unschärfe vorgestellt werden.

Der Mittelpunkt  $\left[ \hat{\boldsymbol{\theta}}_m^T, \hat{\mathbf{z}}_m^T \right]^T$  für den unscharfen Zufallsvektor  $\left[ \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T, \tilde{\mathbf{z}}^T \right]^T$  der Parameter ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_m \\ \hat{\mathbf{z}}_m \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

und Minimum  $\left[ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha, \min}^T, \tilde{\mathbf{z}}_{\alpha, \min}^T \right]^T$  sowie Maximum  $\left[ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha, \max}^T, \tilde{\mathbf{z}}_{\alpha, \max}^T \right]^T$  jedes  $\alpha$ -Schnittes der unscharfen Parameter:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha, \min} &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_m \\ \hat{\mathbf{z}}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r} \\ \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha, \max} &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_m \\ \hat{\mathbf{z}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r} \\ \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Die Zugehörigkeitsfunktionen für jede einzelne Komponente des unscharfen Vektors der Parameter des erweiterten Modells wird abschließend über die  $\alpha$ -Schnitte konstruiert:

$$m_{\hat{\theta}_i}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\hat{\theta}_i, \alpha}(x) \quad \text{und} \quad i_{\hat{\theta}_i, \alpha} = \left[ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{i, \alpha, \min}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{i, \alpha, \max} \right]. \quad (3.92)$$

Die entsprechende Überschätzung des exakten Wertebereiches bleibt, wie in Kapitel 3.3.2.2 erwähnt, bestehen. Lediglich die einzelnen Komponenten des unscharfen Vektors der Parameter sind korrekt. In Kapitel 5.3.3 und 5.4.2 wird ausführlich darauf eingegangen werden, wie die unscharfen zusätzlichen Parameter oder Linearkombinationen der unscharfen zusätzlichen Parameter im Rahmen einer linearen Hypothese auf Signifikanz geprüft werden können.

### 3.3.2.4 Das Gauß-Helmert-Modell bei Impräzision

Können Parameter und Beobachtungsergebnisse nicht funktional voneinander getrennt werden, so hat die Parameterschätzung zunächst in einem **Gauß-Helmert-Modell** (GHM, engl.: least-squares with constraints) zu erfolgen, wobei der funktionale Zusammenhang in der Form von  $r$  Bedingungsgleichungen vorliegt (vgl. z. B. JÄGER ET AL., 2005):

$$\mathbf{h}(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}. \quad (3.93)$$

Jede Beobachtung und jeder Parameter muss mindestens einmal in den Gleichungen vorkommen. Die Anwendung der MkQ für die Schätzung der Parameter führt unter Berücksichtigung der zu erfüllenden Nebenbedingung aus Formel (3.93) mit dem Korrelatenvektor  $\mathbf{k}$  zu der Minimierungsforderung:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{v} + 2\mathbf{k}\mathbf{f}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}) \rightarrow \min. \quad (3.94)$$

Das stochastische Modell aus (3.71) behält weiter seine Gültigkeit und das linearisierte funktionale Modell ist mit einer Taylorreihenentwicklung erster Ordnung von (3.93) gegeben durch (LENZMANN und LENZMANN, 2004):

$$\mathbf{h}(\mathbf{y} + \hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\theta}_0) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0 \\ \mathbf{v}=\mathbf{v}_0}} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) + \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{v}} \right)_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0 \\ \mathbf{v}=\mathbf{v}_0}} (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_0) = \mathbf{g}_0 + \mathbf{A}d\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}d\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (3.95)$$

mit

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0 \\ \mathbf{v}=\mathbf{v}_0}} \quad \text{der } r \times u \text{ Jakobimatrix (Desginmatrix) der Parameter an der Stelle } \mathbf{v}_0 \text{ und } \boldsymbol{\theta}_0,$$

$$\mathbf{B} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{v}} \right)_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0 \\ \mathbf{v}=\mathbf{v}_0}} \quad \text{der } r \times u \text{ Jakobimatrix der Beobachtungen an der Stelle } \mathbf{v}_0 \text{ und } \boldsymbol{\theta}_0,$$

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\theta}_0) \quad \text{dem Funktionswert von } \mathbf{f}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}) \text{ am Entwicklungspunkt } \mathbf{v}_0 \text{ und } \boldsymbol{\theta}_0 \text{ der Taylorreihe,}$$

$$\mathbf{d}\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0 = \mathbf{y} + \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{y}_0 \quad \text{dem gekürzten Vektor der Verbesserungen.}$$

Die Jakobimatrizen sind jeweils an der Stelle  $\boldsymbol{\theta}_0$  und  $\mathbf{v}_0$  zu bilden. Es existieren verschiedene Formen der Linearisierung (LENZMANN und LENZMANN, 2004; POPE, 1972). Zum einen kann man von der klassischen Lösung sprechen, in der nur die Parameter in jeder Iteration aufdatiert werden ( $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ ) und zum anderen spricht man von einer „strengen“ Lösung ( $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ ), in der sowohl die Parameter als auch die Beobachtungen in jeder Iteration aufdatiert werden. Im Falle der „strengen“ Lösung erhält man unter Einführung des Widerspruchsvektors:

$$\mathbf{w} = -\mathbf{B}\mathbf{v}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\theta}_0) \quad (3.96)$$

das Normalgleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{BQ}_{yy}\mathbf{B}^T & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.97)$$

was im Falle regulärer Probleme unmittelbar zur gesuchten Lösung der Parameter führt. Die Verbesserungen berechnen sich folglich aus (3.94) und (3.95) zu  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{yy}\mathbf{B}^T\hat{\mathbf{k}}$ .

Die Normalgleichungen in Formel (3.97) sind nicht für eine impräzise Auswertung geeignet, da die Parameter nicht als Funktion der unscharfen Einflussfaktoren bzw. von unscharfen Beobachtungen dargestellt werden können. Im Folgenden soll daher das vorgestellte GHM in ein GMM umgeformt werden, damit die impräzise Auswertung aus den Formeln (3.77) bis (3.80) angewandt werden kann. Durch Umstellen von (3.95) erhält man (REINKING, 2008):

$$\mathbf{g}_0 + \mathbf{A}\mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}(\mathbf{y} + \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{y}_0) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad -\mathbf{B}\mathbf{y} - (\mathbf{g}_0 - \mathbf{B}\mathbf{y}_0) - \mathbf{B}\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.98)$$

Mit

$$\mathbf{z} = -\mathbf{B}\mathbf{y}, \quad \mathbf{z}_0 = (\mathbf{g}_0 - \mathbf{B}\mathbf{y}_0) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{v}}_z = -\mathbf{B}\hat{\mathbf{v}} \quad (3.99)$$

folgt somit ein zu Formel (3.72) äquivalentes Gauß-Markov-Modell:

$$\mathbf{z} - \mathbf{z}_0 + \hat{\mathbf{v}}_z = \mathbf{d}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{v}}_z = \mathbf{A}\mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.100)$$

Im Konvergenzfall wird mit der obigen Formulierung wegen  $\mathbf{v}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{v}}$  der Widerspruchsvektor  $\mathbf{w}$  aus (3.96) als Beobachtung aufgefasst. Die gesuchten Parameter lassen sich mit der transformierten Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}_{zz} = (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}$  für  $\mathbf{z}$  aus Formel (3.99) bestimmen zu (REINKING, 2008):

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathfrak{G}_{\text{GHM}}(dy_1, \dots, dy_n) = \boldsymbol{\theta}_0 + (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{zz} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{zz} \mathbf{d}\mathbf{z} \\ &= \boldsymbol{\theta}_0 + \left( \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} (-\mathbf{B}\mathbf{y} - (\mathbf{g}_0 - \mathbf{B}\mathbf{y}_0)). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Das GHM bei Impräzision folgt nun durch Einsetzen der Schätzfunktion aus (3.101) in (3.67):

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} := m_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) = \sup_{\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0 + \left( \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} (-\mathbf{B}\mathbf{y} - (\mathbf{g}_0 - \mathbf{B}\mathbf{y}_0))} \min(m_{\hat{y}_1}, \dots, m_{\hat{y}_n}), \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^u. \quad (3.102)$$

In Analogie zum GMM kann der Mittelpunkt  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$  der unscharfen Parameter bestimmt werden:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\theta}_0 + \left( \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} (-\mathbf{B}\mathbf{y} - (\mathbf{g}_0 - \mathbf{B}\mathbf{y}_0)). \quad (3.103)$$

Das Minimum  $\underline{\hat{\theta}}_{\alpha,\min}$  und Maximum  $\underline{\hat{\theta}}_{\alpha,\max}$  jedes  $\alpha$ -Schnittes kann durch Einsetzen von (3.64) in (3.101):

$$\begin{aligned}\underline{\hat{\theta}}_{\alpha,\min} &= \hat{\theta} - \left| \left( \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} \right)^- \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{BF} \right| (\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,r}), \\ \underline{\hat{\theta}}_{\alpha,\max} &= \hat{\theta} + \left| \left( \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} \right)^- \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{BF} \right| (\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,r}),\end{aligned}\quad (3.104)$$

komponentenweise exakt berechnet werden. Die Zugehörigkeitsfunktionen für jede einzelne Komponente des unscharfen Vektors der Beobachtungsergebnisse wird wie in (3.80) über die  $\alpha$ -Schnitte konstruiert:

$$m_{\hat{\theta}_i}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\hat{\theta}_i, \alpha}(x) \quad \text{und} \quad i_{\hat{\theta}_i, \alpha} = \left[ \underline{\hat{\theta}}_{i,\alpha,\min}, \underline{\hat{\theta}}_{i,\alpha,\max} \right]. \quad (3.105)$$

### 3.3.3 Wertebereiche von Beobachtungsergebnissen und freien Parametern

In Kapitel 3.3.1 und 3.3.2 wurde bereits angemerkt, dass jeder  $\alpha$ -Schnitt der unscharfen Zufallsvektoren für die Beobachtungsergebnisse und freien Parameter nur komponentenweise exakt den tatsächlichen Wertebereich einschließt. In diesem Kapitel soll jetzt gezeigt werden, dass der tatsächliche Wertebereich dieser linearen Abbildungen einem **Zonotop** (engl.: zonotope) entspricht (vgl. auch SCHÖN, 2003, S. 70ff). Ein Zonotop  $Z$  ist definiert durch das Bild  $Z = \pi(\Gamma_n)$  einer affinen Abbildung  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^u$  des  $n$ -dimensionalen Hyperwürfels  $\Gamma_n$  (SCHÖN, 2003, S. 71; ZIEGLER, 1995):

$$\pi: \begin{cases} \Gamma_n & \rightarrow Z \\ \mathbf{w} & \rightarrow \mathbf{K}\mathbf{w} + \mathbf{z}_0, \end{cases} \quad \text{mit} \quad \Gamma_n := \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq w_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \right\} = [-\mathbf{e}, \mathbf{e}], \quad (3.106)$$

wobei  $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$  den  $n$ -dimensionalen Einsvektor darstellt. Sei weiterhin  $\mathbf{K} = (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$  eine  $u \times n$  Matrix, so lässt sich  $Z$  als  $u$ -dimensionales Zonotop folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}Z = Z(\mathbf{K}) &:= \mathbf{K}\Gamma_n + \mathbf{z}_0 \\ &= \left\{ \mathbf{K}\mathbf{w} + \mathbf{z}_0 \mid \mathbf{w} \in \Gamma_n \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^u \mid \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{k}_i, \quad -1 \leq w_i \leq 1 \right\}.\end{aligned}\quad (3.107)$$

In SCHÖN (2003, S. 74) wurde bereits ausführlich gezeigt, dass der tatsächliche Wertebereich  $W$  eines Intervallvektors der freien Parameter eines GMM, der über einen Intervallvektor für die Beobachtungen konstruiert wird, ein Zonotop darstellt. Im Folgenden soll dies kurz aufgegriffen werden, um zu zeigen, dass die tatsächlichen Wertebereiche der linearen Abbildung eines  $\alpha$ -Schnitts von unscharfen Einflussfaktoren auf die Beobachtungsergebnisse aus Formel (3.64) und die freien Parameter des (erweiterten) GMM gemäß den Formel (3.78), (3.79), (3.90) und (3.91) sowie des GHM (Formel (3.103) und (3.104)) ein Zonotop darstellen. Jeder  $\alpha$ -Schnitt der unscharfen Einflussfaktoren lässt sich mit Hilfe des Hyperwürfels  $\Gamma_n$  als Intervallvektor gemäß Formel (3.22) darstellen:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha} = \left[ \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,\min}, \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,\max} \right] = \text{diag}(\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,r}) \cdot \Gamma_n. \quad (3.108)$$

Verwendet man Formel (3.107) als Grundlage zur Beschreibung des Zonotopes, haben für die verschiedenen Abbildungsvorschriften aus den Formel (3.64), (3.78), (3.90) und (3.103) die Matrizen  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{z}_0$  folgenden Aufbau:

$$\begin{aligned}\text{Beobachtungsergebnisse: } \mathbf{K} &= \mathbf{F} \left| \text{diag}(\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,r}) \right. & \mathbf{z}_0 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}^*, \mathbf{p}_m) = \mathbf{y}, \\ \text{Parameter im GMM: } \mathbf{K} &= \left( \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A} \right)^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \left| \text{diag}(\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,r}) \right. & \mathbf{z}_0 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM}}, \\ \text{Parameter im erw. GMM: } \mathbf{K} &= \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{array} \right]^- \left[ \begin{array}{c} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \end{array} \right] \left| \text{diag}(\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,r}) \right. & \mathbf{z}_0 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GMM,E}} \\ \hat{\mathbf{z}}_{\text{GMM,E}} \end{bmatrix}, \\ \text{Parameter im GHM: } \mathbf{K} &= \left( \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} \right)^- \mathbf{A}^T (\mathbf{BQ}_{yy}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{BF} \left| \text{diag}(\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,r}) \right. & \mathbf{z}_0 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GHM}}.\end{aligned}\quad (3.109)$$

Dies ist leicht einzusehen, da jede lineare Abbildung einen Spezialfall einer affinen Abbildung eines Hyperwürfels, gemäß Formel (3.106) ein Zonotop, darstellt. Da jeder Vektor der unscharfen Einflussfaktoren eine Sammlung von  $\alpha$  – Schnitten darstellt (vgl. Formel (3.33)), ist auch der tatsächliche Wertebereich der Beobachtungsergebnisse und Parameter eine Sammlung von Zonotopen. An dieser Stelle wird daher noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich bei einer mehrmaligen Abbildung von unscharfen Vektoren die Überschätzung entsprechend fortpflanzt und daher dringend davon abzuraten ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird jeweils nur eine Abbildung eines unscharfen Vektors durchgeführt, indem alle Fragestellungen auf den Vektor der unscharfen Einflussfaktoren zurückgeführt werden.

Eine während der Arbeit noch sehr wichtige Eigenschaft von Zonotopen ist deren Abgeschlossenheit hinsichtlich affiner Transformationen und die Unabhängigkeit ihrer Form gegenüber Rotationen des Koordinatenrahmens (vgl. SCHÖN, 2003, S. 72 und S. 75). Zonotope sind wie Konfidenzellipsoide jedoch nicht unabhängig gegenüber Datumsübergängen. Für weitere Betrachtungen von Zonotopen wird auf ZIEGLER (1995) verwiesen. Die Beschreibung von Wertebereichen für systematische Fehler mittels Polytopen wird in GRABE (2003 und 2005) und im geodätischen Kontext mit Zonotopen in SCHÖN (2003, S. 70ff) sowie SCHÖN und KUTTERER (2005b) gezeigt, die auch einige Ersatzformen für Zonotope vorstellen.



## 4 Hypothesentests mit unscharfen Daten

*Statistische Hypothesentests* (engl.: statistical hypotheses tests) dienen dazu Informationen über Parameter auf statistische *Signifikanz* (engl.: significance) hin zu prüfen (KOCH, 2004). Die Informationen dafür können aus verschiedenen Quellen kommen. Zum einen können sie aus zusätzlichen Beobachtungen abgeleitet werden und zum anderen können sie rein auf Vermutungen gestützt sein. Man bezeichnet die Hypothesentests daher auch als Verträglichkeitsuntersuchungen der im Modell getroffenen Annahmen mit den Beobachtungsergebnissen. Die Hypothese selber ist im Falle der linearen Parameterschätzung (vgl. Kapitel 3.3.2) eine beliebige Linearkombination der Parameter. Liegt eine solche Linearkombination nicht direkt vor, so kann sie mit Hilfe einer Linearisierung gewonnen werden. Als Ergebnis des Hypothesentests bezeichnet man die Annahme oder Verwerfung der Hypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ .

Hypothesentests spielen eine zentrale Rolle in der (geodätischen) Datenanalyse. Zahlreiche Lehrbücher behandeln diese Fragestellung, wenn zur Beschreibung der Unsicherheiten der Beobachtungen ein rein wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansatz gewählt wird. In der Geodäsie wird in JÄGER ET AL. (2005, S. 178ff) die klassische Vorgehensweise beim Testen von Parametern und *Modellstörungen* (engl.: model disturbances) aufgezeigt. Diese Strategien werden dann auf die Identifikation von *Ausreißern* (Beobachtungsfehler, engl.: outliers) übertragen. KOCH (2004) wählt einen generelleren Ansatz und stellt eine *allgemeine lineare Hypothese* (engl.: general form of a linear hypothesis) für ein GMM aus Kapitel 3.3.2.2 vor. Eine lineare Hypothese kann für Hypothesentests von Parameter, Modellstörungen, für die *Modellwahl* (engl.: model selection) und für die Ausreißersuche adaptiert werden. Diese bisher genannten Quellen innerhalb der Geodäsie haben jedoch gemeinsam, dass sie eine Normalverteilung gemäß Formel (2.11) für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Beobachtungen voraussetzen. Eine erweiterte Darstellung von Hypothesentests mit der *Bayes-Statistik* (engl.: Bayesian statistics) für nicht normalverteilten Größen kann man in KOCH (2007, S. 73ff) nachlesen.

Im Rahmen dieses Kapitels sollen in Erweiterung der klassischen Hypothesentests mit rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Unsicherheiten Hypothesentests mit unscharfen Zufallsvariablen (FRV) für die Parameterschätzung aus Kapitel 3.3.2 entwickelt werden. KUTTERER (2004) hat bereits eine grundlegende Testtheorie für den eindimensionalen Fall vorgeschlagen, die zu Beginn dieses Kapitels wiedergegeben wird. Nach einigen methodischen Ergänzungen des eindimensionalen Falles wird die Testtheorie auf den mehrdimensionalen Fall (vgl. Kapitel 4.3) erweitert und in Kapitel 4.4 die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. und 2. Art im unscharfen Fall hergeleitet. In Kapitel 5 werden die entwickelten Tests dann auf die lineare Parameterschätzung angewandt, die in der Geodäsie eine zentrale Bedeutung hat. Von besonderem Interesse ist dabei die Allgemeinform einer linearen Hypothese in Kapitel 5.3. Zum Abschluss erfolgt eine Übertragung der Allgemeinform einer linearen Hypothese auf die Ausreißersuche, die Modellwahl und auf die Sensitivitätsanalyse.

Für die Konstruktion von (mehrdimensionalen) Konfidenzbereichen für FRVs, wird auf KUTTERER (2002a) und Schön (2003) verwiesen. Eine weitere wichtige Fragestellung in der Testtheorie ist die Aussage, ob es sich bei Hypothesentests um *gleichmäßig beste* (engl.: uniformly most powerful - UMP) invariante Tests handelt (vgl. z.B. KARGOLL, 2007). Im Rahmen dieser Arbeit sollen die klassischen statistischen Tests dahingehend erweitert werden, dass die Beobachtungsergebnisse Träger zufälliger Variabilität und Unschärfe sein können. Es ist zu klären, ob univariante UMP Tests ihre Eigenschaft beibehalten, wenn zusätzlich Unschärfe berücksichtigt wird. Dies stellt jedoch eine umfangreiche eigenständige Fragestellung dar und muss kommenden Arbeiten vorbehalten bleiben.

### 4.1 Grundlagen

Bei der Durchführung von Hypothesentests mit FRVs als Testgröße muss eine kombinierte Analyse der zufälligen und unscharfen Größen bei der Messwerterfassung und Auswertung berücksichtigt werden (KUTTERER, 2004). D. h. eine Testentscheidung sollte bei nicht vorhandener Unschärfe auf dieselben Ergebnisse wie ein rein wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansatz führen, sodass die Herleitung eines universellen Testverfahrens Ziel dieses Kapitels ist. Eine grundsätzliche Aussage zur Richtigkeit von Ergebnissen kann bei Vorliegen der Verträglichkeit der Daten mit den im Modell getroffenen Annahmen auch bei FRVs nicht getroffen werden.

### 4.1.1 Übergang von den klassischen Hypothesentests auf Hypothesentests bei Unschärfe

Der Übergang von den klassischen Hypothesentests zu Hypothesentests mit unscharfen Daten geschieht im Wesentlichen durch eine unscharfe Definition der Hypothesen und durch eine unscharfe Definition der Teststatistik. Im klassischen Fall wird eine Hypothese für die Parameter  $\theta \in \Theta$  als (KOCH, 2004):

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1 \quad (4.1)$$

formuliert, wobei  $\Theta$  den Parameterraum darstellt sowie  $H_0$  die *Nullhypothese* und  $H_1$  die *Alternativhypothese* (engl.: null and alternativ hypothesis) bezeichnet. Die Hypothesen stellen dabei klassische Mengen im  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^u$  dar und können über ihre Indikatorfunktionen spezifiziert werden:

$$\begin{aligned} i_{H_0}(\mathbf{u}) &= \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathbf{u} \in \Theta_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ i_{H_1}(\mathbf{u}) &= \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathbf{u} \in \Theta_1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Der *Annahmebereich*  $A$  (engl.: region of acceptance) für die Nullhypothese und seine Indikatorfunktion  $i_A(x)$  können auf Basis der Hypothesen als Abbildung  $i_A : \Theta_0 \rightarrow \{0;1\}$  dargestellt werden (vgl. auch Formel (3.28)):

$$A := \{x, i_A(x) | x \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit } i_A : \mathbb{R}^u \rightarrow \{0;1\} \quad \text{und } x \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Im Folgenden wird die endgültige Testentscheidung auf Basis des Annahme- und *Verwerfungsbereiches*  $V$  (engl.: region of rejection) immer im Eindimensionalen erfolgen. Im Rahmen dieser Arbeit wird vorausgesetzt, dass sich der Verwerfungsbereich als mathematisches Komplement zum Annahmebereich ergibt:

$$V := \{x, i_V(x) = 1 - i_A(x) | x \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit } i_A : \mathbb{R}^u \rightarrow \{0;1\} \quad \text{und } x \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Im Falle von Hypothesentests mit unscharfen Daten wird in Verallgemeinerung zu Formel (4.3) der Annahmebereich  $\tilde{A}$  eine unscharfe Größe sein (vgl. auch ARNOLD und GERKE, 2003 sowie ARNOLD, 1998). Ein klassischer Annahmebereich stellt einen Spezialfall der unscharfen Größe dar. Die Unschärfe ergibt sich entweder durch

- (i) eine unzureichende Kenntnis des konkret zu testenden Wertes oder
- (ii) eine unzureichende Kenntnis über die zu verwendende Irrtumswahrscheinlichkeit für die Konstruktion des Annahmebereiches.

Beispiele hierfür sind

zu (i):  $H_0$  : Ist die Geschwindigkeit des Fahrzeuges „*etwa*“ 50 km/h?

zu (ii):  $H_1$  : Ist die Beobachtung  $i$  mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von „*etwa*“ 5% ein Ausreißer?

Folglich wird die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{A}}(x)$  des Annahmebereiches  $\tilde{A}$  als unscharfe Abbildung  $m_{\tilde{A}} : \Theta_0 \rightarrow [0,1]$  mit  $x \in \mathbb{R}$  dargestellt (vgl. auch Formel (3.27) sowie FIDAN, 2007, S. 32 und GERKE, 2001, S. 12):

$$\tilde{A} := \{(x, m_{\tilde{A}}(x)) | x \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit } m_{\tilde{A}} : \mathbb{R}^u \rightarrow [0,1]. \quad (4.5)$$

Der unscharfe Verwerfungsbereich  $\tilde{V}$  und dessen Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{V}}(x)$  ergeben sich mit (3.37) direkt als mathematisches Komplement zum Annahmebereich:

$$m_{\tilde{V}}(x) = m_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - m_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Im Fall der in dieser Arbeit verwendeten unscharfen Intervalle vom LR-Typ (vgl. Abbildung 3.2 und Formel (3.45)) kann mit der rechten  $R_A(x)$  und linken  $L_A(x)$  Referenzfunktion der Annahmebereich  $\tilde{A} = [x_{A,m}, r_A, c_{A,l}, c_{A,r}]_{LR}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  folgendermaßen definiert werden:

$$m_A(x) = \begin{cases} L_A\left(\frac{A_m - x - r_A}{c_{A,l}}\right), & x < A_m - r_A \\ 1, & A_m - r_A \leq x \leq A_m + r_A \\ R_A\left(\frac{x - A_m - r_A}{c_{A,r}}\right), & x > A_m + r_A \end{cases} \quad (4.7)$$

mit  $A_m$  dem Mittelpunkt,  $r_A$  dem Radius und  $c_{A,l}, c_{A,r} > 0$  die Spannweiten der streng monoton fallenden Referenzfunktionen des Annahmebereiches.

Die **Testgröße**  $T$  (engl.: test value) ist im klassischen Fall eine Zufallsgröße, die sich mit der Funktion  $\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  aus den Beobachtungen herleiten lässt:

$$T = \tau(y_1, \dots, y_n). \quad (4.8)$$

Die Dichtefunktion  $\rho_T(x) \in \mathbb{R}$  der Testgröße  $T$  muss aus der Dichtefunktion  $\rho_y(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  der Beobachtungen  $\mathbf{y}$  abgeleitet werden. Eine analytische Lösung zur Berechnung der theoretischen Dichtefunktion  $T \sim \rho_T(x) \in \mathbb{R}$  kann in AU und TAM (1999) nachgelesen werden, die eine direkte Transformation der Dichtefunktionen vom  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit Hilfe der generalisierten DIRAC-Funktion  $\delta[\dots]$  vorstellen:

$$\rho_T(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_y(y_1, \dots, y_n) \times \delta[\tau(y_1, \dots, y_n) - T] dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_y(\mathbf{y}) \times \delta[\tau(\mathbf{y}) - T] d\mathbf{y}, \quad (4.9)$$

mit (vgl. auch DIRAC, 1958, S. 58ff):

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (4.10)$$

Die in Formel (4.9) dargestellte Berechnung ist nur für eindimensionale Ergebnisdichten anwendbar, was jedoch für diese Arbeit ausreichend ist. Für beliebige Verteilungen der Beobachtungen kann die Dichtefunktion der Testgröße nicht immer geschlossen berechnet werden, sodass auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden muss, z. B. den sogenannten Monte-Carlo-Verfahren (GENTEL, 2003 und DOUCET ET AL., 2001). Im Speziellen wird z. B. eine **Kerndichteschätzung** (engl.: kernel density estimation) durchgeführt (vgl. z. B. PARZEN, 1962 und GELMAN ET AL., 2004).

Die **Teststatistik**  $T$  (engl.: test statistic) ist im klassischen Fall die Realisierung der Testgröße aus Formel (4.8), vgl. z. B. VIERTL und HARETER (2006, S. 67), die sich aus einer Funktion  $\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$T = \tau(y_1, \dots, y_n), \quad (4.11)$$

der Stichprobe  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in M_y^n$  der Beobachtungen herleiten lässt.

Im Falle unscharfer Zufallsvariablen für die Beobachtungen ist entsprechend das Erweiterungsprinzip auf Formel (4.11) für die Konstruktion der unscharfen Teststatistik  $\tilde{T}$  als Realisierung der unscharfen Testgröße  $\tilde{T}$  anzuwenden:

$$\tilde{T} := m_{\tilde{T}}(x) = \sup_{\substack{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_n \\ T = \tau(y_1, \dots, y_n)}} \min(m_{\tilde{y}_1}, \dots, m_{\tilde{y}_n}) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

oder für die in dieser Arbeit vorliegenden Unsicherheiten in Form der unscharfen Einflussfaktoren und zufälligen originären Beobachtungen:

$$\tilde{T} := m_{\tilde{T}}(x) = \sup_{\substack{(p_1, \dots, p_j) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_j \text{ und } (y_1^*, \dots, y_n^*) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_n \\ x = \tau(p_1, \dots, p_j, y_1^*, \dots, y_n^*)}} \min(m_{p_1}(p_1), \dots, m_{p_j}(p_j), y_1^*, \dots, y_n^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

Soll die Teststatistik  $\tilde{T}$  mit den in dieser Arbeit verwendeten unscharfen Intervallen vom LR-Typ  $\tilde{T} = [x_{T,m}, r_T, c_{T,l}, c_{T,r}]_{LR}$  definiert werden, so ergibt sich mit der rechten  $R_T(x)$  und linken  $L_T(x)$  Referenzfunktion die Zugehörigkeitsfunktion mit  $x \in \mathbb{R}$  folgendermaßen:

$$m_{\tilde{T}}(x) = \begin{cases} L_T \left( \frac{\underline{T}_m - x - r_T}{c_{T,l}} \right), & x < \underline{T}_m - r_T \\ 1, & \underline{T}_m - r_T \leq x \leq \underline{T}_m + r_T \\ R_T \left( \frac{x - \underline{T}_m - r_T}{c_{T,r}} \right), & x > \underline{T}_m + r_T. \end{cases} \quad (4.14)$$

Für den Mittelpunkt  $\underline{T}_m$  der Testgröße  $\tilde{T}$  gilt entsprechend die Verteilungsaussage nach Formel (4.9). Eine graphische Darstellung für einen unscharfen Annahmehereich  $\tilde{A}$  und Verwerfungsbereich  $\tilde{V}$  und für die unscharfe Teststatistik  $\tilde{T}$  mit linearen Referenzfunktionen und zweiseitiger Fragestellung ist in Abbildung 4.1 zu sehen.

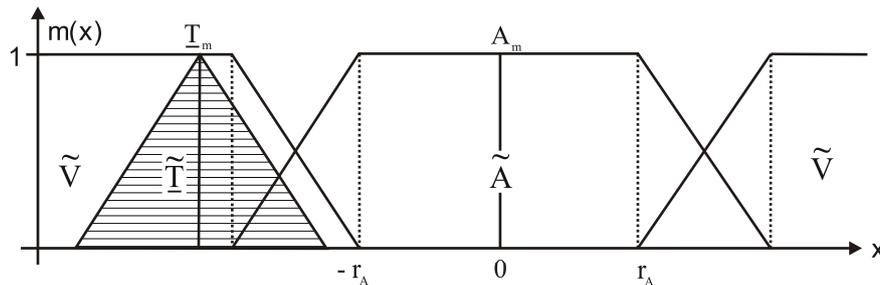


Abbildung 4.1: Ein Hypothesentest mit einer unscharfen Zahl als Testgröße.

Für die weitergehende Analyse der Hypothesentests müssen im Folgenden drei Fallunterscheidungen getroffen werden:

- Fall I: Die Teststatistik liegt ausschließlich im Annahmehereich:  $\tilde{T} \cap \tilde{V} = \emptyset \rightarrow H_0$  annehmen,
- Fall II: Die Teststatistik liegt ausschließlich im Verwerfungsbereich:  $\tilde{T} \cap \tilde{A} = \emptyset \rightarrow H_0$  verwerfen,
- Fall III: Die Teststatistik liegt im Annahme- und im Verwerfungsbereich:  $\tilde{T} \cap \tilde{V} \neq \emptyset \wedge \tilde{T} \cap \tilde{A} \neq \emptyset$ ,

mit  $\emptyset$  der leeren Menge. In der Abbildung 4.2 werden die drei Fälle geometrisch verdeutlicht (vgl. auch Kutterer, 2002b, S. 73). Liegt die Teststatistik  $\tilde{T}$  ausschließlich im Annahmehereich, so ist die Nullhypothese anzunehmen (Fall I). Umgekehrt gilt entsprechend, dass die Nullhypothese zu verwerfen ist, wenn die Teststatistik ausschließlich im Verwerfungsbereich liegt (Fall II). Im Rahmen dieses Kapitels soll jetzt der Fall III genauer untersucht werden, wenn die Teststatistik sowohl im Annahmehereich als auch im Verwerfungsbereich liegt.

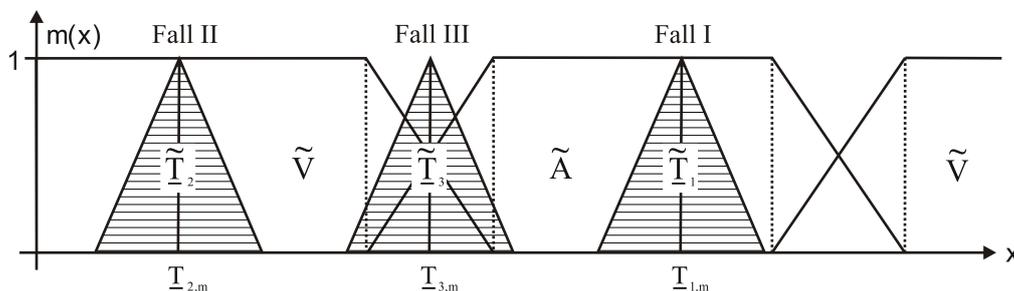


Abbildung 4.2: Die drei zu untersuchenden Fälle bei den Hypothesentests mit unscharfen Daten.

### 4.1.2 Grundlegende Ablauf von Hypothesentests bei unscharfen Daten

Für praktische Anwendungen ist es notwendig, dass die grundlegenden Teststrategien im Falle unscharfer Daten eine scharfe Aussage hinsichtlich der Testentscheidung im Fall III aus Kapitel 4.1.1 ermöglichen. Dieser Schritt kann als Defuzzifizierung der eigentlich unscharfen Aussage verstanden werden. Die Testentscheidung soll auf der Übereinstimmung der Teststatistik mit dem Annahme- und Verwerfungsbereich basieren. Des Weiteren sollten auf Grundlage der Testtheorie wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen über einen Fehler 1. und 2. Art ermöglicht werden. Der im Folgenden vorgestellte Ablauf der grundlegenden

Test- und Entscheidungsstrategie basiert auf KUTTERER (2004), der sich auf Arbeiten von RÖMER und KANDEL (1995), VIERTL (1996) sowie STEINMETZ (1998) bezieht.

**Schritt 1:** Schätzung der unscharfen Parameter  $\tilde{\theta}$  mit Formel (3.68), für die im Folgenden Hypothesentests durchgeführt werden sollen. Im Speziellen kommen dafür z. B. das GMM (Kapitel 3.3.2.2), ein erweitertes GMM (z. B. für eine lineare Hypothese aus Kapitel 5.3) oder das GHM (Kapitel 3.3.2.4) in Frage.

**Schritt 2:** Festlegen der Nullhypothese  $H_0$  und Alternativhypothese  $H_1$  (vgl. auch Formel (4.1)):

	Eindimensional	Mehrdimensional
$H_0$	$E(\underline{\theta}_m) = \mu_0$	$E(\underline{\theta}_m) = \mu_0$
$H_1$	$E(\underline{\theta}_m) = \mu = \mu_0 + \lambda$ mit $\lambda \neq 0$	$E(\underline{\theta}_m) = \mu = \mu_0 + \lambda$ mit $\lambda \neq 0$

**Schritt 3:** Definition und Konstruktion des Annahmebereiches  $\tilde{A}$  und Verwerfungsbereiches  $\tilde{V}$  durch Fuzzy-Sets gemäß Formel (4.5) und (4.6) auf Basis der Nullhypothese und Alternativhypothese und der zu berücksichtigenden Entscheidungskriterien, wie der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ . Im Falle klassischer Teststrategien vereinfachen sich Annahme- und Verwerfungsbereich zu Intervallen (siehe Formel (4.3) und (4.4)).

**Schritt 4:** Die Teststatistik  $\tilde{T}$  als Realisierung der unscharfen Testgröße  $\tilde{T}$  wird mit Hilfe des Erweiterungsprinzips nach Formel (4.13) berechnet. Bei fehlender Impräzision vereinfacht sich die Teststatistik zu einer Zahl, was im Falle der unscharfen Intervalle aus Formel (4.14) zu einem verschwindenden Radius  $r_r = 0$  und verschwindenden Spannweiten  $c_{r,l} = c_{r,r} = 0$  führt. Da Zahlen und Intervalle Spezialfälle der Fuzzy-Theorie sind, kann die Diskussion auf Grundlage der Fuzzy-Theorie durchgeführt werden.

**Schritt 5:** Berechnung des Grades der Verwerfung  $\rho_{\tilde{r}}(\tilde{T}) \in [0,1]$  der Nullhypothese auf Basis der Übereinstimmung der Teststatistik mit dem Annahme- und Verwerfungsbereich. Diese zentrale Fragestellung wird in Kapitel 4.1.3 und 4.2 behandelt werden.

**Schritt 6:** Definition eines kritischen Wertes  $\rho_{\text{crit}} \in [0,1]$ , ab dem die Nullhypothese verworfen wird:

$$\rho_{\tilde{r}}(\tilde{T}) \begin{cases} \leq \\ > \end{cases} \rho_{\text{crit}} \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} \text{Nullhypothese annehmen} \\ \text{Nullhypothese verwerfen.} \end{cases} \quad (4.15)$$

**Schritt 7:** Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. Art  $\alpha_{\text{impr}}$  und 2. Art  $\beta_{\text{impr}}$  im unscharfen Fall:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{impr}} &= P(\rho_{\tilde{r}}(\tilde{T}) > \rho_{\text{crit}} | H_0), \\ \beta_{\text{impr}} &= P(\rho_{\tilde{r}}(\tilde{T}) \leq \rho_{\text{crit}} | H_1). \end{aligned} \quad (4.16)$$

In den beiden folgenden Unterkapiteln wird die Berechnung des Grades der Verwerfung  $\rho_{\tilde{r}}(\tilde{T}) \in [0,1]$  genauer angegeben.

### 4.1.3 Theorie für eine generelle Testentscheidung auf Basis von Übereinstimmungen

Während im rein klassischen Fall die Teststatistik entweder nur im Annahme- oder im Verwerfungsbereich liegt, ist dies im Fall unscharfer Daten oftmals nicht der Fall. Dieser Abschnitt soll daher die Grundlage für den Vergleich zweier unscharfer Mengen (Fuzzy-Sets) ermöglichen. Die wesentliche Aufgabe besteht darin, die Übereinstimmung zweier unscharfer Größen genauer zu spezifizieren. Dies wird mit Hilfe von Maßen für Unschärfe (vgl. z. B. KUTTERER, 2002b, S. 51ff) auf Basis von KUTTERER (2004) erfolgen.

Der Grad der Übereinstimmung  $\gamma: \mathfrak{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$  eines nicht leeren Fuzzy-Sets  $\tilde{M} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$  mit einem Fuzzy-Set  $\tilde{N} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$  ist definiert durch:

$$\gamma_{\tilde{N}}(\tilde{M}) := \gamma(\tilde{M}, \tilde{N}) = \frac{h(\tilde{M} \cap \tilde{N})}{h(\tilde{M})}, \quad (4.17)$$

mit  $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$  der Fuzzy-Teilmengen in  $\mathbb{R}$  und  $\mathfrak{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  der Fuzzy-Teilmengen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Der Grad der Übereinstimmung ist eine relative Beziehung zwischen den Größen  $\tilde{M}$  und  $\tilde{N}$ , gegeben durch die Funktion  $\gamma_{\tilde{N}}(\tilde{M})$ . Die Klasse der Funktionen:

$$h : \mathfrak{F}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty) \quad (4.18)$$

ist definiert durch die folgenden Bedingungen:

$$(i) \quad \tilde{U} = \emptyset \Leftrightarrow h(\tilde{U}) = 0 \quad \text{und} \quad (ii) \quad \tilde{U} \subseteq \tilde{V} \Leftrightarrow h(\tilde{U}) \leq h(\tilde{V}), \quad (4.19)$$

mit den Fuzzy-Sets  $\tilde{U}$  und  $\tilde{V} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ . Die Bedingung (i) steht für eine minimale Übereinstimmung (leere Menge). Die zweite Bedingung (ii) garantiert Monotonie bei der Fuzzy-Schnittmengenbildung. Diese zwei Bedingungen ermöglichen die Herleitung klarer Eigenschaften für den Grad der Übereinstimmung  $\gamma$  zwischen zwei Fuzzy-Sets:

$$\begin{aligned} (a) \quad \tilde{M} \cap \tilde{N} = \emptyset &\Leftrightarrow \gamma_{\tilde{N}}(\tilde{M} \cap \tilde{N}) = 0 \\ (b) \quad \tilde{N} \neq \emptyset &\Rightarrow \gamma_{\tilde{N}}(\tilde{N}) = 1 \\ (c) \quad \tilde{M} \subseteq \tilde{P} \wedge \tilde{N} \subseteq \tilde{Q} &\Rightarrow \gamma_{\tilde{N}}(\tilde{M}) \leq \gamma_{\tilde{Q}}(\tilde{P}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Die minimale Übereinstimmung ist mit einer leeren Schnittmenge verbunden. Beste Übereinstimmung der beiden Fuzzy-Sets ist für  $\tilde{M} \cap \tilde{N} = \tilde{N}$  gegeben. Beispiele für die Funktion  $h(\dots)$  sind die Höhe und die Mächtigkeit (vgl. auch Formel (3.30) und (3.31)):

$$h(\tilde{U}) = \text{height}(\tilde{U}) \quad \text{und} \quad h(\tilde{U}) = \text{card}(\tilde{U}) = \int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{U}}(x) dx. \quad (4.21)$$

Die Definition für den Grad der Nicht-Übereinstimmung  $\delta : \mathfrak{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  eines nicht leeren Fuzzy-Sets  $\tilde{M} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$  mit einem Fuzzy-Set  $\tilde{N} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$  ist direkt mit  $\delta_{\tilde{N}}(\tilde{M}) := 1 - \gamma_{\tilde{N}}(\tilde{M})$  definiert und führt zu den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (a) \quad \tilde{M} \cap \tilde{N} = \emptyset &\Leftrightarrow \delta_{\tilde{N}}(\tilde{M} \cap \tilde{N}) = 1 \\ (b) \quad \tilde{N} \neq \emptyset &\Rightarrow \delta_{\tilde{N}}(\tilde{N}) = 0 \\ (c) \quad \tilde{M} \subseteq \tilde{P} \wedge \tilde{N} \subseteq \tilde{Q} &\Rightarrow \delta_{\tilde{N}}(\tilde{M}) \geq \delta_{\tilde{Q}}(\tilde{P}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Der Grad der Zugehörigkeit  $\rho : \mathfrak{F}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  von  $\tilde{N} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$  mit  $\tilde{M} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$  ist definiert mit:

$$\rho_{\tilde{N}}(\tilde{M}) := \bar{\rho}(\gamma_{\tilde{N}}(\tilde{M}), \delta_{\tilde{N}^c}(\tilde{M})). \quad (4.23)$$

Die Funktion  $\bar{\rho} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ist durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

$$\begin{aligned} (a) \quad \bar{\rho}(x, y) &= \bar{\rho}(y, x) \\ (b) \quad \bar{\rho}(x, \bar{\rho}(y, z)) &= \bar{\rho}(\bar{\rho}(x, y), z) \\ (c) \quad x \leq u \wedge y \leq v &\Rightarrow \bar{\rho}(x, y) \leq \bar{\rho}(u, v) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dies sind nach Formel (3.42) und Kapitel 3.2.3.2 die Eigenschaften einer t-Norm und entsprechen der Fuzzy-Erweiterung eines Durchschnittes von klassischen Fuzzy-Sets. Die im Folgenden genannten und weitere t- und s-Normen können z. B. in (BANDEMER und NÄTHER 1992) nachgelesen werden. Eine angemessene und numerisch einfach zu handhabende Wahl für t-Normen ist das Minimum:

$$\bar{\rho}(x, y) = \min(x, y). \quad (4.25)$$

Alternativ kann für die Definition von  $\bar{\rho}$  eine s-Norm nach Kapitel 3.2.3.2 verwendet werden. Dies entspricht einer Fuzzy-Erweiterung für die Vereinigung zweier Fuzzy-Sets. In diesem Fall wäre das Kriterium für eine Zurückweisung sensibler, als dass eine der Formulierungen " $\tilde{M}$  stimmt mit  $\tilde{N}$  überein" und " $\tilde{M}$

stimmt nicht mit  $\tilde{N}^c$  überein" zutreffen muss. Weitere Beispiele für praxisrelevante t-Normen sind das beschränkte Produkt  $\bar{\rho}_{tb}$  und das algebraische Produkt  $\bar{\rho}_{ta}$  von Lukasiewicz (vgl. auch Formel (3.43)):

$$\bar{\rho}_{tb}(x, y) = \max(0, x + y - 1) \quad \text{und} \quad \bar{\rho}_{ta}(x, y) = xy. \quad (4.26)$$

Dabei existieren Ordnungsrelationen bezüglich der Rückgabewerte der t-Norm-Funktionen, die bei der praktischen Auswahl von  $\rho_{crit}$  berücksichtigt werden müssen ( $\bar{\rho}_{tb} \leq \bar{\rho}_{ta} \leq \bar{\rho}$ ). Über eine angemessene numerische Handhabung von  $\rho_{crit}$  muss durch die Analyse von simulierten Daten und durch die Re-Analyse realer Daten entschieden werden. Ein weiterer Bestandteil für die Wahl von  $\rho_{crit}$  ist die Entscheidung, ob es sich um sicherheitsrelevante Fragestellungen beim Testen handelt oder der Test im Sinne einer Ausreißersuche durchgeführt werden soll. Die Antworten auf diese und weitere Fragen für praxisrelevante Anwendungen der vorgestellten Teststrategie ist dem Kapitel 7 zu entnehmen.

#### 4.1.4 Anwendung der generellen Testentscheidung

Nach Vorstellung der generellen Testentscheidung für den Vergleich zweier Fuzzy-Sets soll sie jetzt auf die Hypothesentests angewandt werden. Das grundlegende Kriterium zur Testentscheidung aus Schritt 5 und 6 in Kapitel 4.1.2 basiert folglich auf der Übereinstimmung von  $\tilde{T}$  mit  $\tilde{V}$  und der Nichtübereinstimmung von  $\tilde{T}$  mit  $\tilde{A}$ . Der Grad der Übereinstimmung  $\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{T})$  von  $\tilde{T}$  mit  $\tilde{V}$  kann allgemein mit Formel (4.27) berechnet werden, wobei  $h$  eine Funktion darstellt, die in Kapitel 4.1.3 genauer spezifiziert wurde:

$$\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{T}) := h(\tilde{T}, \tilde{V}). \quad (4.27)$$

Der Grad der Nichtübereinstimmung  $\delta_{\tilde{A}}(\tilde{T})$  von  $\tilde{T}$  mit  $\tilde{A}$  ist dann folgendermaßen definiert:

$$\delta_{\tilde{A}}(\tilde{T}) = \delta_{\tilde{V}^c}(\tilde{T}) := 1 - \gamma_{\tilde{A}}(\tilde{T}). \quad (4.28)$$

Auf Basis der Formel (4.27) und (4.28) kann der Grad für die Ablehnung der Nullhypothese  $\rho_{\tilde{R}}(\tilde{T})$  in Bezug auf die Teststatistik  $\tilde{T}$  folgendermaßen formuliert werden:

$$\rho_{\tilde{R}}(\tilde{T}) = \min(\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{T}), \delta_{\tilde{A}}(\tilde{T})). \quad (4.29)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird für t-Normen das in Formel (4.25) angegebene Minimum verwendet, da in diesem Fall für die Konstruktion der Teststatistik das Erweiterungsprinzip durch eine Optimierungsaufgabe über die  $\alpha$ -Schnitte ersetzt werden kann. Die abschließende Testentscheidung basiert gemäß Schritt 6 aus Kapitel 4.1.2 auf dem Vergleich von  $\rho_{\tilde{R}}(\tilde{T})$  mit dem kritischen Wert  $\rho_{crit} \in [0, 1]$ , für den durch die Analyse von simulierten und vorhandenen Datensätzen realistische Größen abgeleitet werden müssen. Des Weiteren muss durch Expertenwissen entschieden werden, ob es sich um einen sicherheitsrelevanten Test oder um einen Test im Sinne der Ausreißersuche handelt.

## 4.2 Eindimensionale Hypothesentests mit unscharfen Daten

Die in dem vorangegangenen Kapitel 4.1 theoretisch vorgestellte Vorgehensweise soll für den eindimensionalen Fall untersucht werden, indem die zwei Alternativen für die Funktion  $h(\dots)$  aus Formel (4.21) konkret verwendet werden. Kapitel 4.2.1 wird sich mit dem *height*-Kriterium und Kapitel 4.2.2 mit dem *card*-Kriterium beschäftigen. Zu Beginn eines jeden Teilkapitels wird kurz die generelle Vorgehensweise bei beiden Verfahren gezeigt, danach werden mathematisch geschlossene Lösungen an Beispielen für L-unscharfe Zahlen behandelt, die für diese Arbeiten benötigt werden. Dabei soll davon ausgegangen werden, dass der Mittelpunkt  $A_m$  des Annahmebereiches Null ist:  $A_m = 0$ . Dies lässt sich durch Translation von Teststatistik sowie Annahme- und Verwerfungsbereich erreichen. Die vorgestellten Formeln lassen sich auf LR- bzw. LL-unscharfe Zahlen erweitern, worauf aber aufgrund einer anschaulicheren Darstellung in dieser Arbeit nicht eingegangen werden soll.

### 4.2.1 Das *height*-Kriterium

In diesem Kapitel sollen allgemeine Formeln für die Testentscheidung mit dem *height*-Kriterium im Falle eindimensionaler Teststatistiken hergeleitet werden. Wie bereits in Kapitel 3.2.4 erläutert, wird die Impräzi-

sion der Einflussfaktoren durch L-unscharfe Intervalle gemäß Kapitel 3.2.3.3 beschrieben, sodass auch die aus den linearen Ausgleichsmodellen abgeleiteten eindimensionalen Teststatistiken L-unscharfe Intervalle darstellen. Dabei wird in der Herleitung zwischen klassischen und unscharfen Annahmebereichen unterschieden. Ziel dieses Kapitels ist die Entwicklung einer formellen Testentscheidung, die die geschlossene Angabe für einen Fehler 1. und 2. Art mit dem *height*-Kriterium in Kapitel 4.4 ermöglicht. In Kapitel 4.3 wird zusätzlich ein numerisches Verfahren vorgeschlagen. Abbildung 4.3 zeigt eine geometrische Interpretation des *height*-Kriteriums, das man durch Einsetzen von Formel (4.21) in Formel (4.27) und (4.28) unter Berücksichtigung von (4.17) erhält:

$$\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{\mathbb{I}}) = \text{height}(\tilde{\mathbb{I}} \cap \tilde{V}), \delta_{\tilde{A}}(\tilde{\mathbb{I}}) = 1 - \text{height}(\tilde{\mathbb{I}} \cap \tilde{A}) \quad \text{und} \quad \rho_{\tilde{R}}(\tilde{\mathbb{I}}) = \min(\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{\mathbb{I}}), \delta_{\tilde{A}}(\tilde{\mathbb{I}})). \quad (4.30)$$

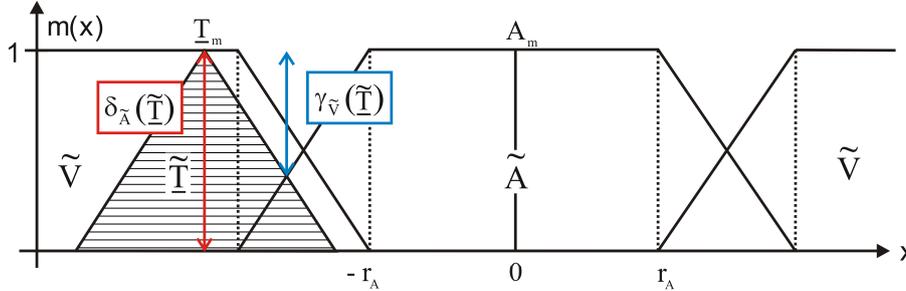


Abbildung 4.3: Das *height*-Kriterium für eine unscharfe Zahl als Teststatistik und einen unscharfen Annahmebereich.

#### 4.2.1.1 Das *height*-Kriterium für klassische Annahmebereiche

Das in Kapitel 4.1 vorgestellte Konzept für Hypothesentests im Falle unscharfer Daten wird in diesem Kapitel bei unscharfen Intervallen und klassischen Annahmebereichen mit dem *height*-Kriterium angewandt. Eine entsprechende Zusammenstellung für unscharfe Zahlen als Teststatistik kann in KUTTERER (2002b, S. 75ff) nachgelesen werden. Im klassischen Fall sind Annahmebereich  $m_A(x)$  und Verwerfungsbereich  $m_V(x)$  durch die folgenden Indikatorfunktionen gegeben (vgl. auch Formel (4.3)):

$$m_A(x) = \begin{cases} 1, & A_m - r_A \leq x \leq A_m + r_A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad m_V(x) = \begin{cases} 0, & A_m - r_A \leq x \leq A_m + r_A \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.31)$$

Die Radius  $r_A$  des Annahmebereiches spezifiziert den Wertebereich für das Intervall, das mit der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  festgelegt wird. Die Teststatistik als L-unscharfes Intervall ist gegeben durch die Zugehörigkeitsfunktion:

$$m_{\tilde{\mathbb{I}}}(x) = \begin{cases} L_T \left( \frac{\underline{T}_m - r_T - x}{T_s} \right), & x < \underline{T}_m - r_T \\ 1, & \underline{T}_m - r_T \leq x \leq \underline{T}_m + r_T \\ L_T \left( \frac{x - \underline{T}_m - r_T}{T_s} \right), & x > \underline{T}_m + r_T. \end{cases} \quad (4.32)$$

Dies entspricht der Formel (4.14) für identische linke und rechte Referenzfunktionen sowie  $c_{T,l} = c_{T,r} = T_s$ . Mit  $\underline{T}_m$  dem Mittelpunkt des Intervalls,  $T_s$  dem Parameter für die Referenzfunktion und  $r_T$  dem Intervallradius für den Kern der Teststatistik. Um eine einheitliche Aussage über die Testentscheidung zu ermöglichen und um geschlossene Formeln für einen Fehler 1. und 2. Art angeben zu können, muss sich der Grad der Zurückweisung der Nullhypothese  $\rho_{\tilde{R}}(\tilde{\mathbb{I}})$  nur auf Grundlage der Übereinstimmung  $\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{\mathbb{I}})$  oder auf Grundlage der Nicht-Übereinstimmung  $\delta_{\tilde{A}}(\tilde{\mathbb{I}})$  berechnen lassen. Die Auswertung der Formeln in (4.30) führt für  $A_m = 0$  zu:

$$\rho_{\tilde{R}}(\tilde{\mathbb{I}}) = \begin{cases} 0, & \text{core}(\tilde{\mathbb{I}}) \cap \text{core}(\tilde{A}) \neq \emptyset \\ 1 - L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - r_A}{T_s} \right), & \text{core}(\tilde{\mathbb{I}}) \cap \text{core}(\tilde{A}) = \emptyset. \end{cases} \quad (4.33)$$

Diese Formel besagt, dass sich der Grad für die Ablehnung der Nullhypothese  $\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T})$  nur auf Grundlage von  $\delta_{\tilde{A}}(\tilde{T})$  berechnen lässt. Sofern der Durchschnitt der Kerne  $\text{core}(\tilde{T}) \cap \text{core}(\tilde{A}) \neq \emptyset$  nicht leer ist, kann die Nullhypothese nicht verworfen werden. Ist  $\text{core}(\tilde{T}) \cap \text{core}(\tilde{A}) = \emptyset$ , so wird der Grad für die Ablehnung der Nullhypothese auf Grundlage der jeweiligen Referenzfunktion für die Teststatistik  $\tilde{T}$  berechnet. Die Nullhypothese wird verworfen, sobald der Grad für die Ablehnung der Nullhypothese aus Formel (4.33) einen angemessenen Wert  $\rho_{\text{crit}} \in [0,1]$  überschreitet (vgl. Formel (4.15)):

$$\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T}) = 1 - L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - r_A}{T_s} \right) > \rho_{\text{crit}} \Rightarrow H_0 \text{ verwerfen.} \quad (4.34)$$

#### 4.2.1.2 Das *height*-Kriterium für einen unscharfen Annahmebereich

In Verallgemeinerung zu Kapitel 4.2.1.1 wird in diesem Abschnitt das in Kapitel 4.1 ausgearbeitete Testverfahren auf den unscharfen Annahmebereich erweitert. Der Annahmebereich  $\tilde{A}$  ist in Erweiterung zu Formel (4.31) durch ein L-unscharfes Intervall mit der folgenden Zugehörigkeitsfunktion gegeben:

$$m_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L_A \left( \frac{A_m - x - r_A}{A_s} \right), & x < A_m - r_A \\ 1, & A_m - r_A \leq x \leq A_m + r_A \\ L_A \left( \frac{x - A_m - r_A}{A_s} \right), & x > A_m + r_A. \end{cases} \quad (4.35)$$

Der Radius des Annahmebereiches spezifiziert den Kern. Für identische linke und rechte Referenzfunktion sowie  $c_{A,l} = c_{A,r} = A_s$  erhält man ein unscharfes Intervall vom L-Typ. Der Verwerfungsbereich ist die zum Annahmebereich komplementäre Fuzzymenge ( $\tilde{V} = \tilde{A}^c$ ). Die Teststatistik bleibt wie in Kapitel 4.2.1.1 ein unscharfes Intervall mit der Zugehörigkeitsfunktion aus Formel (4.32).

Der Grad der Zurückweisung der Nullhypothese  $\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T})$  wird wie in Kapitel 4.2.1.1 nach den Formeln (4.30) berechnet und mit einem angemessenen Wert  $\rho_{\text{crit}}$  mit  $\rho_{\text{crit}} \in [0,1]$  verglichen. Unter der Voraussetzung monoton fallender Referenzfunktionen (Kapitel 3.2.3.3) ist  $\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{T}) = \text{height}(\tilde{T} \cap \tilde{V})$  immer größer als  $\delta_{\tilde{A}}(\tilde{T}) = 1 - \text{height}(\tilde{T} \cap \tilde{A})$  und es gilt:

$$\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T}) = \min(\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{T}), \delta_{\tilde{A}}(\tilde{T})) = \begin{cases} 0, & \text{core}(\tilde{T}) \cap \text{core}(\tilde{A}) \neq \emptyset \\ \delta_{\tilde{A}}(\tilde{T}), & \text{core}(\tilde{T}) \cap \text{core}(\tilde{A}) = \emptyset \end{cases} \quad \text{mit } \delta_{\tilde{A}}(\tilde{T}) = 1 - \text{height}(\tilde{T} \cap \tilde{A}). \quad (4.36)$$

Ist  $\text{core}(\tilde{T}) \cap \text{core}(\tilde{A}) \neq \emptyset$ , so kann die Nullhypothese nicht verworfen werden. Andernfalls muss die Höhe des Durchschnittes der Teststatistik mit dem Annahmebereich berechnet werden. Durch das Gleichsetzen der Referenzfunktionen von Annahmebereich und Teststatistik wird die Koordinate des Schnittpunktes beider Zugehörigkeitsfunktionen durch Auflösen nach  $x$  berechnet ( $A_m = 0$ ):

$$L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - |x|}{T_s} \right) = L_A \left( \frac{|x| - r_A}{A_s} \right) \quad \text{für } r_A \leq |x| \leq |\underline{T}_m| - r_T. \quad (4.37)$$

Diese Gleichung kann nur unter der Voraussetzung identischer Referenzfunktionen für den Annahmebereich und die Teststatistik geschlossen gelöst werden. In Formel (4.38) ist die  $x$ -Koordinate für den Schnittpunkt  $x_{\text{num}}$  der beiden Zugehörigkeitsfunktionen angegeben. Schneiden sich die Zugehörigkeitsfunktionen beider Fuzzy-Mengen nicht, so ist die Schnittmenge die leere Menge.

$$|x_{\text{num}}| = \begin{cases} \emptyset, & \tilde{T} \cap \tilde{A} = \emptyset, \\ \frac{A_s \cdot (|\underline{T}_m| - r_T) + r_A \cdot T_s}{(T_s + A_s)}, & \tilde{T} \cap \tilde{A} \neq \emptyset. \end{cases} \quad (4.38)$$

Sind die Referenzfunktionen für den Annahmebereich und die Teststatistik nicht identisch, kann die Berechnung von  $|x_{\text{num}}|$  als Nullstellensuche verstanden werden. Die Lösung ergibt sich dann beispielsweise durch ein Bisektionsverfahren (JAULIN ET AL., 2001) oder ein iteratives Newton-Verfahren (vgl. BRONSTEIN ET AL., 2000 sowie MEYBERG und VACHENAUER, 1999, S. 133f). Durch Einsetzen des Schnittpunktes in eine der beiden Referenzfunktionen kann der Grad der Zurückweisung der Nullhypothese berechnet werden (Formel (4.39)). An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass eine geschlossene Angabe für die Ablehnung der Nullhypothese nur bei identischen Referenzfunktionen für den Annahmebereich und die Teststatistik berechnet werden kann. Für die numerische Lösung erhält man gemäß Formel (4.40) für  $A_m = 0$  (NEUMANN ET AL., 2006):

$$\rho_{\tilde{R}}(\tilde{I}) = \begin{cases} 1, & \tilde{I} \cap \tilde{A} = \emptyset, \\ 1 - L_T \left( \frac{|\tilde{I}_m| - r_A - r_T}{T_s + A_s} \right), & \tilde{I} \cap \tilde{A} \neq \emptyset. \end{cases} \quad (\text{geschlossene Lösung}) \quad (4.39)$$

$$\rho_{\tilde{R}}(\tilde{I}) = \begin{cases} 1, & \tilde{I} \cap \tilde{A} = \emptyset, \\ 1 - L_T \left( \frac{|\tilde{I}_m| - r_T - |x_{\text{num}}|}{T_s} \right), & \tilde{I} \cap \tilde{A} \neq \emptyset. \end{cases} \quad (\text{numerische Lösung}) \quad (4.40)$$

Das Kriterium für die Ablehnung der Nullhypothese  $H_0$  bei ungleichen Referenzfunktionen ist im Folgenden gegeben:

$$\rho_{\tilde{R}}(\tilde{I}) = 1 - L_T \left( \frac{|\tilde{I}_m| - r_T - |x_{\text{num}}|}{T_s} \right) > \rho_{\text{crit}} \Rightarrow H_0 \text{ verwerfen.} \quad (4.41)$$

Bei gleichen Referenzfunktionen kann der Grad der Zurückweisung für die Nullhypothese  $H_0$  auch geschlossen angegeben werden:

$$\rho_{\tilde{R}}(\tilde{I}) = 1 - L_T \left( \frac{|\tilde{I}_m| - r_A - r_T}{T_s + A_s} \right) > \rho_{\text{crit}} \Rightarrow H_0 \text{ verwerfen.} \quad (4.42)$$

Die vorangegangenen Überlegungen zum *height*-Kriterium werden in Kapitel 4.4 auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. und 2. Art übertragen.

## 4.2.2 Das *card*-Kriterium

Eine mathematisch geschlossene Testentscheidung ist für das *card*-Kriterium nur bei klassischen Annahmebereichen und ausgewählten Referenzfunktionen möglich. Es werden daher nur Referenzfunktionen gewählt, die nach Kapitel 3.2.3.3 in der Praxis eine große Bedeutung haben, numerisch geschlossen integriert werden können und sich für eine geschlossene Angabe eines Fehlers 1. und 2. Art (vgl. Kapitel 4.4) bei scharfen Annahmebereichen eignen. Des Weiteren wird in Kapitel 4.2.2.2 ein numerisches Verfahren vorgeschlagen, wenn die Referenzfunktionen nicht geschlossen integriert werden können. Bei dem *card*-Kriterium gilt für die in Kapitel 4.1.3 allgemein eingeführten Größen:

$$\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{I}) = \frac{\text{card}(\tilde{I} \cap \tilde{V})}{\text{card}(\tilde{I})}, \quad \delta_{\tilde{A}}(\tilde{I}) = 1 - \frac{\text{card}(\tilde{I} \cap \tilde{A})}{\text{card}(\tilde{I})} \quad \text{und} \quad \rho_{\tilde{R}}(\tilde{I}) = \min(\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{I}), \delta_{\tilde{A}}(\tilde{I})). \quad (4.43)$$

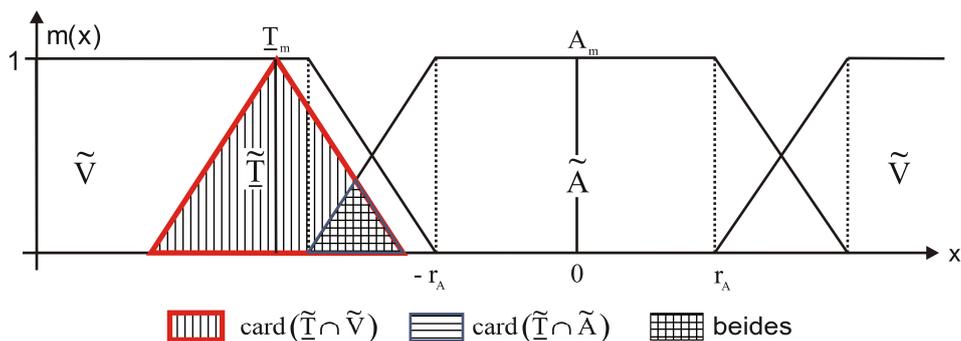


Abbildung 4.4: Das *card*-Kriterium für eine unscharfe Zahl als Wert für die Teststatistik.

Unschärfe Annahmehbereiche machen eine aufwändige Schnittberechnung zwischen den Referenzfunktionen des Annahmehbereiches und des Verwerfungsbereiches notwendig, sodass am Ende dieses Kapitels eine Lösungsstrategie mit numerischen Verfahren aufgezeigt wird. Abbildung 4.4 zeigt die geometrische Interpretation des *card*-Kriteriums.

#### 4.2.2.1 Das *card*-Kriterium für klassische Annahmehbereiche

Bei klassischen Annahmehbereichen sind Annahmehbereich und Verwerfungsbereich wieder durch die folgenden Zugehörigkeitsfunktionen gegeben:

$$m_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & A_m - r_A \leq x \leq A_m + r_A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad m_{\tilde{V}}(x) = \begin{cases} 0, & A_m - r_A \leq x \leq A_m + r_A \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.44)$$

Die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{T}}(x)$  des Wertes der Teststatistik als L-unscharfes Intervall ist aus Formel (4.14) und (3.45) bekannt:

$$m_{\tilde{T}}(x) = \begin{cases} L_T \left( \frac{\underline{T}_m - r_T - x}{T_s} \right), & x < \underline{T}_m - r_T \\ 1, & \underline{T}_m - r_T \leq x \leq \underline{T}_m + r_T \\ L_T \left( \frac{x - \underline{T}_m - r_T}{T_s} \right), & x > \underline{T}_m + r_T. \end{cases} \quad (4.45)$$

Mit  $\underline{T}_m$  dem Mittelpunkt des Intervalles als stochastische Größe und  $r_T$  dem Intervallradius der Teststatistik. Um eine einheitliche Aussage über die Testentscheidung zu ermöglichen und um geschlossene Formeln für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. und 2. Art angeben zu können, muss sich der Grad der Zurückweisung  $\rho_{\tilde{R}}(\tilde{T})$  nur auf Grundlage der Übereinstimmung  $\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{T})$  der Teststatistik mit dem Verwerfungsbereich oder auf Grundlage der Nicht-Übereinstimmung  $\delta_{\tilde{A}}(\tilde{T})$  der Teststatistik mit dem Annahmehbereich berechnen lassen. Bei scharfen Annahmehbereichen gilt für die in Kapitel 4.1.2 und 4.1.3 vorgestellte generelle Testentscheidung (NEUMANN ET AL., 2006):

$$\frac{\text{card}(\tilde{T} \cap \tilde{V})}{\text{card}(\tilde{T})} + \frac{\text{card}(\tilde{T} \cap \tilde{A})}{\text{card}(\tilde{T})} = 1 \Leftrightarrow \frac{\text{card}(\tilde{T} \cap \tilde{V})}{\text{card}(\tilde{T})} = 1 - \frac{\text{card}(\tilde{T} \cap \tilde{A})}{\text{card}(\tilde{T})}. \quad (4.46)$$

Aus diesem Grund kann der Grad der Zurückweisung der Nullhypothese auf Grundlage von  $\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{T})$  oder  $\delta_{\tilde{A}}(\tilde{T})$  berechnet werden:

$$\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{T}) = \delta_{\tilde{A}}(\tilde{T}) = \rho_{\tilde{R}}(\tilde{T}). \quad (4.47)$$

Im Folgenden soll daher die Berechnung von  $K = \text{card}(\tilde{T} \cap \tilde{A})$  durchgeführt werden, was für L-unscharfe Intervalle als Wert für die Teststatistik eine vierfache Fallunterscheidung erfordert und für  $A_m = 0$  folgende Ergebnisse liefert:

$$K = \begin{cases} \text{Fall I: } 2r_A & \text{core}(\tilde{A}) \subseteq \text{core}(\tilde{T}), \\ \text{Fall II: } \int_{-r_A}^{r_A} L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - |x|}{T_s} \right) dx & \text{core}(\tilde{T}) \cap \text{core}(\tilde{A}) = \emptyset, \\ \text{Fall III: } \int_{-r_A}^{|\underline{T}_m| - r_T} L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - |x|}{T_s} \right) dx + \int_{2|\underline{T}_m| - r_A}^{|\underline{T}_m| - r_T} L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - |x|}{T_s} \right) dx + 2r_T & \text{core}(\tilde{T}) \subseteq \text{core}(\tilde{A}), \\ \text{Fall IV: } \int_{-r_A}^{|\underline{T}_m| - r_T} L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - |x|}{T_s} \right) dx + r_A + r_T - |\underline{T}_m| & \text{core}(\tilde{T}) \cap \text{core}(\tilde{A}) \neq \emptyset \wedge \text{core}(\tilde{T}) \not\subseteq \text{core}(\tilde{A}). \end{cases} \quad (4.48)$$

Die Integrale wurden bereits so umgestellt, dass nur über die linke Referenzfunktion integriert werden muss. Für die Lösung der Integrale wird für die Referenzfunktion der Teststatistik eine Substitution durchgeführt:

$$L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - |x|}{T_s} \right) = u \quad \text{mit} \quad dx = \frac{du \cdot (-T_s)}{L'_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - |x|}{T_s} \right)} \quad (4.49)$$

und  $L'_T$  der Ableitung der Referenzfunktion nach  $x$ . Dies führt nach dem Einsetzen der oberen  $i_o \in \mathbb{R}$  und unteren  $i_u \in \mathbb{R}$  Integrationsgrenzen zu:

$$\int_{i_u}^{i_o} f(g(x)) dx = \int_{i_u}^{i_o} L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - |x|}{T_s} \right) dx = -T_s \int_{L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - i_u}{T_s} \right)}^{L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - i_o}{T_s} \right)} \frac{u \cdot du}{L'_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - |x|}{T_s} \right)}. \quad (4.50)$$

Die Integrale können nur für ausgewählte Funktionen geschlossen gelöst werden. Aus diesem Grund werden die in Kapitel 3.2.3.3 eingeführten und für die Praxis relevante Zugehörigkeitsfunktionen betrachtet. Zum einen die dreiecksunscharfen Referenzfunktionen und zum anderen Referenzfunktionen vom Typ  $e^{-x}$  und  $e^{-x^2}$  (Gauß'scher Typ). Die Lösungen des Integrals aus Formel (4.50) ergeben sich dann zu ( $A_m = 0$ ):

$$\begin{aligned} \text{Dreieckstyp:} \quad L &:= \max \left( 0, 1 - \frac{\underline{T}_m - r_T - x}{T_s} \right) \Rightarrow \int_{i_u}^{i_o} f(g(x)) dx = T_s \int_{L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - i_u}{T_s} \right)}^{L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - i_o}{T_s} \right)} u \cdot du, \\ \text{Exponentieller Typ:} \quad L &:= e^{-\left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - x}{T_s} \right)} \Rightarrow \int_{i_u}^{i_o} f(g(x)) dx = T_s \int_{L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - i_u}{T_s} \right)}^{L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - i_o}{T_s} \right)} du, \\ \text{Gauß'scher Typ:} \quad L &:= e^{-\left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - x}{T_s} \right)^2} \Rightarrow \int_{i_u}^{i_o} f(g(x)) dx = T_s \int_{L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - i_u}{T_s} \right)}^{L_T \left( \frac{|\underline{T}_m| - r_T - i_o}{T_s} \right)} \frac{du}{\left[ \ln \left( \frac{1}{u} \right) \right]^2}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Die Referenzfunktionen vom Gauß'schen Typ  $e^{-x^2}$  sind nicht geschlossen integrierbar. Die linke Spalte von Tabelle 4.1 zeigt die Lösungen für die L-unscharfen Intervalle vom Trapeztyp und die rechte Spalte die Lösungen für die exponentiellen Referenzfunktionen vom Typ  $e^{-x}$  für  $A_m = 0$ .

Fall	$\rho_{\tilde{I}}(\tilde{I})$ für L-unscharfe Intervalle vom Trapeztyp	$\rho_{\tilde{I}}(\tilde{I})$ für L-unscharfe Intervalle vom exp. Typ
I	$1 - \frac{T_s \left\{ \left[ L_T \left( \frac{ \underline{T}_m  - r_T - r_A}{T_s} \right) \right]^2 - \left[ L_T \left( \frac{ \underline{T}_m  - r_T + r_A}{T_s} \right) \right]^2 \right\}}{2(T_s + 2r_T)}$	$1 - \frac{T_s \left\{ L_T \left( \frac{ \underline{T}_m  - r_T - r_A}{T_s} \right) - L_T \left( \frac{ \underline{T}_m  - r_T + r_A}{T_s} \right) \right\}}{2(T_s + 2r_T)}$
II	$\frac{1}{2} + \frac{T_s \left[ L_T \left( \frac{ \underline{T}_m  - r_T + r_A}{T_s} \right) \right]^2 - 2r_A + 2 \underline{T}_m }{2(T_s + 2r_T)}$	$\frac{1}{2} + \frac{T_s \left[ L_T \left( \frac{ \underline{T}_m  - r_T + r_A}{T_s} \right) \right] - r_A +  \underline{T}_m }{2(T_s + 2r_T)}$
III	$\frac{T_s \left\{ \left[ L_T \left( \frac{ \underline{T}_m  - r_T + r_A}{T_s} \right) \right]^2 + \left[ L_T \left( \frac{r_A - r_T -  \underline{T}_m }{T_s} \right) \right]^2 \right\}}{2(T_s + 2r_T)}$	$\frac{T_s \left\{ L_T \left( \frac{ \underline{T}_m  - r_T + r_A}{T_s} \right) + L_T \left( \frac{r_A - r_T -  \underline{T}_m }{T_s} \right) \right\}}{2(T_s + 2r_T)}$
IV	$1 - \frac{r_A}{2(T_s + 2r_T)}$	$1 - \frac{r_A}{(T_s + r_T)}$

Tabelle 4.1: Die Testentscheidungen beim card-Kriterium für Trapez-Fuzzy-Sets und für Referenzfunktionen mit  $e^{-x}$ .

Eine Übersicht über die Lösungen beim card-Kriterium mit unscharfen Zahlen für die Teststatistik findet sich in KUTTERER (2002b, S. 76). Bei Intervallen für die Teststatistik vereinfachen sich die angegebenen Formeln deutlich.

#### 4.2.2.2 Anwendung eines numerischen Integrationsverfahren für die Lösung des card-Kriteriums

Im Falle von nicht geschlossen integrierbaren Referenzfunktionen für die Teststatistik und den Annahmebereich muss für die Lösung des card-Kriteriums auf numerische Integrationsverfahren zurückgegriffen werden. Des Weiteren sind mehrdimensionale Teststatistiken bei nicht linearen Schätzfunktionen trotz der L-

unscharfen Intervalle für die Einflussfaktoren im Allgemeinen keine L-unscharfen Intervalle, sondern LR-unscharfe Intervalle. Da die mehrdimensionalen Teststatistiken im Allgemeinen ebenfalls andere Referenzfunktionen für den Annahme- und Verwerfungsbereich aufweisen, wird für diese Testentscheidungen das numerische Verfahren vorgeschlagen.

Unter numerischen Integrationsverfahren versteht man die näherungsweise Berechnung eines Integrales durch eine endliche Zahl von Funktionswerten (MEYBERG und VACHENAUER, 1999, S. 206ff). Im Rahmen dieser Arbeit wird mit dem Trapezverfahren gearbeitet. Bei der Approximation des Integrals mit der stückweise stetigen Funktion  $f(x)$ :

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (4.52)$$

mit der Trapezregel wird der Integrationsbereich in  $n$  äquidistante Teilbereiche mit der Schrittweite  $h = (b - a) / n$  unterteilt. Mit den Stützstellen  $x_i := a + ih$  für  $i \in \{0, \dots, n\}$  ersetzt man den tatsächlichen Funktionsverlauf durch die Verbindungsehne zwischen den Funktionswerten  $y_i = f(x_i)$  an den Stützstellen. Die Approximation des Integrals von Formel (4.52) erhält man durch die Summe der Trapezflächen:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right). \quad (4.53)$$

Für numerisch besonders schnell berechenbare Lösungen und für die Abschätzung des mit der Approximation verbleibenden Restfehlers wird auf MEYBERG und VACHENAUER (1999, S. 207f) verwiesen. Abbildung 4.5 zeigt die numerische Integration für einen unscharfen Annahmebereich und ein unscharfes Intervall vom LR-Typ für die Teststatistik. Man sieht, dass die Problembereiche der numerischen Integration im Bereich der Schnittpunkte der Referenzfunktion der Teststatistik mit den Referenzfunktionen des Annahmebereiches und Verwerfungsbereiches liegen. Die tatsächliche Schnittmenge wird in diesen Bereichen unterschätzt.

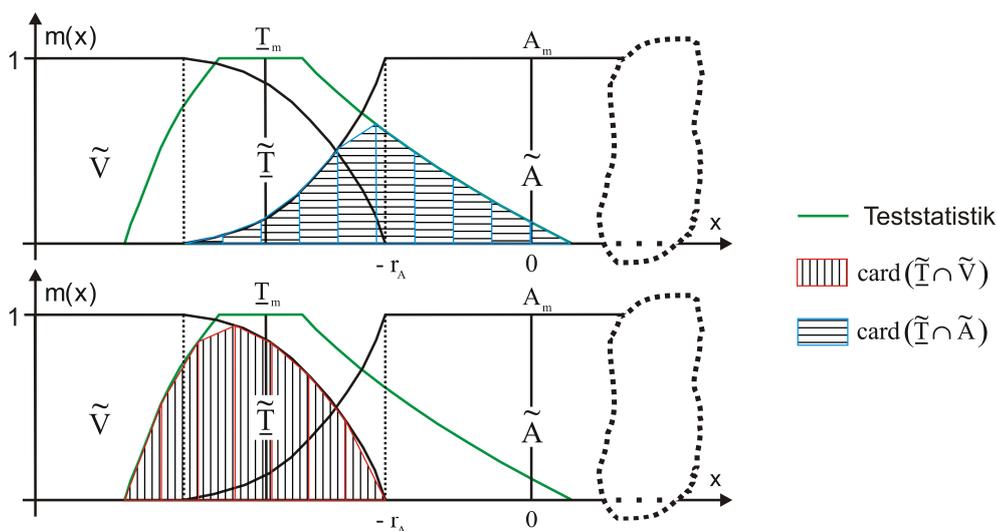


Abbildung 4.5: Anwendung der numerischen Integration beim card-Kriterium.

### 4.2.3 Vergleich zwischen dem card- und height-Kriterium

In diesem Unterkapitel sollen das card- und height-Kriterium hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile bei der Berücksichtigung der Unschärfe in der Testentscheidung diskutiert werden. Zu diesem Zweck werden verschiedene Teststatistiken bei einem klassischen und einem unscharfen Annahmebereich verwendet. Abbildung 4.6 zeigt den Grad der Verwerfung  $\rho_{\tilde{T}}$  der Nullhypothese des card- und height-Kriteriums für einen klassischen Annahmebereich  $A$  und drei verschiedene Teststatistiken. Die drei Teststatistiken sind für den klassischen und den unscharfen Annahmebereich identisch. Der klassische Annahmebereich in Abbildung 4.6 ist dabei durch die folgende Indikatorfunktion festgelegt:

$$A := i_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in [\underline{a}, \bar{a}] = [-2, 2] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.54)$$

Der Verwerfungsbereich  $V$  ergibt sich als mathematisches Komplement zum Annahmebereich. Die drei Teststatistiken wurden über ein Trapez-Fuzzy-Set gemäß Formel (3.45) und (3.46) mit der folgenden Zugehörigkeitsfunktion definiert:

$$m_{\tilde{T}}(x) = \begin{cases} \max\left(0, \frac{\underline{T}_m - x - r_T}{T_s}\right), & x < \underline{T}_m - r_T \\ 1, & \underline{T}_m - r_T \leq x \leq \underline{T}_m + r_T \\ \max\left(0, \frac{x - \underline{T}_m - r_T}{T_s}\right), & x > \underline{T}_m + r_T. \end{cases} \quad (4.55)$$

Die einzelnen Parameter für die Zugehörigkeitsfunktionen sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst:

Teststatistik $\tilde{T}$	Mittelpunkt $\underline{T}_m$	Radius $r_T$	Spannweiten $T_s$
I (geringe Unschärfe)	-10,0...+10,0	0,0	1,0
II (starke Unschärfe)	-10,0...+10,0	0,0	3,0
III (sehr starke Unschärfe)	-10,0...+10,0	1,0	3,0

Tabelle 4.2: Übersicht über die Parameter für die Zugehörigkeitsfunktion der Trapez-Teststatistiken.

Die in Abbildung 4.6 vorliegende Testsituation wurde für verschiedene Mittelpunkte  $\underline{T}_m$  der Teststatistiken  $\tilde{T}$  ausgewertet. Die Teststatistik wird dafür von links nach rechts durch den Verwerfungsbereich und den Annahmehbereich geschoben. Die Berechnung beginnt bei  $\underline{T}_m = -10,0$  und endet mit  $\underline{T}_m = +10,0$  (vgl. Tabelle 4.2). Es ist erkennbar, dass der in rot dargestellte Grad der Verwerfung  $\rho_{\tilde{R}}(\tilde{T})$  der Nullhypothese für das *height*-Kriterium identisch mit Null ist, sobald der Kern der Teststatistik im Annahmehbereich liegt. Das *card*-Kriterium trägt, wie auch schon KUTTERER (2002b, S. 73) bemerkt, der Unschärfe besser Rechnung. In Kapitel 5 und 7 werden mehrdimensionale und damit asymmetrische Teststatistiken untersucht, bei denen sich weitere Vorteile des *card*-Kriteriums durch eine gute Berücksichtigung der Asymmetrien in der Teststatistik zeigen werden.

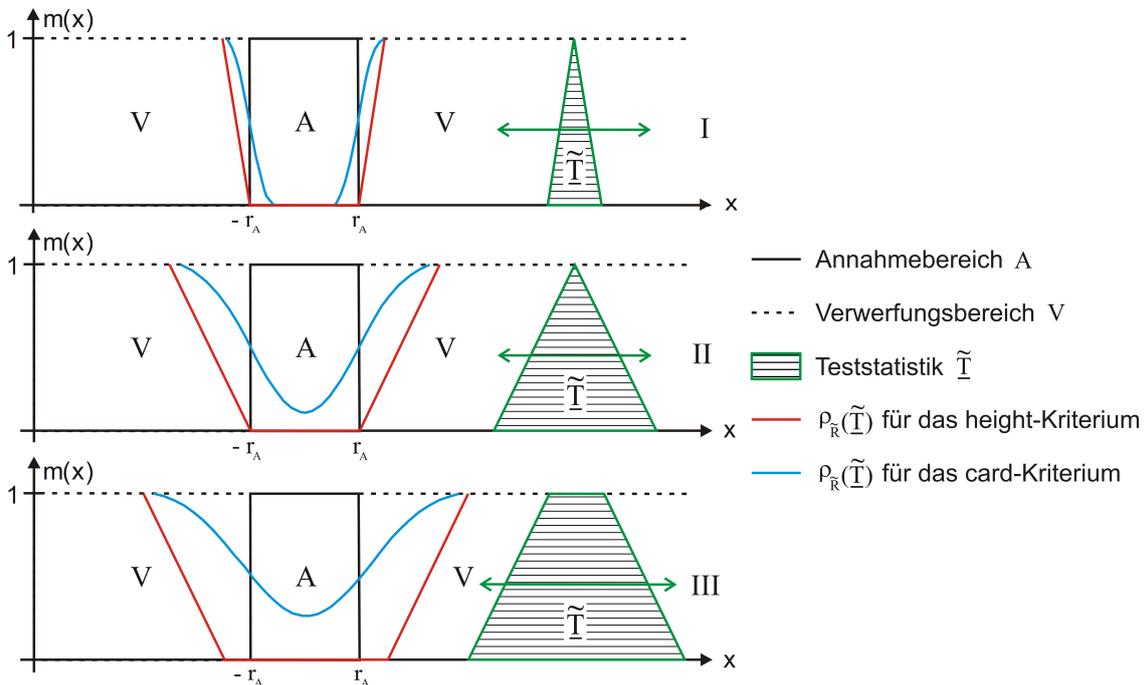


Abbildung 4.6: Vergleich des *height*- und *card*-Kriteriums für einen klassischen Annahme- und Verwerfungsbereich.

Des Weiteren ist auffällig, dass aufgrund der starken Unschärfe der Teststatistiken II und III für jedes  $\underline{T}_m$  immer ein Teil der Teststatistik außerhalb des Annahmehbereiches liegt. Bei dem *height*-Kriterium wird dennoch die Nullhypothese angenommen, sobald der Kern der Teststatistik im Annahmehbereich liegt. Das *card*-Kriterium hingegen berücksichtigt die Fläche der Teststatistik außerhalb des Annahmehbereiches, indem der Grad der Verwerfung  $\rho_{\tilde{R}}(\tilde{T})$  der Nullhypothese immer größer als Null ist. Dies bedeutet für praxisrelevante Fragestellungen, dass für eine klare Testentscheidung die Unschärfe in der Teststatistik (bzw. in den Beobachtungsergebnissen oder den Einflussfaktoren auf die Beobachtungsergebnisse) reduziert werden muss. KUTTERER (2002b, S. 74) schlägt daher u. A. vor, die Testentscheidung in drei Kategorien zu unterteilen:

Kategorie I:	$\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T}) \in [0 \dots 0,25]$	„Nullhypothese annehmen“
Kategorie II:	$\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T}) \in [0,25 \dots 0,75]$	„Test nicht entscheidbar“
Kategorie III:	$\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T}) \in [0,75 \dots 1,0]$	„Nullhypothese verwerfen“

Aus den oben genannten Gründen ist eine angemessene Berücksichtigung dieser Vorgehensweise in den in Abbildung 4.6 dargestellten Testsituationen nur durch Verwendung des *card*-Kriteriums möglich. Bei geringer Unschärfe und einer unscharfen Zahl als Teststatistik kann das *height*-Kriterium dem *card*-Kriterium aufgrund des geringen Rechenaufwandes und eines einfacheren Formelapparates vorgezogen werden.

Die Abbildung 4.7 zeigt den Übergang von einem klassischen zu einem unscharfen Annahmebereich  $\tilde{A}$  :

$$\tilde{A} := m_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \max\left(0, \frac{A_m - x - r_A}{A_s}\right), & x < A_m - r_A \\ 1, & A_m - r_A \leq x \leq A_m + r_A \\ \max\left(0, \frac{x - A_m - r_A}{A_s}\right), & x > A_m + r_A \end{cases} \quad (4.56)$$

mit  $A_m = 0$ ,  $r_A = 2,0$  und  $A_s = 1$ . Der Verwerfungsbereich ergibt sich wieder als mathematisches Komplement des Annahmebereiches. Der Wertebereich, in dem der Grad der Verwerfung  $\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T})$  der Nullhypothese für das *height*-Kriterium immer Null ist, ist identisch mit dem Wertebereich des klassischen Annahmebereiches, sodass hier der erweiterte Annahmebereich nicht angemessen berücksichtigt wird. Lediglich der Anstieg an den Flanken zu einem Grad der Verwerfung von Eins erfolgt im Vergleich zum klassischen Annahmebereich langsamer. Das *card*-Kriterium hingegen hat klar unterschiedliche Bereiche mit dem Wert Null für den Grad der Verwerfung beim klassischen und unscharfen Annahmebereich. Dies macht sich insbesondere bei der zweiten Teststatistik bemerkbar, bei der im Fall des klassischen Annahmebereiches kein Wert von Null für den Grad der Verwerfung auftauchte. Bei dem unscharfen Annahmebereich ist dies jedoch jetzt der Fall. Die oben genannten Punkte verstärken sich noch, wenn es sich bei der Teststatistik um ein Intervall handelt.

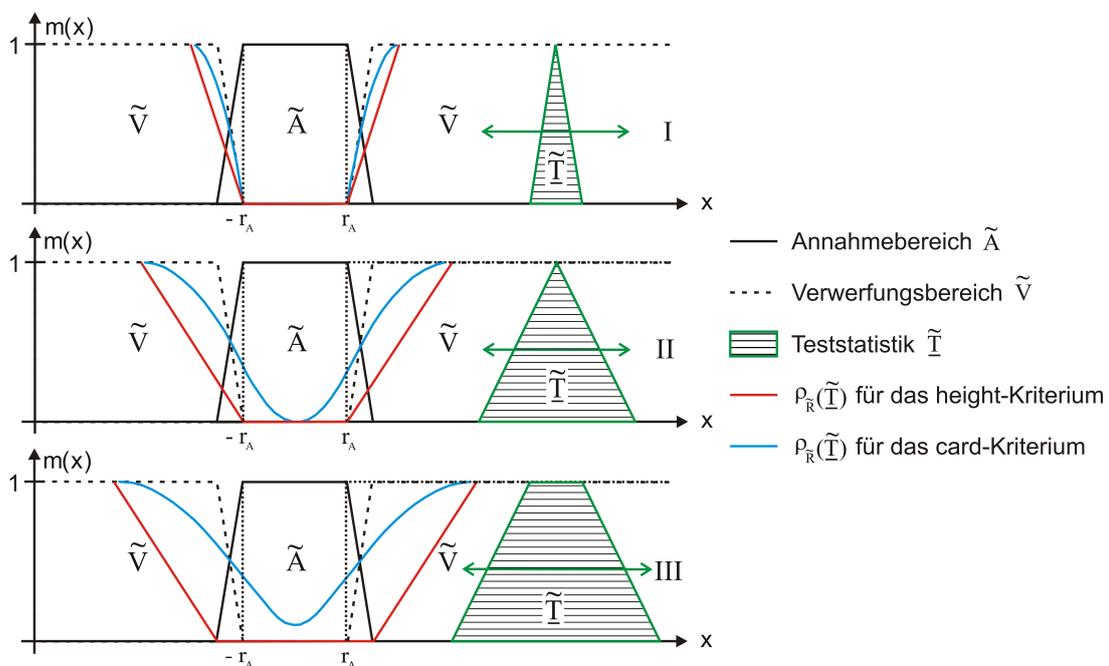


Abbildung 4.7: Vergleich des *height*- und *card*-Kriteriums für einen unscharfen Annahme- und Verwerfungsbereich.

Die Vorgehensweise bei der Testsituation mit dem *card*-Kriterium ist quasi identisch mit dem *height*-Kriterium, wobei die Zugehörigkeit zwischen zwei Fuzzy-Sets mit dem Flächeninhalt anstelle der Höhe des Durchschnittes beider Fuzzy-Sets berechnet wird. Mit dem *card*-Kriterium kann die Zugehörigkeit zweier Fuzzy-Sets besser als mit dem *height*-Kriterium beschrieben werden, da die Mächtigkeit der Ergebnismenge die Unschärfe besser repräsentieren kann. Des Weiteren sind mit dem *height*-Kriterium sowohl für den Annahme-, als auch für den Verwerfungsbereich Höhen von 1 vorstellbar (unscharfe Intervalle).

### 4.3 Mehrdimensionale Hypothesentests mit unscharfen Daten

Neben den eindimensionalen Hypothesentests im Falle unscharfer Daten sind bei Verträglichkeitsprüfungen der Daten mit den im Modell getroffenen Annahmen mehrdimensionale Hypothesentests notwendig. Anwendungsbeispiele von mehrdimensionalen Hypothesentests sind u. A. der Globaltest der Ausgleichung und die Modellwahl bei Ausgleichungsproblemen. Unter mehrdimensionalen Hypothesentests ist das gleichzeitige Testen von mehreren Parametern gemeint.

#### 4.3.1 Grundsätzliche Vorgehensweise

Die grundsätzliche Vorgehensweise bei mehrdimensionalen Hypothesentests mit unscharfen Daten basiert auf einer Erweiterung des klassischen Falles. Im klassischen Fall werden die im mehrdimensionalen formulierten Hypothesen mittels eines im Eindimensionalen konstruierten Annahmebereiches und Verwerfungsbereiches sowie der Eindimensionalen Teststatistik auf statistische Signifikanz überprüft. Diese Überlegung soll auf den unscharfen Fall übertragen werden.

In Kapitel 2.3 wurde ausführlich diskutiert, dass die originären Beobachtungen Träger der zufälligen Variabilität sind und die Einflussfaktoren auf den Aufbereitungsprozess der Beobachtungen die Impräzision induzieren. Aus unscharfen Einflussfaktoren abgeleiteten Größen sind entsprechend mit dem Zadeh'sche Erweiterungsprinzip nach Formel (3.40) zu berechnen (vgl. Kapitel 3.2.3.2 und 3.2.5). Für die Konstruktion der Realisierung  $\tilde{T}$  der unscharfen Testgröße  $\tilde{T}$  kann daher direkt die Formel (4.13) verwendet werden:

$$\tilde{T} := m_{\tilde{T}}(x) = \sup_{\substack{(p_1, \dots, p_j) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_j \text{ und } (y_1^*, \dots, y_n^*) \in \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_n \\ x = \tau(p_1, \dots, p_j, y_1^*, \dots, y_n^*)}} \min(m_{p_1}(p_1), \dots, m_{p_j}(p_j), y_1^*, \dots, y_n^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.57)$$

Sollten die originären Beobachtungen aus den in Kapitel 3.3.1 genannten Gründen nicht zugänglich sein, kann die Konstruktion der Teststatistik  $\tilde{T}$  auch auf Basis der Realisierungen  $\mathbf{y}$  für die Beobachtungsergebnisse erfolgen. Für den Mittelpunkt  $T_m \sim \rho_T(x)$  der unscharfen Testgröße  $\tilde{T}$  gilt unter Berücksichtigung des Aufbereitungsprozesses nach Formel (4.9) entsprechend die Verteilungsaussage der Dichtefunktion:

$$\rho_0(T) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(y_1^*, \dots, y_n^*) \times \delta[\tau(p_1, \dots, p_j, y_1^*, \dots, y_n^*) - T] dy_1^* \dots dy_n^* = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(\mathbf{y}^*) \times \delta[\tau(\mathbf{p}, \mathbf{y}^*) - T] d\mathbf{y}^*, \quad (4.58)$$

sofern die Dichtefunktion  $\rho_0(\mathbf{y}^*)$  der originären Beobachtungen  $\mathbf{y}^*$  bekannt ist. Ist das Integral nicht lösbar, so muss auf die in Kapitel 4.1.1 genannten Monte-Carlo-Verfahren zurückgegriffen werden. Nach der Abbildung der mehrdimensionalen Hypothesentests in das Eindimensionale werden die in Kapitel 4.2 vorgestellten Hypothesentests angewendet. Im Folgenden soll eine praktische Umsetzung des Zadeh'schen Erweiterungsprinzips für die Konstruktion der unscharfen Teststatistik aufgezeigt werden.

#### 4.3.2 Praktische Bestimmung der Teststatistik mittels Optimierung

Die Anwendung des Zadeh'schen Erweiterungsprinzips nach Formel (3.40) ist sehr rechenintensiv, sodass in diesem Unterkapitel ein Optimierungsverfahren für die Konstruktion der unscharfen Teststatistik vorgestellt wird. Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen ist die Voraussetzung, dass es sich um konvexe Zugehörigkeitsfunktionen (vgl. Formel (3.44)) für die Einflussfaktoren auf die Impräzision handelt. In diesem Fall kann das Erweiterungsprinzip aus Formel (3.40) auch als Optimierungsaufgabe (Wertebereichssuche) über die  $\alpha$ -Schnitte der Zugehörigkeitsfunktionen nach Formel (3.48) gelöst werden.

Die  $\alpha$ -Schnitte  $\tilde{\mathbf{p}}_\alpha$  der unscharfen Einflussfaktoren  $\tilde{\mathbf{p}}$  stellen einen Intervallvektor im  $\mathbb{I}\mathbb{R}^j$  dar. Gesucht ist die untere  $\tilde{T}_{\alpha, \min}$  und obere  $\tilde{T}_{\alpha, \max}$  Grenze für eine hinreichend Anzahl von  $\alpha$ -Schnitten für die Teststatistik, wenn die Einflussfaktoren innerhalb des  $\alpha$ -Schnittes  $\tilde{\mathbf{p}}_\alpha$  frei variieren können. Ein  $\alpha$ -Schnitt  $\tilde{T}_\alpha = [\tilde{T}_{\alpha, \min}, \tilde{T}_{\alpha, \max}]$  der Teststatistik  $\tilde{T}$  wird somit folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\alpha, \min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \tau(p_1, \dots, p_j, y_1^*, \dots, y_n^*) \right), \\ \tilde{T}_{\alpha, \max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \tau(p_1, \dots, p_j, y_1^*, \dots, y_n^*) \right). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Die eindimensionale Teststatistik aus Formel (4.57) wird durch eine hinreichende Anzahl  $d$  von Minima und Maxima von  $\alpha$ -Schnitten gemäß Formel (4.59) konstruiert. Für die verschiedenen  $\alpha$ -Schnitte von  $\tilde{\mathbb{T}}$  gilt aufgrund der Konvexität der Zugehörigkeitsfunktionen die folgende Beziehung (vgl. auch Formel (3.51)):

$$\tilde{\mathbb{T}}_{\alpha_d} \subseteq \tilde{\mathbb{T}}_{\alpha_{d-1}} \subseteq \dots \subseteq \tilde{\mathbb{T}}_{\alpha_2} \subseteq \tilde{\mathbb{T}}_{\alpha_1} \subseteq \mathbb{I}\mathbb{R}. \tag{4.60}$$

Somit handelt es sich bei der Familie von  $\alpha$ -Schnitten von  $\tilde{\mathbb{T}}$  um ein Nested-Set  $\tilde{\mathbb{T}}$ . Existiert ein Fuzzy-Set  $\tilde{\mathbb{T}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$  und eine Funktion  $f : [0,1] \rightarrow [1,0]$ , für die die Beziehungen aus Formel (3.53) gelten:

$$\tilde{\mathbb{T}}_{f(\alpha)} = C_{\tilde{\mathbb{T}}_\alpha} \quad \forall \alpha \in (0,1], \tag{4.61}$$

kann die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{\mathbb{T}}}$  von  $\tilde{\mathbb{T}}$  nach Anwendung des  $\alpha$ -Schnitt Optimierungsverfahrens rekonstruiert werden.

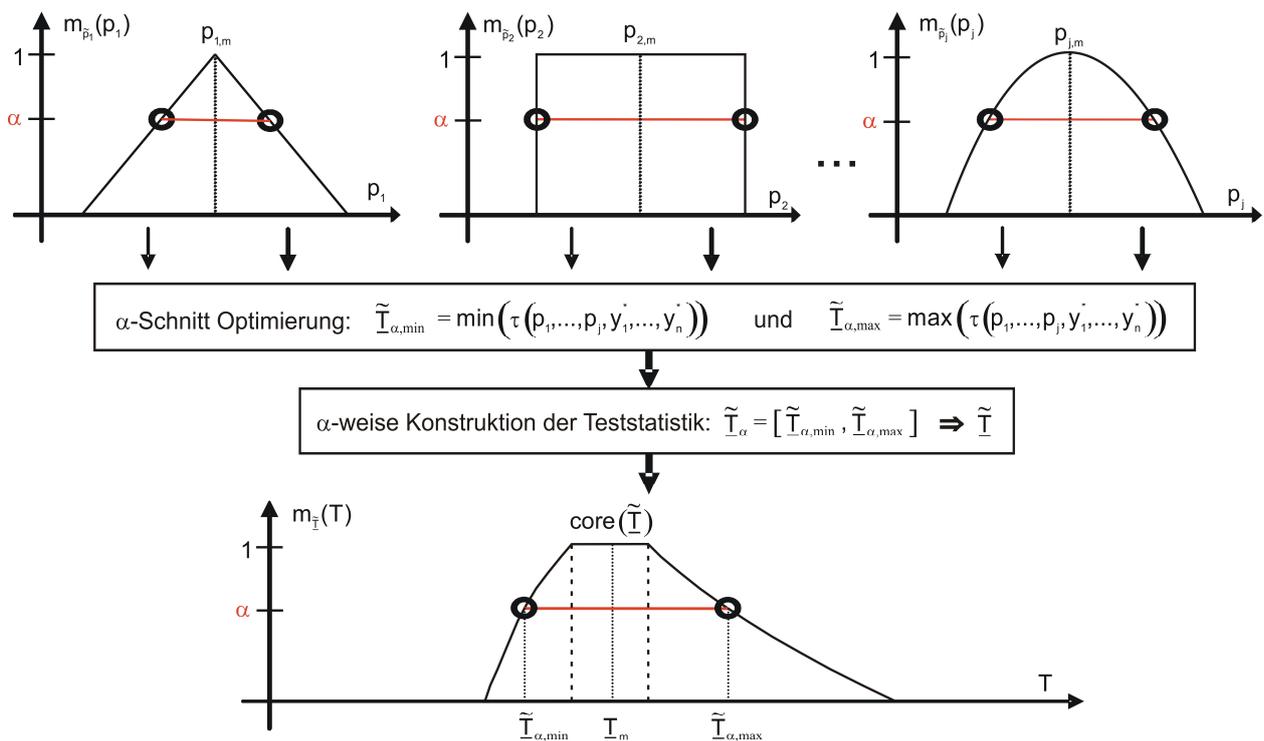


Abbildung 4.8: Konstruktion der eindimensionalen Teststatistik  $\tilde{\mathbb{T}}$  über ein  $\alpha$ -Schnitt-Optimierungsverfahren.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass es sich in diesem Fall aufgrund der i. A. nichtlinearen Funktion  $\tau(\dots)$  um unsymmetrische Nested-Sets handelt (vgl. auch Abbildung 4.8). Handelt es sich um nicht konvexe Zugehörigkeitsfunktionen für  $\tilde{\mathbf{p}}$ , so liefert die Optimierungsaufgabe aus Formel (4.59) die konvexe Einschließung von  $m_{\tilde{\mathbb{T}}}$  (Viertl, 1996, S. 20). Eine graphische Darstellung der Vorgehensweise ist in Abbildung 4.8 dargestellt.

Die endgültige Testentscheidung beruht auf dem eindimensionalen Vergleich der über das  $\alpha$ -Schnitt-Optimierungsverfahren konstruierten Teststatistik mit dem Annahme- und Verwerfungsbereich. Die in Kapitel 4.2 geschilderten Verfahren werden angewendet.

### 4.4 Fehler 1. und 2. Art im unscharfen Fall

Im Folgenden sollen die Berechnungen der **Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1.** (engl.: probability of a type 1 error, significance level) **und 2. Art** (engl.: probability of a type 2 error) im unscharfen Fall in die Testtheorie integriert werden. Ausgangspunkt für alle weiteren Überlegungen ist die Tatsache, dass der Grad der Zurückweisung der Nullhypothese  $\rho_{\tilde{\mathbb{T}}}(\tilde{\mathbb{T}})$  eine monotone Funktion  $\varphi : \mathfrak{S}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$  des Mittelpunktes  $\mathbb{T}_m$  der Teststatistik  $\tilde{\mathbb{T}}$  darstellt:

$$\rho_{\tilde{\mathbb{T}}}(\tilde{\mathbb{T}}) := \varphi(\mathbb{T}_m). \tag{4.62}$$

Eine geschlossene Lösung kann nur bei einer eindeutigen Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  zu  $\varphi$  existieren. Dies ist jedoch nur bei einigen speziellen Referenzfunktionen für den Annahmehereich  $\tilde{A}$  und die Teststatistik  $\tilde{T}$  der Fall. Wie in diesem Kapitel gezeigt wird, basiert die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. und 2. Art im unscharfen Fall daher i. A. auf numerischen Lösungen.

#### 4.4.1 Der Fehler 1. Art im unscharfen Fall

Als Fehler 1. Art bezeichnet man das (fälschlicherweise) Verwerfen der (tatsächlich) korrekten Nullhypothese. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art  $\alpha_{\text{impr}}$  im unscharfen Fall berechnet sich nach Formel (4.16) mit:

$$\alpha_{\text{impr}} = P(\rho_{\tilde{R}}(\tilde{T}) > \rho_{\text{crit}} | H_0), \quad (4.63)$$

wobei der Grad der Verwerfung  $\rho_{\tilde{R}}(\tilde{T})$  unter der Nullhypothese  $H_0$  größer als der kritische Wert  $\rho_{\text{crit}} \in [0, 1]$  für den Grad der Verwerfung ist. Berücksichtigt man Formel (4.62), so kann der Fehler 1. Art  $\alpha_{\text{impr}}$  auch in

$$\alpha_{\text{impr}} = P(\varphi(\underline{T}_m) > \rho_{\text{crit}} | H_0) \quad (4.64)$$

umgeschrieben werden. Durch Berechnung der Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}(\rho_{\text{crit}})$  von  $\varphi(\underline{T}_m)$  steht auf der linken Seite der Ungleichung

$$\alpha_{\text{impr}} = P(\underline{T}_m > \varphi^{-1}(\rho_{\text{crit}}) | H_0) \quad (4.65)$$

nur der Mittelpunkt der Realisierung der Teststatistik. Da die Verteilung der Zufallsvariablen bekannt ist, kann entsprechend das Quantil  $\rho_{1-\alpha_{\text{impr}}}$  der Dichtefunktion von  $\underline{T}_m$  an der Stelle  $\varphi^{-1}(\rho_{\text{crit}})$  berechnet werden:

$$\rho_{1-\alpha_{\text{impr}}} = \varphi^{-1}(\rho_{\text{crit}}). \quad (4.66)$$

Bei der numerischen Bestimmung der Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}(\rho_{\text{crit}})$  wird der Grad der Verwerfung  $\rho_{\tilde{R}}(\tilde{T})$  der Nullhypothese (wie in Kapitel 4.2.3 beschrieben) für verschiedene Mittelpunkte  $\underline{T}_m$  der Teststatistik  $\tilde{T}$  berechnet. Der Wert für den Mittelpunkt wird auf der (mathematischen) x-Achse abgetragen, während der Grad der Verwerfung auf der y-Achse eingezeichnet wird. Das entsprechende Quantil der Verteilung kann dann als Projektion des jeweiligen Wertes für  $\rho_{\text{crit}}$  auf der x-Achse abgelesen werden. Die Abbildung 4.9 zeigt die Bestimmung des Quantils  $\rho_{1-\alpha_{\text{impr}}}$  für  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  bei einem klassischen Annahmehereich und einseitiger Fragestellung. Die obere Schranke des klassischen Annahmehereiches  $\rho_{1-\alpha}$  wurde mit der präzisen Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  konstruiert.

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art im unscharfen Fall kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

Schritt 1: Wahl eines sinnvollen Wertes für  $\rho_{\text{crit}}$ .

Schritt 2: Berechnung des Quantils  $\rho_{1-\alpha_{\text{impr}}}$  mittels numerischer Bestimmung der Umkehrfunktion

$$\rho_{1-\alpha_{\text{impr}}} = \varphi^{-1}(\rho_{\text{crit}}).$$

Schritt 3: Berechnung der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{impr}}$  zum Quantil  $\rho_{1-\alpha_{\text{impr}}}$  aus Schritt 2.

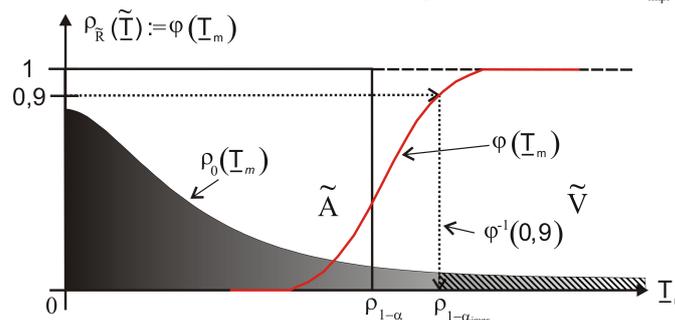


Abbildung 4.9: Bestimmung der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{impr}}$  für einen Fehler 1. Art mit  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$ .

Numerische Beispiele für eine Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art im unscharfen Fall werden in Kapitel 7 gezeigt. Eine weitere Vorgehensweise bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. Art im unscharfen Fall ist eine spätere Defuzzifizierung der unscharfen Mengen. Dies wurde bspw. zu unscharfen Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. Art führen, wie es in VIERTL und FILZMOSE (2004) sowie VIERTL und HARETER (2004a) vorgestellt wird.

#### 4.4.1.1 Der Fehler 1. Art bei klassischen Annahmebereichen und dem *height*-Kriterium

Im Falle des *height*-Kriteriums kann für die in Kapitel 4.2.1.1 angegebenen unscharfen Intervalle für die Teststatistik eine mathematisch geschlossene Lösung für den Fehler 1. Art formuliert werden. Bei einer eindeutigen Formulierung des Kriteriums für die Ablehnung der Nullhypothese ist es möglich, diese Gleichung in die Formeln für einen Fehler 1. Art einzusetzen. Durch Einsetzen der Formel (4.34) in (4.63) kann die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art zu:

$$\alpha_{\text{impr}} = P\left(1 - L_T\left(\frac{|\underline{T}_m| - r_T - r_A}{T_s}\right) > \rho_{\text{crit}} \mid H_0\right) \quad (4.67)$$

berechnet werden. Nach Umstellen und Berechnen der Umkehrfunktion  $L_T^{-1}$  zu  $L_T$  ergibt sich somit:

$$\alpha_{\text{impr}} = P\left(|\underline{T}_m| < T_s \cdot L_T^{-1}(1 - \rho_{\text{crit}}) + r_T + r_A \mid H_0\right). \quad (4.68)$$

Das entsprechende Quantil der Verteilung erhält man unter Berücksichtigung von (4.68) und (4.66) somit zu:

$$\rho_{1-\alpha_{\text{impr}}} = T_s \cdot L_T^{-1}(1 - \rho_{\text{crit}}) + r_T + r_A. \quad (4.69)$$

Das Vorhandensein von Unschärfe führt dazu, dass bei klassischen Annahmebereichen  $\alpha_{\text{impr}} \leq \alpha$  ist. Bei vielen Anwendungen ist es daher von Interesse, trotz Unschärfe die gleiche Irrtumswahrscheinlichkeit wie bei rein stochastischen Daten zu gewährleisten. Dies kann durch Variation der Grenzen für den Annahmebereich erreicht werden. Nach Umstellen der Formel (4.69) erhält man als neue Grenze für den Annahmebereich:

$$r_A = \rho_{1-\alpha_{\text{impr}}} - T_s \cdot L_T^{-1}(1 - \rho_{\text{crit}}) - r_T. \quad (4.70)$$

Selbstverständlich muss in diesem Fall  $r_A$  positiv sein. Ist dies nicht der Fall, so kann die Irrtumswahrscheinlichkeit des rein stochastischen Falls im unscharfen Fall aufgrund der starken Unschärfe in den Daten nicht gewährleistet werden.

#### 4.4.1.2 Der Fehler 1. Art bei unscharfen Annahmebereichen und dem *height*-Kriterium

Im Folgenden sollen die in Abschnitt 4.4.1.1 durchgeführten Überlegungen für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. Art auf unscharfe Annahmebereiche übertragen werden. Es werden nur die Formeln für gleiche Referenzfunktionen des Annahmebereiches und der Teststatistik angegeben, wie es für eine geschlossene Lösung des *height*-Kriteriums in Kapitel 4.2.1.2 vorausgesetzt wurde.

Ausgangspunkt ist wiederum das Einsetzen des Grades der Verwerfung für unscharfe Annahmebereiche aus Formel (4.42) in die Formel (4.63):

$$\alpha_{\text{impr}} = P\left(1 - L_T\left(\frac{|\underline{T}_m| - r_A - r_T}{T_s + A_s}\right) > \rho_{\text{crit}} \mid H_0\right). \quad (4.71)$$

Die Vorgehensweise aus Kapitel 4.4.1.1 führt zu dem Quantil:

$$\rho_{1-\alpha_{\text{impr}}} = (T_s + A_s) \cdot L_T^{-1}(1 - \rho_{\text{crit}}) + r_T + r_A, \quad (4.72)$$

das für unimodale Verteilungen immer größer ist als das Quantil  $\rho_{1-\alpha}$  im klassischen Fall. Die gleiche Irrtumswahrscheinlichkeit wie bei rein stochastischen Daten erhält man für  $r_A > 0$  mit:

$$r_A = \rho_{1-\alpha_{\text{impr}}} - (T_s + A_s) \cdot L_T^{-1}(1 - \rho_{\text{crit}}) - r_T. \quad (4.73)$$

#### 4.4.2 Der Fehler 2. Art und der Nichtzentralitätsparameter im unscharfen Fall

Als Fehler 2. Art bezeichnet man das (fälschlicherweise) Annahmen der Nullhypothese bei (tatsächlich) korrekter Alternativhypothese. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art berechnet sich nach Formel (4.16) mit:

$$\beta_{\text{impr}} = P(\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T}) \leq \rho_{\text{crit}} | H_1), \quad (4.74)$$

wobei der Grad der Verwerfung  $\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T})$  unter der Alternativhypothese  $H_1$  kleiner als der kritische Wert  $\rho_{\text{crit}} \in [0,1]$  für den Grad der Verwerfung ist. Berücksichtigt man Formel (4.62), so kann der Fehler 2. Art  $\beta_{\text{impr}}$  auch in

$$\beta_{\text{impr}} = P(\varphi(T_m) \leq \rho_{\text{crit}} | H_1) \quad (4.75)$$

umgeschrieben werden. Durch Berechnung der Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  zu  $\varphi$  steht auf der linken Seite der Ungleichung

$$\beta_{\text{impr}} = P(\underline{T}_m \leq \varphi^{-1}(\rho_{\text{crit}}) | H_1) \quad (4.76)$$

nur noch der Mittelpunkt der Teststatistik. Ist die Dichtefunktion  $\rho_{H_1}$  des Mittelpunktes der Testgröße unter der Alternativhypothese bekannt, so führt diese Vorgehensweise auf den Vergleich der Quantile für einen Fehler 1. und 2. Art:

$$\rho_{1-\alpha_{\text{impr}}} = \rho_{H_1, \beta_{\text{impr}}}, \quad (4.77)$$

mit  $\rho_{H_1, \beta_{\text{impr}}}$  dem Quantil für einen Fehler 2. Art. Die Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}(\rho_{\text{crit}})$  für den Grad der Verwerfung  $\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T})$  der Nullhypothese muss dabei i. A. wieder numerisch bestimmt werden. Unterscheidet sich die Dichtefunktion für  $\underline{T}_m$  unter der Nullhypothese und Alternativhypothese nur um den Nichtzentralitätsparameter, kann Gleichung (4.77) auch über den Nichtzentralitätsparameter  $\lambda_{\text{impr}}$  im unscharfen Fall ausgedrückt werden:

$$\rho_{1-\alpha_{\text{impr}}} = \rho_{\beta_{\text{impr}}}(\lambda_{\text{impr}}). \quad (4.78)$$

Eine gemeinsame Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art im unscharfen Fall und des Nichtzentralitätsparameters im unscharfen Fall ist nicht möglich. Die Abbildung 4.10 zeigt die Bestimmung des Quantils  $\rho_{H_1, \beta_{\text{impr}}}$  für  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  bei einem klassischen Annahmebereich und einseitiger Fragestellung. Die obere Schranke des klassischen Annahmebereiches  $r_A = \rho_{1-\alpha}$  wurde mit der präzisen Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  konstruiert.

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art im unscharfen Fall kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

- Schritt 1: Wahl eines sinnvollen Wertes für  $\rho_{\text{crit}}$ .
- Schritt 2: Berechnung der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{impr}}$  im unscharfen Fall (vgl. Kapitel 4.4.1).
- Schritt 3: Wahl eines sinnvollen Nichtzentralitätsparameters  $\lambda_{\text{impr}}$  im unscharfen Fall.
- Schritt 4: Bestimmung von  $\beta_{\text{impr}}$  aus (4.77) bzw. (4.78), bis die beiden Quantile mit einer ausreichenden numerischen Genauigkeit übereinstimmen.

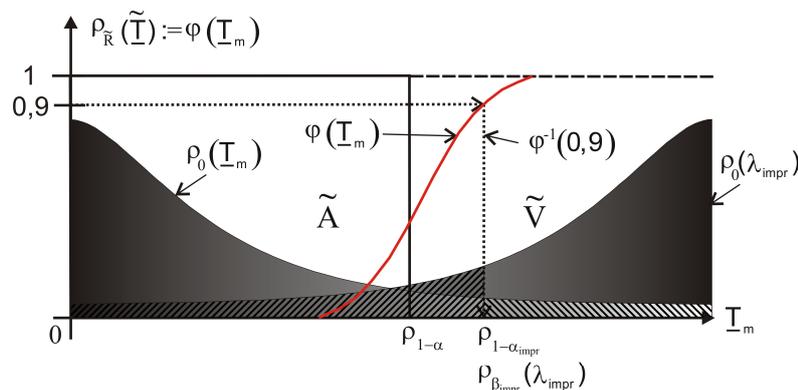


Abbildung 4.10: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit  $\beta_{\text{impr}}$  für einen Fehler 2. Art im unscharfen Fall mit  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$ .

Ein ähnlicher Ablauf ergibt sich für die Bestimmung des Nichtzentralitätsparameters  $\lambda_{\text{impr}}$  im unscharfen Fall:

- Schritt 1: Wahl eines sinnvollen Wertes für  $\rho_{\text{crit}}$ .
- Schritt 2: Berechnung der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{impr}}$  im unscharfen Fall (vgl. Kapitel 4.4.1).
- Schritt 3: Wahl einer sinnvollen Wahrscheinlichkeit  $\beta_{\text{impr}}$  für einen Fehler 2. Art im unscharfen Fall.
- Schritt 4: Bestimmung von  $\lambda_{\text{impr}}$  aus Gleichung (4.78), bis die beiden Quantile mit einer ausreichenden numerischen Genauigkeit übereinstimmen.

Im Falle des *height*-Kriteriums kann für die in Kapitel 4.2.1.1 angegebenen unscharfen Intervalle für die Teststatistik eine Näherungslösung für den Fehler 2. Art formuliert werden.

#### 4.4.2.1 Der Fehler 2. Art bei klassischen Annahmebereichen und dem *height*-Kriterium

Durch Einsetzen der Gleichung für  $\rho_{\tilde{T}}$  aus (4.34) in (4.74) erhält man:

$$\beta_{\text{impr}} = P\left(1 - L_T\left(\frac{|\underline{T}_m| - r_T - r_A}{T_s}\right) \leq \rho_{\text{crit}} \mid H_1\right). \quad (4.79)$$

Eine direkte Auswertung oder Näherungslösung der Formel (4.79) ist in zwei Fällen möglich. Zum einen folgt für  $\lambda_{\text{impr}} = 0$ :

$$\lambda_{\text{impr}} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{\text{impr}} = 1 - \beta_{\text{impr}}, \quad (4.80)$$

zum anderen kann für  $\lambda_{\text{impr}} \gg 0$  folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\rho_{\beta_{\text{impr}}} \approx T_s \cdot L_T^{-1}(1 - \rho_{\text{crit}}) + r_T + r_A - |\lambda_{\text{impr}}| \Rightarrow |\lambda_{\text{impr}}| \approx r_T + r_A - \rho_{\beta_{\text{impr}}} + T_s \cdot L_T^{-1}(1 - \rho_{\text{crit}}). \quad (4.81)$$

Der Nichtzentralitätsparameter enthält im unscharfen Fall einen positiven Term, der für  $T_s = r_T = 0$  oder für  $\rho_{\text{crit}} = r_T = 0$  verschwindet. Durch den positiven Term des Nichtzentralitätsparameters im unscharfen Fall wird die Wahrscheinlichkeit für die Zurückweisung der Nullhypothese für  $r_A = \rho_{1-\alpha}$  verringert.

#### 4.4.2.2 Der Fehler 2. Art bei unscharfen Annahmebereichen und dem *height*-Kriterium

In Analogie zu Kapitel 4.4.2.1 wird die Gleichung für  $\rho_{\tilde{T}}$  aus (4.42) in (4.74) eingesetzt

$$\beta_{\text{impr}} = P\left(1 - L_T\left(\frac{|\underline{T}_m| - r_A - r_T}{T_s + A_s}\right) \leq \rho_{\text{crit}} \mid H_1\right), \quad (4.82)$$

wobei eine direkte Auswertung der Formel wieder in zwei Fällen möglich ist. Zum einen folgt für  $\lambda_{\text{impr}} = 0$ :

$$\lambda_{\text{impr}} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{\text{impr}} = 1 - \beta_{\text{impr}}, \quad (4.83)$$

zum anderen kann für  $\lambda_{\text{impr}} \gg 0$  folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\rho_{\beta_{\text{impr}}} \approx (T_s + A_s) \cdot L_T^{-1}(1 - \rho_{\text{crit}}) + r_T + r_A - |\lambda_{\text{impr}}| \Rightarrow |\lambda_{\text{impr}}| \approx r_T + r_A - \rho_{\beta_{\text{impr}}} + (T_s + A_s) \cdot L_T^{-1}(1 - \rho_{\text{crit}}). \quad (4.84)$$

Der Nichtzentralitätsparameter enthält im unscharfen Fall einen positiven Term, der für  $T_s = A_s = r_T = 0$  oder für  $\rho_{\text{crit}} = r_T = 0$  verschwindet. Durch den positiven Term des Nichtzentralitätsparameters im unscharfen Fall wird die Wahrscheinlichkeit für die Zurückweisung der Nullhypothese für  $r_A = \rho_{1-\alpha}$  verringert. An dieser Stelle wird erneut darauf hingewiesen, dass sich die mathematisch geschlossenen Lösungen nur für gleiche Referenzfunktionen für die Teststatistik und den Annahmebereich berechnen lassen. Die Schnittmengenbildung ungleicher Referenzfunktionen für den Annahmebereich und die Teststatistik führten im Rahmen dieser Arbeit nicht zur geschlossenen Angabe für die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. und 2. Art. Numerische Beispiele für eine Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. und 2. Art im unscharfen Fall werden in Kapitel 7 gezeigt.



## 5 Übertragung der Hypothesentests auf die Modelle der Geodäsie

Die im vorangegangenen Kapitel entwickelten Hypothesentests im Falle unscharfer Daten sollen im Folgenden auf die Standardmodelle der Geodäsie übertragen werden. Dies umfasst im Wesentlichen die lineare Parameterschätzung in einem GMM (vgl. Kapitel 3.3.2.2), da ein GHM gemäß Kapitel 3.3.2.4 in ein GMM überführt werden kann. Da in der klassischen geodätischen Datenanalyse eine Normalverteilung der Beobachtungsergebnisse vorausgesetzt wird, soll in diesem Teil der Arbeit die zufällige Komponente der Unsicherheit auch als normalverteilt angenommen werden. Zunächst wird das Augenmerk dabei auf die Verträglichkeit des aufgestellten Modelles gelegt. Der *Globaltest der Ausgleichung* (engl.: global test of an adjustment) wird in Kapitel 5.2 dahingehend erweitert, dass das gesamte Ausgleichungsmodell bei Vorliegen unscharfer Daten überprüft werden kann. Darauf aufbauend soll die *Allgemeinform einer linearen Hypothese* (engl.: general form of a linear hypothesis) genauer untersucht werden (Kapitel 5.3). Anschließend werden in Kapitel 5.4 einige spezielle Anwendungen wie die *Ausreißersuche* (engl.: outlier detection), die *Modellwahl* (engl.: model selection) und die *Sensitivitätsanalyse* (engl.: sensitivity analysis) eingeführt, die sich aus der Allgemeinform einer linearen Hypothese ableiten lassen.

In Anlehnung an die rein stochastische Vorgehensweise wird dabei auf *quadratische Formen* (engl.: quadratic forms) zurückgegriffen. Wie bei der eindimensionalen Vorgehensweise kann die Teststatistik mit einem Annahme- und Verwerfungsbereich verglichen werden. Hierfür wird auf die in Kapitel 4.2 erläuterten Testkriterien zurückgegriffen, wobei die Annahme- und Verwerfungsbereiche im Falle mehrdimensionaler Hypothesentests mit Hilfe der  $\chi^2$ -, F- oder  $\tau^2$ -Verteilungen konstruiert werden.

Standardwerke auf dem Gebiet des Globaltestes und der linearen Hypothesen in der klassischen geodätischen Datenanalyse sind KOCH (2004), JÄGER ET AL. (2005) und NIEMEIER (2008). In NIEMEIER (1985) und HECK (1986) wird die Sensitivitätsanalyse erläutert. Auf die Fehler 1. und 2. Art im unscharfen Fall wird nicht eingegangen, da direkt die in Kapitel 4.4 erläuterten Methoden angewandt werden können. Simulierte und reale Beispiele hierzu findet der Leser in Kapitel 7, insbesondere bei dem Kongruenzfall der Deformationsanalyse in Kapitel 7.2.

### 5.1 Quadratische Formen

Quadratische Formen stellen das Grundgerüst für Hypothesentests in der linearen Parameterschätzung dar. Eine quadratische Form ist durch die Funktion  $f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (KOCH, 2004, S. 48):

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (5.1)$$

definiert, wobei  $\mathbf{x}$  einen  $n \times 1$  Vektor und  $\mathbf{A}$  eine symmetrische  $n \times n$  Matrix darstellen. In Hypothesentests ist die Definitheit der Matrix  $\mathbf{A}$  von Bedeutung. Sie wird mit  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  für:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad (5.2)$$

positiv definit und für

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad (5.3)$$

als positiv semidefinit bezeichnet<sup>7</sup> (KOCH, 2004, S. 50). Quadratische Formen mit positiv definiten (mindestens positiv semidefiniten), symmetrischen Matrizen, stellen kontinuierliche Funktionen dar. Sie sind jedoch weder eineindeutig noch eindeutig, d. h. ausgewählte Kombinationen des Vektors  $\mathbf{x}$  können im Allgemeinen zur gleichen Ergebnismenge  $\mathbf{y}$  führen.

#### 5.1.1 Erwartungswert und Verteilung quadratischer Formen

Sei  $\mathbf{x}$  ein Zufallsvektor mit Erwartungswert  $E[\mathbf{x}] = \bar{\mathbf{x}}$  und Dispersionsmatrix  $D[\mathbf{x}] = \Sigma_{\mathbf{xx}}$ , so gilt für den Erwartungswert  $E[\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}]$  der quadratischen Form (KOCH, 2004, S. 145f):

$$E[\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}] = \text{sp}(\mathbf{A} \Sigma_{\mathbf{xx}}) + \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}. \quad (5.4)$$

Sei weiterhin  $\mathbf{x}$  normalverteilt mit  $\mathbf{x} \sim N(\bar{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{xx}})$ , so folgt  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  einer nichtzentralen  $\chi^2$ -Verteilung mit  $f = \text{rg}(\mathbf{A})$  Freiheitsgraden (KOCH, 2004, S. 146f):

<sup>7</sup> Negativ (semi-) definite quadratische Formen sind im Rahmen dieser Arbeit nicht von Bedeutung.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \sim \chi^2(\text{rg}(\mathbf{A}), \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}) = \chi^2(f, \lambda), \quad (5.5)$$

wenn  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}_{xx}$  idempotent ist. Die jeweiligen Beweise können in KOCH (2004) nachgelesen werden.

Ist  $\mathbf{y}$  normalverteilt mit  $\mathbf{y} \sim N(\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{yy})$  und  $\mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} \sim \chi^2(\text{rg}(\mathbf{B}), \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0})$  eine zweite quadratische Form, so folgt der Quotient aus beiden (KOCH, 2004, S. 141):

$$\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \cdot \text{rg}(\mathbf{B})}{\mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} \cdot \text{rg}(\mathbf{A})} \sim F(\text{rg}(\mathbf{A}), \text{rg}(\mathbf{B}), \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}) = F(f_1, f_2, \lambda) \quad (5.6)$$

einer F-Verteilung mit  $f_1 = \text{rg}(\mathbf{A})$  und  $f_2 = \text{rg}(\mathbf{B})$  Freiheitsgraden sowie dem Nichtzentralitätsparameter  $\lambda = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}$ , sofern Zähler und Nenner der Gleichung (5.6) stochastisch unabhängig sind.

### 5.1.2 Optimierung quadratischer Formen

Im Vorgriff auf die noch folgenden Ausführungen werden alle mehrdimensionalen Hypothesentests mit unscharfen Daten in diesem Kapitel mit Hilfe von quadratischen Formen in einem  $\alpha$ -Schnitt-Optimierungsverfahren nach Kapitel 4.3 mit  $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  durchgeführt. Im Folgenden soll daher kurz diskutiert werden, welche Eigenschaften einer quadratischen Form für eine möglichst effiziente  $\alpha$ -Schnitt-Optimierung wichtig sind. Es muss zwischen dem Einsatz lokaler und globaler Optimierungsverfahren unterschieden werden. Globale Optimierungsverfahren identifizieren die korrekten Minima und Maxima, haben jedoch Defizite im Hinblick auf den erforderlichen Rechenaufwand. In der Geodäsie wird man es aber zumeist mit einer Vielzahl an heterogenen Beobachtungen zu tun haben, sodass die Berechnungsdauer bei hochdimensionalen globalen Optimierungsaufgaben schnell ansteigen kann. Wirtschaftlicher sind hier lokale Optimierungsverfahren, die bei bekannten Näherungswerten für das globale Maximum oder Minimum, bzw. bei Konvexität der zu optimierenden Funktion verwendet werden können. Aus diesem Grund ist zu prüfen, ob eine quadratische Form eine (streng) konvexe Funktion in den Intervallboxen  $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  darstellt.

In der linearen Parameterschätzung können in den Hypothesentests immer symmetrische Matrizen  $\mathbf{A}$  vorausgesetzt werden. Zudem hat man es immer mit mindestens positiv semidefiniten oder bei regulären linearen Ausgleichungsproblemen mit positiv definiten quadratischen Formen zu tun, sodass im Folgenden nur zwischen diesen beiden Fällen unterschieden werden muss (vgl. z. B. KOCH, 2004). Des Weiteren kann beim Betrachten einer quadratischen Form  $y = f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  ohne Anwendung von Ableitungen gezeigt werden, dass die Funktion  $f(\mathbf{x})$  genau dann (streng) konvex ist, wenn die Matrix  $\mathbf{A}$  positiv (semi-) definit ist (BRONSTEIN ET AL., 2000, S. 887f). Dies lässt sich auch leicht anhand einer Hauptachsentransformation zeigen, die die Matrix  $\mathbf{A}$  in eine Diagonalmatrix überführen kann. Die Elemente der Hauptdiagonalen (Eigenwerte) der Matrix  $\mathbf{A}$  sind stets positiv bzw. Null, sodass die Semidefinitheit der Matrix  $\mathbf{A}$  gezeigt ist (BRONSTEIN ET AL., 2000, S. 292 und KOCH, 2004, S. 48f).

Diese Eigenschaften grenzen die Suchalgorithmen für die Minima und Maxima der  $\alpha$ -Schnitt-Optimierung ein. Aus der Kenntnis der Konvexität kann geschlossen werden, dass die Bestimmung des globalen Minimums für die quadratische Form für  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  Parallelen zur Lösung der Minimierungsforderung einer Ausgleichungsaufgabe darstellt. Ist die quadratische Form streng konvex, so existiert genau eine Lösung (BRONSTEIN ET AL., 2000, S. 887), die auf einer Ecke der Hyperbox  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  liegt, sofern die Teilmenge  $\mathbf{x}$  abgeschlossen ist. Zur Suche nach dem globalen Maximum der quadratischen Form können numerische Verfahren, wie z. B. das Newton-Verfahren (vgl. BRONSTEIN ET AL., 2000, S. 893) verwendet werden. Als Startpunkt dieses iterativen Verfahrens bieten sich beliebige Eckpunkte der jeweiligen Intervallbox für  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  an. Aufgrund der konvexen Eigenschaften der verwendeten quadratischen Formen kann ein lokales  $\alpha$ -Schnitt-Optimierungsverfahren verwendet werden. Jedoch muss beachtet werden, dass die quadratischen Formen in der Geodäsie nicht immer streng monotone Funktionen sind, sondern nur konvexe Funktionen, da auch semipositiv definite Matrizen  $\mathbf{A}$  auftreten. In diesem Fall existieren mehrere Lösungen in  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ , die den gleichen Funktionswert für das Minimum erzeugen (Die Lösung kann im Nullraum der Matrix  $\mathbf{A}$  beliebig variiert werden).

Die Optimierung quadratischer Formen mit mindestens semipositiv definiten Matrizen  $\mathbf{A}$  ist mit jeder Standard-Optimierungssoftware möglich. In dieser Arbeit wurde auf zwei verschiedene Bibliotheken zurückgegriffen. Zum einen auf die MATLAB<sup>®</sup>-Funktion "quadprog", die ein lokales rekursives Newton-Verfahren anwendet (vgl. COLEMAN und LI, 1996) und zum anderen auf die Software "Solver Platform SDK V7.2" der Firma "Frontline", die bei hochdimensionalen Aufgaben effizienter als MATLAB<sup>®</sup> arbeitet.

### 5.1.3 Unabhängigkeit von der Orientierung des Koordinatenrahmens

Bei der klassischen geodätischen Netztheorie hängen die stochastischen Unsicherheitsmaße, bspw. für Punktkoordinaten, von der Geometrie des Netzes (inkl. Topologie), von dem gewählten Datum und von dem verwendeten Messinstrumentarium ab (vgl. z. B. PELZER, 1985). Dies führt dazu, dass die in Kapitel 5.2 und 5.3 eingeführten quadratischen Formen für die klassischen Hypothesentests ebenfalls von den oben genannten Größen beeinflusst werden. Durch die Erweiterung der quadratischen Formen auf den unscharfen Fall sollten keine weiteren Abhängigkeiten, bspw. durch die Orientierung des Koordinatenrahmens, hervorgerufen werden.

Denn gerade hier bestand ein Kritikpunkt bei der Intervallauswertung von geodätischen Netzen. Durch die Orientierung des Koordinatenrahmens variieren die Intervallboxen, die als Kenngrößen für die Quantifizierung der Impräzision bzw. Unschärfe von Parametern dienen (vgl. SCHÖN, 2003, S. 69). Dieser Mangel wurde, wie in Kapitel 3.3.3 erläutert, durch die Verwendung von Zonotopen behoben (vgl. auch SCHÖN, 2003 sowie SCHÖN und KUTTERER, 2005b). Führt man demnach eine direkte Intervallauswertung der in Kapitel 5.3 gegebenen rein stochastischen quadratischen Formen mit einer Intervallbox für die Parameter oder Beobachtungen aus, führt dies zu einer Abhängigkeit der Ergebnisse von der Orientierung des Koordinatenrahmens. Darüber hinaus kommt es aufgrund der mehrfachen Abbildung eines unscharfen Vektors zu einer Überschätzung des eigentlichen Wertebereiches für die Teststatistiken.

Durch die Umformung der quadratischen Formen bei dem Globaltest der Ausgleichung bzw. bei der Allgemeinform der linearen Hypothese auf die Einflussfaktoren der Impräzision kann eine Überschätzung und eine Abhängigkeit von der Orientierung des Koordinatenrahmens vermieden werden. Dies ist leicht einzusehen: Im Vorgriff auf die noch folgenden Ausführungen in Kapitel 5.2 und 5.3 stellen alle Teststatistiken eine quadratische Form gemäß Formel (5.1) oder (5.6) dar, wobei  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  die Parameter und  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  ihre zugehörige VKMen sein werden. Im Falle einer unscharfen Auswertung stellen die Wertebereiche  $W_x$  und  $W_y$  von  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  Zonotope dar (vgl. Kapitel 3.3.3), auf deren Grundlage mit dem Erweiterungsprinzip eine unscharfe Teststatistik zu konstruieren ist. Die Wertebereiche  $W_x$  und  $W_y$  sind unabhängig von der Orientierung des Koordinatenrahmens (Schön 2003, S. 69ff), sodass auch die quadratische Form nicht zusätzlich durch die unscharfe Auswertung beeinflusst ist, da für die VKMen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  die Informationen einer rein stochastischen Analyse zu Grunde liegen.

Aus dieser Tatsache ergeben sich für den Fall der linearen Parameterschätzung zwei Möglichkeiten für die Konstruktion der unscharfen Teststatistiken gemäß Formel (4.57). Zum einen kann zunächst eine Bestimmung des Wertebereiches der Parameter durchgeführt werden, der anschließend bei der Konstruktion der Teststatistik als Restriktion berücksichtigt wird, sodass die unscharfen Parameter lediglich im Wertebereich (Zonotop) variieren dürfen. Zum anderen können die quadratischen Formen auf die Einflussfaktoren der Impräzision bzw. Unschärfe umgestellt werden, sodass nicht das Problem der Überschätzung auftritt und die auf diesem Wege konstruierte quadratische Form direkt mit dem  $\alpha$ -Schnitt-Optimierungsverfahren aus Kapitel 4.3 ausgewertet wird. In dieser Arbeit wird die zweite Möglichkeit verwendet, um die u. U. komplexe Formulierung der Restriktionen für den Wertebereich der Parameter umgehen zu können. Des Weiteren muss überlegt werden, wie die Dimensionen der zu testenden quadratischen Formen ist. Sind wesentlich mehr Einflussfaktoren als zu testende Parameter vorhanden, kann eine Auswertung auf Basis der Parameter zu einer signifikanten Reduktion der notwendigen Rechenzeit führen. Dies ist im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht der Fall, sodass eine Rückführung der quadratischen Formen auf die Einflussfaktoren gerechtfertigt ist. Diese Vorgehensweise soll in den folgenden Unterkapiteln angewandt werden.

## 5.2 Globaltest der Ausgleichung für ein Gauß-Markov-Modell bei Unschärfe

Der Globaltest dient dazu, die Verträglichkeit der Beobachtungsergebnisse mit dem stochastischen und funktionalen Modell einer Ausgleichung zu überprüfen. Sei der a-posteriori Varianzfaktor  $\hat{\sigma}_0^2$  aus Formel (3.76) eine erwartungstreue Schätzung des a-priori Varianzfaktors  $\sigma_0^2$  der Ausgleichung aus Formel (3.71), kann die Qualität des gewählten linearen Ausgleichungsansatzes aus Kapitel 3.3.2.2 mit einer statistischen Verträglichkeitsuntersuchung von  $\hat{\sigma}_0^2$  mit  $\sigma_0^2$  überprüft werden. Unter der Nullhypothese ist der Erwartungswert der Beobachtungsergebnisse  $E[\mathbf{y}]$  eine Linearkombination der Parameter:

$$H_0 : E[\mathbf{y}] = \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}\mathbf{d}\mathbf{0} \quad \text{vs.} \quad H_1 : E[\mathbf{y}] \neq \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}\mathbf{d}\mathbf{0}. \quad (5.7)$$

Ausgangspunkt zur Überprüfung der Nullhypothese ist der bei der Schätzung berechnete Minimalwert für die Verbesserungsquadratsumme  $\hat{\Omega}$  der Ausgleichung, der sich aus den Beobachtungsergebnissen mit Formel (3.72):

$$\hat{\Omega} = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_{yy} \hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{Ad}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{d}\mathbf{y})^T \mathbf{P}_{yy} (\mathbf{Ad}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{d}\mathbf{y}) \quad (5.8)$$

berechnen lässt. Durch Einsetzen von (3.74) in (5.8) und unter Berücksichtigung von (3.75) kann nach ein paar Zwischenschritten die Verbesserungsquadratsumme somit vollständig als Funktion der gekürzten Beobachtungsergebnisse ausgedrückt werden (KOCH, 2004):

$$\hat{\Omega} = \mathbf{d}\mathbf{y}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{d}\mathbf{y}. \quad (5.9)$$

Unter der Nullhypothese folgt die Testgröße  $T = \hat{\Omega}/\sigma_0^2$  mit (5.5) nach KOCH (2004, S. 297) als Quotient aus  $\hat{\Omega}$  und dem a-priori Varianzfaktor  $\sigma_0^2$  einer zentralen  $\chi^2$ -Verteilung mit  $f$  Freiheitsgraden:

$$T = \tau(y_1, \dots, y_n) = \frac{\hat{\Omega}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(f, \lambda = 0) \quad \text{und} \quad f = n - u + d. \quad (5.10)$$

Mit dem Quantil  $\chi^2_{1-\alpha}(f, \lambda = 0)$  gilt unter  $H_0$  somit die Wahrscheinlichkeitsbeziehung für die Teststatistik:

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{\hat{\Omega}}{\sigma_0^2} = \frac{\mathbf{d}\mathbf{y}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{d}\mathbf{y}}{\sigma_0^2} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_{yy} \hat{\mathbf{v}}}{\sigma_0^2} = \frac{f \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha}(f, \lambda = 0) | H_0 \right\} = \alpha. \quad (5.11)$$

Ist der Wert Teststatistik  $\hat{T} = \hat{\Omega}/\sigma_0^2$  größer als das zugehörige Quantil  $\chi^2_{1-\alpha}(f, \lambda = 0)$ , so wird die Nullhypothese aus Formel (5.7) mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von  $1 - \alpha$  verworfen:

$$\hat{T} = \frac{\hat{\Omega}}{\sigma_0^2} \begin{cases} \leq \\ > \end{cases} \chi^2_{1-\alpha}(f, \lambda = 0) \Rightarrow \begin{cases} \text{Nullhypothese annehmen,} \\ \text{Nullhypothese verwerfen.} \end{cases} \quad (5.12)$$

Ein Verwerfen der Nullhypothese kann durch die folgenden Ursachen begründet sein:

- Es liegt kein korrektes funktionales Modell vor.
- Das stochastische Modell ist zu optimistisch gewählt worden, d. h. das Instrumentarium, der Beobachter, die Messbedingungen, etc. wurden mit nicht korrekt angesetzt.
- Ausreißer oder systematische Abweichungen in den Beobachtungen führen zu einer verzerrten Schätzung für  $\hat{\sigma}_0^2$  (siehe auch Kapitel 5.4.1).

Durch die durchgeführte Umformung der quadratischen Form der Verbesserungen aus Formel (5.9) auf die gekürzten Beobachtungsergebnisse kann unmittelbar ein Übergang von den klassischen Hypothesentests auf Hypothesentests mit unscharfen Daten erfolgen. Im unscharfen Fall ist, wie in Kapitel 3.3.1 begründet, die gekürzte Beobachtung Träger von zufälliger Variabilität und Unschärfe (Impräzision). Die Unschärfe der Beobachtungen wird dabei durch die Unschärfe der Einflussfaktoren hervorgerufen (vgl. Formel (3.64)). Die für die Herleitung der unscharfen Teststatistik  $\tilde{T}$  notwendige Funktion  $\tau(p_1, \dots, p_j, y_1, \dots, y_n)$  für die  $\alpha$ -Schnitt-Optimierung im mehrdimensionalen Fall aus Formel (4.59) folgt durch Einsetzen von (3.64) in (5.10):

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\alpha, \min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \tau(p_1, \dots, p_j, y_1, \dots, y_n) \right), \\ &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( (\mathbf{d}\mathbf{y} + \mathbf{F}\mathbf{p})^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) (\mathbf{d}\mathbf{y} + \mathbf{F}\mathbf{p}) / \sigma_0^2 \right), \\ &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F}\mathbf{p} + 2\mathbf{d}\mathbf{y}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F}\mathbf{p} + \underbrace{\mathbf{d}\mathbf{y}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{d}\mathbf{y}}_{\text{const}} \right] / \sigma_0^2 \right), \\ \tilde{T}_{\alpha, \max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \tau(p_1, \dots, p_j, y_1, \dots, y_n) \right), \\ &= \max_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F}\mathbf{p} + 2\mathbf{d}\mathbf{y}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F}\mathbf{p} + \underbrace{\mathbf{d}\mathbf{y}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{d}\mathbf{y}}_{\text{const}} \right] / \sigma_0^2 \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

bzw. als quadratische Form:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha, \min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha}]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\tilde{v}\tilde{v}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\tilde{v}\tilde{v}} \mathbf{P}_{yy}) \\ (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\tilde{v}\tilde{v}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\tilde{v}\tilde{v}} \mathbf{P}_{yy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sigma_0^2}, \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha, \max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha}]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\tilde{v}\tilde{v}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\tilde{v}\tilde{v}} \mathbf{P}_{yy}) \\ (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\tilde{v}\tilde{v}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\tilde{v}\tilde{v}} \mathbf{P}_{yy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sigma_0^2}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

sowie

$$m_{\tilde{\Gamma}}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\tilde{\Gamma}_{\alpha}}(x) \quad \text{mit} \quad i_{\tilde{\Gamma}_{\alpha}} = \left[ \tilde{\Gamma}_{\alpha, \min}, \tilde{\Gamma}_{\alpha, \max} \right]. \tag{5.15}$$

Alle Minimierungs- und Maximierungsprobleme sind bezüglich der Einflussfaktoren  $\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha}] = [\tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, \min}, \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, \max}]$  durchzuführen, sodass nicht immer explizit darauf eingegangen wird. Für die numerische Bestimmung von  $\tilde{\Gamma}_{\alpha} = [\tilde{\Gamma}_{\alpha, \min}, \tilde{\Gamma}_{\alpha, \max}]$  können die in Kapitel 5.1.2 angegebenen Verfahren für die Minimierung und Maximierung von quadratischen Formen angewandt werden. Die Bedeutung und Definition der Matrix  $\mathbf{F}$  ist in Kapitel 3.3.1 erläutert. Die endgültige Testentscheidung erfolgt durch die in Kapitel 4, insbesondere in Kapitel 4.2, vorgestellten Verfahren. Auf eine detaillierte Erläuterung der Auswertung des Hypothesentests und der damit verbundenen Testentscheidung sowie der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. und 2. Art wird an dieser Stelle verzichtet. Ausführliche Beispiele werden in Kapitel 7 behandelt. In Abbildung 5.1 ist der komplette Ablauf einer Ausgleichung im GMM und des Globaltestes der Ausgleichung in der linearen Parameterschätzung mit Bezug auf den Ablauf eines Hypothesentests aus Kapitel 4.1.2 zusammengestellt. Alle in Abbildung 5.1 grün gekennzeichneten Arbeitsschritte sind gegenüber einer rein stochastischen Vorgehensweise zusätzlich durchzuführen.

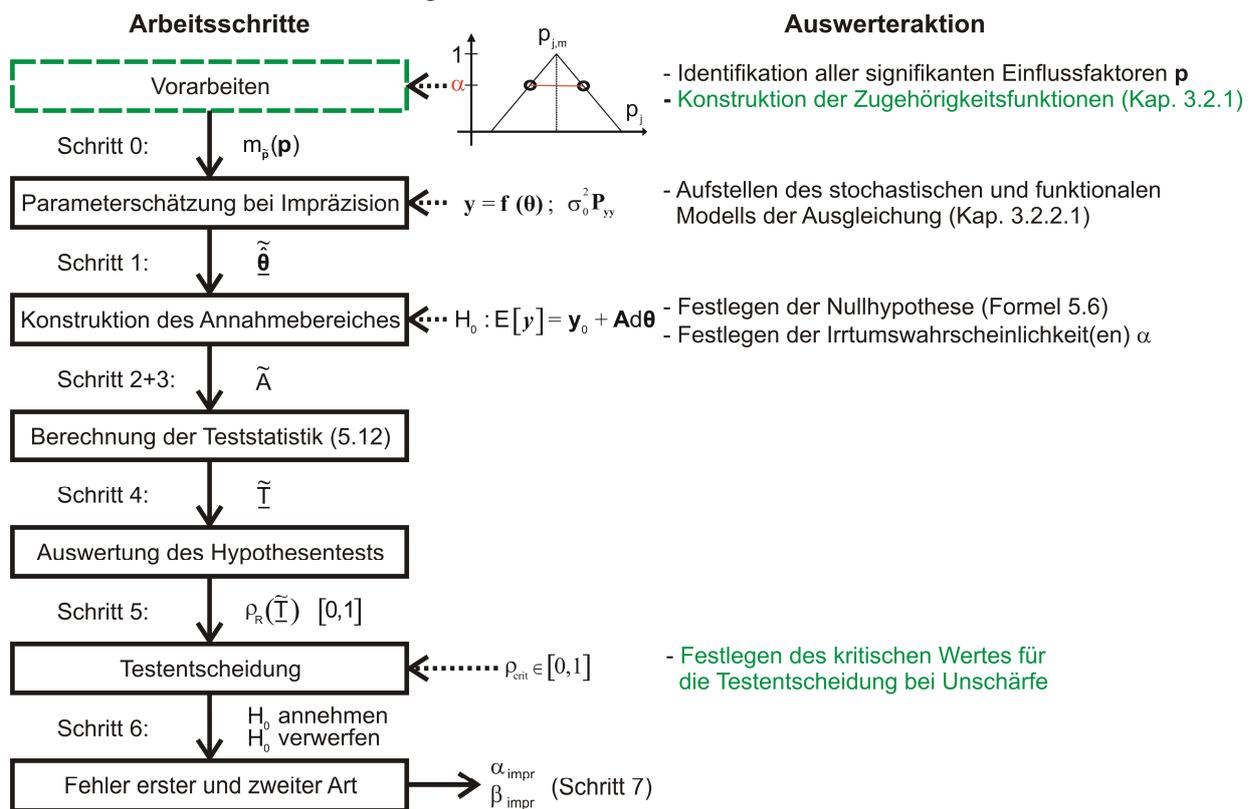


Abbildung 5.1: Ablaufdiagramm für einen Globaltest der Ausgleichung in der linearen Parameterschätzung.

### 5.3 Allgemeinform einer linearen Hypothese mit unscharfen Daten

Mit der Allgemeinform der linearen Hypothese ist das Testen von einzelnen Parametern oder Linearkombinationen von Parametern möglich (z. B. KOCH, 2004, S. 304). Sie ist somit ein sehr mächtiges Werkzeug für Hypothesentests in linearen GMM. Dabei muss die Hypothese nicht zwingend in linearer Form vorliegen, sondern kann auch durch Linearisierung erhalten werden. In diesem Kapitel soll eine Erweiterung der klassischen Hypothesentests basierend auf der Allgemeinform einer linearen Hypothese hergeleitet werden. Im Folgenden werden dann alle weiteren Anwendungen auf diese Form zurückgeführt, sodass immer auf dieses

Kapitel verwiesen werden kann. Lediglich der Globaltest der Ausgleichung aus Kapitel 5.2 stellt einen Spezialfall dar, da er das gesamte Modell überprüft und daher nicht mit einer linearen Hypothese behandelt werden kann. Folglich muss zweigeteilt vorgegangen werden:

- i) Zunächst muss das Ausgleichungsmodell mit dem Globaltest überprüft werden (Kapitel 5.2).
- ii) Danach können einzelne Parameter oder Linearkombinationen von Parametern mittels der linearen Hypothese aus diesem Kapitel überprüft werden.

Da der Rechenaufwand im Falle einer unscharfen Datenanalyse steigt, werden zwei Formen der linearen Hypothese vorgestellt. Zum einen die lineare Hypothese in einem Standard GMM (Kapitel 5.3.2) und zum anderen in einem erweiterten GMM (Kapitel 5.3.3), um eine u. U. notwendige erneute Ausgleichung zu vermeiden. Die Darstellung orientiert sich tlw. an NEUMANN und KUTTERER (2009).

### 5.3.1 Testablauf und Testentscheidung bei einer allgemeinen linearen Hypothese

In den Kapiteln 5.3.2 und 5.3.3 wird die Konstruktion der unscharfen Teststatistiken für eine lineare Hypothese in einem GMM und einem erweiterten GMM gezeigt. Vorab soll jedoch schon der Testablauf für eine lineare Hypothese mit unscharfen Daten aufgezeigt werden. Dem Leser soll dabei insbesondere verdeutlicht werden, welche der eingeführten quadratischen Formen für die Konstruktion einer unscharfen Teststatistik zu verwenden ist. Der Entscheidungsbaum in Abbildung 5.2 gibt einen generellen Überblick. Zunächst müssen, wie bereits in Kapitel 3.3.1 erläutert, die Einflussfaktoren auf die Impräzision identifiziert und deren Größenordnung abgeschätzt werden. Des Weiteren ist das funktionale und stochastische Modell der Ausgleichung aufzustellen. Darauf aufbauend folgt der in Kapitel 5.2 erläuterte Globaltest der Ausgleichung. Wird der Globaltest der Ausgleichung nicht bestanden, so können zum einen entweder das funktionale und stochastische Modell oder die Einflussfaktoren auf die Impräzision kritisch hinterfragt werden. Zum anderen kann im Vorgriff auf die noch folgenden Ausführungen in Kapitel 5.4.1 eine Ausreißeridentifikation vorgenommen werden.

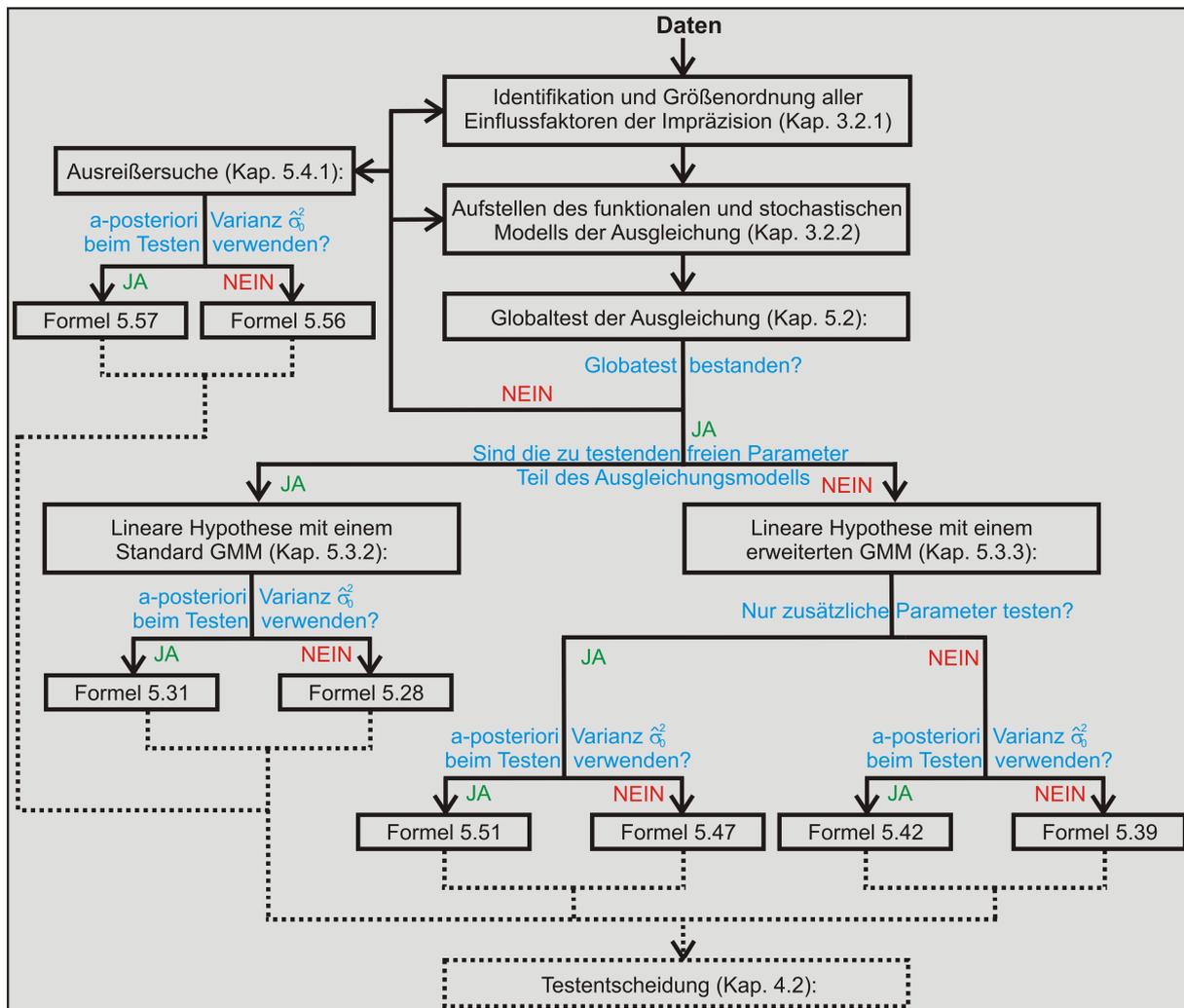


Abbildung 5.2: Entscheidungsbaum für die zu verwendende lineare Hypothese bei Unschärfe.

Im Falle des bestandenen Globaltests können Linearkombinationen von Parametern, z. B. für die Modellwahl oder die Sensitivitätsanalyse, erfolgen. Dabei wird unterschieden, ob die zu testenden Parameter bereits in dem GMM enthalten sind oder nicht. Bei der Modellwahl kann bspw. getestet werden, ob das Modell durch zusätzliche (freie) Parameter (d. h. die Modellparameter sind nicht im Standard GMM enthalten) im stochastischen Sinne signifikant besser beschrieben werden kann oder ob die Reduktion von freien Parametern (d. h. die Parameter sind bereits im Standard GMM enthalten) im stochastischen Sinne sinnvoll ist. Sollen zusätzliche Parameter getestet werden, gibt es eine weitere Fallunterscheidung: Es muss entschieden werden, ob zusätzliche Parameter allein oder gemeinsam mit den ursprünglichen Parametern getestet werden sollen. Diese Fallunterscheidung ist auf Grund der deutlichen Reduzierung des Rechenaufwandes bei der Konstruktion der Teststatistik sinnvoll, wenn nur zusätzliche Parameter getestet werden. Bei allen Berechnungen muss entschieden werden, ob der Hypothesentest mit dem a-priori oder dem a-posteriori Varianzfaktor durchgeführt werden soll.

### 5.3.2 Die lineare Hypothese in einem Standard GMM mit unscharfen Daten

Das standard GMM der Parameterschätzung ist durch die Formeln (3.70) und (3.71) mit dem Erwartungswert  $E[\mathbf{y}]$  und der Dispersionsoperator  $D[\mathbf{y}]$  der Beobachtungen vollständig definiert:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y}] &= \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}d\boldsymbol{\theta}, \\ D[\mathbf{y}] &= \boldsymbol{\Sigma}_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{P}_{yy}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Mit Hilfe der Selektionsmatrix  $\mathbf{C}$  werden unter der Nullhypothese  $H_0$  verschiedene Linearkombinationen der Parameter als identisch zum  $r \times 1$  Vektor  $\mathbf{w}$  angenommen:

$$H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}. \quad (5.17)$$

Nach (Koch 2004, S. 304) muss die  $r \times u$  Matrix  $\mathbf{C}$  den vollen Zeilenrang besitzen und es muss sich bei  $\mathbf{C}\boldsymbol{\theta}$  um eine schätzbare Funktion handeln. Die in (5.17) eingeführte Gleichung versteht sich als Restriktion in dem Modell (5.16). Aus der Nullhypothese ergibt sich unmittelbar die Alternativhypothese  $H_1$ :

$$H_1 : \mathbf{C}\boldsymbol{\theta} = \bar{\mathbf{w}} \neq \mathbf{w}. \quad (5.18)$$

Die Minimierungsforderung des GMM mit der Restriktion aus Formel (5.17) lautet mit dem Korrelatenvektor  $\mathbf{k}$  im Falle der MkQ und mit linearisierter Restriktion:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{v} + 2\mathbf{k}(\mathbf{C}d\boldsymbol{\theta} - \mathbf{w}) \rightarrow \min. \quad (5.19)$$

Für die Lösung ist das Normalgleichungssystem aus (3.74) entsprechend zu erweitern und ergibt sich durch Taylorreihenentwicklung erster Ordnung von (5.19) zu (KOCH, 2004, S. 187):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\hat{\boldsymbol{\theta}}_R \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Die geschätzten Parameter<sup>8</sup>  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_R$  des GMMs mit Restriktionen und ihre Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_R \hat{\boldsymbol{\theta}}_R}$  lassen sich aus Formel (5.20) berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_R &= \boldsymbol{\theta}_0 + (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \left\{ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} d\mathbf{y} + \mathbf{C}^T \left[ \mathbf{C} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C}^T \right]^{-1} \left[ \mathbf{w} - \mathbf{C} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} d\mathbf{y} \right] \right\}, \\ \mathbf{Q}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_R \hat{\boldsymbol{\theta}}_R} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ - (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C}^T \left[ \mathbf{C} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C}^T \right]^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Die geschätzte Verbesserungsquadratsumme  $\hat{\Omega}_R$  für das GMM mit Restriktionen folgt mit  $d\hat{\boldsymbol{\theta}}_R = \hat{\boldsymbol{\theta}}_R - \boldsymbol{\theta}_0$  zu:

$$\hat{\Omega}_R = (\mathbf{A}d\hat{\boldsymbol{\theta}}_R - d\mathbf{y})^T \mathbf{P}_{yy} (\mathbf{A}d\hat{\boldsymbol{\theta}}_R - d\mathbf{y}). \quad (5.22)$$

Aufgrund der Restriktion im Ausgangsmodell (5.16) ist die Verbesserungsquadratsumme  $\hat{\Omega}_R$  des Modells mit einem Zuschlag  $\hat{\Omega}_z$  zu der ursprünglichen Verbesserungsquadratsumme  $\hat{\Omega}$  für ein GMM (vgl. Formel (5.8)) behaftet:

<sup>8</sup> Der Index R bei  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_R$ ,  $\hat{\Omega}_R$ , etc. steht für das GMM mit „R“-Restriktionen.

$$\hat{\Omega}_R = \hat{\Omega} + \hat{\Omega}_Z. \quad (5.23)$$

Der geschätzte Zuschlag  $\hat{\Omega}_Z$  zu der ursprünglichen Verbesserungsquadratsumme lässt sich nach KOCH (2004, S. 189) berechnen zu:

$$\hat{\Omega}_Z = (\mathbf{C}\mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{w})^T \left[ \mathbf{C}(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C}^T \right]^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{w}). \quad (5.24)$$

Mit Hilfe der linearen Hypothese kann der geschätzte Zuschlag  $\hat{\Omega}_Z$  zur Verbesserungsquadratsumme mit Hilfe der Teststatistik  $\hat{R} = \hat{\Omega}_Z / \sigma_0^2$  auf Signifikanz geprüft werden:

$$\hat{R} = (\mathbf{C}\mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{w})^T \left[ \mathbf{C}(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C}^T \right]^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{w}) / \sigma_0^2 \sim \chi^2(h, \lambda = 0) \text{ unter } H_0. \quad (5.25)$$

Die Testgröße  $R$  folgt unter der Nullhypothese aus (5.17) einer zentralen  $\chi^2$ -Verteilung mit  $h = \text{rg} \left[ \mathbf{C}(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C}^T \right]$  Freiheitsgraden.

Für die lineare Hypothese mit unscharfen Daten muss die Gleichung (5.25) als Funktion der Beobachtungen umgeformt werden. Ansonsten würde die mehrfache Abbildung eines unscharfen Vektors unwillkürlich zu einer Überschätzung der vorhandenen Unschärfe führen. Setzt man für  $\mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$  (KOCH, 2004, S. 190) und formt auf die Beobachtungen um, so erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{R} = & \left\{ \mathbf{d}\mathbf{y}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C} \left[ \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{d}\mathbf{y} \dots \right. \\ & \left. \dots - 2\mathbf{w}^T \left[ \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{d}\mathbf{y} + \mathbf{w}^T \left[ \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{w} \right\} / \sigma_0^2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Für die Auswertung im Falle vorliegender Unschärfe kann unter Einführung von  $\mathbf{D} = \left[ \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C} \right]^{-1}$  und  $\mathbf{K} = \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy}$  für das  $\alpha$ -Schnitt-Optimierungsverfahren aus Kapitel 4.3 damit geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha, \min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\tilde{p}_\alpha]} \left( \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} \mathbf{p} + 2\mathbf{d}\mathbf{y}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} \mathbf{p} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} \mathbf{p} + \underbrace{\mathbf{d}\mathbf{y}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{y} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{y} + \mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{w}}_{\text{const}} \right] \right) / \sigma_0^2, \\ \tilde{R}_{\alpha, \max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\tilde{p}_\alpha]} \left( \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} \mathbf{p} + 2\mathbf{d}\mathbf{y}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} \mathbf{p} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} \mathbf{p} + \underbrace{\mathbf{d}\mathbf{y}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{y} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{y} + \mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{w}}_{\text{const}} \right] \right) / \sigma_0^2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

oder äquivalent als quadratische Form (NEUMANN und KUTTERER, 2009):

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha, \min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\tilde{p}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} & -\mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} & -\mathbf{K}^T \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & -\mathbf{D} \mathbf{K} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sigma_0^2}, \\ \tilde{R}_{\alpha, \max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\tilde{p}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} & -\mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} & -\mathbf{K}^T \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & -\mathbf{D} \mathbf{K} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sigma_0^2}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die auf Ebene der  $\alpha$ -Schnitte konstruierten Minima und Maxima müssen noch zu der Zugehörigkeitsfunktion zusammengefasst werden:

$$m_{\tilde{R}}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\tilde{R}_\alpha}(x) \quad \text{mit} \quad i_{\tilde{R}_\alpha} = \left[ \tilde{R}_{\alpha, \min}, \tilde{R}_{\alpha, \max} \right]. \quad (5.29)$$

Durch Ausmultiplikation von (5.28) kann leicht die Äquivalenz zur Gleichung (5.27) gezeigt werden.

Soll anstelle des a-priori Varianzfaktors  $\sigma_0^2$  der a-posteriori Varianzfaktor  $\hat{\sigma}_0^2$  aus Formel (3.76) für die Signifikanzprüfung des geschätzten Zuschlages  $\hat{\Omega}_z$  zur Verbesserungsquadratsumme verwendet werden, so ergibt sich die Teststatistik aus (5.25) zu:

$$\hat{R} = (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{w})^T \left[ \mathbf{C}(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A})^+ \mathbf{C}^T \right]^{-1} (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{w}) / (h\hat{\sigma}_0^2) \sim \tau^2(h, f, \lambda = 0) \text{ unter } H_0 \quad (5.30)$$

und folgt unter der Nullhypothese einer zentralen  $\tau^2$ -Verteilung<sup>9</sup> mit  $h$  Freiheitsgraden für den Zähler und  $f$  Freiheitsgraden für den Nenner. Für das Optimierungsproblem zur Konstruktion der unscharfen Testgröße aus Formel (5.30) kann mit (5.14) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha, \min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} & -\mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} & -\mathbf{K}^T \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & -\mathbf{D} \mathbf{K} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) / \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{w}} \mathbf{P}_{yy}) \\ (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{w}} \mathbf{P}_{yy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{h}, \\ \tilde{R}_{\alpha, \max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} & -\mathbf{F}^T \mathbf{K}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & \mathbf{K}^T \mathbf{D} \mathbf{K} & -\mathbf{K}^T \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{F} & -\mathbf{D} \mathbf{K} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) / \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{w}} \mathbf{P}_{yy}) \\ (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\hat{w}} \mathbf{P}_{yy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{h}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\hat{R}}(\mathbf{x})$  wird abschließend mit (5.29) konstruiert.

### 5.3.3 Die lineare Hypothese in einem erweiterten GMM mit unscharfen Daten

Die in Kapitel 5.3.2 vorgestellte Form der linearen Hypothese hat einige praktische Nachteile hinsichtlich der numerischen Effizienz. Wenn zusätzliche Parameter  $\mathbf{z}$  in einem GMM getestet werden sollen, wie in der Ausreißersuche und in der Modellwahl (Kapitel 5.4.1 und 5.4.2), müsste zunächst der Parametervektor des GMM aus Kapitel 3.3.2.2 um die zusätzlichen Parameter  $\mathbf{z}$  erweitert werden, um dann eine Restriktion für diese Parameter formulieren zu können. Im Folgenden soll daher eine lineare Hypothese in einem erweiterten GMM nach Formel (3.82) eingeführt werden<sup>10</sup>:

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_E + \mathbf{A}_2 \mathbf{d}\mathbf{z}. \quad (5.32)$$

Die lineare Hypothese in dem erweiterten Modell wird dann für beide Parametergruppen formuliert. Die Nullhypothese  $H_0$  und die Alternativhypothese  $H_1$  sind damit gegeben als:

$$H_0 : \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_E \\ \mathbf{d}\mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{w} \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_E \\ \mathbf{d}\mathbf{z} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{w}} \neq \mathbf{w}. \quad (5.33)$$

Ausgangspunkt für die Herleitung einer Teststatistik sind die Normalgleichungen des erweiterten GMM aus Formel (3.86). Die generalisierte Inverse der linken Seite des Normalgleichungssystems ist entsprechend die Kofaktormatrix der Parameter. Die Berechnung der quadratischen Form  $\hat{\Omega}_z$  erhält man mit:

$$\hat{\Omega}_z = (\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}_E \\ \mathbf{d}\hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} - \mathbf{w})^T \left[ \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{C}^T \right]^{-1} (\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}_E \\ \mathbf{d}\hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} - \mathbf{w}). \quad (5.34)$$

Die Matrix  $\mathbf{C}$  selektiert dabei die entsprechenden Elemente aus der Kofaktormatrix der Parameter. Durch die Hinzunahme zusätzlicher (freier) Parameter kann das Modell besser an die Beobachtungsergebnisse angepasst werden und die ursprünglichen Verbesserungsquadratsumme  $\hat{\Omega}$  für ein GMM (vgl. Formel (5.8)) verringert sich damit um  $\hat{\Omega}_z$ . Die neue verringerte Verbesserungsquadratsumme  $\hat{\Omega}_E$  im erweiterten Modell infolge der zusätzlichen Parameter lautet:

$$\hat{\Omega}_E = \hat{\Omega} - \hat{\Omega}_z. \quad (5.35)$$

<sup>9</sup> Einzelheiten über die  $\tau^2$ -Verteilung können in POPE (1976) nachgelesen werden. Eine einfache Transformation zur Berechnung von Quantilen der  $\tau^2$ -Verteilung aus der F-Verteilung wird in KOCH (2004, S. 331) gezeigt.

<sup>10</sup> Der Vektor  $\mathbf{y}_{0,E}$  wird gemäß Kapitel 3.3.2.3 mit  $\mathbf{y}_0$  gleichgesetzt.

### 5.3.3.1 Gemeinsamer Test von ursprünglichen und zusätzlichen Parametern

Sind Linearkombinationen aus ursprünglichen und zusätzlichen Parametern zu testen, so muss eine Teststatistik basierend auf Formel (5.34) hergeleitet werden. Dies ist z. B. für die Sensitivitätsanalyse von Bedeutung (vgl. HECK, 1986). Die Teststatistik  $\hat{E}$  für die allgemeine lineare Hypothese im erweiterten Modell lässt sich mit dem a-priori Varianzfaktor  $\sigma_0^2$  berechnen zu:

$$\hat{E} = \hat{\Omega}_z / \sigma_0^2 = (\mathbf{C} \begin{bmatrix} d\hat{\theta}_E \\ d\hat{z} \end{bmatrix} - \mathbf{w})^T \left[ \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \right]^{-1} (\mathbf{C} \begin{bmatrix} d\hat{\theta}_E \\ d\hat{z} \end{bmatrix} - \mathbf{w}) / \sigma_0^2 \sim \chi^2(j, \lambda = 0) \text{ unter } H_0 \quad (5.36)$$

und folgt unter der Nullhypothese aus (5.17) einer zentralen ( $\lambda = 0$ )  $\chi^2$ -Verteilung mit

$j = \text{rg} \left\{ \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \right\}$  Freiheitsgraden. Umstellen auf die Beobachtungen liefert mit (3.87) und

$$(3.88) \text{ sowie } \mathbf{Q}_{zz} = (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2)^{-1} \text{ und } \mathbf{N}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} :$$

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \left[ d\mathbf{y}^T \left\{ (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1)^{-1} \left[ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} - \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \right] + \left[ \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \right] \right\} \mathbf{C}^T \left[ \mathbf{C}^T \mathbf{N}_E^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{C} \dots \right. \\ &\quad \dots \left\{ (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1)^{-1} \left[ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} - \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \right] + \left[ \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \right] \right\} d\mathbf{y} \dots \\ &\quad \dots - 2\mathbf{w}^T \left[ \mathbf{C}^T \mathbf{N}_E^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{C} \left\{ (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1)^{-1} \left[ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} - \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \right] + \left[ \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \right] \right\} d\mathbf{y} \dots \\ &\quad \left. \dots + \mathbf{w}^T \left[ \mathbf{C}^T \mathbf{N}_E^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{w} \right] / \sigma_0^2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

In verkürzter Darstellung kann mit  $\mathbf{O} = \left\{ (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1)^{-1} \left[ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} - \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \right] + \left[ \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \right] \right\}$  geschrieben werden:

$$\hat{E} = \left[ d\mathbf{y}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \left[ \mathbf{C}^T \mathbf{N}_E^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{C} \mathbf{O} d\mathbf{y} - 2\mathbf{w}^T \left[ \mathbf{C}^T \mathbf{N}_E^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{C} \mathbf{O} d\mathbf{y} + \mathbf{w}^T \left[ \mathbf{C}^T \mathbf{N}_E^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{w} \right] / \sigma_0^2. \quad (5.38)$$

Die Gleichung (5.38) eignet sich mit  $\mathbf{S} = \left[ \mathbf{C}^T \mathbf{N}_E^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1}$  zur Konstruktion der unscharfen Teststatistik  $\tilde{E}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\alpha, \min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{p}_\alpha]} \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} \mathbf{p} + 2d\mathbf{y}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} \mathbf{p} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} \mathbf{p} + \underbrace{d\mathbf{y}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} d\mathbf{y} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} d\mathbf{y} + \mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{w}}_{\text{const}} \right] / \sigma_0^2, \\ \tilde{E}_{\alpha, \max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\hat{p}_\alpha]} \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} \mathbf{p} + 2d\mathbf{y}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} \mathbf{p} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} \mathbf{p} + \underbrace{d\mathbf{y}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} d\mathbf{y} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} d\mathbf{y} + \mathbf{w}^T \mathbf{S} \mathbf{w}}_{\text{const}} \right] / \sigma_0^2, \end{aligned} \quad (5.39)$$

oder als quadratische Form geschrieben:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\alpha, \min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{p}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ d\mathbf{y}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & -\mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \\ \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & -\mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \\ -\mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & -\mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ d\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sigma_0^2}, \\ \tilde{E}_{\alpha, \max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\hat{p}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ d\mathbf{y}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & -\mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \\ \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & -\mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \\ -\mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & -\mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ d\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sigma_0^2}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Die Teststatistik  $\hat{E}$ , die den a-posteriori Varianzfaktor  $\hat{\sigma}_0^2$  aus Formel (3.76) für die Signifikanzprüfung von  $\hat{\Omega}_z$  verwendet, erhält man nach KOCH (2004, S. 331) mit:

$$\hat{E} = \hat{\Omega}_z / (j\hat{\sigma}_0^2) = (\mathbf{C} \begin{bmatrix} d\hat{\boldsymbol{\theta}}_E \\ d\hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} - \mathbf{w})^T \left[ \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{C}^T \right]^{-1} (\mathbf{C} \begin{bmatrix} d\hat{\boldsymbol{\theta}}_E \\ d\hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} - \mathbf{w}) / (j\hat{\sigma}_0^2) \sim \tau^2(j, f, \lambda = 0) \text{ unter } H_0. \quad (5.41)$$

Die Größe  $\hat{E}$  folgt unter der Nullhypothese einer zentralen ( $\lambda = 0$ )  $\tau^2$ -Verteilung mit  $j$  Freiheitsgraden für den Zähler und  $f$  Freiheitsgraden für den Nenner. Im Gegensatz zu der rein stochastischen Bestimmung der Teststatistik ist eine Hypothesenprüfung mit der Teststatistik  $\hat{E}_{\text{alt}} = \hat{\Omega}_z / \hat{\Omega}_E$  (vgl. z. B. KOCH, 2004, S. 330), die einer F-Verteilung folgt, nicht einfach möglich, da die Bestimmung der Differenz von  $\hat{\Omega}_E = \hat{\Omega} - \hat{\Omega}_z$  im Falle der unscharfen Auswertung deutlich rechenintensiver ist. Für das Optimierungsproblem zur Konstruktion der unscharfen Testgröße aus Formel (5.40) kann mit (5.14) und  $\mathbf{V} = (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy})$  geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\alpha, \min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ d\mathbf{y}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & -\mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \\ \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & -\mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \\ -\mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & -\mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ d\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ d\mathbf{y}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{V} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{V} \\ \mathbf{V} \mathbf{F} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ d\mathbf{y} \end{bmatrix} \right)^{1/j}, \\ \tilde{E}_{\alpha, \max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ d\mathbf{y}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & -\mathbf{F}^T \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \\ \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & \mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & -\mathbf{O}^T \mathbf{C}^T \mathbf{S} \\ -\mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} \mathbf{F} & -\mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ d\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \\ d\mathbf{y}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{V} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{V} \\ \mathbf{V} \mathbf{F} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ d\mathbf{y} \end{bmatrix} \right)^{1/j}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\hat{E}}(\mathbf{x})$  erhält man abschließend zu:

$$m_{\hat{E}}(\mathbf{x}) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\hat{E}_\alpha}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad i_{\hat{E}_\alpha} = \left[ \tilde{E}_{\alpha, \min}, \tilde{E}_{\alpha, \max} \right]. \quad (5.43)$$

### 5.3.3.2 Test der zusätzlichen Parameter

Sollen nur die zusätzlich in das GMM eingebrachten Parameter  $\mathbf{z}$  getestet werden, so kann die lineare Hypothese aus (5.33) nur für die zusätzlichen Parameter formuliert werden:

$$H_0 : \mathbf{C} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}_E \\ d\mathbf{z} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}_E \\ d\mathbf{z} \end{bmatrix} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}_E \\ d\mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} \quad \text{vs.} \quad H_1 : [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}_E \\ d\mathbf{z} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{w}} \neq \mathbf{w}. \quad (5.44)$$

Die Teststatistik  $\hat{E}$  aus (5.36) vereinfacht sich damit nach KOCH (2004, S. 329f) zu:

$$\hat{E} = \hat{\Omega}_z / \sigma_0^2 = (\mathbf{C}_2 d\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{w}_2)^T \left[ \mathbf{C}_2 \left( \mathbf{A}_2^T (\mathbf{P}_{yy} - \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{C}_2^T \right]^{-1} (\mathbf{C}_2 d\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{w}_2) / \sigma_0^2 \sim \chi^2(j, 0) \text{ unter } H_0. \quad (5.45)$$

Stellt man mit (3.87) auf die Beobachtungen um, so erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \left\{ d\mathbf{y}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P} \mathbf{A}_2 \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{C}_2^T \left[ \mathbf{C}_2 \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{C}_2^T \right]^{-1} \mathbf{C}_2 \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} d\mathbf{y} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - 2\mathbf{w}_2^T \left[ \mathbf{C}_2 \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{C}_2^T \right]^{-1} \mathbf{C}_2 \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} d\mathbf{y} + \mathbf{w}_2^T \left[ \mathbf{C}_2 \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{C}_2^T \right]^{-1} \mathbf{w}_2 \right\} / \sigma_0^2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Für die Auswertung bei vorliegender Unschärfe folgt mit den Matrizen  $\mathbf{J} = \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}$

sowie  $\mathbf{M} = \left[ \mathbf{C}_2 \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{C}_2^T \right]^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\alpha, \min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} \mathbf{p} + 2d\mathbf{y}^T \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} \mathbf{p} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} \mathbf{p} + \underbrace{d\mathbf{y}^T \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} d\mathbf{y} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{M} \mathbf{J} d\mathbf{y} + \mathbf{w}^T \mathbf{M}^T \mathbf{w}}_{\text{const}} \right] / \sigma_0^2 \right)^{1/j}, \\ \tilde{E}_{\alpha, \max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} \mathbf{p} + 2d\mathbf{y}^T \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} \mathbf{p} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} \mathbf{p} + \underbrace{d\mathbf{y}^T \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} d\mathbf{y} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{M} \mathbf{J} d\mathbf{y} + \mathbf{w}^T \mathbf{M}^T \mathbf{w}}_{\text{const}} \right] / \sigma_0^2 \right)^{1/j}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

oder als quadratische Form (NEUMANN und KUTTERER, 2009):

$$\begin{aligned}\tilde{\hat{E}}_{\alpha,\min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{p}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\top \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^\top \\ \mathbf{w}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} & -\mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \\ \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} & -\mathbf{J}^\top \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & -\mathbf{M} \mathbf{J} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sigma_0^2}, \\ \tilde{\hat{E}}_{\alpha,\max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\hat{p}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\top \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^\top \\ \mathbf{w}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} & -\mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \\ \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} & -\mathbf{J}^\top \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & -\mathbf{M} \mathbf{J} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sigma_0^2}.\end{aligned}\quad (5.48)$$

Die auf Ebene der  $\alpha$ -Schnitte konstruierten Minima und Maxima müssen abschließend noch zu der Zugehörigkeitsfunktion zusammengefasst werden:

$$m_{\tilde{\hat{E}}_\alpha}(\mathbf{x}) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\tilde{\hat{E}}_\alpha}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad i_{\tilde{\hat{E}}_\alpha} = \left[ \tilde{\hat{E}}_{\alpha,\min}, \tilde{\hat{E}}_{\alpha,\max} \right]. \quad (5.49)$$

Eine Teststatistik  $\hat{E}$ , die den a-posteriori Varianzfaktor  $\hat{\sigma}_0^2$  aus Formel (3.76) für die Signifikanzprüfung von  $\hat{\Omega}_z$  verwendet und unter  $H_0$  einer  $\tau^2$ -Verteilung folgt, erhält man nach KOCH (2004, S. 331) mit:

$$\hat{E} = \hat{\Omega}_z / (j \hat{\sigma}_0^2) = (\mathbf{C}_2 \mathbf{d}\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{w}_2)^\top \left[ \mathbf{C}_2 \left( \mathbf{A}_2^\top (\mathbf{P}_{yy} - \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_1^\top \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^\top \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{A}_2 \right)^\top \mathbf{C}_2^\top \right]^{-1} (\mathbf{C}_2 \mathbf{d}\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{w}_2) / (j \hat{\sigma}_0^2). \quad (5.50)$$

Die Größe  $\hat{E}$  folgt unter der Nullhypothese einer zentralen ( $\lambda = 0$ )  $\tau^2$ -Verteilung mit  $j$  Freiheitsgraden für den Zähler und  $f$  Freiheitsgraden für den Nenner. In Äquivalenz zu der Formel (5.41) ist der Test mittels Teststatistik  $\hat{E}_{\text{alt}} = \hat{\Omega}_z / \hat{\Omega}_E$  und F-Verteilung nicht sinnvoll, da die Bestimmung der Differenz von  $\hat{\Omega}_E = \hat{\Omega} - \hat{\Omega}_z$  im Falle einer unscharfen Auswertung deutlich rechenintensiver ist. Für das Optimierungsproblem zur Konstruktion der unscharfen Teststatistik aus Formel (5.50) kann mit (5.14) geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\tilde{\hat{E}}_{\alpha,\min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{p}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\top \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^\top \\ \mathbf{w}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} & -\mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \\ \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} & -\mathbf{J}^\top \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & -\mathbf{M} \mathbf{J} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) / \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\top \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^\top (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^\top (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \\ (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{j}, \\ \tilde{\hat{E}}_{\alpha,\max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\hat{p}_\alpha]} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\top \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^\top \\ \mathbf{w}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} & -\mathbf{F}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \\ \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J} & -\mathbf{J}^\top \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{F} & -\mathbf{M} \mathbf{J} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) / \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\top \\ \mathbf{d}\mathbf{y}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^\top (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^\top (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \\ (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}\mathbf{y} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{j}.\end{aligned}\quad (5.51)$$

Die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{\hat{E}}_\alpha}(\mathbf{x})$  wird abschließend mit (5.49) konstruiert.

## 5.4 Anwendung der linearen Hypothese auf spezielle Fragestellungen

Zum Abschluss dieses Kapitels sollen einige spezielle Fälle der linearen Hypothese aus Kapitel 5.3 vorgestellt werden, die häufig bei der Datenauswertung auftreten. Dabei handelt es sich um die Ausreißersuche, die Modellwahl und die Sensitivitätsanalyse. Einige besondere Formen der linearen Hypothese, die lediglich in der geodätischen Deformationsanalyse von Bedeutung sind, werden in Kapitel 7 behandelt.

### 5.4.1 Ausreißersuche bei Unschärfe

Können Beobachtungen im statistischen Sinne nicht durch das vorliegende Modell erklärt werden bzw. sind grob verfälscht, so werden sie als Ausreißer bezeichnet. Ziel einer Ausreißersuche ist die Identifikation und die Eliminierung der Ausreißer  $\boldsymbol{\varepsilon}$  unter den Beobachtungsergebnissen  $\mathbf{y}$  im Modell (3.69). Dafür werden die Ausreißer als zusätzliche Parameter im erweiterten GMM nach Formel (5.32) formuliert, um mit ihnen die Modellstörung beschreiben zu können (BAARDA, 1968) und (POPE, 1976):

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{d}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}_2 \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.52)$$

Beispiele für den Aufbau der Matrix  $\mathbf{A}_2$  findet man in JÄGER ET AL. (2005, S. 189f) und NIEMEIER (2008, S. 297). Die Nullhypothese  $H_0$ , in der alle modellierten Ausreißer Null sind, wird der Alternativhypothese  $H_1$  gegenüber gestellt, in der die Ausreißer ungleich Null sind (vgl. KOCH, 2004, S. 329 und Formel (5.44)):

$$H_0: \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta} \\ d\boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{vs.} \quad H_1: \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta} \\ d\boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}. \quad (5.53)$$

Um zu überprüfen, ob Ausreißer vorhanden sind, werden sie mit der Teststatistik  $\hat{E}$  gemäß Formel (5.45) mit  $\mathbf{C}_2 = \mathbf{I}$  und  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$  auf statistische Signifikanz überprüft:

$$\hat{E}_1 = \hat{\Omega}_z / \sigma_0^2 = (d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \left[ \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \right] (d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) / \sigma_0^2 \sim \chi^2(j, 0) \text{ unter } H_0. \quad (5.54)$$

Die Teststatistik  $\hat{E}_1$  folgt unter der Nullhypothese einer zentralen  $\chi^2$ -Verteilung mit  $j$  Freiheitsgraden, wobei  $j$  der Anzahl der zu testenden Beobachtungen (der modellierten Ausreißer) entspricht. Im Falle eines geschätzten a-posteriori Varianzfaktors  $\hat{\sigma}_0^2$  folgt die Teststatistik  $\hat{E}$  nach Formel (5.50) einer zentralen  $\tau^2$ -Verteilung mit  $j$  und  $f$  Freiheitsgraden:

$$\hat{E}_2 = \hat{\Omega}_z / \hat{\sigma}_0^2 = (d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \left[ \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \right] (d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) / (j \hat{\sigma}_0^2) \sim \tau^2(j, f, \lambda = 0) \text{ unter } H_0. \quad (5.55)$$

Setzt man nach Formel (3.87) mit  $\mathbf{Q}_{zz} = \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^{-1}$  die geschätzten Zusatzparameter zu  $d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} d\mathbf{y}$  ein, kann die Konstruktion der unscharfen Teststatistik mit den Formeln (5.54) und (5.55) erfolgen. Die Optimierungsaufgabe lautet mit  $\mathbf{J} = \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}$  (NEUMANN und KUTTERER, 2007a):

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{E}}_{1,\alpha,\min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \mathbf{F} \mathbf{p} + 2 d\mathbf{y}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \mathbf{F} \mathbf{p} + \underbrace{d\mathbf{y}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} d\mathbf{y}}_{\text{const}} \right] \right) / \sigma_0^2, \\ \tilde{\hat{E}}_{1,\alpha,\max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \mathbf{F} \mathbf{p} + 2 d\mathbf{y}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \mathbf{F} \mathbf{p} + \underbrace{d\mathbf{y}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} d\mathbf{y}}_{\text{const}} \right] \right) / \sigma_0^2, \end{aligned} \quad (5.56)$$

bzw. im Falle einer geschätzten a-posteriori Varianzfaktors  $\hat{\sigma}_0^2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{E}}_{2,\alpha,\min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{p}^T & \\ d\mathbf{y}^T & \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{F}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \\ \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p} \\ d\mathbf{y} \end{array} \right] \right) / \left( \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{p}^T & \\ d\mathbf{y}^T & \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \\ (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p} \\ d\mathbf{y} \end{array} \right] \right) \frac{1}{j}, \\ \tilde{\hat{E}}_{2,\alpha,\max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{p}^T & \\ d\mathbf{y}^T & \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{F}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \\ \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \mathbf{F} & \mathbf{J}^T \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{J} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p} \\ d\mathbf{y} \end{array} \right] \right) / \left( \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{p}^T & \\ d\mathbf{y}^T & \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \\ (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p} \\ d\mathbf{y} \end{array} \right] \right) \frac{1}{j}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

In NEUMANN und KUTTERER (2007a) wird ein Beispiel für die mehrdimensionale Ausreißersuche im Falle unscharfer Daten gezeigt. Handelt es sich um nur eine zu testende Beobachtung, können direkt die Formeln für die Schätzung der Zusatzparameter verwendet werden und die unscharfe Teststatistik vereinfacht sich mit  $\mathbf{e}_i^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]$  zu (KUTTERER, 2002b, S. 74):

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{E}}_{i,1,\alpha,\min} &= \left[ d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i - \left| \left( \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{e}_i \right)^{-1} \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \left( \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,i} \right) \right| \right] / \sigma_0^2, \\ \tilde{\hat{E}}_{i,1,\alpha,\max} &= \left[ d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i + \left| \left( \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{e}_i \right)^{-1} \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \left( \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha,i} \right) \right| \right] / \sigma_0^2, \end{aligned} \quad (5.58)$$

oder mit einem geschätzten a-posteriori Varianzfaktors  $\hat{\sigma}_0^2$ :

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{i,2,\alpha,\min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ d\hat{\mathbf{e}}_i + \left( \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{e}_i \right)^{-1} \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \mathbf{p} \right] / \left[ \mathbf{p} \right]^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \\ (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{j}, \\ \tilde{E}_{i,2,\alpha,\max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\hat{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ d\hat{\mathbf{e}}_i + \left( \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{e}_i \right)^{-1} \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{F} \mathbf{p} \right] / \left[ \mathbf{p} \right]^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \\ (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{j}.\end{aligned}\quad (5.59)$$

Die  $\alpha$ -Schnitt Konstruktion der unscharfen Teststatistik erfolgt abschließend mit Formel (5.49). Für die finale Testentscheidung werden die über das  $\alpha$ -Schnitt-Optimierungsverfahren konstruierten Teststatistiken mit den in Kapitel 4.2 vorgestellten Testverfahren analysiert. In KUTTERER (2002b, S. 75f) sind die Lösungen für eine dreiecksunscharfe Teststatistik und einen scharfen Annahmehbereich für das *height*- und *card*-Kriterium zusammengestellt.

#### 5.4.2 Modellwahl bei Unschärfe

Eine Modellwahl dient dazu, um eine Über- oder Unterparametrisierung (Modellstörung) eines GMM im statistischen Sinne zu beurteilen. Bei einer Überparametrisierung wurden zu viele freie Parameter eingeführt, um eine vorliegende Situation zu beschreiben. Die Parameteranzahl kann reduziert werden, ohne dass dies zu einer signifikanten Verschlechterung der Approximation der Beobachtungen durch das Modell führt. Andersherum liegt eine Unterparametrisierung eines GMM vor, wenn durch Hinzunahme von zusätzlichen freien Parametern die Beobachtungen im statistischen Sinne signifikant besser beschrieben werden können. In gewissen Grenzen eignet sich bereits der Globaltest der Ausgleichung (vgl. Kapitel 5.2) zur Identifikation von Modellstörungen (JÄGER ET AL., 2005, S. 199f). Diese Vorgehensweise hat jedoch gewisse Nachteile. Zum einen wird beim Globaltest das gesamte Modell getestet, sodass Störungen in einzelnen Parametern nicht so trennscharf identifiziert werden können, als wenn sie alleine getestet werden. Zum anderen kann zumeist nur schwer unterschieden werden, ob das stochastische Modell nicht adäquat gewählt worden ist, oder ob es sich um eine Modellstörung handelt.

Die Palette an möglichen Hypothesentests bei der Identifikation von Modellstörungen ist mannigfaltig, sodass in diesem Abschnitt nur die Wichtigsten herausgegriffen werden sollen. Im Wesentlichen kann man dabei zwischen zwei Vorgehensweisen unterscheiden:

- Das vorliegende GMM soll um die Parameter  $\boldsymbol{\theta}_2$  reduziert werden.
- Das vorliegende GMM soll um zusätzliche (freie) Parameter  $\mathbf{z}$  reduziert werden.

Die Modellwahl im Fall a) wird gemäß Kapitel 5.3.2 mittels einer linearen Hypothese in einem Standard GMM durchgeführt, wobei für die Nullhypothese und die Alternativhypothese gilt:

$$H_0 : \mathbf{C}d\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}_1 \\ d\boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{w} \quad \text{vs.} \quad H_1 : [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}_1 \\ d\boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{w}} \neq \mathbf{0}. \quad (5.60)$$

Während unter der Nullhypothese die Parameter  $\boldsymbol{\theta}_2$  identisch Null sind, gilt für die Alternativhypothese, dass die Parameter  $\boldsymbol{\theta}_2$  signifikant von Null verschieden sind. Aufgrund der Ausführungen in Kapitel 5.3.2 soll nicht mehr auf die Herleitung der Testgröße und Teststatistik eingegangen werden. Die Testgröße folgt unter der Nullhypothese nach Formel (5.25) oder (5.30) einer zentralen ( $\lambda = 0$ )  $\chi^2$ - oder  $\tau^2$ -Verteilung mit

$h = \text{rg} \left[ \mathbf{C} \left( \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A} \right)^+ \mathbf{C}^T \right]$  Freiheitsgraden für den Zähler und kann mit den unscharfen Teststatistiken aus Formel (5.28) oder (5.31) auf statistische Signifikanz überprüft werden. Für den Fall b) wird eine lineare Hypothese im erweiterten GMM nach Kapitel 5.3.3.2 formuliert, wobei lediglich die zusätzlichen freien Parameter getestet werden. In diesem Fall lauten die Nullhypothese und Alternativhypothese nach Formel (5.44):

$$H_0 : [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta} \\ d\mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{vs.} \quad H_1 : [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta} \\ d\mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{w}} \neq \mathbf{0}. \quad (5.61)$$

Die Testgröße folgt unter der Nullhypothese nach Formel (5.45) oder (5.50) einer zentralen ( $\lambda = 0$ )  $\chi^2$ - oder  $\tau^2$ -Verteilung mit  $j = \text{rg} \left[ \mathbf{C}_2 \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\ddot{w}} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^- \mathbf{C}_2^T \right]$  Freiheitsgraden für den Zähler und kann mit den unschar-

fen Teststatistiken aus Formel (5.48) oder (5.51) auf statistische Signifikanz überprüft werden. Auf weitere Ausführungen soll an dieser Stelle verzichtet werden. Des Weiteren sind Anwendungen zur Modellwahl bzw. zur Identifikation von Modellstörungen in JÄGER ET AL. (2005, S. 189f) zu finden.

### 5.4.3 Sensitivitätsanalyse bei Unschärfe

Die Sensitivitätsanalyse ist vornehmlich ein Planungsverfahren, um beurteilen zu können, ob sich ein (Überwachungs-) Netz im statistischen Sinne zum Nachweis von parametrisch beschriebenen Veränderungen eignet (vgl. z. B. JÄGER ET AL., 2005, S. 303ff). Die Sensitivitätsanalyse ist keine eigentliche statistische Signifikanzuntersuchung im Sinne der Hypothesentests, es können jedoch auf Basis der Testtheorie (der Testgröße) Grenzwerte abgeleitet werden, die Parameter erreichen müssen, damit sie als signifikant identifiziert werden können. Eine Realisierung in Form von Teststatistiken ist nicht notwendig.

#### 5.4.3.1 Die Sensitivitätsanalyse im rein stochastischen Fall

Im rein stochastischen Fall erfordert eine Sensitivitätsanalyse die folgenden Arbeitsschritte:

- Aufstellen des funktionalen und stochastischen Modelles (vgl. 3.3.2.2 Kapitel, zumeist sind grobe Näherungswerte für die Parameter bzw. Beobachtungen ausreichend).
- Definition der zu verwendenden Testgröße  $T$ .
- Wahl der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art  $\alpha$ .
- Wahl der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art  $\beta$ .
- Berechnung des Nichtzentralitätsparameters  $\lambda$ .

Besonders die Testgröße  $T$  ist mit Sorgfalt zu wählen, da verschiedene Testgrößen verschiedene Sensitivitäten zur Folge haben. Mit einem globalen Kongruenztest kann die Bewegung von Einzelpunkten zwischen zwei Epochen nachgewiesen werden. Diese Vorgehensweise ist jedoch deutlich weniger sensitiv als einen Einzelpunkttest anzuwenden. Zunächst soll davon ausgegangen werden, dass das (Überwachungs-) Netz in dem Modell (3.69) beschrieben wird. Um die Sensitivität des Netzes bezüglich der möglichen parametrischen Veränderungen beurteilen zu können, werden diese als Restriktion nach (5.33) in das Ausgangsmodell (3.69) eingeführt (HECK, 1986)<sup>11</sup>:

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} d\mathbf{0}_E \\ d\mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{w}. \quad (5.62)$$

Die Nullhypothese  $H_0$  und die Alternativhypothese  $H_1$  sind dann gegeben durch:

$$H_0 : d\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \text{vs.} \quad H_1 : d\mathbf{z} = \bar{\mathbf{w}}_2 \neq \mathbf{0}, \quad (5.63)$$

wobei unter der Nullhypothese die zusätzlichen Parameter  $\mathbf{z}$  Null sind. Dies entspricht der in Kapitel 5.3.3 eingeführten linearen Hypothese in einem erweiterten GMM, die für beide Parametergruppen formuliert wird. Geeignete Testgrößen für die eingeführte lineare Hypothese in (5.63) sind in (5.36) bzw. (5.41) gegeben. Die Testgrößen folgen unter der Nullhypothese jeweils einer zentralen  $\chi^2$ -, F- oder  $\tau^2$ -Verteilung (Nichtzentralitätsparameter  $\lambda = 0$ ).

Bei Gültigkeit der Alternativhypothese  $H_1$  (Veränderung der zusätzlichen Parameter  $\mathbf{z}$ ) folgen die Testgrößen einer nicht zentralen  $\chi^2$ - oder  $\tau^2$ -Verteilung mit dem Nichtzentralitätsparameter  $\lambda$ . Mit (3.87) und den vorhandenen Modellstörungen  $\bar{\mathbf{w}}_2$  ergibt sich  $\lambda$  zu:

$$\lambda = \frac{\bar{\mathbf{w}}_2^T \mathbf{Q}_{zz}^- \bar{\mathbf{w}}_2}{\sigma_0^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_{zz} = \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy} \mathbf{Q}_{ww} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{A}_2 \right)^-. \quad (5.64)$$

Wird die Nullhypothese  $H_0$  trotz Gültigkeit der Alternativhypothese  $H_1$  angenommen, spricht man von einem Fehler 2. Art  $\beta$  (vgl. Kapitel 4.4.2). Zwischen den Fehlern 1. und 2. Art sowie dem Nichtzentralitätsparameter besteht eine strenge funktionale Beziehung (HECK, 1986 und darin PELZER, 1971, S. 57). Üblicherweise werden die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. und 2. Art vorgegeben und daraus der Nichtzentralitätsparameter der Verteilung für die Testgröße berechnet. Die Gleichung des *Sensitivitäts-Hyperellipsoids* erhält man abschließend zu (HECK, 1986):

<sup>11</sup> In (HECK, 1986) wird eine Bedingung der Form  $\mathbf{C}_1 d\mathbf{0} = \mathbf{C}_2 d\mathbf{z}$  eingeführt, was jedoch äquivalent zu (5.63) ist, wenn man  $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad -\mathbf{C}_2]$  und  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  setzt.

$$\sigma_0^2 \cdot \lambda = \bar{\mathbf{w}}_2^T \mathbf{Q}_{zz}^- \bar{\mathbf{w}}_2. \quad (5.65)$$

Der Inhalt des Sensitivitäts-Hyperellipsoids entspricht dem Wertebereich, in dem der Fehler 2. Art bei Anwendung der Teststatistiken (5.36) bzw. (5.41) höchstens  $\beta$  beträgt. Die Modellstörungen  $\bar{\mathbf{w}}_2$  sind daher mit einer **Testgüte** (engl. test power) von  $1 - \beta$  aufdeckbar, sobald der Vektor  $\bar{\mathbf{w}}_2$  das in (5.65) definierte Sensitivitäts-Hyperellipsoid durchstößt. Detaillierte Ausführungen sind nicht Bestandteil der vorliegenden Arbeit. Der interessierte Leser sei auf HECK (1986) und JÄGER ET AL. (1986, S. 303ff) verwiesen, in denen auch praktische Beispiele der Sensitivitätsanalyse vorgestellt werden.

#### 5.4.3.2 Die Sensitivitätsanalyse mit unscharfen Daten

Liegen anstelle der scharfen Eingangswerte (Beobachtungsergebnisse) unscharfe Daten für die Sensitivitätsanalyse vor, so muss entsprechend eine unscharfe Erweiterung der Formel (5.65) konstruiert werden. Dies würde grundsätzlich zu einem unscharfen Sensitivitäts-Hyperellipsoid führen. Da jedoch bei Hypothesentests im Falle unscharfer Daten, wie in Kapitel 4.1.2 erläutert, eine scharfe Entscheidung getroffen werden soll (Defuzzifizierung), handelt es sich auch beim Sensitivitäts-Hyperellipsoid im Falle unscharfer Daten um eine scharfe Größe. Folglich kann als Erweiterung zum rein stochastischen Fall bei der Sensitivitätsanalyse im Falle unscharfer Daten der Nichtzentralitätsparameter  $\lambda_{\text{impr}}$  im unscharfen Fall in Gleichung (5.65) eingesetzt werden:

$$\sigma_0^2 \cdot \lambda_{\text{impr}} = \bar{\mathbf{w}}_{2,\text{impr}}^T \mathbf{Q}_{zz}^- \bar{\mathbf{w}}_{2,\text{impr}}. \quad (5.66)$$

Dabei sind  $\bar{\mathbf{w}}_{2,\text{impr}}$  die Modellstörungen im unscharfen Fall. Auch hier gilt, dass Modellstörungen  $\bar{\mathbf{w}}_{2,\text{impr}}$  mit einer Testgüte von  $1 - \beta_{\text{impr}}$  aufdeckbar sind, wenn der Vektor  $\bar{\mathbf{w}}_{2,\text{impr}}$  das in (5.66) definierte Sensitivitäts-Hyperellipsoid durchstößt.

Die Sensitivitätsanalyse im unscharfen Fall kann wie folgt zusammengefasst werden:

- Aufstellen des funktionalen und stochastischen Modelles des GMM (vgl. 3.3.2.2 Kapitel).
- Identifikation der unscharfen Einflussfaktoren:  $\tilde{\mathbf{p}}$  (vgl. Kapitel 3.3.1).
- Definition der zu verwendenden Testgröße  $\tilde{T}$  im unscharfen Fall.
- Wahl der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art im rein stochastischen Fall:  $\alpha$
- Wahl der kritischen Größe  $\rho_{\text{crit}}$  bei Hypothesentests mit unscharfen Daten (vgl. Kapitel 4.1.2).
- Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art im unscharfen Fall:  $\alpha_{\text{impr}}$  (vgl. Kapitel 4.4.1).
- Wahl der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art im unscharfen Fall:  $\beta_{\text{impr}}$
- Bestimmung des Nichtzentralitätsparameters  $\lambda_{\text{impr}}$  im unscharfen Fall (vgl. Kapitel 4.4.2).

Für die Berechnung des Nichtzentralitätsparameters  $\lambda_{\text{impr}}$  im unscharfen Fall existieren keine geschlossenen Formeln, sodass die Größe von Fall zu Fall variiert. Aufgrund der numerischen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art kann es u. U. zu aufwendigen Berechnungen kommen. Aufgrund der speziellen Konstruktion des Sensitivitäts-Hyperellipsoids könnten sich insbesondere auch unscharfe Vektoren vom elliptischen Typ für diese Aufgabe eignen, wie sie KUTTERER (2002b) verwendet. Entsprechende Versuche führten im Rahmen dieser Arbeit nicht zum Erfolg sollten aber in Zukunft weiterverfolgt werden.

## 6 Hypothesentests bei Toleranzwerten für den Annahmebereich

In den Kapiteln 4 und 5 wurden Hypothesentests behandelt, in denen die Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese bekannt war. Der Annahmebereich konnte in diesen Fällen über die (klassische) Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  festgelegt werden. In diesem Kapitel soll ein zweites wichtiges Gebiet von Hypothesentests behandelt werden, in denen die Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese nicht bekannt ist. In diesem Fall wird der Annahmebereich für die Nullhypothese über einen Toleranzbereich festgelegt. Aufgrund der vorhandenen Unsicherheiten ist jedoch zumeist keine eindeutige Zuordnung des Ermittlungsergebnisses zum Annahme- oder Verwerfungsbereich möglich, sodass Optimalitätskriterien für das Annehmen oder Verwerfen der Nullhypothese notwendig sind.

In der Realität ist die Entscheidung für die eine oder andere Hypothese mit stark unterschiedlichem Nutzen verbunden. Eine Entscheidung die allein auf den Wahrscheinlichkeiten für das Verwerfen oder Annehmen von Hypothesen beruht greift somit zu kurz. Eine realitätsnahe Vorgehensweise bei der Testentscheidung ist das Treffen derjenigen Entscheidung, die den größten Nutzen (bzw. die geringsten Kosten) nach sich zieht. Die *Nutzentheorie* (engl.: utility theory) stellt die dafür notwendigen mathematischen Werkzeuge zur Verfügung. Die Theorie geht zurück auf Arbeiten von John von Neumann und Oskar Morgenstern, die zwei Gütern die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit genommen werden einen Erwartungsnutzen zugordnet haben. Mit ihrem Buch (VON NEUMANN und MORGENSTERN, 1944) zur „*Theory of Games and Economic Behavior*“ waren sie Begründer der *Spieltheorie* (engl.: game theory), in der die heutige Nutzentheorie fest verankert ist (z. B. LUCE und RAIFFA, 1989). Das Augenmerk dieses Kapitels liegt auf der Anwendung und Erweiterung der Nutzentheorie auf Hypothesentests bei Toleranzbereichen für den Annahmebereich und der vorliegenden Unsicherheitsmodellierung aus Kapitel 3.

Zu Beginn des Kapitels werden die Grundzüge von Testentscheidungen im Rahmen der Nutzentheorie beschrieben (Kapitel 6.1). Die Kapitel 6.2 bis 6.5 behandeln dann die Testentscheidung mit vier verschiedenen Typen von Unsicherheit (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, Intervalle, Fuzzy-Sets, FRVs) für die Beobachtungen. Die eigenen Beiträge liegen in einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Vorgehensweise beim Testen mit Intervallen und bei der Testentscheidung mit FRVs. Eine Erweiterung auf unscharfe Wahrscheinlichkeiten (engl.: imprecise probabilities), wie es z. B. in VIERTL und HARETER (2004b) beschrieben wird und auf unscharfe Nutzenfunktionen in der Nutzentheorie (VIERTL, 2002) soll im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgen.

Einen Überblick über bestehende Arbeiten auf dem Gebiet der Hypothesentests mit Intervallen und Fuzzy-Sets, bei bekannter Verteilung der Ermittlungsergebnisse die der Nullhypothese folgen, findet sich in KREINOVICH ET AL. (2008). Die Nutzentheorie kann auch im Rahmen von Multi Criteria Decision Making (MCDM) im Falle von Intervallen angewandt werden (vgl. z. B. CEBERIO und MODAVE, 2006). Des Weiteren existiert umfangreiche Literatur zum Fuzzy-MCDM (z. B. CHEN und HWANG, 1992). Dies stellt jedoch eine eigene umfangreiche Fragestellung dar und wird in dieser Arbeit nicht behandelt werden. Die im Folgenden behandelte Vorgehensweise ist ein Spezialfall des MCDM bei zwei möglichen Alternativen bei der Testentscheidung. NIWITPONG ET AL. (2008) beschäftigen sich mit der Testentscheidung bei Toleranzbereichen für den Annahmebereich im Falle unscharfer Daten, darüber hinausgehende Arbeiten sind nicht bekannt.

### 6.1 Allgemeine Testentscheidungen im Kontext der Nutzentheorie

Bei denen in dieser Arbeit vorgestellten Hypothesentests werden zunächst eine Nullhypothese und eine Alternativhypothese aufgestellt. In der allgemeinsten Form sind die Verteilungen  $\rho_0$  und  $\rho_1$  der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese  $H_0$  und unter der Alternativhypothese  $H_1$  bekannt, sodass auch die Wahrscheinlichkeit für die Zugehörigkeit eines zufällig gewählten Ermittlungsergebnisses  $T$  zu der Nullhypothese  $P(T|H_0)$  oder Alternativhypothese  $P(T|H_1)$  bekannt sind. Die folgende Darstellung orientiert sich an (KREINOVICH ET AL., 2008) und soll die wesentlichen Gedanken der Vorgehensweise bei den klassischen Hypothesentests widerspiegeln, um darauf folgend die Methodik auf Intervalle und unscharfe Intervalle (Fuzzy-Sets) sowie auf FRVs im Falle von Toleranzbereichen beim Testen zu erweitern.

Im Falle eines konkreten Wertes  $T$  (der Realisierung) kann die Wahrscheinlichkeit  $p_0(T) = P(H_0|T)$  für die Zugehörigkeit des Ermittlungsergebnisses zur Nullhypothese mit dem Bayes' Theorem (vgl. Formel (3.14) und KLIR, 2006, S. 67) berechnet werden:

$$p_0(T) = \frac{P(T|H_0) \cdot P(H_0)}{P(T|H_0) \cdot P(H_0) + P(T|H_1) \cdot P(H_1)} = \frac{\rho_0(T) \cdot P(H_0)}{\rho_0(T) \cdot P(H_0) + \rho_1(T) \cdot P(H_1)}. \quad (6.1)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $p_1(T) = P(H_1|T)$  für die Zugehörigkeit des Ermittlungsergebnisses zur Alternativhypothese ist:

$$p_1(T) = 1 - \frac{\rho_0(T) \cdot P(H_0)}{\rho_0(T) \cdot P(H_0) + \rho_1(T) \cdot P(H_1)} = 1 - p_0(T). \quad (6.2)$$

Für die Testentscheidung kommen dann vier mögliche Alternativen in Frage. Zum einen kann bei einer korrekten Nullhypothese diese angenommen oder zugunsten der Alternativhypothese verworfen werden. Zum anderen kann bei korrekter Alternativhypothese diese oder die Nullhypothese favorisiert werden.

Mit der Nutzentheorie werden für jede der vier Möglichkeiten die entstehenden Nutzen berücksichtigt:

- I.  $U_{0,0}$  der Nutzen bei einer korrekt angenommenen Nullhypothese.
- II.  $U_{1,0}$  der Nutzen bei einer fälschlicherweise angenommenen Alternativhypothese (Fehler 1. Art).
- III.  $U_{1,1}$  der Nutzen bei einer korrekt angenommenen Alternativhypothese.
- IV.  $U_{0,1}$  der Nutzen bei einer fälschlicherweise angenommenen Nullhypothese (Fehler 2. Art).

Der Punkt II entspricht einem Fehler 1. Art aus Kapitel 4.4.1 und der Punkt IV dem eines Fehler 2. Art (vgl. Kapitel 4.4.2). Favorisiert wird diejenige Entscheidung, die den größten Nutzen hat. Der zu erwartende Gesamtnutzen  $K_0$ , der bei Annahme der Nullhypothese entsteht, berechnet sich zu:

$$K_0 = p_0(T)U_{0,0} + p_1(T)U_{0,1} = p_0(T)(U_{0,0} - U_{0,1}) + U_{0,1} \quad (6.3)$$

und den zu erwartenden Gesamtnutzen  $K_1$  für die Alternativhypothese erhält man mit:

$$K_1 = p_0(T)U_{1,0} + p_1(T)U_{1,1} = p_0(T)(U_{1,0} - U_{1,1}) + U_{1,1}. \quad (6.4)$$

Für die endgültige Entscheidung wählt man die Hypothese mit dem größten Nutzen. Die Nullhypothese wird gewählt, wenn gilt:

$$p_0(T)U_{0,0} + p_1(T)U_{0,1} \geq p_0(T)U_{1,0} + p_1(T)U_{1,1}. \quad (6.5)$$

Da eine korrekte Entscheidung sinnvollerweise stets einen größeren Nutzen hat, kann für  $U_{0,0} > U_{1,0}$  und  $U_{1,1} > U_{0,1}$  und mit Formel (6.5) umgestellt werden zu:

$$\frac{p_0(T)}{p_1(T)} \geq \frac{U_{1,1} - U_{0,1}}{U_{0,0} - U_{1,0}}. \quad (6.6)$$

Berücksichtigt man die Beziehung aus Gleichung (6.1) kann abschließend der unter dem Namen **Neyman-Pearson-Kriterium** bekannte Quotient für die endgültige Testentscheidung angegeben werden (KREINOVICH ET AL., 2008):

$$\frac{p_0(T)}{p_1(T)} \geq r_0 = \frac{(U_{1,1} - U_{0,1})p_1(T)}{(U_{0,0} - U_{1,0})p_0(T)} \Rightarrow H_0 \text{ annehmen.} \quad (6.7)$$

Die rechte Seite der Ungleichung (6.7) ist bekannt, sodass

- die Nullhypothese angenommen wird, wenn der Quotient  $p_0(T)/p_1(T) \geq r_0$  ist.
- die Alternativhypothese angenommen wird, wenn der Quotient  $p_0(T)/p_1(T) < r_0$  ist.

Die vorgestellte Testentscheidung ist im Falle präziser Daten möglich, wobei jedoch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die Nullhypothese als auch Alternativhypothese bekannt sein müssen. Die Erweiterung dieses Allgemeinfalles für alle Arten von auftretenden Unsicherheiten muss kommenden Arbeiten vorbehalten bleiben. Der einfachste Fall der Testentscheidung, die im Folgenden behandelt wird, liegt vor, wenn weder die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Nullhypothese  $\rho_0$  noch Alternativhypothese  $\rho_1$  bekannt sind. In diesen Fällen wird der Annahmehbereich über einen Toleranzbereich spezifiziert. Bei dem Toleranzbereich kann es sich dabei um eine unscharfe Größe handeln (vgl. Kapitel 4.1.1). In den Kapitel 7.1.1.2 und 7.2.4.2 wird die Testentscheidung bei Toleranzbereichen für den Annahmehbereich an einem Beispiel aus der Messtechnik erläutert.

## 6.2 Testentscheidungen bei zufälliger Variabilität

Bei der Beschreibung der Unsicherheiten der Beobachtungen mittels zufälliger Variabilität ist die eindimensionale Testgröße  $T$  durch ihre zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschrieben:

$$T \sim \rho_T(x). \quad (6.8)$$

Im klassischen Fall ist der Annahmehereich über eine Indikatorfunktion  $i_A(x)$  angegeben (vgl. auch Formel (4.3)). In diesen Fällen ist bereits bekannt, wie die Wahrscheinlichkeit  $p_0(T) = P(H_0|T)$  für die Zugehörigkeit der Teststatistik zur Nullhypothese berechnet werden kann (z. B. RABINOVICH, 2005):

$$p_0(T) = \int_{\mathbb{R}} i_A(x) \rho_T(x) dx = \int_A \rho_T(x) dx. \quad (6.9)$$

Wie bereits in Kapitel 4.1 erläutert wurde, handelt es sich bei dem Annahmehereich  $i_A$  aber um eine unscharfe Größe. Die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{A}}(x)$  des Annahmehereiches  $\tilde{A}$  wurde mit Formel (4.5) festgelegt:

$$\tilde{A} := \{(x, m_{\tilde{A}}(x)) | x \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit} \quad m_{\tilde{A}}(x) : \mathbb{R}^u \rightarrow [0,1]. \quad (6.10)$$

Der unscharfe Verwerfungsbereich  $\tilde{V}$  und dessen Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{V}}(x)$  ergeben sich mit Formel (3.37) und (4.6) direkt als mathematisches Komplement zum Annahmehereich:

$$m_{\tilde{V}}(x) = m_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - m_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6.11)$$

Im Falle des unscharfen Annahmehereiches ist bei der Berechnung von  $p_0(T)$  die Indikatorfunktion  $i_A(x)$  in Formel (6.9) durch die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{A}}(x)$  zu ersetzen (KLIR, 2006, S. 334f):

$$p_0(T) = \int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{A}}(x) \rho_T(x) dx. \quad (6.12)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $p_1(T) = P(H_1|T)$  für die Zugehörigkeit des Ermittlungsergebnisses zum Verwerfungsbereich ist:

$$p_1(T) = 1 - p_0(T) = \int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{V}}(x) \rho_T(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (1 - m_{\tilde{A}}(x)) \rho_T(x) dx. \quad (6.13)$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ist  $p_1(T)$  und für einen Fehler 2. Art  $p_0(T)$ . Mit diesen Werten lassen sich die Gesamtnutzen  $K_0$  und  $K_1$  bei Annahme der Nullhypothese bzw. Alternativhypothese mit den Formel (6.3) und (6.4) berechnen. Die Nullhypothese wird angenommen, wenn gilt:

$$p_0(T)U_{00} + p_1(T)U_{01} \geq p_0(T)U_{10} + p_1(T)U_{11}. \quad (6.14)$$

Nach Umstellen von (6.14) auf die Nutzen wird die Nullhypothese angenommen bei:

$$p_0(T) \geq p_{0,\text{crit}} = \frac{U_{11} - U_{01}}{U_{00} - U_{01} - U_{10} + U_{11}}. \quad (6.15)$$

Im Folgenden ist  $p_{0,\text{crit}}$  eine kritische Wahrscheinlichkeit, ab der die Nullhypothese akzeptiert wird.

## 6.3 Testentscheidung bei Intervallen für die Beobachtungen

Eine zweite mögliche Unsicherheitsquelle bei den Beobachtungen ist durch die in Kapitel 3.2.2 und Formel (3.15) definierten (reellen) Intervalle gegeben. Testentscheidungen im Falle von Intervallen sind Spezialfälle der Testentscheidungen bei Fuzzy-Sets, sollen aber trotzdem in diesem Kapitel behandelt werden. Der Leser erhält damit einen verständlichen Einstieg in das Testen bei unscharfen Teststatistiken und Toleranzwerten für den Annahmehereich.

Die Teststatistik  $[T]$  ist in diesen Fällen als Intervall definiert:

$$[T] = [\underline{T}, \bar{T}] = \{t \in \mathbb{R} | \underline{T} \leq t \leq \bar{T}, \underline{T}, \bar{T} \in \mathbb{R}\}. \quad (6.16)$$

Der Annahmehereich  $[A]$  soll zunächst wie im klassischen Fall über eine Indikatorfunktion  $i_A(x)$  spezifiziert sein (vgl. Formel (4.3)). Die Indikatorfunktion  $i_V(x)$  des Verwerfungsbereiches  $[V]$  ergibt sich damit

als Komplement  $i_v(x) = 1 - i_A(x)$  zum Annahmehereich. Sofern der mit Formel (3.37) berechnete Durchschnitt von Annahmehereich und Teststatistik die leere Menge ist (Intervalle sind Spezialfälle von Fuzzy-Sets), muss die Nullhypothese in jedem Fall verworfen werden:

$$[A] \cap [T] = \emptyset \rightarrow H_0 \text{ verwerfen.} \quad (6.17)$$

Ist der Durchschnitt des Verwerfungsbereiches mit der Teststatistik die leere Menge, muss die Nullhypothese in jedem Fall angenommen werden:

$$[V] \cap [T] = \emptyset \rightarrow H_0 \text{ annehmen.} \quad (6.18)$$

Sind die beiden Durchschnitte aus Formel (6.17) und (6.18) ungleich der leeren Menge existieren zwei mögliche Alternativen bei der Testentscheidung. Zum einen wird das Hurwicz-Kriterium (HURWICZ, 1951) in Kapitel 6.3.1 gezeigt. Zum anderen wird im Rahmen dieser Arbeit eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation des Intervalles vorgeschlagen (vgl. Kapitel 6.3.2). Im Anschluss daran wird in Kapitel 6.3.3 ein kritischer Vergleich der beiden Vorgehensweisen durchgeführt.

### 6.3.1 Das Hurwicz-Kriterium

Das *Hurwicz Kriterium* (engl.: Hurwicz criterion) ist eine von HURWICZ (1951) veröffentlichte Vorgehensweise beim Testen im Falle von Intervallunschärfe. Es stellt eine lineare Transformation dar, die die Präferenz des Experten bei der Testentscheidung wiedergibt und zwischen dem optimistischen und dem pessimistischen Wert vermittelt. Die lineare Transformation ist als stetige Abbildung  $\varpi: [u] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow u \in \mathbb{R}$  eines Intervalles  $[u]$  für den Nutzen in eine einzelne Zahl  $u$  für den jeweiligen Nutzen zu verstehen:

$$\varpi := \{u = \kappa \bar{u} + (1 - \kappa) \underline{u} \mid \kappa \in [0, 1]\} \quad \text{mit } \varpi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (6.19)$$

Aufgabe des Experten ist die Wahl von  $\kappa \in [0, 1]$ . Den optimistischen Fall  $\bar{u}$ , der gleichbedeutend mit dem größten Nutzen ist, erhält man bei der Wahl von  $\kappa = 1$ . Den pessimistischen Fall  $\underline{u}$ , der gleichbedeutend mit dem geringsten Nutzen ist, erhält man für  $\kappa = 0$ .

Bei der Testentscheidung mit Intervallen ist der optimistische Fall, dass die wahre Testgröße im Annahmehereich liegt und der pessimistische, dass sie im Verwerfungsbereich liegt. Wendet man diese Erkenntnis auf den klassischen Fall in Formel (6.5) an, so wählt man die Nullhypothese, wenn gilt:

$$\kappa U_{00} + (1 - \kappa) U_{01} \geq \kappa U_{10} + (1 - \kappa) U_{11} \quad (6.20)$$

und verwirft die Nullhypothese bei:

$$\kappa U_{00} + (1 - \kappa) U_{01} < \kappa U_{10} + (1 - \kappa) U_{11}. \quad (6.21)$$

Nach Umstellung von Formel (6.20) auf den Parameter  $\kappa$  erhält man (NIWITPONG ET AL., 2008):

$$\kappa \geq \frac{U_{11} - U_{01}}{U_{00} - U_{01} - U_{10} + U_{11}}. \quad (6.22)$$

Bei der Testentscheidung spielt die Mächtigkeit der Durchschnittsmengen keine Rolle. Nur die Entscheidung des Experten über die Wahl des Parameters  $\kappa$  in Ungleichung (6.22) beeinflusst die endgültige Testentscheidung. Das Hurwicz-Kriterium kann auch bei bekannter Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter  $H_0$  angewandt werden. Beispiele dafür finden sich in KREINOVICH ET AL. (2005 und 2008).

### 6.3.2 Eine Alternative zum Hurwicz-Kriterium

Die Tatsache, dass die Mächtigkeit der Durchschnittsmengen bei den Entscheidungen keine Rolle spielt, legt es nahe nach einem Kriterium zu suchen, das die Mächtigkeit der Durchschnittsmengen berücksichtigt. Die *Maximum-Entropie-Methode* (MEM) der Bayes'schen Statistik (WU, 1997 und JAYNES, 2003), liefert hierfür einen geeigneten Zugang. Sie erlaubt es, trotz mangelhafter problemspezifischer Information, einem Intervall eine a-priori Wahrscheinlichkeit zuzuweisen. Die Maximum-Entropie-Methode legt damit so wenig wie möglich fest und sollte erst im letzten Schritt einer Testentscheidung angewandt werden, wenn die unscharfe Teststatistik mit dem Annahme- und Verwerfungsbereich verglichen wird.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtfunktion mit der geringsten Information innerhalb eines Intervalles ist die Gleichverteilung  $U$  (JAYNES, 2003). Wendet man diese Überlegungen auf ein Intervall ist, so ist die Test-

größe  $T$  gleichverteilt  $\rho_{[T]}(x) = U(\mu_T, \sigma_T^2)$  mit Erwartungswert  $\mu_T = (\bar{T} - \underline{T})/2$  und Varianz  $\sigma_T^2 = (\bar{T} - \underline{T})^2/12$  (z. B. KOCH, 2007):

$$T \sim \rho_{[T]}(x) = U\left(\mu_T, \sigma_T^2\right) = U\left(\frac{\bar{T} - \underline{T}}{2}, \frac{(\bar{T} - \underline{T})^2}{12}\right). \quad (6.23)$$

Mit der oberen  $\bar{T}$  und unteren  $\underline{T}$  Intervallgrenze. Die Wahrscheinlichkeit  $p_0([T])$ , dass die Teststatistik  $T$  im Annahmehereich liegt, lässt sich dann mit Formel (6.9) berechnen:

$$p_0([T]) = \int_{\mathbb{R}} i_{[A]}(x) \rho_{[T]}(x) dx = \int_A \rho_{[T]}(x) dx = \frac{|[A] \cap [T]|}{|[T]|}, \quad (6.24)$$

mit  $|\dots|$  der Breite eines Intervalles. Die Wahrscheinlichkeit  $p_1([T])$ , dass  $T$  im Verwerfungsbereich liegt erhält man mit:

$$p_1([T]) = \int_{\mathbb{R}} i_{[V]}(x) \rho_{[T]}(x) dx = \int_V \rho_{[T]}(x) dx = \frac{|[V] \cap [T]|}{|[T]|}. \quad (6.25)$$

Mit dem vorgestellten Entscheidungskriterium aus Formel (6.15):

$$p_0([T]) \geq p_{0,\text{crit}} = \frac{U_{11} - U_{01}}{U_{00} - U_{01} - U_{10} + U_{11}} \quad (6.26)$$

kann die endgültige Testentscheidung im Kontext der Nutzentheorie getroffen werden, die die Mächtigkeit der Teststatistik im Annahme- und Verwerfungsbereich berücksichtigt.

### 6.3.3 Vergleich des Hurwicz-Kriteriums mit dem alternativen Ansatz

Ein einfaches Beispiel soll die Unterschiede zwischen dem Hurwicz-Kriterium und dem alternativen Ansatz beim Testen mit Intervallen erläutern.

**Beispiel:** Bei einem Schleusenbauwerk kommt es durch Bodendeformationen zu signifikante Neigungen des Betonfundamentes, die ab einer Größenordnung von ca. 10 cgon zu Rissen im Fundament führen. Der Rissbildung kann entgegengewirkt werden, wenn der Untergrund rechtzeitig verpresst wird. Wird eine solche Verpressung nicht rechtzeitig durchgeführt, kommt es zu Rissen, die eine aufwändige Reparatur des Betonfundamentes nach sich ziehen. Unter der Nullhypothese  $H_0$  mit dem Annahmehereich  $[A] = [\underline{A}, \bar{A}] = [-10 \text{ cgon}, 10 \text{ cgon}]$  ist die Neigung des Fundamentes im sicheren Bereich von  $\pm 10$  cgon. Die Alternativhypothese und der Verwerfungsbereich ergeben sich als Negation zur Nullhypothese und zum Annahmehereich. Die entstehenden Nutzen durch die verschiedenen Testentscheidungen sind im Folgenden zusammengestellt:

- I.  $U_{0,0}$  Nutzen bei einer korrekt angenommenen Nullhypothese: Die Messung wird als kostenneutral angenommen, da sie in jedem Fall fortlaufend durchgeführt wird.
- II.  $U_{1,0}$  Nutzen bei einer fälschlicherweise angenommenen Alternativhypothese (Fehler 1. Art): Die vermuteten starken Neigungen führen dazu, dass der Untergrund verpresst wird, wodurch Kosten<sup>12</sup> in Höhe von 5000 € entstehen.
- III.  $U_{1,1}$  Nutzen bei einer korrekt angenommenen Alternativhypothese: Es muss eine Verpressung des Untergrundes durchgeführt werden, die 5000 € kostet.
- IV.  $U_{0,1}$  Nutzen bei einer fälschlicherweise angenommenen Nullhypothese (Fehler 2. Art): Da nicht festgestellt wurde, dass die Neigung den kritischen Bereich überschritten hat, kommt es zu Rissen im Fundament, die eine Reparatur in Höhe von 15000 € nötig werden lassen. Zudem ist die Verpressung des Untergrundes notwendig, damit sich die Rissbildung nicht verstärkt (5000 €). Es entstehen Gesamtkosten in Höhe von 20000 €.

Die Abbildung 6.1 zeigt zwei Beispiele für Beobachtungen mit Intervallunschärfe. Im oberen Teil der Abbildung ist eine Teststatistik  $[T_1]$  mit den Werten  $[T_1] = [\underline{T}_1, \bar{T}_1] = [-11 \text{ cgon}, -6 \text{ cgon}]$  und im unteren Bereich

<sup>12</sup> Kosten sind ein negativer Nutzen

eine zweite Teststatistik  $[T_2]$  mit  $[T_2] = [\underline{T}_2, \bar{T}_2] = [-14,5 \text{ cgon}, -9,5 \text{ cgon}]$  zu sehen. Die Anwendung des Hurwicz-Kriteriums liefert (vgl. Formel (6.22)):

$$\kappa \geq \frac{U_{11} - U_{01}}{U_{00} - U_{01} - U_{10} + U_{11}} = \frac{-5000 \text{ €} + 20000 \text{ €}}{0 \text{ €} + 20000 \text{ €} + 5000 \text{ €} - 5000 \text{ €}} = \frac{15}{20} = 0,75. \quad (6.27)$$

Ab einem Wert von  $\kappa = 0,75$  wird die Nullhypothese für beide in Abbildung 6.1 dargestellten Teststatistiken bei dem Hurwicz-Kriterium angenommen. Die stark verschiedene Lage des Intervalles hat keinen Einfluss auf die Testentscheidung, sondern lediglich der Experte mit der Wahl von  $\kappa$ .

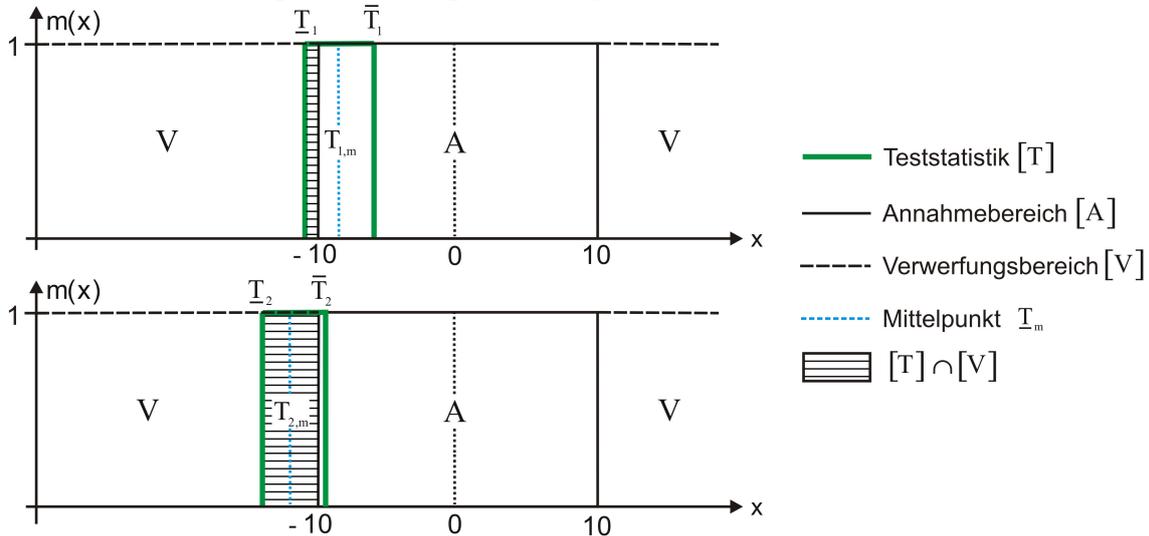


Abbildung 6.1: Zwei Situationen beim Testen mit Intervallunschärfe und Toleranzbereichen für den Annahmehereich.

Bei Anwendung des alternativen Testvorschlages nimmt man für das Intervall eine Gleichverteilung an, so dass mit den Formeln (6.24) und (6.26) folgende Testentscheidungen getroffen werden können:

$$p_0([T_1]) = 0,8 > p_{0,crit} = \frac{U_{11} - U_{01}}{U_{00} - U_{01} - U_{10} + U_{11}} = 0,75 \rightarrow H_0 \text{ annehmen,}$$

$$p_0([T_2]) = 0,1 < p_{0,crit} = \frac{U_{11} - U_{01}}{U_{00} - U_{01} - U_{10} + U_{11}} = 0,75 \rightarrow H_0 \text{ verwerfen.} \quad (6.28)$$

Für die erste Teststatistik  $T_1$  wird demnach die Nullhypothese angenommen, da die Wahrscheinlichkeit  $p_0([T_1])$  größer als die kritische Wahrscheinlichkeit  $p_{0,crit}$  ist. Bei der zweiten Teststatistik  $T_2$  wird mit  $p_0([T_2]) = 0,1$  hingegen die Nullhypothese verworfen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die alternative Vorgehensweise bei Vorliegen der Nutzenfunktionen ohne Einfluss des Experten eine Testentscheidung erlaubt. Des Weiteren wird die Lage des Intervalles bezüglich des Annahmehereiches berücksichtigt. Im folgenden Unterkapitel soll die im alternativen Ansatz vorgestellte Testentscheidung auf unscharfe Annahmehbereiche und unscharfe Teststatistiken (Fuzzy-Sets) erweitert werden.

### 6.4 Testentscheidung bei Fuzzy-Sets für die Beobachtungen

Als weitere mögliche Modellierung der Unsicherheiten bei den Beobachtungen wurden die in Kapitel 3.2.3 definierten Fuzzy-Sets vorgestellt. Das zu testende eindimensionale Ermittlungsergebnis (Testgröße) ist demnach als Fuzzy-Set  $\tilde{T}$  definiert. Annahmehereich  $\tilde{A}$  und Verwerfungsbereich  $\tilde{V}$  sind wie in Kapitel 4.1.2 als unscharfe Größen gegeben. Die Testentscheidung kann auf zwei verschiedene Arten interpretiert werden:

- i) Mengentheoretisch (Durchschnitt von Fuzzy-Sets).
- ii) Wahrscheinlichkeitstheoretisch (Wahrscheinlichkeit für Fuzzy-Ereignisse, NGUYEN und WU, 2005).

Der Ansatz i) für einen mengentheoretischen Vergleich der Teststatistik mit dem Annahme und Verwerfungsbereich wurde bereits in Kapitel 4.1.3 vorgestellt. Dieser kann auf diesen Fall übertragen werden, hat jedoch den Nachteil, dass er aufgrund der fehlenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Interpretation nicht in die Nutzentheorie integrierbar ist.

Der Ansatz ii) wurde in NIWITPONG ET AL. (2008) vorgestellt und soll im Folgenden kurz wiedergegeben werden. Grundgedanke ist die wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation eines Fuzzy-Sets, wenn es auf Basis von Expertenwissen (vgl. Kapitel 3.2.4) konstruiert wurde. In diesen Fällen steht die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{T}}(x)$  als Wahrscheinlichkeit für die Zugehörigkeit des Wertes  $x$  zum Fuzzy-Set  $\tilde{T}$ . Eine ausführliche theoretische Herleitung findet sich in NGUYEN und WU (2005). Man spricht bei dieser Kontext auch von **zufälligen Mengen** (engl.: random sets). Eine Erweiterung von Gleichung (3.11) auf die bedingte Wahrscheinlichkeit  $\mathfrak{P}(\tilde{E}_1|\tilde{E}_2)$  für die Zugehörigkeit des Fuzzy-Ereignisses  $\tilde{E}_1$  zu  $\tilde{E}_2$  erhält man mit (NGUYEN und WU, 2005, S. 39ff)<sup>13</sup>:

$$\mathfrak{P}(\tilde{E}_1|\tilde{E}_2) = \frac{\mathfrak{P}(\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2)}{\mathfrak{P}(\tilde{E}_2)} = \frac{\int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{E}_2}(x) dx} = \frac{\text{card}(m_{\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2}(x))}{\text{card}(m_{\tilde{E}_2}(x))} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6.29)$$

Überträgt man den Grundgedanken auf die Hypothesentests bei Toleranzbereichen, erhält man die bedingte Wahrscheinlichkeit  $\mathfrak{P}(\tilde{A}|\tilde{T})$ , dass die Teststatistik mit dem Annahmehereich übereinstimmt zu (NIWITPONG ET AL., 2008):

$$\mathfrak{P}(\tilde{A}|\tilde{T}) = \frac{\mathfrak{P}(\tilde{A} \cap \tilde{T})}{\mathfrak{P}(\tilde{T})} = \frac{\int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{A} \cap \tilde{T}}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{T}}(x) dx} = \frac{\text{card}(m_{\tilde{A} \cap \tilde{T}}(x))}{\text{card}(m_{\tilde{T}}(x))} = \frac{\text{card}(\tilde{A} \cap \tilde{T})}{\text{card}(\tilde{T})} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (6.30)$$

und damit genau die identische Lösung wie Formel (4.17) aus Kapitel 4.1.3. Die bedingte Wahrscheinlichkeit  $\mathfrak{P}(\tilde{V}|\tilde{T})$ , dass das Ermittlungsergebnis mit dem Verwerfungsbereich übereinstimmt berechnet sich zu:

$$\mathfrak{P}(\tilde{V}|\tilde{T}) = \frac{\mathfrak{P}(\tilde{V} \cap \tilde{T})}{\mathfrak{P}(\tilde{T})} = \frac{\text{card}(\tilde{V} \cap \tilde{T})}{\text{card}(\tilde{T})} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6.31)$$

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich in diesem Fall um einen willkürlichen Annahmehereich handelt, während in Kapitel 4 die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\rho_0$  der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese bekannt ist. Bei bekannter Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\rho_0$  der Nullhypothese muss die Grenze des Annahmehereiches verschoben werden, um die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  des rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Falles zu erhalten. Eine Herleitung kann im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgen, der interessierte Leser sei auf NIWITPONG ET AL. (2008) sowie NGUYEN und WU (2005) verwiesen.

Für die beiden Wahrscheinlichkeiten zweier Fuzzy-Ereignisse aus den Formeln (6.30) und (6.31) gilt im Allgemeinen für unscharfe Annahme- und Verwerfungsbereiche:

$$\mathfrak{P}(\tilde{A}|\tilde{T}) + \mathfrak{P}(\tilde{V}|\tilde{T}) \geq 1. \quad (6.32)$$

Erst für klassische Annahme- und Verwerfungsbereich (Intervalle) gilt in Formel (6.32), dass die Summe beider Fuzzy-Ereignisse identisch mit eins ist. Wendet man die Formeln (6.30) und (6.31) auf die Ungleichung (6.5) an, erhält man das Kriterium für die endgültige Testentscheidung bei Fuzzy-Sets zu:

$$\mathfrak{P}(\tilde{A}|\tilde{T})U_{00} + \mathfrak{P}(\tilde{V}|\tilde{T})U_{01} \geq \mathfrak{P}(\tilde{A}|\tilde{T})U_{10} + \mathfrak{P}(\tilde{V}|\tilde{T})U_{11}. \quad (6.33)$$

Eine weitere Vereinfachung der Gleichung ist aufgrund der Eigenschaften aus (6.32) allgemein nicht möglich. Für klassische Annahmehereiche kann umgestellt werden auf:

$$\mathfrak{P}(\tilde{A}|\tilde{T}) \geq p_{0,\text{crit}} = \frac{U_{11} - U_{01}}{U_{00} - U_{01} - U_{10} + U_{11}}. \quad (6.34)$$

## 6.5 Testentscheidungen bei FRVs für die Beobachtungen

Der allgemeinste Fall einer Testentscheidung in dieser Arbeit bei Toleranzbereichen für den Annahmehereich liegt vor, wenn die Unsicherheit der Beobachtungen mittels FRVs aus Kapitel 3.2.5 beschrieben wird. Das zu testende eindimensionale Ermittlungsergebnis  $\tilde{T}$  wird in diesem Fall über die charakteristische Zu-

<sup>13</sup> Es wurde eine andere Notation als in NGUYEN und WU (2005) verwendet, um die in dieser Arbeit verwendete Schreibweise konsistent beibehalten zu können.

gehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{T}}(x)$  definiert. Die Herleitung eines Testkriteriums für den allgemeinsten Fall des Testens blieb im Rahmen dieser Arbeit erfolglos. In diesem Kapitel kann nur eine Vorgehensweise vorgeschlagen werden, wenn das Ermittlungsergebnis  $\tilde{T}$  über eine Indikatorfunktion  $i_{\tilde{T}}$  definiert wird. Dies entspricht der Lösung für den  $\alpha$ -Schnitt  $\tilde{T}_{\alpha}$ , wenn die FRV über die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{T}}(x)$  angegeben wird. Kommende Arbeiten sollten für die Lösung des Allgemeinfalls bei einem  $\alpha$ -Schnitt basierten Verfahren ansetzen.

Die stochastische Unsicherheitskomponente (der Mittelpunkt  $\underline{T}_m$  der FRV) ist durch ihre zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\rho_{\underline{T}_m}(x)$  spezifiziert:

$$\underline{T}_m \sim \rho_{\underline{T}_m}(x). \quad (6.35)$$

Bei dieser Art von Unsicherheitsbeschreibung ist auch die Wahrscheinlichkeit, dass  $\tilde{T}$  im Annahmehereich liegt eine unscharfe Größe. Im einfachsten Fall, wenn  $\tilde{T}$  über eine Indikatorfunktion definiert wird, handelt es sich bei der Wahrscheinlichkeit  $[p_0(\tilde{T})] = [p_0(\tilde{T}), \bar{p}_0(\tilde{T})]$  um ein Intervall.

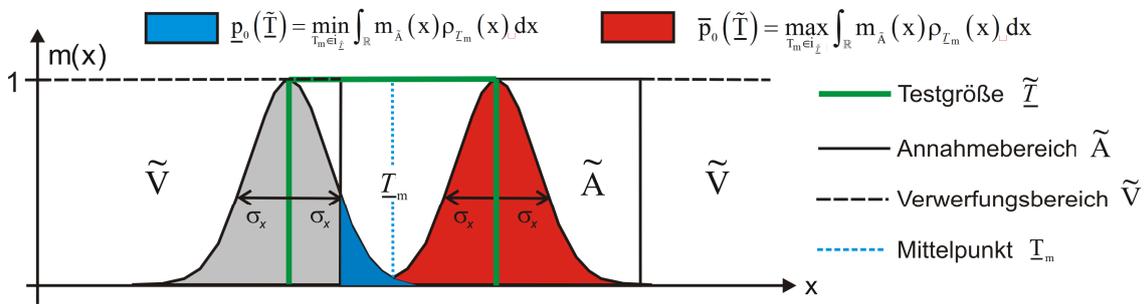


Abbildung 6.2: Beispiel für das Testen mit FRVs und einem klassischen Annahmehereich.

Dieses erhält man durch Anwendung des Zadeh'schen Erweiterungsprinzips aus Formel (3.40) mittels der folgenden Optimierungsaufgabe:

$$\underline{p}_0(\tilde{T}) = \min_{T_m \in \tilde{T}} \int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{A}}(x) \rho_{\underline{T}_m}(x) dx \quad \text{und} \quad \bar{p}_0(\tilde{T}) = \max_{T_m \in \tilde{T}} \int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{A}}(x) \rho_{\underline{T}_m}(x) dx. \quad (6.36)$$

Eine geometrische Interpretation bei klassischen Annahmehereichen ist in Abbildung 6.2 zu sehen. Die Wahrscheinlichkeit  $[p_1(\tilde{T})] = [p_1(\tilde{T}), \bar{p}_1(\tilde{T})]$ , dass  $\tilde{T}$  im Verwerfungsbereich liegt, berechnet sich zu:

$$\underline{p}_1(\tilde{T}) = \min_{T_m \in \tilde{T}} \int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{V}}(x) \rho_{\underline{T}_m}(x) dx \quad \text{und} \quad \bar{p}_1(\tilde{T}) = \max_{T_m \in \tilde{T}} \int_{\mathbb{R}} m_{\tilde{V}}(x) \rho_{\underline{T}_m}(x) dx. \quad (6.37)$$

Mit den unscharfen Wahrscheinlichkeiten wird auch der Gesamtnutzen  $[K_{0,\tilde{T}}] = [K_{0,\tilde{T}}, \bar{K}_{0,\tilde{T}}]$ , der bei Annahme der Nullhypothese entsteht zu einer unscharfen Größe. Da eine korrekte Entscheidung  $U_{00}$  einen größeren Nutzen als eine falsche Entscheidung  $U_{10}$  hat, gilt mit Formel (6.3) und (6.4):

$$\begin{aligned} \underline{K}_{0,\tilde{T}} &= \min_{p_0 \in [p_0, \bar{p}_0]} (p_0(\tilde{T})U_{00} + [1 - p_0(\tilde{T})]U_{01}) = \underline{p}_0(\tilde{T})(U_{00} - U_{01}) + U_{01}, \\ \bar{K}_{0,\tilde{T}} &= \max_{p_0 \in [p_0, \bar{p}_0]} (p_0(\tilde{T})U_{00} + [1 - p_0(\tilde{T})]U_{01}) = \bar{p}_0(\tilde{T})(U_{00} - U_{01}) + U_{01} \end{aligned} \quad (6.38)$$

und für den Gesamtnutzen  $[K_{1,\tilde{T}}] = [K_{1,\tilde{T}}, \bar{K}_{1,\tilde{T}}]$  der Alternativhypothese gilt entsprechend mit  $U_{11} - U_{01} > 0$ :

$$\begin{aligned} \underline{K}_{1,\tilde{T}} &= \min_{p_0 \in [p_0, \bar{p}_0]} (p_0(\tilde{T})U_{10} + [1 - p_0(\tilde{T})]U_{11}) = \bar{p}_0(\tilde{T})(U_{10} - U_{11}) + U_{11}, \\ \bar{K}_{1,\tilde{T}} &= \max_{p_0 \in [p_0, \bar{p}_0]} (p_0(\tilde{T})U_{10} + [1 - p_0(\tilde{T})]U_{11}) = \underline{p}_0(\tilde{T})(U_{10} - U_{11}) + U_{11}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Eine eindeutige Entscheidung für die Nullhypothese oder Alternativhypothese ist in zwei Fällen möglich:

- Ist  $\underline{K}_{0,\tilde{T}} > \bar{K}_{1,\tilde{T}}$  wird die Nullhypothese  $H_0$  angenommen.
- Ist  $\bar{K}_{0,\tilde{T}} < \underline{K}_{1,\tilde{T}}$  wird die Nullhypothese  $H_0$  verworfen (die Alternativhypothese  $H_1$  angenommen).

In allen anderen Fällen muss auf das in Kapitel 6.3.1 vorgestellte Hurwicz-Kriterium zurückgegriffen werden. Aufgabe des Experten ist wiederum die Wahl von  $\kappa \in [0,1]$ . Wendet man diese Vorgehensweise auf den klassischen Fall in Formel (6.5) an, wird die Nullhypothese angenommen, wenn gilt:

$$\kappa \bar{K}_{0,\tilde{I}} + (1-\kappa) \underline{K}_{0,\tilde{I}} \geq \kappa \bar{K}_{1,\tilde{I}} + (1-\kappa) \underline{K}_{1,\tilde{I}}. \quad (6.40)$$

Nach Einsetzen von (6.38) und (6.39) in die Ungleichung (6.40):

$$\begin{aligned} \kappa \left[ \bar{p}_0(\tilde{I})(U_{00} - U_{01}) + U_{01} \right] + (1-\kappa) \left[ \underline{p}_0(\tilde{I})(U_{00} - U_{01}) + U_{01} \right] \geq \dots \\ \dots \kappa \left[ \bar{p}_0(\tilde{I})(U_{10} - U_{11}) + U_{11} \right] + (1-\kappa) \left[ \bar{p}_0(\tilde{I})(U_{10} - U_{11}) + U_{11} \right], \end{aligned} \quad (6.41)$$

folgt nach zweimaligem Umformen zu:

$$\begin{aligned} \kappa \left( \left[ \bar{p}_0(\tilde{I})(U_{00} - U_{01}) + U_{01} \right] - \left[ \underline{p}_0(\tilde{I})(U_{00} - U_{01}) + U_{01} \right] - \left[ \bar{p}_0(\tilde{I})(U_{10} - U_{11}) + U_{11} \right] + \left[ \underline{p}_0(\tilde{I})(U_{10} - U_{11}) + U_{11} \right] \right) \geq \dots \\ \left[ \bar{p}_0(\tilde{I})(U_{10} - U_{11}) + U_{11} \right] - \left[ \underline{p}_0(\tilde{I})(U_{00} - U_{01}) + U_{01} \right] \end{aligned} \quad (6.42)$$

und

$$\kappa \left( \left[ \bar{p}_0(\tilde{I}) - \underline{p}_0(\tilde{I}) \right] (U_{00} - U_{01} + U_{10} - U_{11}) \right) \geq \left[ \bar{p}_0(\tilde{I})(U_{10} - U_{11}) + U_{11} \right] - \left[ \underline{p}_0(\tilde{I})(U_{00} - U_{01}) + U_{01} \right]. \quad (6.43)$$

Nach Umstellen auf den Parameter  $\kappa$  erhält man mit  $(\bar{p}_0(\tilde{I}) - \underline{p}_0(\tilde{I}))(U_{00} - U_{10} + U_{01} - U_{11}) > 0$ :

$$\kappa \geq \frac{\bar{p}_0(\tilde{I})(U_{10} - U_{11}) - \underline{p}_0(\tilde{I})(U_{00} - U_{01}) + U_{11} - U_{01}}{(\bar{p}_0(\tilde{I}) - \underline{p}_0(\tilde{I}))(U_{00} - U_{01} + U_{10} - U_{11})} = \phi_{\text{crit}} \quad \text{und} \quad \phi_{\text{crit}} \in \mathbb{R}. \quad (6.44)$$

In zwei Fällen ist eine eindeutige Entscheidung möglich. Zum einen kann  $\phi_{\text{crit}} \leq 0$  sein, sodass die Nullhypothese in jedem Fall angenommen wird und zum anderen ist für  $\phi_{\text{crit}} > 1$  die Nullhypothese in jedem Fall zu verwerfen. Die Testentscheidung bei FRVs, die über eine Indikatorfunktion  $i_{\tilde{I}}$  spezifiziert werden, kann so interpretiert werden, dass eine systematische Abweichung im Bereich der Indikatorfunktion variieren kann und so die wahrscheinlichkeitstheoretische Komponente (die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion) eine unbekanntes Translation erhält, die im Bereich der Indikatorfunktion variieren kann. Ein praktisches Beispiel wird in Kapitel 7.2.4.2 gezeigt.

## 6.6 Zusammenfassung

In der Geodäsie sind zumeist die Ermittlungsergebnisse, die der Nullhypothese folgen, deutlich häufiger als die der Alternativhypothese. In diesen Fällen wird die Nullhypothese angegeben und die Alternativhypothese ergibt sich als Negation zur Nullhypothese (vgl. Kapitel 4.1.1). Es braucht lediglich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\rho_0$  der Nullhypothese bekannt sein. Mit dieser wird dann das Quantil  $\rho_{\alpha|1-\alpha}$  der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zur Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  festgelegt, was den Annahmehbereich festlegt. Ein zweiter wichtiger Fall tritt auf, wenn durch Beobachtungen externe Spezifikationen überprüft werden sollen. In diesen Fällen ist weder die Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese noch die der Ermittlungsergebnisse unter der Alternativhypothese bekannt, sodass der Annahmehbereich zur Nullhypothese mittels Toleranzen festgelegt wird.

Für beide genannten Fragestellungen konnten im Rahmen dieser Arbeit Lösungsvorschläge für Hypothesentests mit unscharfen Daten entwickelt und angegeben werden. In diesem Kapitel wurden Vorschläge für den Fall unterbreitet, wenn der Annahmehbereich der Nullhypothese über Toleranzen spezifiziert ist. In den Kapiteln 4 und 5 wurde der Fall behandelt, bei dem die Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese bekannt ist, sodass der Annahmehbereich über die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  festgelegt wird. Für beide Vorgehensweisen werden in Kapitel 7, insbesondere in Kapitel 7.1.1 und 7.2.4, ausführlichere Beispiele gezeigt werden. Zudem wurde in diesem Kapitel gezeigt, dass eine wahrscheinlichkeitstheoretisch motivierte Interpretation von Fuzzy-Sets möglich ist, wenn diese mit Hilfe von Expertenwissen konstruiert wurden (vgl. Kapitel 3.2.4).



## 7 Anwendung der Ansätze in der geodätischen Deformationsanalyse

Im letzten Kapitel der vorliegenden Arbeit sollen die entwickelten Ansätze in der geodätischen Deformationsanalyse angewendet werden. In der Deformationsanalyse geht es um die messtechnische Erfassung und auswertetechnische Identifikation von geometrischen Veränderungen von Messobjekten. Die vornehmlichen geodätischen Aufgaben liegen in der Bauwerks- und Anlagenüberwachung, im weiteren Sinne gehören auch Hangrutschungen und rezente Krustenbewegungen dazu. Einen umfangreichen Überblick der Aufgabenfelder findet man in WELSCH ET AL. (2000, S. 15ff). Es existieren deskriptive und kausale Deformationsmodelle zur Modellierung von Überwachungsmessungen. Während bei den deskriptiven Modellen lediglich ein geometrischer Vergleich eines Objektes zwischen zwei aufgenommenen Zuständen stattfindet, wird bei den kausalen Modellen die Belastung des Objektes funktional mit den geometrisch beobachteten Veränderungen zusammengeführt (vgl. auch Abbildung 7.1). Eine weitere Unterscheidung der Modelle erhält man, wenn eine zeitliche Komponente mit einbezogen wird. Ist das Objekt zum Zeitpunkt der Erfassung hinreichend in Ruhe, so wird bei deskriptiven Modellen das Kongruenzmodell für die Auswertung angewandt. Dieses geht auf PELZER (1971) zurück und wird in Kapitel 7.2 auf den Fall unscharfer Daten erweitert. Im Falle eines (mit der Zeit) veränderlichen Objektes wird ein kinematisches Deformationsmodell angewandt und in Kapitel 7.3 auf den Fall unscharfer Daten erweitert.

Die kausalen Modelle können weiter unterteilt werden. Ist das Objekt hinreichend in Ruhe findet eine statische Modellierung statt. Ist das Objekt in Bewegung, muss die zeitliche Komponente also mit modelliert werden, werden dynamische Modelle angewandt. Ein kurzes simuliertes Beispiel für ein dynamisches Modell bei Impräzision wird in Kapitel 7.3 vorgestellt. Eine Erweiterung aller kausalen Modelle auf den Fall unscharfer Daten ist mit den in Kapitel 3 bis 5 entwickelten Methoden grundsätzlich möglich, bleibt aufgrund des begrenzten zeitlichen Rahmens im Detail jedoch weiteren Arbeiten vorbehalten. Des Weiteren ist eine Optimierung geodätischer Netze bei Vorliegen von Impräzision möglich, die in SCHÖN und KUTTERER (2001 und 2002) sowie insbesondere in SCHÖN (2003) erläutert wird.

Die Hauptaufgabe des Kapitels soll auf der unscharfen Erweiterung der deskriptiven Modelle der geodätischen Deformationsanalyse liegen. Für die Herleitung und die Motivation der deskriptiven und kausalen Modelle im rein stochastischen Fall (klassischer Fall) wird auf einschlägige Literatur, z. B. PELZER (1971), NIEMEIER (1985), HEUNECKE (1995), JÄGER ET AL. (2005, S. 237ff), sowie insbesondere WELSCH ET AL. (2000) und darin zitierten Referenzen verwiesen. Neuere Arbeiten auf dem Gebiet der geodätischen Deformationsanalyse beschäftigen sich mit der Ausgleichung nach dem Prinzip der maximalen Korrelationen (NEITZEL, 2004), mit der Identifikation von instationären Deformationsprozessen (NEUNER, 2008) sowie mit der Identifikation von dynamischen Deformationsmodellen (EICHHORN, 2005 und 2007). In Kapitel 7.1 werden zunächst die untersuchten Datensätze vorgestellt. Für das Kongruenz- und das kinematische Modell werden jeweils ein simuliertes und ein reales Beispiel behandelt. Die Analyse dieser Datensätze erfolgt in Kapitel 7.2 (Kongruenzfall) und Kapitel 7.3 (kinematisches Modell). Jedes Teilkapitel beginnt mit der kurzen Vorstellung der rein stochastischen Vorgehensweise, gefolgt von der Erweiterung auf den unscharfen Fall. Bei der folgenden Analyse der Datensätze steht insbesondere ein Vergleich zur rein stochastischen Vorgehensweise im Vordergrund. Am Ende folgen eine Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse.

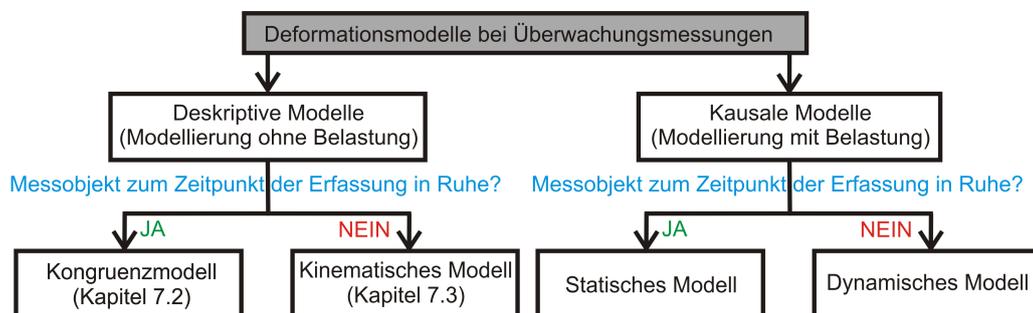


Abbildung 7.1: Die Auswertemodelle der geodätischen Deformationsanalyse nach WELSCH ET AL. (2000).

### 7.1 Die untersuchten Datensätze

#### 7.1.1 Die Datensätze für das Kongruenzmodell der Deformationsanalyse

Bei dem Kongruenzfall der geodätischen Deformationsanalyse wurden zwei Datensätze untersucht. Zum einen handelt es sich um reale Daten der Schleuse Uelzen (Kapitel 7.1.1.1) und zum anderen um eine simulierte Messung für die Bestimmung der Länge einer Maschinenachse (Kapitel 7.1.1.2).

### 7.1.1.1 Reale Daten der Schleuse Uelzen

Als zu untersuchendes reales Objekt wurde die in Abbildung 7.2 gezeigte Schleuse Uelzen I gewählt, die eines der beiden Aufstiegsbauwerke des Elbe-Seiten-Kanals darstellt. Mit der Schleuse wird ein Höhenunterschied von 23 m in ca. 14 min überbrückt. Aufgrund der täglich etwa 100 Schleusungen und der besonders schlanken Bauweise kam es in den letzten ca. 40 Jahren zu ermüdungswirksamen Beanspruchungen, sodass die Schleuse mehrfach instandgesetzt werden musste. Inzwischen ist aus diesem Grund eine zweite Schleuse gebaut worden, die ihren Betrieb 2008 aufgenommen hat, sodass die Schleuse Uelzen I nur noch bei Verkehrsspitzen sowie bei Reparatur- und Wartungsarbeiten der zweiten Schleuse den Verkehr abwickelt (WSV Uelzen, 2008).

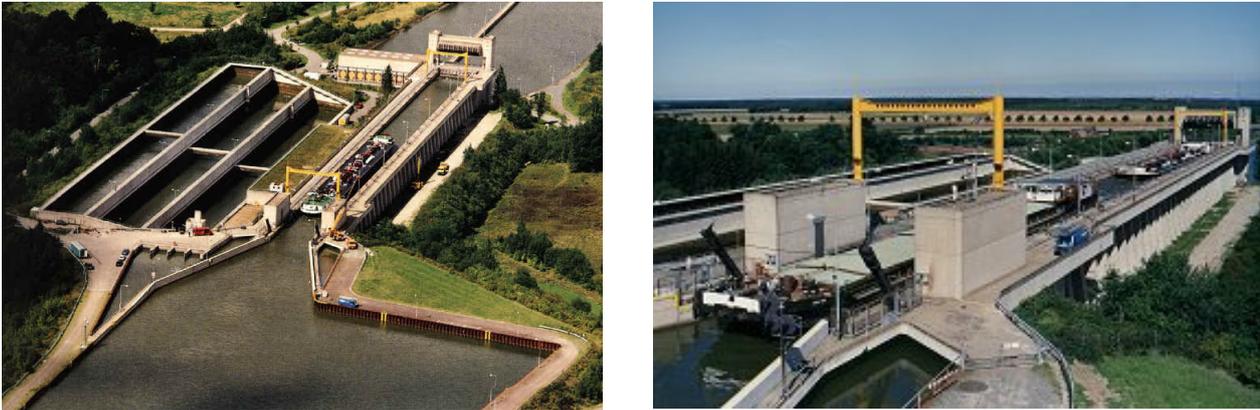


Abbildung 7.2: Ein Luftbild (links) und eine Ansicht der Schleuse Uelzen I im Osten (rechts) von der WSV (2008).

Art der Deformation	Ursache	Auswirkung
Kurzfristige (periodische) Deformation	- Lastwechsel beim Füllen und Leeren der Schleusenkammer - Unsymmetrische Anordnung der Sparbecken - Tagesgang Temperatur	- Aufweitung der Kammerwände: 40-45 mm - Setzung durch Kammerfüllung: 2,5 mm
Jahreszeitlich bedingte Verformung	- Temperaturzyklen im Jahr	- Dehnungs- und Stauchungserscheinungen: ca. 15 mm
Langfristige Setzungen und Verschiebungen	- Konstruktiv, gründungsbedingte Unterschiede	- Schieberhaus: 0,5 mm/a - Unterhaupt Westseite: 1,5 mm/a - Unterhaupt Ostseite: 0,1 mm/a
Temporäre Deformationen	- Bauvorhaben Uelzen II: Baugrubenaushebung	- Hebung Schleusenkammer: 7-8 mm

Tabelle 7.1: Art und Größenordnung der Deformationen an der Schleuse Uelzen I aus BORCHERS und HEER (2002).

Pro Schleusungsvorgang werden ca. 54000 t Wasser bewegt. Dies führt kurzfristig zu einer Aufweitung der Schleusenkammer und langfristig zu gründungsbedingten Bewegungen. Eine Zusammenstellung aller bekannten Deformationen mit ihren Größenordnungen ist in Tabelle 7.1 gegeben. Schwerpunkt der mit den entwickelten Methoden untersuchten Deformationen im Rahmen dieser Arbeit sind die durch Füllen und Leeren der Schleusenkammer bedingten Deformationen (kinematische Deformationsanalyse) sowie die langfristigen Setzungserscheinungen (Kongruenzfall).

Epoche	2004	1999	1995/2	1995/1	1993	1992	1987	1986	1983	1982	1981	1980	1978
Anzahl Stützpunkte	12	20	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
Anzahl Strecken	36	237	130	44	44	46	29	22	20	44	22	28	20
Anzahl Richtungen	32	94	50	41	43	44	40	44	34	34	32	54	40
Anzahl Zenitwinkel	39	94	56	44	44	0	0	0	20	46	0	0	0
Beobachtungen gesamt	107	425	236	129	131	90	69	66	74	124	54	82	60
Freiheitsgrade (2d)	38	274	147	53	54	57	36	33	23	47	23	49	27
Datumsdefekte (2d)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Tabelle 7.2: Übersicht der Messepochen für den Kongruenzfall der geodätischen Deformationsanalyse.

Das Geodätische Institut der Leibniz Universität Hannover (GIH) hat seit 1978 im Rahmen von Seminaren, Forschungsprojekten und Studien Überwachungsmessungen durchgeführt. Es stehen insgesamt 13 Epochen

für den Kongruenzfall der Deformationsanalyse zur Verfügung. Die Abbildung 7.3 (links) zeigt eine geometrische Ansicht aller Stütz- und Objektpunkte. Die Objektpunkte sind in rot und die Stützpunkte mit schwarzblauen Dreiecken dargestellt. Während die vier Objektpunkte für alle Epochen identisch sind, konnten nicht alle Stützpunkte in jeder Epoche besetzt werden. Die Datumsfestlegung erfolgt über die Punkte 904, 905, 9400 und 907 bis 911, die in jeder Epoche besetzt werden konnten. In Tabelle 7.2 sind die Anzahl der Beobachtungen und besetzten Stützpunkte sowie die jeweiligen Freiheitsgrade der Einzelausgleichungen für das zweidimensionale Überwachungsnetz dargestellt.

**7.1.1.2 Ein theoretisches Überwachungsnetz für die Bestimmung der Länge einer Maschinenachse**

Das Beispiel in Abbildung 7.3 (rechts) zeigt ein simuliertes Netz für die Bestimmung der Länge einer Maschinenachse. Es besteht aus insgesamt sechs Stützpunkten sowie dem Anfangs- und Endpunkt der Maschinenachse. Für den Einbau der Achse muss geklärt sein, ob deren Länge die erforderlichen Spezifikationen einhält. Aus diesem Grund wurden Richtungs- und Streckenmessungen zwischen den Stützpunkten und auf die mit einem Prisma vermarkten Endpunkte der Achse durchgeführt. Als Tachymeter wurden das Leica TCA 2003 und TCA 1101 eingesetzt, die eine Standardabweichung für eine in beiden Lagen gemessene Richtung von 0.15 mgon bzw. 0.50 mgon sowie eine Standardabweichung der Strecken von 1 mm + 1 ppm bzw. 2 mm + 2 ppm haben.

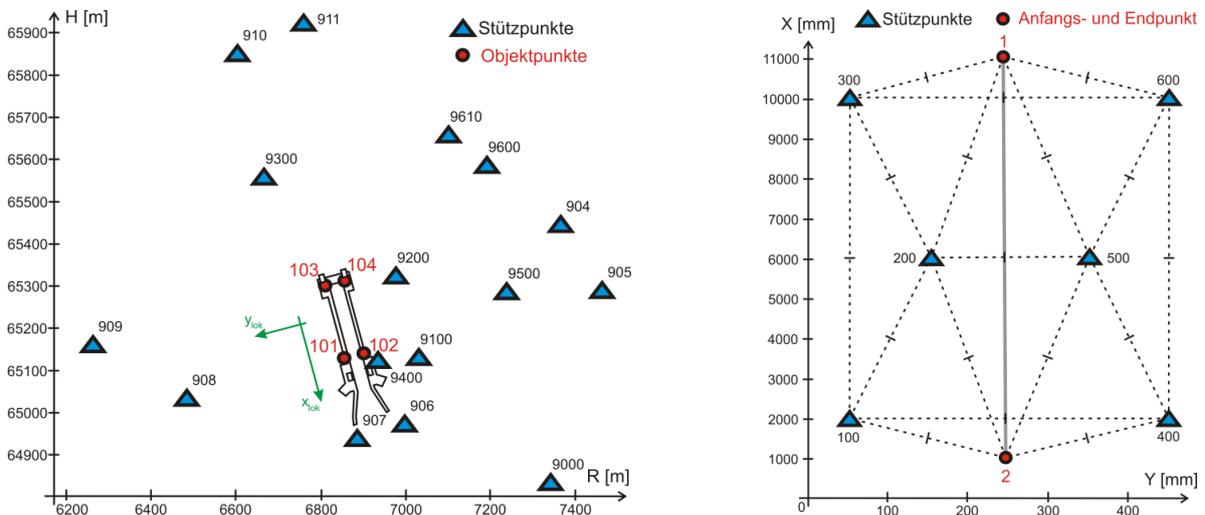


Abbildung 7.3: Darstellung der Überwachungsnetze der Schleuse Uelzen (links) und der Maschinenachse (rechts).

**7.1.2 Die Datensätze für die kinematische Deformationsanalyse**

**7.1.2.1 Reale Daten für Aufweitungsmessungen an der Schleuse Uelzen**

Für die Analyse der kurzfristigen Deformationen (Aufweitungen) der Schleusenkammer wurden tachymetrische Messungen mit dem Monitoringprogramm „Control“ durchgeführt (NEUMANN, 2004). Dabei wurden mit zwei Tachymetern synchronisierte Messungen zu acht Zielpunkten am Rand der Schleusenkammer durchgeführt, welche die Aufweitung der Schleusenkammer repräsentieren (vgl. Abbildung 7.4, links).

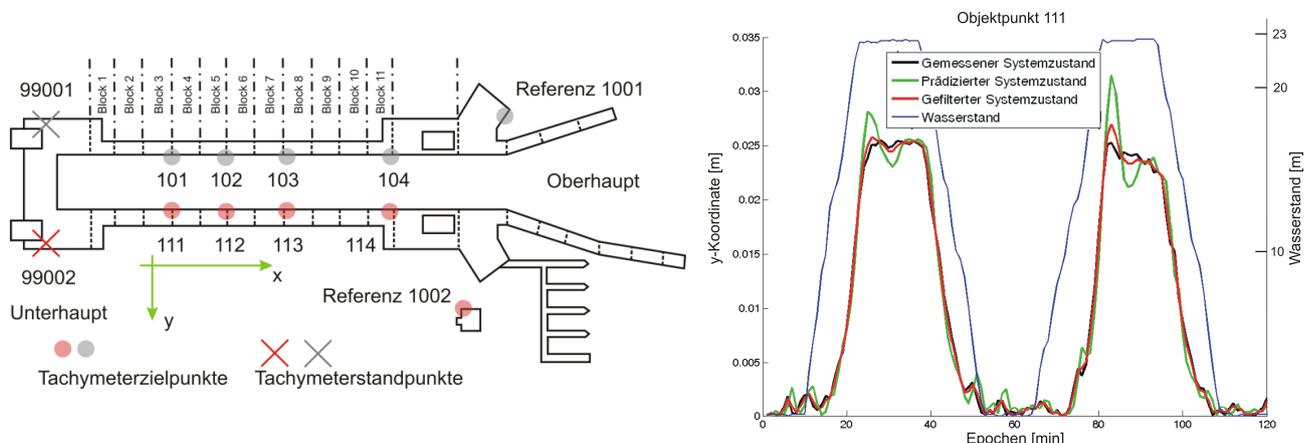


Abbildung 7.4: Konfiguration für die Aufweitungsmessungen (links) und die Auswertung des Punktes 111 (rechts).

Die acht Zielpunkte befinden sich in ca. 65 m, 95 m, 120 m und 180 m Entfernung zu den Tachymetern und wurden in Intervallen von 75 s angezielt. Aufgrund des Schiffsverkehrs würde es bei übergreifenden Sich-

ten immer wieder zu Behinderungen kommen, sodass die Punkte 101-104 mit dem Tachymeter auf Standpunkt 99001 und die Punkte 111-114 von Standpunkt 99002 aus beobachtet wurden. Als Kontrollrichtungen wurden die Punkte 1001 und 1002 als Nullrichtung angezielt. Die zeitliche Synchronisation erfolgte durch einen gemeinsamen Steuerungs-PC. Für eine detaillierte Schilderung der Messungen muss an dieser Stelle auf NEUMANN (2004, S. 78ff) verwiesen werden. Die Berechnungen für die kinematische Deformationsanalyse zeigen für alle Punkte vergleichbare Ergebnisse. Im Folgenden werden daher nur exemplarisch die Untersuchungen für den Punkt 111 gezeigt, dessen gemessene, prädierte und mit einem linearen Kalmanfilter (KF) geschätzte  $y$ -Koordinate in Abbildung 7.4 (rechts) zu sehen ist.

### 7.1.2.2 Identifikation eines dynamischen Deformationsmodells mittels adaptiver Kalmanfilterung

Bei dem letzten untersuchten Datensatz handelt es sich um die Simulation eines dynamischen Deformationsmodells und dessen Identifikation mittels adaptivem KF. In der adaptiven Partition des Filters werden im Feder-Dämpfungsmodell nach Abbildung 7.5 (links) und WELSCH ET AL. (2000, S. 314ff) ein Dämpfungsparameter  $\beta$  (Materialparameter) sowie die Federkonstante  $\gamma$  geschätzt. Die Daten und das Modell wurden in leicht abgewandelter Form aus WILLGALIS (1993) entnommen. Untersucht wird das in Abbildung 7.5 (links) dargestellte Modell, das aus einem festen Stützpunkt  $x_1$  und einem Objektpunkt  $x_2$  besteht. Im dynamischen System:

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\gamma}{\beta} x_2(t) + \frac{1}{\beta} u(t) + w_{x_2}(t) \quad (7.1)$$

ist die Geschwindigkeit  $\dot{x}_2(t)$  des Punktes 2 eine Funktion seines Zustandes  $x_2(t)$ , der Stellgröße  $u(t)$  und der Systemstörungen  $w_{x_2}(t)$  für den Punkt 2 in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

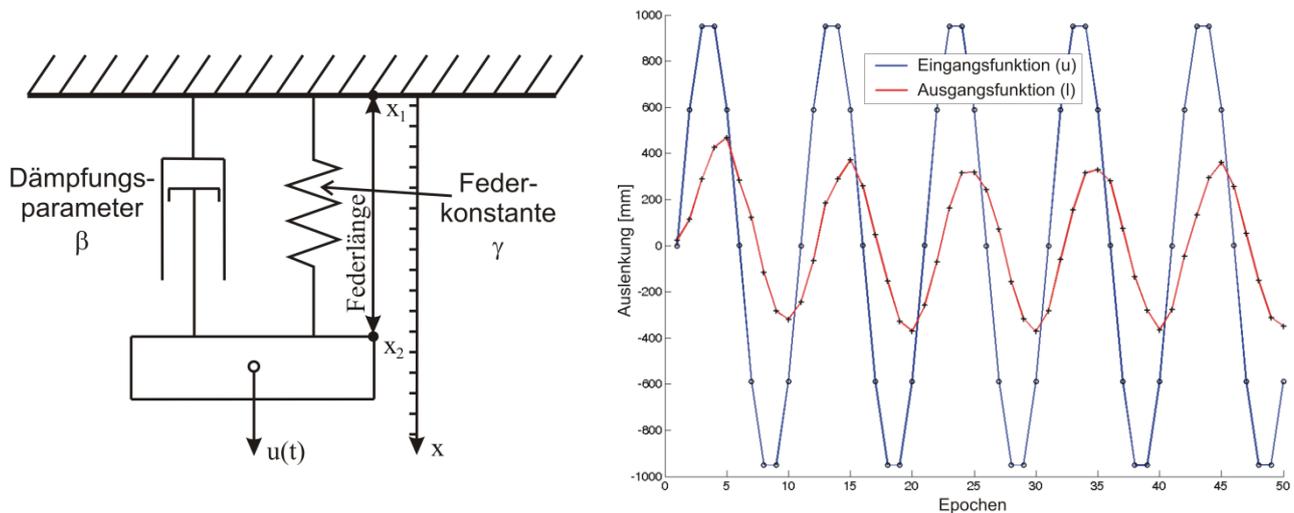


Abbildung 7.5: Das Feder-Dämpfungsmodell nach WELSCH ET AL. (2000, links) und die simulierten Daten (rechts).

Mittels Integration erhält man die diskrete Systemgleichung des dynamischen Modells aus (7.1) mit (WILLGALIS, 1993, S. 47ff):

$$x_{2,k+1} = e^{-\gamma/\beta \Delta t} x_{2,k} + \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma/\beta \Delta t}) u_k + e^{-\gamma/\beta \Delta t} w_{x_2,k} = \begin{bmatrix} T_{k+1,k} & B_{k+1,k} & C_{k+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2,k} \\ u_k \\ w_{x_2,k} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{k+1,k} \mathbf{x}_k^* \quad (7.2)$$

Für die adaptive Partition des Filters gilt die Systemgleichung:

$$\beta_{k+1} = \beta_k + w_{\beta,k} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{k+1} = \gamma_k + w_{\gamma,k} \quad (7.3)$$

Bei der Simulation wurden mit der Stellgröße  $u_k$  zunächst über 480 Epochen mit Formel (7.2) Sollwerte berechnet, die anschließend mit der in Tabelle 7.3 angegebenen Standardabweichung und dem Systemrauschen verfälscht wurden. Diese verrauschten Systemwerte wurden dann mittels einer Streckenmessung  $l$  zwischen dem festen Punkt  $x_1$  und dem stochastischen Punkt  $x_2$  überwacht. Die Beobachtungsgleichung lautet somit:

$$\mathbf{1}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2,k+1} \\ \gamma_{k+1} \\ \beta_{k+1} \end{bmatrix} - \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{v}_{k+1}. \quad (7.4)$$

Die simulierten Werte für die Stellgröße und die Beobachtungen sind in Abbildung 7.5 (rechts) dargestellt. Aus Formel (7.4) erkennt man, dass ein Konfigurationsdefekt vorliegt, sodass die Prozesskoeffizienten (die adaptiven Parameter) nicht direkt beobachtet werden können. Erst durch die (sich zeitlich ergebenden) Korrelationen bei der Systemfortschreibung kann der Konfigurationsdefekt behoben werden, was letztlich die Identifikation der Prozesskoeffizienten ermöglicht.

Wert	Standardabweichung	Systemrauschen
$x_2$ (zeitl. veränderlich)	$\sigma_{x_2} = 100,0 \text{ mm}$	$\sigma_{w,x_2} = 1,0000 \text{ mm}$
$\beta_{\text{Soll}} = 3,00 \text{ kg/s}$	$\sigma_{\beta} = 0,300 \text{ kg/s}$	$\sigma_{w,\beta} = 0,0300 \text{ kg/s}$
$\gamma_{\text{Soll}} = 1,25 \text{ mm kg/s}^2$	$\sigma_{\gamma} = 0,125 \text{ mm kg/s}^2$	$\sigma_{w,\gamma} = 0,0125 \text{ mm kg/s}^2$
$ u_{\text{max}}  = 1000 \text{ mm kg/s}^2$	$\sigma_u = 1,00 \text{ mm kg/s}^2$	(Stellgröße)
1 (zeitl. veränderlich)	$\sigma_1 = 10,0 \text{ mm}$	(Beobachtung)

Tabelle 7.3: Übersicht über die Systemparameter bei der adaptiven Kalmanfilterung nach WILLGALIS (1993, S. 52).

### 7.1.3 Das verwendete Modell und die Einflussfaktoren auf die Impräzision

Bei den in den obigen Beispielen gewählten Beobachtungen handelt es sich immer um Strecken, Richtungen und Zenitwinkel, sodass die Einflussfaktoren  $\mathbf{p}$  auf die Impräzision sowie ihre Größenordnung direkt aus dem von SCHÖN (2003, S. 44ff) vorgestellten Sensitivitätsansatz für Tachymeter übernommen werden können. Die von SCHÖN programmierten Bibliotheken mit den funktionalen Zusammenhängen zwischen den Einflussfaktoren und den Beobachtungsergebnissen standen für diese Arbeit und dem damit verbundenen DFG-Projekt KU 4/1-2 zur Verfügung.

Einflussfaktoren	Radius $\tilde{p}_{\alpha,r}$ der Einflussfaktoren für $\alpha = 0$	Beeinflusste Messgrößen	Messgröße	Standardabweichungen (2 Lagen)	Intervallradien $\tilde{y}_{\alpha,r}$ für $\alpha = 0$ (2 Lagen)
Temperatur	0,5 °C	(c)	Richtung (a)	0,5 mgon (TCA 1101)	0,2 mgon (TCA 1101)
Luftdruck	1,0 hPa	(c)		0,15 mgon (TCA 2003)	0,1 mgon (TCA 2003)
Stehachsneigung (längs)	0,2 mgon (TCA 1101) 0,1 mgon (TCA 2003)	(b)	Zenitwinkel (b)	0,5 mgon (TCA 1101)	0,3 mgon (TCA 1101)
Stehachsneigung (quer)	0,2 mgon (TCA 1101) 0,1 mgon (TCA 2003)	(a)		0,15 mgon (TCA 2003)	0,1 mgon (TCA 2003)
Zielachsfehler	0,1 mgon (TCA 1101) 0,01 mgon (TCA 2003)	(a)	Distanz (c)	2,0 mm + 2 ppm (TCA 1101)	1,5 mm + 1 ppm (TCA 1101)
Kippachsfehler	0,05 mgon (TCA 1101) 0,005 mgon (TCA 2003)	(a)		1,0 mm + 1 ppm (TCA 2003)	0,2 mm + 0,9 ppm (TCA 2003)
Höhenindexfehler	0,2 mgon (TCA 1101) 0,1 mgon (TCA 2003)	(a) und (b)			
Zeitschritt	3 s (für das Kalmanfilter)	(a), (b), (c)			

Tabelle 7.4: Impräzision der Einflussfaktoren (links) und Beobachtungsergebnisse (rechts) nach SCHÖN (2003).

Für ein besseres Verständnis wurden im Rahmen der Beispiele L-unscharfe Intervalle (Kapitel 3.2.3.3) mit Referenzfunktionen vom Dreiecktyp gemäß Formel (3.45) und (3.46) gewählt. Bei der Integration des Expertenwissens mittels Nested-Sets aus Kapitel 3.2.4 könnte bspw. ein Experte befragt worden sein, wobei der garantierte Intervallradius  $p_{\alpha=0,r}$  aus SCHÖN (2003) in Tabelle 7.4 (links) ist und der Experte den Intervallradius für  $p_{\alpha=1,r} = p_{\alpha=0,r} / 4$  angegeben hat (vgl. auch Abbildung 7.6). Man spricht in diesem Fall von unscharfen Intervallen vom Trapeztyp. Im Falle des KFs wird zusätzlich die Impräzision für den Zeitschritt  $\Delta t$  berücksichtigt, da der Zeitpunkt der eingebrachten Beobachtungsergebnisse nicht mit der Modellvorstellung übereinstimmt und es somit für jede Epoche zu einer systematischen Verfälschung des geschätzten Zustands kommt.

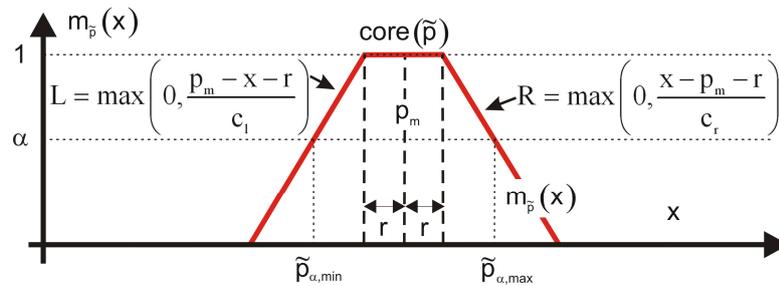


Abbildung 7.6: Die für die Beispiele verwendeten unscharfen Intervalle vom Trapeztyp.

In der Tabelle 7.4 (links) sind die für diese Arbeit wichtigsten Einflussfaktoren auf die Impräzision der Beobachtungsergebnisse nach SCHÖN (2003) zusammengestellt. Die angegebenen Zahlenwerte beziehen sich auf den  $\alpha$ -Schnitt für  $\alpha = 0$ . Dabei wird zwischen den beiden Instrumenten TCA 1101 und TCA 2003 von *Leica* unterschieden. Bei dem TCA 1101 handelt es sich um ein Ingenieur- und bei dem TCA 2003 um ein Präzisionstachymeter (DEUMLICH und STAIGER, 2002). Die Datensätze für die Kalmanfilterung wurden mit dem TCA 1101 erfasst und die Daten für den Kongruenzfall der Deformationsanalyse im Wesentlichen für das TCA 2003 berechnet. Alle Messungen wurden bei quasi horizontalen Zielen durchgeführt. Bei stärkeren Abweichungen aus der Horizontalen ist die Impräzision der Beobachtungsergebnisse in Tabelle 7.4 (rechts) nicht repräsentativ. Der in SCHÖN (2003, S. 44ff) vorgestellte Ansatz berücksichtigt den Einfluss verschiedener Zenitdistanzen auf die Impräzision der Beobachtungsergebnisse. Er soll im Rahmen dieser Arbeit jedoch aufgrund der Übersichtlichkeit nicht vertieft werden. Die funktionalen Zusammenhänge zwischen den Einflussfaktoren und den Beobachtungsergebnissen sowie die Quantifizierung der Impräzision kann im Detail in SCHÖN (2003) nachgelesen werden.

## 7.2 Der Kongruenzfall der geodätischen Deformationsanalyse

Im Kongruenzfall der geodätischen Deformationsanalyse werden diskrete Punkte oder Punktgruppen aus verschiedenen Epochen auf Identität der Punktpositionen überprüft. Die Prüfung erfolgt im Rahmen der linearen Hypothese in einem Standard GMM entsprechend Kapitel 5.3.2. Im ersten Teil dieses Unterkapitels wird der Kongruenztest im rein stochastischen Fall erläutert, um dann im zweiten Abschnitt auf den unscharfen Fall übergehen zu können. Darauf folgt eine Diskussion, um den Zusammenhang zwischen dem Punktrauschen und der Impräzision zu klären. Abschließend werden in Kapitel 7.2.4 zwei praktische Beispiele für eine geodätische Deformationsanalyse im Kongruenzfall mit unscharfen Daten diskutiert und mit der rein stochastischen Vorgehensweise verglichen.

### 7.2.1 Die Vorgehensweise im klassischen Fall

Der Kongruenzfall der geodätischen Deformationsanalyse geht auf PELZER (1971) zurück. Ein geodätisches Netz, das in zwei oder auch mehr Epochen gemessen wurde, soll auf signifikante Änderungen der Netzgeometrie untersucht werden, ohne dass die zeitliche Komponente bei der Analyse berücksichtigt wird. Abbildung 7.7 zeigt ein klassisches geodätisches Überwachungsnetz, das aus Stütz-, Beobachtungs- und Objektpunkten besteht. Die Stützpunkte definieren den äußeren Koordinatenrahmen (Bezugsrahmen). Sie sind i. d. R. die Datumspunkte, auf denen das Netz gelagert wird (WELSCH ET AL., 2000). Durch die Objektpunkte wird das Objekt an diskreten Stellen beschrieben. Die Beobachtungspunkte dienen zur Verknüpfung der Stütz- und Objektpunkte. Mittels der relativen Bewegungen der Objektpunkte gegenüber den Stützpunkten des Überwachungsnetzes kann sowohl auf relative als auch absolute Deformationen des Objektes geschlossen werden.

Dafür muss zunächst die Stabilität der Stützpunkte zwischen den Epochen nachgewiesen werden. Zumindest im Rahmen der zufälligen Streuung der Beobachtungsergebnisse  $y$  werden sich die Punktkoordinaten der Stützpunkte aus den Epochen unterscheiden. Aufgabe des globalen Kongruenztests ist die Beantwortung der Frage, ob es einen im statistischen Sinne signifikanten Unterschied zwischen den Koordinaten der Stützpunkte aus den Epochen gibt. Nach der Identifikation des zwischen den Epochen unveränderten Teiles des Überwachungsnetzes (Datumspunkte) kann die Lokalisierung von Einzelpunktbewegungen erfolgen. Die folgenden Ausführungen zum Kongruenztest im klassischen Fall basieren auf WELSCH ET AL. (2000). Es wird vorausgesetzt, dass die Näherungswerte  $\theta_{0,i}$  der Einzelausgleichungen der Epochen für die Datumspunkte identisch sind. Eine identische Konfiguration des Überwachungsnetzes in beiden Epochen ist daher nicht notwendig. Eine Einzelausgleichung erfolgt mit dem in Kapitel 3.3.2.2 erläuterten GMM.

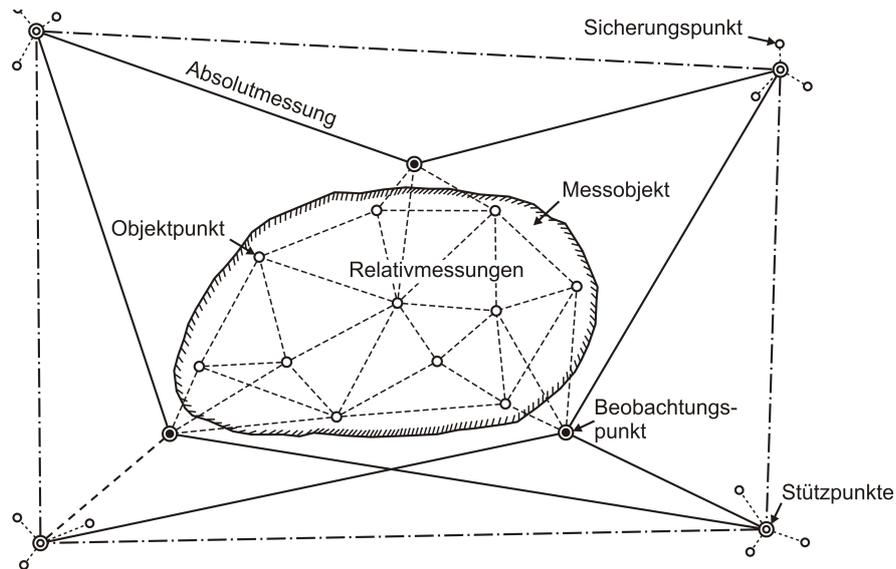


Abbildung 7.7: Ein klassisches geodätisches Überwachungsnetz für den Kongruenzfall (PELZER, 1971).

Die Analyse des Kongruenzfalls der geodätischen Deformationsanalyse kann mit  $k$  Epochen durchgeführt werden (WELSCH ET AL., 2000, S. 370ff), soll jedoch für ein besseres Verständnis anhand zweier Epochen gezeigt werden. Das Ausgangsmodell für den Kongruenztest ist durch den funktionalen Ansatz in einem GMM (Kapitel 3.3.2.2 und 3.3.2.3) gegeben. Bei den Parameter  $\theta_i$  der Ausgleichung kann es sich um die Datumspunkte  $\theta_{i,D}$ , um sonstige Punkte  $\theta_{i,N}$  und um Zusatzparameter  $\theta_{i,Z}$  handeln. Die Indizes 1 und 2 stehen für die Epochen (WELSCH ET AL., 2000, S. 371).

$$E \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{0,1} \\ \theta_{0,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad E \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Da Gleichung (7.5) u. A. aufgrund der zufälligen Variation der Beobachtungsergebnisse inkonsistent ist, führt man die geschätzten Verbesserungsvektoren  $\hat{v}_i$  ein und erhält die Verbesserungsgleichungen zu:

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\hat{\theta}_1 \\ d\hat{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Mit dem stochastischen Modell:

$$\Sigma_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{yy,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{yy,2} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

wird festgelegt, dass zwischen den beiden Epochen keine Korrelationen bestehen. Des Weiteren wird im Rahmen dieser Arbeit vorausgesetzt, dass der a-priori Varianzfaktor für beide Epochen der gleichen Grundgesamtheit entstammt. Die Datumspunkte haben identische Näherungskoodinaten. Zunächst führt man eine rein formale Aufteilung der oben definierten Parameter für jede Epoche durch:

$$d\hat{\theta}_i = \begin{bmatrix} d\hat{\theta}_{i,D} & d\hat{\theta}_{i,N} & d\hat{\theta}_{i,Z} \end{bmatrix} \quad \text{und } i=1,2. \quad (7.8)$$

Jede Epoche wird in einer Ausgleichung mit Teilspurminimierung analysiert. Die Teilspurminimierung erfolgt durch Ränderung des Normalgleichungssystems. Unter einer Ränderung (Teilspurminimierung) versteht man dann die Erweiterung des Normalgleichungssystems  $\mathbf{N}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_{yy,i} \mathbf{A}_i$  um die Matrix  $\mathbf{B}_i$ :

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{i,D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T. \quad (7.9)$$

Die Inverse des erweiterten Normalgleichungssystems lautet damit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i,DD} & \mathbf{N}_{i,DN} & \mathbf{N}_{i,DZ} & \mathbf{G}_{i,D} \\ \mathbf{N}_{i,ND} & \mathbf{N}_{i,NN} & \mathbf{N}_{i,NZ} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{i,ZD} & \mathbf{N}_{i,ZN} & \mathbf{N}_{i,ZZ} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{i,D}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{i,DD} & \mathbf{Q}_{i,DN} & \mathbf{Q}_{i,DZ} & \dots \\ \mathbf{Q}_{i,ND} & \mathbf{Q}_{i,NN} & \mathbf{Q}_{i,NZ} & \dots \\ \mathbf{Q}_{i,ZD} & \mathbf{Q}_{i,ZN} & \mathbf{Q}_{i,ZZ} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i^+ & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

Aufgrund der Datumswahl ist die Submatrix  $\mathbf{Q}_{i,DD}$  die Pseudoinverse  $\mathbf{N}_{i,DD}^+$  der Submatrix  $\mathbf{N}_{i,DD}$ . Im Folgenden soll daher die Matrix  $\mathbf{N}_i^+ = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_{yy,i} \mathbf{A}_i)^+$  eingeführt werden, die sich aus der Teilspurminimierung für die Datumsunkte ergibt (vgl. Formel (7.10)). Beispiele für den Aufbau der Matrix  $\mathbf{B}_i$  findet man in WELSCH ET AL. (2000, S. 203ff). Im Folgenden soll vorausgesetzt werden, dass alle Epochen das gleiche Datum aufweisen. Die Ränderung des Normalgleichungssystems erfolgt also für die gleichen Datumsunkte.

Für die endgültige Formulierung des Problems in Form einer linearen Hypothese  $\mathbf{C}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}$  nach Formel (5.17) kann die folgende Nullhypothese  $H_0$  der Alternativhypothese  $H_1$  des Problems gegenübergestellt werden:

$$H_0: [-\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}_1 \\ d\boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{vs} \quad H_1: [-\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}_1 \\ d\boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{w}. \quad (7.11)$$

Die Matrix  $\mathbf{C} = [-\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2]$  selektiert die zu vergleichenden Netzpunkte aus den Parametervektoren, sodass beim globalen Kongruenztest die Nullhypothese besagt, dass die zu testenden Netzpunkte in beiden Epochen identische Koordinaten aufweisen. Durch Hinzunahme der Restriktion (7.11) in das Ausgleichungsmodell (7.5) gemäß Formel (5.12) ergibt sich ein Zuschlag  $R$  auf die Verbesserungsquadratsumme, der mit den folgenden Beziehungen berechnet werden kann (WELSCH ET AL., 2000, S. 376):

$$R = (\mathbf{C}_2 d\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \mathbf{C}_1 d\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \left\{ \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \right\} (\mathbf{C}_2 d\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \mathbf{C}_1 d\hat{\boldsymbol{\theta}}_1). \quad (7.12)$$

Nach Ausmultiplizieren erhält man

$$R = (\mathbf{C}_2 d\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \mathbf{C}_1 d\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \left[ \mathbf{C}_1^T (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2^T (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \mathbf{C}_2 \right] (\mathbf{C}_2 d\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \mathbf{C}_1 d\hat{\boldsymbol{\theta}}_1). \quad (7.13)$$

Durch Definition des Differenzvektors  $\mathbf{d}$  für beide Epochen

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}_2 d\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \mathbf{C}_1 d\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (7.14)$$

und der zugehörigen Kofaktormatrix  $\mathbf{Q}_{dd}$  für den Differenzvektor bei fehlender Korrelation zwischen den Epochen

$$\mathbf{Q}_{dd} = \mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{C}_1^T + \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \mathbf{C}_2^T \quad (7.15)$$

kann die Teststatistik  $\hat{K}$  für den Kongruenztest in der verkürzten Darstellung geschrieben werden:

$$\hat{K} = \mathbf{d}^T \mathbf{Q}_{dd}^{-1} \mathbf{d} / \sigma_0^2. \quad (7.16)$$

Die Testgröße  $K$  folgt bei korrekter Aufstellung des stochastischen und funktionalen Modells sowie bei Gültigkeit der Nullhypothese einer zentralen  $\chi^2$ -Verteilung ( $K \sim \chi^2(h, \lambda = 0)$  mit  $h = \text{rg}(\mathbf{Q}_{dd})$  Freiheitsgraden). Für die Teststatistik  $\hat{K}$  gilt die folgende Wahrscheinlichkeitsbeziehung:

$$P = \{ \hat{K} > \chi_{1-\alpha}^2(h, \lambda = 0) | H_0 \} = \alpha. \quad (7.17)$$

Bei Überschreiten des Quantils der  $\chi^2$ -Verteilung durch die Teststatistik  $\hat{K}$  kann mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  auf das Vorliegen von Deformationen im Überwachungsnetz geschlossen werden. Ein Anschlagen des Tests kann nicht nur durch die zu lokalisierenden Punktbewegungen, sondern auch durch ein unzureichendes stochastisches oder funktionales Modell begründet sein. Aus diesem Grund ist zunächst die Gültigkeit des stochastischen und funktionalen Modells der Einzelausgleichungen mit dem Globaltest der Ausgleichung aus Kapitel 3.3.2.2 und 5.2 (unscharfer Fall) zu überprüfen. Für den Rang der Matrix  $\mathbf{Q}_{dd}$  gilt bei identischer Netzkonfiguration und bei der vorausgesetzten identischen Datumsverfügung:

$$h = \text{rg}(\mathbf{Q}_{dd}) = u_D - d = r, \quad (7.18)$$

mit  $u_D$  der Anzahl der Unbekannten für die Datumsunkte und  $d$  der Anzahl der Datumsdefekte.

Bei Einführung des a-posteriori Varianzfaktors  $\hat{\sigma}_0^2$  wird auf einen  $\tau^2$ -Test übergegangen, der im Folgenden erläutert werden soll. Die Schätzung von  $\hat{\sigma}_0^2$  kann im Ausgangsmodell (7.5) durchgeführt werden. Die Vor-

gehensweise im Falle unscharfer Daten ist in Kapitel 7.2.2 geschildert. Der Schätzwert für die Varianz der Gewichtseinheit  $\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_{yy} \hat{\mathbf{v}} / f$  mit  $\hat{\mathbf{v}}$  und  $\mathbf{P}_{yy}$  und den Freiheitsgraden  $f$  aus der gemeinsamen Ausgleichung beider Epochen wird direkt für die Herleitung der Teststatistik  $\hat{T}$  des Kongruenztests verwendet:

$$\hat{T} = \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_{dd}^- \mathbf{d}}{\hat{\sigma}_0^2 \cdot h} \quad (7.19)$$

Für die Teststatistik  $\hat{T}$  gilt die folgende Wahrscheinlichkeitsbeziehung:

$$P = \left\{ \hat{T} > \tau_{1-\alpha}^2(h, f, \lambda = 0) | H_0 \right\} = \alpha \quad (7.20)$$

Bei Überschreiten des Quantils der  $\tau^2$ -Verteilung durch die Teststatistik  $\hat{T}$  kann mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  auf das Vorliegen von Deformationen im Überwachungsnetz geschlossen werden. Eine Erläuterung sämtlicher in der Literatur vorgestellten Verfahren zum Aufdecken von Punktverschiebungen kann nicht gegeben werden. Die in diesem Beispiel vorgestellte quadratische Form ist jedoch auf jede Vorgehensweise anwendbar. Für die verschiedenen Strategien bei der Lokalisierung von Punktbewegungen wird auf WELSCH ET AL. (2000) verwiesen.

### 7.2.2 Der Kongruenztest im Falle impräziser Daten

Bei der Herleitung des globalen Kongruenztests im Falle unscharfer Daten bieten sich prinzipiell zwei Herangehensweisen aus der präzisen Betrachtungsweise an. Zum einen wird die implizite, zum anderen die lineare Hypothesenformulierung (Kapitel 5.3) für die Herleitung der Teststatistik verwendet. Im Falle der impliziten Hypothesenformulierung ist bei der Bildung der unscharfen Teststatistik nach Kapitel 4.3 jedoch die Differenz zweier funktional abhängiger  $\alpha$ -Schnitte zu berechnen. Dadurch kommt es zu vermeidbaren Überschätzungen. Die folgende Vorgehensweise richtet sich nach Kapitel 5.3.2. Es wird eine Rückführung des Problems auf die Beobachtungen bzw. auf die Einflussfaktoren der Impräzision durchgeführt, sodass Überschätzungen des Wertebereiches der Teststatistik vermieden werden.

Aus diesem Grund wird der Zuschlag zur Verbesserungsquadratsumme zunächst auf die Beobachtungsintervalle der Einzelepochen zurückgeführt. Unter der Voraussetzung von gleichen Näherungswerten für den Koordinatenvektor in beiden Epochen folgt für

$$d\hat{\theta}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} dy_1 \quad \text{und} \quad d\hat{\theta}_2 = (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} dy_2 \quad (7.21)$$

sowie für den Differenzvektor beider Epochen:

$$\mathbf{C}_2 d\hat{\theta}_2 - \mathbf{C}_1 d\hat{\theta}_1 = \left[ \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \quad -\mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \right] \begin{bmatrix} dy_2 \\ dy_1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{xd_n} dy \quad (7.22)$$

Die quadratische Form

$$\begin{aligned} R = & \left\{ \left[ \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \quad -\mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \right] \begin{bmatrix} dy_2 \\ dy_1 \end{bmatrix} \right\}^T \left\{ \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \right\}^- \dots \\ & \dots \left\{ \left[ \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \quad -\mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \right] \begin{bmatrix} dy_2 \\ dy_1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (7.23)$$

kann somit als Erweiterung von (NEUMANN und KUTTERER, 2007a) auf die Beobachtungen zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} R = & \begin{bmatrix} dy_2^T \\ dy_1^T \end{bmatrix} \left[ \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \quad -\mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \right]^T \left\{ \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \right\}^- \dots \\ & \dots \left[ \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \mathbf{A}_2)^+ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{yy,2} \quad -\mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \mathbf{A}_1)^+ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{yy,1} \right] \begin{bmatrix} dy_2 \\ dy_1 \end{bmatrix} \\ = & dy^T \mathbf{Q}_{xd_n}^T \mathbf{Q}_{dd}^- \mathbf{Q}_{xd_n} dy \end{aligned} \quad (7.24)$$

Durch Ersetzen des gekürzten Beobachtungsvektors  $\mathbf{dy}$  durch die in Kapitel 3.3.1 geschilderte Bestimmung der unscharfen Beobachtungsergebnisse erhält man für den  $\alpha$ -Schnitt-Optimierungsalgorithmus in Kapitel 4.3 und 5.3.2 die folgende Zielfunktion:

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{K}}_{\alpha,\min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( (\mathbf{dy} + \mathbf{Fp})^T (\mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}) (\mathbf{dy} + \mathbf{Fp}) / \sigma_0^2 \right), \\ &= \min_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T (\mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}) \mathbf{Fp} + 2\mathbf{dy}^T (\mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}) \mathbf{Fp} + \underbrace{\mathbf{dy}^T (\mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}) \mathbf{dy}}_{\text{const}} \right] / \sigma_0^2 \right), \\ \tilde{\underline{K}}_{\alpha,\max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \mathbf{p}^T \mathbf{F}^T (\mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}) \mathbf{Fp} + 2\mathbf{dy}^T (\mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}) \mathbf{Fp} + \underbrace{\mathbf{dy}^T (\mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}) \mathbf{dy}}_{\text{const}} \right] / \sigma_0^2 \right).\end{aligned}\quad (7.25)$$

Die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{\underline{K}}}(x)$  für die unscharfe Teststatistik  $\tilde{\underline{K}}$  ergibt sich zu:

$$m_{\tilde{\underline{K}}}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\tilde{\underline{K}}_\alpha}(x) \quad \text{mit} \quad i_{\tilde{\underline{K}}_\alpha} = \left[ \tilde{\underline{K}}_{\alpha,\min}, \tilde{\underline{K}}_{\alpha,\max} \right]. \quad (7.26)$$

Für die numerische Bestimmung von  $\tilde{\underline{K}}_\alpha = \left[ \tilde{\underline{K}}_{\alpha,\min}, \tilde{\underline{K}}_{\alpha,\max} \right]$  können die in Kapitel 5.1 angegebenen Verfahren für die Minimierung und Maximierung von quadratischen Formen angewandt werden. Der letzte Schritt ist die Integration eines Schätzwertes  $\hat{\sigma}_0^2$  für den a-priori Varianzfaktor  $\sigma_0^2$  im unscharfen Fall. Diese Aufgabe kann analog zu dem Allgemeinfall der linearen Hypothese durchgeführt werden, wobei die Verbesserungsquadratsumme im gemeinsamen Ausgleichsmodell aus Formel (7.5) berechnet wird. Die Teststatistik des globalen Kongruenztests im unscharfen Fall wird über ihre  $\alpha$ -Schnitte konstruiert:

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{T}}_{\alpha,\min} &= \min_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{dy}^T \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{F}^T \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n} \\ \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n} \mathbf{F} & \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p} \\ \mathbf{dy} \end{array} \right] / \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{dy}^T \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{\text{yy}} \mathbf{Q}_{\text{ww}} \mathbf{P}_{\text{yy}}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{\text{yy}} \mathbf{Q}_{\text{ww}} \mathbf{P}_{\text{yy}}) \\ (\mathbf{P}_{\text{yy}} \mathbf{Q}_{\text{ww}} \mathbf{P}_{\text{yy}}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{\text{yy}} \mathbf{Q}_{\text{ww}} \mathbf{P}_{\text{yy}}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p} \\ \mathbf{dy} \end{array} \right] \right] \frac{1}{h}, \\ \tilde{\underline{T}}_{\alpha,\max} &= \max_{\mathbf{p} \in [\tilde{\mathbf{p}}_\alpha]} \left( \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{dy}^T \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{F}^T \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n} \mathbf{F} & \mathbf{F}^T \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n} \\ \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n} \mathbf{F} & \mathbf{Q}_{\text{xd}_n}^T \mathbf{Q}_{\text{dd}}^- \mathbf{Q}_{\text{xd}_n} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p} \\ \mathbf{dy} \end{array} \right] / \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{dy}^T \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{\text{yy}} \mathbf{Q}_{\text{ww}} \mathbf{P}_{\text{yy}}) \mathbf{F} & \mathbf{F}^T (\mathbf{P}_{\text{yy}} \mathbf{Q}_{\text{ww}} \mathbf{P}_{\text{yy}}) \\ (\mathbf{P}_{\text{yy}} \mathbf{Q}_{\text{ww}} \mathbf{P}_{\text{yy}}) \mathbf{F} & (\mathbf{P}_{\text{yy}} \mathbf{Q}_{\text{ww}} \mathbf{P}_{\text{yy}}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{p} \\ \mathbf{dy} \end{array} \right] \right] \frac{1}{h}.\end{aligned}\quad (7.27)$$

Die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{\underline{T}}}(x)$  für die unscharfe Teststatistik  $\tilde{\underline{T}}$  ergibt sich zu:

$$m_{\tilde{\underline{T}}}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\tilde{\underline{T}}_\alpha}(x) \quad \text{mit} \quad i_{\tilde{\underline{T}}_\alpha} = \left[ \tilde{\underline{T}}_{\alpha,\min}, \tilde{\underline{T}}_{\alpha,\max} \right]. \quad (7.28)$$

Es besteht die Möglichkeit, physikalische Zusammenhänge zwischen den Epochen des Überwachungsnetzes durch Korrelationen in Formel (7.5) und (7.12) zu berücksichtigen. Die obige Strategie ist unmittelbar anwendbar. Die endgültige Testentscheidung erfolgt durch die in Kapitel 4, insbesondere in Kapitel 4.2, vorgestellten Verfahren. Auf eine detaillierte Erläuterung der Auswertung des Hypothesentests und der damit verbundenen Testentscheidung wird an dieser Stelle verzichtet. Numerische Ergebnisse werden in Kapitel 7.2.4 gezeigt.

### 7.2.3 Zusammenhänge zwischen dem „Punktrauschen“ und der Impräzision

Nach WELSCH ET AL. (2000, S. 401f) beschreibt der Vektor der Deformationen  $\mathbf{d}$  aus Formel (7.14) nicht allein die Verformung des Objektes, sondern setzt sich aus weiteren Anteilen zusammen. Zu den eigentlichen Punktverschiebungen  $\Delta$  kommen noch für eine Objektbewegung nicht repräsentative zufällige Eigenbewegungen  $\delta$  der Punkte und die Auswirkungen der zufälligen Abweichungen  $\varepsilon$  der Beobachtungen:

$$\mathbf{d} = \Delta + \delta + \varepsilon. \quad (7.29)$$

Somit setzt sich nach WELSCH ET AL. (2000, S. 401f) der Vektor der Deformationen  $\mathbf{d}$  aus der Summe der deterministischen Punktverschiebungen und zweier Zufallsvektoren zusammen. Zu den scheinbaren „Eigenbewegungen“ gehören die Instabilität der Punktvermarkungen und Zentrierungenaugigkeiten. Die Erwar-

tungswerte  $E[\delta]$  der Eigenbewegungen der Punkte und die Erwartungswerte  $E[\varepsilon]$  der Auswirkungen der zufälligen Abweichungen der Beobachtungen sind bei dem gewählten Ansatz Null:

$$E[\delta] = E[\varepsilon] = \mathbf{0}, \quad (7.30)$$

sodass der Erwartungswert  $E[\mathbf{d}]$  des Vektors der Deformationen  $\mathbf{d}$  sich allein aus den eigentlichen Punktverschiebungen  $\Delta$  ergibt:

$$E[\mathbf{d}] = \Delta. \quad (7.31)$$

Die Unsicherheiten durch die zufälligen Eigenbewegungen  $\delta$  der Punkte und durch die Auswirkungen der zufälligen Abweichungen  $\varepsilon$  der Beobachtungen können mit VKMs beschrieben werden:

$$D[\delta] = \Sigma_{\delta\delta} \quad \text{und} \quad D[\varepsilon] = \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}. \quad (7.32)$$

Man bezeichnet die zusätzlichen Unsicherheiten auf die Punktbewegungen aufgrund ihres motivierten zufälligen Charakters auch als **Punkt- oder Systemrauschen** (engl.: point or system noise), vgl. PELZER (1971).

In diesem Abschnitt soll kurz diskutiert werden, ob mit dem Punktrauschen und der Impräzision zwischen Beobachtung und Modell die gleichen Unsicherheiten beschrieben werden sollen. Unterteilt man die Ursachen für die auftretenden Unsicherheiten grob in die in Kapitel 2 genannten Bereiche der Beobachtungen, des Modells und des Objektes, so deckt der im Rahmen dieser Arbeit verwendete Ansatz zur Beschreibung der Unsicherheiten die Bereiche Beobachtungen und Modell ab. Anteile, die durch das Objekt bzw. die Objektunscharfe verursacht werden, bleiben im bisherigen Ansatz unberücksichtigt. Hier müssen kommende Arbeiten ansetzen, um die Ansätze in NEUMANN ET AL. (2008) sowie ALKHATIB ET AL. (2009) auf die geodätische Deformationsanalyse erweitern zu können.

Im verwendeten Modell und den modellierten Einflussfaktoren auf die Impräzision (Kapitel 7.1.3) sind Zentrierunsicherheiten bereits berücksichtigt, da sie als Unsicherheiten der Beobachtungen und nicht des Objektes modelliert werden. Für die Deformationsanalyse brauchen die Zentrierunsicherheiten daher nicht im Rahmen des Systemrauschens berücksichtigt werden. Für eine einzelne Epoche stellt ein Zentrierfehler eine systematische Restabweichung dar. Inwiefern eine Verzufälligung im Rahmen vieler Epochen möglich ist, bedarf weiterer Untersuchungen und kann in dieser Arbeit nicht geklärt werden.

Eigenbewegungen der Punkte hingegen sind dem Objekt zuzuordnen. Dabei ist zu prüfen, ob es sich um systematische oder um zufällige Effekte handelt. Im Falle eines systematischen Einflusses ist die Eigenbewegung als Einflussfaktor auf die Impräzision des Objektes zu berücksichtigen. Bei einer zufälligen Streuung kann eine Modellierung im Rahmen des Punkt- bzw. Systemrauschens erfolgen. Auch eine Kombination von beidem ist denkbar. Weitere Einflussgrößen auf die Eigenbewegungen sind die Temperatur des Objektes und Materialparameter. Da aber auch die geodätischen Messungen durch atmosphärische Größen wie die Temperatur beeinflusst werden, bedarf dies ebenfalls einer gemeinsamen Modellierung des Objektes zusammen mit den geodätischen Messungen. Hier müssen kommende Arbeiten ansetzen, die das Verhalten und die Bedeutung des Objektes im Rahmen der geodätischen Deformationsanalyse genauer untersuchen.

#### 7.2.4 Auswertung und Analyse der beiden Beispiele

Um die Vorgehensweise bei der Analyse geodätischer Überwachungsnetze im Falle impräziser Daten zu veranschaulichen, werden im Folgenden die zwei Beispieldatensätze aus Kapitel 7.1.1 analysiert. Dabei wird gezeigt, wie die Ergebnisse zu interpretieren sind. Die grundlegende Interpretation der unscharfen Ergebnismengen leitet sich aus der Konstruktion der unscharfen Einflussfaktoren ab. Auf Basis von Expertenwissen wurde gemäß Kapitel 3.2.4 und mit Hilfe der Nested-Set Theorie eine Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{A}}(x)$  für alle Einflussfaktoren gebildet.

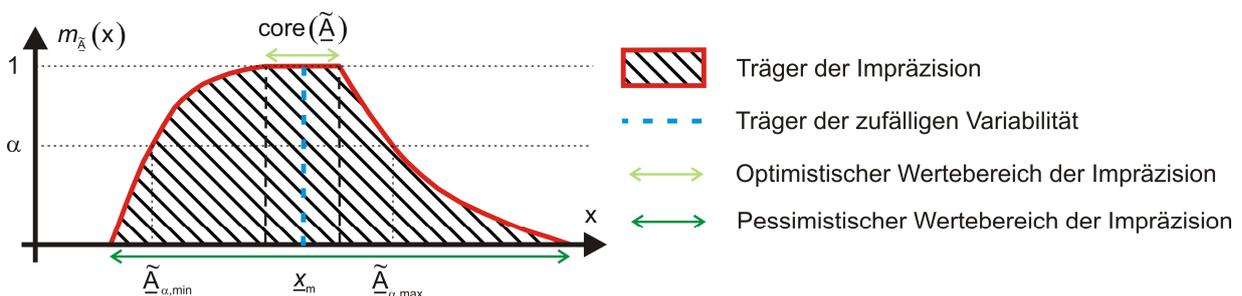


Abbildung 7.8: Interpretation der unscharfen Ergebnismengen im Kontext des Expertenwissens.

Der Kern der unscharfen Menge kann als optimistischer Wertebereich und der Träger als pessimistischer Wertebereich für die Impräzision interpretiert werden. Da die unscharfen Mengen auf Ebene der  $\alpha$ -Schnitte analysiert werden, sind auch alle aus den unscharfen Einflussfaktoren abgeleiteten Ergebnismengen auf diese Weise zu interpretieren (vgl. Abbildung 7.8).

Eine hinreichende Approximationsgüte bei der Konstruktion der Ergebnisgrößen wurde mit 11  $\alpha$ -Schnitten der unscharfen Mengen erreicht. Die Rechenzeiten für die Konstruktion der Teststatistiken hängen nur von der Anzahl der Einflussfaktoren ab, sodass bei der Verwendung eines einzigen Instrumentes für alle Beobachtungen in den Epochen in etwa die gleiche Rechenzeit benötigt wird. Die Rechenzeit steigt in Abhängigkeit von der Anzahl der Einflussfaktoren stark an. Berechnungen mit 100 Einflussfaktoren sind mit Standardrechnern aber innerhalb von einigen Minuten möglich. Im Folgenden wird eine Analyse der Daten im rein stochastischen Fall als klassische Vorgehensweise bezeichnet.

#### 7.2.4.1 Analyse realer Daten der Schleuse Uelzen I

Die folgenden Untersuchungen werden hauptsächlich anhand der beiden Epochen 1999 und 2004 aus Tabelle 7.2 durchgeführt. Wie im rein stochastischen Fall wird dabei folgendermaßen vorgegangen:

- Durchführung eines Globaltestes für die statistische Verträglichkeitsuntersuchung von  $\hat{\sigma}_0^2$  mit  $\sigma_0^2$  (Schritt 1).
- Suche nach Ausreißern in den Einzelepochen (Schritt 2).
- Durchführung des Kongruenztestes für die Stützpunkte beider Epochen (Schritt 3).
- Iterative Identifikation der bewegten Einzelpunkte (Schritt 4).

Bei der Kongruenzuntersuchung zur Detektion des Satzes an stabilen Datumspunkten in Schritt 3 wird die Rückwärtsstrategie angewandt (vgl. WELSCH ET AL., 2000, S. 395f). Diese Vorgehensweise ist für das vorliegende Beispiel sinnvoll, da bereits gesicherte Kenntnisse über die Stützpunkte vorliegen. Bei der Identifikation der bewegten Einzelpunkte hingegen wird die Vorwärtsstrategie (vgl. WELSCH ET AL., 2000, S. 395f) angewandt, bei der von einer bekannten Menge von Stützpunkten ausgegangen wird. Diese werden zunächst auf Kongruenz überprüft (Schritt 3) und anschließend sukzessive um nicht bewegte Objektpunkte ergänzt, ohne dass diese zu Datumspunkten werden. Nach dem Hinzufügen des Punktes, der den geringsten Zuschlag zur Teststatistik (7.25) bzw. (7.27) hat, wird jeweils ein neuer Kongruenztest durchgeführt. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis der Kongruenztest verworfen wird oder keine Objektpunkte mehr vorhanden sind. Grundsätzlich ist für jedes Überwachungsnetz kritisch zu prüfen, ob die Vorwärts- oder Rückwärtsstrategie angewandt werden sollte.

#### Schritt 1: Durchführung des Globaltestes für jede Epoche

Für die statistische Verträglichkeitsuntersuchung von  $\hat{\sigma}_0^2$  mit  $\sigma_0^2$  im Falle von Impräzision nach Kapitel 5.2 wurde eine Abstimmung des Testniveaus zwischen dem Ausreißertest und dem Globaltest nach HAHN ET AL. (1989 und 1991) durchgeführt. Wählt man die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art von  $\alpha_{\text{Ausreißer}} = 1\%$  im Ausreißertest, so ergeben sich für den Globaltest die in Abbildung 7.9 dargestellte Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_{\text{Global}} [\%]$ .

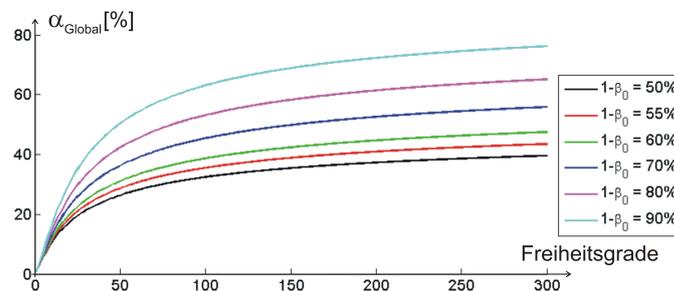


Abbildung 7.9: Abgestimmte Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha_{\text{Global}}$  für den Globaltest mit  $\alpha_{\text{Ausreißer}} = 1\%$ .

Die abgestimmte Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{Global}}$  für den Globaltest ist abhängig von der Wahrscheinlichkeit  $\beta_0$  für den Fehler 2. Art und von der Anzahl der Freiheitsgrade der Ausgleichung. Die Abstimmung erfolgt über einen identischen Nichtzentralitätsparameter  $\delta_0$  für den Ausreißer- und Globaltest. Bei einer hohen Anzahl an Freiheitsgraden verändert sich die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art  $\alpha_{\text{Global}}$  für den Globaltest nur minimal. Es zeigt sich, dass die Wahrscheinlichkeit  $\beta_0$  für den Fehler 2. Art groß gewählt

werden muss, um sinnvolle Werte für  $\alpha_{\text{Global}}$  zu erhalten. Die mit der Testabstimmung erhaltenen Werte  $\alpha_{\text{Global}}$  für kleine  $\beta_0$  sind, wie auch HAHN ET AL. (1991) bemerken, sehr hoch. Da aber auch andere Verfahren aus NIEMEIER (2008) vergleichbare Ergebnisse liefern, soll im Folgenden  $\beta_0$  je nach der Anzahl der Freiheitsgrade gewählt werden. Für die Epoche 1999 wird  $\beta_0 = 40\%$  und für die Epoche 2004 wird  $\beta_0 = 20\%$  gewählt. Eine Verbesserung bestehender Verfahren zur Testabstimmung zwischen Ausreißer- und Globaltest kann nicht Teil dieser Arbeit sein. Für weitere Betrachtungen zur abgestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit wird auf HAHN ET AL. (1989 und 1991) verwiesen.

In der Abbildung 7.10 werden die beiden Globaltests für die Epochen 1999 und 2004 mit abgestimmter Irrtumswahrscheinlichkeit und klassischen Annahmehereichen gezeigt. Im Folgenden wird bei der Analyse der unscharfen Hypothesentests wie beim Globaltest aufgrund der besseren Eignung (vgl. Kapitel 4.2.3) nur das card-Kriterium verwendet. Beide Teststatistiken weisen trotz stark unterschiedlicher Freiheitsgrade in etwa gleiche Größenordnungen im Verhältnis zum Annahmehereich auf. Bei genauer Betrachtung sieht man, dass die Teststatistiken nicht exakt symmetrisch sind. Die Punkte der rechten Referenzfunktion aus der  $\alpha$ -Schnitt-Optimierung sind weiter vom Mittelpunkt  $\underline{T}_m$  entfernt als die der linken. Dies liegt an der verwendeten quadratischen Form (5.14) zur Konstruktion der Teststatistik. In diesem Beispiel ist der Grad der Verwerfung  $\rho_{\tilde{T}}(\tilde{T})$  der Nullhypothese geringer als der kritische Wert  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$ , sodass im Rahmen der erweiterten Unsicherheitsmodellierung für beide Epochen die Varianzfaktoren identisch sind:

- für die Epoche 1999 gilt:  $\rho_{\tilde{T},1999}(\tilde{T}) = 0,299$

- für die Epoche 2004 gilt:  $\rho_{\tilde{T},2004}(\tilde{T}) = 0,122$ .

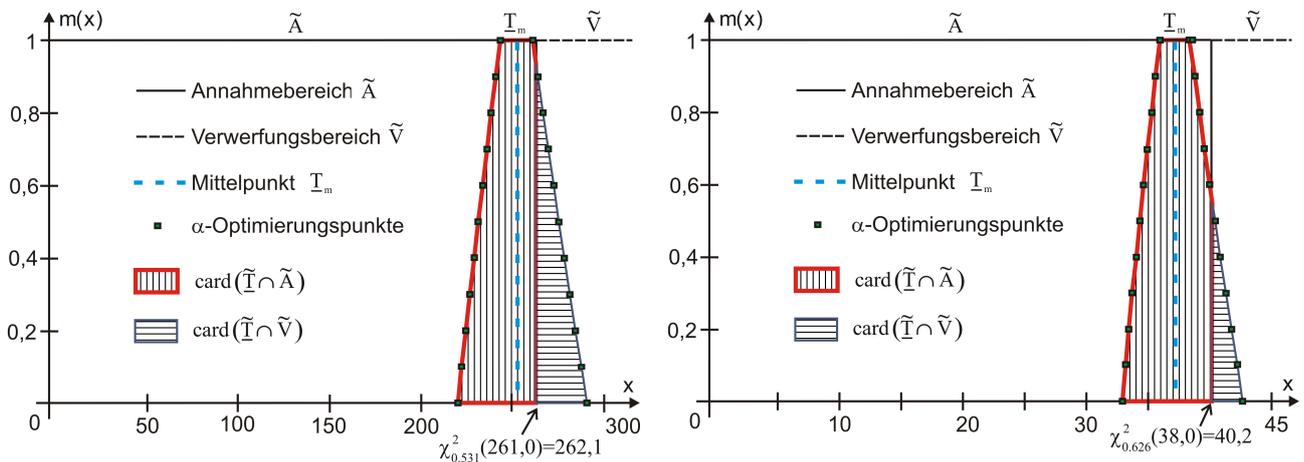


Abbildung 7.10: Globaltest der Epochen 1999 (links) und 2004 (rechts) mit abgestimmter Irrtumswahrscheinlichkeit.

### Schritt 2: Suche der Ausreißer in den Daten für jede Epoche

Im zweiten Schritt werden alle Ausreißer in jeder Epoche gesucht und aus dem Datenmaterial eliminiert. Bei der Ausreißersuche wurde ein klassischer Annahmehereich mit einer Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art von  $\alpha = 1\%$  angenommen. Die Ausreißersuche erfolgt mit der in Kapitel 5.4.1 erläuterten Vorgehensweise, im Speziellen mit Formel (5.56). Eine Schätzung des a-posteriori Varianzfaktors muss aufgrund der Ergebnisse aus Schritt 1 nicht berücksichtigt werden.

Epoche	2004	1999	1995/2	1995/1	1993	1992	1987	1986	1983	1982	1981	1980	1978
Beobachtungen (3d)	107	425	236	129	131	---	---	---	74	124	---	---	---
Beobachtungen (2d)	68	331	180	85	87	90	69	66	54	78	54	82	60
Anzahl eliminierte Beobachtungen (klassisch)	1	14	2	7	2	13	0	2	3	1	1	2	0
Anzahl eliminierte Beobachtungen ( $\rho_{\text{crit}} = 0,1$ )	2	22	5	7	2	14	0	2	3	2	1	2	0
Anzahl eliminierte Beobachtungen ( $\rho_{\text{crit}} = 0,5$ )	1	14	2	7	2	13	0	2	3	1	1	2	0
Anzahl eliminierte Beobachtungen ( $\rho_{\text{crit}} = 0,9$ )	1	13	2	7	2	13	0	2	3	1	1	1	0

Tabelle 7.5: Anzahl der identifizierten Ausreißer im rein stochastischen Fall und in Abhängigkeit von  $\rho_{\text{crit}}$ .

In Tabelle 7.5 ist die Anzahl der identifizierten Ausreißer für den klassischen und für den impräzisen Fall für die zweidimensionalen Netze dargestellt. Bei einer Wahl von  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  werden weniger Ausreißer identifiziert als im klassischen Fall und bei  $\rho_{\text{crit}} = 0,1$  werden mehr Ausreißer als im klassischen Fall identifiziert. Dies liegt an der Ausdehnung der Teststatistik  $\tilde{\mathbf{T}}$ , deren Mittelpunkt  $\underline{\mathbf{T}}_m$  den rein klassischen Fall repräsentiert. Wie exemplarisch in Abbildung 7.11 für einen Ausreißertest von 4 Beobachtungen zu sehen ist, reicht es aus, dass  $\geq 10\%$  der unscharfen Teststatistik innerhalb des Annahmebereiches sind, um bei  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  die Nullhypothese anzunehmen:

$$\frac{\text{card}(\tilde{\mathbf{T}} \cap \tilde{\mathbf{A}})}{\text{card}(\tilde{\mathbf{T}})} \geq 0,10 = 1 - \rho_{\text{crit}} \rightarrow H_0 \text{ annehmen } (\rho_{\text{crit}} = 0,9). \quad (7.33)$$

Dies ist auch der Fall, wenn  $\underline{\mathbf{T}}_m > \tilde{\mathbf{A}}_{\alpha, \max}$  ist, wie bereits in Kapitel 4.2.3 erläutert wurde. Im konkreten Beispiel in Abbildung 7.11 wird im impräzisen Fall bis  $\underline{\mathbf{T}}_m = 14,08$  die Nullhypothese angenommen, während im klassischen Fall bereits ab  $\underline{\mathbf{T}}_m > 13,3 = \chi_{0,99}^2(4, \lambda = 0)$  die Nullhypothese verworfen wird. Aus diesem Grund werden, wie in Tabelle 7.5 zu erkennen ist, bei der impräzisen Analyse für  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  weniger Ausreißer als im klassischen Fall identifiziert. Bei der Wahl von  $\rho_{\text{crit}} = 0,1$  verhält es sich genau umgekehrt. Der Mittelpunkt der unscharfen Teststatistik muss klar innerhalb des Annahmebereiches liegen, damit die Nullhypothese verworfen wird. Bei dem Grad der Zurückweisung der Nullhypothese  $\rho_{\tilde{\mathbf{R}}}(\tilde{\mathbf{T}})$  handelt es sich um eine monotone Funktion  $\varphi(\underline{\mathbf{T}}_m): \mathfrak{S}(\mathbb{R})^n \rightarrow [0,1]$  des Mittelpunktes  $\underline{\mathbf{T}}_m$  der Teststatistik  $\tilde{\mathbf{T}}$  (vgl. auch Formel (4.62)). Je größer der kritische Wert  $\rho_{\text{crit}}$  für den Grad der Verwerfung gewählt wird, umso weniger Ausreißer werden in den Daten gefunden bzw. die Nullhypothese wird seltener verworfen.

Die Impräzision der Einflussfaktoren stellt eine zusätzliche Unsicherheitskomponente der Beobachtungen dar, sodass Ausreißer erst später als im klassischen Fall identifiziert werden sollten. Aus diesem Grund wird für die Ausreißersuche eine Wahl von  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  empfohlen, um nicht vorzeitig zu verwerfen. Eine größere Impräzision der Beobachtung führt zu einer stärkeren Ausdehnung der Teststatistik und für  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  zu einem späteren Verwerfen der Nullhypothese. Damit wird die Unkenntnis über den korrekten Wert der systematischen Abweichung der Beobachtung berücksichtigt.

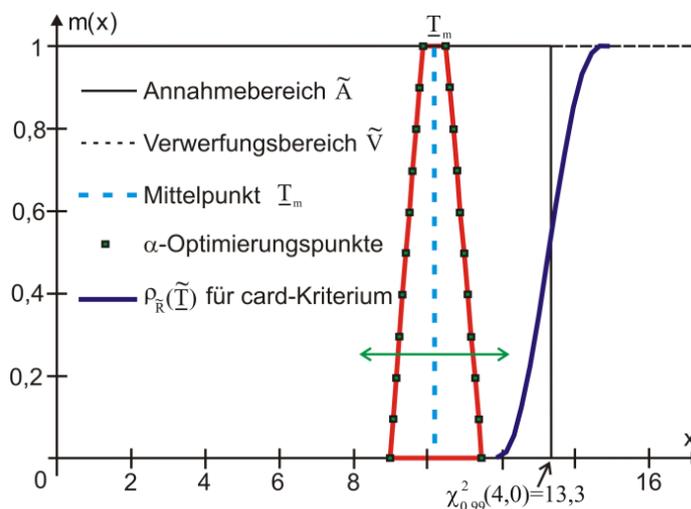


Abbildung 7.11: Grad der Zurückweisung von  $H_0$  als Funktion des Mittelpunktes  $\underline{\mathbf{T}}_m$  der Teststatistik  $\tilde{\mathbf{T}}$ .

Die Festlegung von  $\rho_{\text{crit}}$  führt dazu, dass die Nullhypothese für verschiedene Positionen des Mittelpunktes  $\underline{\mathbf{T}}_m$  verworfen wird. Diese Tatsache wurde bereits in Kapitel 4.4 eingeführt und ist in Abbildung 7.11 jetzt visuell erkennbar. Durch die notwendige Festlegung von  $\rho_{\text{crit}}$  wird somit automatisch die klassische Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  für einen Fehler 1. Art verändert. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art  $\alpha_{\text{impr}}$  im impräzisen Fall kann mit den Formeln in Kapitel 4.4.1 erfolgen. Die Vorgehensweise im Falle der geschilderten Datencharakteristiken in diesem Beispiel ist in Abbildung 7.12 (links) zu sehen und stellt eine Spezialisierung von Abbildung 4.9 dar. Die Ergebnisse für  $\alpha_{\text{impr}}$  sind in Abbildung 7.12 (rechts) in Ab-

hängigkeit von  $\rho_{\text{crit}}$  dargestellt. Die geringe Impräzision der Einflussfaktoren führt zu einer annähernd symmetrischen linken und rechten Referenzfunktion der Teststatistik, sodass für  $\rho_{\text{crit}} = 0,5$  in etwa die klassische Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art erhalten wird. Wählt man  $\rho_{\text{crit}}$  größer, so verringert sich die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art, da die Nullhypothese erst später als im klassischen Fall verworfen wird. Umgekehrt wird die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art größer, wenn  $\rho_{\text{crit}}$  kleiner gewählt wird. Die Variationsbreite von  $\alpha_{\text{impr}}$  ist ein Indiz für die Größenordnung der Impräzision im Verhältnis zur stochastischen Unsicherheitskomponente.

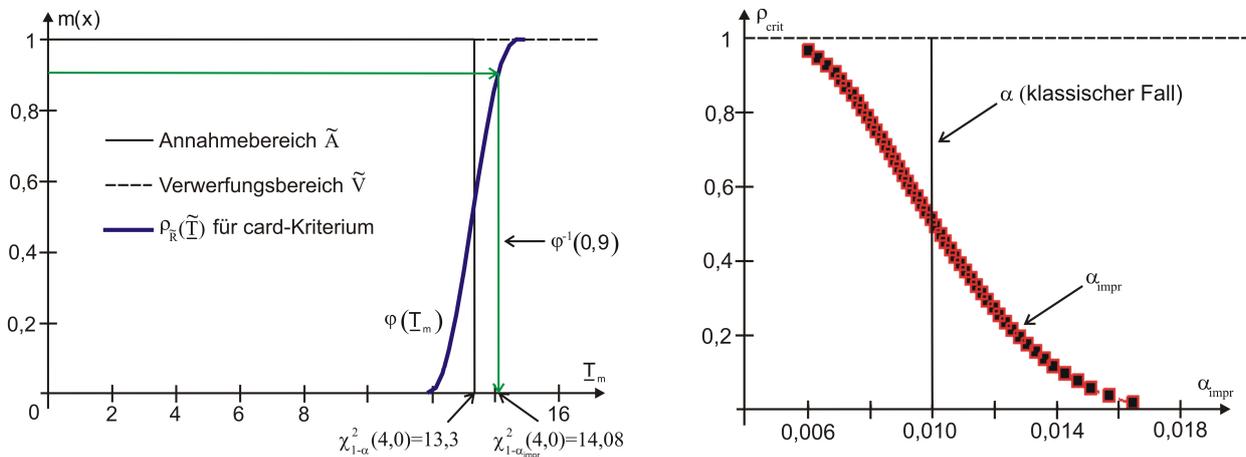


Abbildung 7.12: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{impr}}$  (links) und der multiple Ausreißertest (rechts).

Diese Aussage wird durch Abbildung 7.13 belegt, in der der Fehler 1. Art für verschiedene Größenordnungen der Impräzision der Einflussfaktoren aus Tabelle 7.4 (links) berechnet wurde. Die Linie mit den roten Quadraten zeigt den gleichen Verlauf der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art wie in Abbildung 7.12 (rechts). Für die grüne Linie wurde die Impräzision der Einflussfaktoren halbiert und die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art erneut berechnet. In diesem Fall zeigt sich eine deutlich geringere Variation des Wertebereiches für  $\alpha_{\text{impr}}$  als bei normaler Impräzision. Im dritten Fall wurde die Impräzision der Einflussfaktoren verdoppelt und die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art dargestellt (blaue Linie). Es ist erkennbar, dass die Variation des Wertebereiches für  $\alpha_{\text{impr}}$  sich stark vergrößert. Es besteht kein linearer Zusammenhang zwischen der Steigerung der Impräzision der Einflussfaktoren und der Variation des Wertebereiches für  $\alpha_{\text{impr}}$ . Die Ergebnisse in Abbildung 7.13 lassen aufgrund der quadratischen Form der Teststatistik einen quadratischen Zusammenhang vermuten, der jedoch in kommenden Arbeiten genauer untersucht werden muss.

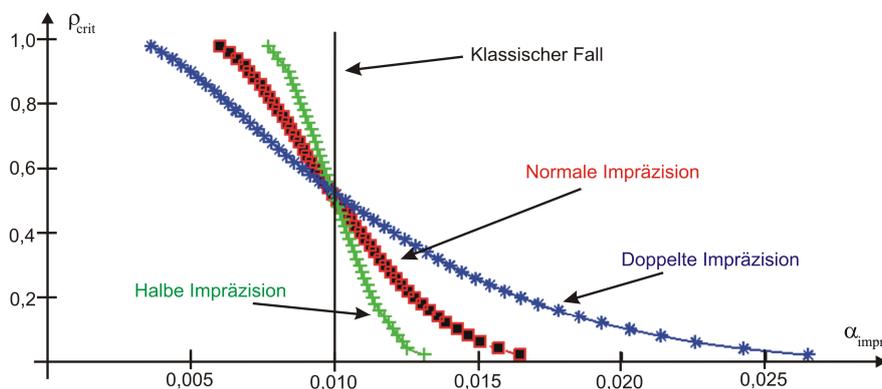


Abbildung 7.13: Ein Vergleich der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art bei unterschiedlicher Impräzision.

Im letzten Teil der Ausreißersuche werden die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art und des Nichtzentralitätsparameters  $\lambda_{\text{impr}}$  nach Kapitel 4.4.2 behandelt. Bei der Annahme der Normalverteilung für die stochastische Unsicherheitskomponente und Verwendung des a-priori Varianzfaktors lässt sich die Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $\beta_{\text{impr}}$  eines Fehlers 2. Art und des Nichtzentralitätsparameters  $\lambda_{\text{impr}}$  im impräzisen Fall mit dem in Abbildung 7.14 dargestellten Suchalgorithmus numerisch lösen. Bei der Suche nach der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art erhält man durch Einsetzen der  $\chi^2$ -Verteilung in (4.78):

$$\chi^2_{1-\alpha_{\text{impr}}}(f, \lambda = 0) = \chi^2_{\beta_{\text{impr}}}(f, \lambda_{\text{impr}}). \quad (7.34)$$

Die dafür notwendige Nullstellensuche bezüglich der Wahrscheinlichkeit  $\beta_{\text{impr}}$  ist in Abbildung 7.14 (links) dargestellt (vgl. auch Kapitel 4.4.2). Bei der Berechnung des Nichtzentralitätsparameters im impräzisen Fall wird die Nullstellensuche in Formel (7.34) bezüglich des Nichtzentralitätsparameter  $\lambda_{\text{impr}}$  durchgeführt (vgl. Abbildung 7.14, rechts). Aufgrund der Monotonie der  $\chi^2$ -Verteilung ist eine zügige Konvergenz bei der numerischen Berechnung der Nullstellen mit einem Bisektionsverfahren möglich. Zur Visualisierung des Suchpfades wurden zur besseren Veranschaulichung in Abbildung 7.14 Punkte mit einem festen Raster bei der Veränderung von  $\lambda_{\text{impr}}$  und  $\beta_{\text{impr}}$  geplottet.

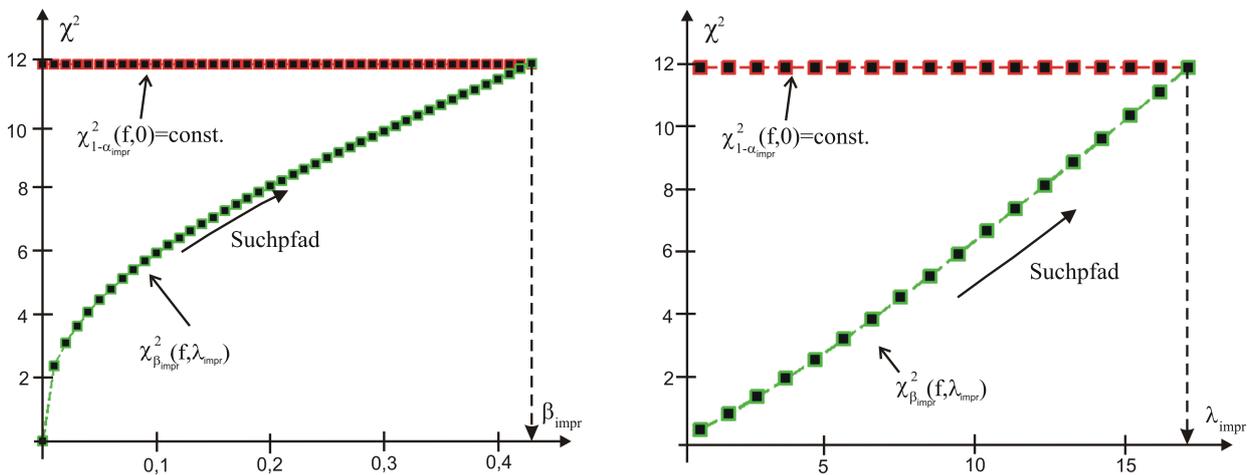


Abbildung 7.14: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit  $\beta_{\text{impr}}$  (links) und des Nichtzentralitätsparameters  $\lambda_{\text{impr}}$  (rechts).

Die Ergebnisse für den Nichtzentralitätsparameter  $\lambda_{\text{impr}}$  in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit  $\beta_{\text{impr}}$  für einen Fehler 2. Art und des kritischen Werte  $\rho_{\text{crit}}$  sind in Abbildung 7.15 dargestellt. Der linke Teil der Abbildung mit der blauen Linie zeigt die Variation des Nichtzentralitätsparameters für  $\beta_{\text{impr}} = 0,3$ , der mittlere Teil für  $\beta_{\text{impr}} = 0,2$  und der rechte Teil für  $\beta_{\text{impr}} = 0,1$ . Je größer der kritische Wert  $\rho_{\text{crit}}$  ist, desto größer wird der Nichtzentralitätsparameter, da die Nullhypothese erst zu einem späteren Zeitpunkt verworfen wird. Aufgrund der geringen Impräzision bei der Identifikation von Ausreißern in diesem Beispiel ist annähernd eine Symmetrie zum klassischen Fall zu erkennen. In der Praxis sind die Hypothesentests im Falle impräziser Daten für  $\rho_{\text{crit}}$  nahe Eins also wesentlich insensitive als im klassischen Fall. Dies bestätigt die Vorüberlegungen, in denen die Impräzision die Gesamtunsicherheit vergrößern soll. Weitere praktische Beispiele bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. und 2. Art sowie des Nichtzentralitätsparameters sind in NEUMANN und KUTTERER (2009) anhand eines eindimensionalen Ausreißertests gezeigt.

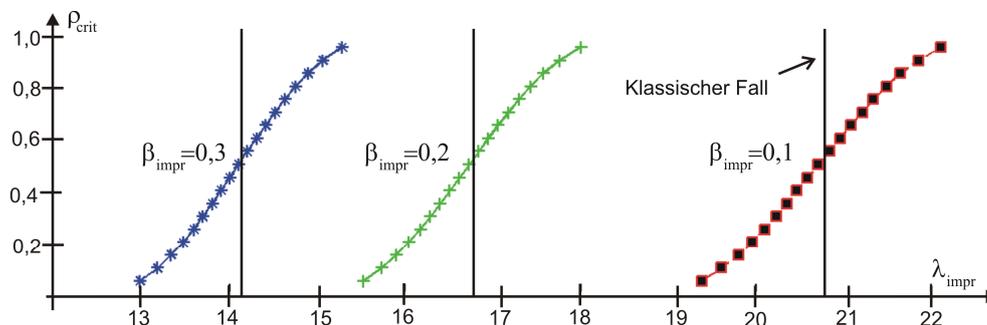


Abbildung 7.15: Der Nichtzentralitätsparameter  $\lambda_{\text{impr}}$  in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art  $\beta_{\text{impr}}$ .

### Schritt 3: Durchführung der Kongruenztests

Sind alle Ausreißer eliminiert, können die Epochen mittels eines Kongruenztestes auf Identität überprüft werden. In dem Beispiel werden die Daten mit  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  verwendet. Es handelt sich um einen zweistufigen Netzaufbau, da bereits sichere Aussagen über die Stütz- und Objektpunkte getroffen werden konnten (Kapitel 7.1.1.1). Die Abbildung 7.17 zeigt den Kongruenztest mit den Epochen 1999 und 2004 im impräzisen

Fall, mit dem die Datumpunkte auf Identität überprüft werden. In diesem Beispiel handelt es sich um 6 identische Stützpunkte mit einem Datumsdefekt von  $d=3$  (vgl. Formel (7.18)). An der großen Ausdehnung der Teststatistik im Vergleich zum Annahmehereich ist die ungünstige Fortpflanzung der Impräzision zu erkennen. Dies ist durch die Differenzbildung des Koordinatenvektors begründet. Eine Überschätzung des Wertebereiches der Teststatistik ist nicht vorhanden. In dem Beispiel werden keine Abhängigkeiten der Einflussfaktoren für beide Epochen modelliert, sodass die Impräzision der Teststatistik sich aus der Summe der Impräzision der Einflussfaktoren aus beiden Epochen zusammensetzt.

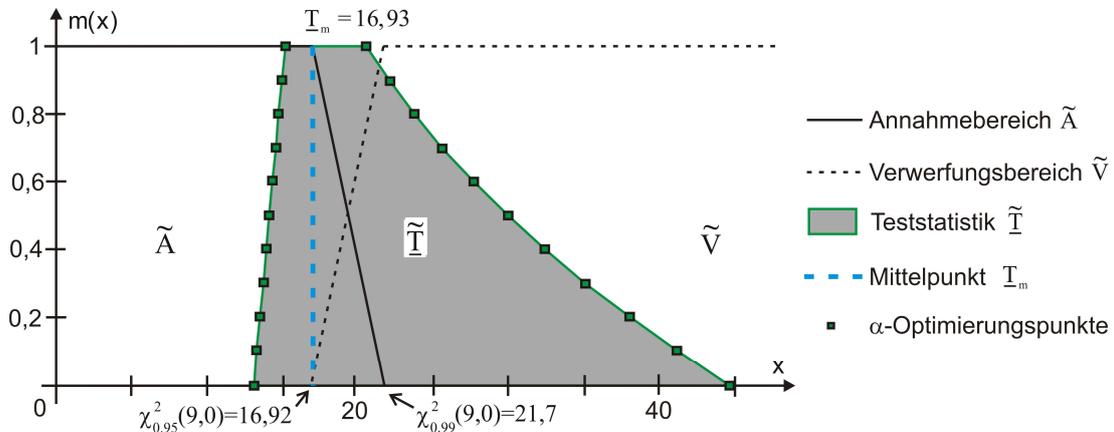


Abbildung 7.16: Kongruenztest für den impräzisen Fall mit den Epochen 1999 und 2004 (unscharfer Annahmehereich).

In Abbildung 7.16 ist zudem ein unscharfer Annahmehereich gezeigt. Dieser beginnt bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 5\%$  und steigt linear bis  $\alpha = 1\%$  auf Eins an. Die unscharfe Teststatistik überdeckt den unscharfen Übergangsbereich vollständig, was die große Impräzision im Verhältnis zur stochastischen Unsicherheitskomponente noch einmal betont. Auch die Konfiguration des Überwachungsnetzes hat einen Einfluss auf die Impräzision der Teststatistik. Je ungünstiger die Netzkonfiguration, desto stärker ist die Ausdehnung der Teststatistik. Beispiele dafür können in KUTTERER und NEUMANN (2007) nachgelesen werden.

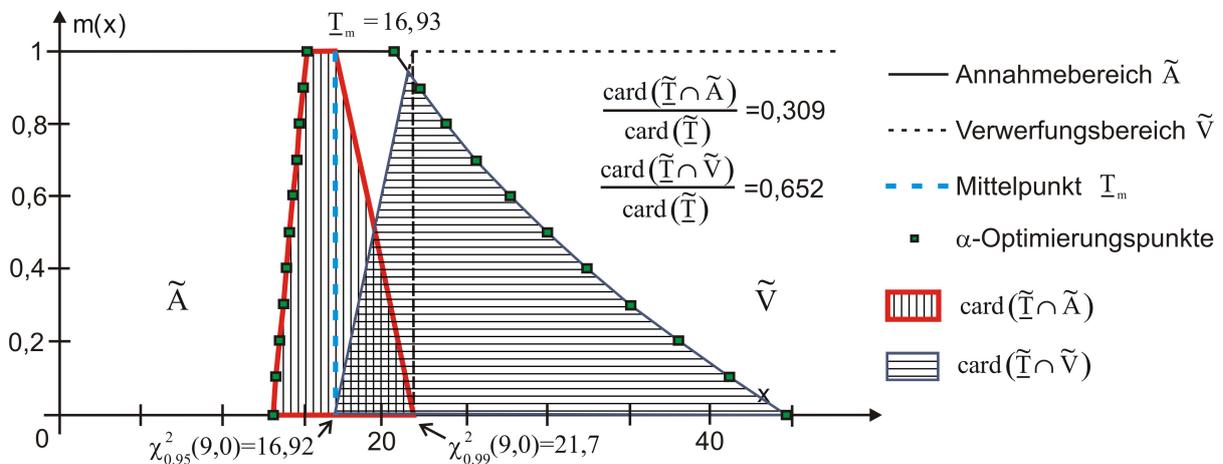


Abbildung 7.17: Auswertung des Kongruenztests für den impräzisen Fall mit den Epochen 1999 und 2004.

Die in Abbildung 7.16 vorliegende Testsituation bedeutet, dass die Nullhypothese aufgrund der ungünstigen Fortpflanzung der Impräzision für  $\rho_{\text{crit}} = 0,1$  in jedem Fall verworfen wird. Bei sicherheitsrelevanten Fragestellungen muss die Impräzision der Einflussfaktoren durch eine Verminderung der epistemischen Unsicherheit (durch zusätzlich Informationen über die Einflussfaktoren) reduziert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurden für beide Epochen unabhängige Einflussfaktoren angesetzt. Ob diese Annahme der Realität gerecht wird, ist zu hinterfragen. Aus diesem Grund muss in zukünftigen Arbeiten die Modellierung der Abhängigkeiten von Einflussfaktoren auf physikalischer Ebene verbessert werden, wie es z. B. in Kapitel 7.3.2.2 und FERSON und KREINOVICH (2006) vorgeschlagen wird. Dies würde auch die Variation für die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art reduzieren, wie sie in Abbildung 7.18 zu sehen ist. Dies stellt jedoch eine umfangreiche eigene Fragestellung dar und muss kommenden Arbeiten vorbehalten bleiben.

In Abbildung 7.17 ist die Auswertung des Kongruenztests zu sehen. Mit den in Kapitel 4.2.2 erläuterten Methoden wurde der Grad der Zurückwerfung  $\rho_{\tilde{T}} = 0,652$  der Nullhypothese berechnet. Im Einzelnen ergeben sich mit der Formel (4.43) die folgenden Ergebnisse:

$$\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{\mathbb{T}}) = \frac{\text{card}(\tilde{\mathbb{T}} \cap \tilde{\mathbb{V}})}{\text{card}(\tilde{\mathbb{T}})} = 0,652, \quad \delta_{\tilde{A}}(\tilde{\mathbb{T}}) = 1 - \frac{\text{card}(\tilde{\mathbb{T}} \cap \tilde{\mathbb{A}})}{\text{card}(\tilde{\mathbb{T}})} = 0,691 \quad \text{und} \quad \rho_{\tilde{R}}(\tilde{\mathbb{T}}) = \min(\gamma_{\tilde{V}}(\tilde{\mathbb{T}}), \delta_{\tilde{A}}(\tilde{\mathbb{T}})) = 0,652. \quad (7.35)$$

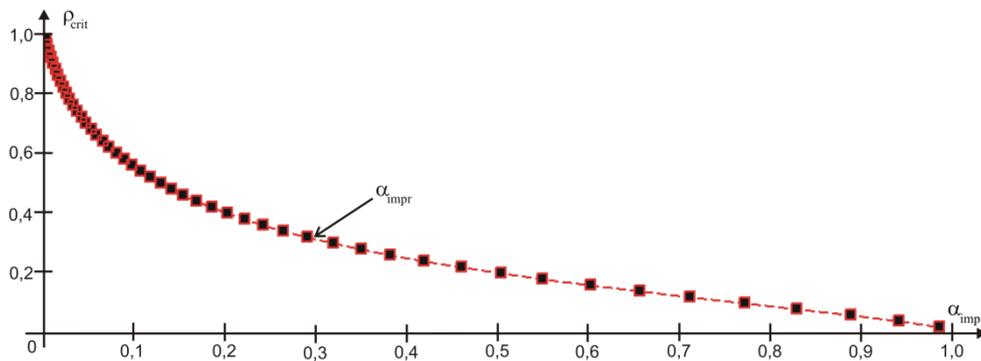


Abbildung 7.18: Die Wahrscheinlichkeit eines Fehler 1. Art in Abhängigkeit von  $\rho_{\text{crit}}$  bei dem Kongruenztest.

#### Schritt 4: Identifikation der bewegten Einzelpunkte

Im letzten Schritt der Deformationsanalyse werden die bewegten Einzelpunkte des Überwachungsnetzes identifiziert. Alle Berechnungen wurden mit einem klassischen Annahmehereich und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  durchgeführt. Der Kongruenztest wird zunächst mit den Datumspunkten 904, 905, 9400 und 907 bis 911 durchgeführt, da gesicherte Informationen über deren grundsätzliche Stabilität vorliegen. Unter der Nullhypothese sind die Koordinaten der Datumspunkte identisch. Wird die Nullhypothese verworfen, wird derjenige Datumspunkt aus dem Satz identischer Punkte eliminiert, der den größten Einfluss auf die quadratische Form in Formel (7.25) hat (Rückwärtsstrategie). Der größte Einfluss wird anhand des Grades der Verwerfung der Nullhypothese festgestellt. Es wird derjenige Punkt eliminiert, der den Grad der Verwerfung am stärksten reduziert. Ist der Grad der Verwerfung nach der Elimination für mehr als einen Punkt Eins oder Null, wird ein Vergleich der Mittelpunkte  $\underline{T}_m$  durchgeführt und der Punkt mit dem größten Einfluss auf  $\underline{T}_m$  eliminiert.

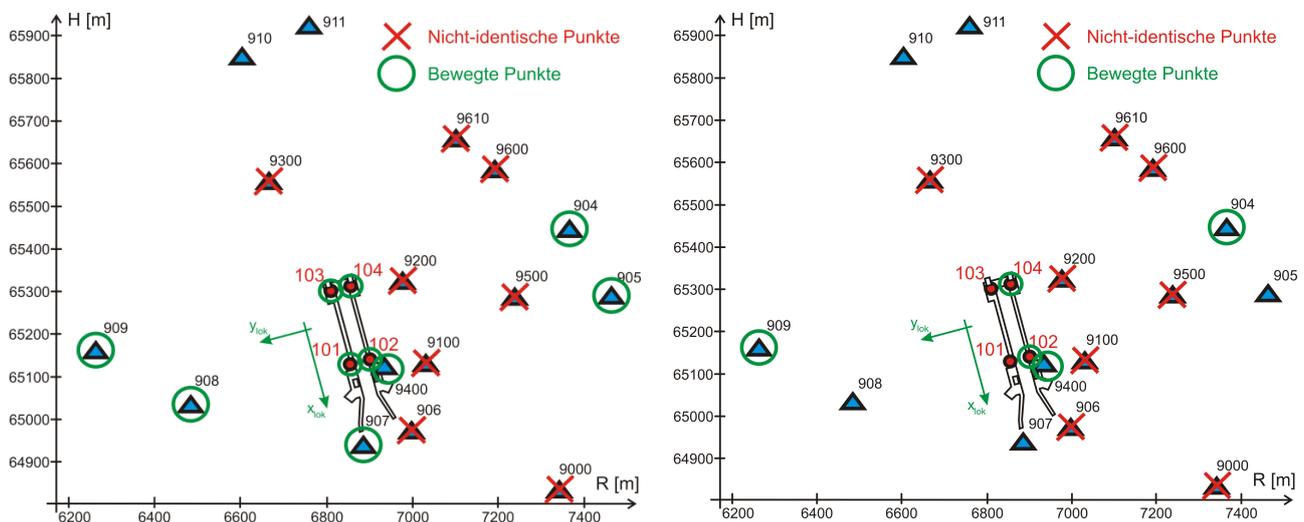


Abbildung 7.19: Die detektierten Punktbewegungen im impräzisen Fall für  $\rho_{\text{crit}} = 0,1$  (links) und für  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  (rechts).

In der Abbildung 7.19 und Tabelle 7.6 sind die Ergebnisse für den impräzisen Fall der beiden Epochen 1999 und 2004 dargestellt. Nicht alle Punkte des Überwachungsnetzes wurden in beiden Epochen besetzt. Die nicht-identischen Punkte wurden mit roten Kreuzen markiert und die bewegten Einzelpunkte mit grünen Kreisen. Die linke Teil der Abbildung 7.19 zeigt eine Auswertung für einen sicherheitsrelevanten Fall, bei dem folglich  $\rho_{\text{crit}} = 0,1$  gewählt wurde. Bis auf die Punkte 910 und 911 sind alle anderen Punkte als bewegt identifiziert. Dies liegt an der starken Impräzision und der damit verbundenen starken Ausdehnung der Teststatistik (vgl. auch Abbildung 7.17). Bei einer sicherheitsrelevanten Fragestellung müsste die Impräzision der Einflussgrößen verringert werden, damit mehr Punkte als unbewegt identifiziert werden können.

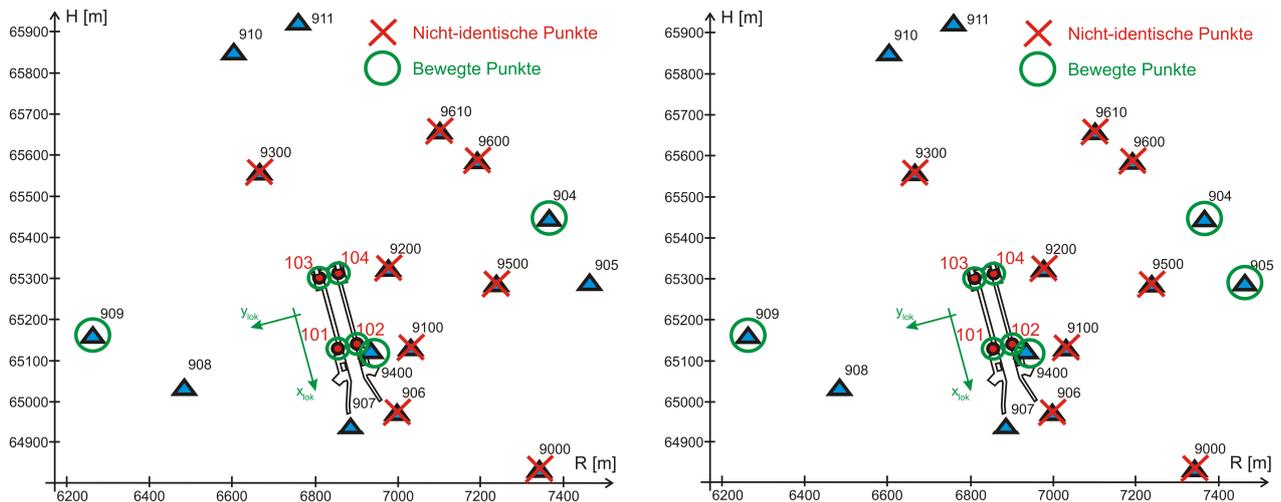


Abbildung 7.20: Die detektierten Punktbewegungen im klassischen (links) und impräzisen Fall (rechts) für  $\rho_{crit} = 0,5$ .

Die Abbildung 7.19 (rechts) zeigt die signifikant verschobenen Punkte, die aus einer Analyse mit  $\rho_{crit} = 0,9$  detektiert wurden. Man sieht, dass bei einer Wahl von  $\rho_{crit} = 0,9$  deutlich weniger Punkte als bewegt identifiziert werden als für  $\rho_{crit} = 0,1$ . Dies liegt an der starken Impräzision der unscharfen Teststatistik bei einem Kongruenztest. Obwohl der Mittelpunkt  $\underline{T}_m$  der Teststatistik bereits klar außerhalb des Annahmebereiches liegt, ragt die Teststatistik immer noch in Teilen in den Annahmebereich hinein, sodass für  $\rho_{crit} = 0,9$  der Kongruenztest wesentlich insensitiver als im klassischen Fall ist (vgl. auch Abbildung 7.20, links). Obgleich die Modellierung von Abhängigkeiten der Einflussfaktoren zwischen den Epochen, wie oben geschildert, noch verfeinert werden muss, stellt diese eine bedeutende Aussage bei der Analyse von Überwachungsmessungen dar.

Punkt-nummer	$\Delta x$ [mm]	$\Delta y$ [mm]	Signifikant?	Punkt-nummer	$\Delta x$ [mm]	$\Delta y$ [mm]	Signifikant?
klassisch				$\rho_{crit} = 0,5$			
101	-1,4	-4,1	Ja	101	-1,5	-3,4	Ja
102	-6,8	-7,4	Ja	102	-7,0	-6,6	Ja
103	1,5	-4,9	Ja	103	1,2	-4,3	Ja
104	3,4	-3,8	Ja	104	3,0	-3,1	Ja
904	3,5	3,7	Ja	904	3,0	5,1	Ja
905	-1,9	1,9	Nein	905	-2,2	3,3	Ja
907	0,8	-0,0	Nein	907	1,0	0,7	Nein
908	-1,3	0,1	Nein	908	-1,3	0,3	Nein
909	-5,0	-3,7	Ja	909	-5,1	-3,8	Ja
910	1,4	-1,5	Nein	910	0,4	-1,1	Nein
911	1,1	-0,4	Nein	911	-0,0	0,1	Nein
9400	22,4	-38,5	Ja	9400	22,3	-37,7	Ja
Punkt-nummer	$\Delta x$ [mm]	$\Delta y$ [mm]	Signifikant?	Punkt-nummer	$\Delta x$ [mm]	$\Delta y$ [mm]	Signifikant?
$\rho_{crit} = 0,9$				$\rho_{crit} = 0,1$			
101	-1,4	-4,1	Nein	101	-7,4	-4,2	Ja
102	-6,9	-7,4	Ja	102	-12,7	-7,7	Ja
103	1,5	-4,9	Nein	103	-3,3	-4,7	Ja
104	3,4	-3,8	Ja	104	-1,4	-3,8	Ja
904	3,5	3,7	Ja	904	-0,5	0,4	Ja
905	-1,9	1,9	Nein	905	-6,9	-2,0	Ja
907	0,8	-0,0	Nein	907	-6,3	-0,4	Ja
908	-1,3	0,1	Nein	908	-7,9	2,3	Ja
909	-5,0	-3,7	Ja	909	-10,7	-0,1	Ja
910	1,4	-1,5	Nein	910	-0,1	-0,0	Nein
911	1,1	-0,4	Nein	911	0,1	0,0	Nein
9400	22,4	-38,5	Ja	9400	16,4	-38,8	Ja

Tabelle 7.6: Die Ergebnisse nach der Stabilpunktsuche bei der Analyse des Überwachungsnetzes Schleuse Uelzen.

Im letzten Beispiel sollen der klassische Fall und der unpräzise Fall mit einem Wert von  $\rho_{\text{crit}} = 0,5$  verglichen werden. Während bei der Ausreißersuche aufgrund der geringen Ausdehnung der Teststatistik zwischen dem klassischen und der unpräzise Fall mit einem Wert von  $\rho_{\text{crit}} = 0,5$  quasi keine Unterschiede feststellbar waren, liegt beim Kongruenztest ein Abweichung vor (vgl. Abbildung 7.20). Dies liegt an der starken Ausdehnung und an der Asymmetrie der Teststatistik. Die Fläche der unscharfen Teststatistik links von  $\underline{T}_m$  ist signifikant größer als rechts von  $\underline{T}_m$ . Im konkreten Fall ist der Punkt 905 im unpräzisen Fall als bewegt identifiziert, während er im klassischen Fall als unbewegt eingestuft werden kann. Alle numerischen Ergebnisse sind noch einmal in Tabelle 7.6 zusammengefasst.

#### 7.2.4.2 Analyse des theoretischen Netzes für die Maschinenachse

Bei der Analyse des Überwachungsnetzes für die Maschinenachse werden zwei Datensätze mit den verschiedenen Tachymetern (Leica TCA 2003 und TCA 1101) analysiert. Beim ersten Datensatz wird davon ausgegangen, dass das in Abbildung 7.3 (rechts) dargestellte Überwachungsnetz nur mit dem Leica TCA 2003 ausgemessen wurde und beim zweiten Datensatz, dass lediglich Messungen mit dem TCA 1101 durchgeführt wurden. Die Unsicherheiten der Beobachtungsgrößen beider Instrumente sind in Tabelle 7.4 (rechts) dargestellt. Für eine einfache Gegenüberstellung ist bei beiden Datensätzen, nach einer Ausgleichung im GMM nach Kapitel 3.3.2.2, die Länge der Maschinenachse mit 9999.2 mm ermittelt. Die beiden mit dem GMM erhaltenen Unsicherheitskomponenten sind in Tabelle 7.7 zusammengestellt. Der Intervallradius wurde mit den Werten für  $\alpha = 0,5$  der Einflussfaktoren berechnet.

Strecke	Standardabweichung $\sigma$ der Länge der Maschinenachse	Intervallradius der Länge der Maschinenachse
TCA 1101	2,10 mm	1,08 mm
TCA 2003	0,92 mm	0,76 mm

Tabelle 7.7: Standardabweichungen und Impräzision für die Länge der Maschinenachse.

Unter der Nullhypothese erfüllt die Maschinenachse die erforderlichen Spezifikationen. Um den Annahmehereich für die Nullhypothese festzulegen, wurde die Produktionsfirma befragt, in deren Maschine die Achse eingebaut werden soll. Die Mitarbeiter des Herstellers sind unterschiedlicher Meinung bei dem benötigten Toleranzbereich für die Maschinenachse. Ein Mitarbeiter ist bereit, alle Werte zwischen 9997 mm bis 10003 mm zu akzeptieren und ein zweiter Mitarbeiter ist davon überzeugt, dass die Länge der Maschinenachse nur zwischen 9998.0 mm und 10002,0 mm liegen kann. Aus diesem Grund ist der Toleranzbereich  $\tilde{A}$  für die Länge der Maschinenachse als Trapez Fuzzy-Set vorgegeben. Eine graphische Darstellung für die vorliegende Testsituation ist in Abbildung 7.21 dargestellt (die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind überhöht dargestellt). Im oberen Teil sieht man die Testsituation für das Leica TCA 2003 und im unteren Teil für das TCA 1101.

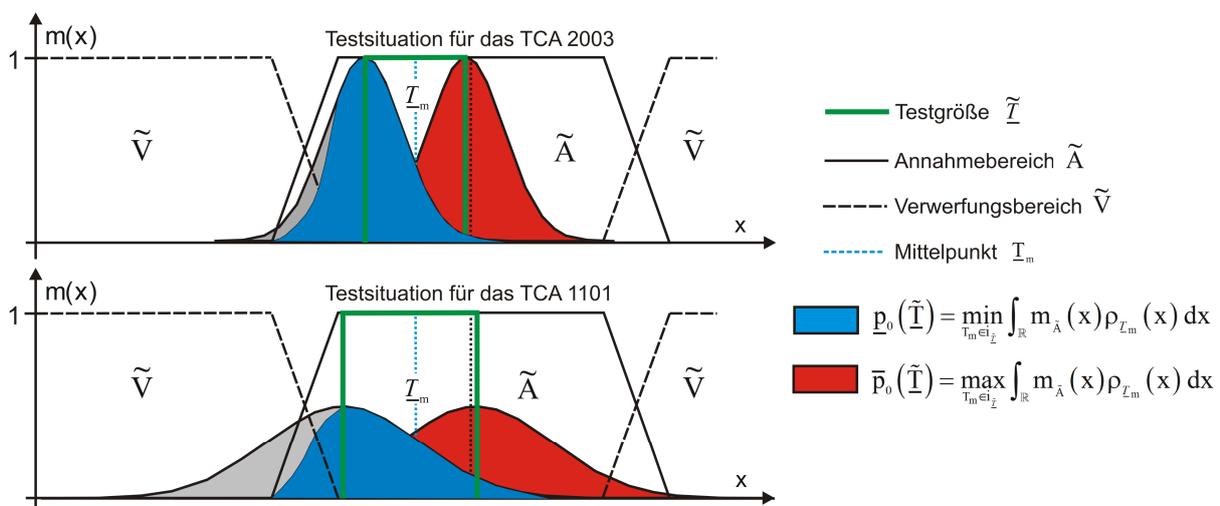


Abbildung 7.21: Testsituation bei der Maschinenachse für das TCA 2003 (oben) und das TCA 1101 (unten).

Die in diesem Beispiel vorliegende Testentscheidung ist identisch mit der in Kapitel 6.5 vorgestellten Vorgehensweise. Bei dem zu testenden eindimensionalen Ermittlungsergebnis handelt es sich um eine FRV  $\tilde{T}$  mit Indikatorfunktion  $i_{\tilde{T}}$  und der Annahmehereich wird über die Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{A}}(x)$  spezifiziert.

Die stochastische Unsicherheitskomponente (der Mittelpunkt  $\underline{T}_m$  der FRV) wird als normalverteilt angenommen:

$$\underline{T}_m \sim \rho_{\underline{T}_m}(x) = N(\mu, \sigma^2) = N(\underline{T}_m, \sigma^2). \quad (7.36)$$

Die Standardabweichungen  $\sigma$  für die Länge der Maschinenachse sind in Tabelle 7.7 zusammengestellt. Die notwendigen Kosten<sup>14</sup> bei den möglichen Testentscheidungen belaufen sich auf:

- I.  $U_{0,0}$  Kosten bei einer korrekt angenommenen Nullhypothese: 2000 € für den Einbau der Maschinenachse.
- II.  $U_{1,0}$  Kosten bei einer fälschlicherweise angenommenen Alternativhypothese (Fehler 1. Art): Die Maschinenachse muss für 3000 € nachbearbeitet werden.
- III.  $U_{1,1}$  Kosten bei einer korrekt angenommenen Alternativhypothese: Die Maschinenachse muss für 3000 € nachbearbeitet werden.
- IV.  $U_{0,1}$  Kosten bei einer fälschlicherweise angenommenen Nullhypothese (Fehler 2. Art): Die Maschinenachse muss für 3000 € nachbearbeitet werden und der Produktionsausfall während des Einbauversuches beträgt 7000 €. Es entstehen insgesamt Kosten in Höhe von 10000 €.

Die Intervalle für die Wahrscheinlichkeit  $[p_0(\tilde{T})] = [p_0(\tilde{T}), \bar{p}_0(\tilde{T})]$ , dass  $\tilde{T}$  im Annahmehbereich liegt und die Wahrscheinlichkeit  $[p_1(\tilde{T})] = [p_1(\tilde{T}), \bar{p}_1(\tilde{T})]$ , dass  $\tilde{T}$  im Verwerfungsbereich liegt, berechnen sich mit (6.36) und (6.37):

Wahrscheinlichkeiten \ Instrument	TCA 2003	TCA 1101
$\underline{p}_0(\tilde{T}) = \min_{\underline{T}_m \in \underline{I}_T} \int_{\mathbb{R}} m_{\bar{\Lambda}}(x) \rho_{\underline{T}_m}(x) dx$	0,8350	0,5956
$\bar{p}_0(\tilde{T}) = \max_{\underline{T}_m \in \underline{I}_T} \int_{\mathbb{R}} m_{\bar{\Lambda}}(x) \rho_{\underline{T}_m}(x) dx$	0,9905	0,7577
$\underline{p}_1(\tilde{T}) = \min_{\underline{T}_m \in \underline{I}_T} \int_{\mathbb{R}} m_{\bar{V}}(x) \rho_{\underline{T}_m}(x) dx$	0,0095	0,2423
$\bar{p}_1(\tilde{T}) = \max_{\underline{T}_m \in \underline{I}_T} \int_{\mathbb{R}} m_{\bar{V}}(x) \rho_{\underline{T}_m}(x) dx$	0,1650	0,4044

Tabelle 7.8: Die Wahrscheinlichkeiten für das Annehmen und Verwerfen der Nullhypothese.

Die Gesamtkosten  $[K_{0,\tilde{T}}] = [K_{0,\tilde{T}}, \bar{K}_{0,\tilde{T}}]$ , die bei Annahme der Nullhypothese entstehen und die Gesamtkosten  $[K_{1,\tilde{T}}] = [K_{1,\tilde{T}}, \bar{K}_{1,\tilde{T}}]$  der Alternativhypothese aus Formel (6.38) und (6.39) sind:

Gesamtnutzen \ Instrument	TCA 2003	TCA 1101
$\underline{K}_{0,\tilde{T}} = \underline{p}_0(\tilde{T})(U_{00} - U_{01}) + U_{01}$	-3320.26	-5234.89
$\bar{K}_{0,\tilde{T}} = \bar{p}_0(\tilde{T})(U_{00} - U_{01}) + U_{01}$	-2075.78	-3938.75
$\underline{K}_{1,\tilde{T}} = \bar{p}_0(\tilde{T})(U_{10} - U_{11}) + U_{11}$	-3000,00	-3000,00
$\bar{K}_{1,\tilde{T}} = \underline{p}_0(\tilde{T})(U_{10} - U_{11}) + U_{11}$	-3000,00	-3000,00

Tabelle 7.9: Die Gesamtkosten beim Annehmen und Verwerfen der Nullhypothese.

In diesem Fall wird die Nullhypothese für das TCA 1101 auf jeden Fall verworfen. Bei dem TCA 2003 kann keine eindeutige Entscheidung für die Nullhypothese oder Alternativhypothese möglich, da  $\bar{K}_{0,\tilde{T}} > \underline{K}_{1,\tilde{T}}$  und  $\underline{K}_{0,\tilde{T}} < \bar{K}_{1,\tilde{T}}$  gilt. Aus diesem Grund muss auf das Hurwicz-Kriterium zurückgegriffen werden, bei dem der Experte die Wahl von  $\kappa \in [0,1]$  aus Formel (6.44) trifft:

$$\kappa_{TCA\ 2003} \geq \frac{\bar{p}_0(\tilde{T})(U_{10} - U_{11}) - \underline{p}_0(\tilde{T})(U_{00} - U_{01}) + U_{11} - U_{01}}{(\bar{p}_0(\tilde{T}) - \underline{p}_0(\tilde{T}))(U_{00} - U_{01} + U_{10} - U_{11})} = \phi_{crit} = 0,257 \quad \text{mit } \phi_{crit} \in \mathbb{R}. \quad (7.37)$$

Ab einem Wert von  $\kappa_{TCA\ 2003} \geq 0.257$  wird die Nullhypothese für das TCA 2003 angenommen. Der klare Unterschied in der Testentscheidung zwischen dem TCA 1101 und dem TCA 2003 ist mit den vorhandenen Unsicherheiten beider Geräte begründet. Sowohl die Impräzision als auch die zufällige Komponente der

<sup>14</sup> Kosten sind ein negativer Nutzen

Unsicherheit sind bei dem TCA 1101 deutlich größer als beim TCA 2003. Aus diesem Grund ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt für das TCA 1101 deutlich größer als beim TCA 2003 (vgl. insbesondere Abbildung 7.21 und Tabelle 7.8).

### 7.2.5 Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick

In beiden vorangegangenen Beispielen wurden Ergebnisse von Hypothesentests im Falle unscharfer Daten gezeigt. Kernpunkt war die Erweiterung des Kongruenzfalls mit den in Kapitel 4 und 5 vorgestellten Hypothesentests bei Unschärfe. Die gewonnenen Ergebnisse werden im Wesentlichen durch die Wahl des kritischen Wertes  $\rho_{\text{crit}}$  beeinflusst. Bei der Ausreißersuche wird eine Wahl von  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  empfohlen, da die Impräzision eine zusätzliche Komponente der Unsicherheit darstellt, sodass genügend gegen den Beobachtungswert sprechen muss, damit sie als Ausreißer identifiziert wird. Bei dem Kongruenztest ist zwischen sicherheitsrelevanten Fragestellungen und einer signifikanten Identifikation der Punktbewegungen zu unterscheiden.

In sicherheitsrelevanten Fragestellungen muss der Wert  $\rho_{\text{crit}} = 0,1$  gewählt werden, sodass die Nullhypothese im impräzisen Fall früher als im klassischen Fall verworfen wird. Je größer die Impräzision der Einflussfaktoren, desto früher wird die Nullhypothese im impräzisen Fall für  $\rho_{\text{crit}} = 0,1$  verworfen. Der Umkehrschluss ist gültig: Je größer der Wert  $\rho_{\text{crit}}$ , desto später wird die Nullhypothese verworfen. Da die Impräzision als eine zusätzliche Unsicherheitskomponente der Beobachtungen zu verstehen ist, wird für eine signifikante Identifikation von Punktbewegungen ein  $\rho_{\text{crit}} = 0,9$  empfohlen, sodass Punktbewegungen erst später als im klassischen Fall identifiziert werden. Bei dem Kongruenztest ist die Wahl von  $\rho_{\text{crit}}$  daher von der jeweiligen Situation abhängig.

Im zweiten Beispiel wurden die in Kapitel 6 vorgestellten Hypothesentests an einem Beispiel untersucht. Es hat sich gezeigt, dass bei Vorliegen von zufälliger Variabilität und Unschärfe eine Testentscheidung mit dem in Kapitel 6.3.1 vorgestellten Hurwicz-Kriterium möglich ist, das zudem einen guten Zugang für die Interpretation der Testsituation erlaubt. Des Weiteren konnten Nutzenfunktionen bei der Testentscheidung berücksichtigt werden.

Es bleibt daher festzuhalten, dass durch die Berücksichtigung der Impräzision eine verfeinerte Interpretation geodätischer Netze möglich ist. Des Weiteren kann die Auswirkung systematischer Beobachtungsfehler auf Signifikanzuntersuchungen unmittelbar an der Form der Teststatistik abgelesen werden. Eine starke Ausdehnung und Asymmetrie der unscharfen Teststatistik spricht für eine starke Impräzision sowie für eine ungünstige Fortpflanzung systematischer Effekte in einem Teil oder im gesamten Überwachungsnetz. Weitere Beispiele für den Kongruenzfall der Deformationsanalyse im Falle impräziser Daten werden in NEUMANN und KUTTERER (2006, 2007a, 2009) und KUTTERER und NEUMANN (2007) gezeigt. Diese Publikationen beinhalten auch unscharfe Annahmebereiche, die im Rahmen dieser Arbeit nicht vertieft diskutiert wurden, um einen Vergleich zum klassischen Fall durchführen zu können.

Im Standardfall der (geodätischen) Datenanalyse wird die zufällige Komponente der Unsicherheit gegenüber der Impräzision bzw. Unschärfe dominieren. Es gibt heute verstärkt Szenarien, in denen systematische Restunsicherheiten den Unsicherheitshaushalt dominieren, insbesondere auch beim terrestrischen Laserscanning, bei dem die zufällige Unsicherheit durch Aggregationsverfahren auf ein Minimum reduziert wird. Des Weiteren gehören lange GPS-Basislinien (vgl. auch SCHÖN und KUTTERER 2005a und 2006b) dazu. In diesen Fällen ist die Ausdehnung der Teststatistik wesentlich größer als ein klassischer Annahmebereich, sodass eine Interpretation der Hypothesentests schwierig ist. Je nach Wahl von  $\rho_{\text{crit}}$  können Situationen entstehen, in denen die Nullhypothese immer angenommen oder verworfen wird. Aus diesem Grund müssen sich kommende Arbeiten auch mit rein mengentheoretischen Verschneidungen von unscharfen Größen auseinandersetzen, um Testentscheidungen herbeizuführen.

## 7.3 Kinematische Deformationsanalysen bei Impräzision

Bei den kinematischen Deformationsanalysen ist das zu überwachende Objekt in Bewegung und die Zeit wird bei der Modellierung des Deformationsverhaltens berücksichtigt (vgl. auch Abbildung 7.1). In der geodätischen Deformationsanalyse hat sich dafür das auf KALMAN (1960) zurückgehende Kalmanfilter (KF) etabliert. Es ist ein sequentielles Ausgleichungsverfahren, das Schätzung eines Prozesses auf Grundlage eines prädierten Zustandes (Systemgleichung) und durch zusätzliche Beobachtungen (Messgleichung) erlaubt. Da die Schätzung des gefilterten Systemzustandes in einem GMM nach Kapitel 3.3.2.2 erfolgt, soll auch die Filterung in dieser Arbeit behandelt werden.

Bei der Überwachung von Bauwerken werden häufig Größen benötigt, die nicht oder nur mit großem (finanziellem) Aufwand direkt beobachtet werden können, gleichzeitig aber charakteristische Größen für das Systemverhalten darstellen. Werden diese als Prozesskoeffizienten bezeichneten Größen in Form von zusätzlichen Unbekannten in einer adaptiven Partition des Zustandsvektors aufgenommen, spricht man von einem adaptiven KF. Durch die Schätzung der Prozesskoeffizienten ist eine Verbesserung des in der ursprünglichen Systemgleichung beschriebenen Bewegungsverhaltens möglich. Dabei wird vorausgesetzt, dass die deterministischen Prozesskoeffizienten keine deterministischen Veränderungen mit der Zeit erfahren, sondern rein zufällig variieren. In der Realität werden die stochastischen Signale jedoch zumeist von verbleibenden Restsystematiken überlagert, dies führt unumgänglich zu einer Unterschätzung des gemeinsamen Unsicherheitshaushaltes bei rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen.

In diesem Kapitel werden zufällige und systematische Unsicherheiten daher erstmalig in einem gemeinsamen Ansatz mit Hilfe von FRVs modelliert und bei der Auswertung des KFs berücksichtigt. Zunächst wird in Kapitel 7.3.1 die rein stochastische Vorgehensweise vorgestellt. Darauf folgt die Erweiterung auf den Fall mit unscharfen Daten. In Kapitel 7.3.3 werden im Rahmen eines kinematischen KF die in Kapitel 7.1.2.1 vorgestellten Daten analysiert. Zum Abschluß des Kapitels werden alle Erkenntnisse in Kapitel 7.3.4 zusammengefaßt.

### 7.3.1 Das Kalmanfilter im rein stochastischen Fall

Nach GREWAL und ANDREWS (2001, S. 1) liefert das KF die optimale Schätzung des aktuellen Zustandes<sup>15</sup>  $\mathbf{x}_{k+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$  mit  $k \geq 1$  eines linearen dynamischen Systems mittels Beobachtungen  $\mathbf{y}_{k+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$ , die in linearem Zusammenhang zu dem dynamischen System stehen. Das dynamische System als auch die Beobachtungen werden dabei von weißem Rauschen überlagert. Als optimale Schätzung versteht man die Minimierung des (gewichteten) quadratischen Fehlers des Zustandes bezogen auf das System und dessen Beobachtung. Die Kenntnis über das dynamische System wird mit der diskreten Systemgleichung beschrieben:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k). \quad (7.38)$$

Die i. A. a-priori nicht-lineare Funktion  $\mathbf{f}(\dots)$  ist fest und hängt vom vorangegangenen Systemzustand  $\mathbf{x}_k$  sowie von den deterministischen Stellgrößen  $\mathbf{u}_k$  ab und wird vom normalverteilten Systemrauschen  $\mathbf{w}_k \sim N(\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}})$  überlagert. Der aktuelle Systemzustand hängt indirekt von den Beobachtungen  $\mathbf{y}_{k+1}$  ab, wobei der funktionale Zusammenhang mit der Beobachtungsgleichung beschrieben wird:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1}. \quad (7.39)$$

Die ebenfalls a-priori nicht-lineare, feste Funktion  $\mathbf{h}(\dots)$  wird vom normalverteilten Messrauschen  $\mathbf{v}_{k+1} \sim N(\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{v}})$  beeinflusst. Nach Initialisierung des Filters zu einem Zeitpunkt  $t_0$  werden alle weiteren Parameter des Prozesses auf Basis der zusätzlichen Beobachtungen geschätzt (Filterung). Folglich sind alle Arten von Unsicherheit ab einem gewissen Zeitpunkt  $t_k$  mit  $k > 0$  allein durch die Unsicherheiten des Messprozesses und des Systemrauschens zu erklären. Eine korrekte Beschreibung des Unsicherheitshaushaltes der Zielparameter ist somit nur durch eine adäquate Unsicherheitsmodellierung der Beobachtungen zu erreichen. Bei dem KF handelt es sich um ein rekursives Schätzverfahren, man spricht daher auch von einem Informationszustand, da aufgrund des weißen System- und Messrauschens alle Informationen über den aktuellen Zustand in der Verteilungsfunktion des Zustandes enthalten sind. Die Schätzung des Systemzustandes erfolgt in einem GMM nach Kapitel 3.3.2.2.

Die folgende Darstellung und Notation in dieser Arbeit orientiert sich an HEUNECKE (1995) und WELSCH ET AL. (2000, S. 285ff). Bei dem vorgestellten Ablauf des Auswerteprozesses spielt es keine Rolle, ob beim adaptiven KF die als Prozesskoeffizienten bezeichneten Größen in Form von zusätzlichen Unbekannten in den Zustandsvektor aufgenommen und mitgeschätzt werden (WELSCH ET AL., 2000, S. 308). Im Folgenden sollen die wesentlichen Gleichungen der Kalmanfilterung dargelegt werden, um daraufhin die Impräzision zwischen Modell und Beobachtung in den Auswerteprozess integrieren zu können.

Für den Algorithmus des KFs werden zunächst die Eingangsdaten  $\mathbf{L}$  und das zugehörige stochastische Modell  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{L}}$ :

<sup>15</sup> Im Gegensatz zur Parameterschätzung in Kapitel 3.3.2 wird der Systemzustand mit  $\mathbf{x}$  anstelle  $\boldsymbol{\theta}$  bezeichnet.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Sigma_{\mathbf{LL}} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{xx},k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{uu},k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{ww},k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{yy},k+1} \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

benötigt. Dabei wird im Rahmen der Filterung die Systemgleichung auf den Zeitpunkt  $t_{k+1}$  prädiert und die zugehörige Kovarianzmatrix  $\Sigma_{\mathbf{xx},k+1}$  für den prädierten Zustand<sup>16</sup>  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$  berechnet:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{k+1,k} & \mathbf{B}_{k+1,k} & \mathbf{C}_{k+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{w}_k \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{k+1,k} \mathbf{x}_k^* \quad \text{und} \quad \Sigma_{\mathbf{xx},k+1} = \mathbf{T}_{k+1,k} \Sigma_{\mathbf{xx},k} \mathbf{T}_{k+1,k}^T + \mathbf{B}_{k+1,k} \Sigma_{\mathbf{uu},k} \mathbf{B}_{k+1,k}^T + \mathbf{C}_{k+1,k} \Sigma_{\mathbf{ww},k} \mathbf{C}_{k+1,k}^T \quad (7.41)$$

mit der Transitionsmatrix  $\mathbf{T}_{k+1,k} = (\partial \mathbf{f}(\dots) / \partial \mathbf{x})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}$ , der Stellgrößenmatrix  $\mathbf{B}_{k+1,k} = (\partial \mathbf{f}(\dots) / \partial \mathbf{u})_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_k}$  und der Störgrößenmatrix  $\mathbf{C}_{k+1,k} = (\partial \mathbf{f}(\dots) / \partial \mathbf{w})_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_k}$ , die sich als Ableitungen der Funktion aus (7.38) nach ihren Eingangsgrößen (Jakobimatrizen) ergeben. Die Matrizen sind für jede Anwendung individuell festzulegen und können beispielsweise für die Trajektorienbestimmung in (STERNBERG, 2005) und für dynamische Strukturmodelle in (EICHHORN, 2007) nachgeschlagen werden. Es wird vorausgesetzt, dass die Approximation der System- und Beobachtungsgleichung durch eine Taylorreihe erster Ordnung eine hinreichend gute Näherung darstellt.

Die folgende Schätzung des ausgeglichenen Systemzustandes  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  zur Epoche  $t_{k+1}$  im Gauß-Markov-Modell beruht auf dem prädierten Zustand  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$  und den zur Epoche  $t_{k+1}$  erfassten Beobachtungen  $\mathbf{y}_{k+1}$ , die für die Verbesserung der Schätzung herangezogen werden:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \bar{\mathbf{x}}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}, \quad (7.42)$$

mit der Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}_{k+1}$ :

$$\mathbf{K}_{k+1} = \Sigma_{\mathbf{xx},k+1} \mathbf{A}_{k+1}^T (\Sigma_{\mathbf{yy},k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \Sigma_{\mathbf{xx},k+1} \mathbf{A}_{k+1}^T)^{-1} \quad (7.43)$$

und dem Vektor der Innovation  $\mathbf{d}_{k+1}$ :

$$\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) \quad (7.44)$$

sowie der Designmatrix  $\mathbf{A}_{k+1} = (\partial \mathbf{h}(\dots) / \partial \mathbf{x})_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}$  für den linearisierten Ansatz im Gauß-Markov-Modell. Die Kovarianzmatrizen  $\Sigma_{\mathbf{dd},k+1}$  der Innovation  $\mathbf{d}_{k+1}$  und des ausgeglichenen Zustand  $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}},k+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$  berechnen sich mit:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{dd},k+1} &= \Sigma_{\mathbf{ll},k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \Sigma_{\mathbf{xx},k+1} \mathbf{A}_{k+1}^T, \\ \Sigma_{\hat{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}},k+1} &= \Sigma_{\mathbf{xx},k+1} - \mathbf{K}_{k+1} \Sigma_{\mathbf{dd},k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Für detaillierte Erläuterungen des linearen (adaptiven) KFs mit rein stochastischer Modellierung wird im geodätischen Bereich neben WELSCH ET AL. (2000, S. 285ff) auf EICHHORN (2005 und 2007), HEUNECKE (1995) und STERNBERG (2000) verwiesen. Für weitergehende (methodische) Betrachtungen, insbesondere bei der Berücksichtigung von Nichtlinearitäten in der System- und Beobachtungsgleichung wird auf GELB (1974), SIMON (2006) und RISTIC ET AL. (2004) verwiesen. Nichtlinearitäten spielen im Rahmen dieser Arbeit keine Rolle. Es wird davon ausgegangen, dass eine Taylorreihenentwicklung erster Ordnung eine hinreichend gute Näherung darstellt, da die vorhandenen Unsicherheiten klein im Verhältnis zu den Beobachtungen sind.

### 7.3.2 Das Kalmanfilter mit unscharfen Daten

Die rekursive Parameterschätzung, wie sie beim KF angewandt wird, eignet sich nur bedingt für die Auswertung von unscharfen Daten, da eine mehrfache Abbildung von unscharfen Vektoren unweigerlich zu einer

<sup>16</sup> Der Querstrich in  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$  steht beim KF für den prädierten Zustand und nicht für den Erwartungswert.

Überschätzung führt. Diese Problematik wurde ausführlich in Kapitel 3.3.2.2 sowie 3.3.3 erläutert und wird praktisch in Kapitel 7.3.3.2 demonstriert werden. Es wurde motiviert, dass bei dem Umgang mit unscharfen Vektoren angestrebt werden sollte, lediglich eine einzige Abbildung eines unscharfen Vektors vorzunehmen. Aus diesem Grund basiert die (adaptive) Kalmanfilterung mit unscharfen Daten auf der Überlegung, dass zunächst die Rekursion aufgelöst wird (Kapitel 7.3.2.1) und dann die Unschärfe in Kapitel 7.3.2.2 in einem Schritt auf die Parameter abgebildet wird.

Durch die Auflösung der Rekursion werden die zu bearbeitenden Gleichungssysteme jedoch sehr groß, so dass die oben genannte Strategie nur für eine limitierte Anzahl an Epochen anwendbar ist. Aus diesem Grund müssen in kommenden Arbeiten effiziente Ansätze entwickelt werden, die die unscharfe Auswertung mit einer rechentechnisch begrenzten Anzahl von Epochen ermöglichen. Strategien dafür werden in Kapitel 7.3.3.1 und 7.3.3.2 aufgezeigt werden. Diese motivieren, die Überschätzung von Epoche zu Epoche abzuschätzen bzw. zu bestimmen, und bei der rekursiven unscharfen Auswertung entsprechend zu berücksichtigen.

### 7.3.2.1 Auflösung der Rekursion

Durch die rein stochastische Auswertung sind zu dem Zeitpunkt der unscharfen Analyse sowohl  $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$  als auch  $\hat{\mathbf{x}}_k$  bereits bekannt. Um die Linearisierung im Gauß-Markov-Modell verbessern zu können, wird daher eine Linearisierung an der Stelle  $(\bar{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k)/2$  durchgeführt, wie es auch beim „Iterated extended KF“ (SIMON, 2006, S. 410ff) üblich ist. Auf diese Weise lässt sich stets eine Verbesserung der Linearisierung erreichen, da für eine stetige und konvexe Funktion  $h$ , die im Innern des Intervalles  $[a, b]$  eine Ableitung  $h'$  besitzt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt (vgl. BRONSTEIN, 2000, S. 403):

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} \quad \text{mit } a < c < b. \quad (7.46)$$

Die Designmatrix ergibt sich dann zu:

$$\mathbf{A}_{m,k} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}(\dots)}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1} + \hat{\mathbf{x}}_k}{2}}. \quad (7.47)$$

Mit der gewählten Linearisierung aus (7.46) kann für (7.44) mit (7.41) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{k+1} &= \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}_{k+1} + \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \\ &= \mathbf{y}_{k+1} - \left[ \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{A}_{m,k} (\bar{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k) \mp \dots \right] \\ &\approx \mathbf{y}_{k+1} - \left[ \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{A}_{m,k} (\bar{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k) \right] \\ &= \Delta \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{A}_{m,k} (\mathbf{P}_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \\ &= \Delta \mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{A}_{m,k} (\mathbf{E} - \mathbf{P}_{k+1,k}) \hat{\mathbf{x}}_k. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Löst man die Rekursion zunächst mit (7.41) und (7.42) für den ausgeglichenen Zustand  $\hat{\mathbf{x}}_1$  auf:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_1 &= \bar{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{m,0} (\mathbf{E} - \mathbf{P}_{1,0}) \hat{\mathbf{x}}_0) \\ &= \mathbf{P}_{1,0} \hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{K}_1 (\Delta \mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{m,0} (\mathbf{E} - \mathbf{P}_{1,0}) \hat{\mathbf{x}}_0) \\ &= \mathbf{K}_{0,1} \Delta \mathbf{y}_1 + (-\mathbf{K}_1 \mathbf{A}_{m,0} \mathbf{P}_{1,0} + \mathbf{K}_1 \mathbf{A}_{m,0} + \mathbf{P}_{1,0}) \hat{\mathbf{x}}_0 \\ &= \left[ \mathbf{K}_1 \quad -\mathbf{K}_1 \mathbf{A}_{m,0} \mathbf{P}_{1,0} + \mathbf{K}_1 \mathbf{A}_{m,0} + \mathbf{P}_{1,0} \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.49)$$

lässt sich eine wiederkehrende Struktur zwischen den Epochen erkennen. Diese lässt sich mit

$$\mathbf{H}_k = \left[ \mathbf{K}_k \quad (-\mathbf{K}_k \mathbf{A}_{m,k-1} \mathbf{P}_{k,k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{A}_{m,k-1} + \mathbf{P}_{k,k-1}) \right] \mathbf{H}_{k-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{E} \quad (7.50)$$

auf die  $k$ -te Epoche erweitern (NEUMANN und KUTTERER, 2007b):

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \left[ \mathbf{K}_{k+1} \quad \left( -\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{m,k} \mathbf{P}_{k+1,k} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{m,k} + \mathbf{P}_{k+1,k} \right) \mathbf{H}_k \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{y}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}. \quad (7.51)$$

Liegt a-priori ein linearer Zusammenhang bei der System- und Beobachtungsgleichung vor, so vereinfacht sich mit  $\mathbf{H}_k = \left[ \mathbf{K}_k \quad (\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{A}_k) \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_{k-1} \right]$  und  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{E}$  die Auflösung der Rekursion zu:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \left[ \mathbf{K}_{k+1} \quad (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1,k} \mathbf{H}_k \right] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}. \quad (7.52)$$

Die oben geschilderte Auflösung der Rekursion ermöglicht im nächsten Kapitel unmittelbar eine Integration der Unschärfe in den Auswerteprozess.

### 7.3.2.2 Integration der Unschärfe in den Auswerteprozess

Die Unsicherheit des ausgeglichenen Zustands  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  des Parametervektors zu der Epoche  $t_{k+1}$  ist vollständig durch die Unsicherheit der Beobachtungen und des Systemrauschens aus den vorherigen Epochen sowie dem Bezugszustand  $\hat{\mathbf{x}}_0$  zu erklären. Eine sehr rudimentäre Auswertung des Systemzustandes im Falle unscharfer Einflussfaktoren  $\tilde{\mathbf{p}}$  ist die Bestimmung für die Realisierung der unscharfen Zufallsvariable für den Systemzustand  $\tilde{\mathbf{x}}$  im rekursiven Ansatz:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{\alpha, \min, k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \left[ \left[ \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{F} \quad -\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{m,k} \mathbf{P}_{k+1,k} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{m,k} + \mathbf{P}_{k+1,k} \right] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r, k} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\alpha, r, k} \end{bmatrix} \right], \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\alpha, \max, k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1} + \left[ \left[ \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{F} \quad -\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{m,k} \mathbf{P}_{k+1,k} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{m,k} + \mathbf{P}_{k+1,k} \right] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r, k} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\alpha, r, k} \end{bmatrix} \right], \end{aligned} \quad (7.53)$$

mit  $|\cdot|$  dem Element für Element gebildeten Absolutbetrag, der Matrix der partiellen Ableitungen  $\mathbf{F}$  der Beobachtungen  $\mathbf{y}_{k+1}$  nach den Einflussfaktoren  $\mathbf{p}$  (vgl. auch Kapitel 3.3.1). Die komponentenweise Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{\mathbf{x}}, k+1}(x)$  für den unscharfen Systemzustand  $\tilde{\mathbf{x}}$  ergibt sich zu:

$$m_{\tilde{\mathbf{x}}, k+1}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot i_{\tilde{\mathbf{x}}, k+1}^{\alpha}(x) \quad \text{mit} \quad i_{\tilde{\mathbf{x}}, k+1}^{\alpha} = \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{i, \alpha, \min, k+1} > \tilde{\mathbf{x}}_{i, \alpha, \max, k+1} \right]. \quad (7.54)$$

Die Formel (7.53) führt auf Grund des Überschätzungsproblems bei der Abbildung unscharfer Vektoren (vgl. Kapitel 3.3.3) zu einer erheblichen Überschätzung des tatsächlichen Wertebereiches für den unscharfen Systemzustand  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Die sich potenzierende Überschätzung macht diesen Ansatz, wie in Kapitel 7.3.3.1 noch gezeigt werden wird, für eine praktische Verwendung unbrauchbar. Deshalb wird die Unschärfe des Systemzustandes aus der im vorangegangenen Kapitel vorgestellten aufgelösten Rekursion bestimmt. Auf Grundlage der Formeln (3.62) bis (3.65) und mit (7.51) kann jetzt unmittelbar die Sensitivitätsanalyse für den Aufbereitungsprozess der originären Beobachtungen (SCHÖN 2003, S. 27ff, vgl. auch Kapitel 3.3.1) durchgeführt werden, um die Realisierung der unscharfen Zufallsvariable für den Systemzustand  $\tilde{\mathbf{x}}$  zu konstruieren (NEUMANN und KUTTERER, 2007b):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{\alpha, \min, k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \left[ \left[ \mathbf{K}_{k+1} \quad \left( -\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{m,k} \mathbf{P}_{k+1,k} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{m,k} + \mathbf{P}_{k+1,k} \right) \mathbf{H}_k \right] \mathbf{MF} \right] \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\alpha, \max, k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1} + \left[ \left[ \mathbf{K}_{k+1} \quad \left( -\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{m,k} \mathbf{P}_{k+1,k} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{m,k} + \mathbf{P}_{k+1,k} \right) \mathbf{H}_k \right] \mathbf{MF} \right] \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r}, \end{aligned} \quad (7.55)$$

bzw. bei dem a-priori linearen Modell aus (7.52):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{\alpha, \min, k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \left[ \left[ \mathbf{K}_{k+1} \quad (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1,k} \mathbf{H}_k \right] \mathbf{MF} \right] \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\alpha, \max, k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1} + \left[ \left[ \mathbf{K}_{k+1} \quad (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1,k} \mathbf{H}_k \right] \mathbf{MF} \right] \tilde{\mathbf{p}}_{\alpha, r}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Der Radius des unscharfen Systemzustandes  $\tilde{\mathbf{x}}_{\alpha,r,k+1} = (\tilde{\mathbf{x}}_{\alpha,\max,k+1} - \tilde{\mathbf{x}}_{\alpha,\min,k+1})/2$  ergibt sich somit direkt aus den unscharfen Einflussfaktoren  $\tilde{\mathbf{p}}$ . Die komponentenweise Zugehörigkeitsfunktion  $m_{\tilde{\mathbf{x}},k+1}(\mathbf{x})$  wird mit Formel (7.54) berechnet. Abschließend wird noch der eingesetzte Auswerteprozess bei der impräzisen Analyse durch die Matrix  $\mathbf{M}$  eingeführt, die dazu führt, dass für Folgeepochen nur noch die Differenz der Beobachtungsimpräzision zur vorangegangenen Epoche bei der Analyse berücksichtigt wird (vgl. SCHÖN und KUTTERER, 2006b). Dies ist möglich, da unter konstanten äußeren Bedingungen die reproduzierbaren Effekte der Unsicherheit (Systematik) sich bei gleicher Konfiguration identisch auswirken. Beispiele der Matrix  $\mathbf{M}$  für eine Differenzbildung findet man z. B. in LEICK (1995, S. 348) und in SCHÖN (2003, S. 38ff). Es ergeben sich somit drei verschiedene Möglichkeiten zur Konstruktion des unscharfen Vektors des Systemzustandes:

- i) Fortpflanzung der Unschärfe im rekursiven Ansatz nach Formel (7.53)  $\rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_1$
- ii) Anwendung der Formel (7.55) mit  $\mathbf{M} = \mathbf{E}$  für die Fortpflanzung der Unschärfe  $\rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_2$
- iii) Anwendung der Formel (7.55) mit  $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}$  für die Fortpflanzung der Unschärfe  $\rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_3$

Die Ansätze i) und ii) können so interpretiert werden, dass für jede Epoche neue, unabhängige Einflussfaktoren auf die Impräzision eingeführt werden. Bei der mehrfachen Abbildung des unscharfen Vektors der Epochen in Ansatz i) kommt es aufgrund des Subdistributivitätsgesetzes (z. B. ALEFELD und HERZBERGER, 1983) jedoch zu der Teilmengenbeziehung  $\tilde{\mathbf{x}}_2 \subseteq \tilde{\mathbf{x}}_1$ . Ein praktisches Beispiel für die Überschätzungsproblematik aufgrund des Subdistributivitätsgesetzes in der Parameterschätzung findet man in SCHÖN und KUTTERER (2005b). Durch den Ansatz iii) können Abhängigkeiten zwischen den Epochen im Auswerteansatz berücksichtigt werden. Im Extremfall würde dies bedeuten, dass für alle Epochen dieselben Einflussfaktoren auf die Unschärfe vorhanden sind. Die Teilmengenbeziehung kann zusammengefasst werden zu:

$$\tilde{\mathbf{x}}_3 \subseteq \tilde{\mathbf{x}}_2 \subseteq \tilde{\mathbf{x}}_1 \text{ wenn } \forall i, j \text{ gilt: } |\mathbf{MF}|_{ij} \leq |\mathbf{F}|_{ij}. \quad (7.57)$$

Bei der Verwendung der Matrix  $\mathbf{M}$  in Formel (7.55) und (7.56) kann eine Verringerung der Unschärfe für  $\tilde{\mathbf{x}}$  nur garantiert werden, wenn alle Elemente in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  der Matrix  $|\mathbf{MF}|$  kleiner der Elemente von  $|\mathbf{F}|$  in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  sind (vgl. auch Formel (7.57)). An dieser Stelle wird daher noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass in dem gewählten Ansatz die Unschärfe auch systematische Effekte beschreibt, die bei gleichem Beobachtungsrahmen durch Differenzbildung (stark) reduziert werden können. Aufgrund des begrenzten zeitlichen Rahmens dieser Arbeit konnten die verschiedenen Ansätze in dieser Arbeit nicht umfassend untersucht werden. Eine gute Interpretation ist für ein besseres Verständnis über die Fortpflanzung der Unschärfe jedoch von zentraler Bedeutung, sodass an dieser Stelle kommende Arbeiten ansetzen sollten, um fundierte Aussagen zu treffen.

### 7.3.3 Auswertung und Analyse der beiden Beispiele

#### 7.3.3.1 Durchführung einer kinematischen Deformationsanalyse bei Unschärfe

In diesem Abschnitt geht es um die Analyse der in Kapitel 7.1.2 vorgestellten Datensätze. Für die in Abbildung 7.4 dargestellten und im rein stochastischen Ansatz analysierten Daten soll im Folgenden eine unscharfe Analyse nach Kapitel 7.3.2 durchgeführt werden. Die Messungen wurden lediglich in einer Lage durchgeführt, sodass sich die Standardabweichungen und Intervallradien (für den  $\alpha$ -Schnitt mit  $\alpha = 0$ ) für die Beobachtungsergebnisse in Tabelle 7.10 größer als in Tabelle 7.4 sind. Dies ist durch die Abhängigkeit der Einflussfaktoren begründet, die sich mit der Matrix der Messmethoden aus Formel (3.64) abbilden lässt und im Falle einer Zwei-Lagen-Messung zur Reduzierung der Impräzision führt (SCHÖN, 2003, S. 44ff). Im Folgenden werden für eine bessere Übersichtlichkeit immer nur die Ergebnisse für den  $\alpha$ -Schnitt mit  $\alpha = 0$  gezeigt, sodass auf eine explizite Angabe des  $\alpha$ -Niveaus verzichtet wird.

Messgröße	Standardabweichungen (Ein-Lagen-Messung)	Intervallradien für $\alpha = 0$ (Ein-Lagen-Messung)
Richtung (a)	0,7 mgon (TCA 1101)	0,30 mgon (TCA 1101)
Zenitwinkel (b)	0,7 mgon (TCA 1101)	0,45 mgon (TCA 1101)
Distanz (c)	2 mm + 2 ppm (TCA 1101)	1,5 mm + 1 ppm (TCA 1101)

Tabelle 7.10: Standardabweichungen und Impräzision der Beobachtungsergebnisse (Ein-Lagen-Messung).

Zunächst sollen die verschiedenen Möglichkeiten zur Fortpflanzung der Impräzision bei der Kalmanfilterung nach Formel (7.53) und (7.55) analysiert werden. Die Abbildung 7.22 zeigt die Entwicklung der Intervallradien für die x- und y-Koordinate für die ersten 12 Epochen in Abhängigkeit von der Orientierung des Koordinatensystems. Die Fortpflanzung nach der Formel (7.53) ist mit blauen Kreuzen dargestellt. Es ist klar zu erkennen, dass die theoretischen Überlegungen über eine sich exponentiell fortplanzende Überschätzung bestätigen (vgl. Kapitel 7.3.2.2). Die Fortpflanzung mit Formel (7.55) und  $\mathbf{M} = \mathbf{E}$  ist durch eine durchgezogene grüne Linie gekennzeichnet. Da bei diesem Ansatz für jede Epoche neue, unabhängige Einflussfaktoren eingeführt werden, kommt es für den Intervallradius der Impräzision des Systemzustandes zu einem linearen Anstieg. Die durchgeführte Berechnung ist mathematisch korrekt, für eine realitätsnahe Beschreibung ist sie jedoch nicht geeignet. Der Grund dafür liegt in den sehr kurz aufeinander folgenden Messungen (75 sec) des Punktes 111, die es nahelegen, dass die meisten Einflussfaktoren auf die Impräzision über die Zeit einander sehr ähnlich sind. Deshalb wird als dritte Möglichkeit die Matrix der Messmethoden  $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}$  bei der Analyse berücksichtigt. Dies führt dazu, dass von Epoche zu Epoche immer nur die Impräzision hinzukommt, die durch die (minimal) geänderte Konfiguration (in der Matrix  $\mathbf{F}$ ) begründet ist. Die Ergebnisse dafür sind als rote gestrichelte Linie in Abbildung 7.22 gezeigt. Der Intervallradius ist im Vergleich zu den beiden anderen Möglichkeiten zur Fortpflanzung der Impräzision signifikant kleiner. Eine detaillierte Diskussion für diese Art der Fortpflanzung wird am Ende dieses Unterkapitels folgen.

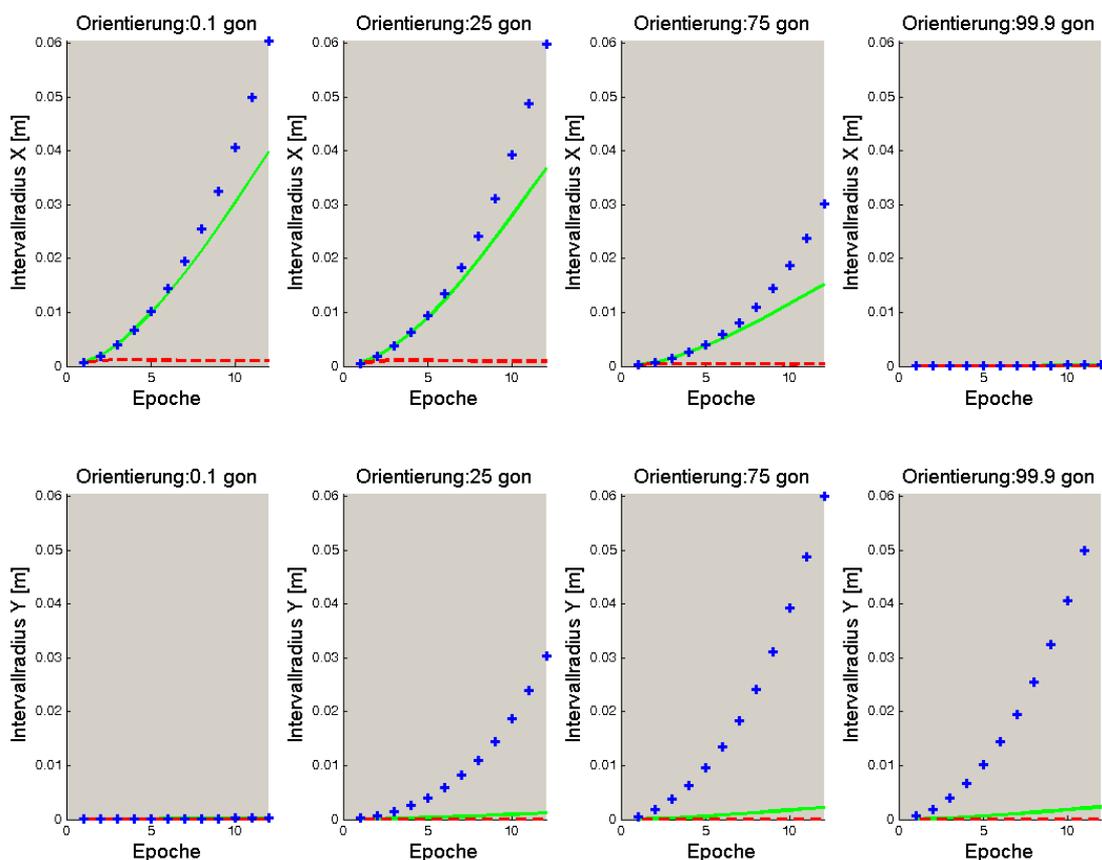


Abbildung 7.22: Intervallradien in Abhängigkeit von der Orientierung des Koordinatenrahmens und Messgröße.

Des Weiteren ist in der Abbildung 7.22 erkennbar, dass der Intervallradius abhängig von der Orientierung des Koordinatenrahmens ist. Bei einer Orientierung von 0 gon ist die x-Achse parallel zu der Längsachse der Schleusenkammer (Abbildung 7.4, links) und bei einer Orientierung von 90 gon zeigt die x-Achse des lokalen Koordinatensystems in Querrichtung der Schleuse. Die maximale Überschätzung tritt bei der rekursiven Fortpflanzung der Impräzision nach Formel (7.53) für eine Orientierung von 50 gon auf. Die Ergebnisse für die x- und y-Koordinate sind in Abbildung 7.22 dargestellt. Diese Effekte sind in der Abbildung noch nicht erkennbar, da die Impräzision der Strecke und der Richtung in einer Entfernung von ca. 65 m einen stark unterschiedlichen Effekt haben. Eine Änderung der Richtung von 0,3 mgon entspricht in einer Entfernung von 65 m einer Querabweichung von ca. 0,3 mm, was im Vergleich zur Strecke von ca. 1,5 mm etwa um den Faktor 5 kleiner ist. Dieser Effekt ist gut im linken Teil der Abbildung 7.24 zu erkennen: In diesem Fall ist die Impräzision für die x-Koordinate im Wesentlichen durch die Impräzision der Richtung begründet, während die Impräzision der y-Koordinate durch die Strecke dominiert wird.

In Abbildung 7.23 ist der, von der Orientierung des Koordinatenrahmens abhängige, exponentielle Anstieg des Intervallradius für die x- und y-Koordinate dargestellt. Wie bereits erwähnt, ist die Überschätzung für eine Orientierung von 50 gon maximal und nimmt gegen Null bzw. 100 gon ab. Bei dem tatsächlichen Wertebereich handelt es sich für jede Epoche um Zonotope (vgl. auch Kapitel 3.3.3), die in Abbildung 7.24 dargestellt sind. Im Falle der Fortpflanzung der Impräzision im rekursiven Ansatz nach Formel (7.53) werden in jeder Epoche die Zonotope durch die einschließenden Intervallboxen ersetzt. Diese sind in der Abbildung 7.24 (oben) für die ersten beiden Epochen als schwarze Linien erkennbar. Bei der Fortpflanzung der Impräzision für jede neue Epoche werden die auf den Intervallboxen basierenden Intervallradien abgebildet. Eine Abhängigkeit zwischen den verschiedenen Koordinaten wird nicht berücksichtigt, sodass es zu der in Abbildung 7.23 dargestellten exponentiellen Überschätzung kommt.

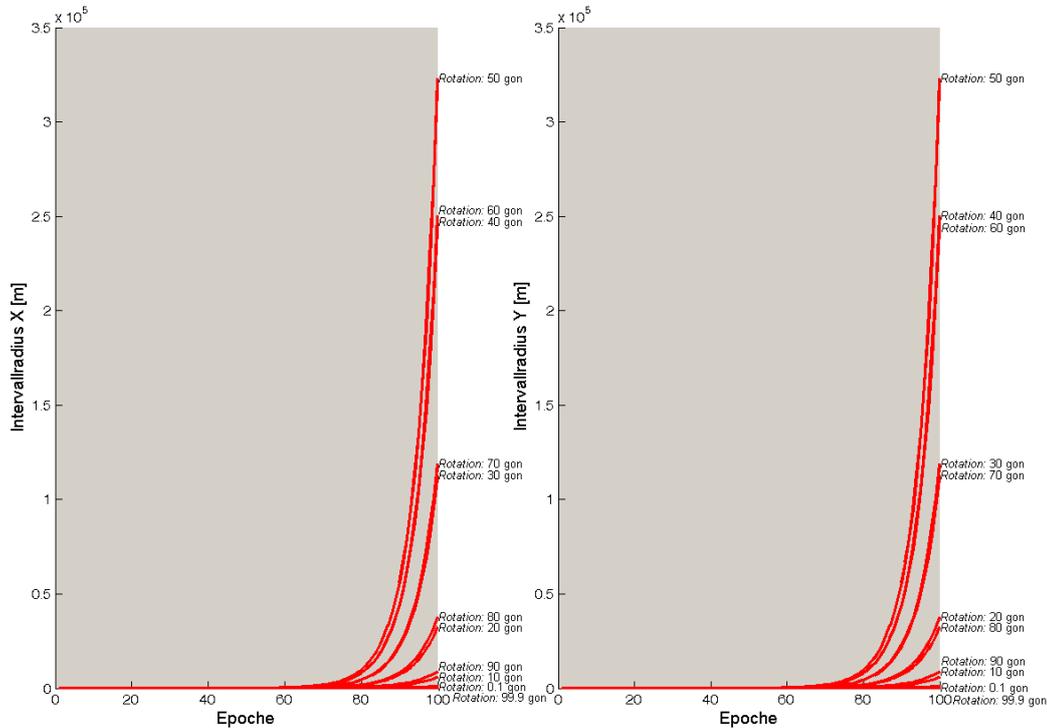


Abbildung 7.23: Überschätzung bei rekursiver Fortpflanzung der Impräzision in Abhängigkeit der Orientierung.

Bei einer Orientierung des Koordinatenrahmens von Null bzw. 100 gon sind die Begrenzungslinien der Zonotope quasi parallel zu den Intervallboxen (vgl. Abbildung 7.24, oben links). Es kommt zur engst möglichen Einschließung bzw. zur minimalen Überschätzung des Wertebereiches. Abbildung 7.25 zeigt eine Detailansicht für die ersten drei Zonotope bei einer Orientierung von 50 gon. Für weitergehende Betrachtungen über Zonotope wird auf SCHÖN (2003, S. 70ff) sowie SCHÖN und KUTTERER (2005b) verwiesen.

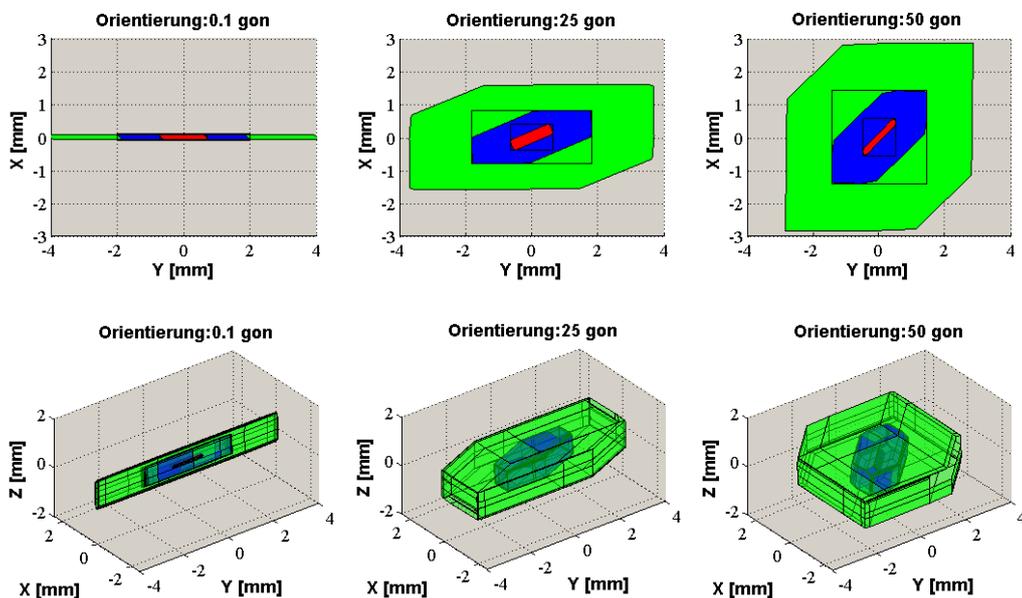


Abbildung 7.24: Zwei- und dreidimensionale Zonotope für die ersten drei Epochen in Abhängigkeit der Orientierung.

Im Folgenden soll der Ansatz mit der Matrix der Messmethoden  $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}$  genauer untersucht und diskutiert werden: Zum einen bleibt das stochastische Modell des KFs über die Epochen unverändert. Zum anderen findet eine über die Innovation gesteuerte Anpassung statt, bei der die Varianzen aller Varianz-Kovarianzmatrizen bei einer statistischen Unverträglichkeit der Innovation mit 1,2 multipliziert oder durch 1,2 dividiert werden. Die jeweiligen Varianzen und Intervallradien für die y-Koordinate sind in Abbildung 7.26 dargestellt. Der obere Teil der Abbildung zeigt die Ergebnisse für ein konstantes stochastisches Modell. Die Standardabweichungen für den Systemzustand konvergieren gegen einen Grenzwert, der durch das Systemrauschen bestimmt wird. Nach ca. 10 Epochen zeigen sich keine sichtbaren Veränderungen mehr. Bei veränderlichem stochastischem Modell sind die Standardabweichungen insbesondere am Ende einer Schleung besonders groß, wenn die Deformationen direkt aufhören. Das Filter prädiziert aufgrund der Erhaltungseigung jedoch weiter voranschreitende Deformationen, was zu einer großen Innovation und damit zu großen Standardabweichungen für den Systemzustand führt (vgl. auch Abbildung 7.4). Dieses modellierungsbedingte Defizit kann durch die Berücksichtigung von Rampenfunktionen (NEUNER, 2008) reduziert werden. Im Rahmen dieser Arbeit soll jedoch die impräzise Analyse im Vordergrund stehen, sodass auf diese Thematik nicht weiter eingegangen wird.

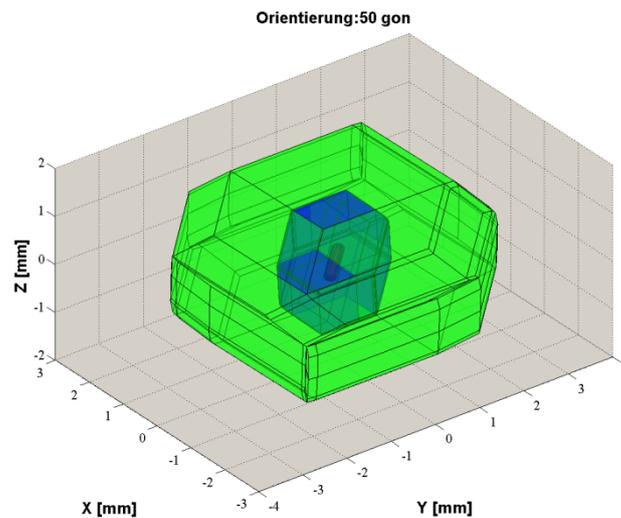


Abbildung 7.25: Detailansicht für die dreidimensionalen Zonotope bei einer Orientierung von 50 gon.

Bei den Intervallradien ist über die Epochen eine Veränderung zu erkennen. Diese sind aufgrund der Impräzision des Zeitschrittes insbesondere bei hohen Geschwindigkeiten der Deformationen auffällig. Der Effekt zeigt sich sowohl bei veränderlichem als auch bei festem stochastischem Modell des Filters. Daraus kann in diesem Beispiel geschlossen werden, dass die Impräzision des Systemzustandes relativ unempfindlich gegenüber Eingriffen in das stochastische Modell ist. Die Übertragbarkeit dieser Erkenntnisse auf andere Beispiele ist jedoch kritisch zu überprüfen.

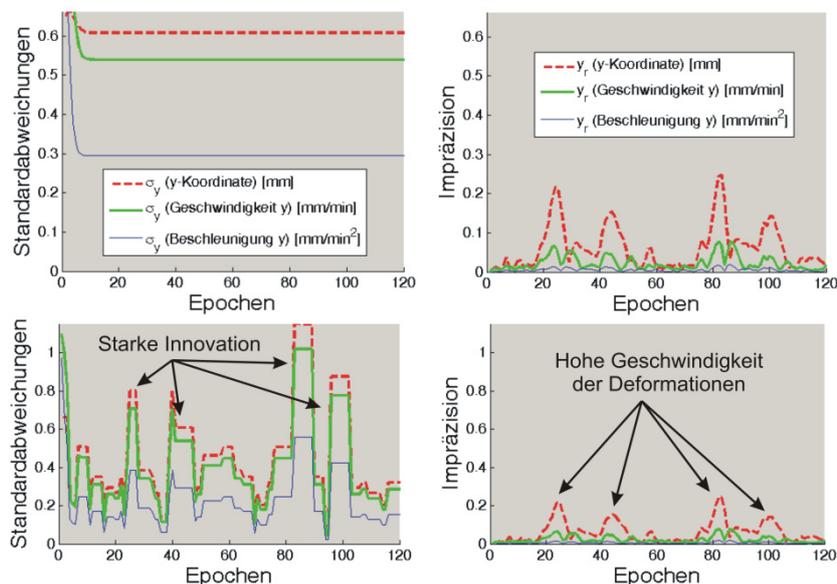


Abbildung 7.26: Unsicherheiten des Systemzustandes ohne (oben) und mit Anpassung des stoch. Modells (unten).

Des Weiteren ist erkennbar, dass die Impräzision der Geschwindigkeit und der Beschleunigung signifikant kleiner als ihre stochastischen Unsicherheitskomponenten sind. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sind die erste und zweite Ableitung des Systemzustandes nach der Zeit, sodass sie die innere Geometrie des Systems beschreiben. Aufgrund ihrer differentiellen Natur wird ihre Impräzision nur durch die zeitliche Veränderung der Einflussfaktoren auf die Impräzision beeinflusst.

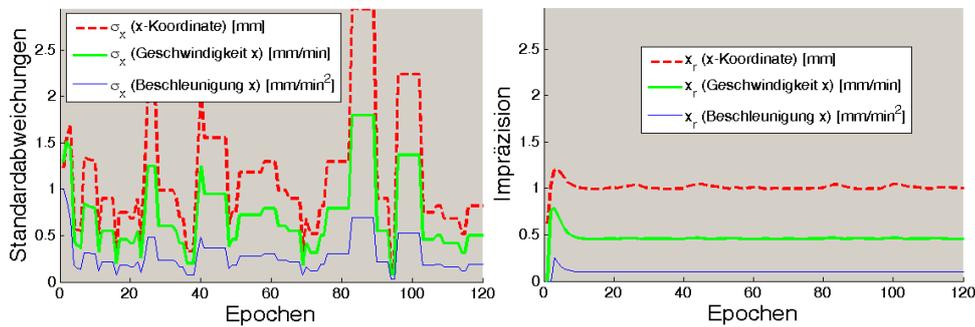


Abbildung 7.27: Standardabweichungen und Intervallradien (Impräzision) mit Anpassung des Filters.

Die Deformationen wirken sich bei der hier gewählten Orientierung des Koordinatenrahmens von Null gon nur auf die y-Koordinate aus. Die x-Koordinate zeigt keine größeren Deformationen, sodass die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nicht signifikant sind. Einzelheiten über die Charakteristik der Deformationen können in NEUMANN (2004) und (2006) nachgelesen werden. Die Abbildung 7.27 zeigt die Standardabweichungen und Intervallradien für die x-Koordinate des Systemzustandes, wenn eine Anpassung des stochastischen Modells vorgenommen wird. Wie gut zu erkennen ist, treten aufgrund der nicht vorhandenen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen keine signifikanten Änderungen der Impräzision auf.

### 7.3.3.2 Identifikation des dynamischen Deformationsmodelles mittels adaptivem Kalmanfilter

Im letzten Beispiel wird das KF um eine adaptive Partition erweitert, um einen Dämpfungsparameter  $\beta$  (Materialparameter) sowie die Federkonstante  $\gamma$  im Feder-Dämpfungsmodell nach Abbildung 7.5 (links) zu schätzen. Die Daten sowie die System- und Beobachtungsgleichung sind in den Formeln (7.1) bis (7.4) in Kapitel 7.1.2.2 beschrieben. Wie bereits erläutert, können die Prozesskoeffizienten (die adaptiven Parameter) nicht direkt beobachtet werden, sodass sie erst durch die (sich zeitlich ergebenden) Korrelationen bei der Systemfortschreibung identifiziert werden können. Die Abbildung 7.28 (links) zeigt den Systemzustand für den Punkt  $x_2$  und Abbildung 7.28 (rechts) die wahren (rot) und gefilterten (schwarz) Prozesskoeffizienten über die ersten 20 bzw. 100 Epochen. Die gefilterten Werte für den Dämpfungsparameter sowie für die Federkonstante konvergieren trotz stark verrauschtem Anfangszustand bereits nach wenigen Epochen gegen ihre wahren (in rot dargestellten) Werte. Einzelheiten über die Konvergenz der gefilterten Systemzustände gegenüber ihren wahren Werten können in WILLGALIS (1993, S. 58ff) nachgelesen werden.

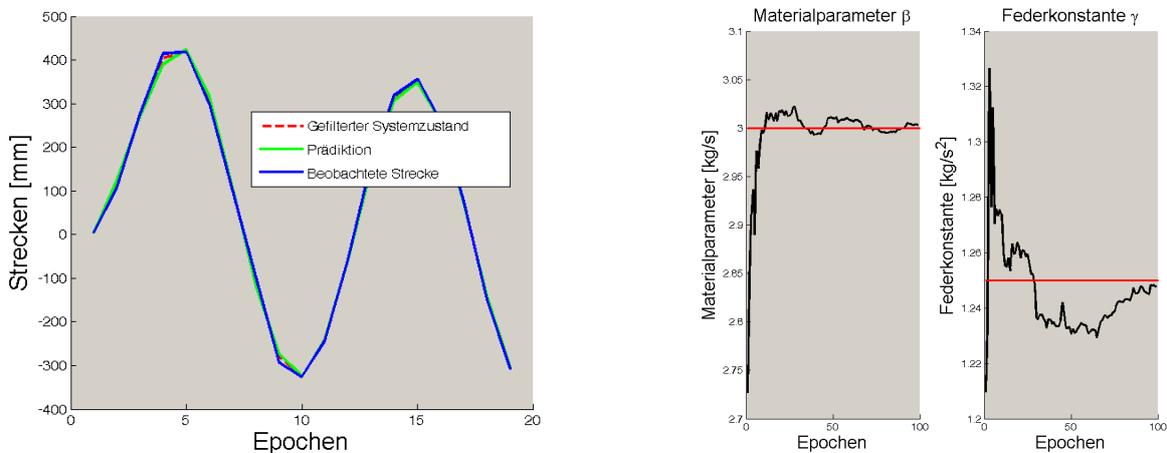


Abbildung 7.28: Beobachteter, präzidiertes und gefilterter Systemzustand (links) und die Prozesskoeffizienten (rechts).

Die Abbildung 7.29 zeigt einen Vergleich der Standardabweichungen und Intervallradien für die Prozesskoeffizienten in den ersten 20 Epochen. Die Standardabweichungen konvergieren gegen einen Grenzwert, der durch die Werte des Systemrauschens in Tabelle 7.3 begründet ist. Bei dem Materialparameter ist das Systemrauschen  $\sigma_{w,\beta} = 0,03000 \text{ kg/s}$  und für die Federkonstante gilt  $\sigma_{w,\gamma} = 0,0125 \text{ kg/s}^2$ . Der rechte Teil

der Abbildung 7.29 zeigt die Intervallradien, die man mit den drei verschiedenen Möglichkeiten zur Fortpflanzung der Impräzision bei der Kalmanfilterung nach Formel (7.53) und (7.55) erhält.

Die Fortpflanzung mittels Formel (7.53) ist mit blauen Kreuzen dargestellt und führt wiederum zu einer exponentiell anwachsenden Überschätzung des tatsächlichen Wertebereiches. Der Effekt ist aufgrund der oszillierenden Funktion (vgl. Abbildung 7.28, links) bei den ersten 20 Epochen nicht erkennbar und wird erst in Abbildung 7.30 (rechts) sichtbar, wenn alle 480 Epochen analysiert werden. Die Fortpflanzung mit Formel (7.55) und  $\mathbf{M} = \mathbf{E}$  zeigt für den Materialparameter den erwarteten typischen linearen Anstieg des Intervallradius' (durchgezogene grüne Linie). Auch beim Einsatz der Matrix der Messmethoden  $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}$  ist die theoretisch zu erwartende Konvergenz gegen  $\beta = 0,035 \text{ kg/s}$  zu erkennen.

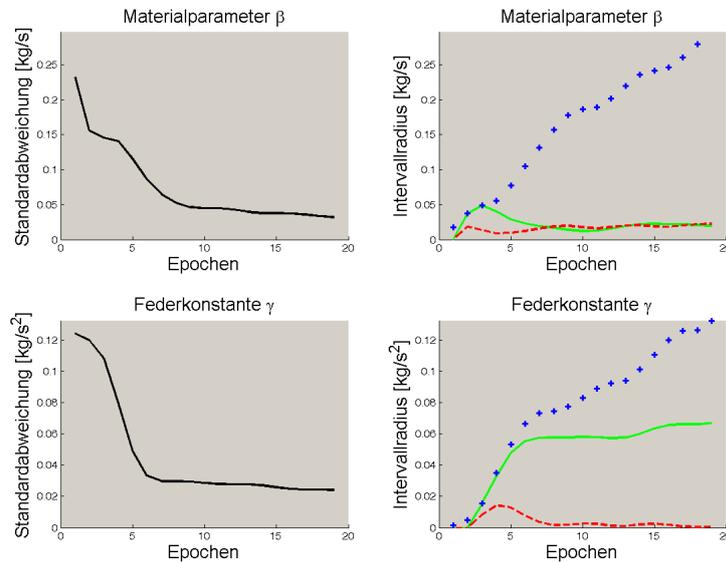


Abbildung 7.29: Vergleich der Standardabweichungen und Intervallradien der Prozesskoeffizienten (20 Epochen).

Für die Federkonstante zeigt sich jedoch der genau umgekehrte Effekt: Die Fortpflanzung mit Formel (7.55) und  $\mathbf{M} = \mathbf{E}$  führt zu einer Konvergenz des Intervallradius, und die Verwendung der Matrix der Messmethoden  $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}$  hat einen linearen Anstieg des Intervallradius über die Epochen zur Folge. Eine Verwechslung der beiden Fortpflanzungsmethoden kann ausgeschlossen werden. An dieser Stelle können nur Vermutungen geäußert werden. Zum einen könnten numerische Effekte für die Ergebnisse verantwortlich sein, zum anderen ist die spezielle oszillierende Struktur ein möglicher Grund. An dieser Stelle werden derzeit weitere Untersuchungen durchgeführt, die eine genauere Erklärung dieser Effekte zum Ziel haben. Ein weiteres Beispiel für eine adaptive Kalmanfilterung mit impräzisen Daten wird in NEUMANN und KUTTERER (2007c) gezeigt. Dabei handelt es sich um das Einschwimmen eines Tunnelsegmentes, wobei die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses als adaptiver Parameter mitgeschätzt wird.

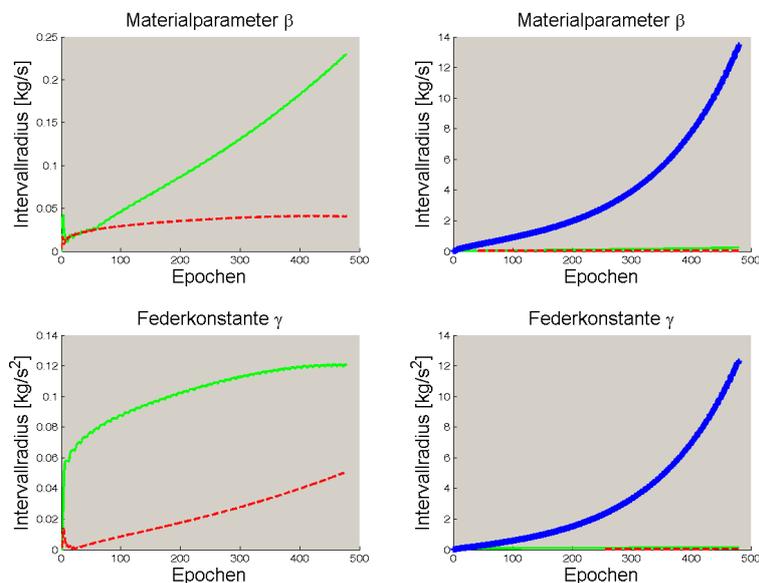


Abbildung 7.30: Vergleich der Intervallradien der Prozesskoeffizienten (480 Epochen).

### 7.3.4 Zusammenfassung und Ausblick zum Kalmanfilter mit impräzisen Daten

In Kapitel 7.3 wurde ein erweiterter Unsicherheitshaushalt bei der Analyse des KFs hergeleitet und praktisch umgesetzt. Hierfür wurde die Impräzision zwischen Modell und Beobachtung durch eine Sensitivitätsanalyse in den Auswerteprozess integriert. Die zusätzliche Berücksichtigung der Impräzision führt dabei zu einem erweiterten Unsicherheitshaushalt. Ist die Impräzision der Beobachtungen null, so erhält man das Ergebnis des rein stochastischen Falls. Der vorgestellte Ansatz ist somit eine unabhängige Erweiterung der klassischen Analyse.

Drei verschiedene Ansätze zur Fortpflanzung der Impräzision von den Einflussfaktoren auf die Parameter des Systemzustandes wurden theoretisch und praktisch untersucht. Der erste Ansatz, in dem die Impräzision im rekursiven Ansatz fortgepflanzt wird, ist nicht für praktische Anwendungen geeignet. Es kommt zu einer sich exponentiell fortplanzenden Überschätzung, die schnell zu unrealistischen Werten für die Impräzision der Parameter führt. Die Größenordnung der Überschätzung ist vom Beobachtungsraum und Parameterraum (z. B. der Orientierung des Koordinatensystems) abhängig. Der zweite und dritte Ansatz zur Fortpflanzung der Impräzision unterscheiden sich in der physikalischen Deutung der Einflussfaktoren. Liegt eine zeitliche oder funktionale Abhängigkeit der Einflussfaktoren auf die Impräzision zwischen den Epochen vor, so ist eine Matrix der Messmethoden zu berücksichtigen, mit der die Abhängigkeiten modelliert werden. Bei unabhängigen Einflussfaktoren wird die Matrix der Messmethoden zur Einheitsmatrix. Für jede Epoche wird ein neuer Satz von Einflussfaktoren eingeführt. Hier müssen in Zukunft weitere Arbeiten ansetzen, die eine verfeinerte Interpretation der Vorgehensweise ermöglichen. Des Weiteren sind adäquate Ansätze zur Modellierung der zeitlichen Abhängigkeiten zu entwickeln.

Ein weiterer Schwerpunkt künftiger Arbeiten sollte die Effizienzsteigerung bei der Fortpflanzung der Impräzision sein. Im bisherigen Ansatz erfordert dies bei den Ansätzen ii) und iii) eine Auflösung der Rekursion, sodass es aufgrund der großen Matrizen zu einer erheblichen Verlängerung der Rechenzeit kommen kann. Des Weiteren hat es sich gezeigt, dass die großen Matrizen bei vielen hundert Epochen zu numerischen Problemen führen. Aus diesem Grund scheint ein Übergang auf KF sinnvoll, die ein endliches Gedächtnis haben (z. B. HUEP, 1985, S. 67ff). In diesem Fall werden lediglich die letzten Epochen bei der Fortpflanzung der Impräzision eingeführt. Die zufällige Komponente der Unsicherheit und die Schätzung des Systemzustandes selber können natürlich weiterhin im rekursiven Ansatz erfolgen. Eine zweite Möglichkeit ist die Bestimmung der Überschätzung im Ansatz i) sodass die Fortpflanzung der Impräzision im rekursiven Ansatz rechnerisch korrigiert wird. Des Weiteren müssen ausführliche Untersuchungen für die in Kapitel 4 und 5 eingeführten Hypothesentests mit unscharfen Daten bei der Anpassung des stochastischen Modells für das KF folgen.

## 7.4 Weitere Anwendungsgebiete der vorgestellten Ansätze

Zum Abschluss der Arbeit soll auf Grundlage der Anwendungsbeispiele noch einmal kurz auf Möglichkeiten für eine verfeinerte Modellierung und auf weitere Anwendungsgebiete der vorgestellten Ansätze zur Beschreibung der Unsicherheiten eingegangen werden. Zunächst wird in Kapitel 7.4.1 die Anwendung der vorliegenden Ansätze bei der Unsicherheitsmodellierung im Kontext internationaler Standards kurz aufgegriffen. Daraufhin wird erläutert, welche Effekte beim bisherigen Ansatz unberücksichtigt bleiben und daher in Zukunft sinnvoller Weise integriert werden können (Kapitel 7.4.2).

### 7.4.1 Verwendung des Ansatzes im Kontext des GUM

Die im Rahmen dieser Arbeit genannten und weiterentwickelten Ansätze zur Beschreibung von Unsicherheiten wurden parallel auf Anwendungen im Rahmen des *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements* (GUM) übertragen. Im klassischen GUM wird eine Unterteilung der Unsicherheiten in zufällig und systematisch wirkende Einflüsse vorgeschlagen (ISO, 1995). Der GUM empfiehlt die Fortpflanzung beider Unsicherheitskomponenten auf die Zielgrößen mit dem Varianz-Kovarianzfortpflanzungsgesetz, wobei u. U. eine Taylorreihenentwicklung höherer Ordnung empfohlen wird, wenn es sich um stark nichtlineare funktionale Zusammenhänge handelt. Inzwischen ist eine Erweiterung zum GUM erschienen, die eine Fortpflanzung der Unsicherheiten mittels Monte-Carlo-Verfahren empfiehlt (ISO, 2007). Dies ändert jedoch nichts daran, dass sich im Ansatz des GUM die Größenordnung systematischer Unsicherheiten bei Mittelung von Werten aus Wiederholungsmessungen reduzieren, was der Anschauung deutlich widerspricht.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ebenfalls zwischen zufällig und systematisch wirkenden Unsicherheiten unterschieden. Der bekannte systematische Anteil wird durch den Aufbereitungsprozess der Beobachtungen eliminiert, sodass im Beobachtungsergebnis nur der unbekannte Anteil, die systematische Abweichung, verbleibt. Im Rahmen dieser Arbeit ist eine systematische Abweichung ein reproduzierbarer und einseitiger

Effekt, der das Beobachtungsergebnis einseitig aber mit unbekanntem Vorzeichen und Größenordnung verfälscht (vgl. Kapitel 2.2.1). Im Gegensatz zum GUM ist eine Reduzierung der systematischen Abweichung durch Mehrfachmessungen nicht möglich. Die Charakteristik heutiger Messsysteme ist immer mehr auch von systematischen Abweichungen während des Messprozesses geprägt. Dies gilt insbesondere für polare Messsysteme wie terrestrische Laserscanner und Mobile-Mapping-Systeme. Eine Variation des Beobachtungsrahmens ist bei diesen Sensoren zumeist nicht möglich und aus wirtschaftlicher Sicht auch nicht gewünscht. Um trotzdem die Unsicherheit der Daten und damit deren Verwendungsmöglichkeiten adäquat beurteilen zu können, ist eine adäquate Modellierung systematischer Abweichungen notwendig.

Aus diesem Grund wurden die in dieser Arbeit entwickelten Methoden für die Behandlung systematischer Abweichungen bei der Unsicherheitsmodellierung kritisch mit der Vorgehensweise des GUM verglichen (NEUMANN ET AL., 2008 sowie ALKHATIB ET AL., 2009). Dies schließt einen Vergleich mit Monte Carlo Verfahren zur Fortpflanzung von Unsicherheiten mit ein. Im Gegensatz zum GUM und Monte Carlo Verfahren, die eine gemeinsame Fortpflanzung beider Unsicherheitskomponenten auf die Zielgrößen mit dem VKFG und Wahrscheinlichkeitsverteilungen empfehlen, wird eine getrennte Fortpflanzung mit dem Sensitivitätsansatz nach Kapitel 3.3 basierend auf SCHÖN (2003) und dem Erweiterungsprinzip nach Formel (3.40) angewandt. Die verteilungsfreie Behandlung von systematischen Abweichungen in dieser Arbeit führt zu einer pessimistischeren Fortpflanzung der Unsicherheiten im Vergleich zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Behandlung der systematischen Abweichungen. Dies ermöglicht eine wesentlich realitätsnähere Abschätzung des Unsicherheitshaushaltes, da eine Verzufälligung (Reduzierung) systematisch wirkender Einflüsse durch Mittelung von Werten aus Wiederholungsmessungen nicht zugelassen wird. Weitere Arbeiten auf diesem Gebiet sollten sich mit der Anwendung der Methoden auf bekannte Messverfahren und die Entwicklung von Empfehlungen für eine praktische Vorgehensweise beschäftigen.

Es existieren weitere Arbeiten, die sich mit alternativen Möglichkeiten zur Fortpflanzung der systematischen Abweichungen beschäftigen. So beschreibt GRABE (2001) Formalismen zur Behandlung von systematischen Effekten im Kontext des GUM. Diese und weitere seiner Arbeiten auf dem Gebiet der Parameterschätzung mit systematischen Abweichungen und deren Wertebereichangaben mittels Polytopen sind in zwei Büchern (GRABE, 2003 und 2005) zusammengefasst. Parallel dazu ist der Artikel von MAURIS ET AL. (2001) erschienen, der eine Erweiterung des GUM auf Basis der Fuzzy-Theorie vorschlägt. Weitere Arbeiten zu alternativen Modellierung von systematischen Abweichungen auf dem Gebiet des GUM sind dem Autor nicht bekannt.

#### 7.4.2 Anwendung der Ansätze zur Beschreibung der Objektunschärfe

In Kapitel 2 und Abbildung 2.1 wurde motiviert, dass sich die Unsicherheiten durch die Beobachtungen und deren Aufbereitungsprozesse, das (geodätische) Modell sowie das Objekt begründen lassen. Im bisherigen Ansatz wird die Impräzision als Diskrepanz zwischen den Beobachtungen und dem (geodätischen) Modell verstanden. Des Weiteren wird versucht, die Restunsicherheiten zur Realität abzuschätzen. Das zu beobachtende Objekt bleibt bisher unberücksichtigt. In weiteren Arbeiten scheint daher ein Ansatz vielversprechend, der das Objekt bei der Abschätzung der Impräzision mit berücksichtigt. Die integrierte Modellierung z. B. mittels Finiten Element Modellen (FEM) und der Randelementmethode (z. B. KLEES, 1992) ist hierfür erfolgsversprechend. Auf diese Weise können Einflussfaktoren der Impräzision, die gemeinsam auf die originalen Beobachtungen mit den Aufbereitungsschritten und auf das Objekt einwirken, adäquat berücksichtigt werden. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

**Beispiel:** Bei einer visuellen Inspektion eines Bauwerkes wurde festgestellt, dass sich vermehrt Risse in dem Beton gebildet haben. Mittels Überwachungsmessungen soll jetzt festgestellt werden, ob die Rissbildung ein Anzeichen für eine signifikante Verformung des Objektes ist. Aus diesem Grund werden zwischen diskreten Punkten auf dem Objekt in mindestens zwei Epochen Strecken gemessen. Eine dieser Strecken  $s_i$  soll im Folgenden exemplarisch betrachtet werden (vgl. Abbildung 7.31).

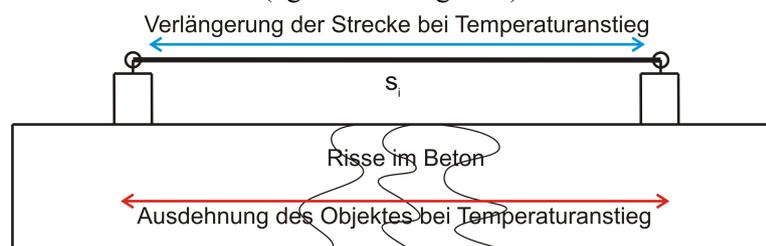


Abbildung 7.31: Auswirkung der Impräzision der Temperatur bei einer Streckenmessung auf einem Objekt (Ansicht).

Betrachtet man die in Kapitel 7.1.3 genannten Einflussfaktoren auf die Impräzision, so ist die Temperatur aus Tabelle 7.4 ein gutes Beispiel für die Abhängigkeiten zwischen Beobachtungsergebnis und Objekt. Eine zu gering gemessene Temperatur führt aufgrund der tatsächlich größeren Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle zu einer am Gerät zu kurz angezeigten Strecke. Auch das Objekt dehnt sich bei einer höheren Temperatur tatsächlich stärker aus, als es die zu gering gemessene Temperatur erwarten lässt (vgl. auch Abbildung 7.31). Die Auswirkungen machen sich für die Beobachtung und das Objekt in ihrer Größenordnung jedoch stark unterschiedlich bemerkbar:

- I. Veränderung der Strecke aufgrund der Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle (KAHMEN, 2006, S. 171): 1 ppm/°C
- II. Veränderung der Strecke aufgrund der Ausdehnung des Objektes (ONDRACEK, 1994): 6–14 ppm/°C

In diesem Beispiel ist die Impräzision des gesuchten Parameters (der Verformung des Objektes) vornehmlich durch die Ausdehnung des Objektes begründet, sofern die Länge des Objektes von Interesse ist. Die Ursachen für die Impräzision sind dabei mannigfaltig. Zum einen kann die Temperatur des Objektes nur an der Oberfläche erfasst werden, zum anderen ist die gemessene Temperatur der Luft (als Medium für die elektromagnetische Welle) nicht repräsentativ für die integrale Lufttemperatur entlang des Ausbreitungsweges (vgl. Kapitel 2.3.2). Deshalb sollte in folgenden Arbeiten eine integrierte Modellierung der Impräzision verfolgt werden. Entsprechende funktionale und zeitliche Abhängigkeiten können mit der in Kapitel 3.3.1 eingeführten Matrix der Messmethoden aus den Formel (3.59) und (3.64) modelliert werden.

Im Bereich des Bauingenieurwesens und der Strukturmechanik stehen bereits methodische Ansätze zur Verfügung bzw. entstehen parallel zu dieser Arbeit. An dieser Stelle sollen nur die wichtigsten genannt werden: So beschreiben MÖLLER und BEER (2004) die Analyse von unscharfen Daten mittels FRVs im Bauingenieurwesen und der Strukturmechanik und MÖLLER und REUTER (2006 und 2008) die Prädiktion des Verhaltens von Bauwerken mit unscharfen Zeitreihen. Des Weiteren stellen MÖLLER ET AL. (2001) und MUHANNA ET AL. (2006) FEMs mit FRVs oder Intervallen vor und MUHANNA und MULLEN (2001) schlagen Intervallmethoden in der Mechanik vor. Aufgabe kommender Arbeiten wird die Kombination bzw. integrierte Auswertung der geodätischen Messgrößen zusammen mit den Ansätzen zur Modellierung des Bauwerkes sein. Eine integrierte rein stochastische Auswertung wurde z. B. bereits in GÜLAL (1997) mit dem adaptiven KF gezeigt.



## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Für Signifikanzentscheidungen muss das Zusammenspiel zwischen Information und Unsicherheit treffend beschrieben werden. Die Signifikanz hängt von Größenordnung und Art der auftretenden Unsicherheiten während des Messprozesses und in der Modellbildung ab. Unterschiedliche Arten von Unsicherheit pflanzen sich auf verschiedene Weise auf die Beobachtungsergebnisse oder die Zielgrößen (Parameter) einer Ausgleichung fort. Verschiedene mathematische Methoden stehen zur Beschreibung der verschiedenen Arten von Unsicherheiten zur Verfügung. Bisher wird im Bereich der Geo- und Ingenieurwissenschaften (Geodäsie) die Unsicherheit jedoch zumeist mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen beschrieben oder ihnen sogar eine Normalverteilung unterstellt.

Bei der Re-Analyse alter Datensätze und dem Vergleich der abgeschätzten Konfidenzbereiche mit den quasi wahren Werten treten Diskrepanzen auf, die allein mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen nicht oder nur unzureichend erklärt werden können. Des Weiteren kann eine nicht adäquate Fortpflanzung der Unsicherheiten zu erheblichen Konsequenzen bei der Aussage über die Signifikanz von Zielgrößen führen. Eine neue Sichtweise ist daher bei der Datenanalyse, insbesondere bei deren Unsicherheitsmodellierung und bei Signifikanzentscheidungen, notwendig gewesen. In der vorliegenden Arbeit wurden bestehende Unsicherheitsmodellierungen verfeinert und neue Methoden bei der Behandlung von Hypothesentests entwickelt, die eine realistischere Beurteilung von Unsicherheiten und Signifikanzniveaus ermöglichen.

### 8.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird der (geodätische) Unsicherheitshaushalt mit zufälliger Variabilität und systematischen Abweichungen zwischen Modell und Beobachtung (Impräzision) beschrieben. Die Impräzision stellt dabei eine nicht wahrscheinlichkeitstheoretische Komponente der Gesamtunsicherheit dar, die als ein Spezialfall unscharfer Daten behandelt wird. Im Rahmen dieser Arbeit werden beide Arten von Unsicherheit gemeinsam mit Hilfe von unscharfen Zufallsvariablen modelliert. Ist keine Impräzision vorhanden, ergeben sich die Ergebnisse der rein klassischen (wahrscheinlichkeitstheoretischen) Datenanalyse. Der verfolgte Ansatz kann nicht die Richtigkeit eines aus Beobachtungen abgeleiteten Ermittlungsergebnisses im Bezug auf die Realität verbessern, sondern es wird eine realistischere Beschreibung der Signifikanzniveaus und Unsicherheiten von Ermittlungsergebnissen verfolgt.

Die Impräzision wird mittels Expertenwissen identifiziert und quantifiziert und adäquat auf die Beobachtungsergebnisse und Zielgrößen (Parameter) einer Ausgleichung fortgepflanzt. Sie stellt eine zusätzliche Unsicherheitskomponente zum klassischen Fall dar. Die Ergebnisse vorheriger Arbeiten zu Fortpflanzung der beiden Unsicherheitskomponenten können bestätigt werden. Die verschiedenen Arten von Unsicherheit wirken sich verschieden auf die Beobachtungsergebnisse und Zielgrößen aus. Die zufällige Variabilität kann durch Wiederholungsmessungen reduziert werden, während die Impräzision bzw. Unschärfe sich nicht durch Wiederholungsmessungen reduzieren lässt. Dies kann dazu führen, dass bereits eine geringe Impräzision der Beobachtungen die Unsicherheit der Zielgrößen wesentlich beeinflusst oder sogar dominiert.

Aufgrund der modellierten zwei Arten von Unsicherheit war die Weiterentwicklung und Begründung eine neue Art von Hypothesentests bei der Signifikanzprüfung von Ermittlungsergebnissen notwendig. Dies betrifft insbesondere den mehrdimensionalen Fall. Die Auswirkungen der Impräzision bei der Signifikanzüberprüfung können unmittelbar an der Gestalt der Teststatistiken abgelesen werden. Eine große Ausdehnung und Asymmetrie der Teststatistik spricht für einen starken Einfluss der Impräzision bei der Signifikanzentscheidung. Der Vergleich zum klassischen Fall lässt sich anhand von zwei Fallunterscheidungen aufzeigen. Bei sicherheitsrelevanten Fragestellungen werden Informationen früher als signifikant identifiziert, sodass die Zielgrößen häufiger hinterfragt werden müssen. Bei nicht sicherheitsrelevanten Fragestellungen werden bei dem erweiterten Unsicherheitshaushalt die Informationen später als im klassischen Fall als signifikant identifiziert.

Die zwei wichtigsten Arten in der (geodätischen) Datenanalyse bei den Hypothesentests konnten in dieser Arbeit behandelt werden. Dies gilt zum einen für den Fall, wenn die Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese bekannt ist und der Annahmehereich über eine Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  spezifiziert wird. Zum anderen ist die Situation zu nennen, wenn weder die Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese noch die Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter der Alternativhypothese bekannt ist. In diesen Fällen wird der Annahmehereich über Toleranzbereiche festgelegt.

Die vorliegende Arbeit bildet einen vollständigen Ablauf der (geodätischen) Datenanalyse von den originären Beobachtungen hin zu den Zielgrößen (Parametern) einer Ausgleichung bei Vorliegen des erweiterten Unsicherheitshaushaltes ab. Die wichtigsten eigenen Beiträge sind (vgl. auch Kapitel 1.3):

- Die Integration von Expertenwissen bei der Identifikation und Quantifizierung von Unschärfe (Kapitel 3.2.4).
- Die Entwicklung eindimensionaler und mehrdimensionaler Verträglichkeitsuntersuchungen der Daten mit den im Modell getroffenen Annahmen unter Berücksichtigung des erweiterten Unsicherheitshaushaltes und bei bekannter Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese (vgl. Kapitel 4).
- Die Einbettung der Nutzentheorie in Hypothesentests mit unscharfen Daten bei Toleranzbereichen für den Annahmehereich (vgl. Kapitel 6).
- Die Anwendung der entwickelten Ansätze auf die statische und kinematische Deformationsanalyse (Kapitel 7).

Als Ergebnis der erweiterten Modellierungsmethode ist eine verfeinerte Interpretation der aus Beobachtungen abgeleiteten Parameter und Signifikanzniveaus zur Beschreibung und Detektion z. B. von Deformationen möglich. Des Weiteren können insbesondere bei Vorliegen von systematischen Unsicherheiten eine realistischere Fortpflanzung der Unsicherheiten auf die Beobachtungsergebnisse und Zielgrößen sowie adäquatere Signifikanzniveaus berechnet werden. Die wichtigsten Aussagen dieser Arbeit können wie folgt zusammengefasst werden:

- Verschiedene Arten von Unsicherheit der Beobachtungen erfordern verschiedene Arten von Unsicherheitsfortpflanzung auf die Beobachtungsergebnisse und die Zielgrößen. Die zufällige Variabilität und die Impräzision können in einem gemeinsamen Ansatz mit Hilfe von unscharfen Zufallsvariablen beschrieben werden. Die verschiedenen Eigenschaften der beiden Unsicherheitskomponenten bei der Fortpflanzung auf die Beobachtungsergebnisse und Zielgrößen (Parameter) einer Ausgleichung bleiben erhalten.
- Bei den Hypothesentests sagt die Form der Teststatistik unmittelbar etwas über die Auswirkung der Impräzision auf die Zielgrößen (Parameter) aus. Eine starke Ausdehnung und Asymmetrie spricht für eine ungünstige Auswirkung der Impräzision auf die Signifikanzuntersuchungen.
- Bei sicherheitsrelevanten Fragestellungen führt die Impräzision der Teststatistik zu einem früheren Verwerfen der Nullhypothese als im klassischen Fall (Änderungen müssen häufiger kritisch hinterfragt werden).
- Bei nicht-sicherheitsrelevanten Fragestellungen werden Änderungen später als im klassischen Fall aufgedeckt.
- Eine Entscheidung, die allein auf den Wahrscheinlichkeiten für das Verwerfen oder Annehmen von Hypothesen beruht, greift zu kurz. Die Integration der Nutzentheorie in Testentscheidungen mit unscharfen Daten ermöglicht das Treffen derjenigen Entscheidung, die den größten Nutzen (bzw. die geringsten Kosten) nach sich zieht. Eine realitätsnähere Testentscheidung wird somit auch im Falle unscharfer Daten ermöglicht.
- Bei der Kalmanfilterung haben die beiden Unsicherheitskomponenten für verschiedene Positionen ihr Maximum. Während die Impräzision des Zeitschrittes  $\Delta t$  zu einer stärkeren Impräzision des Systemzustandes bei hohen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen führt, ist die zufällige Variabilität des Systemzustandes abhängig vom Systemrauschen. Bei Steuerung des Systemrauschens über die Innovation ist die zufällige Variabilität von der Größenordnung der Innovation abhängig.
- Die Größen der inneren Geometrie der Filterung wie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen haben eine sehr geringe Impräzision, da die systematischen Effekte in den Beobachtungen durch die differentielle Natur der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen größtenteils eliminiert werden.

## 8.2 Ausblick

Bei der vorliegenden Arbeit sind einige Fragen offen geblieben bzw. es haben sich neue Fragestellungen ergeben, die es lohnt in folgenden Arbeiten zu untersuchen. Im Ausblick soll eine Unterteilung der Fragestellungen vorgenommen werden, die zum einen eine signifikante Erweiterung der vorliegenden Arbeit darstellen würden und in Fragestellungen, die die bestehenden Arbeiten lediglich ergänzen. Drei Punkte sind dabei besonders hervorzuheben, die die bisherigen Arbeiten auf dem Gebiet der Unsicherheitsmodellierung signifikant erweitern:

- Es müssen die Unsicherheiten, die durch das zu untersuchende Objekt begründet sind, berücksichtigt werden. Die entwickelten Ansätze sind grundsätzlich für die Beschreibung der Objektunscharfe geeignet, eine genaue Identifikation und Quantifizierung der wirkenden Einflussfaktoren auf die Unsicherheit ist bisher jedoch noch nicht erfolgt. Dies sollte in kommenden Arbeiten durchgeführt werden. Möglich Ansätze sind die Variation der identifizierten Einflussfaktoren im Rahmen von Finite-Element-Modellen oder mittels der Randwertelementmethode für das zu untersuchende Objekt. Wechselwirkungen der Einflussfaktoren zwischen Beobachtung und Objekt sind entsprechend dem Beispiel in Kapitel 7.4.2 zu berücksichtigen.
- Ein weiterer wichtiger Punkt betrifft den Allgemeinfall des Testens für die Testentscheidung, wenn die Verteilung der Ermittlungsergebnisse unter der Nullhypothese und der Alternativhypothese bekannt ist. Ausgangspunkt sollte das Neyman-Pearson-Kriterium (Kapitel 6.1) sein, das auf unscharfe Daten bzw. FRVs erweitert werden muss.
- Des Weiteren ist die Analyse von unscharfen Daten im Rahmen der Filtertheorie vorzunehmen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde bereits das Kalmanfilter auf unscharfe Daten erweitert, da die Schätzung des Systemzustandes in einem GMM erfolgt. Die Integration der unscharfen Analyse in die eigentliche Filtertheorie auf Basis von System- und Beobachtungsgleichung ist bisher jedoch offen geblieben. Dabei können Ansätze z. B. aus MÖLLER und REUTER (2008) genutzt werden.

Neben den drei grundsätzlichen Fragestellungen, deren Beantwortung in kommenden Arbeiten lohnenswert ist und eine signifikante Erweiterung bisheriger Arbeiten darstellt, kommen einige sinnvolle Ergänzungen zu den bisherigen Forschungsarbeiten in Frage:

- Die Ansätze zur Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen den Einflussfaktoren auf die Impräzision sind zu verfeinern. Insbesondere die zeitlichen Abhängigkeiten bei dem Kongruenzmodell der geodätischen Deformationsanalyse sind zu verbessern.
- Die Wertebereichssuche für die Konstruktion der Teststatistiken bei der Verwendung des a-posteriori Varianzfaktors ist effizienter zu gestalten. Geeignete allgemein zur Verfügung stehende Bibliotheken wurden bisher nicht gefunden, sind jedoch für eine breite Akzeptanz der entwickelten Methoden bedeutungsvoll.
- Die Testentscheidung für FRVs mit allg. Zugehörigkeitsfunktionen bei Toleranzbereichen für den Annahmehereich ist herzuleiten (vgl. auch Kapitel 6.5).
- In welchem Maße bestehen Äquivalenzen zwischen einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Deutung von Fuzzy-Sets und eine Deutung im Sinne von unscharfen Größen? Im Rahmen dieser Arbeit konnten bereits wichtige formelmäßige Übereinstimmungen bei dem *card*-Kriterium nachgewiesen werden (vgl. Kapitel 6.3.3 und 6.4), die jedoch vertieft diskutiert werden müssen.
- Bei den in Kapitel 4 und 5 erläuterten Hypothesentests wird davon ausgegangen, dass die zufällige Komponente der Unsicherheit immer signifikant zu der Gesamtunsicherheit beiträgt. Dies muss bei terrestrischem Laserscanning und bei langen Basislinien in GNNS-Netzen nicht immer der Fall sein, sodass die Gesamtunsicherheit u. U. quasi nur durch die Impräzision dominiert wird. In diesen Fällen ist eine geeignete Konstruktion des Annahmehereiches vorzunehmen, der nicht mehr allein auf Basis der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  erfolgen kann. Ein rein mengentheoretischer Ansatz für die Testentscheidung ist erfolgversprechend.
- Die Anwendungen aus Kapitel 7 zeigen sehr vielversprechende Ergebnisse. Die entwickelten Methoden sind jedoch auch auf andere Anwendungsgebiete zu übertragen und kritisch zu beurteilen. So zeigt z. B. Kutterer (2006) bereits den möglichen Einsatz der Methoden beim Wechselspiel zwischen verschiedenen Modellierungsebenen bzw. -tiefen, wie dies z. B. bei der kartographischen Generalisierung der Fall ist.

Trotz der vorhandenen Verbesserungsmöglichkeiten können die entwickelten Methoden als in sich abgeschlossen betrachtet werden.



## Literaturverzeichnis

- AKYILMAZ, O. und KUTTERER, H. (2004): *Prediction of Earth rotation parameters by Fuzzy Inference Systems*. Journal of Geodesy, Vol. 78, No. 1, pp. 82-93.
- AKYILMAZ, O.; AYAN, T. und ÖZLÜDEMİR, T. (2003): *Geoid surface approximation by using Adaptive Network based Fuzzy Inference Systems*. AVN, Jahrgang 2003, Heft 8-9, pp. 308-315.
- ALEFELD, G. und HERZBERGER, J. (1974): *Einführung in die Intervallrechnung*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien und Zürich.
- ALEFELD, G. und HERZBERGER, J. (1983): *Introduction to Interval Computations*. Academic Press, Boston San Diego und New York.
- ALKHATIB, H.; NEUMANN, I. und KUTTERER, H. (2009): *Uncertainty modeling of random and systematic errors by means of Monte Carlo and Fuzzy techniques*. Journal of Applied Geodesy, Vol. 3, No. 2, pp. 67-80.
- ARNOLD, B. F. (1998): Testing fuzzy hypotheses with crisp data. *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 94, pp. 323-333.
- ARNOLD, B. F. und GERKE, O. (2003): *Testing Fuzzy Linear Hypotheses in Linear Regression Models*. *Metrika*, Vol. 57, pp. 81-95.
- AU, C. und TAM, J. (1999): *Transforming Variables Using the Dirac Generalized Function*. *The American Statistician*, Vol. 53, No. 3, pp. 270-272.
- AYYUB, B. M. und KLIR G. J. (2005): *Uncertainty Modeling and Analysis in Engineering and the Sciences*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton.
- AYYUB, B. M. und MCCUAN, R. H. (2003): *Probability, Statistics, and Reliability for Engineers and Statisticians*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton.
- BAARDA, W. (1968): *A Testing procedure for Use in Geodetic Networks*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, Vol. 2, No. 5.
- BANDEMER, H. (1997): *Ratschläge zum mathematischen Umgang mit Ungewissheit -Reasonable Computing-*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart und Leipzig.
- BANDEMER, H. (2005): *Mathematik und Ungewissheit -Drei Essais zu Problemen der Anwendung-*. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig.
- BANDEMER, H. und GOTTWALD, S. (1993): *Einführung in Fuzzy-Methoden*. 4. Akademie Verlag, Berlin.
- BANDEMER, H. und NÄTHER, W. (1992): *Fuzzy Data Analysis*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.
- BAR-SHALOM, Y.; LI, X.R. und KIRUBARAJAN, T. (2001): *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. John Wiley & Sons, New York.
- BESSEL, F. W. (1837): *Untersuchung über die Wahrscheinlichkeit von Beobachtungsfehlern*. *Astronomische Nachrichten*, Vol. 15, S. 369-404.
- BOEHM, S. und KUTTERER, H. (2006): *Modeling the Deformations of a Lock by Means of Neuro-Fuzzy-Techniques*. In: Proceedings of the XXIII International FIG Congress, Munich, Germany (CD-Proceedings).
- BORCHERS, S. und HEER, R. (2002): *Bauwerksüberwachung mit GOKA (GPS-basiertes Online Kontroll- und Alarmsystem) an der Schleuse Uelzen I*. In: DVW Schriftenreihe, Band 44: GPS: Antennen, Höhenbestimmung und RTK-Anwendungen, Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart.
- BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A.; MISION, G. und MÜHLIG, H. (2000): *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main.
- CEBERIO, M. und MODAVE, F. (2006): *Interval-based multicriteria decision making*. In: Bouchon-Meunier, B.; Coletti, G. and Yager, R. R. (Eds.): *Modern Information Processing: from Theory to Applications*. El-Sevier Edition.
- CHEN, S.-J. und HWANG, C.-L. (1992): *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin.
- CHMELINA, K.; EICHHORN, A.; HABERLER-WEBER, M. und KAHMEN, H. (2006): *Deformation Analysis with Knowledge and Fuzzy Based Systems*. In: Kahmen, H. und Chrzanowski, A. (Eds.): *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> IAG Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering and the 12<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurement*, Baden, Austria.
- COLEMAN, T. F. und LI, Y. (1996): *A Reflective Newton Method for Minimizing a Quadratic Function Subject to Bounds on some of the Variables*. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 6, No. 4, pp. 1040-1058.
- DEUMLICH, F. und STAIGER, R. (2002): *Instrumentenkunde der Vermessungstechnik*. Wichmann Verlag, Heidelberg.
- DIN 1319 (1995): *Grundlagen der Messtechnik*. DIN 1319, Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin Wien und Zürich.

- DIN 13005 (1999): *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen*. DIN V ENV 13005, Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin Wien und Zürich.
- DIN 18709 (2008): *Kurzzeichen und Formelzeichen im Vermessungswesen*. DIN 18709, Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin Wien und Zürich.
- DIN 18710 (1998): *Ingenieurvermessung*. Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin Wien und Zürich.
- DIN 18710 (2007): *Ingenieurvermessung*. Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin Wien und Zürich.
- DIN 18710-1 (2008): *Ingenieurvermessung*. DIN 18710 Teil 1 -vorläufige Auflage-, Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin Wien und Zürich.
- DIN 55350 (1987): *Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik*. Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag, Berlin Wien und Zürich.
- DIRAC, P. A. M. (1958): *The principles of quantum mechanics*. 4<sup>th</sup> Edition, Oxford University Press, Cambridge.
- DOUCET, A.; de FREITAS, N. und GORDON, N. (2001): *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer Verlag, New York.
- DUBOIS, D. J. und PRADE, H. M. (1980): *Fuzzy Sets and Systems: theory and applications*. Academic Press, London und New York.
- EICHHORN, A. (2005): *Ein Beitrag zur Identifikation von dynamischen Strukturmodellen mit Methoden der adaptiven Kalman-Filterung*. DGK, Reihe C, Nr. 585, München.
- EICHHORN, A. (2007): *Analysis of dynamic deformation processes with adaptive Kalman-Filtering*. Journal of Applied Geodesy, Vol. 1, No. 1, pp. 9-15.
- FELLIN, W.; LESSMANN, H.; OBERGUGGENBERGER, M. und VIEDER, R. (Eds., 2005): *Analysing Uncertainty in Civil Engineering*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg und New York.
- FERSON, S. und KREINOVICH, V. (2006): *Modeling Correlation and Dependence among Intervals*. In: Muhanna, R. L. und Mullen, R. L. (Eds.): *Proceedings of the NSF Workshop on Reliable Engineering Computing -Modeling Errors and Uncertainty in Engineering Computations-*, Savannah (Georgia), USA, pp. 115-126.
- FERSON, S.; GINZBURG, L.; KREINOVICH, V.; NGUYEN, H. T. und STARKS, S. A. (2002): *Uncertainty in risk analysis: towards a general second-order approach combining interval, probabilistic, and fuzzy techniques*. In: *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 1342-1347.
- FERSON, S.; KREINOVICH, V.; HAJAGOS, J.; OBERKAMPF, W. und GINZBURG, L. (2007): *Experimental Uncertainty Estimation and Statistics for Data Having Interval Uncertainty*. Sandia National Laboratories, SAND2007-0939.
- FIDAN, H. (2007): *Verallgemeinertes Testen von unscharf formulierten Hypothesen bei t- und F-Tests*, Shaker, Aachen.
- FLETTLING, R. (2007): *Fuzzy-Clusterung zur Analyse von Überwachungsmessungen*. In: Brunner, F. K. (Hrsg.): *Beiträge des 15. Internationalen Kurses für Ingenieurvermessung*, Graz, Österreich, Herbert Wichmann Verlag, S. 311-316.
- GELB, A. (Ed, 1974): *Applied Optimal Estimation*. M.I.T. Press, Cambridge Massachusetts und London.
- GELMAN, A.; CARLIN, J. B.; STERN, H. S. und RUBIN, D. B. (2004): *Bayesian data analysis*. 2<sup>nd</sup> Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton London New York und Washington D. C.
- GENTEL, J. E. (2003): *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. Springer Verlag, Berlin.
- GERKE, O. (2001): *Verallgemeinertes Testen von unscharf formulierten Hypothesen am Beispiel des linearen Regressionsmodelles*. Shaker Verlag, Aachen.
- GIL, M. A.; LOPEZ-DIAZ, M. and RALESCU, D. A. (2006): *Overview on the development of fuzzy random variable*. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 157, pp. 2546–2557.
- GLEMSER, M. (2001): *Zur Berücksichtigung der geometrischen Objektunsicherheit in der Geoinformatik*. DGK, Reihe C, Nr. 539, München.
- GRABE, M. (2001): *Estimation of measurement uncertainties -an alternative to the ISO-Guide-*. Metrologia (electronic), Vol. 38, pp. 97-106.
- GRABE, M. (2003): *Schätzen von Messunsicherheiten in Wissenschaft und Technik*. BoD, Norderstedt.
- GRABE, M. (2005): *Measurement Uncertainties in Science and Technology*. Springer Verlag, Berlin und New York.
- GRAY, P.; HART, W.; PAINTON, L.; PHILLIPS, C.; TRAHAN, M. und WAGNER J. (2008): *A Survey of Global Optimization Methods*. Siehe: <http://www.cs.sandia.gov/opt/survey/>, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM 87185, letzter Zugriff: 07.01.2009.
- GREWAL, M. S. und ANDREWS, A. P. (2001): *Kalman Filtering: Theory and Practice using Matlab*. 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, New Jersey.

- GÜLAL, E. (1997): *Geodätische Überwachung einer Talsperre; eine Anwendung der KALMAN-Filtertechnik*. Schriftenreihe der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 224.
- HABERLER-WEBER, M. (2005): *Einsatz von Fuzzy-Methoden zur Detektion konsistenter Punktbeugung*. Veröffentlichungen des Instituts für Geodäsie und Geophysik (Ingenieurgeodäsie), TU Wien, Nr. 73.
- HABERLER-WEBER, M.; HUBER, M.; WUNDERLICH, T. und KANDLER, C. (2006): *Fuzzy System Based Analysis of Deformation Monitoring Data at Eiblschrofen Rockfall Area*. In: Kahmen, H. und Chrzanowski, A. (Eds.): *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> IAG Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering and the 12<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurement, Baden, Austria (CD-Proceedings)*.
- HAGEN, G. (1837): *Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin.
- HAHN, M.; HECK, B.; JÄGER, R. und SCHEURING, R. (1989): *Ein Verfahren zur Abstimmung des Signifikanzniveaus für allgemeine  $F_{m,n}$ -verteilte Teststatistiken. -Teil 1: Theorie*. ZfV, Jahrgang 1989, Heft 5, S. 234-248.
- HAHN, M.; HECK, B.; JÄGER, R. und SCHEURING, R. (1991): *Ein Verfahren zur Abstimmung des Signifikanzniveaus für allgemeine  $F_{m,n}$ -verteilte Teststatistiken. -Teil 2: Anwendungen*. ZfV, Jahrgang 1991, Heft 1, S. 15-26.
- HARTUNG, J.; ELPELT, B. und KLÖSNER K.-H. (2005): *Statistik – Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. Oldenbourg Verlag, München.
- HECK, B. (1986): *Sensitivitätsanalyse geodätischer Deformationsnetze*. AVN, Jahrgang 1986, Heft 5, S. 169-181.
- HEINE, K. (2000): *Beschreibung von Deformationsprozessen durch Volterra- und Fuzzy-Modelle sowie Neuronale Netze*. C. H. Beck Verlag, München.
- HEISENBERG, W. (1979): *Quantentheorie und Philosophie*. Reclam Verlag, Stuttgart.
- HEISTER, H. (2005a): *Zur Messunsicherheit im Vermessungswesen (I)*. Géodésie / Mensuration, Vol. 2005, No. 11, Geomatik Schweiz, S. 604 – 607.
- HEISTER, H. (2005b): *Zur Messunsicherheit im Vermessungswesen (II)*. Géodésie / Mensuration, Vol. 2005, No. 12, Geomatik Schweiz, S. 670 – 673.
- HENNES, M. (2007): *Konkurrierende Genauigkeitsmaße – Potential und Schwächen aus der Sicht des Anwenders*. AVN, Jahrgang 2007, Heft 4, S. 136-146.
- HENNES, M. und HEISTER, H. (2007): *Neuere Aspekte zur Definition und zum Gebrauch von Genauigkeitsmaßen in der Ingenieurgeodäsie*. AVN, Jahrgang 2007, Heft 11-12, S. 375-383.
- HENRION, M. und FISCHHOFF, B. (1986): *Assessing uncertainty in physical constants*. American Journal of Physics, Vol. 54, No. 9, pp. 791-798.
- HEUNECKE, O. (1995): *Zur Identifikation und Verifikation von Deformationsprozessen mittels adaptiver KALMAN-Filterung (Hannoversches Filter)*. Schriftenreihe der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 208.
- HUEP, W. (1985): *Zur Positionsschätzung im gestörten Kalmanfilter am Beispiel eines manövrierenden Wasserfahrzeuges*. Schriftenreihe der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 143.
- HURWICZ, L. (1951): *Optimality Criteria for Decision Making Under Ignorance*. Cowles Commission Discussion Paper, Statistics, No. 370.
- ISO (1995): *Guide to the expression of uncertainty in measurements (GUM)*. International Organization for Standardization, Geneva.
- ISO (2007): *Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" - Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. Joint Committee for Guides in Metrology, Bureau International des Poids et Mesures, JCGM 101.
- JÄGER, R.; MÜLLER, T.; SALER, H. und SCHWÄBLE, R. (2005): *Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren -Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern-*. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.
- JANSSON, C. (2006): *VSDP: A MATLAB software package for Verified Semidefinite Programming*. NOLTA, Vol. 2005, pp. 327-330.
- JAULIN, L.; KIEFFER, M.; DIDRIT, O. und WALTER, E. (2001): *Applied Interval Analysis*. Springer Verlag, London.
- JAYNES, E. T. (2003): *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, Cambridge.
- JOECKEL, R. und STÖBER, M. (1999): *Elektronische Entfernung- und Richtungsmessung*. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart.
- JOOS, G. (2000): *Zur Qualität von objektstrukturierten Geodaten*. Schriftenreihe des Studiengangs Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München, Heft 66, Neubiberg.
- KAHMEN, H. (2006): *Vermessungskunde -Angewandte Geodäsie-*. Walter de Gruyter, Berlin und New York.
- KALMAN, R. (1960): *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Journal of Basic Engineering, Vol. 82, No. 3, pp. 35-45.

- KARGOLL, B. (2007): *On the theory and application of model misspecification tests in geodesy*. Dissertation, [http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss\\_online/landw\\_fak/2007/kargoll\\_boris/1113.pdf](http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online/landw_fak/2007/kargoll_boris/1113.pdf), Online-Veröffentlichung, letzter Zugriff: 07.01.2009.
- KAUFMANN, A. und GUPTA, M. (1985): *Introduction to Fuzzy Arithmetic -Theory and Application-*. Van Nostrand Reinhold Verlag, New York.
- KLEES, R. (1992): *Lösung des fixen geodätischen Randwertproblems mit Hilfe der Randelementmethode*. DGK, Reihe C, Nr. 382, München.
- KLEIN, K.-H. und HEUNECKE, O. (2006): *Engineering Surveying Standards*. In: Proceedings of the XXIII International FIG Congress, Munich, Germany (CD-Proceedings).
- KLIR, G. J. (2006): *Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- KLIR, G. und YUAN, B. (1995): *Fuzzy sets and fuzzy logic*. Prentice Hall, New Jersey.
- KOCH, K. R. (2004): *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. 4. bearbeitete Auflage, <http://www.geod.uni-bonn.de/index.html>, ehemals Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn, letzter Zugriff: 07.01.2009.
- KOCH, K. R. (2007): *Introduction to Bayesian Statistics*. 2<sup>nd</sup> Edition, Springer Verlag, Berlin und Heidelberg.
- KÖRNER, R. (1997): *Linear models with random-fuzzy-variables*. Fakultät für Mathematik und Informatik, Technische Universität Freiburg.
- KRÄTSCHMER, V. (2001): *Induktive Statistik auf Basis unscharfer Messkonzepte am Beispiel linearer Regressionsmodelle*. Faculty of Law and Economics of the University of Saarland, Habilitation Monograph, Saarbrücken.
- KRÄTSCHMER, V. (2006): *Strong consistency of Least-squares estimation in linear regression models with vague concepts*. Journal of Multivariate Analysis, Vol. 97, pp. 633-654.
- KREINOVICH, V. (1995): *Why intervals? A simple limit theorem that is similar to limit theorems from statistics*. Reliable Computing, Vol. 1, No. 1, pp. 33-40.
- KREINOVICH, V. (2007): *Why Intervals? Why Fuzzy Numbers? Towards a new Justification*. In: Proceedings of the 2007 IEEE Symposium on Foundations of Computational Intelligence (FOCI 2007), pp. 113-119.
- KREINOVICH, V.; NGUYEN, H. T. and NIWITPONG, S. (2008): *Statistical Hypothesis Testing Under Interval Uncertainty: An Overview*. Journal of Intelligent Technologies and Applied Statistics, Vol. 1, No. 1, pp. 1-33.
- KREINOVICH, V.; LONGPRE, L.; PATANGAY, P.; FERSON, S. und GINZBURG, L. (2005): *Outlier Detection Under Interval Uncertainty: Algorithmic Solvability and Computational Complexity*. Reliable Computing, Vol. 11, No. 1, pp. 59-76.
- KREINOVICH, V.; STARKS, S. A.; VELASCO, A. A.; AVERILL, M. G., ARAIZA, R.; KELLER, G. R. und XIANG, G. (2006): *Towards Combining Probabilistic, Interval, Fuzzy Uncertainty, and Constraints: An Example Using the Inverse Problem in Geophysics*. In: Proceedings of the 12<sup>th</sup> GAMM-IMACS Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics (CD Proceedings).
- KRUSE, R. und MEYER, K. D. (1987): *Statistics with vague data*. D. Reidel Verlag, Dordrecht.
- KUTTERER, H. (1994): *Intervallmathematische Behandlung endlicher Unschärfen linearer Ausgleichungsmodelle*. DGK, Reihe C, Nr. 423, München.
- KUTTERER, H. (2002a): *Joint Treatment of Random Variability and Imprecision in GPS Data*. Journal of Global Positioning Systems, Vol. 1, No. 2, pp. 96-105.
- KUTTERER, H. (2002b): *Zum Umgang mit Ungewissheit in der Geodäsie - Bausteine für eine neue Fehlertheorie*. DGK, Reihe C, Nr. 553, München.
- KUTTERER, H. (2004): *Statistical hypothesis tests in case of imprecise data*. In: Sanso, F. (Ed.): Proceedings of the 5<sup>th</sup> Hotine-Marussi-Symposium, IAG Symposia, Vol. 132, Springer Verlag, Berlin und New York, pp. 49-56.
- KUTTERER, H. (2006): *A more comprehensive modeling and assessment of geo-data uncertainty*. In: Kremers, H. (Ed.): ISGI 2005 International CODATA Symposium on Generalization of Information, CODATA Germany, Lecture Notes in Information Sciences, pp. 43-56.
- KUTTERER, H. und NEUMANN, I. (2007): *Multidimensional statistical tests for imprecise data*. In: Xu, P.; Liu, J. und Dermanis, A. (Eds.): Proceedings of the 6<sup>th</sup> Hotine-Marussi-Symposium, IAG Symposia, Vol. 132, pp. 232-237.
- KUTTERER, H. und SCHÖN, S. (2004): *Alternativen bei der Modellierung der Unsicherheit beim Messen*. ZfV, Jahrgang 2004, Heft 6, S. 389-398.
- KUTTERER, H.; KRÜGEL, M. und TESMER, V. (2008): *Towards an improved assessment of the quality of terrestrial reference frames*. In: Drewes, H. (Ed.): Proceedings of the GRF 2006 Symposium, Munich, Germany, IAG Symposia, Vol. 134, Springer Verlag, Berlin und New York, pp. 67-72.
- KWAKERNAAK, H. (1978): *Fuzzy random variables I: definitions and theorems*. Information Sciences, Vol. 15, pp. 1-29.

- KWAKERNAAK, H. (1979): *Fuzzy random variables II: algorithms and examples for the discrete case*. Information Sciences, Vol. 17, pp. 253–278.
- LEICK, A. (1995): *GPS satellite surveying*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- LENZMANN, L. und LENZMANN, E. (2004): *Strenge Auswertung des nichtlinearen Gauß-Helmert-Modells*. AVN, Jahrgang 2004, Heft 2, S. 68-73.
- LENZMANN, L. und LENZMANN, E. (2007): *Zur Lösung des nichtlinearen Gauß-Markov-Modells*. ZfV, Jahrgang 2007, Heft 2, S. 108-110.
- LUCE, R. D. und RAIFFA, H. (1989): *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. Dover Verlag, New York.
- MARTIN, S. und KUTTERER, H. (2007): *Modellierung von Bauwerksdeformationen mit Neuro-Fuzzy Verfahren*. In: Brunner, F. K. (Hrsg.): Beiträge des 15. Internationalen Kurses für Ingenieurvermessung, Graz, Österreich, Herbert Wichmann Verlag, S. 231-242.
- MAURIS, G.; LASSERRE, V. und FOULLOY, L. (2001): *A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement*. Measurement, Vol. 29, No. 3, pp. 165–177.
- MCNISH, A. G. (1962): *The speed of light*. IRE Transaction on Instrumentation, Vol. 1, No. 11, pp. 138-148.
- MENGER, K. (1951): *Ensembles flous et fonctions aléatoires*. Comptes Rendus Académie des Sciences, No. 232, Paris.
- MEYBERG, K. und VACHENAUER, P. (1999): *Höhere Mathematik I*. Springer Verlag, Berlin und New York.
- MIIMA, J.-B. (2002a): *Artificial Neural Networks and Fuzzy Logic Techniques for the Reconstruction of Structural Deformations*. Geodätische Schriftenreihe der TU Braunschweig, Heft 18.
- MIIMA, J.-B. (2002b): *Adapting neural networks for modelling geodetic deformations*. In: Kahmen, H.; Niemeier, W. und Retscher, G. (Eds.): Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering, Berlin, Germany, pp. 186-194.
- MÖLLER, B. und BEER, M. (2004): *Fuzzy Randomness -Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics-*. Springer Verlag, Berlin und New York.
- MÖLLER, B. und BEER, M. (2008): *Engineering computation under uncertainty -Capabilities of non-traditional models-*. Computers and Structures, Vol. 86, No. 10, pp. 1024-1041.
- MÖLLER, B.; BEER, M.; GRAF, W. und SICKERT, J.-U. (2001): *Fuzzy Finite Element Method and its Application*. In: Wall W.-A.; Bletzinger K.-U. und Schweizerhof, K. (Eds.): Trends in Computational Structural Mechanics, CIMNE, Barcelona, pp. 529-538.
- MÖLLER, B. und REUTER, U. (2006): *Prediction of Uncertain Structural Responses with Fuzzy Time Series*. In: Muhanna, R. L. und Mullen, R. L. (Eds.): Proceedings of the NSF Workshop on Reliable Engineering Computing -Modeling Errors and Uncertainty in Engineering Computations-, Savannah (Georgia), USA, pp. 419-438.
- MÖLLER, B. und REUTER, U. (2008): *Uncertainty Forecasting in Engineering*. Springer Verlag, Berlin und New York.
- MOORE, R. E. (1959): *Automatic error analysis in digital computation*. Technical Report Space Div. Report LMSD84821, Lockheed Missiles and Space Co.
- MOORE, R. E. (1979): *Methods and Applications of Interval Analysis*. Siam Verlag, Philadelphia.
- MUHANNA, R. L. und MULLEN, R. L. (2001): *Uncertainty in Mechanism Problems -Interval-Based Approach-*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 127, pp. 557-566.
- MUHANNA, R.; L., KREINOVICH, V.; SOLIN, P.; CHESSA, J.; ARAIZA, R. und XIANG, G. (2006): *Interval Finite Element*. In: Muhanna, R. L. und Mullen, R. L. (Eds.): Proceedings of the NSF Workshop on Reliable Engineering Computing -Modeling Errors and Uncertainty in Engineering Computations-, Savannah (Georgia), USA, pp. 229-243.
- NÄTHER, W. (1997): *Linear statistical inference for random fuzzy data*. Statistics, Vol. 29, pp. 221-224.
- NEGOITA, C. V. und RALESCU, D. A. (1975): *Representation theorems for fuzzy concepts*. Kybernetes, Vol. 4, No. 3, pp. 169-174.
- NEITZEL, F. (2004): *Identifizierung konsistenter Datengruppen am Beispiel der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze*. DGK, Reihe C, Nr. 565, München.
- NEUMAIER, A. (1990): *Interval methods for linear systems of equations*. Cambridge Press, Cambridge.
- NEUMANN, I. (2004): *Erweiterung des Programmsystems Control zur Überwachung und Auswertung dreidimensionaler Punktfelder*. Diplomarbeit (unveröffentlicht), Geodätisches Institut, Leibniz Universität Hannover.
- NEUMANN, I. (2006): *Zur Entwicklung von Programmsystemen für Bauwerksüberwachungen in Echtzeit*. In: Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover (Hrsg): 125 Jahre Geodäsie und Geoinformatik (Festschrift), Deutschland, S. 269-278.
- NEUMANN, I. und KUTTERER, H. (2006): *Geodetic Deformation Analysis with respect to Observation Imprecision*. In: Proceedings of the XXIII International FIG Congress, Munich, Germany (CD-Proceedings).

- NEUMANN, I. und KUTTERER, H. (2007a): *Congruence Tests and Outlier Detection in Deformation Analysis with Respect to Observation Imprecision*. Journal of Applied Geodesy, Vol. 1, No. 1, pp. 1-7.
- NEUMANN, I. und KUTTERER, H. (2007b): *A Kalman Filter extension for the analysis of imprecise time series*. In: Proceedings of the 15<sup>th</sup> European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Poznan, Poland, (CD-Proceedings).
- NEUMANN, I. und KUTTERER, H. (2007c): *Adaptive Kalmanfilterung mit impräzisen Daten*. In: Brunner, F. K. (Hrsg.): Beiträge des 15. Internationalen Kurses für Ingenieurvermessung, Graz, Österreich, S. 419-424.
- NEUMANN, I. und KUTTERER, H. (2009): *The probability of type I and type II errors in imprecise hypothesis testing with an application to geodetic deformation analysis*. Journal of Reliability and Safety, Vol. 3, No. 1/2/3, pp. 286-306.
- NEUMANN, I.; ALKHATIB, H. und KUTTERER, H. (2008): *Comparison of Monte Carlo and Fuzzy Techniques in Uncertainty Modelling*. In: Proceedings of the 4<sup>th</sup> IAG Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering and the 13<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurement, Lisbon, Portugal, (CD Proceedings).
- NEUMANN, I.; KUTTERER, H. und SCHÖN, S. (2006): *Outlier Detection in Geodetic Applications with respect to observation imprecision*. In: Muhanna, R. L. und Mullen, R. L. (Eds.): Proceedings of the NSF Workshop on Reliable Engineering Computing -Modeling Errors and Uncertainty in Engineering Computations-, Savannah (Georgia), USA, pp. 75-90.
- NEUNER, H.-B. (2008): *Zur Modellierung und Analyse instationärer Deformationsprozesse*. DGK, Reihe C, Nr. 616, München.
- NGUYEN, H. T. (1978): *A Note on the Extension Principle for Fuzzy-Sets*. Journal Math. Anal. Appl., Vol. 64, No. 2, pp. 369-380.
- NGUYEN, H. T. und KREINOVICH, V. (1996): *Nested Intervals and Sets: Concepts, Relations to Fuzzy Sets, and Applications*. In: Kearfott, R. B. and Kreinovich, V. (Eds.): Applications of Interval Computations, Kluwer Verlag, Dordrecht, pp. 245-290.
- NGUYEN, H. T. und WU, B. (2005): *Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data*. Springer Verlag, Berlin und New York.
- NIEMEIER, W. (1985): *Anlage von Überwachungsnetzen*. In: Pelzer, H. (Hrsg.): Geodätische Netze in der Landes- und Ingenieurvermessung. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart, S. 527-558.
- NIEMEIER, W. (2008): *Ausgleichsrechnung*. Walter de Gruyter, Berlin und New York.
- NIWITPONG, S.; NGUYEN, H. T.; KREINOVICH, V. und NEUMANN, I. (2008): *Hypothesis testing with interval data: case of regulatory constraints*. Journal of Intelligent Technology and Applied Statistics, Vol. 1, No. 2, pp. 19-41.
- ONDRACEK, G. (1994): *Werkstoffkunde -Leitfaden für Studium und Praxis-*. Expert-Verlag, Renningen.
- PARZEN E. (1962). *On estimation of a probability density function and mode*. Ann. Math. Stat., Vol. 33, pp. 1065-1076.
- PELZER, H. (1971): *Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen*. DGK, Reihe C, Nr. 164, München.
- PELZER, H. (1985, Hrsg.): *Geodätische Netze in der Landes- und Ingenieurvermessung*. Wittwer Verlag, Stuttgart.
- POPE, A. J. (1972): *Some Pitfalls to be Avoided in the Iterative Adjustment of Nonlinear Problems*. In: Proceedings of the 38<sup>th</sup> Annual Meeting of the American Society of Photogrammetry, Washington D.C., USA, pp. 449-477.
- POPE, A. J. (1976): *The statistics of residuals and the detection of outliers*. NOAA Technical Report NOS65 NGS1, US Department of Commerce, National Geodetic Survey, Rockville, Maryland.
- RABINOVICH, S. G. (2005): *Measurement Errors and Uncertainties: Theory and Practice*. Springer Verlag, New York.
- RALESCU, D. A. (1992): *A generalization of the representation theorem*. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 51, No. 3, pp. 309-311.
- REINKING, J. (2008): *Total Least Squares?* ZfV, Jahrgang 2008, Heft 6, S. 384-389.
- RISTIC, B.; ARULAMPALAM, S. und GORDIN, N. (2004): *Beyond the Kalman Filter, Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House, Boston.
- RÖMER, C. und KANDEL, A. (1995): *Statistical tests for Fuzzy Data*. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 72, No. 1, pp. 1-26.
- RÜEGER, J.-M. (1996): *Electronic Distance Measurement – An Introduction*. Springer Verlag, New York und Berlin.
- RUMP, S. M. (2008): *INTLAB - Interval Laboratory, the Matlab toolbox for verified computations*. User Manual, Version 5.4, Hamburg, Germany.
- SAIDI, B. and JABALLAH, A. (2008): *Alternative characterizations for the representation of families of sets by fuzzy sets*. Information Sciences: an International Journal, Vol. 178, No. 12, pp. 2639-2647.
- SCHMIDT, H. (2003): *Warum GUM? – Kritische Anmerkungen zur Normdefinition der <Messunsicherheit> und zu verzerrten <Elementarfehlermodellen>*. AVN, Jahrgang 2003, Heft 3, S. 303-312.
- SCHÖN, S. (2003): *Analyse und Optimierung geodätischer Messanordnungen unter besonderer Berücksichtigung des Intervallansatzes*. DGK, Reihe C, Nr. 567, München.

- SCHÖN, S. und KUTTERER, H. (2001): *Optimal design of geodetic monitoring networks by means of interval mathematics*. In: Whitacker, C. (Ed.): Proceedings of the 10<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurements. Orange, USA, pp. 362-371.
- SCHÖN, S. und KUTTERER, H. (2002): *Network Optimization with Respect to Systematic Errors*. In: Adam, J. und Schwarz, K.-P. (Eds.): Vistas for Geodesy in the New Millenium, IAG Symposia, Vol. 125, pp. 329-334.
- SCHÖN, S. und KUTTERER, H. (2005a): *Realistic uncertainty measures for GPS observations*. In: Sanso, F. (Ed.): A window on the future of geodesy, IAG Symposia, Vol. 128, pp. 54-59.
- SCHÖN, S. und KUTTERER, H. (2005b): *Using zonotopes for overestimation-free interval least-squares -some geodetic applications-*. Reliable Computing, Vol. 11, No. 2, pp. 137-155.
- SCHÖN, S. und KUTTERER, H. (2006a): *A comparative analysis of uncertainty modeling in GPS data analysis*. In: Rizos, C. und Tregoning, P. (Eds.): Dynamic Planet - Monitoring and Understanding a Dynamic Planet with Geodetic and Oceanographic Tools, IAG Symposia, Vol. 130, pp. 137-142.
- SCHÖN, S. und KUTTERER, H. (2006b): *Uncertainty in GPS networks due to remaining systematic errors: the interval approach*. Journal of Geodesy, Vol. 80, No. 3, pp. 150-162.
- SCHÖN, S. und KUTTERER, H. (2006c): *GPS Monitoring Networks: Interval-Based Description of Measurement Uncertainties due to Remaining Systematics*. In: Kahmen, H. und Chrzanowski, A. (Eds.): Proceedings of the 3<sup>rd</sup> IAG Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering and the 12<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurement, Baden, Austria (CD Proceedings).
- SCHWIEGER, V. (1999): *Ein Elementarfehlermodell für GPS-Überwachungsmessungen -Konstruktion und Bedeutung interepochaler Korrelationen*. Schriftenreihe der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 231.
- SEISING, R. (1999, Hrsg.): *Fuzzy Theorie und Stochastik -Modelle und Anwendungen in der Diskussion-*. Vieweg Verlag, Braunschweig und Wiesbaden.
- SIMON, D. (2006): *Optimal State Estimation -Kalman, H<sub>∞</sub>, and Non-linear Approaches-*. John Wiley & Sons, Hoboken und New Jersey.
- STEINMETZ, V. (1998): *Schließende Statistik mit unscharfen Stichproben*. Diskussionsbeiträge des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften, Universität des Saarlandes, Saarbrücken.
- STERNBERG, H. (2000): *Zur Bestimmung der Trajektorie von Landfahrzeugen mit einem hybriden Meßsystem*. Schriftenreihe des Studiengangs Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München, Heft 67, Neubiberg.
- STIGLER, S. M. (1996): *Statistics and the Question of Standards*. Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, Vol. 101, No. 6, pp. 779-789.
- TERÁN, P. (2007): *Probabilistic foundations for measurement modelling with fuzzy random variables*. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 158, No. 9, pp. 973-986.
- VIERTL, R. (1996): *Statistical Methods for Non-Precise DATA*. CRC Press, Boca Raton New York London und Tokyo.
- VIERTL, R. (2002): *Allgemeine Informationen und Statistik*. In: Festschrift 50 Jahre österreichische statistische Gesellschaft, S. 105-114.
- VIERTL, R. (2003): *Einführung in die Stochastik: Mit Elementen der Bayes-Statistik und der Analyse unscharfer Information*. Springer Verlag, Wien und New York.
- VIERTL, R. und FILZMOSER, P. (2004): *Testing hypotheses with fuzzy data: The fuzzy p-value*. Metrika, Vol. 59, pp. 21-29.
- VIERTL, R. und HARETER, D. (2004a): *Fuzzy information and imprecise probability*. Z. f. angew. Mathem. und Mechanik, Vol. 84, pp. 731-739.
- VIERTL, R. und HARETER, D. (2004b): *Generalized Bayes' theorem for no-precise a-priori distribution*. Metrika, Vol. 59, No. 3, Springer Verlag, Heidelberg und New York.
- VIERTL, R. und HARETER, D. (2006): *Beschreibung und Analyse unscharfer Information: Statistische Methoden für unscharfe Daten*. Springer Verlag, Wien und New York
- VON NEUMANN, J. und MORGENSTERN, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*. University Press, Princeton.
- WELSCH, W.; HEUNECKE, O. und KUHLMANN, H. (2000): *Handbuch Ingenieurvermessung -Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen-*. Wichmann Verlag, Heidelberg.
- WIESER, A. (2002): *Robust and fuzzy techniques for parameter estimation and quality assessment in GPS*. Shaker Verlag, Aachen.
- WILLGALIS, S. (1993): *Vergleichende Untersuchungen dynamischer Deformationsmodelle am Beispiel des adaptiven Kalman-Filters und des Volterra-Modells*. Diplomarbeit (unveröffentlicht), Geodätisches Institut, Universität Hannover.

- WSA UELZEN (2008): *Wasser und Schifffahrtsamt (WSA) Uelzen*. <http://www.wsa-uelzen.wsv.de/>, letzter Zugriff: 30.10.2008.
- WSV (2008): *Wasser und Schifffahrtsverwaltung des Bundes (WSV)*. <http://www.wsv.de/>, letzter Zugriff: 05.11.2008.
- WU, N. (1997): *The Maximum Entropy Method: Data and Knowledge in a Changing World*. Springer Verlag, Berlin.
- YOU DEN, W. J. (1972): *Enduring values*. Technometrics. Vol. 14, No.1, pp. 1-11.
- ZADEH, L. A. (1965): *Fuzzy sets*. Information Control, Vol. 8, pp. 338-353.
- ZIEGLER, G. M. (1995): *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 152, Springer Verlag, New York.

# Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1: Der Ablauf der Datenanalyse bei Unschärfe für den in dieser Arbeit gewählten Ansatz.....	10
Abbildung 2.1: Die wesentlichen Komponenten der Unsicherheit bei der (geodätischen) Datenanalyse.....	15
Abbildung 2.2: Zusammenspiel von Genauigkeit, Präzision und Auflösung nach HENNES (2007) und SCHMIDT (2003).....	18
Abbildung 2.4: Auswirkung des Nullpunktfehlers auf eine der Teilstreckenmessungen.....	23
Abbildung 2.6: Ein um systematische und zufällige Abweichungen verfälschter wahrer Wert $\bar{x}$ .....	25
Abbildung 2.7: Zusammenspiel zwischen dem Modell der Geodäsie, dem Messmodell, dem Experiment, den Seiteninformationen und den Vorkenntnissen.....	28
Abbildung 2.8: Ishikawa-Diagramm nach HENNES (2007).....	30
Abbildung 3.1: Ein Fuzzy-Set.....	41
Abbildung 3.2: LR-unscharfes Intervall mit konvexen Zugehörigkeitsfunktionen.....	43
Abbildung 3.3: Konstruktion eines Nested-Set mit Hilfe von fünf Experten (Expertenwissen).....	47
Abbildung 3.4: Eine unscharfe Zufallsvariable (FRV, engl.: fuzzy-random variable).....	48
Abbildung 3.5: Zweigeteilte Konstruktion einer eindimensionalen unscharfen Zufallsvariablen.....	51
Abbildung 4.1: Ein Hypothesentest mit einer unscharfen Zahl als Testgröße.....	64
Abbildung 4.2: Die drei zu untersuchenden Fälle bei den Hypothesentests mit unscharfen Daten.....	64
Abbildung 4.3: Das height-Kriterium für eine unscharfe Zahl als Teststatistik und einen unscharfen Annahmebereich.....	68
Abbildung 4.4: Das card-Kriterium für eine unscharfe Zahl als Wert für die Teststatistik.....	70
Abbildung 4.5: Anwendung der numerischen Integration beim card-Kriterium.....	73
Abbildung 4.6: Vergleich des height- und card-Kriteriums für einen klassischen Annahme- und Verwerfungsbereich.....	74
Abbildung 4.7: Vergleich des height- und card-Kriteriums für einen unscharfen Annahme- und Verwerfungsbereich.....	75
Abbildung 4.8: Konstruktion der eindimensionalen Teststatistik $\tilde{T}$ über ein $\alpha$ – Schnitt-Optimierungsverfahren.....	77
Abbildung 4.9: Bestimmung der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_{\text{impr}}$ für einen Fehler 1. Art mit $\rho_{\text{crit}} = 0,9$ .....	78
Abbildung 4.10: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $\beta_{\text{impr}}$ für einen Fehler 2. Art im unscharfen Fall mit $\rho_{\text{crit}} = 0,9$ .....	80
Abbildung 5.1: Ablaufdiagramm für einen Globaltest der Ausgleichung in der linearen Parameterschätzung.....	87
Abbildung 5.2: Entscheidungsbaum für die zu verwendende lineare Hypothese bei Unschärfe.....	88
Abbildung 6.1: Zwei Situationen beim Testen mit Intervallunschärfe und Toleranzbereichen für den Annahmebereich.....	104
Abbildung 6.2: Beispiel für das Testen mit FRVs und einem klassischen Annahmebereich.....	106
Abbildung 7.1: Die Auswertemodelle der geodätischen Deformationsanalyse nach WELSCH ET AL. (2000).....	109
Abbildung 7.2: Ein Luftbild (links) und eine Ansicht der Schleuse Uelzen I im Osten (rechts) von der WSV (2008).....	110
Abbildung 7.3: Darstellung der Überwachungsnetze der Schleuse Uelzen (links) und der Maschinenachse (rechts).....	111
Abbildung 7.4: Konfiguration für die Aufweitungsmessungen (links) und die Auswertung des Punktes 111 (rechts).....	111
Abbildung 7.5: Das Feder-Dämpfungsmodell nach WELSCH ET AL. (2000, links) und die simulierten Daten (rechts).....	112
Abbildung 7.6: Die für die Beispiele verwendeten unscharfen Intervalle vom Trapeztyp.....	114
Abbildung 7.7: Ein klassisches geodätisches Überwachungsnetz für den Kongruenzfall (PELZER, 1971).....	115
Abbildung 7.8: Interpretation der unscharfen Ergebnismengen im Kontext des Expertenwissens.....	119
Abbildung 7.9: Abgestimmte Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha_{\text{Global}}$ für den Globaltest mit $\alpha_{\text{Ausreißer}} = 1\%$ .....	120
Abbildung 7.10: Globaltest der Epochen 1999 (links) und 2004 (rechts) mit abgestimmter Irrtumswahrscheinlichkeit.....	121
Abbildung 7.11: Grad der Zurückweisung von $H_0$ als Funktion des Mittelpunktes $\underline{T}_m$ der Teststatistik $\tilde{T}$ .....	122
Abbildung 7.12: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $\alpha_{\text{impr}}$ (links) und der multiple Ausreißertest (rechts).....	123
Abbildung 7.13: Ein Vergleich der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art bei unterschiedlicher Impräzision.....	123
Abbildung 7.14: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $\beta_{\text{impr}}$ (links) und des Nichtzentralitätsparameters $\lambda_{\text{impr}}$ (rechts).....	124
Abbildung 7.15: Der Nichtzentralitätsparameter $\lambda_{\text{impr}}$ in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art $\beta_{\text{impr}}$ .....	124
Abbildung 7.16: Kongruenztest für den impräzisen Fall mit den Epochen 1999 und 2004 (unscharfer Annahmebereich).....	125
Abbildung 7.17: Auswertung des Kongruenztests für den impräzisen Fall mit den Epochen 1999 und 2004.....	125
Abbildung 7.18: Die Wahrscheinlichkeit eines Fehler 1. Art in Abhängigkeit von $\rho_{\text{crit}}$ bei dem Kongruenztest.....	126
Abbildung 7.19: Die detektierten Punktbewegungen im impräzisen Fall für $\rho_{\text{crit}} = 0,1$ (links) und für $\rho_{\text{crit}} = 0,9$ (rechts).....	126
Abbildung 7.20: Die detektierten Punktbewegungen im klassischen (links) und impräzisen Fall (rechts) für $\rho_{\text{crit}} = 0,5$ .....	127
Abbildung 7.21: Testsituation bei der Maschinenachse für das TCA 2003 (oben) und das TCA 1101 (unten).....	128
Abbildung 7.22: Intervallradien in Abhängigkeit von der Orientierung des Koordinatenrahmens und Messgröße.....	136
Abbildung 7.23: Überschätzung bei rekursiver Fortpflanzung der Impräzision in Abhängigkeit der Orientierung.....	137
Abbildung 7.24: Zwei- und dreidimensionale Zonotope für die ersten drei Epochen in Abhängigkeit der Orientierung.....	137
Abbildung 7.25: Detailansicht für die dreidimensionalen Zonotope bei einer Orientierung von 50 gon.....	138
Abbildung 7.26: Unsicherheiten des Systemzustandes ohne (oben) und mit Anpassung des stoch. Modells (unten).....	138
Abbildung 7.27: Standardabweichungen und Intervallradien (Impräzision) mit Anpassung des Filters.....	139
Abbildung 7.28: Beobachteter, prädizierter und gefilterter Systemzustand (links) und die Prozesskoeffizienten (rechts).....	139
Abbildung 7.29: Vergleich der Standardabweichungen und Intervallradien der Prozesskoeffizienten (20 Epochen).....	140
Abbildung 7.30: Vergleich der Intervallradien der Prozesskoeffizienten (480 Epochen).....	140
Abbildung 7.31: Auswirkung der Impräzision der Temperatur bei einer Streckenmessung auf einem Objekt (Ansicht).....	142

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1: <i>Verschiedene Werte für eine Astronomisch Einheit (AE) mit experimenteller Abschätzung des Konfidenzbereiches nach STIGLER (1996) und YOUTEN (1972).</i> .....	24
Tabelle 2.2: <i>Angabe des mittleren quadratischen Fehlers und die berechnete untere Vertrauensgrenze <math>C_u</math>.</i> .....	25
Tabelle 4.1: <i>Die Testentscheidungen beim card-Kriterium für Trapez-Fuzzy-Sets und für Referenzfunktionen mit <math>e^{-x}</math></i> .....	72
Tabelle 4.2: <i>Übersicht über die Parameter für die Zugehörigkeitsfunktion der Trapez-Teststatistiken.</i> .....	74
Tabelle 7.1: <i>Art und Größenordnung der Deformationen an der Schleuse Uelzen I aus BORCHERS und HEER (2002).</i> .....	110
Tabelle 7.2: <i>Übersicht der Messepochen für den Kongruenzfall der geodätischen Deformationsanalyse.</i> .....	110
Tabelle 7.3: <i>Übersicht über die Systemparameter bei der adaptiven Kalmanfilterung nach WILLGALIS (1993, S. 52).</i> .....	113
Tabelle 7.4: <i>Impräzision der Einflussfaktoren (links) und Beobachtungsergebnisse (rechts) nach SCHÖN (2003).</i> .....	113
Tabelle 7.5: <i>Anzahl der identifizierten Ausreißer im rein stochastischen Fall und in Abhängigkeit von <math>\rho_{en}</math>.</i> .....	121
Tabelle 7.6: <i>Die Ergebnisse nach der Stabilpunktsuche bei der Analyse des Überwachungsnetzes Schleuse Uelzen.</i> .....	127
Tabelle 7.7: <i>Standardabweichungen und Impräzision für die Länge der Maschinenachse.</i> .....	128
Tabelle 7.8: <i>Die Wahrscheinlichkeiten für das Annehmen und Verwerfen der Nullhypothese.</i> .....	129
Tabelle 7.9: <i>Die Gesamtkosten beim Annehmen und Verwerfen der Nullhypothese.</i> .....	129
Tabelle 7.10: <i>Standardabweichungen und Impräzision der Beobachtungsergebnisse (Ein-Lagen-Messung).</i> .....	135

## Verwendete Abkürzungen und Normen

ANFIS	Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System
AVN	Allgemeine Vermessungsnachrichten
BIPM	Bureau International des Poids et Mesures
BLUE	Beste lineare erwartungstreue Schätzung (engl.: best linear unbiased estimator)
bzw.	Beziehungsweise
bspw.	Beispielsweise
cdf	Verteilungsfunktion, kurz: Verteilung (engl.: cumulative distribution function)
DGK	Deutsche Geodätische Kommission
d. h.	Das heißt
DIN	Deutsches Institut für Normung
FEM	Finites Element Modell
FRV	Unscharfe Zufallsvariable (engl.: Fuzzy-Random Variable)
GUM	Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen (engl.: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)
IAG	International Association of Geodesy
i. A.	Im Allgemeinen
i. d. R.	In der Regel
ISO	International Organization for Standardization
JAG	Journal of Applied Geodesy
JOG	Journal of Geodesy
KF	Kalmanfilter
MCDM	Multi Criteria Decision Making
MkQ	Methode der kleinsten Quadrate
MPE	Maximum Permissible Error
pdf	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (engl.: probability density function)
RFV	Zufällige unscharfe Variable (engl.: Random-Fuzzy Variable)
tlw.	Teilweise
u. A.	Unter Anderem
u. U.	Unter Umständen
vgl.	Vergleiche
VKFG	Varianz-Kovarianzfortpflanzungsgesetz
VKM	Varianz-Kovarianzmatrix
ZfV	Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement

## Definitionen und Symbolverzeichnis

$x$	Variable
$x$	Zufallsvariable
$E^{M_k}[x] = \bar{x}^{M_k}$	k-te Moment der Zufallsvariablen $x$
$E^k[x] = \bar{x}^k$	k-te zentrale Moment der Zufallsvariablen $x$
$E[x] = \bar{x}$	Erwartungswertoperator einer Zufallsvariablen: Erwartungswert von $x$
$D[x] = \sigma_x^2$	Dispersionsoperator einer Zufallsvariablen: Varianz von $x$ (zweite zentrale Moment von $x$ )
$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$	Standardabweichung einer Zufallsvariablen
$\bar{x}$	Wahrer oder richtiger Wert
$\hat{x}$	Schätzwert für $x$ aus einer Stichprobe
$\pi_o$	Verteilungsfunktion (kurz: Verteilung) einer Zufallsvariablen
$\rho_o$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (kurz: Dichtefunktion) einer Zufallsvariable
$\rho_o(\lambda)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen mit Nichtzentralitätsparameter $\lambda$
$\rho_{o1-\alpha}$	Quantil einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$
$N(f, \lambda)$	Normal-Verteilung mit $f$ Freiheitsgraden und dem Nichtzentralitätsparameter $\lambda$
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$
$N_{1-\alpha}(f, \lambda)$	Quantil der Normal-Verteilung zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$
$U(\mu, \sigma^2)$	Gleichverteilung mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$
$\chi^2(f, \lambda)$	Chi-Quadrat-Verteilung mit $f$ Freiheitsgraden und dem Nichtzentralitätsparameter $\lambda$
$\chi^2_{1-\alpha}(f, \lambda)$	Quantil der Chi-Quadrat-Verteilung zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$
$F(f_1, f_2, \lambda)$	Fischer-Verteilung mit $f_1$ und $f_2$ Freiheitsgraden und dem Nichtzentralitätsparameter $\lambda$
$F_{1-\alpha}(f_1, f_2, \lambda)$	Quantil der Fischer-Verteilung zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$
$\tau(f_1, f_2, \lambda)$	Tau-Verteilung mit $f_1$ und $f_2$ Freiheitsgraden und dem Nichtzentralitätsparameter $\lambda$
$\tau_{1-\alpha}(f_1, f_2, \lambda)$	Quantil der Tau-Verteilung zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$
$\mathbf{x}$	Vektor
$\mathbf{x}$	Zufallsvektor
$\hat{\mathbf{x}}$	Schätzwert für den Zufallsvektor $\mathbf{x}$ aus einer Stichprobe
$\Sigma_{\mathbf{x}}$	Varianz-Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\mathbf{x}$
$\text{diag}(\mathbf{x})$	Erzeugen einer Diagonalmatrix aus dem Vektor $\mathbf{x}$
$\mathbf{X}$	Matrix
$\mathbf{X}^-$	Generalisierte Inverse der Matrix $\mathbf{X}$
$\mathbf{X}^+$	Pseudoinverse der Matrix $\mathbf{X}$
$\text{diag}(\mathbf{X})$	Erzeugen eines Vektors aus den Hauptdiagonalelementen der Matrix $\mathbf{X}$
$\text{sp}(\mathbf{X})$	Spur der Matrix $\mathbf{X}$
$\text{rg}(\mathbf{X})$	Rang der Matrix $\mathbf{X}$
$[x]$	Intervall
$x_m$	Mittelpunkt eines Intervalles
$x_r$	Radius eines Intervalles
$i_x(x)$	Indikatorfunktion von $x$
$\bar{X}$	Nested-Set
$\tilde{X}$	Fuzzy-Set
$m_{\tilde{x}}$	Zugehörigkeitsfunktion eines Fuzzy-Sets

$\tilde{X}_\alpha$	$\alpha$ - Schnitt eines Fuzzy-Sets
$X_m$	Mittelpunkt eines Fuzzy-Sets
$\tilde{X}$	Unschärfe Zufallsvariable (engl.: Fuzzy-Random Variable, FRV)
$m_{\tilde{x}}$	Zugehörigkeitsfunktion einer FRV
$\tilde{X}_\alpha$	$\alpha$ - Schnitt einer FRV
$\underline{X}_m$	Mittelpunkt einer FRV
$f(x)$	Funktion von einem Skalar $x$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	Vektorwertige Funktion eines Vektors $\mathbf{x}$
$E[f] = \bar{f}$	Erwartungswert einer Funktion
$x \rightarrow y$	Abbildung von $x$ auf $y$
$x \tilde{\rightarrow} y$	Unschärfe Abbildung von $x$ auf $y$
$\emptyset$	Leere Menge
$\exists x$	Es existiert mindestens ein $x \dots$
$\forall$	Für alle...
$\wedge$	Und
$\vee$	Oder
$\in$	Ist Element aus...
$\notin$	Ist nicht Element aus...
$\cup$	Vereinigungsmenge
$\cap$	Schnittmenge
$\subseteq$	Ist Teilmenge
$\supseteq$	Ist Obermenge
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{I}\mathbb{R}$	Menge der reellen Intervalle
$\mathfrak{F}(\mathbb{R})$	Fuzzy-Teilmengen in $\mathbb{R}$
$M$	Merkmalsraum
$M_x^n$	Merkmalsraum einer Zufallsvariablen
$M_x^n$	Merkmalsraum einer Stichprobe im $\mathbb{R}^n$
$\Theta$	Parameterraum



## Dank

Die in dieser Arbeit entwickelten Ideen und gezeigten Ergebnisse sind während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Geodätischen Institut der Leibniz Universität Hannover entstanden und wurden im Rahmen der Forschungsprojekte KU 1250/4-1 und -2: "Geodätische Deformationsanalysen unter Berücksichtigung von Beobachtungsimpräzision und Objektunschärfe" von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert.

Allen, die zur Fertigstellung der Arbeit beigetragen haben, sei an dieser Stelle herzlich gedankt. Ohne die motivierenden Worte, die Ratschläge und Hilfestellungen wäre die Anfertigung der Arbeit in diesem Umfang und der Qualität nicht möglich gewesen.

Mein herausragender Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Hansjörg Kutterer für seine unermüdliche Förderung und Unterstützung bei der Bearbeitung des Themas, die gewährten Freiräume und die konstruktiven Impulse sowie Hinweise zu der Arbeit. Darüber hinaus möchte ich mich bei ihm für die exzellenten Kritiken im Bezug auf das Gesamtspektrum der darüber hinausgehenden Forschungstätigkeiten bedanken.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Steffen Schön danke ich für die Übernahme eines Korreferates und die damit verbundenen wichtigen und sehr hilfreichen Hinweise und Anmerkungen über die gesamte Projektlaufzeit. Des Weiteren möchte ich mich bei ihm für die Bereitstellung der im DFG Projekt „Optimaler Entwurf geodätischer Überwachungsnetze unter Berücksichtigung strenger Toleranzen“ entstandenen Softwarepakete und Ergebnisse bedanken.

Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Reinhard Viertl danke ich für die Übernahme eines Korreferates und die damit verbundenen wichtigen und sehr hilfreichen (mathematischen) Hinweise und Anmerkungen.

Bei allen anderen Professoren im Studiengang Geodäsie und Geoinformatik, insbesondere bei Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. Hans Pelzer, möchte ich mich für die Förderung während des Studiums bedanken. Sie haben mir den Weg geebnet, um eine wissenschaftliche Laufbahn einschlagen zu können.

Ein ganz herzlicher Dank geht an Herrn Dr.-Ing. Hamza Alkhatib und Herrn Dr.-Ing. Hans-Berndt Neuner für ihre idealistische Durchsicht der Arbeit und die damit verbundenen inhaltlichen Verbesserungsvorschläge und zahlreichen stilistischen Korrekturen. Vielen Dank auch für die so zahlreichen konstruktiven Diskussionen zu der Arbeit und zu allen anderen (Forschungs-) Fragen während der Zeit in Hannover.

Herrn Dr.-Ing. Christian Hesse danke ich für sein Verständnis und seine unermüdliche Unterstützung seit Anfertigung der Diplomarbeit am Geodätischen Institut. Ihm ist es mit zu verdanken, dass ich am Geodätischen Institut als wissenschaftlicher Mitarbeiter beginnen konnte.

Darüber hinaus ist allen Personen (inkl. Hiwis) am Geodätischen Institut für die vielen fachlichen Diskussionen, Denkanstöße und ihre Hilfsbereitschaft gedankt. Es hat mich sehr gefreut die vier Jahre mit Euch in Hannover in der angenehmen Atmosphäre verbringen zu können. Vielen Dank für die schöne und unvergessliche Zeit!

Nicht zuletzt möchte ich mich bei allen meinen Freunden und Bekannten sowie Eltern für ihr Verständnis bedanken und mich gleichzeitig für die zahlreichen Absagen im Bezug auf „...hab keine Zeit muss an der Diss. arbeiten!“ entschuldigen.



## Lebenslauf

### Persönliche Daten

Name	Ingo Neumann
Geburtsdatum	15. Dezember 1977
Geburtsort	Thedinghausen (Niedersachsen, Deutschland)
Familienstand	ledig

### Schulbildung

Grundschule Morsum	1984-1988
Orientierungsstufe Thedinghausen	1988-1990
Domgymnasium Verden	1990-06/1997

### Grundwehrdienst

1. Nachschubbataillon 11 (Delmenhorst)	07/1997-04/1998
--	-----------------

### Hochschulausbildung

FH Oldenburg -Diplomvorprüfung-	03/1999-08/2000
Leibniz Universität Hannover	09/2000-03/2005
Abschluss: Dipl.-Ing. Geodäsie und Geoinformatik	23. März 2005
Aufenthalt an der Universität von Texas in El Paso (USA) Department für Computer Science (Prof. Vladik Kreinovich)	02/2008-03/2008

### Berufliche Tätigkeiten

Amt für Agrarstruktur Verden (Praktikum)	05/1998-10/1998
Landesvermessung und Geobasisinformation Niedersachsen	11/2001-04/2002 (freiberuflich)
Wissenschaftlicher Mitarbeiter (DFG) am Geodätischen Institut der Leibniz Universität Hannover	04/2005-03/2009
Wissenschaftlicher Laborleiter für Geodäsie an der Universität der Bundeswehr München	ab 04/2009