

**Bernd Stary**

**Ein hydrostatisch-isostatisches Dichtemodell  
für das Gravitationspotential der Erde**

**München 2009**

---

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**





Ein hydrostatisch-isostatisches Dichtemodell  
für das Gravitationspotential der Erde

Von der Fakultät VI – Planen Bauen Umwelt  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Geophys. Bernd Stary

D 83

München 2009

---

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission beim Verlag C. H. Beck

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:



Deutsche Geodätische Kommission

Alfons-Goppel-Straße 11 • D – 80 539 München

Telefon +49 – 89 – 23 031 1113 • Telefax +49 – 89 – 23 031 - 1283/ - 1100

e-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://www.dgk.badw.de>

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Lothar Gründig

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Dieter Lelgemann

Prof. Dr. phil. nat. Markus Rothacher

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 30. Oktober 2008

---

© 2009 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,  
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

ISSN 0065-5325

ISBN 978-3-7696-5049-5

## Zusammenfassung

Geodäsie und Geophysik verwenden für globale Schwerefeldinterpretationen physikalische Zustandsbeschreibungen, die als Funktionale eines Störpotentials formuliert werden. Als Referenz wird zumeist ein Normalschwerefeld verwendet, welches aus der Definition eines rotierenden homogenen Ellipsoids abgeleitet wird (GRS80), das die Figur der Erde bestmöglich annäherd. Das Normalpotential und die damit verbundene geometrische Gestalt bilden die Grundlage z. B. für die Festlegung von Höhensystemen. Darüber hinaus benötigt man die Kenntnis des äußeren Schwerefeldes z. B. für die Methoden der Satellitengeodäsie. Zur Lösung dieser Aufgabe genügt die Kenntnis dreier die Figur der Erde beschreibender Körper: Die physische Oberfläche der Erde (Topographie), eine Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes (Geoid) sowie eine Normalfläche des Erdschwerefeldes (Normalpotential).

Möchte man jedoch aus dem beobachtbaren Schwerefeld auf dessen Ursachen innerhalb des festen Erdkörpers schließen, d.h. die Frage nach der inneren Dichteverteilung beantworten, so bietet das Störpotential, also die Differenz aus tatsächlichem Schwerepotential und Normalpotential, nur wenige Möglichkeiten (z. B. die Abschätzung von Schwerpunkttiefe und Gesamtmasse eines Störkörpers aus der im Schwerefeld sichtbaren Anomalie).

Wesentliche Merkmale des Erdkörpers sind bekannt und akzeptiert, so z. B. der Schalenaufbau der Erde, die geringe geometrische Abplattung seine mittlere geometrische Figur, die dynamische Abplattung, sowie seine Hauptträgheitsmomente. Ferner ist davon auszugehen, dass sich die Erde in erdgeschichtlichen Zeiträumen, als sich selbst gravitierender Körper, weitestgehend in ein hydrostatisches Gleichgewicht gebracht hat und deshalb unter dem Einfluss der Erdrotation einen in jeder Schicht abgeplatteten Schalenaufbau aufweist.

Ausgehend vom Dichtemodell PREM hat Dr.-Ing. Hartmut Wziontek [Wziontek, 2004] ein sphärisches Dichtemodell entwickelt, das die Forderung nach dem vollständigen hydrostatischen Ausgleich erfüllt und alle wichtigen geodätischen Primärdaten reproduziert.

Auf dieser Grundlage wird ein hydrostatisches Dichtemodell entworfen, das weiterhin den geodätischen Primärdaten Rechnung trägt und geeignet ist, um als Referenzfeld für die Interpretation des Schwerefeldes bezüglich Fragestellungen zur Dichteverteilung des Erdinneren verwendet zu werden. Hierzu ist es notwendig, ausgehend von der Theorie rotierender Gleichgewichtskörper eine tiefenabhängige Abplattung für jede infinitesimale Erdschicht zu bestimmen. Da bei der Beschreibung eines nicht homogenen und rotierenden Gleichgewichtskörpers in 2. Näherung des geometrischen Ortes die Gleichgewichtsfigur kein Ellipsoid mehr sein kann, muss die Schalengeometrie durch einen weiteren tiefenabhängigen Parameter beschrieben werden. Er gibt die tiefenabhängige Abweichung (nach Darwin) des geometrischen Ortes des Gleichgewichtskörpers (Sphäroid) von einer ellipsoidischen Gestalt an.

Im Rahmen dieser Arbeit wird bei der vorgestellten generalisierten Betrachtungsweise ein globaler Gradient sowohl für die Abplattung, als auch für die Darwin-Abweichung in Anwendung gebracht.

Das Außenraumpotential einer derartigen hydrostatischen Modellerde wird, den Ideen von Helmut Moritz [Moritz, 1990] folgend, mit Flächenbelegungen bestimmt. Dies ist insbesondere deswegen sinnvoll, da analytisch gerechnet werden kann und bis auf die Näherungen zur Beschreibung des geometrischen Ortes und zum Abplattungs- und Abweichungsverlauf keine weiteren Näherungen verwendet werden müssen. Zudem ist die Berechnung der Kugelfunktionskoeffizienten, die das Potential beschreiben, einfach möglich.

Es ist grundsätzlich immer möglich andere, von der Modellvorstellung einer hydrostatisch ausgeglichenen und abgeplatteten Erde abweichende Massenverteilungen in Form von Flächenbelegungspotentialen zu formulieren, so dass auf diesem Weg kombinierte Modelle entwickelt werden können. So formulierte masseninduzierte Potentialwirkungen überlagern sich nach dem Superpositionsprinzip direkt und ungestört.

Ein Großteil der Erdkruste befindet sich, einer weiteren Modellvorstellung folgend, annähernd im isostatischen Gleichgewicht. Das Schwimmgleichgewicht nach dem Archimedisches Prinzip, das der Beschreibung isostatischer Kompensation zugrunde liegt, kann ebenfalls durch Flächendichtebelegungen, bzw. Flächendipolbelegungen beschrieben werden. Der einzige unbestimmte Parameter ist die so genannte isostatische Ausgleichstiefe,

die sich jedoch anhand der Qualität des Amplitudenspektrums der Potentialkoeffizienten bei globaler Betrachtungsweise recht gut abschätzen lässt.

Kombiniert man nun beide Modellvorstellungen zu einem hydrostatisch-isostatischen Dichtemodell für die Erde, kann hieraus das Gravitationspotential der Erde im Außenraum berechnet werden. Dieses Feld ist als geophysikalisches Referenzfeld für weitere Schwerefeldinterpretationen verwendbar.

Die dynamischen Prozesse an der Kern-Mantel-Grenze bilden eine Übergangsschicht. Sie fällt seismisch auf, weil in ihr keine richtungsabhängigen Geschwindigkeitsänderungen mehr verzeichnet werden. An der Unterseite dieser ca. 200 km mächtigen D"-Schicht hat sich ein Bereich mit chemischem Reaktionsschutt gebildet, der an der Kern-Mantel-Grenze eine Topographie mit Undulationen von bis zu  $\pm 6$  km ausbildet. Diese Grenzschicht ist, nach den einschlägigen Dichtemodellen für die Erde (PREM), der Ort des größten Dichtekontrastes innerhalb der Erde. Bedingt durch die Undulationen in dieser Tiefe wird im Erdschwerefeld ein langwelliger Effekt ausgeprägt, der bei bekannter Topographie ebenfalls mit Hilfe von Flächenbelegungen berechnet und dem Modell, wie oben beschrieben, hinzugefügt werden kann.

Aus hierauf aufbauenden Residualfeldbetrachtungen lässt sich eine Topographie der Kern-Mantel-Grenze bestimmen, die in Übereinstimmung mit den aktuellen geophysikalischen Befunden steht. Wird die Schwerefeldwirkung der Kern-Mantel-Grenzen Topographie in das Dichtemodell einbezogen, verbleiben Restanomalien in der Größenordnung von  $\pm 45$  m. Sie korrelieren stark mit Plattengrenzen und der Lage von Hotspots. Die Anomalien sind weiteren Interpretationsverfahren zugänglich, wie etwa der Analyse von großräumigen Dichteanomalien (durch Mantelkonvektion verursacht), oder der Bestimmung von Ausdehnung und Tiefe des Schwerpunktes eines Störkörpers.

Die vorgeschlagene Methode zeigt, dass es machbar ist, ein physikalisch sinnvolles Referenzmodell für geophysikalische Zwecke nach hydrostatisch-isostatischen Gesichtspunkten zu entwerfen und dieses für geophysikalische Interpretationen zu verwenden.

## Abstract

For the purpose of global gravity field interpretation, Geodesy and Geophysics often use physical state descriptions of the Earth which are functions of a disturbing potential. Therefore (as a reference), the normal gravity field derived from the Earth's best fitting rotational ellipsoid (GRS80) is used. This normal potential together with the associated geometric shape is for example the basis for the realization of geodetic height systems. Beyond that, the knowledge of the outer gravity field is used in satellite geodesy. Usually three different bodies describing the figure of the Earth are sufficient: The physical shape of the Earth (topography), a level surface of the Earth's gravity field (surface of constant potential, the geoid) and a reference surface of the Earth's gravity field (normal potential).

In case of interest in the causes of this gravity field, and in the density distribution within the solid Earth, the disturbing potential only provides a limited amount of information to answer such questions, as e.g. the estimation of the depth of the centre of gravity of an inhomogeneity and its total mass from regionally bounded anomalies.

Some of the main properties of the Earth's interior structure are known and accepted like the stratification in layers, the small geometrical flattening, and the principle moments of inertia. Furthermore, it can be assumed that in geological ages the Earth, as being self-gravitating, has adopted a hydrostatic equilibrium and, due to the Earth's rotation, is flattened in each depth of stratification.

Coming from the density model PREM, Dr.-Ing. Hartmut Wziontek [Wziontek, 2004] has developed a spherical density model which fulfils the demand of complete hydrostatic equilibrium and satisfies all important geodetic primary data.

On this basis and within this dissertation, a density model will be derived which still makes use of the geodetic primary data and which is suitable to be used as a reference field for the interpretation of the measurable gravity with regard to the density distribution of the Earth. It is necessary to determine a depth-dependent flattening of all infinitesimal layers coming from the theory of rotating figures of equilibrium. Because the figure of equilibrium of an inhomogeneous rotating density distribution cannot be an ellipsoid, the resulting non-ellipsoidal spheroid is described with another depth-dependent parameter, the deviation according to Darwin. This deviation indicates the geometrical distance between the spheroid and the ellipsoid.

Within the context of this thesis and its generalized approach global gradients of the depth-dependent values of the geometrical flattening and the Darwin deviation are used.

The outer potential of such a hydrostatic model following the ideas of Helmut Moritz is calculated with surface density distributions. This is reasonable in particular because in this manner the calculations can be done analytically without requiring too many approximations. Moreover, the expansion of these potentials into series of spherical surface harmonics can be done easily.

Another main advantage of this method is the possibility to extend the hydrostatic model by disturbing potentials caused by different mass distributions which also can be modelled by surface density distributions. This allows an easy way to calculate the gravity potential of combined models because all potential effects can be added up by the principle of undisturbed superposition.

A major part of the Earth's crust is in isostatic equilibrium. From this result the postglacial rebound of large continental masses was derived. According to the principle of Archimedes, a swimming equilibrium which is fundamental for the mathematical description of isostasy can again be formulated by the above mentioned surface densities, respectively by dipole densities. The only parameter which has to be determined is the depth of compensation. This value can be found relative easily by contrasting the power spectra of the isostatic model with the true gravity field for different depths of compensation.

A combined representation of a hydrostatic-isostatic density model of the Earth allows the calculation of the Earth's outer gravitational potential. This field can be used as a geophysical reference for pursuing interpretations of the Earth's gravity field.

Dynamic processes at the Core-Mantle Boundary build an intermediate layer which is seismologically noticeable by velocity anomalies that are no longer correlated with an isotropic behaviour. At the bottom side of this approximately 200 km thick layer, called D<sup>+</sup>-Layer, an area with debris of chemical reaction can be found forming a topography of up to  $\pm 6$  km. Within the Earth, this boundary layer is the location of the largest contrast in density. Because of these topographic undulations, an effect on the low frequencies of the gravity field series expansions is imprinted. With a known topography of the Core-Mantle Boundary, this effect can also be expressed by surface densities and be added to the potential field as well.

The comparison of the real potential field of the Earth with the potential of the above mentioned hydrostatic-isostatic potential field results in a field of residuals. A closer look at the remaining anomalies allows the calculation of a theoretical Core-Mantle Boundary according to the results of geophysical investigations. If the gravity effect of this undulating layer is also taken into account, the residual geoid undulations remain in an order of magnitude of about  $\pm 45$  m. It is apparent that the residuals show a correlation between the known tectonic plate boundaries and the position of hotspots. These results are now ready for further investigation like the modelling of density anomalies caused by convection within the mantle, or the estimation of depth and size of locally distributed disturbing bodies.

The method proposed in this dissertation clearly shows the feasibility of framing a physical useful density reference model for the Earth for geophysical purposes under hydrostatic-isostatic points of view, which leads to a hydrostatic flattening very close to the Earth's known geometrical flattening.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>14</b>
2.1	Die Entwicklung des Gravitationspotentials nach Kugelflächenfunktionen . . . . .	14
2.1.1	Taylorreihenentwicklung des reziproken Abstandes . . . . .	15
2.1.2	Lösen der Laplace-Gleichung für den Außenraum einer Kugel . . . . .	17
2.2	Zum Verständnis von Kugelflächenfunktionen . . . . .	19
2.2.1	Zonale Kugelflächenfunktionen . . . . .	20
2.2.2	Sektorielle Kugelflächenfunktionen . . . . .	20
2.2.3	Tesserale Kugelflächenfunktionen . . . . .	20
2.3	Zur Normalisierung von Kugelflächenfunktionen . . . . .	21
2.3.1	Zusammenfassung . . . . .	23
2.4	Zur Entwicklung von Funktionen auf einer Kugeloberfläche . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Kugelfunktionskoeffizienten</b>	<b>25</b>
3.1	Berechnung der Potentialkoeffizienten einer dreidimensionalen Modellerde . . . . .	25
3.1.1	Die blockweise geschichtete Modellerde . . . . .	26
3.1.2	Die numerische Integration . . . . .	26
3.2	Berechnung des Potentialfeldes eines ellipsoidischen Modellkörpers mit Flächenbelegungen . . . . .	27
3.3	Überlegungen zum mittleren Radius einer Ellipse . . . . .	28
3.4	Berechnung des Potentialfeldes einer isostatisch ausgeglichenen Erde mittels Flächenbelegungen . . . . .	31
3.5	Berechnung des Potentialfeldes einer Modellerde mit mehreren Flächenbelegungen . . . . .	33
3.6	Interpretation der Kugelfunktionskoeffizienten eines Gravitationsfeldes durch Vergleich mit modellierten Kugelfunktionskoeffizienten . . . . .	34
3.6.1	Vergleich im Ortsbereich . . . . .	34
3.6.2	Vergleich im Frequenzbereich . . . . .	37
3.7	Die Entwicklung um den Schwerpunkt der Modelle . . . . .	37
3.8	Zur Problematik der Filterung von kugelfunktionsentwickelten Feldern . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Hydrostasie</b>	<b>41</b>
4.1	Die hydrostatisch ausgeglichene Modellerde . . . . .	41
4.1.1	Homogene und rotierende Körper . . . . .	41
4.1.2	Das Konzept des geodätischen Normalpotentials und das homogene Ellipsoid . . . . .	44
4.1.3	Die Referenzfläche für die Erde . . . . .	46
4.1.4	Verwendung des Modells von Wziontek (WZIO) . . . . .	49
4.2	Berechnung einer Näherung für die Gradienten der geometrischen Abplattung und der Darwin-Abweichung . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Der Isostasie</b>	<b>55</b>
5.1	Der isostatische Ausgleich an der Erdoberfläche . . . . .	55
5.2	Das isostatische Krustenmodell . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Daten</b>	<b>60</b>
6.1	Das Schwerereferenzfeld GRS80 . . . . .	60
6.2	Das Schwerfeld von GFZ-Potsdam und GRGS-Toulouse EIGEN-GL04C . . . . .	61
6.3	Das radialsymmetrische Dichtemodell PREM und seine Modifikation . . . . .	62
6.4	Das radialsymmetrische Dichtemodell HA2-337-C und seine Modifikation . . . . .	64
6.5	Das globale digitale Höhenmodell ETOPO2v2 . . . . .	67
6.6	Die Grenzschicht zwischen Erdmantel und Erdkern - Die D"-Schicht . . . . .	68
6.7	Plattengrenzen und Hotspots . . . . .	72

<b>7 Methoden der Potentialberechnung</b>	<b>73</b>
7.1 Das Potential einer ellipsoidischen Modellerde mit schichtweise konstanter Dichte und $\mathbf{r}$ in 1. Näherung . . . . .	73
7.2 Das Potential einer ellipsoidischen Modellerde mit ortsabhängiger Dichte . . . . .	77
7.3 Das Potential einer ellipsoidischen Modellerde mit ortsabhängiger Dichte und $r$ in 2. Näherung . . . . .	79
7.4 Das Potential einer ellipsoidischen Modellerde mit ortsabhängiger Dichte, $\mathbf{r}$ in 2. Näherung und Darwin-Abweichung $\kappa$ . . . . .	83
7.5 Das Gravitationspotential einer an der Oberfläche isostatisch ausgeglichenen Erde . . . . .	86
7.6 Das Gravitationspotential einer CMB-Topographie . . . . .	87
7.7 Kombinierte Modelle . . . . .	89
<b>8 Ergebnisse</b>	<b>90</b>
8.1 Einfluss des Abplattungsgradienten auf die vorgeschlagene Lösung . . . . .	91
8.2 Das Gravitationspotential der Modelle . . . . .	92
8.2.1 Das Modell STY1 . . . . .	92
8.2.2 Das Modell STY2 . . . . .	95
8.2.3 Das Modell STY3 . . . . .	98
8.2.4 Das Modell STY4 . . . . .	100
8.3 Das Modell STY5: Endgültiges geophysikalisches Referenzmodell . . . . .	102
8.3.1 Das Außenraumpotential des Modells STY5 . . . . .	103
8.3.2 Die Kugelfunktionsentwicklung des Außenraumpotentials für das Modell STY5 . . . . .	104
8.3.3 Verwendung des Modells STY5 für die Interpretation des Erdschwerefeldes . . . . .	105
<b>9 Geophysikalische Interpretation des realen Schwerefeldes</b>	<b>106</b>
9.1 Das Gravitationspotential einer an der Oberfläche isostatisch ausgeglichenen Erde . . . . .	107
9.2 Das kombinierte hydrostatisch-isostatische Modell STY5-ISO . . . . .	108
9.3 Das Gravitationspotential einer CMB-Topographie . . . . .	110
9.4 Das kombinierte hydrostatisch-isostatische Modell mit CMB Topographie STY5-ISO-CMB . . . . .	113
<b>10 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>119</b>
10.1 Das hydrostatische Modell . . . . .	119
10.2 Das isostatische Modell . . . . .	120
10.3 Das Potential einer undulierenden Kern-Mantel-Grenze . . . . .	121
10.4 Das Restfeld und weiterführende Arbeiten . . . . .	122
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>123</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>127</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>129</b>
<b>Danksagung</b>	<b>130</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>131</b>

## Bezeichnungen

Übersicht der in dieser Arbeit verwendeten Modellbezeichnungen:

<b>PREM</b>	Preliminary Reference Earth Model [Dziewonski und Anderson, 1981]
<b>GRS80</b>	Geodetic Reference System 1980
<b>WGS84</b>	World Geodetic System 1984
<b>EIGEN</b>	Modell des tatsächlichen Schwerefeldes vom GFZ-Potsdam und der Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale Toulouse, genannt EIGEN-GL04C
<b>WZIO</b>	Hydrostatisches radialsymmetrisches Dichtemodell der Erde von [Wziontek, 2004], dort HA2337-C genannt
<b>STY1</b>	Hydrostatisches Dichtemodell der Erde mit schichtweise konstanter Dichte und $r$ in 1. Näherung sowie Startwerten für $f_{grad}$ und $r_{CMB}$
<b>STY2</b>	Hydrostatisches Dichtemodell der Erde mit schichtweise konstanter Dichte und $r$ in 1. Näherung sowie angepassten Werten für $f_{grad}$ und $r_{CMB}$
<b>STY3</b>	Hydrostatisches Dichtemodell der Erde mit radiusabhängiger Dichte und $r$ in 1. Näherung sowie angepassten Werten für $f_{grad}$ und $r_{CMB}$
<b>STY4</b>	Hydrostatisches Dichtemodell der Erde mit radiusabhängiger Dichte und $r$ in 2. Näherung sowie angepassten Werten für $f_{grad}$ und $r_{CMB}$
<b>STY5</b>	Hydrostatisches Dichtemodell der Erde mit radiusabhängiger Dichte, $r$ in 2. Näherung und Berücksichtigung der Darwin-Abweichung, sowie angepassten Werten für $f_{grad}$ und $r_{CMB}$
<b>AIRY020</b>	Isostatisches Krustenmodell nach AIRY mit Ausgleichstiefe $ha=20$ km
<b>AIRY050</b>	Isostatisches Krustenmodell nach AIRY mit Ausgleichstiefe $ha=50$ km
<b>AIRY200</b>	Isostatisches Krustenmodell nach AIRY mit Ausgleichstiefe $ha=200$ km
<b>STY5-ISO</b>	Kombiniertes Modell aus STY5 und AIRY050
<b>STY5-ISO-CMB</b>	Kombiniertes Modell aus STY5-ISO und CMB

# 1 Einleitung

Die Hauptaufgabe der Höheren Geodäsie ist die Beschreibung der geometrischen Figur der Erde und ihrer zeitlichen Änderungen in Bezug auf das Erdschwerefeld. Für globale Betrachtungen des Feldes wird ein „erdähnliches“ Referenzpotential eingeführt, mit dessen Hilfe das Störpotential definiert wird. Es beschreibt die Potentialdifferenz zwischen dem Referenzpotential und dem Potential einer Äquipotentialfläche des tatsächlichen Erdschwerefeldes und wird häufig durch den geometrischen Abstand beider Potentialflächen dargestellt, den so genannten Geoidundulationen/Höhenanomalien. Die mit dem Referenzpotential verbundene geometrische Figur ist ein Ellipsoid, dessen Oberfläche zugleich Äquipotentialfläche ist und somit in das Erdschwerepotential näherungsweise durch eine geometrisch regelmäßige Fläche, ein zweiachsiges Ellipsoid, beschreibt. Das Referenzellipsoid wird durch geometrische und physikalische Parameter der tatsächlichen Erde angegeben. Dies sind einerseits die Dimensionen des Referenzkörpers, zumeist die geometrische Abplattung  $f$  und die Länge der großen Halbachse  $a$ , andererseits dessen physikalischer Zustand, beschrieben durch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und die geozentrische Gravitationskonstante  $GM$ .

Für gewöhnlich wird die Figur der Erde durch ihre Abweichung von dieser geometrischen Referenz beschrieben. Die einfachste Möglichkeit scheint jenes abgeplattete homogene Rotationsellipsoid zu sein (im klassischen Sinne ein Maclaurin-Sphäroid), da es mathematisch einfach zu beschreiben ist. Es wäre allerdings deutlich sinnvoller, um z. B. die Erdeigenschaften oder die Erdzeiten darzustellen, eine hydrostatische Gleichgewichtsfigur als physikalische Referenz zu verwenden, die dem bekannten heterogenen Dichteaufbau der Erde Rechnung trägt. Die Entwicklung eines solchen Modells geht von einem homogenen Rotationskörper aus, da er ein exaktes Rotationsellipsoid ausbilden kann und mathematisch einfach zu beschreiben ist. Abweichungen von einer homogenen Massenverteilung würden das theoretische Gleichgewicht stören und zur Ausprägung anderer Gleichgewichtsfiguren führen. Betrachten wir heterogene Rotationskörper mit ortsabhängiger Dichte, ergibt sich die äußere Form einer stabilen Gleichgewichtsfigur allerdings nicht als exaktes Rotationsellipsoid. Hydrostatische Gleichgewichtsfiguren der Erde, die realistische Dichtemodelle verwenden, sind zwar Ellipsoiden sehr ähnlich, sind mit diesen aber nicht identisch.

Um 1735 gab es die beiden berühmten Gradmessungsexkursionen zur Bestimmung der Abplattung der Erde. Aus den Ergebnissen leitete Clairaut 1743 seine heute immer noch gültige Theorie zur Beschreibung einer hydrostatischen Gleichgewichtsfigur ab. Bei den damals verfügbaren Messwerten und deren Genauigkeiten war es nicht notwendig zwischen der geometrischen Oberfläche eines Rotationsellipsoides der Erde und der physikalischen Oberfläche, einer hydrostatischen Gleichgewichtsfigur der Erde, zu unterscheiden, da sie sich nur um wenige Meter maximal unterscheiden.

Gauß war es vorbehalten zu erkennen, dass es zusätzlich zu der Definition eines solchen Referenzkörpers notwendig ist, eine exakte Schwerereferenzfläche für die Erde zu bestimmen. Diese Referenzfläche, erstmals von Listing 1872 „Geoid“ genannt, weicht von dem oben definierten Rotationsellipsoid bzw. der hydrostatischen Gleichgewichtsfigur der Erde um einen Betrag von ca.  $\pm 100$  m ab.

Lange Zeit war es Aufgabe und Ziel der Geodäten das Erdellipsoid und seine Dimensionen (große Halbachse  $a$ , geometrische Abplattung  $f$ ) immer genauer zu ermitteln. Die Theorie des hydrostatischen Gleichgewichts schien die beste Methode zu sein, um die Abplattung  $f$  zu bestimmen. Dies blieb auch mindestens bis zum Einsatz erster künstlicher Erdsatelliten 1957 so. Hayford wertete 1909 Triangulationen und astronomische Beobachtungen gemeinsam aus und bestimmte ein an die Erdfigur bestangepasstes Ellipsoid mit den Werten

$$a = 6378.388 \text{ km} \quad \text{und} \quad f = 1/297$$

Die Werte wurden 1924 von der Internationalen Association of Geodesy als Internationales Erdellipsoid veröffentlicht.

Hochgenaue hydrostatische Berechnungen von Bullard (1948) ergaben einen Wert für  $f$  von  $1/297.34$ , in hervorragender Übereinstimmung mit dem von Hayford angegebenen Wert des Internationalen Erdellipsoides. Somit behielten die Werte bis zum Vorliegen von Ergebnissen aus der Beobachtung künstlicher Erdsatelliten ihre Gültigkeit.

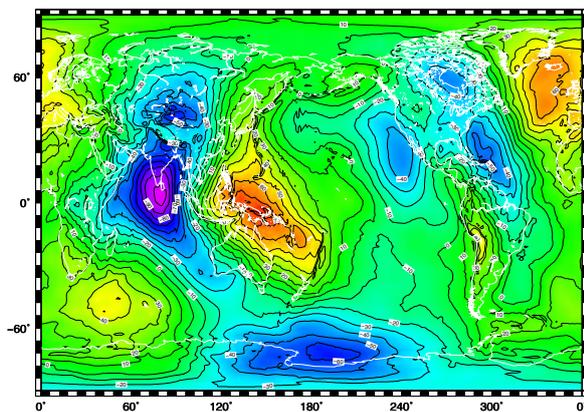
Die Geodäsie interessiert sich für das äußere Schwerfeld, um z. B. physikalisch sinnvolle Höhenbezugs- und Referenzsysteme zu definieren, oder den Anforderungen der Satellitengeodäsie gerecht zu werden. Zudem ermöglichen Beobachtungssatelliten (z. B. CHAMP, GRACE, GOCE) mittlerweile die hochpräzise Erfassung des Erdschwerfeldes und damit seine hochaufgelöste Darstellung mittels Kugelflächenfunktionen.

Durch die Interaktion zwischen Geophysik und Geodäsie ist die Fragestellung nach einer möglichst genauen Beschreibung von Gestalt und innerer Massenverteilung der Erde, die Frage nach der Gleichgewichtsfigur, die die Erde am besten beschreibt, wieder in das Zentrum der Überlegungen zu rücken. Geophysik und Geodäsie leiten wesentliche Aussagen (z. B. über den Zustand des Schwerfeldes) aus Residualfeldbetrachtungen ab. Die Aussagen könnten umso genauer werden, je besser das Referenzfeld im Hinblick auf wesentliche Merkmale des Dichtefeldes der Erde formuliert ist.

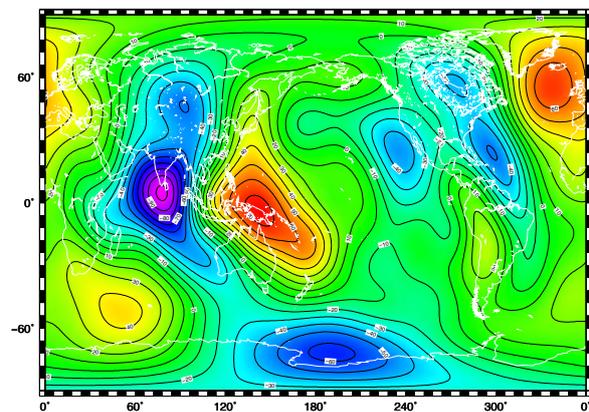
Aus Satellitenbeobachtungen ist die Abplattung der Erde sehr genau bekannt. Der Wert beträgt  $1/298.25$ . Das steht im Widerspruch zu dem jahrzehntelang akzeptierten Wert von  $1/297$ , und hat eine Diskussion über den Unterschied zwischen experimentell ermittelter und hydrostatisch berechneter Abplattung ausgelöst.

Es wäre von großem Nutzen, ein Dichtemodell für das Erdinnere zu entwerfen, das einerseits die Forderung nach der Beschreibung eines vollständigen hydrostatischen Ausgleichs erfüllt und andererseits eine geometrische Abplattung liefert, die in guter Übereinstimmung mit der aus Satellitenbeobachtungen abgeleiteten geometrischen Abplattung steht. Das so gestaltete Dichtemodell würde im Außenraum ein mit dem geodätischen Normalpotential vergleichbares Potentialfeld ausprägen, das geeignet ist, als Referenzfeld für weitergehende geophysikalische Interpretationen verwendet zu werden.

Als globales Modell des tatsächlichen Erdschwerfeldes wird in dieser Arbeit das gemeinsam vom GFZ-Potsdam und dem GRGS-Toulouse aus Satellitendaten abgeleitete Modell EIGEN-GL04C (abgekürzt: EIGEN) verwendet. Das Referenzpotential wird durch das nach Kugelfunktionen entwickelte geodätische Normalpotential des GRS80 dargestellt. Das GRS80 beschreibt ein Äquipotentialellipsoid mit  $U = const.$  und der Gesamtmasse der Erde  $M_{Erde}$ , das mit der durchschnittlichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert. Das in der Satellitengeodäsie gebräuchliche Referenzellipsoid ist durch die Parameter des WGS84 definiert. Berechnet man das Störpotential als Differenz von tatsächlichem Schwerpotential und Normalpotential ergeben sich hieraus die Geoidundulationen des tatsächlichen Schwerfeldes. Das Modell EIGEN zeigt das allgemein bekannte Geoid. Die geglättete Darstellung entsteht durch Filterung für die Entwicklungsgrade  $2 \leq n \leq 10$ .



**Figur 1.1:** Das Geoid des Modells EIGEN  
- komplett

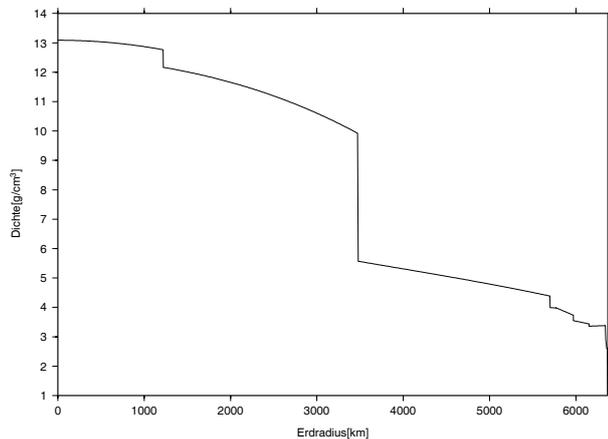


**Figur 1.2:** Das Geoid des Modells EIGEN  
- gefiltert für  $2 \leq n \leq 10$

Die in den Figuren 1.1 und 1.2 dargestellten Geoidundulationen liegen im Bereich  $-106 \text{ m} < N < 85 \text{ m}$ . Die auffälligsten und bekanntesten Strukturen sind die Geoidminima an der Südspitze Indiens, an der Nordspitze der Antarktis, in der Karibik, in Kanada mit dem Zentrum in der Hudson Bay und westlich der Sankt-Andreas Verwerfung sowie die Geoidmaxima in der Gegend von Island, in Melanesien (Papua-Neuguinea), bei Madagaskar und in den Zentralanden.

Die Darstellung des Störpotentials im Ortsbereich wird häufig durch die Darstellung im Frequenzbereich ergänzt. Für das nach Kugelfunktionen entwickelte tatsächliche Potential des Modells EIGEN ergeben sich die Gradvarianzen, bzw. das so genannte Amplitudenspektrum, wie in Figur 1.3 gezeigt.

Das Potential eines endlich ausgedehnten Körpers könnte bestimmt werden, wenn seine Dichteverteilung genau bekannt wäre. Als allgemein akzeptiertes brauchbares und häufig verwendetes globales Dichtereferenzmodell für die Erde gilt für Geodäten wie für Geophysiker das PREM (Preliminary Reference Earth Modell [Dziewonski und Anderson, 1981]). Dieses Modell begreift die Dichte zwar als radiusabhängig, geht aber vereinfachend von einer radialsymmetrischen Dichteverteilung aus. Ein dem Referenzellipsoid mit seiner geometrischen Abplattung entsprechender Ansatz wird hier nicht gemacht. Den Verlauf der radiusabhängigen Dichtefunktion für PREM zeigt Figur 1.4.



**Figur 1.4:** Dichteverlauf des Erdmodells PREM

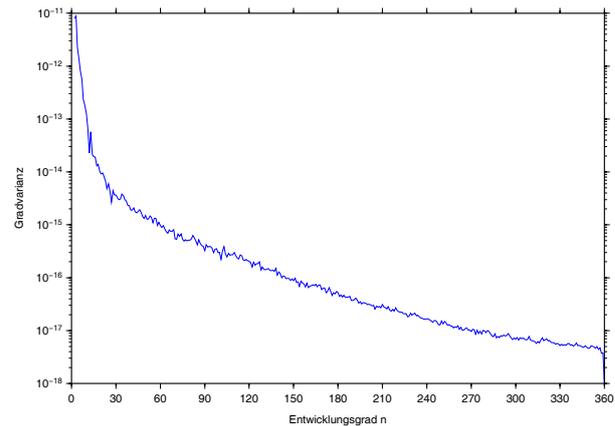
(Manteltektonik) erklären.

[Wziontek, 2004] hat gezeigt, dass es unter der Annahme eines vollständig hydrostatisch ausgeglichenen Erdkörpers möglich ist ein Dichtemodell zu entwerfen, das keine derartige Übergangszone besitzt und die wesentlichen Forderungen an ein globales Dichtemodell erfüllt. Aus einem solchen Modell lassen sich, in Übereinstimmung mit geophysikalischen Ergebnissen, die seismischen Geschwindigkeiten für das Dichtemodell ableiten. Allerdings geht das Modell von einer sphärischen Geometrie aus.

Wie sich zeigen wird ist es möglich ein einfaches annähernd ellipsoidisch geschichtetes Dichtemodell der Erde anzugeben, das die Forderungen nach hydrostatischem Ausgleich erfüllt und als Referenzmodell z. B. für Residualbetrachtungen des Schwerfeldes verwendet werden kann.

Ein solches Modell sollte sich aus der Theorie rotierender Flüssigkeiten ableiten lassen und eine nicht mehr radialsymmetrische, sondern in jeder Tiefe abgeplattete Schichtung besitzen. Das hydrostatisch zu nennende Dichtemodell der Erde sollte mindestens die Qualität des üblicherweise zur Anwendung gebrachten Referenzellipsoids haben, und weitere Eigenschaften der Erde berücksichtigen.

Seit der Expedition von Bouguer (1735-1740) nach Peru gibt es den experimentellen Befund für die zu geringer Lotabweichungskomponenten neben großen topographischen Massen. Diese Erkenntnis war die Grundlage für die Entwicklung von Theorie des isostatischen Ausgleichs im Bereich der Erdoberfläche, also in der Kruste.



**Figur 1.3:** Die Gradvarianzen des Modells EIGEN

Ein Augenmerk ist auf den Ort des größten Dichtesprungs in diesem Modell zu legen. Diesen findet man an der Kern-Mantel-Grenze (Core-Mantle Boundary) bei einem Radius von  $R_{CMB} = 3480$  km. Ein weiteres wesentliches Merkmal von PREM ist, dass es eine Übergangszone unterhalb der Kruste gibt, in der die Dichte nach oben hin ansteigt. Dort ist somit die Forderung nach einem positiven Dichtegradienten für das hydrostatische Gleichgewicht verletzt.

Unterstellt man nun, dass die Erde während ihrer Entstehung ihren Schalenaufbau durch Gravitation gebildet hat, ist anzunehmen, dass ihre Schichten wegen der Erdrotation abgeplattet sind und sie keine Übergangszone mit nach oben steigender Dichte ausbilden konnte. Die Abweichung der Realität von einer hydrostatischen Modellvorstellung lässt sich jedoch mit in der Erdkruste und dem oberen Mantel stattfindenden dynamischen Prozessen (Mantelkonvektion, Plattentektonik) erklären.

---

Zwei grundlegende isostatische Modellvorstellungen stritten um die Vorherrschaft: Pratt und Airy. Beide gehen davon aus, dass global gesehen ein isostatischer Ausgleich nach dem Archimedischen Prinzip des Schwimmgleichgewichts stattfindet.

Dieser Kompensationsmechanismus lässt sich mathematisch einfach formulieren. Er kann als Funktion der Topographie und des am Ort vorherrschenden Dichtekontrasts beschrieben werden. Ein globales Dichtemodell das auch den Kompensationsmechanismus berücksichtigt, wird hydrostatisch-isostatisches Dichtemodell der Erde genannt.

Die hier vorgelegte Arbeit definiert kein hochpräzises Dichtereferenzmodell für die Erde, sondern greift die Idee auf, die unter anderem von [Moritz, 1990] und [Denis, 1989] in die Diskussion geworfen wurde, dass es möglich sein müsste, ein Dichtemodell zu entwerfen, das über den Ansatz des hydrostatischen Gleichgewichts formuliert ist und den experimentell ermittelten Wert des dynamischen Formfaktors  $J_2$  (dynamische Abplattung) allein aus potentialtheoretischen Überlegungen heraus bestätigt.

Alle für die Geodäsie und die Geophysik notwendigen Residualfeldbetrachtungen können, im Falle des Gelingens, als Abweichung von dem geophysikalischen Referenzmodell einer hydrostatisch-isostatisch ausgeglichenen Erde interpretiert werden und nicht nur als Abweichung von einem homogenen abgeplatteten Rotationsellipsoid, also einer geometrischen Referenz.

Ziel der Arbeit ist es, ein Dichtereferenzfeld aus Messungen des Schwerefeldes und aus seismischen Informationen abzuleiten, das für weitere Interpretationen des Schwerefelds hinsichtlich seiner Quellen verwendet werden kann. In die Modellbildung fließt zunächst und als Hauptinformation das durch Kugelfunktionskoeffizienten dargestellte Gravitationspotential der Erde ein. Später werden einige Auswertungen von Laufzeiten für seismische Raumwellen zur Bestimmung der Gestalt der Kern-Mantel-Grenze in der Modellbildung eingearbeitet.

## 2 Grundlagen

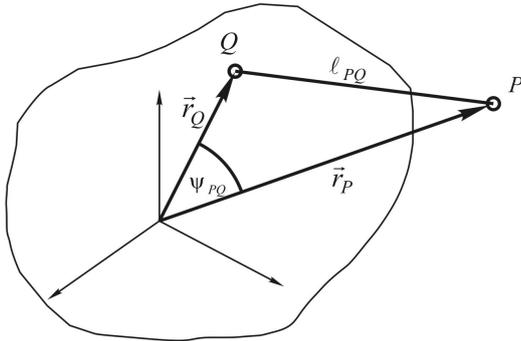
### 2.1 Die Entwicklung des Gravitationspotentials nach Kugelflächenfunktionen

Das Gravitationspotential eines Körpers lautet in der allgemeinen Darstellung

$$V(P) = G \cdot \iiint_{\text{Körper}} \frac{dm(Q)}{\ell_{PQ}} = G \cdot \iiint_{\text{Körper}} \frac{\rho(Q)}{\ell_{PQ}} dV(Q) \quad (2.1)$$

Die Entwicklung der Funktion (2.1) in eine Reihe vollständig normalisierter Kugelflächenfunktionen ergibt für den Außenraum eines Körpers

$$V(P) = G \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_P^{n+1}} \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{m=0}^n \left\{ \bar{R}_{nm}(P) \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) r_Q^n \bar{R}_{nm}(Q) dV(Q) \right. \\ \left. + \bar{S}_{nm}(P) \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) r_Q^n \bar{S}_{nm}(Q) dV(Q) \right\} \quad (2.2)$$



**Figur 2.1:** Konfiguration Quellpunktmassen  
- Aufpunkt

- $G$  ... Gravitationskonstante  
 $= (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$
- $r_P$  ... Abstand zwischen Ursprung und Aufpunkt  $P$ ;  
 Länge des Ortsvektors  $\vec{r}_P$
- $r_Q$  ... Abstand zwischen Ursprung und Quellpunkt  $Q$ ;  
 Länge des Ortsvektors  $\vec{r}_Q$
- $\psi_{PQ}$  ... sphärischer Abstand zwischen  $P$  und  $Q$
- $\ell_{PQ}$  ... geometrischer Abstand zwischen  $P$  und  $Q$
- $\rho(Q)$  ... quellpunktabhängige Dichte des Körpers
- $dV(Q)$  ... differentielles Quellpunktvolumelement
- $dm(Q)$  ... differentielles Quellpunktmasselement

Die in (2.2) lediglich von der Quellpunktconfiguration abhängigen Integralausdrücke werden **vollständig normalisierte harmonische Koeffizienten** des Gravitationspotentials (kurz: **Kugelfunktionskoeffizienten**) genannt und mit  $C_n^m$  bzw.  $S_n^m$  bezeichnet. Sie können als Amplituden der **vollständig normalisierten Legendreschen Funktionen**  $\bar{R}_{nm}(P)$  und  $\bar{S}_{nm}(P)$  im spektralen Darstellungsbereich interpretiert werden. Hierin bezeichnet  $n$  den **Grad** und  $m$  die **Ordnung** der Entwicklung. Mit diesen Koeffizienten lässt sich (2.2) kürzer schreiben:

$$V(P) = G \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_P^{n+1}} \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{m=0}^n \{ \bar{R}_{nm}(P) \cdot C_n^m(Q) + \bar{S}_{nm}(P) \cdot S_n^m(Q) \} \quad (2.3)$$

Zu der Reihendarstellung kann man auf zwei unterschiedlichen Wegen gelangen:

1. Der in der Potentialdarstellung auftretende reziproke Abstand zwischen Quellpunkt  $Q$  und Aufpunkt  $P$   $1/\ell_{PQ}$  wird in eine Taylorreihe entwickelt.
2. Die Laplace-Gleichung für das Gravitationspotential im Außenraum des Körpers wird gelöst.

### 2.1.1 Taylorreihenentwicklung des reziproken Abstandes

Mit dem sphärischen Abstand  $\psi_{PQ}$  zwischen Quellpunkt  $Q$  und Aufpunkt  $P$  lautet der Kosinus-Satz

$$\ell_{PQ}^2 = r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q \cos \psi_{PQ}$$

und damit der reziproke Abstand

$$\frac{1}{\ell_{PQ}} = (r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q \cos \psi_{PQ})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r_P} \left( 1 + \left( \frac{r_Q}{r_P} \right)^2 - 2 \left( \frac{r_Q}{r_P} \right) \cos \psi_{PQ} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Das kann aber nur gelten, wenn  $(r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q \cos \psi_{PQ}) \geq 0$ , da sonst die Wurzel negativ wird. Man findet

$$\begin{aligned} (r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q \cos \psi_{PQ}) &\geq 0 \\ r_P &\geq r_Q \end{aligned}$$

Diese Entwicklung gilt demnach nur auf bzw. außerhalb einer Kugel, die den Körper (folglich alle Quellpunkte  $Q$ ) gerade völlig umschließt. Mit den Abkürzungen

$$\cos \psi_{PQ} = t \quad \text{und} \quad \frac{r_Q}{r_P} = \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha \leq 1$$

ergibt sich für den reziproken Abstand

$$\frac{1}{\ell_{PQ}} = \frac{1}{r_P} (1 + \alpha^2 - 2\alpha t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r_P} (1 - \alpha(2t - \alpha))^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r_P} (1 - \text{“kleine Größe“})^{-\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

Mit der *“kleinen Größe“*  $\alpha(2t - \alpha) = x$  wird der Ausdruck in der Klammer nach (2.4) in eine Taylorreihe entwickelt

$$\begin{aligned} (1 - x)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{-\frac{1}{2}}{s} x^s \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2}(-x)^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-x)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Sortieren nach Potenzen von  $\alpha$  ergibt

$$\begin{aligned} (1 - (\alpha 2t - \alpha))^{-\frac{1}{2}} &= \alpha^0 \cdot 1 \\ &\quad + \alpha^1 \cdot t \\ &\quad + \alpha^2 \cdot \left( \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + \alpha^3 \cdot \left( \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right) \\ &\quad + \alpha^4 \cdot \left( \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8} \right) \\ &\quad + \alpha^5 \cdot \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der  $\alpha^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) heißen **Legendresche Polynome**  $P_n(t)$ . Damit folgt für den reziproken Abstand  $1/\ell_{PQ}$  aus (2.4)

$$\frac{1}{\ell_{PQ}} = \frac{1}{r_P} (\alpha^0 \cdot P_0(t) + \alpha^1 \cdot P_1(t) + \alpha^2 \cdot P_2(t) + \dots) = \frac{1}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(t)$$

und mit den oben eingeführten Abkürzungen

$$\frac{1}{\ell_{PQ}} = \frac{1}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_Q}{r_P} \right)^n P_n(\cos \psi_{PQ}) \quad (2.5)$$

Die Legendreschen Polynome  $P_n(\cos \psi_{PQ})$  lassen sich mit den **zugeordneten Legendreschen Funktionen**  $P_{nm}(\cos \vartheta_P)$  bzw.  $P_{nm}(\cos \vartheta_Q)$  (welche durch  $m$ -faches Differenzieren der Polynome  $P_n(\cos \psi_{PQ})$  entstehen) ausdrücken als [Lense, 1954]

$$P_n(\cos \psi_{PQ}) = P_n(\cos \vartheta_P) \cdot P_n(\cos \vartheta_Q) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (P_{nm}(\cos \vartheta_P) \cos m\lambda_P \cdot P_{nm}(\cos \vartheta_Q) \cos m\lambda_Q \\ + P_{nm}(\cos \vartheta_P) \sin m\lambda_P \cdot P_{nm}(\cos \vartheta_Q) \sin m\lambda_Q)$$

Die Variablen  $r_P, r_Q, \vartheta_P, \vartheta_Q$  sowie  $\lambda_P, \lambda_Q$  sind jeweils die Kugelkoordinaten der Quell- bzw. Aufpunkte  $Q$  und  $P$ .

Abkürzend werden die **Kugelflächenfunktionen** eingeführt

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{nm}(P, Q) \\ S_{nm}(P, Q) \end{array} \right\} = P_{nm}(\cos \vartheta_{P,Q}) \left\{ \begin{array}{l} \sin m\lambda_{P,Q} \\ \cos m\lambda_{P,Q} \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

Somit lauten die Legendreschen Funktionen

$$P_n(\cos \psi_{PQ}) = P_n(\cos \vartheta_P) \cdot P_n(\cos \vartheta_Q) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [R_{nm}(P) \cdot R_{nm}(Q) + S_{nm}(P) \cdot S_{nm}(Q)] \quad (2.7)$$

Unter Verwendung der Orthogonalitätsbeziehungen für Kugelflächenfunktionen

$$\left. \begin{array}{l} \iint_{\text{Einheitskugel } \sigma} R_{nm} \cdot R_{rs} d\sigma = 0 \\ \iint_{\text{Einheitskugel } \sigma} S_{nm} \cdot S_{rs} d\sigma = 0 \end{array} \right\} \text{für } s \neq n \text{ oder } r \neq m \text{ oder beides}$$

$$\iint_{\text{Einheitskugel } \sigma} R_{nm} \cdot S_{rs} d\sigma = 0 \quad \text{immer}$$

bzw.

$$\iint_{\text{Einheitskugel } \sigma} [R_{n0}]^2 d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1}$$

$$\iint_{\text{Einheitskugel } \sigma} [R_{nm}]^2 d\sigma = \iint_{\text{Einheitskugel } \sigma} [S_{nm}]^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad \text{für } m \neq 0$$

vereinfacht sich (2.7) zu

$$P_n(\cos \psi_{PQ}) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} [\bar{R}_{nm}(P) \cdot \bar{R}_{nm}(Q) + \bar{S}_{nm}(P) \cdot \bar{S}_{nm}(Q)] \quad (2.8)$$

mit den vollständig normalisierten Kugelflächenfunktionen

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(P, Q) \\ \bar{S}_{nm}(P, Q) \end{array} \right\} = \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_{P,Q}) \left\{ \begin{array}{l} \sin m\lambda_{P,Q} \\ \cos m\lambda_{P,Q} \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

Die hierin verwendeten Funktionen  $\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_{P,Q})$  heißen **zugeordnete vollständig normalisierte Legendresche Funktionen** und gehen aus den nicht normalisierten wie folgt hervor

$$\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_{P,Q}) = \sqrt{2^{\delta_{m0}} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\cos \vartheta_{P,Q})$$

Durch Einsetzen von (2.5) und (2.8) in (2.1) nimmt die Darstellung des Gravitationspotentials folgende Form an

$$V(P) = G \cdot \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) \left\{ \frac{1}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{r_Q}{r_P} \right)^2 \sum_{m=0}^n [\bar{R}_{nm}(P) \cdot \bar{R}_{nm}(Q) + \bar{S}_{nm}(P) \cdot \bar{S}_{nm}(Q)] \right\} dV(Q) \quad (2.10)$$

Vertauschen von Summation und Integration, sowie sortieren nach den quell- bzw. aufpunktabhängigen Termen liefert die Potentialdarstellung:

$$V(P) = G \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_P^{n+1}} \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{m=0}^n \left\{ \bar{R}_{nm}(P) \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) r_Q^n \bar{R}_{nm}(Q) dV(Q) \right. \\ \left. + \bar{S}_{nm}(P) \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) r_Q^n \bar{S}_{nm}(Q) dV(Q) \right\} \quad (2.11)$$

### 2.1.2 Lösen der Laplace-Gleichung für den Außenraum einer Kugel

Der Vollständigkeit halber sei kurz skizziert, wie man die Laplace-Gleichung für das Gravitationspotential im Außenraum löst.

In (2.1) tritt der reziproke Abstand zwischen Quell- und Aufpunkt  $1/\ell_{PQ}$  auf, der sich in kartesischen Koordinaten folgendermaßen darstellt:

$$|\ell_{PQ}| = \{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

Für die ersten und zweiten Ableitungen des Potentials (2.1) folgt

$$\frac{\partial V(P)}{\partial x_P} = -G \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) \cdot \frac{(x_P - x_Q)}{|\ell_{PQ}|^3} dV(Q)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 V(P)}{\partial x_P^2} = 3 \cdot G \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) \cdot \frac{(x_P - x_Q)^2}{|\ell_{PQ}|^5} dV(Q) - G \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) \cdot \frac{1}{|\ell_{PQ}|^3} dV(Q)$$

Analog berechnet man

$$\frac{\partial V(P)}{\partial y_P}, \frac{\partial^2 V(P)}{\partial y_P^2}, \frac{\partial V(P)}{\partial z_P}, \frac{\partial^2 V(P)}{\partial z_P^2}$$

Wendet man nun den Laplace-Operator  $\Delta$  auf dieses Potential an, bildet man also

$$\Delta V(P) = \frac{\partial^2 V(P)}{\partial x_P^2} + \frac{\partial^2 V(P)}{\partial y_P^2} + \frac{\partial^2 V(P)}{\partial z_P^2}$$

erhält man

$$\Delta V(P) = 3 \cdot G \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) \cdot \frac{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}{|\ell_{PQ}|^5} dV(Q) \\ - 3 \cdot G \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) \cdot \frac{1}{|\ell_{PQ}|^3} dV(Q) = 0$$

Somit erfüllt das Potential  $V(P)$  aus (2.1) die Laplace-Gleichung  $\Delta V(P) = 0$  und wird deshalb harmonische Funktion genannt.

Nun wird die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten durch zweifachen Separationsansatz gelöst. Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten lautet:

$$\Delta := \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right)$$

Die Formulierung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten für alle Punkte  $P(r_P, \vartheta_P, \lambda_P)$  mit  $r_P \geq r_Q$  (siehe 2.1.1) bekommt demnach folgende Gestalt:

$$\Delta V = \frac{1}{r_P} \frac{\partial^2 V(P)}{\partial r_P^2} r_P V(P) + \frac{1}{r_P^2} \left( \frac{\partial^2 V(P)}{\partial \vartheta_P^2} + \cot \vartheta_P \frac{\partial V(P)}{\partial \vartheta_P} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_P} \frac{\partial^2 V(P)}{\partial \lambda_P^2} \right) \\ = r_P^2 \frac{\partial^2 V(P)}{\partial r_P^2} + 2 r_P \frac{\partial V(P)}{\partial r_P} + \frac{\partial^2 V(P)}{\partial \vartheta_P^2} + \cot \vartheta_P \frac{\partial V(P)}{\partial \vartheta_P} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_P} \frac{\partial^2 V(P)}{\partial \lambda_P^2} = 0 \quad (2.12)$$

Mit einem ersten Separationsansatz  $V(r_P, \vartheta_P, \lambda_P) = f(r_P) \cdot Y(\vartheta_P, \lambda_P)$  erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(r_P)} \cdot (r_P^2 f''(r_P) + 2r_P f'(r_P)) \\ &= -\frac{1}{Y(\vartheta_P, \lambda_P)} \cdot \left( \frac{\partial^2 Y(\vartheta_P, \lambda_P)}{\partial \vartheta_P^2} + \cot \vartheta_P \frac{\partial Y(\vartheta_P, \lambda_P)}{\partial \vartheta_P} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_P} \frac{\partial^2 Y(\vartheta_P, \lambda_P)}{\partial^2 \lambda_P} \right) \end{aligned}$$

Da beide Seiten der Gleichung von keiner gemeinsamen Variablen abhängen, ist die Gleichung nur erfüllt, wenn beide Seiten konstant sind. Deshalb wird zunächst die von dem Abstand  $r_P$  abhängige Seite separat betrachtet.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(r_P)} \cdot (r_P^2 f''(r_P) + 2r_P f'(r_P)) = \text{const} = c \\ & r_P^2 f''(r_P) + 2r_P f'(r_P) - c f(r_P) = 0 \end{aligned}$$

Für diese Differentialgleichung vom Euler'schen Typ, findet man mit  $c = n(n+1)$  und dem Ansatz

$$\begin{aligned} f(r_P) &= r_P^l \\ f'(r_P) &= l \cdot r_P^{l-1} \\ f''(r_P) &= l \cdot (l-1) \cdot r_P^{l-2} \end{aligned}$$

zwei Lösungen

$$f_1(r_P) = r_P^n \quad \text{und} \quad f_2(r_P) = \frac{1}{r_P^{(n+1)}} \quad (2.13)$$

Es verbleibt, den winkelabhängigen separierten Teil der Laplace-Gleichung zu lösen

$$-\frac{1}{Y(\vartheta_P, \lambda_P)} \left( \frac{\partial^2 Y(\vartheta_P, \lambda_P)}{\partial^2 \vartheta_P} + \cot \vartheta_P \frac{\partial Y(\vartheta_P, \lambda_P)}{\partial \vartheta_P} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_P} \frac{\partial^2 Y(\vartheta_P, \lambda_P)}{\partial^2 \lambda_P} \right) = n(n+1)$$

Durch den erneuten Separationsansatz  $Y(\vartheta_P, \lambda_P) = g(\vartheta_P) \cdot h(\lambda_P)$  folgt

$$\frac{\sin \vartheta_P}{g(\vartheta_P)} (\sin \vartheta_P g''(\vartheta_P) + \cos \vartheta_P g'(\vartheta_P) + n(n+1) \sin \vartheta_P g(\vartheta_P)) = -\frac{h''(\lambda_P)}{h(\lambda_P)}$$

Da auch hier wieder beide Seiten von keiner gemeinsamen Variablen abhängen, müssen erneut beide Seiten konstant sein. Die Konstante wird zu  $m^2$  gesetzt und man erhält die beiden unabhängigen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} & h''(\lambda_P) + m^2 h(\lambda_P) = 0 \\ & \sin \vartheta_P g''(\vartheta_P) + \cos \vartheta_P g'(\vartheta_P) + \left[ n(n+1) \sin \vartheta_P - \frac{m^2}{\sin \vartheta_P} \right] g(\vartheta_P) = 0 \end{aligned}$$

Für  $h(\lambda_P)$  ergeben sich folgende zwei Lösungen

$$h_1(\lambda_P) = \cos m\lambda_P \quad \text{und} \quad h_2(\lambda_P) = \sin m\lambda_P \quad (2.14)$$

und die Gleichung für  $g(\vartheta_P)$  wird durch die zugeordneten Legendreschen Funktionen  $P_{nm}(\cos \vartheta_P)$  gelöst.

$$g(\vartheta_P) = P_{nm}(\cos \vartheta_P) \quad (2.15)$$

Folglich gibt es zwei Lösungen für den winkelabhängigen separierten Teil der Laplace-Gleichung:

$$\begin{aligned} Y_{nm}^1(\vartheta_P, \lambda_P) &= P_{nm}(\cos \vartheta_P) \cdot \cos m\lambda_P \\ Y_{nm}^2(\vartheta_P, \lambda_P) &= P_{nm}(\cos \vartheta_P) \cdot \sin m\lambda_P \end{aligned}$$

Jede Linearkombination dieser Kugelfunktionen ist wieder Lösung. Das führt zu folgender allgemeinen Lösung. Hierbei handelt es sich um eine zumeist als **Laplacesche Kugelflächenfunktion** bezeichnete Funktion.

$$Y_n(\vartheta_P, \lambda_P) = \sum_{m=0}^n [a_{1, nm} \cdot P_{nm}(\cos \vartheta_P) \cdot \cos m\lambda_P + a_{2, nm} \cdot P_{nm}(\cos \vartheta_P) \cdot \sin m\lambda_P] \quad (2.16)$$

mit den noch näher zu bestimmenden Koeffizienten  $a_{1,nm}$  und  $a_{2,nm}$ .

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung ergibt sich wiederum als Linearkombination der winkelabhängigen Lösung und der radiusabhängigen Lösung

$$V(r_P, \vartheta_P, \lambda_P) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{nm} f_1(r_P) Y_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) + d_{nm} f_2(r_P) Y_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P)]$$

oder explizit unter Zusammenfassung der Koeffizienten:

$$V(r_P, \vartheta_P, \lambda_P) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r_P^{n+1}} \sum_{m=0}^n [a_{1,nm} \cdot P_{nm}(\cos \vartheta_P) \cdot \cos m\lambda_P + a_{2,nm} \cdot P_{nm}(\cos \vartheta_P) \cdot \sin m\lambda_P] + r_P^n \sum_{m=0}^n [b_{1,nm} \cdot P_{nm}(\cos \vartheta_P) \cdot \cos m\lambda_P + b_{2,nm} \cdot P_{nm}(\cos \vartheta_P) \cdot \sin m\lambda_P] \right\} \quad (2.17)$$

Der Bestimmung der Koeffizienten  $a_{i,nm}$  und  $b_{i,nm}$  liegen sowohl physikalische als auch mathematische Überlegungen zugrunde.

**Physikalisch:** Das zu bestimmende Außenraumpotential  $V(r_P, \vartheta_P, \lambda_P)$  soll im Unendlichen Null werden

$$\lim_{r_P \rightarrow \infty} V(r_P, \vartheta_P, \lambda_P) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b_{i,nm} = 0 \quad (\text{für alle } n, m)$$

**Mathematisch:** Die noch zu bestimmenden Koeffizienten  $a_{i,nm}$  folgen aus der Orthogonalitätsrelation der Laplaceschen Kugelflächenfunktionen

$$\int_{\text{Rand des Körpers}} Y_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} (Y_{nm}(\vartheta, \lambda))^2 \sin \vartheta d\lambda d\vartheta = 2\pi \frac{1 + \delta_{0m}}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}$$

Somit ergibt sich wieder die Reihenentwicklung für das Gravitationspotential im Außenraum (2.11), die man auch aus der Entwicklung des reziproken Abstandes  $1/\ell_{PQ}$  erhalten hat:

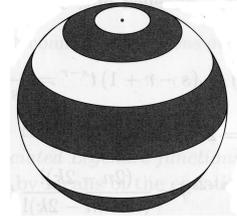
$$V(P) = G \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_P^{n+1}} \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{m=0}^n \left\{ \bar{R}_{nm}(P) \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) r_Q^n \bar{R}_{nm}(Q) dV(Q) + \bar{S}_{nm}(P) \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) r_Q^n \bar{S}_{nm}(Q) dV(Q) \right\}$$

## 2.2 Zum Verständnis von Kugelflächenfunktionen

Die bei der Reihenentwicklung des Gravitationspotentials eines Körpers definierten vollständig normalisierten Kugelfunktionskoeffizienten (2.3) sind als Amplituden der vollständig normalisierten Kugelflächenfunktionen interpretierbar. Diese gewichteten Funktionen beschreiben abhängig von dem Grad  $n$  und der Ordnung  $m$  der Entwicklung eine bestimmte Aufteilung der Kugeloberfläche in Kompartimente unterschiedlicher Größe mit jeweils wechselndem Vorzeichen. Man unterscheidet (Abbildungen aus [Hofmann-Wellenhof und Moritz, 2005]):

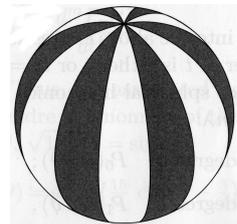
### 2.2.1 Zonale Kugelflächenfunktionen

Die Funktionen sind definiert durch die Bedingung  $m = 0$ . Hierbei handelt es sich um den Sonderfall der Legendreschen Polynome  $P_n(\cos \psi)$ , welche wegen ihrer Unabhängigkeit von der geographischen Länge  $\lambda$  die Kugeloberfläche in Zonen positiven und negativen Vorzeichens teilen. Sie besitzen im Bereich  $0 \leq \vartheta \leq \pi$   $n$  reelle Nullstellen in nicht gleichmäßigem Abstand (siehe unten).



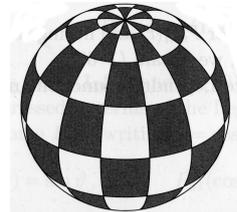
### 2.2.2 Sektorielle Kugelflächenfunktionen

Die Funktionen sind definiert durch  $n = m$ . Hierbei handelt es sich um den Sonderfall von Funktionen, die von  $\vartheta$  unabhängig sind. Das erklärt sich aus der Tatsache, dass die Funktionen  $P_n(\cos \psi)$  durch  $m$ -faches Differenzieren der Polynome  $P_n(\cos \vartheta)$  entstehen, welche ihrerseits vom maximalen Grad  $\cos^n$  bzw.  $\sin^n$  sind. Wegen der Multiplikation mit  $\sin m\lambda$  bzw.  $\cos m\lambda$  werden die Funktionen längenabhängig, wobei im Intervall  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$   $2m$  reelle Nullstellen auftreten.



### 2.2.3 Tesserale Kugelflächenfunktionen

Die Funktionen stellen eine Überlagerung der zonalen und sektoriellen Terme dar. Für sie gilt  $n \neq m$  sowie  $m \neq 0$ . Im Intervall  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  finden sich  $(n - m)$  reelle Nullstellen und im Intervall  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$  weiterhin  $m$  reelle Nullstellen.

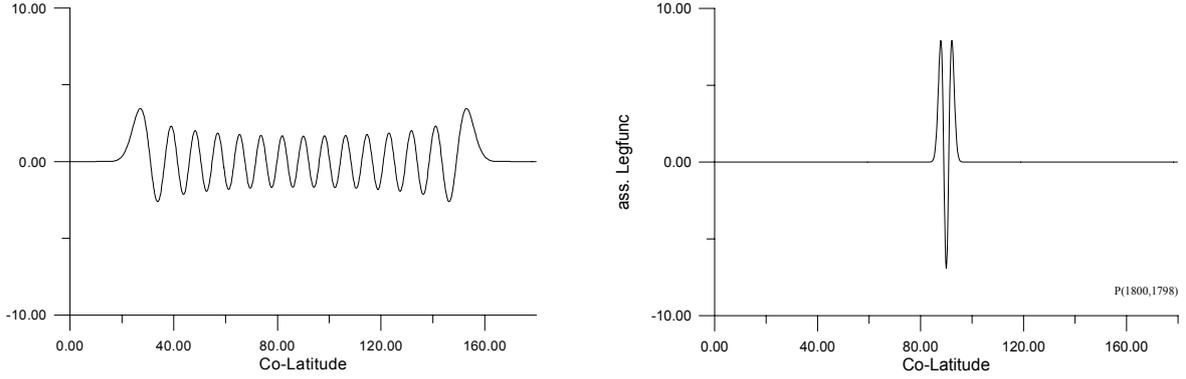


**Figuren 2.2-2.4:** Kugeloberflächenaufteilung mit Kugelflächenfunktionen

Die Symmetrieeigenschaften einer Kugel und die Beschreibung der Funktionen mit Kugelkoordinaten bedingen, dass die Kugeloberflächenaufteilung durch eine Funktion  $\bar{R}_{nm}(P)$  bzw.  $\bar{S}_{nm}(P)$  für ein spezielles  $n$  und  $m$  Kompartimente unterschiedlichster Größe hervorbringt. Das ist besonders dann von Bedeutung, wenn versucht wird, die durch Kugelfunktionskoeffizienten beschriebenen Felder in frequenzabhängige Anteile zu zerlegen bzw. frequenzabhängig zu filtern (Kapitel 3.8), da den jeweiligen Funktionen keine eindeutige Frequenz zuzuordnen ist. Das resultiert natürlich nicht aus dem längenabhängigen Faktor  $\sin m\lambda$  bzw.  $\cos m\lambda$  (sie besitzen immer äquidistante Nullstellen) sondern aus den zugeordneten Legendreschen Funktionen  $P_n(\cos \psi)$ .

In Figur 2.5 sind zwei Beispiele für zugeordnete Legendresche Funktionen dargestellt. Besonders interessant sind diese Funktionen für hohe Entwicklungsgrade, wegen der fehlenden Äquidistanz der Nullstellen. Bemerkenswert ist, dass sich das jeweils signifikante Signal nicht gleichmäßig auf den gesamten Definitionsbereich verteilt, sondern in weiten Teilen numerisch Null ist. Derartig beschriebener Felder alleine anhand von Entwicklungsgraden  $n$  zu filtern (wie es bei der Arbeit mit Gradvarianzen häufig getan wird) ist bei hohen Entwicklungsgraden wenig aussagekräftig. Das gilt insbesondere bei dem Versuch, durch geeignete Filterung auf die Ursachen der Felder zu schließen (Tiefenlage, Ausdehnung von Störkörpern als Ursache von Schwerefeldanomalien bestimmter „Frequenzen“, etc.).

Bei dem Versuch, „ultrahoch“ entwickelte Felder (bis zum Grad von  $n = 1800$ ; siehe z. B. [Wenzel, 1998])



**Figur 2.5:** Beispiele für Legendresche Funktionen  $P_{48,20}(\cos \vartheta)$  und  $P_{1800,1798}(\cos \vartheta)$

zu berechnen, stellt der Rechenaufwand unter Umständen eine Schwierigkeit dar. Da die zugeordneten Legendreschen Funktionen mindestens bei hohen Entwicklungsgraden in einem großen Bereich numerisch Null sein können, erwächst hieraus die Möglichkeit, sowohl bei der Analyse als auch bei der Synthese globaler Felder unnötigen Rechenaufwand einzusparen.

## 2.3 Zur Normalisierung von Kugelflächenfunktionen

Kugelflächenfunktionen sind nach (2.6) wie folgt definiert:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{nm}(\vartheta_{P,Q}, \lambda_{P,Q}) \\ S_{nm}(\vartheta_{P,Q}, \lambda_{P,Q}) \end{array} \right\} = P_{nm}(\cos \vartheta_{P,Q}) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_{P,Q} \\ \sin m\lambda_{P,Q} \end{array} \right\}$$

Die Normalisierungsvorschrift für Kugelflächenfunktionen lautet für den allgemeinen Fall  $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} R_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ S_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right\}^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda &= \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{nm}^2(\cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 m\lambda \\ \sin^2 m\lambda \end{array} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \\ &= \int_{\lambda=0}^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 m\lambda \\ \sin^2 m\lambda \end{array} \right\} d\lambda \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{nm}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\sin(2m\lambda) \\ \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\sin(2m\lambda) \end{array} \right\} \Big|_0^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{nm}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{nm}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

und für  $m=0$

$$\begin{aligned} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} R_{n0}(\vartheta, \lambda) \\ S_{n0}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right\}^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda &= \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{n0}^2(\cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 0\lambda \\ \sin^2 0\lambda \end{array} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \\ &= \int_{\lambda=0}^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\} d\lambda \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_n^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \\ 0 \end{array} \right\} \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_n^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

Für  $m = 0$  gilt also

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \{R_{n0}(\vartheta, \lambda)\}^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{n0}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

Zusammengefasst für alle  $m$  und unter Verwendung des Kronecker-Symbols  $\delta_{m0}$  folgt

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{c} R_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ S_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right\}^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = (1 + \delta_{m0}) \pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{nm}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

Die Integration über die Legendreschen Funktionen liefert

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{nm}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{nm}^2(\cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 m\lambda \\ \sin^2 m\lambda \end{array} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = 2\pi \frac{(1 + \delta_{m0})}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2\pi} \left( \frac{(2n+1)(n-m)!}{(1 + \delta_{m0})(n+m)!} \right) \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{nm}^2(\cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 m\lambda \\ \sin^2 m\lambda \end{array} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = 1$$

bzw.

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{2(2n+1)(n-m)!}{(1 + \delta_{m0})(n+m)!} \right) \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{nm}^2(\cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 m\lambda \\ \sin^2 m\lambda \end{array} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = 1$$

und man findet

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left( \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m)!}{(1 + \delta_{m0})(n+m)!}} P_{nm}(\cos \vartheta) \right)^2 \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 m\lambda \\ \sin^2 m\lambda \end{array} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = 1$$

Definiert man mit Hilfe obiger Formel die vollständig normalisierten zugeordneten Legendreschen Funktionen, ergibt sich

$$\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m)!}{(1 + \delta_{m0})(n+m)!}} P_{nm}(\cos \vartheta)$$

Es lässt sich vereinfachen:

$$\frac{2}{(1 + \delta_{m0})} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 2 & \text{für } m \neq 0 \end{cases} = (2 - \delta_{m0})$$

Damit definieren sich die vollständig normalisierten Legendreschen Funktionen abschließend zu

$$\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) = \sqrt{(2 - \delta_{m0})(2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \vartheta) \quad (2.18)$$

ohne dass es einer Unterscheidung für den Fall  $m=0$  bedarf. Diese ist realisiert durch das Kronecker-Symbol. Es gilt

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right\}^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}^2(\cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 m\lambda \\ \sin^2 m\lambda \end{array} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = 1$$

### 2.3.1 Zusammenfassung

Für die Integrale über die Quadrate der Kugelflächenfunktionen gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} R_{nm}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda &= \frac{4\pi}{(2n+1)} && \text{für } m = 0 \\ &= \frac{2\pi}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} && \text{für } m \neq 0 \end{aligned}$$

Für die Integrale über die Quadrate der zugeordneten Legendreschen Funktionen ergibt sich hingegen

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} P_{nm}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = \frac{2}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Hieraus folgen die Orthogonalitätsbeziehungen für die vollständig normalisierten Kugelflächenfunktionen

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right\}^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = 1$$

sowie die Gleichung für die Integration über das Quadrat der vollständig normalisierten zugeordneten Legendreschen Funktionen

$$\begin{aligned} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \sqrt{\frac{1}{(2-\delta_{m0})(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \right\}^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda &= \frac{2}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\ \frac{1}{(2-\delta_{m0})(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda &= \frac{2}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = 2(2-\delta_{m0}) \quad (2.19)$$

und für die Integration über  $\lambda$  findet man

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 m\lambda \\ \sin^2 m\lambda \end{array} \right\} d\lambda = \left\{ \begin{array}{l} (1+\delta_{m0}) \cdot \pi \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

folglich ist zusammengefasst

$$\begin{aligned} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right\}^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda &= \int_{\lambda=0}^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 m\lambda \\ \sin^2 m\lambda \end{array} \right\} d\lambda \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \\ &= (1+\delta_{m0}) \cdot \pi \cdot 2(2-\delta_{m0}) \\ &= 2\pi \cdot (1+\delta_{m0}) \cdot (2-\delta_{m0}) \\ &= 4\pi \end{aligned} \quad (2.21)$$

Damit erhalten wir für die oben explizit genannten Kugelflächenfunktionen jetzt aber in vollständig normalisierter Form

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_{P,Q}, \lambda_{P,Q}) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_{P,Q}, \lambda_{P,Q}) \end{array} \right\} = \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_{P,Q}) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_{P,Q} \\ \sin m\lambda_{P,Q} \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

mit den vollständig normalisierten zugeordneten Legendreschen Funktionen  $\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_{P,Q})$  aus (2.18).

## 2.4 Zur Entwicklung von Funktionen auf einer Kugeloberfläche

Jede auf einer Kugeloberfläche gegebene Funktion  $g(\vartheta_P, \lambda_P)$  kann in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickelt werden. Für diese Funktion gilt

$$g(\vartheta_P, \lambda_P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_n^m(Q) \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) + S_n^m(Q) \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \quad (2.23)$$

mit den vollständig normalisierten Kugelfunktionskoeffizienten

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n^m(Q) \\ S_n^m(Q) \end{array} \right\} = \frac{(1 - \delta_{m0})}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} g(\vartheta_P, \lambda_P) \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P \quad (2.24)$$

### 3 Kugelfunktionskoeffizienten

Gleichung (2.2) beschreibt die Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials eines Körpers auf bzw. außerhalb einer Kugel, die den Körper gerade völlig einschließt. Durch Umordnen und geeignetes Ausklammern erhält man

$$V(P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r_P} \right)^n \sum_{m=0}^n \left[ \bar{R}_{nm}(P) \left( \frac{1}{M_{\text{Körper}} a^n} \frac{1}{2n+1} \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) r_Q^{n+2} \bar{R}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q dr_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right) + \bar{S}_{nm}(P) \left( \frac{1}{M_{\text{Körper}} a^n} \frac{1}{2n+1} \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) r_Q^{n+2} \bar{S}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q dr_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right) \right] \right\} \quad (3.1)$$

mit:

- $a$  : Radius der Kugel außerhalb der die Reihenentwicklung konvergiert
- $GM_{\text{Körper}}$  : geozentrische Gravitationskonstante
- $M_{\text{Körper}}$  : Masse des Körpers

Betrachtet man den Summanden für  $n=0$  separat

$$\left\{ \begin{array}{c} C_0^0 \\ S_0^0 \end{array} \right\} = \frac{1}{M_{\text{Körper}}} \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} r_Q^2 \sin \vartheta_Q dr_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\}$$

und definiert die normalisierten Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationspotentials des Körpers

$$\left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\} = \frac{1}{M_{\text{Körper}} a^n} \frac{1}{2n+1} \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) r_Q^{n+2} \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}_{nm}(Q) \\ \bar{S}_{nm}(Q) \end{array} \right\} \sin \vartheta_Q dr_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \quad (3.2)$$

kann man die Reihenentwicklung für das Gravitationspotential eines Körpers auf bzw. außerhalb einer Kugel vom Radius  $a$  in folgender Form schreiben:

$$V(P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r_P} \right)^n \sum_{m=0}^n [C_n^m \bar{R}_{nm}(P) + S_n^m \bar{S}_{nm}(P)] \right\} \quad (3.3)$$

#### 3.1 Berechnung der Potentialkoeffizienten einer dreidimensionalen Modellerde

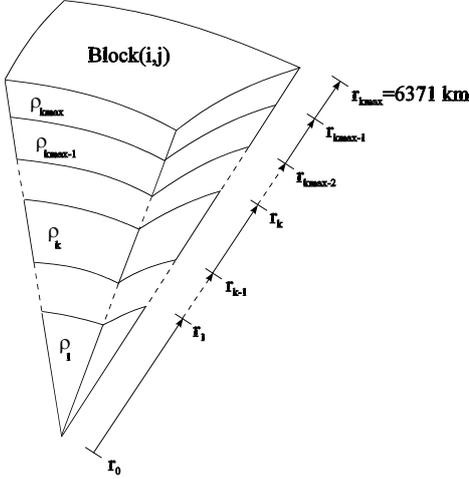
In expliziter Schreibweise lauten die vollständig normalisierten Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationspotentials eines Körpers mit den Kugelkoordinaten  $r_Q, \vartheta_Q, \lambda_Q$  der Quellpunkte  $Q$

$$\left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\} = \frac{1}{M_{\text{Körper}} a^n} \frac{1}{2n+1} \int \int \int_{\vartheta_Q \lambda_Q r_Q} \rho(r_Q, \vartheta_Q, \lambda_Q) r_Q^{n+2} \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}_{nm}(\vartheta_Q, \lambda_Q) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_Q, \lambda_Q) \end{array} \right\} \sin \vartheta_Q dr_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \quad (3.4)$$

Hiermit können die vollständig normalisierten Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationspotentials einer dreidimensionalen Modellerde berechnet werden. Gemäß (3.4) muss die Funktion  $\rho(r_Q, \vartheta_Q, \lambda_Q)$  entweder bekannt sein oder geeignet modelliert werden.

### 3.1.1 Die blockweise geschichtete Modellerde

Ausgehend von einem geeigneten radialsymmetrischen Erdmodell wird unter Einbeziehung einfacher Überlagerungen zu möglichen Abweichungen von einer sphärischen Geometrie eine blockweise geschichtete Modellerde entworfen.



Figur 3.1: Schematische Modellschichtung

Das gesamte Modell besteht aus  $I \cdot J$  Blöcken der Kantenlänge  $\Delta\vartheta_i \in [\vartheta_{i,min}, \vartheta_{i,max}]$  bzw.  $\Delta\lambda_i \in [\lambda_{j,min}, \lambda_{j,max}]$ . Jeder Block  $(i, j)$  besteht aus  $k_{max}$  Schichten der Mächtigkeit  $(r_k - r_{k-1})$  und jede Schicht  $k$  besitzt die radiusabhängigen Dichte  $\rho_k(r)$ .

Wenn in einem Block eine Schicht  $k$  nicht existiert (z. B. kontinentale Kruste im ozeanischen Bereich) dann ist innerhalb der Modellbildung für ihre Mächtigkeit Null zu setzen. In einem solchen Fall gilt also  $(r_k - r_{k-1}) = 0$  bzw.  $r_k = r_{k-1}$ , so dass jeder Block auch weiterhin eine Gesamtanzahl von  $k_{max}$  Schichten aufweist.

### 3.1.2 Die numerische Integration

Das Gravitationspotential einer derart geschichteten Modellerde berechnet sich aus der ungestörten Überlagerung aller Potentiale der einzelnen Blockschichten. Die Kugelfunktionskoeffizienten ergeben sich nach (3.4) wie folgt:

$$\left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\} = \frac{1}{M_{Erde} a^n} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \int_{\Delta\vartheta_i} \int_{\Delta\lambda_j} \int_r \rho(r, \vartheta, \lambda) r^{n+2} \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right\} \sin \vartheta dr d\vartheta d\lambda \quad (3.5)$$

Gemäß obiger Schichtung ist die Dichtefunktion pro Block unter dem Integral nicht mehr winkelabhängig, so dass die Integration in zwei separat berechenbare Teile zerfällt

$$\left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\} = \frac{1}{M_{Erde} a^n} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \int_r \rho(r, i, j) r^{n+2} dr \int_{\Delta\vartheta_i} \int_{\Delta\lambda_j} \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda$$

Die Integration über  $r$  kann für einen gegebenen Dichteverlauf für jeden  $k_{max}$ -fach geschichteten Block  $(i, j)$  berechnet werden.

$$\int_r \rho(r, i, j) r^{n+2} dr = \sum_{k=1}^{k_{max}} \int_{r=r_{k-1}}^{r_k} \rho_k(r, i, j) r^{n+2} dr$$

Für diese vom Entwicklungsgrad  $n$  und der Blocknummer  $(i, j)$  abhängige Funktion wird abkürzend  $d_n(i, j)$  geschrieben

$$\left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\} = \frac{1}{M_{Erde} a^n} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J d_n(i, j) \int_{\Delta\vartheta_i} \int_{\Delta\lambda_j} \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \quad (3.6)$$

Es verbleibt der winkelabhängige Teil der Integration

$$\left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\} = \frac{1}{M_{Erde} a^n} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J d_n(i, j) \int_{\Delta\lambda_j} \left\{ \begin{array}{c} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right\} d\lambda \int_{\Delta\vartheta_i} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

Die Integration über  $\Delta\lambda_j$  ergibt

$$\int_{\lambda=\lambda_{j,min}}^{\lambda_{j,max}} \left\{ \begin{array}{c} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{array} \right\} d\lambda = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{m} \sin(m\lambda) \Big|_{\lambda_{j,min}}^{\lambda_{j,max}} \\ -\frac{1}{m} \cos(m\lambda) \Big|_{\lambda_{j,min}}^{\lambda_{j,max}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{m} \sin(m\lambda_{j,max}) - \frac{1}{m} \sin(m\lambda_{j,min}) \\ -\frac{1}{m} \cos(m\lambda_{j,max}) + \frac{1}{m} \cos(m\lambda_{j,min}) \end{array} \right\}$$

und es folgt

$$\left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\} = \frac{1}{M_{Erde} a^n} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J d_n(i,j) \left\{ \begin{array}{c} \sin(m\lambda_{j,max}) - \sin(m\lambda_{j,min}) \\ -\cos(m\lambda_{j,max}) + \cos(m\lambda_{j,min}) \end{array} \right\} \int_{\Delta\vartheta_i} \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta \quad (3.7)$$

Zur Lösung des verbleibenden Integrals wird numerisch integriert (Simpson-Regel). Die zu integrierende Funktion wird durch Parabelbögen angenähert. Das Integrationsintervall wird in die gerade Anzahl  $l=Intsim$  von Teilintervallen der jeweils gleichen Größe  $((b-a)/l)$  geteilt. Somit existieren  $Intsim+1$  Stützstellen  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, x_l$  mit den entsprechenden Funktionswerten  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{l-1}, y_l$ . Für jeweils zwei benachbarte Teilintervalle wird zur Integration die Keplersche Fassregel verwendet. Durch Summation der Ergebnisse erhält man die Simpsonsche Regel [Bronstein und Semendjajew, 1979]

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{3 \cdot l} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{l-2} + 4y_{l-1} + y_l]$$

Übertragen auf die Lösung des Integrals über  $\Delta\vartheta_i$  ergibt sich

$$\int_{\vartheta=\vartheta_{i,min}}^{\vartheta_{i,max}} \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta \approx \frac{\Delta\vartheta_i}{3 \cdot Intsim} \left[ \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta_{i,min}) \sin\vartheta_{i,min} + \sum_{p=1}^{(Intsim-1),2} 4 \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta_p) \sin\vartheta_p + \sum_{p=2}^{(Intsim-2),2} 2 \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta_p) \sin\vartheta_p + \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta_{i,max}) \sin\vartheta_{i,max} \right] \quad (3.8)$$

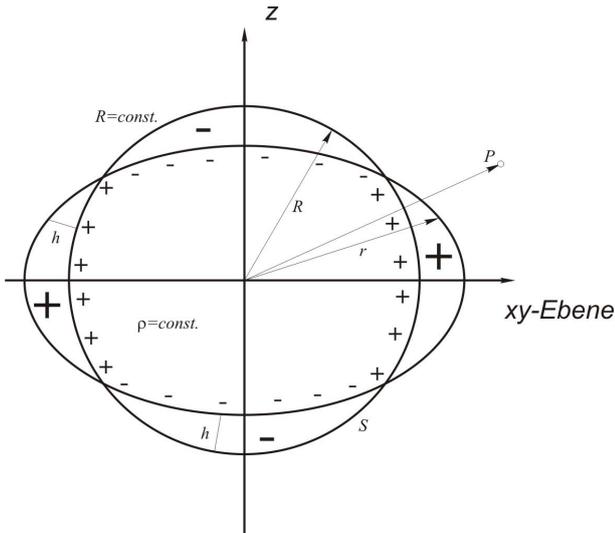
Die Summation erfolgt hier in den Intervallen  $p \in (1, Intsim-1)$  bzw.  $p \in (2, Intsim-2)$  jeweils mit der Schrittweite 2. Somit lassen sich die vollständig normalisierten Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationspotentials einer blockweise radialsymmetrisch geschichteten Modellerde wie folgt berechnen:

$$\left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\} = \frac{1}{M_{Körper} a^n} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J d_n(i,j) \left\{ \begin{array}{c} \sin(m\lambda_{j,max}) - \sin(m\lambda_{j,min}) \\ -\cos(m\lambda_{j,max}) + \cos(m\lambda_{j,min}) \end{array} \right\} \frac{\Delta\vartheta_i}{3 \cdot Intsim} \cdot \left[ \begin{array}{c} \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta_{i,min}) \sin\vartheta_{i,min} + \sum_{p=1}^{(Intsim-1),2} 4 \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta_p) \sin\vartheta_p \\ + \sum_{p=2}^{(Intsim-2),2} 2 \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta_p) \sin\vartheta_p + \bar{P}_{nm}(\cos\vartheta_{i,max}) \sin\vartheta_{i,max} \end{array} \right] \quad (3.9)$$

Die Schichtung der direkten Art der Modellierung kann je nach Quelle der geologischen, geophysikalischen oder geodätischen Informationen beliebig angepasst werden. Die Grenzen der Methode liegen im Detaillierungsgrad des Modells (Wissen um den Verlauf der radialsymmetrischen Dichtefunktion, Wahl der Blockgrößen  $\Delta\vartheta_i$  und  $\Delta\lambda_j$ ) und in der Qualität der numerischen Integration durch Wahl des Parameters für  $Intsim$ .

### 3.2 Berechnung des Potentialfeldes eines ellipsoidischen Modellkörpers mit Flächenbelegungen

Das Außenraumpotential eines ellipsoidischen Modellkörpers kann auch mittels Flächenbelegungen berechnet werden. Hierbei wird ausgenutzt, dass das Gravitationspotential der Erde durch das Potential einer Punktmasse (mit der Masse der Erde) und Abweichungen davon beschrieben werden kann. Die Abweichung des realen Potentials vom Potential der Punktmasse wurde schon in (3.3) dargestellt. Da wir es bei der Erde mit einem durch seine Rotation leicht abgeplatteten Körper zu tun haben, stellt sich die Situation geometrisch wie folgt dar.



**Figur 3.2:** Ellipsoidische Flächenbelegung

Das in  $P$  durch ein homogenes Ellipsoid verursachte Potential lässt sich als Summe des Potentials einer Kugel vom Radius  $r$  (hier des mittleren Radius des Ellipsoids  $R$ ) und dem durch die überschüssigen bzw. fehlenden Massen verursachten Potential (+, bzw. -) bestimmen, folglich durch

$$V(P) = V_{KugelR}(P) + \nu(P) \quad (3.10)$$

Das Potential einer Kugel ist leicht zu bestimmen. Das „korrigierende“ Potential der überschüssigen bzw. fehlenden Massen ergibt sich aus dem Potential von Massenbelegungen, die sich mit einer Flächenbelegung  $\mu$  wie folgt beschreiben lassen:

$$\mu = \rho \cdot h := \text{Flächenbelegungsichte}$$

$$\rho = \text{Dichte der homogenen Kugel}$$

$$h = \text{geometrischer Abstand Kugel - Ellipsoid}$$

Denkt man sich nun diese überschüssigen bzw. fehlenden Massen auf die Kugel vom Radius  $R$  gelegt, kann man mit der Flächenbelegungsichte das „korrigierende“ Potential näherungsweise berechnen

$$\nu = G \iint_S \frac{\mu}{l} ds = G\rho \iint_S \frac{h}{l} ds$$

Mit dem Oberflächenelement  $ds = R^2 \cdot d\sigma$  ergibt sich für das Störpotential  $\nu$

$$\nu(P) = G\rho R^2 \iint_{\sigma} \frac{h}{l} d\sigma \quad (3.11)$$

Dieses Störpotential kann im Fall der Erde verschiedene Ursachen haben. Es lässt sich aber jeweils genauso berechnen. Allgemein kann dann die Abweichung eines Modellpotentials von dem Potential einer idealisierten Erdfigur (Kugel, Ellipsoid) mit einer idealisierten Dichteschichtung (radialsymmetrisch) durch eine Summe von Flächenbelegungen dargestellt werden, in die lediglich die Flächenbelegungsichten und deren Gewichtung (Höhe  $h$  als Abweichung von der Idealfigur) eingehen.

### 3.3 Überlegungen zum mittleren Radius einer Ellipse

Zur Anwendung von (3.11) benötigt man für den Fall, dass die Idealfigur des Modells ein zweiachsiges Ellipsoid ist, die Angabe des mittleren Radius  $R$ . Dieser mittlere Radius kann exakt bestimmt werden.

Das Bildungsgesetz einer Ellipse lautet allgemein

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit:} \quad \begin{array}{l} a := \text{große Halbachse} \\ b := \text{kleine Halbachse} \end{array}$$

Hieraus folgt

$$y^2 = b^2 - \frac{x^2}{a^2} b^2$$

Für den Ortsvektor eines Punktes  $P$  auf einer Ellipse folgt

$$r_P^2 = x_P^2 + y_P^2 = x_P^2 + b^2 - \frac{x_P^2}{a^2} b^2$$

Unter Verwendung des geometrischen Zusammenhangs

$$x_P = r_P \sin \vartheta_P$$

$$y_P = r_P \cos \vartheta_P$$

folgt für die exakte Länge des Ortsvektors  $\vec{r}_P$  in Abhängigkeit der Breiteninformation  $\vartheta_P$

$$\begin{aligned} r_P^2 &= r_P^2 \sin^2 \vartheta_P + b^2 - r_P^2 \sin^2 \vartheta_P \frac{b^2}{a^2} \\ r_P^2 \left( 1 - \sin^2 \vartheta_P + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \vartheta_P \right) &= b^2 \\ r_P &= \frac{b}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_P + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \vartheta_P}} = \frac{b}{\sqrt{\cos^2 \vartheta_P + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \vartheta_P}} \end{aligned}$$

Den mittleren Radius  $R$  kann man nun unterschiedlich definieren:

1. **Rein geometrisch** durch Integration, als Mittelwert über alle Radien  $r$  auf der Oberfläche

$$R = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} r \cdot d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} r(\vartheta, \lambda) \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta d\lambda = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{b \sin \vartheta}{\sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin^2 \vartheta}} \, d\vartheta d\lambda \quad (3.12)$$

Mit der Abkürzung  $d^2 = (1 - \frac{b^2}{a^2})$  folgt

$$R = \frac{1}{4\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \frac{b \sin \vartheta}{\sqrt{1 - d^2 \sin^2 \vartheta}} \, d\vartheta d\lambda = \frac{b}{4\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \lambda \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - d^2 \sin^2 \vartheta}} \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} = \frac{b}{2} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - d^2 \sin^2 \vartheta}} \, d\vartheta$$

Es gilt [Bronstein und Semendjajew, 1979]

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \, d\vartheta = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \quad \text{für } |k| < 1$$

Hiermit erhält man unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften des Ellipsoids

$$R = \frac{b}{2} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - d^2 \sin^2 \vartheta}} \, d\vartheta = 2 \frac{b}{2} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - d^2 \sin^2 \vartheta}} \, d\vartheta = \frac{b}{2d} \ln \frac{1+d}{1-d}$$

Für die bei der Erde gegebenen Verhältnisse (WGS 84)

$$\begin{aligned} b &= 6356752.314 \text{ m} \\ f &= 1/298.257 \\ a &= 6378137.000 \text{ m} \end{aligned}$$

ergibt sich ein mittlerer Erdradius von

$$\mathbf{R = 6370994.402 \text{ m}}$$

2. **Durch die Forderung nach Volumengleichheit** (Ansatz: überschüssige bzw. fehlende Volumina heben sich auf – gleichbedeutend mit Massengleichheit unter der Annahme  $\rho = \text{const.}$ )

$$V_{ell} = \frac{4}{3} \pi a^2 b \equiv \frac{4}{3} \pi R^3 = V_{Kugel}, \text{ woraus folgt, dass } R = \sqrt[3]{a^2 b} \text{ ist}$$

Für die Verhältnisse bei der Erde (siehe 1.) ergibt sich ein mittlerer Radius von

$$\mathbf{R = 6371000.789 \text{ m}}$$

3. **Durch Entwicklung von  $r$  in eine binomische Reihe nach Potenzen von  $f$**  (geometrische Abplattung). Ausgehend von

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin^2 \vartheta}} = \frac{a(1-f)}{\sqrt{1 - (2f - f^2) \sin^2 \vartheta}}$$

erhält man die Reihenentwicklung

$$r = a(1 - f) \left[ 1 + \left( f - \frac{1}{2}f^2 \right) \sin^2 \vartheta + \frac{3}{2}f^2 \sin^4 \vartheta + \dots \right]$$

die sich in der allgemeinen Form als konvergierende Reihe folgendermaßen schreiben lässt:

$$r = a \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty, 2} \varepsilon_n P_n(\cos \vartheta) \right)$$

Ausmultiplizieren, einfaches Umformen und Abbruch nach 0 ( $f^2$ ) ergibt

$$r = a \left( 1 - f \cos^2 \vartheta - \frac{3}{8}f^2 \sin^2 2\vartheta \right) \quad (3.13)$$

Die Näherung 1. Ordnung unter Vernachlässigung des Ausdrucks für  $f^2$  führt zu

$$r = a(1 - f \cos^2 \vartheta) \quad (3.14)$$

Mit der Legendreschen Funktion  $P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}$  findet man für  $r$  in 1. Näherung

$$r = a \left( 1 - \frac{1}{3}f - \frac{2}{3}f P_2(\cos \vartheta) \right)$$

Damit ergibt sich der mittlere Radius  $R$  durch Integration zu

$$R = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} r \cdot d\sigma = a \left( 1 - \frac{1}{3}f \right)$$

Mit den Werten für die Erde (siehe 1.) ergibt sich hier ein mittlerer Erdradius von

$$\mathbf{R = 6371008.771 \text{ m}}$$

Für die folgenden Potentialbetrachtungen wird als mittlerer Radius der Radius gewählt, den man aus der Forderung nach Volumengleichheit (siehe 2.) errechnet hat, um u.a. keine modellbedingten Fehler der Gesamtmasse des Systems zu verursachen. In der Regel reicht es aus, von einem auf Meter gerundeten mittleren Radius von  $R=6371000.000$  m auszugehen, da dieser für die Integration über den mittleren Radius ausreichend genau ist.

Alle in dieser Arbeit vorgestellten Potentialberechnungen für ellipsoidische Massenverteilungen ergeben sich durch Integration über die Länge des Ortsvektors  $\vec{r}_P$ . Er wird zumeist durch Reihenentwicklungen nach den Legendreschen Polynomen beschrieben. Die Genauigkeit für den Betrag des Ortsvektors  $\vec{r}_P$  wird durch das Abbruchkriterium spürbar beeinflusst.

Der geometrische Ort eines Punktes auf einem Ellipsoid  $r(\vartheta)$  lässt sich bei bekannter großer Halbachse  $a$  bzw. mittlerem Radius  $R$  in 1. Näherung mittels

$$r(\vartheta) = a \left( 1 - \frac{1}{3}f - \frac{2}{3}f P_2(\cos \vartheta) \right) \quad (3.15)$$

$$r(\vartheta) = R \left( 1 - \frac{2}{3}f P_2(\cos \vartheta) \right) \quad (3.16)$$

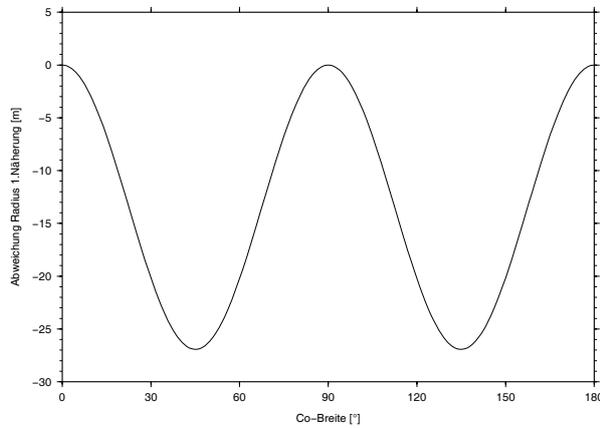
und in 2. Näherung mittels

$$r(\vartheta) = a \left( \left( 1 - \frac{1}{3}f - \frac{1}{5}f^2 \right) - \left( \frac{2}{3}f + \frac{1}{7}f^2 \right) P_2(\cos \vartheta) + \frac{12}{35}f^2 P_4(\cos \vartheta) \right) \quad (3.17)$$

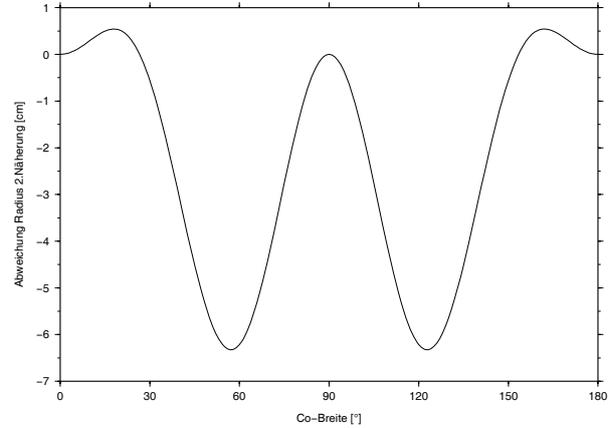
$$r(\vartheta) = R \left( 1 - \frac{2}{3} \left( f + \frac{23}{42}f^2 \right) P_2(\cos \vartheta) + \frac{12}{35}f^2 P_4(\cos \vartheta) \right) \quad (3.18)$$

berechnen.

Für die 1. bzw. 2. Näherung ergeben sich maximale Abweichungen von dem exakten Ort  $r$  am Ellipsoid wie in Figur 3.3 dargestellt.



**Figur 3.3:** Abweichung exakter Ort  $r$  von Ort in 1. Näherung: max 26.900 m



**Figur 3.4:** Abweichung exakter Ort  $r$  von Ort in 2. Näherung: max 0.063 m

Die Länge des Ortsvektors beschrieben in 2. Näherung weicht nur um maximal 0.063 m vom exakten Ort am Ellipsoid ab, die in 1. Näherung beschriebene Länge hingegen um bis zu 26.900 m.

### 3.4 Berechnung des Potentialfeldes einer isostatisch ausgeglichenen Erde mittels Flächenbelegungen

Isostatischer Massenausgleich bedeutet, dass überschüssige Massen an der Oberfläche durch Massendefizite in der Tiefe  $h_a$  (Ausgleichstiefe) kompensiert werden. Die jeweils überunterschüssigen bzw. fehlenden Massen können als Flächenbelegung  $\kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q)$  dargestellt werden, die an der Oberfläche aus topographischen/bathymetrischen Daten berechenbar ist. Sie findet ihr negatives Massenäquivalent in der Tiefe  $h_a$  unter dem Bezugsniveau. Ziel ist die Berechnung des Potentials einer isostatisch ausgeglichenen Modellerde. Dieses wird dargestellt durch Summation der Potentiale von zwei Flächenbelegungen  $\kappa_1(\vartheta_Q, \lambda_Q)$  und  $\kappa_2(\vartheta_Q, \lambda_Q)$

$$\begin{aligned} \kappa_1(\vartheta_Q, \lambda_Q) &= \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \text{ an der Stelle } r_{Q1} = R, \text{ sowie} \\ \kappa_2(\vartheta_Q, \lambda_Q) &= -\kappa_1(\vartheta_Q, \lambda_Q) = -\kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \text{ an der Stelle } r_{Q2} = (R - h_a). \end{aligned}$$

Hierin bedeuten

$$\begin{aligned} R &= \text{mittlerer Radius (hier mittlerer Erdradius } r = 6371.000 \text{ km)} \\ h_a &= \text{isostatische Ausgleichstiefe} \end{aligned}$$

Das Gravitationspotential einer einzelnen Flächenbelegung  $\kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q)$  ergibt sich zu

$$\nu(P) = G \iint_{\sigma} \frac{\kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q)}{\ell_{PQ}} d\sigma \quad \text{mit } \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) = \text{Flächendichte [kg/m}^2\text{]} \quad (3.19)$$

Mit der Entwicklung des reziproken Abstandes in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen (2.5) und (2.8) ergibt sich für das Potential einer Flächenbelegung

$$\nu(P) = G \iint_{\sigma} \left\{ \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{r_Q^n}{r_P^{n+1}} \sum_{m=0}^n \{ \bar{R}_{nm}(P) \bar{R}_{nm}(Q) + \bar{S}_{nm}(P) \bar{S}_{nm}(Q) \} \right\} d\sigma \quad (3.20)$$

Umsortieren nach quell- und aufpunktabhängigen Termen sowie Vertauschen von Summation und Integration führt zu

$$\nu(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G}{2n+1} \frac{r_Q^n}{r_P^{n+1}} \left\{ \sum_{m=0}^n \left[ \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{R}_{nm}(Q) d\sigma \right] \bar{R}_{nm}(P) + \sum_{m=0}^n \left[ \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{S}_{nm}(Q) d\sigma \right] \bar{S}_{nm}(P) \right\} \quad (3.21)$$

Das Potential einer durch zwei Flächenbelegungen dargestellten isostatisch ausgeglichenen Modellerde berechnet sich durch Summation der Integrale über die massenbelegten Oberflächen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$

$$\nu(P) = G \iint_{\sigma_1} \frac{\kappa_1(\vartheta_Q, \lambda_Q)}{\ell_{PQ_1}} d\sigma_1 + G \iint_{\sigma_2} \frac{\kappa_2(\vartheta_Q, \lambda_Q)}{\ell_{PQ_2}} d\sigma_2 \quad (3.22)$$

mit den jeweiligen Radien  $r_{Q1} = R$  bzw.  $r_{Q2} = (R - h_a)$  (siehe oben). Man erhält mit (3.21)

$$\nu(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G}{2n+1} \left\{ \frac{r_{Q1}^n}{r_P^{n+1}} \left\{ \sum_{m=0}^n \left[ \iint_{\sigma_1} \kappa_1(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{R}_{nm}(Q) d\sigma_1 \right] \bar{R}_{nm}(P) + \sum_{m=0}^n \left[ \iint_{\sigma_1} \kappa_1(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{S}_{nm}(Q) d\sigma_1 \right] \bar{S}_{nm}(P) \right\} + \frac{r_{Q2}^n}{r_P^{n+1}} \left\{ \sum_{m=0}^n \left[ \iint_{\sigma_2} \kappa_2(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{R}_{nm}(Q) d\sigma_2 \right] \bar{R}_{nm}(P) + \sum_{m=0}^n \left[ \iint_{\sigma_2} \kappa_2(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{S}_{nm}(Q) d\sigma_2 \right] \bar{S}_{nm}(P) \right\} \right\} \quad (3.23)$$

Mit  $\kappa_1(\vartheta_Q, \lambda_Q) = -\kappa_2(\vartheta_Q, \lambda_Q) = \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q)$  ergibt sich nach Umsortieren

$$\nu(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G}{2n+1} \left\{ \left( \frac{R^n}{r_P^{n+1}} R^2 - \frac{(R-h_a)^n}{r_P^{n+1}} (R-h_a)^2 \right) \sum_{m=0}^n \left[ \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{R}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \bar{R}_{nm}(P) + \left( \frac{R^n}{r_P^{n+1}} R^2 - \frac{(R-h_a)^n}{r_P^{n+1}} (R-h_a)^2 \right) \sum_{m=0}^n \left[ \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{S}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \bar{S}_{nm}(P) \right\} \quad (3.24)$$

Mit der Abkürzung

$$i_n(h_a) = \left( \frac{R^n}{r_P^{n+1}} R^2 - \frac{(R-h_a)^n}{r_P^{n+1}} (R-h_a)^2 \right) = \left( \frac{R^n}{r_P^{n+1}} \right) \left( R^2 - \frac{(R-h_a)^{n+2}}{R^n} \right)$$

erhält man

$$\nu(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G}{2n+1} \left\{ i_n(h_a) \sum_{m=0}^n \left[ \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{R}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \bar{R}_{nm}(P) + i_n(h_a) \sum_{m=0}^n \left[ \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{S}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \bar{S}_{nm}(P) \right\} \quad (3.25)$$

Um (3.25) mit (3.1) bzw. (3.2) vergleichbar zu machen, wird umgeformt. Hier gilt  $M_{\text{Körper}} = M_{\text{Erde}}$  und  $a = R$ , da es sich um eine Modellierung für eine kugelförmige Erde vom Radius  $R$  handelt.

$$\nu(P) = \frac{GM_{\text{Erde}}}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{R}{r_P} \right)^n \sum_{m=0}^n \left[ \left( \frac{r_P}{R} \right)^n \frac{r_P i_n(h_a)}{(2n+1)M_{\text{Erde}}} \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{R}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \bar{R}_{nm}(P) + \sum_{m=0}^n \left[ \left( \frac{r_P}{R} \right)^n \frac{r_P i_n(h_a)}{(2n+1)M_{\text{Erde}}} \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{S}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \bar{S}_{nm}(P) \right\}$$

Für den Faktor vor den Integralen ergibt sich durch Zusammenfassen und Kürzen:

$$\left(\frac{r_P}{R}\right)^n \frac{r_P i_n(h_a)}{(2n+1)M_{Erde}} = \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n+1)}$$

Die Darstellung des Potentials der Flächenbelegungen nimmt folgende Gestalt an:

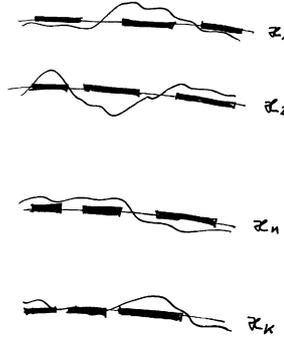
$$\begin{aligned} \nu(P) = \frac{GM_{Erde}}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{R}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n+1)} \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{R}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \bar{R}_{nm}(P) \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^n \left[ \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n+1)} \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{S}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \bar{S}_{nm}(P) \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Damit ergeben sich die vollständig normalisierten dimensionslosen Kugelfunktionskoeffizienten  $a_n^m, b_n^m$  des Gravitationspotentials des isostatischen Flächenbelegungsmodells zu

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n^m \\ b_n^m \end{array} \right\} = \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n+1)} \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(Q) \\ \bar{S}_{nm}(Q) \end{array} \right\} \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \quad (3.27)$$

### 3.5 Berechnung des Potentialfeldes einer Modellerde mit mehreren Flächenbelegungen

Das Potentialfeld einer nicht radialsymmetrisch geschichteten Modellerde mit undulierenden Diskontinuitäten kann auch dargestellt werden durch eine Anzahl  $s$  von einzelnen Flächenbelegungen  $\kappa_s$ .



**Figur 3.5:** System mehrerer Flächenbelegungen

Für das Potential einer Flächenbelegung  $s$  an der Stelle  $r_{Q_s}$  gilt nach (3.19)

$$\nu_s(P) = G \iint_{\sigma_s} \frac{\kappa_s(\vartheta_Q, \lambda_Q)}{\ell_{PQ_s}} d\sigma_s \quad \text{mit} \quad \kappa_s(\vartheta_Q, \lambda_Q) = \text{Flächenbelegungsichte [kg/m}^2\text{]}$$

Somit ergibt sich das Potential einer aus mehreren Flächenbelegungen bestehenden Modellerde durch Summation der  $s$  Potentiale der einzelnen Flächenbelegungen

$$\nu(P) = G \sum_{s=1}^{s_{\max}} \nu_s(P) = G \sum_{s=1}^{s_{\max}} \iint_{\sigma_s} \frac{\kappa_s(\vartheta_Q, \lambda_Q)}{\ell_{PQ_s}} d\sigma_s$$

Für das Potential einer Flächenbelegung  $s$  gilt (3.20). Das Gesamtpotential erhält man durch Summation über die Einzelpotentiale. Mit den Umformungen aus 3.4 und wiederum  $M_{Körper} = M_{Erde}$  sowie  $a = R$  folgt das

Gesamtpotential

$$\begin{aligned} \nu(P) = \frac{GM_{Erde}}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P}\right)^n \left\{ \sum_{m=0}^n \frac{1}{(2n+1)M_{Erde}a^n} \sum_{s=1}^{s_{\max}} \left( R_s^{n+2} \left[ \iint_{\sigma_s} \kappa_s(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{R}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \right) \bar{R}_{nm}(P) \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^n \frac{1}{(2n+1)M_{Erde}a^n} \sum_{s=1}^{s_{\max}} \left( R_s^{n+2} \left[ \iint_{\sigma_s} \kappa_s(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{S}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \right) \bar{S}_{nm}(P) \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die das Gesamtsystem beschreibenden vollständig normalisierten Kugelfunktionskoeffizienten ergeben sich ebenfalls durch Summation über die Koeffizienten der einzelnen Flächenbelegungen

$$\left\{ \begin{matrix} a_n^m \\ b_n^m \end{matrix} \right\} = \sum_{s=1}^{s_{\max}} \left\{ \begin{matrix} a_{n,s}^m \\ b_{n,s}^m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(2n+1)M_{Erde}a^n} \sum_{s=1}^{s_{\max}} R_s^{n+2} \iint_{\sigma_s} \kappa_s(\vartheta_Q, \lambda_Q) \left\{ \begin{matrix} \bar{R}_{nm}(Q) \\ \bar{S}_{nm}(Q) \end{matrix} \right\} \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \quad (3.29)$$

Für den Fall, dass die Modellerde aus einer Anzahl  $t$  von Flächendipolbelegungen besteht, dass also für jeweils zwei Flächenbelegungen die Beziehung

$$\kappa_{s_1}(\vartheta_Q, \lambda_Q) = -\kappa_{s_2}(\vartheta_Q, \lambda_Q) = \kappa_t(\vartheta_Q, \lambda_Q)$$

gilt, berechnen sich die Kugelfunktionskoeffizienten wie folgt:

$$\left\{ \begin{matrix} a_n^m \\ b_n^m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(2n+1)M_{Erde}a^n} \sum_{t=1}^{t_{\max}} (R_t^{n+2} - (R_t - h_t)^{n+2}) \iint_{\sigma_t} \kappa_t(\vartheta_Q, \lambda_Q) \left\{ \begin{matrix} \bar{R}_{nm}(Q) \\ \bar{S}_{nm}(Q) \end{matrix} \right\} \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \quad (3.30)$$

mit der jeweiligen Ausgleichstiefe  $h_t$ , dem Abstand zwischen positiver und negativer Belegung der Flächendipole  $t$ .

### 3.6 Interpretation der Kugelfunktionskoeffizienten eines Gravitationsfeldes durch Vergleich mit modellierten Kugelfunktionskoeffizienten

Alle Potentialfelder können durch einen Satz von Kugelfunktionskoeffizienten beschrieben werden. Um die unterschiedlichen Felder vergleichen zu können, müssen aus den Kugelfunktionskoeffizientensätzen interpretierbare Größen berechnet werden. Entweder man berechnet aus den Koeffizienten Schwerefeldparameter, d.h. vergleicht im Ortsbereich, oder man versucht eine Interpretation der Koeffizienten im Frequenzbereich selbst.

#### 3.6.1 Vergleich im Ortsbereich

Alle Schwerefeldparameter werden aus einem Störpotential  $T$  abgeleitet, welches die Abweichung des jeweiligen Potentialfeldes  $W$  von einem Normalschwerefeld  $U$  beschreibt.

$$\begin{aligned} T = W - U \quad & W \quad \dots \text{Schwerepotential des Modells/der Erde} \\ & = V \text{ (berechnetes/wahres Gravitationspotential) } + \phi \text{ (Zentrifugalpotential)} \\ & U \quad \dots \text{Normalschwerepotential/Referenzpotential} \\ & = U_0 \text{ (normales Gravitationspotential) } + \phi \text{ (Zentrifugalpotential)} \end{aligned}$$

Ausgehend von der Reihenentwicklung des Gravitationspotentials eines Körpers (3.3) wird das Störpotential  $T$  durch Differenzbildung berechnet

$$\begin{aligned} T(P) &= W(P) - U(P) = \text{Modellpotential}(P) - \text{Referenzpotential}(P) \\ &= V(P) - \phi(P) - (U_0(P) - \phi(P)) \\ &= V(P) - U_0(P) \end{aligned}$$

Es ergibt sich zu

$$T(P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n [(C_n^{m, \text{Modell}} - C_n^{m, \text{Referenz}}) \bar{R}_{nm}(P) + (S_n^{m, \text{Modell}} - S_n^{m, \text{Referenz}}) \bar{S}_{nm}(P)] \quad (3.31)$$

Die Summation beginnt erst bei  $n = 2$ , da alle Koeffizienten vom Grad  $n = 1$  die Position des Modellschwerpunktes relativ zum Entwicklungspunkt beschreiben und davon ausgegangen wird, dass alle Entwicklungen relativ zum Schwerpunkt durchgeführt werden (siehe 3.7). Dies bedeutet, dass alle Koeffizienten vom Grad  $n = 1$  sowohl für das Modell, als auch für die Referenz identisch Null sind. Zudem wird davon ausgegangen, dass die Gesamtmassen von Modell und Referenz identisch sind und den Wert  $M_{\text{Körper}}$  haben.

Man erhält mit Abkürzungen  $\Delta C_n^m$  und  $\Delta S_n^m$  für die Differenz der Kugelfunktionskoeffizienten das Störpotential

$$T(P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n [\Delta C_n^m \bar{R}_{nm}(P) + \Delta S_n^m \bar{S}_{nm}(P)] \quad (3.32)$$

Dieses Störpotential beschreibt den Unterschied zwischen zwei Kugelfunktionsentwicklungen von Potentialfeldern, und ist somit geeignet zum Vergleich zweier beliebiger Entwicklungen und nicht nur für den Vergleich mit einem Normal- oder Referenzschwerefeld. Für das Störpotential  $T$  bzw. die Gravitationspotentialdifferenz  $\Delta V$  ergibt sich

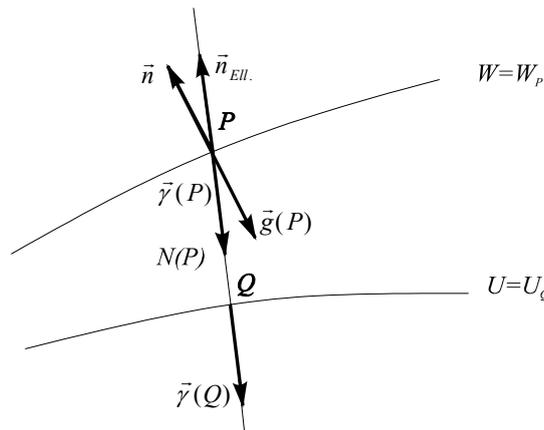
$$\begin{aligned} \Delta V(P) &= \text{Modellpotential}_I(P) - \text{Modellpotential}_{II}(P) \\ &= W_I(P) - U_I(P) - (W_{II}(P) - U_{II}(P)) \end{aligned}$$

Es folgt:

$$V(P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n [(C_n^{m, \text{Modell}_I} - C_n^{m, \text{Modell}_{II}}) \bar{R}_{nm}(P) + (S_n^{m, \text{Modell}_I} - S_n^{m, \text{Modell}_{II}}) \bar{S}_{nm}(P)] \quad (3.33)$$

Hierbei ist zu beachten, dass beide Kugelfunktionskoeffizientensätze um den selben Punkt herum entwickelt wurden (siehe Kapitel 3.7). Die so definierte Differenz von Kugelfunktionskoeffizienten beschreibt ein residuales Gravitationspotential, welches durch die Gebrauchswerte **Geoidundulation**, **Schwerestörung** und **Lotabweichungskomponenten** geeignet dargestellt werden kann. Diese Werte berechnen sich als Funktionale eines Störpotentials.

### Geoidundulation



**Figur 3.6:** Potentialflächen und Schwererektoren

Das Normalpotential  $U(P)$  wird gemäß Figur 3.6 durch eine Taylorreihe entlang der Ellipsoidnormalen  $\vec{n}_{Ell.}$  (also in Richtung der ellipsoidischen Höhe  $h$ ) ermittelt.

$$U(P) = U(Q) + \left(\frac{\partial U}{\partial h}\right)_Q N(P) + \dots$$

Man bricht die Reihenentwicklung nach dem linearen Term ab. Die Änderung des Normalpotentials  $U$  in Richtung der Ellipsoidnormale  $\vec{n}_{Ell.}$  wird Normalschwere  $\gamma$  genannt. Berücksichtigt man dies in Form von

$$\left(\frac{\partial U}{\partial h}\right)_Q = -\gamma(Q)$$

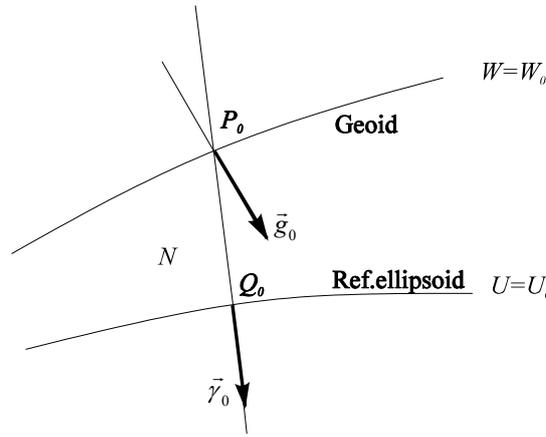
ergibt sich mit  $U(P) = W(P) - T(P)$

$$W(P) - T(P) = U(Q) + \gamma(Q)N(P) \quad \text{bzw.} \quad N(P) = \frac{T(P) - (W(P) - U(Q))}{\gamma(Q)}$$

eine Möglichkeit zur Bestimmung der geometrischen Größe  $N(P)$ . Sie beschreibt den Abstand zwischen einer Potentialflächen einer Potentialfläche des Normalschwerfeldes  $U$  und einer Potentialfläche des tatsächlichen oder Modellpotentialfeldes  $W$ , deren Werte gleich sind. Gemessen wird diese Länge entlang der Ellipsoidnormalen. Mit der Zuordnung  $W(P)=U(Q)$  erhält man das Theorem von Bruns

$$N(P) = \frac{T(P)}{\gamma(Q)} \quad (3.34)$$

Verwendet man das Geoid als eines der Potentialfelder, bekommt obige Skizze folgendes Aussehen.



**Figur 3.7:** Potentialflächen - Situation am Geoid

Mit der Zuordnung  $W_0 = U_0$  erhält man den Abstand des Geoids zum Referenzellipsoid, also die Geoidundulationen  $N$ .

$$N = \text{Geoidundulation} = \frac{T(P_0)}{|\vec{\gamma}_0|}$$

$\vec{\gamma}_0$  bedeutet die breitenabhängige Normalschwere am Referenzellipsoid, welche über eine Taylorreihenentwicklung für die ellipsoidische Höhe  $h = 0$  berechnet wird. Für die ellipsoidische Höhe  $h$  des Punktes  $P_0$  wird ebenfalls der Wert 0 gewählt, so dass alle Berechnungen direkt am Ellipsoid durchgeführt werden.

Es ergibt sich die Kugelfunktionsentwicklung zur Berechnung der Geoidundulation

$$N(P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{\gamma_0 r_P} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n [\Delta C_n^m \bar{R}_{nm}(P) + \Delta S_n^m \bar{S}_{nm}(P)] \quad (3.35)$$

### Weitere Funktionale des Störpotentials

Die ortsabhängige Schwerestörung  $\delta\vec{g}$  sowie die Lotabweichungskomponenten  $\xi(P)$  und  $\eta(P)$  lassen sich ebenfalls als Funktionale des Störpotentials bestimmen. Die allgemeine Formulierung dieser Funktionale lautet [Zenner, 2006]

$$F(P) = K_F \sum_{n=0}^{\infty} K_n \sum_{m=0}^n [\Delta C_n^m K_P K_C + \Delta S_n^m K_P K_S]$$

mit

$F(P)$	$K_F$	$K_n$	$K_P$	$K_C$	$K_S$
$T(P)$	$\frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P}$	$\left(\frac{a}{r_P}\right)^n$	$\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P)$	$\cos m\lambda$	$\sin m\lambda$
$N(P)$	$\frac{GM_{\text{Körper}}}{\gamma_0 r_P}$	$\left(\frac{a}{r_P}\right)^n$	$\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P)$	$\cos m\lambda$	$\sin m\lambda$
$\delta\vec{g} = -\frac{dT}{dr}$	$\frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P^2}$	$(n+1)\left(\frac{a}{r_P}\right)^n$	$\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P)$	$\cos m\lambda$	$\sin m\lambda$
$\xi(P)$	$-\frac{GM_{\text{Körper}}}{a\gamma_0 r_P}$	$\left(\frac{a}{r_P}\right)^n$	$\frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P)}{\partial \vartheta_P}$	$\cos m\lambda$	$\sin m\lambda$
$\eta(P)$	$-\frac{GM_{\text{Körper}}}{ar_P \gamma_0 \sin \vartheta_P}$	$\left(\frac{a}{r_P}\right)^n$	$\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P)$	$-m \sin m\lambda$	$m \cos m\lambda$

Tabelle 3.1: Funktionale des Störpotentials

### 3.6.2 Vergleich im Frequenzbereich

Verschiedene Sätze von Kugelfunktionskoeffizienten kann man direkt miteinander vergleichen. Das kommt einer Interpretation im Frequenzbereich gleich.

#### Gradvarianz

Die Gradvarianzen (auch Amplitudenspektrum genannt) eines Satzes von Kugelfunktionskoeffizienten sind wie folgt definiert:

$$G(n) = \sum_{m=2}^{n_{\max}} ((C_n^m)^2 + (S_n^m)^2) \quad (3.36)$$

Um die Gradvarianzen für den Vergleich von zwei Koeffizientensätzen  $I$  und  $II$  verwenden zu können, wird die Differenz der jeweiligen Koeffizienten gebildet.

$$G(n) = \sum_{m=2}^{n_{\max}} ((C_n^{m,I} - C_n^{m,II})^2 + (S_n^{m,I} - S_n^{m,II})^2) \quad (3.37)$$

#### Gradkorrelationskoeffizient

Der Gradkorrelationskoeffizient  $GK(n)$  vergleicht zwei Sätze von Kugelfunktionskoeffizienten direkt miteinander. Es wird für jeden Grad ein Korrelationskoeffizient

$$GK(n) = \frac{\sum_{m=0}^n (C_n^{m,I} \cdot C_n^{m,II} + S_n^{m,I} \cdot S_n^{m,II})}{\sqrt{\sum_{m=0}^n ((C_n^{m,I})^2 + (S_n^{m,I})^2)} \sqrt{\sum_{m=0}^n ((C_n^{m,II})^2 + (S_n^{m,II})^2)}} = \frac{\sum_{m=0}^n (C_n^{m,I} \cdot C_n^{m,II} + S_n^{m,I} \cdot S_n^{m,II})}{\sqrt{G^I(n) \cdot G^{II}(n)}} \quad (3.38)$$

berechnet, bzw. der prozentuale Fehler zweier Koeffizientensätze nach [Rapp, 1981] ermittelt.

$$\%E(n) = \frac{\sqrt{\sum_{m=0}^n ((\Delta C_n^m)^2 + (\Delta S_n^m)^2)}}{\sqrt{\sum_{m=0}^n ((C_n^m)^2 + (S_n^m)^2)}} * 100$$

## 3.7 Die Entwicklung um den Schwerpunkt der Modelle

Wie in Kapitel 3.6 erwähnt, ist es erforderlich, dass alle Koeffizientensätze, die verglichen werden sollen, den gleichen Entwicklungspunkt besitzen. Sinnvollerweise entscheidet man sich für den in den Koordinatenursprung geschobenen Schwerpunkt des jeweiligen Modells. Da alle Modelle, für die Kugelfunktionskoeffizienten berechnet werden, relativ zum geometrischen Ursprung eines Koordinatensystems beschrieben werden, liegt deren

Schwerpunkt in der Regel nicht im Entwicklungspunkt. Es muss, um eine Vergleichbarkeit unterschiedlicher Entwicklungen zu gewährleisten, zunächst die Lage des Schwerpunktes relativ zum gewählten Entwicklungspunkt ermittelt und in einem zweiten Entwicklungsschritt um diesen Schwerpunkt herum entwickelt. Diese Vorgehensweise ist interpretierbar als Verschiebung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Modells.

Die Lage des Modellschwerpunktes lässt sich eindeutig aus den Kugelfunktionskoeffizienten vom Grad  $n = 1$  in einer ersten Entwicklung berechnen. Aus der allgemeinen Beziehung (3.2)

$$\left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\} = \frac{1}{M_{\text{Körper}} a^n} \frac{1}{2n+1} \iiint_{\text{Körper}} \rho(Q) r_Q^{n+2} \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}_{nm}(Q) \\ \bar{S}_{nm}(Q) \end{array} \right\} \sin \vartheta_Q dr_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q$$

folgt für die 3 Koeffizienten vom Grad  $n = 1$  mit Transformation zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} C_1^0 &= \frac{1}{M_{\text{Körper}} a} \frac{\sqrt{3}}{3} \iiint_{\text{Körper}} r_Q \cos \vartheta_Q \rho(Q) r_Q^2 \sin \vartheta_Q dr_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \\ &= \frac{1}{M_{\text{Körper}} a} \frac{1}{\sqrt{3}} \iiint_{\text{Körper}} z_Q \rho(Q) dV(Q) = \frac{1}{M_{\text{Körper}} a} \frac{1}{\sqrt{3}} \iiint_{\text{Körper}} z_Q dm_Q \\ C_1^1 &= \frac{1}{M_{\text{Körper}} a} \frac{1}{\sqrt{3}} \iiint_{\text{Körper}} x_Q dm_Q \\ S_1^1 &= \frac{1}{M_{\text{Körper}} a} \frac{1}{\sqrt{3}} \iiint_{\text{Körper}} y_Q dm_Q \end{aligned}$$

Hieraus kann man die Koordinaten des Modellschwerpunktes relativ zum Entwicklungspunkt ableiten

$$\left( \begin{array}{c} x_{\text{Schwerpkt.}} \\ y_{\text{Schwerpkt.}} \\ z_{\text{Schwerpkt.}} \end{array} \right) = \frac{1}{M_{\text{Körper}}} \iiint_{\text{Körper}} \left( \begin{array}{c} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{array} \right) dm_Q = \sqrt{3} a \left( \begin{array}{c} C_1^1 \\ S_1^1 \\ C_1^0 \end{array} \right) \quad (3.39)$$

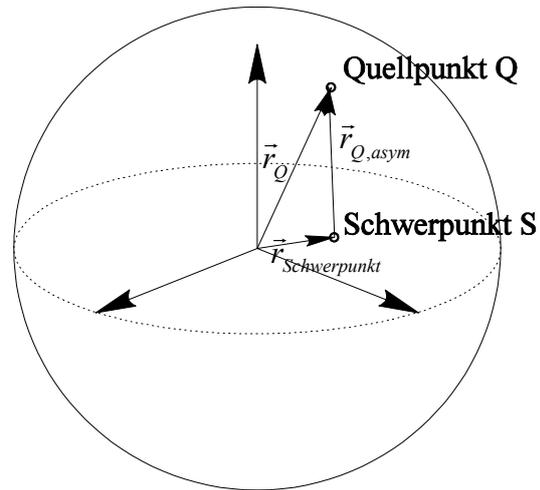
Für die Berechnung von vergleichbaren Kugelfunktionskoeffizientensätzen wurde zunächst die Lage des Schwerpunktes relativ zum Entwicklungspunkt durch Berechnung der Koeffizienten nach (3.39) ermittelt. Hieraus ergeben sich durch eine einfache Vektorbeziehung die korrigierten Kugelkoordinaten aller Quellpunkte  $Q$  mit

$$\vec{r}_{Q,asym} = \vec{r}_Q - \vec{r}_{\text{Schwerpunkt}}$$

zu

$$r_Q = |\vec{r}_{Q,asym}|$$

für eine erneute Entwicklung, die jetzt aber um den in den Schwerpunkt verlagerten geometrischen Ursprung des Koordinatensystems herum erfolgt.



**Figur 3.8:** Lage des Massenmittelpunktes relativ zum Entwicklungspunkt

Die Kugelfunktionskoeffizienten können mit geänderten Kugelkoordinaten neu berechnet werden. Ähnlich verhält es sich für die Kugelfunktionskoeffizienten von Flächenbelegungen. Ausgehend von ihrer allgemeinen Definition (3.29)

$$\left\{ \begin{array}{c} a_n^m \\ b_n^m \end{array} \right\} = \sum_{s=1}^{s_{\max}} \left\{ \begin{array}{c} a_{n,s}^m \\ b_{n,s}^m \end{array} \right\} = \frac{1}{(2n+1) M_{\text{Erde}} a^n} \sum_{s=1}^{s_{\max}} R_s^{n+2} \iint_{\sigma_s} \kappa_s(\vartheta_Q, \lambda_Q) \left\{ \begin{array}{c} \bar{R}_{nm}(Q) \\ \bar{S}_{nm}(Q) \end{array} \right\} \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q$$

berechnen sich die Schwerpunktkoordinaten einer einzelnen Flächenbelegung  $s$  wie folgt:

$$a_{1,s}^0 = \frac{\sqrt{3}}{3M_{Erde}a} \iint_{\sigma_s} R_s \cos(\vartheta_Q) \kappa_s(\vartheta_Q, \lambda_Q) R_s^2 \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q = \frac{1}{\sqrt{3}M_{Erde}a} \iint_{\sigma_s} z_s dm_s$$

$$z_{Schwerpkt.s} = \frac{\sqrt{3} a M_{Erde} a_{1,s}^0}{M_s} = \frac{1}{M_s} \iint_{\sigma_s} z_s dm_s$$

und ebenso

$$x_{Schwerpkt.s} = \frac{\sqrt{3} a M_{Erde} a_{1,s}^1}{M_s} = \frac{1}{M_s} \iint_{\sigma_s} x_s dm_s$$

$$y_{Schwerpkt.s} = \frac{\sqrt{3} a M_{Erde} b_{1,s}^1}{M_s} = \frac{1}{M_s} \iint_{\sigma_s} y_s dm_s$$

Für den Schwerpunkt des Gesamtsystems, bestehend aus  $s$  Flächenbelegungen, gilt selbstverständlich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{Schwerpkt.} \\ y_{Schwerpkt.} \\ z_{Schwerpkt.} \end{pmatrix} &= \frac{1}{s_{\max}} \sum_{s=1}^{s_{\max}} \begin{pmatrix} x_{Schwerpkt.s} \\ y_{Schwerpkt.s} \\ z_{Schwerpkt.s} \end{pmatrix} = \frac{1}{s_{\max}} \sum_{s=1}^{s_{\max}} \frac{1}{M_s} \iint_{\sigma_s} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} dm_s \\ &= \frac{\sqrt{3} a M_{Erde}}{s_{\max}} \sum_{s=1}^{s_{\max}} \frac{1}{M_s} \begin{pmatrix} a_{1,s}^1 \\ b_{1,s}^1 \\ a_{1,s}^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned} a_{0,s}^0 &= \frac{1}{M_{Erde}} \iint_{\sigma_s} \kappa_s(\vartheta_Q, \lambda_Q) R_s^2 \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \\ &= \frac{1}{M_{Erde}} \iint_{\sigma_s} \kappa_s(\vartheta_Q, \lambda_Q) d\sigma_s = \frac{1}{M_{Erde}} \iint_{\sigma_s} dm_s = \frac{1}{M_{Erde}} M_s \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_{Schwerpkt.} \\ y_{Schwerpkt.} \\ z_{Schwerpkt.} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3} a}{s_{\max}} \sum_{s=1}^{s_{\max}} \frac{1}{a_{0,s}^0} \begin{pmatrix} a_{1,s}^1 \\ b_{1,s}^1 \\ a_{1,s}^0 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Für den Fall der Modellbildung ausschließlich mit Flächendipolbelegungen bedeutet dies, dass die jeweilige Gesamtmasse  $M_s$  identisch Null sein muss und somit in (3.40) durch Null dividiert wird. Insofern macht die Berechnung des Schwerpunktes ausschließlich mit Flächendipolbelegungen keinen Sinn. Da für Flächendipolbelegungen der Schwerpunkt immer geometrischer Mittelpunkt ist, entfällt diese Überlegung sowieso.

### 3.8 Zur Problematik der Filterung von kugelfunktionsentwickelten Feldern

Ziel der Interpretation des Erdschwerefeldes ist die Erklärung der Ursachen für das Feld. Es sollen die einzelnen, das Schwerefeld erzeugenden, Dichteverteilungen im Erdkörper aufgespürt und rekonstruiert werden. Es wird versucht, das Feld in seine Frequenzanteile zu zerlegen und den jeweiligen Anteilen dann eine Quellpunkttiefe [Krokowski, 1997] zuzuordnen. Für den Fall einer eindimensional verteilten Funktion (z. B. einer beliebigen Zeitreihe) lässt sich dies mit den Methoden der Frequenzanalyse (z. B. Fouriertransformation) zumeist recht gut durchführen. Es gilt vereinfachend, dass Strukturen, die sich weit vom Aufpunkt entfernt befinden, eher ein langwelliges Signal ausprägen, Strukturen, die sich in der Nähe des Aufpunktes befinden, hingegen ein hochfrequentes und damit kurzwelliges Signal erzeugen.

Bei den hier zu interpretierenden zweidimensional verteilten Strukturen (Potentiale auf der Kugeloberfläche) gelingt eine Frequenzanalyse im klassischen Sinne nicht, da die durchführbare Reihenentwicklung nach Kugelflächenfunktionen eine Entwicklung nach Funktionen ist, deren Frequenzinhalt nicht eindeutig bestimmt werden

kann (siehe Kapitel 2.2 - nicht äquidistante Nullstellen, Funktionswerte nicht gleichmäßig über den gesamten Definitionsbereich verteilt). Die enthaltene Information ist nicht ohne weiteres für die Interpretation hinsichtlich Dichteanomalien zugänglich.

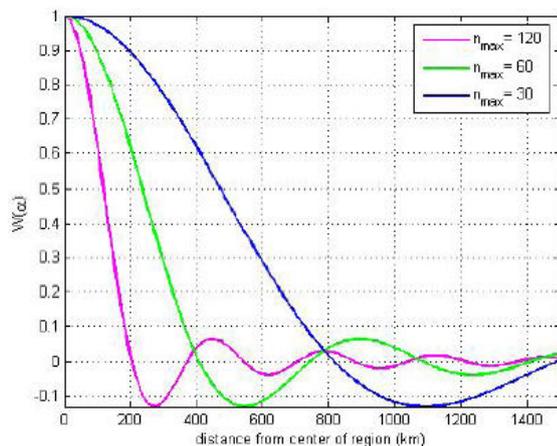
Zumeist wird eine Feldfilterung in Abhängigkeit vom Entwicklungsgrad  $n$  vorgeschlagen (idealer Tiefpass) und durchgeführt. Aus den genannten Gründen ist diese Methode, besonders bei bis zu hohen Graden entwickelten Feldern und dem Versuch oberflächennahe Strukturen zu filtern nur bedingt geeignet, um verlässliche Aussagen zu erhalten.

Der ideale Tiefpassfilter wichtet alle Frequenzen im spektralen Bereich gleich. Das Spektrum wird bei  $n \geq n_{\max}$  „abgeschnitten“. Im Spektralbereich entspricht das (z. B. im Fall von Geoidundulationen) einer Multiplikation mit dem spektralen Gewichtskoeffizienten  $W_n$

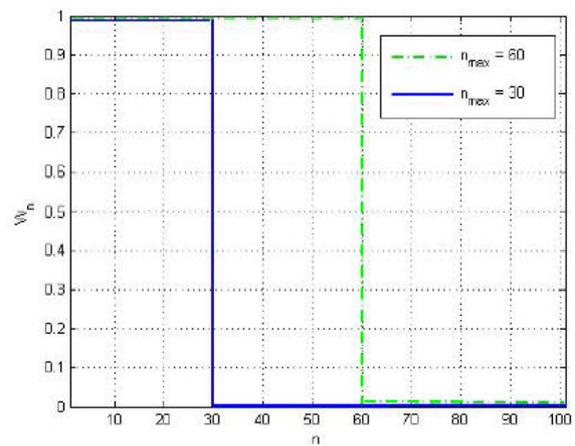
$$W_n = \int_{\alpha=0}^{\alpha_0} W(\alpha) P_n(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq n_{\max} \\ 0 & n_{\max} \leq n \leq N \end{cases}$$

Die Geoidundulationen berechnen sich mit dem Gewichtskoeffizienten zu

$$N(P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{\gamma_0 r_P} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n W_n [\Delta C_n^m \bar{R}_{nm}(P) + \Delta S_n^m \bar{S}_{nm}(P)]$$



(a) Gewichtungsfunktion  $W(\alpha)$



(b) Spektrale Gewichtskoeffizienten  $W_n$

**Figur 3.9:** Idealer Tiefpass-Filter  $n_{\max}$  im Orts- und Spektralbereich [Zenner, 2006]

Figur 3.9 zeigt die zum spektralen Gewichtskoeffizienten  $W_n$  gehörende Gewichtungsfunktion  $W(\alpha)$  im Ortsbereich.

Sie zeigt unerwünschte Nebenmaxima, was bei der Berechnung (z. B. von Geoidundulationen) den Effekt hat, dass zum einen Geoidundulationen in der Nähe des Aufpunktes  $P$  positiv oder negativ gewichtet werden können, zum anderen werden weiter vom Berechnungspunkt  $P$  entfernte Punkte höher gewichtet, als näher gelegene.

Aus diesen Gründen wird bei der Interpretation der Modellfelder weitestgehend auf eine Filterung verzichtet und, wenn möglich, immer das ganze ungefilterte Feld betrachtet, um keine unerwünschten Nebeneffekte zu haben.

## 4 Hydrostasie

Die hier zugrunde liegende Idee der Entwicklung eines physikalisch sinnvollen Dichtemodells der Erde basiert auf den Erdmodellen von [Dziewonski und Anderson, 1981] (PREM) und [Wziontek, 2004] (WZIO).

Es wird vorausgesetzt, dass es möglich ist, ein Dichtereferenzfeld zu entwickeln, welches die wesentlichen Eigenschaften der Erde abbildet und zudem einfach zu beschreiben ist.

Wie die Auswertung der theoretischen Ansätze zeigt, kann man in einem ersten Schritt mit folgenden sehr einfachen Annahmen arbeiten.

- Es existiert hydrostatisch-isostatischer Ausgleich in allen Erdschichten.
- Das Ausgangsmodell beschreibt eine radialsymmetrische Schichtung mit einem Dichteverlauf nach [Wziontek, 2004].
- Die rotierende und geschichtete Erde ist in allen Tiefen hydrostatisch abgeplattet.
- Die Abplattung ist eine linear verlaufende Funktion der Tiefe.
- Als Randwert an der Oberfläche wird die geometrische Abplattung des Referenzellipsoids angesetzt, da seine Oberfläche gleichzeitig Äquipotentialfläche ist.
- Die abgeplatteten Rotationskörper sind 2-achsige Ellipsoide. Die Abweichungen von den „exakten“ potentialtheoretischen Niveausphäroiden werden zunächst vernachlässigt.
- Zur Modellanpassung werden zunächst der globale Abplattungsgradient und der mittlere Radius der Kern-Mantel-Grenze verwendet, später auch der Gradient der Darwin-Abweichung.
- Das zu entwickelnde Gesamtmodell kann durch folgende Werte vollständig angegeben werden: Die Koeffizienten eines radialsymmetrischen Dichteverlaufs, den Gradienten der tiefenabhängigen Abplattung, den Gradienten des geometrischen Abstandes von Rotationsellipsoid und Niveausphäroid, sowie den mittleren Radius der Kern-Mantel-Grenze. Alternativ kann das Modell auch durch einen Satz von Kugelfunktionskoeffizienten dargestellt werden.

Ausgehend von der historischen Entwicklung der Auseinandersetzung mit Gleichgewichtsfiguren rotierender kugelähnlicher Körper wurden mehrere Ideen entwickelt, um diese Gleichgewichtsfiguren zu beschreiben. Die Zusammenfassung der historischen Entwicklung folgt im Wesentlichen [Moritz, 1990]. Man findet diese aber auch bereits in [Routh, 1892]. Die wohl ausführlichste Herleitung und mathematische Beschreibung unterschiedlicher ellipsoidischer Gleichgewichtsfiguren bietet [Chandrasekhar, 1969] an.

### 4.1 Die hydrostatisch ausgeglichene Modellerde

#### 4.1.1 Homogene und rotierende Körper

Die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit der Theorie des gravitativen Gleichgewichts homogener und rotierender Massen begann mit Newtons Untersuchungen zur Figur der Erde (Principia, Book III Propositions XVIII-XX). Newton zeigte, dass sich der Einfluss einer langsamen Drehung auf die Figur der Erde in einer geringen Abplattung zeigen müsste. Darüber hinaus postulierte Newton, dass sich die stabile Gleichgewichtsfigur dieses Körpers durch eine einfache Proportionalität zwischen dem Effekt der Rotation, beschrieben durch die Elliptizität  $\varepsilon$ ,

$$\varepsilon = \frac{\text{Äquatorradius} - \text{Polradius}}{\text{mittlerer Radius}}$$

und ihrer Ursache, beschrieben durch

$$m = \frac{\text{Zentrifugalbeschleunigung am Äquator}}{\text{mittlere Gravitation an der Oberfläche}} = \frac{\omega^2 R_{Erde}}{GM_{Erde}/R_{Erde}^2} = \frac{\omega^2 R_{Erde}^3}{GM_{Erde}} \quad (4.1)$$

erklären lassen müsste.

Hieraus konnte Newton für einen homogenen Körper die einfache Beziehung

$$\varepsilon = \frac{5}{4}m$$

ableiten.

Newton nahm an, dass sich zwei Flüssigkeitssäulen gleichen Durchmessers, die am Äquator bzw. am Pol von der Erdoberfläche bis zum Erdmittelpunkt verlaufen, im Gleichgewicht befinden. Dies erklärte er damit, dass beide Säulen das gleiche Gewicht besitzen müssten. Am Äquator ist die Schwerebeschleunigung  $g_{\text{Äqu}}$  jedoch durch die Zentrifugalbeschleunigung abgeschwächt. Dieser Abschwächungsfaktor  $m$  beeinflusst das Gewicht der Flüssigkeitssäule  $M_{\text{Flüss.säule}}$  am Äquator in der Form

$$M_{\text{Flüss.säule}} = \frac{1}{2} \text{Äquatorradius } g_{\text{Äqu}} (1 - m)$$

Hieraus und aus bekannten Schwerewerten am Pol und am Äquator konnte Newton eine Elliptizität von

$$\varepsilon = \frac{5}{4}m = \frac{5}{4} \frac{1}{290} \cong \frac{1}{230}$$

ableiten. Die heute bekannte Elliptizität, aus den Parametern des WGS84

$$\varepsilon = \frac{\text{Äquatorradius} - \text{Polradius}}{\text{mittlerer Radius}} = \frac{6378.137\text{km} - 6356.752\text{km}}{6371.000\text{km}} = \frac{1}{297.919}$$

weicht hiervon wesentlich ab und muss damit erklärt werden, dass die Erde kein homogener Körper ist.

Der nächste Entwicklungsschritt gelang Maclaurin, der 1742 die Ergebnisse Newtons auf einen Fall verallgemeinerte, in dem die Elliptizität nicht mehr als klein angenommen werden muss. Maclaurin ging von einem Zusammenhang zwischen der Schwere am Pol, der Schwere am Äquator, der Dichte  $\rho$  des Körpers und seiner Geometrie (gegeben durch den Äquatorradius  $a$  und der Exzentrizität  $e$ ) der Form

$$g_{\text{Äqu}} = 2\pi G\rho a \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \left( \frac{1}{\sin e} - e\sqrt{1-e^2} \right)$$

$$g_{\text{Pol}} = 4\pi G\rho a \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \left( e - \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sin e} \right)$$

aus [Chandrasekhar, 1969]. Stellt man nach Newton nun einen Zusammenhang zwischen diesen Schwerebeschleunigungen und der Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  der Erde her, kann man schreiben:

$$g_{\text{Äqu}} - a\omega^2 = g_{\text{Pol}}\sqrt{1-e^2}$$

bzw.

$$\omega^2 = \frac{1}{a} \left( g_{\text{Äqu}} - g_{\text{Pol}}\sqrt{1-e^2} \right)$$

Durch Einsetzen der Werte für die jeweilige Schwerebeschleunigung erhält man die Formel von Maclaurin

$$\frac{\omega^2}{\pi G\rho} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \frac{2(3-2e^2)}{\sin e} - \frac{6}{e^2} (1-e^2) \quad (4.2)$$

Dies zeigt zwar nicht, dass ein schnell rotierender Körper zwangsläufig die Figur eines abgeplatteten Sphäroids annehmen wird, aber es kann abgeleitet werden, dass

- die resultierende Kraft aus Gravitation des Sphäroids (reine nicht dynamische Massenkraft) und der äußeren Kraft (hier die dynamische Zentrifugalkraft) immer senkrecht zur Oberfläche des Sphäroids wirkt.

- sich Flüssigkeitssäulen, wie oben beschrieben, im Gleichgewicht befinden, also das gleiche Gewicht haben.
- jedes Sphäroidpartikel in alle Raumrichtungen gleichmäßig belastet wird, d.h. die Resultierende aus allen wirkenden Kräften Null ist. Dies bedeutet aber auch, dass sich alle Partikel in einem ausgeglichenen Zustand befinden.

Dies sollte für lange Zeit die zentrale Beschreibung des Zustandes von rotierenden homogenen Gleichgewichtsfiguren bleiben und bildete die Grundlage für die Theorie eines hydrostatischen Gleichgewichts.

Letztlich lässt sich aus der Formulierung Maclaurins ableiten, dass es für ein stabiles Gleichgewicht rotierender Körper nur zwei Lösungen geben kann. Simpson bemerkte 1743, dass es das bemerkenswerte Ergebnis der Arbeit von Maclaurin ist, dass es für Körper, die mit einer Winkelgeschwindigkeit unterhalb eines bestimmten Grenzwertes rotieren, nur 2 stabile „Oblaten“ geben kann; einen Gleichgewichtskörper, der nur geringfügig von der reinen Kugelgestalt abweicht (deshalb Sphäroid genannt) und einen, der sehr stark abgeplattet ist.

Jacobi stellte 1834 fest, dass es falsch ist anzunehmen, dass nur 2-achsige Systeme mögliche Gleichgewichtsfiguren sein können. Er konnte zeigen, dass es möglich ist, auch dem Äquatorschnitt eines um seine polare Achse rotierenden Körpers eine elliptische Form zu geben und daraus dann die Länge der dritten Achse, sowie die Winkelgeschwindigkeit derart zu bestimmen, dass die Oberfläche dieses nunmehr 3-achsigen Ellipsoids ebenfalls eine Gleichgewichtsfigur ist.

Jacobis Definition einer 3-achsigen Gleichgewichtsfigur und die von Maclaurin vorgestellte Lösung sind für den Fall, dass  $e = 0,81267$  ist, gleichzeitig erfüllt.

Damit ergibt sich für den Maclaurin-Parameter genannten Wert aus (4.2)

$$\frac{\omega^2}{\pi G \rho} = 0.3742$$

Da der maximale Wert für ein Maclaurin-Sphäroid im Gleichgewicht

$$\frac{\omega^2}{\pi G \rho} = 0.4493$$

ist, können nun folgende Möglichkeiten zur Ausbildung von Rotationsfiguren im Gleichgewicht (RiG) unterschieden werden:

$\frac{\omega^2}{\pi G \rho}$	$< 0.3742 <$	$\frac{\omega^2}{\pi G \rho}$	$< 0.4493 <$	$\frac{\omega^2}{\pi G \rho}$
<b>3 RiG:</b>		<b>2 RiG:</b>		<b>keine RiG</b>
1 Jacobi + 2 Maclaurin		2 Maclaurin		—

**Tabelle 4.1:** Mögliche Rotationsfiguren in Abhängigkeit der Rotationsgeschwindigkeit

Im Falle der Erde lässt sich aus der Definition des Maclaurin-Parameters die maximale Winkelgeschwindigkeit berechnen, bei der derartige Gleichgewichtsfiguren noch möglich sind. Es ergibt sich

$$\frac{\omega^2}{\pi G \rho} < 0.4493 \Rightarrow \omega < \sqrt{0.4493 \cdot \pi G \rho} = 7.206936842 \cdot 10^{-4} \frac{rad}{sec}$$

Damit liegt die maximal mögliche Rotationsgeschwindigkeit um den Faktor 10 oberhalb der Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Im Fall der Erde kann also davon ausgegangen werden, wenn man sie in 1. Näherung als homogen ansehen würde, dass sich die Maclaurin'sche Gleichgewichtsfigur einstellen kann. Aber auch die Jacobi'sche Gleichgewichtsfigur, ein 3-achsiges Ellipsoid, wäre denkbar.

Die zentrale Frage, die zu einer Weiterentwicklung führte, war die Frage danach, unter welchen Bedingungen eine Konfiguration möglich ist, die in jedem Zustand eine ellipsoidische Form hat und in welcher alle wirkenden Kräfte lineare Funktionen der Geometrie sind. Die hieraus entstandenen Dedekind-Ellipsoide stellen eine weitere mögliche Gruppe von Gleichgewichtsfiguren eines homogenen und rotierenden Körpers dar.

Riemann hat zusammengefasst, was aus den Überlegungen Dedekinds (und Dirichlets) folgte: Ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren sind unter den folgenden Umständen möglich:

- Bei gleichförmiger Bewegung des Körpers ohne innere Dynamik, entstehen ellipsoidische Gleichgewichtskörper nach Maclaurin und Jacobi.
- Bei gleichförmiger Rotation und innerer Bewegung, jedoch nur in einer mit den Hauptachsen des Ellipsoids korrelierten Bewegung, gelangt man zu Ellipsoiden, bei denen das Verhältnis von innerer zu äußerer Bewegungsrate konstant bleibt (Jacobi- und Dedekind-Ellipsoide als Spezialfälle der allgemeinen Riemann-Ellipsoide).
- Bei gleichförmiger Rotation und innerer Bewegung, jedoch nur wenn beide Bewegungen in den Hauptebenen des Ellipsoids liegen, was zu einer neuen Gruppe allgemeiner 3-achsiger Riemann-Ellipsoide führt.

Poincaré trieb 1885 eine mehr oder weniger Aufsehen erregende Entwicklung voran, in der er feststellte, dass sich aus der Gruppe der Jacobi-Ellipsoide unter bestimmten Voraussetzungen eine weitere Gruppe von Gleichgewichtsfiguren ableiten lässt, die eine wesentliche neue Eigenschaft besitzt. Diese Gruppe von Gleichgewichtsfiguren hat eine birnenförmige Gestalt und stellt somit kein klassisches Ellipsoid mehr dar. Dies ist gleichbedeutend damit, dass es ein Jacobi-Ellipsoid gibt, das durch harmonische Funktionen dritten Grades beschrieben werden kann. Poincaré mutmaßte, dass dies direkt auch aus der Beschreibung des Gleichgewichts eines Systems, bestehend aus einem rotierenden Planeten und einem Trabanten, folgen müsste. Dies veranlasste ihn weiterhin zu vermuten, dass es Gleichgewichtsfiguren geben müsste, die, beschrieben durch harmonische Funktionen höherer Ordnung (4, 5, 6 etc.), in solchen Fällen auftreten, in denen die rotierenden Körper von mehreren Trabanten an unterschiedlichen Positionen begleitet werden.

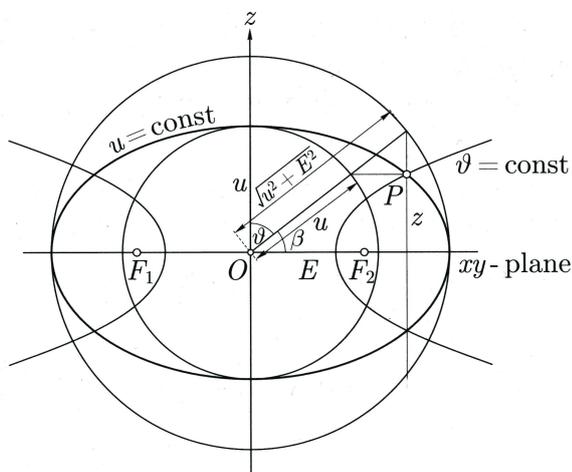
Mit diesen Aussagen wurde eine langjährige Diskussion angestoßen, die sich z. B. auch auf die Theorie zur Existenz von Doppelsternen ausweitete, so dass die grundlegenden Fragen nach der Stabilität der Maclaurin- und Jacobi-Ellipsoide [Roberts und Stewartson, 1963] lange unbeantwortet blieb. Erst Cartan konnte 1929 zeigen, dass die Jacobi-Ellipsoide oberhalb eines bestimmten Wertes für den Maclaurin-Parameter instabil werden, die Maclaurin-Ellipsoide hingegen nicht.

#### 4.1.2 Das Konzept des geodätischen Normalpotentials und das homogene Ellipsoid

Das geodätische Normalpotential ist geometrisch definiert und erfordert lediglich die Festlegung eines konstanten Potentials  $U_0$  auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoides. Die im Außenraum gesuchte Funktion für das Potential dieses Normalschwerefeldes ist durch folgende Angaben vollständig beschrieben:

- Die geometrische Figur eines Rotationsellipsoides (durch Angabe von  $a$  und  $b$ ) bzw.  $E$ .
- Die Gesamtmasse des Körpers  $M$ .
- Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , mit der er rotiert.

Zur Beschreibung des Potentialfeldes können ellipsoidisch-harmonische Koordinaten  $u, \beta, \lambda$  verwendet werden:



Die kartesischen Koordinaten eines Punktes beschrieben mit ellipsoidisch-harmonischen Koordinaten lauten

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \cos \lambda \\y &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \beta \sin \lambda \\z &= u \sin \beta\end{aligned}$$

mit

- $u$  ...kl. Halbachse
- $E$  ...lineare Exzentrizität
- $\beta$  ...reduzierte Breite
- $\lambda$  ...ellipsoidische Länge

**Figur 4.1:** Ellipsoidisch-harmonische Koordinaten  
(Quelle: [Hofmann-Wellenhof und Moritz, 2005])

Das Normalpotential des Rotationsellipsoides berechnet sich aus der Summe eines reinen Gravitationspotentials  $V$  und eines Zentrifugalpotentials  $\Phi$ ,

$$U = V + \Phi$$

$U$  lässt sich mit den Legendreschen Funktionen 2. Art in eine Reihe von Kugelflächenfunktionen entwickeln. Auf der Oberfläche des Rotationsellipsoides mit der kleinen Halbachse  $u = b$  soll das Potential  $U$  den konstanten Wert  $U_0$  annehmen.

Hieraus lässt sich das Gravitationspotential  $V$  auf der Oberfläche des Rotationsellipsoides mit dem Normalpotential  $U_0$  durch folgende Gleichung exakt schreiben:

$$V = U_0 \frac{\arctan E/u}{\arctan E/b} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \left( \frac{q(u)}{q_0(b)} P_2(\cos \beta) - \frac{\arctan(E/u)}{\arctan(E/b)} \right)$$

mit

$$q(u) = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right]$$

bzw.

$$q_0(b) = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + 3 \frac{b^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{b} - 3 \frac{b}{E} \right]$$

Da das Gravitationspotential der Erde bis auf Terme höherer Ordnung in  $r$  in 1. Näherung dem Potential einer Punktmasse der Masse  $M_{Erde}$  entspricht, kann ein Zusammenhang zwischen dem Normalpotential und der Erdmasse hergeleitet werden [Hofmann-Wellenhof und Moritz, 2005].

$$GM = \left( U_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{E}{\arctan(E/b)}$$

Daraus folgt

$$U_0 = \frac{GM}{E} \arctan(E/b) + \frac{1}{3} \omega^2 a^2$$

Damit ist ersichtlich, dass das geodätische Normalpotential  $U_0$  allein durch die Angabe der Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $GM$  und  $\omega$  festgelegt ist.

Dieses kann allerdings nicht als das Potential eines homogenen nicht rotierenden Ellipsoids (Maclaurin-Ellipsoid) interpretiert werden, wie sich leicht durch Berechnung dessen Potentials auf seiner Oberfläche feststellen lässt.

Das Potential lässt sich gemäß Kapitel 3.2 durch Flächenbelegungen so beschreiben, dass sich das Außenraumpotential des homogenen Ellipsoids aus der Summe des Potentials einer homogenen Kugel und den ellipsoidischen Abweichungen davon ergibt

$$V(P) = V_{Kugel}(P) + \nu$$

Für das Störpotential  $\nu$  folgt nach (3.11)

$$\nu = G\rho R^2 \iint_{\sigma} \frac{h}{l} d\sigma$$

Die Abweichung  $h$  zwischen einem Ort auf der Ellipsoidoberfläche  $r$  und dem mittleren Erdradius  $R$  wird mit  $r$  in 2. Näherung (3.18) beschrieben. Für  $h$  ergibt sich

$$h = r - R = -\frac{2}{3} \left( f + \frac{23}{42} f^2 \right) R P_2(\cos \vartheta) + \frac{12}{35} f^2 R P_4(\cos \vartheta)$$

Für das Potential  $\nu$  bedeutet dies unter Verwendung des reziproken Abstand  $1/l$  (2.5 mit  $r_Q = R$ )

$$\nu = -\frac{2}{3} G\rho \left( f + \frac{23}{42} f^2 \right) R^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} \iint_{\sigma} P_2(\cos \vartheta) P_n(\cos \psi) d\sigma + \frac{12}{35} G\rho f^2 R^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} \iint_{\sigma} P_4(\cos \vartheta) P_n(\cos \psi) d\sigma$$

Wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Legendreschen Polynome (Kapitel 2.3) verbleiben unter den Integralen lediglich die Ausdrücke für  $n = 2$ , bzw. für  $n = 4$

$$\iint_{\sigma} P_2(\cos \vartheta) P_2(\cos \psi) d\sigma = \frac{4\pi}{5} P_2(\cos \vartheta)$$

$$\iint_{\sigma} P_4(\cos \vartheta) P_4(\cos \psi) d\sigma = \frac{4\pi}{9} P_4(\cos \vartheta)$$

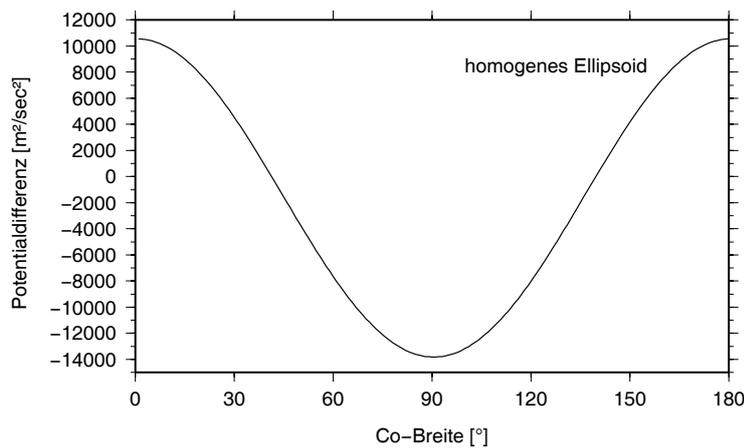
Damit ist  $\nu$  bestimmt

$$\nu = -\frac{4\pi}{5} G\rho \frac{R^5}{r^3} \left( \frac{2}{3} \left( f + \frac{23}{42} f^2 \right) P_2(\cos \vartheta) - \frac{4}{21} f^2 P_4(\cos \vartheta) \right)$$

Addiert man nun noch das Potential für die homogene Kugel, ergibt sich das gesamte Außenraumpotential eines homogenen **nicht rotierenden** Ellipsoides.

$$V(P) = \frac{4\pi}{3} G\rho \frac{R^3}{r} + \nu = \frac{4\pi}{3} G\rho \left[ \frac{R^3}{r} - \frac{2}{5} \frac{R^5}{r^3} \left( \left( f + \frac{23}{42} f^2 \right) P_2(\cos \vartheta) - \frac{2}{7} f^2 P_4(\cos \vartheta) \right) \right]$$

Dieses Potential kann an der Oberfläche eines geodätischen Referenzellipsoids berechnet werden. Es ergibt sich der folgende Potentialverlauf im Vergleich zum geodätisch definierten Normalpotential:



**Figur 4.2:** Potential eines homogenen Ellipsoids relativ zum geodätischen Normalpotential  $U_0$

Die Oberfläche des homogen mit Masse gefüllten geodätischen Referenzellipsoids ist somit nicht Äquipotentialfläche seines eigenen äußeren Schwerfeldes und deswegen keine hydrostatische Ausgleichsfläche. Der Potentialunterschied liegt in der Größenordnung von  $\pm 11000 \text{ m}^2/\text{sec}^2$ . Mit einer einfachen Abschätzung entspräche das Geoidundulationen in der Größenordnung von mehr als  $\pm 1.0 \text{ km}$ .

Aus geophysikalischer Sicht ist also das mit dem geodätischen Normalpotential assoziierte homogene Referenzellipsoid nicht geeignet, um als hydrostatischer Referenzkörper verwendet zu werden.

#### 4.1.3 Die Referenzfläche für die Erde

Auch wenn wesentliche Impulse zum Verständnis des Erdkörpers als Gleichgewichtsfigur aus den Überlegungen zu homogenen Rotationskörper abgeleitet wurden, bietet diese Modellvorstellung keine brauchbare Berücksichtigung der radialen Dichtenstruktur der Erde an. Erst mit [Clairaut, 1743] wurde ein theoretisches Werkzeug entwickelt, mit dem Gleichgewichtsfiguren auch für nicht homogene Körper abgeleitet werden können. Die Clairaut'sche Differentialgleichung verarbeitet radiusabhängige Dichtefunktionen in einer ellipsoidischen Schichtung allerdings nur für die Angabe des geometrischen Ortes von Ellipsoidschalen in 1. Näherung. Eine Lösung zur Beschreibung von Gleichgewichtsfiguren, die durch Superposition von homogenen, mit Masse gefüllten Ellipsoiden entstehen, wird zum Beispiel von [Schramm, 2005] angeboten. Auch [Chandrasekhar, 1969] hat sich mit Lösungsmöglichkeiten für Gleichgewichtsfiguren elastischer Erdmodelle beschäftigt.

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass bei genauerer Beschreibung der geometrischen Orte (ab 2. Näherung für  $r$ ) die Gleichgewichtsfigur kein Ellipsoid mehr sein kann, bzw. für einen heterogenen rotationssymmetrischen Gleichgewichtskörper eine ellipsoidische Schichtung unmöglich ist. (Theorem von Hamy-Pizzetti [Pizzetti, 1913]). Das Niveau-(Referenz-)ellipsoid der Erde kann somit selbst bei nicht-ellipsoidischer Schichtung keine exakte Gleichgewichtsfigur sein, auch wenn es dieser sehr nahe kommt (Ledersteger's Theorem). Eine Ausnahme würde hier zwar das Maclaurin-Ellipsoid bilden, das aber homogen und daher nicht besonders erdähnlich ist.

Es soll nun nachfolgend eine Möglichkeit zur Beschreibung eines hydrostatisch definierten, ortsabhängigen Dichtemodells der Erde entworfen werden, das einfach zu beschreiben ist und dennoch z. B. an seiner Oberfläche einen Potentialwert repräsentiert, der den bisher vereinbarten Wert des Normalpotentials gut annähert. Da auf der Oberfläche dieses Körpers ein konstantes Potential existieren soll, stellt die Außenhaut eine Fläche konstanten Drucks dar und ist somit hydrostatische Ausgleichsfläche.

Hydrostatisches Gleichgewicht bedeutet, dass sich alle Partikel in Ruhe befinden. Es existieren keine resultierenden Kräfte, die einen dynamischen Prozess auslösen können, also Bewegung erzeugen. Somit muss sich Summe aller Beschleunigungen Null werden.

Die Bewegungsgleichung einer idealen Flüssigkeit lautet in der hydrodynamischen Formulierung [Moritz, 1990]

$$\ddot{x} = g - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (4.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d^2 x}{dt^2} = \text{Beschleunigung eines Flüssigkeitspartikels} \\ \rho &= \text{Dichte der Flüssigkeit} \\ g &= \text{Gravitationsbeschleunigung} \\ p &= \text{Druck auf die Partikel} \end{aligned}$$

Im Fall hydrostatischen Gleichgewichts findet keine Bewegung statt.

$$0 = \text{grad} W - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

Mit der Formulierung als totales Differential der potentiellen Energie

$$dW = \rho^{-1} dp$$

sieht man, dass im Fall  $dp = 0$  auch  $dW = 0$  gelten muss, oder anders formuliert:

Die Flächen konstanten Potentials ( $dW = 0$ ) fallen mit den Flächen konstanten Drucks ( $dp = 0$ ) zusammen. Demnach ergibt sich für den Druck

$$p = p(W)$$

Und deswegen gilt für die Dichte

$$\rho = \frac{dp}{dW} = \rho(W)$$

Darüber hinaus gilt auch, dass die Flächen konstanter Dichte mit den Flächen konstanten Drucks zusammenfallen. Deswegen sind im hydrostatischen Gleichgewicht Flächen konstanter Dichte auch Flächen konstanten Potentials, so genannte Äquiflächen. Allerdings gilt diese Aussage nur für den Fall, dass die Dichte mit der Tiefe nicht abnimmt, sondern kontinuierlich zunimmt, also global gilt

$$\frac{d\rho}{dq} > 0 \quad (4.4)$$

Dieser Ansatz hat auch in der Arbeit von [Wziontek, 2004] zu dem dort vorgestellten Dichtemodell geführt. Es ist durchaus gerechtfertigt anzunehmen, dass sich die Erde global gesehen im hydrostatischen Gleichgewicht befindet und einen durch gravitative Selektion entstandenen positiven Dichtegradienten gemäß (4.4) aufweist.

Seit die Möglichkeit besteht, das äußere Schwerfeld global, z. B. durch Methoden der Satellitengeodäsie, zu erfassen ist bekannt, dass sich die Erde nicht vollständig im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, aber ebenso,

dass die Abweichungen hiervon klein sind. Große Abweichungen von dieser Modellannahme sind auch unter Berücksichtigung erddynamischer Prozesse nicht zu erwarten und können über die Analyse von Residualfeldern gegebenenfalls gefunden und erklärt werden.

Um das Schwerepotential innerhalb einer hydrostatisch ausgeglichenen Flüssigkeit zu bestimmen, muss das Zentrifugalpotential berücksichtigt werden, welches unter Vernachlässigung der Terme 2. Ordnung in  $f$  ( $f^2 \approx 10^{-5}$ ), wie folgt beschrieben werden kann:

$$\Phi = \frac{1}{3}\omega^2 r^2 [1 - P_2(\cos \vartheta)]$$

Für das Gesamtpotential innerhalb des ellipsoidischen Modells ergibt sich mit dem mittleren Radius  $q$  einer ellipsoidischen Schicht nach [Moritz, 1990]

$$\begin{aligned} W(q) &= V(q) + \Phi(q) \\ &= 4\pi G \left[ \frac{1}{q} \int_0^q \rho(q') q'^2 dq' + \int_q^R \rho(q') q' dq' + \frac{\omega^2 q^2}{12\pi G} \right] \\ &\quad + 4\pi G P_2(\cos \vartheta) \left[ \frac{2}{3} \frac{f}{q} \int_0^q \rho(q') q'^2 dq' - \frac{2}{15q^3} \int_0^q \rho(q') d(fq'^5) - \frac{2}{15} q^2 \int_q^R \rho(q') \frac{df}{dq} dq' + \frac{\omega^2 q^2}{12\pi G} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Man muss berücksichtigen, dass alles unter der Annahme steht, dass alle inneren ellipsoidischen Flächen mit  $r = q = \text{const.}$  Äquiflächen sind, also Flächen konstanter Dichte UND konstanten Potentials. Damit geht die Abhängigkeit von  $\vartheta$  verloren und man erhält

$$W(q) = 4\pi G \left[ \frac{1}{q} \int_0^q \rho(q) q'^2 dq' + \int_q^R \rho(q) q' dq' + \frac{\omega^2 q^2}{12\pi G} \right]$$

Der von  $P_2(\cos \vartheta)$  abhängige Faktor im zweiten Summanden muss wegen dieser Unabhängigkeit zu Null werden

$$\left[ -5 \frac{f}{q} \int_0^q \rho(q') q'^2 dq' + \frac{1}{q^3} \int_0^q \rho(q') d(fq'^5) + q^2 \int_q^R \rho(q') \frac{df}{dq} dq' + \frac{5\omega^2 q^2}{8\pi G} \right] = 0$$

Diese Gleichung muss für alle  $q \leq R$  gelten.

Man löst die Integrale durch Differentiation und erhält nach Einführung der mittleren ortsabhängigen Dichte

$$D = D(q) = \frac{3}{q^3} \int_0^q \rho(q') q'^2 dq' \quad \text{bzw.:} \quad \frac{dD}{dq} = -\frac{9}{q^4} \int_0^q \rho(q') q'^2 dq' + \frac{3}{q^3} \rho(q) q^2$$

die Differentialgleichung

$$\left( q \frac{d^2 f}{dq^2} + 3 \frac{df}{dq} \right) D + \left( q \frac{df}{dq} + 2f \right) \frac{dD}{dq} + 3\rho \frac{df}{dq} = 0$$

Einsetzen und einfaches Umformen liefert die **Differentialgleichung von Clairaut** [Clairaut, 1743]

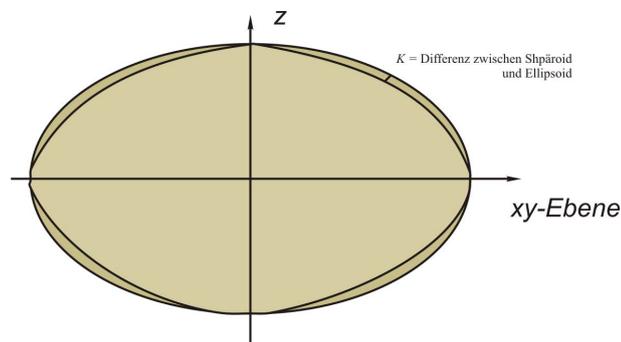
$$\frac{d^2 f}{dq^2} + \frac{6}{q} \frac{\rho(q)}{D} \frac{df}{dq} - \frac{6}{q^2} \left( 1 - \frac{\rho(q)}{D} \right) f = 0 \quad (4.6)$$

Diese homogene gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für  $f = f(q)$  in 1. Näherung bis  $0(f)$  ist mit Angabe der Randwerte  $f(q = R)$  und  $df/dq$  ebenfalls an der Stelle  $q = R$ , also an der Oberfläche des Modells, vollständig.

Die hier gemachte Näherung reicht jedoch nicht aus, um geodätische Genauigkeit zu erzielen. [Denis, 1989] schätzt z. B. ab, dass aus der dynamischen Abplattung  $J_2$  die geometrische Abplattung  $f$  erst dann hinreichend genau zu bestimmen ist, wenn bis  $0(f^2)$  entwickelt wird. In dieser Näherung 2. Ordnung wird für  $r$  ein Korrekturterm  $\kappa$  eingeführt, der den geometrischen Ort aller ellipsoidischen Schichten ausgehend von  $r(f)$

breitenabhängig korrigiert. Wie erwähnt, ist eine streng ellipsoidische Schichtung für einen Gleichgewichtskörper unter diesen Bedingungen unmöglich. Allerdings ergeben sich für die Abweichung der Sphäroidflächen (als **Sphäroidfläche**, bzw. **Sphäroid** wird nachfolgend ein hydrostatischer Ausgleichskörper bezeichnet, dessen Oberfläche eine nicht ellipsoidische Äquipotentialfläche ist) von ellipsoidischen Flächen maximale Abweichungen von lediglich  $4,3 \text{ m}^1$ . Deshalb wird zunächst weiter von hydrostatischen Ausgleichsflächen ausgegangen, die Ellipsoide sind. Erst in einem zweiten Schritt wird auch diese Abweichung bei der Modellbildung berücksichtigt. Allerdings darf nicht vergessen werden, dass diese Formulierung davon ausgeht, dass die betrachteten Modelle einen streng positiven Dichtegradienten (4.4) aufweisen, auch wenn es Moritz (1968) und Pizzetti (1894) gelungen ist, stabile Gleichgewichtfiguren unter Einführung von Schichten mit negativem Dichtegradienten zu beschreiben, deren äußere Begrenzungen Ellipsoide sind.

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Anwendung der von [Darwin, 1899] vorgeschlagenen Abweichung  $\kappa=\kappa_4$ , nachfolgend **Darwin-Abweichung** genannt, und berücksichtigt nicht den von [Zharkov und Trubitsyn, 1970] beschriebenen weiteren Korrekturterm höherer Ordnung  $\kappa=\kappa_6$ , da schon die Korrektur mit der Darwin-Abweichung  $\kappa_4$  in globaler Betrachtungsweise nur einen geringen Beitrag zur Qualität des Potentialfeldes im Sinne dieser Arbeit liefert.



**Figur 4.3:** Darwin-Abweichung  $\kappa$  zwischen Sphäroid und Ellipsoid

Die Abweichung  $\kappa$  wird allgemein durch eine Differentialgleichung, vergleichbar der Clairaut-Gleichung beschrieben. Diese lautet (**Darwin-Gleichung**)

$$q^2 \frac{d^2 \kappa}{dq^2} + 6 \frac{\rho(q)}{D} \frac{d\kappa}{dq} + \left( -20 + \frac{6\rho(q)}{D} \right) \kappa = 0 \quad (f^2) \quad (4.7)$$

[Darwin, 1899] hat die Gleichung für ein Niveauellipsoid gelöst, indem er in die Reihenentwicklung für  $r(f)$  eben diesen Korrekturterm  $\kappa=\kappa_4$  eingeführt hat. [Zharkov und Trubitsyn, 1970] haben einen weiteren Korrekturterm höherer Ordnung  $\kappa_6$  angebracht.

$$r = a \left( 1 - f \cos^2 \vartheta - \left( \frac{3}{8} f^2 + \kappa_4 \right) \sin^2 2\vartheta + \frac{1}{8} (f^3 + 2\kappa_6) (1 - 5 \sin^2 \vartheta) \sin^2 2\vartheta \right)$$

$\kappa_6$  wird aber, wie oben erwähnt, nicht berücksichtigt. Für  $r$  folgt mit  $\kappa=\kappa_4$  und ohne  $0(f^3)$

$$r = a \left( 1 - f \cos^2 \vartheta - \left( \frac{3}{8} f^2 + \kappa \right) \sin^2 2\vartheta \right) \quad (4.8)$$

Diese Näherung reicht aus, da die zusätzlichen Korrekturen nur wenige Zentimeter ausmachen und somit unterhalb der Genauigkeit für den Ortsvektor  $r$  in 2. Näherung liegen (Figur 3.4).

#### 4.1.4 Verwendung des Modells von Wziontek (WZIO)

[Wziontek, 2004] hat ein Dichtemodell entworfen, das zwar sphärisch formuliert ist, aber die Grundforderung nach einem hydrostatischen Dichtemodell erfüllt, also einem Modell, bei dem die Dichte mit der Tiefe kontinuierlich zunimmt.

<sup>1</sup>numerisch ermittelter Wert für PREM [Denis, 1989]

In seiner Arbeit konnte Wziontek zeigen, dass es möglich ist, aus der Poisson-Gleichung, unter der Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes, eine Differentialgleichung zu entwickeln, deren spezielle Lösungen in Übereinstimmung mit dem tiefenabhängigen seismischen Parameter stehen und die Parametrisierung einer Normal-Dichtefunktion ermöglichen. Der seismische Parameter  $\Phi$

$$\Phi = \frac{K}{\rho} = v_P^2 - \frac{4}{3}v_S^2$$

beschreibt das Verhältnis zwischen den seismischen Geschwindigkeiten  $v_P$  und  $v_S$  einerseits, und dem Kompressionsmodul  $K$  und der Dichte  $\rho$  andererseits. Allein aus der seismischen Geschwindigkeit lässt sich lediglich der Verlauf der Dichtefunktion in einem Modellsegment bestimmen, nicht aber ihr Betrag. Zur abschließenden Bestimmung dieser Unbekannten müssen weitere zweifelsfrei bekannte Größen geodätischer sowie geophysikalischer Natur verwendet werden. Hier sind unter anderem der Dichtesprung an der Kern-Mantel-Grenze, die Gesamtmasse des resultierenden Erdmodells, seine Trägheitsmomente, aber auch die Frequenzen der Erdeigen-schwingungen oder die Dichte unterhalb der Kern-Mantel-Grenze zu erwähnen.

Die vorgeschlagene Vorgehensweise liefert Dichtemodelle, die mit Polynomen ausschließlich gerader Grade beschrieben werden. Die zur Beschreibung z. B. des Dichtemodells PREM verwendeten allgemeinen Polynome sind zur Parametrisierung von Normal-Dichtemodellen nach [Wziontek, 2004] nicht geeignet.

Die von [Wziontek, 2004] beschriebene Dichtefunktion erlaubt die adäquate und eindeutige Beschreibung von Dichte und seismischem Parameter. Damit bilden diese beiden Parameter den Kern seiner Modellierung. Um auch die Laufzeiten seismischer Wellen darstellen zu können, bedarf es lediglich der Einführung einer zweiten Funktion, der radialen Änderung der Poisson-Zahl. Da die Poisson-Zahl eine nahezu konstante Größe innerhalb der einzelnen Schalen ist, reicht ein simpler empirischer Ansatz auf der Grundlage einer linearen oder quadratischen Funktion für diese Darstellung vollkommen aus. Somit können aus seinem Dichtemodell direkt die beiden seismischen Geschwindigkeiten  $v_P$  und  $v_S$  abgeleitet werden. Ein Zusammenhang zu den Laufzeiten seismischer Raumwellen kann unter Verwendung der bekannten Beziehungen zwischen Geschwindigkeiten und Laufzeiten hergestellt werden, womit eine Bestimmung der Parameter für die Dichtefunktion (resp. der Funktion des seismischen Parameters) und der Poisson-Zahl direkt anhand der Laufzeiten seismischer Wellen möglich ist.

Wziontek hat zwei Modellgruppen entwickelt, von denen im weiteren Verlauf der Arbeit diejenige verarbeitet wird, bei der die als parametrisierender Wert verwendete Dichte unterhalb der Mohorovicic-Diskontinuität mit  $3,37 \text{ g/cm}^3$  angegeben wird, entgegen dem Wert  $3,27 \text{ g/cm}^3$  aus der anderen Gruppe der Modelle.

Dieses Modell wird in den jeweiligen Schichten abgeplattet und so zu einem hydrostatischen Modell eines heterogenen rotierenden Körpers.

## 4.2 Berechnung einer Näherung für die Gradienten der geometrischen Abplattung und der Darwin-Abweichung

Die homogene gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung (4.6) verwendet die Randbedingungen, dass  $f$  und  $df/dq$  an der Oberfläche, also bei  $q = R = 6371 \text{ km}$  gegeben sein müssen.  $f$  ist aus geodätischen Beobachtungen bestimmt.

Der für die Erde allgemein anerkannte Wert der geometrischen Abplattung lautet

$$\frac{1}{f} = 298.257223563$$

Damit wird die Geometrie des Normalschwerefeldes beschrieben, welches in der Geodäsie zur Anwendung kommt. Die Oberfläche des Referenzellipsoid, ist gleichzeitig Äquipotentialfläche des Normalschwerefeldes. Das Normalpotential hat den Wert

$$U_0 = 6.26368517146 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}$$

Der Abplattungsgradient  $df/dq$  lässt sich an der Erdoberfläche, für  $R = 6371 \text{ km}$ , wie folgt berechnen [Moritz, 1990]. Es gilt

$$\left( R \frac{df}{dq} + 2f \right) D = \frac{15\omega^2}{8\pi G}$$

mit der mittleren Dichte der Erde

$$D = \frac{3M_{Erde}}{4\pi R^3} = \bar{\rho}_{Erde}$$

Daraus folgt

$$R \frac{df}{dq} + 2f = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 R^3}{GM}$$

Hieraus ergibt sich der Abplattungsgradient zu

$$\frac{df}{dq} = \frac{1}{R} \left( \frac{5}{2} m - 2f \right) \quad (4.9)$$

und lässt sich an der Erdoberfläche mit den Werten

$$\begin{aligned} R &= 6371 \text{ km} \\ m &= \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} = 0.00344978650 \\ f_{R=6371} &= 0.003352810681 \end{aligned}$$

bestimmen. Man erhält für den Abplattungsgradienten

$$\frac{df}{dq} = 3.0118 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{\text{km}} \quad (4.10)$$

Hieraus folgt allgemein für eine mit der Tiefe abnehmende Abplattung

$$f(R) = f_{R=6371} - \frac{df}{dq} (R_{Erde} - R) \quad (4.11)$$

und zum Beispiel als theoretischer Wert für den Erdmittelpunkt ( $R=0$ )

$$f_{R=0} = 0,001433975 \quad (4.12)$$

Bringt man nun diesen Wert für den Abplattungsgradienten global zur Anwendung, darf nicht außer Acht gelassen werden, dass es sich hierbei lediglich um die Beschreibung der Abplattung in 1. Näherung handelt. Weitergehende Untersuchungen müssen vor allem die Tiefenabhängigkeit des Gradienten auf Grund der variablen Dichteschichtung untersuchen. Für eine gegebene tiefenabhängige Dichtefunktion lässt sich der Abplattungsgradientenverlauf bestimmen.

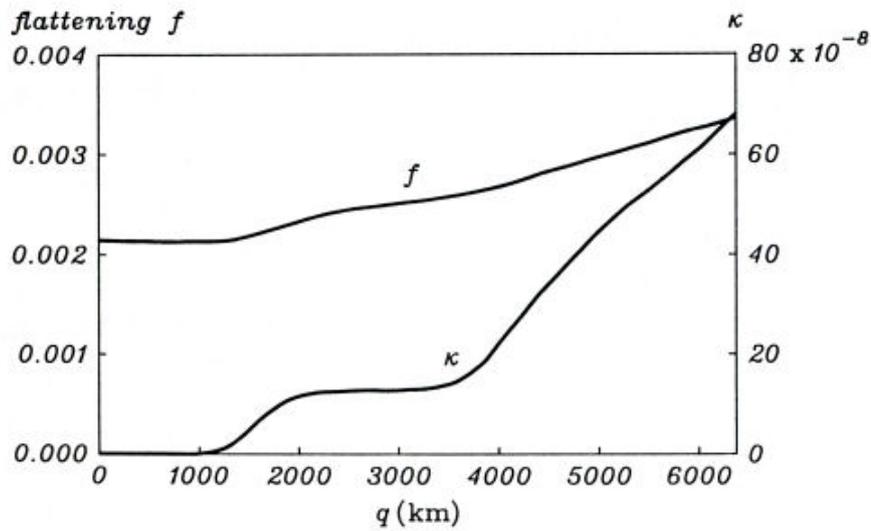
Es ist allerdings nicht Gegenstand dieser Arbeit, für das vorgeschlagene Dichtemodell den exakten Verlauf des Abplattungsgradienten zu bestimmen. In dieser Arbeit wird in 1. Näherung mit einem Wert ähnlich dem oben vorgeschlagenen globalen Abplattungsgradienten gerechnet, ohne etwaige Tiefenabhängigkeiten dieses Parameters zu berücksichtigen. In [Moritz, 1990] findet sich ein Ansatz für die Beschreibung seiner Tiefenabhängigkeit nach [Bullard, 1948] und [Jones, 1954].

Der hier abgebildete sehr glatte Verlauf des Abplattungsgradienten (Figur 4.4) rechtfertigt die Annahme eines konstanten Abplattungsgradienten, auch wenn sich in dem dargestellten Beispiel ein durchschnittlicher Wert ergibt von

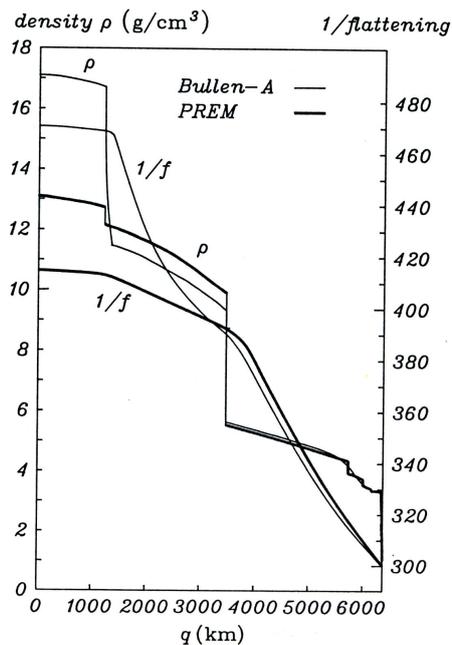
$$\frac{df}{dq} \approx 1.8 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{\text{km}}$$

Wie [Denis, 1989] zeigt, sind die anzunehmenden Abplattungsgradienten, resp. die jeweils tiefenabhängig anzunehmenden Abplattungen, sehr stark von dem der Bestimmung zugrunde liegenden Dichtemodell abhängig.

Für den Bereich des oberen Mantels kann man hier z. B für  $f(a)$  einen konstanten Wert von  $3.11 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$  ableiten, wie er auch rechnerisch aus den Überlegungen am Anfang des Kapitels bestimmt wurde. Durch Konvertierung von (4.11) mit Hilfe der Legendreschen Funktionen und Vergleich mit der Beschreibung von  $r$  in Abhängigkeit vom mittleren Radius  $q$  findet man die vom verwendeten Dichtemodell  $\rho(q)$  abhängigen Bestimmungsgleichungen für  $f(q)$  und  $\kappa(q)$ . [Denis, 1989] hat für das Dichtemodell PREM einen sehr einfachen Verlauf von  $f(q)$  und  $\kappa(q)$  gefunden. Dieser beschreibt drei annähernd gerade Kurvenstücke (Figur 4.5) deren



Figur 4.4: Abplattungs- und Abweichungsverlauf für ein Dichtemodell nach [Bullard, 1948] aus [Moritz, 1990]



Figur 4.5: Abplattungsverlauf für das Dichtemodell PREM aus [Moritz, 1990]

Steigungen sich an der Kern-Mantel-Grenze und an der Grenze zwischen innerem und äußerem Kern ändern [Zharkov u. a., 1996].

Die in dieser Arbeit vorgestellte generalisierte Methodik beschränkt sich darauf den Verlauf beider Kurven zwischen Erdoberfläche und Kern-Mantel-Grenze durch einen linearen Gradienten anzunähern und diesen global in Anwendung zu bringen. Wegen der geringen Werte der Abplattung ab der Kern-Mantel-Grenze scheint dies sinnvoll und mindestens als erste Arbeitshypothese gerechtfertigt.

Für den globalen Abplattungsgradienten wird mit den Oberflächenwerten aus [Denis, 1989] angesetzt

$$f(q) = f_{R=6371} - \frac{df}{dq} (6371 \text{ km} - q) \quad (4.13)$$

mit

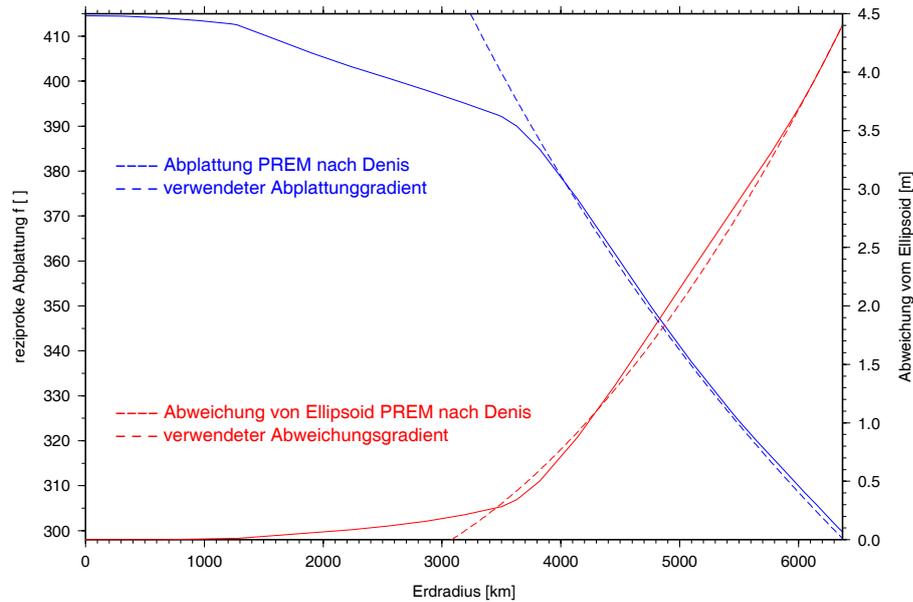
$$\frac{df}{dq} = 3.0118 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{km} \quad \text{und} \quad f_{R=6371} = \frac{1}{298.257223563}$$

und für den Gradienten der Darwin-Abweichung

$$\kappa(q) = \kappa_{R=6371} - \frac{d\kappa}{dq} (6371 km - q) \quad (4.14)$$

mit

$$\frac{d\kappa}{dq} = 2.1 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{km} \quad \text{und} \quad \kappa_{R=6371} = 69.1 \cdot 10^{-8}$$



**Figur 4.6:** Verlauf von Abplattung (blau) und Darwin-Abweichung (rot) für das Dichtemodell PREM

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung eines Dichtemodells unter Verwendung dieser globalen Gradienten. Wie sich zeigen wird, muss aber der in (4.10) vorgeschlagene Abplattungsgradient im Sinne einer konsistenten Potentialformulierung je nach Detaillierungsgrad des Modells angepasst werden und nimmt zum Teil andere Werte an.

Man sollte sich aber darüber im Klaren sein, wie schon [Moritz, 1990] festgestellt hat (freie Übersetzung): „Berechnungen haben gezeigt, dass die Ergebnisse außerordentlich stark von der Wahl der Dichteverteilung abhängen, die die Differenz zwischen „echter“ und „hydrostatischer“ Abplattung bedeutend beeinflussen und verringern kann.“

Diese Aussage bedeutet im Rahmen der hier vorgestellten Arbeit, dass ein Hauptaugenmerk darauf zu legen ist, ein physikalisch sinnvolles hydrostatisches Dichtemodell vorzuschlagen, welches eine rechnerische „hydrostatische“ Abplattung besitzt, die gut mit der geometrischen Abplattung der Erde übereinstimmt.

[Moritz, 1990] motiviert (freie Übersetzung):

„Da die geometrische Abplattung  $f$  an der Erdoberfläche durch den Koeffizienten  $J_2 = -C_2^0$  sehr genau bekannt ist, wäre es unangebracht, diese nicht zu verwenden und stattdessen zu versuchen, eine hydrostatische Abplattung zu berechnen. Dies scheint eine etwas künstliche Vorgehensweise zu sein.“

[Moritz, 1990] schlägt deshalb vor, das „Risiko“ einzugehen und den Wert für die geometrische Abplattung  $f$  der Erde (abgeleitet aus dem Potentialkoeffizienten  $C_2^0$ ) als Randwert für die Clairaut-Gleichung zu verwenden, selbst wenn sich rein rechnerisch daraus Werte für die dynamische Abplattung

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2} = 0.484166774985 \cdot 10^{-3} \quad (4.15)$$

und die dynamische Elliptizität

$$H = \frac{C - A}{C} = \frac{1}{305.4413} = 0.003273951 \quad (4.16)$$

ergeben, die mit den obigen Werten des WGS84 nicht übereinstimmen.

[Torge, 2001] beschreibt den Zusammenhang zwischen der dynamischen Abplattung  $J_2$  und der bekannten Größe  $m$  in einer Entwicklung bis zu Termen  $O(f^2)$ .

$$f = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}m + \frac{9}{8}J_2^2 + \frac{15}{28}J_2m + \frac{3}{56}m^2 \quad (4.17)$$

[Denis, 1989] gibt für eine hydrostatische Erde, berechnet mit Darwin-Abweichung  $\kappa$ , unter Verwendung des Oberflächenwerts  $\kappa_{R=6371}$ , der bekannten Größen  $m$  und der ermittelten dynamischen Abplattung  $J_2$ , eine geometrische Abplattung  $f$  wie folgt an:

$$f = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}m + \frac{9}{8}J_2^2 + \frac{15}{28}J_2m + \frac{3}{56}m^2 - \frac{4}{7}\kappa_{R=6371} \quad (4.18)$$

[Denis, 1989] sagt über diesen Weg (freie Übersetzung):

„Alles in allem ist es der Mühe wert, die Möglichkeit zu studieren, ein physikalisch plausibles Dichtemodell für die Erde zu entwickeln, das an der Oberfläche den vorgeschlagenen Wert der geometrischen Abplattung von  $1/298.25$ , annimmt.“

## 5 Der Isostasie

### 5.1 Der isostatische Ausgleich an der Erdoberfläche

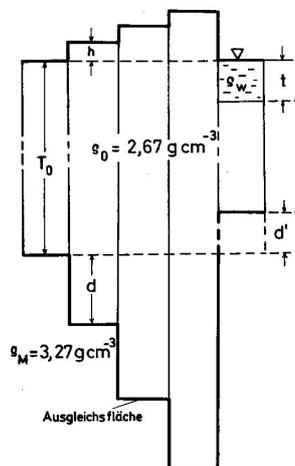
Eine Erde mit bekannter Topographie, die sich im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, muss sich auch an der Oberfläche im Kräftegleichgewicht befinden. Ein solcher Ausgleich wird isostatisch genannt und basiert auf dem Archimedischen Prinzip des Schwimmgleichgewichts. Hiernach tauchen Körper unterschiedlicher Höhe und Dichte verschieden tief in eine Flüssigkeit ein, sofern sie eine geringere Dichte als diese haben. In Abhängigkeit von der Höhe des eintauchenden Körpers variiert die Eintauchtiefe derart, dass der „herausragende“ Massenüberschuss, durch ein entsprechendes Massendefizit im Untergrund kompensiert wird. Oder anders formuliert: Unterhalb des schwimmenden Körpers gibt es eine hydrostatische Ausgleichfläche, die an jeder Stelle derselben konstanten Auflast pro Flächeneinheit ausgesetzt ist.

Die ersten Ideen zu einem isostatischen Ausgleich in der äußersten Erdschicht – der Kruste – kamen von Leonardo da Vinci (1452-1519), als er darüber nachdachte, wie die Erde wohl reagieren würde, wenn sie einer großen (lokalen oder regionalen) Auflast ausgesetzt wäre. Bouguer fand während der Gradmessungsexpedition nach Peru im Jahr 1735 den ersten experimentellen Beweis für Isostasie. Die von ihm beobachteten Lotabweichungen lagen deutlich unter denen, die er aus den sichtbaren topographischen Erhebungen berechnen konnte. Er mutmaßte, dass diese Massen in irgendeiner Weise im Untergrund kompensiert sein müssten. In der Folgezeit entwickelten sich eine Reihe von Modellen zu derartigen Kompensationsmechanismen, von denen sich für die praktische Umsetzung zwei prinzipielle durchgesetzt haben. Diese beiden Modelle basieren auf den Arbeiten von G. Airy und J.H. Pratt, und gehen von folgenden Ansätzen aus:

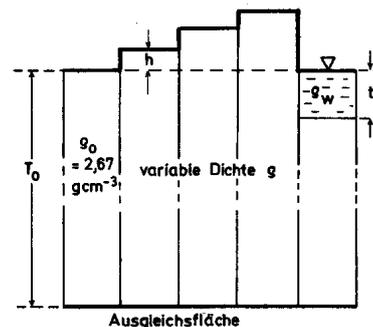
- **Modell von G. Airy:** Hier wird angenommen, dass eine höher aus der Flüssigkeit herausragende Säule auch tiefer in diese eindringt (klassisches Archimedisches Prinzip).
- **Modell von J.H. Pratt:** Dieses Modell unterstellt, dass unterschiedlich hoch aufragende Säulen einheitlicher Grundfläche, abhängig von Ihrer Höhe, unterschiedliche mittlere Dichten und damit Massen besitzen. Eine höher aufragende Säule hat eine entsprechend geringere Dichte, als eine weniger hoch aufragende Säule.

Eine für das Verständnis des Geoids wesentliche Erkenntnis, die aus den isostatischen Anomalien abgeleitet werden konnte ist z. B. die nacheiszeitliche Hebung Skandinaviens, beschrieben z. B. in [Arnold, 1980b].

Formuliert man das Archimedische Prinzip anschaulich anhand eines Säulendiagramms bedeutet dies, dass die Gesamtmasse der jeweiligen Säulen, unabhängig von Ihrer Dimension, konstant ist.

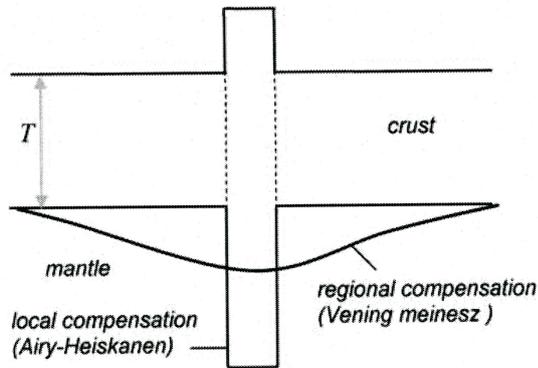


Figur 5.1: Isostasie nach G. Airy



Figur 5.2: Isostasie nach J.H. Pratt

Die Analyse isostatischer Anomalien hat gezeigt, dass weder der eine noch der andere Ansatz global verwendet werden kann. Vielmehr muss man davon ausgehen, dass z. B. unter jungen Faltengebirgen eher eine Kompensation nach G. Airy stattfindet, die mittelozeanischen Rücken hingegen eher gemäß der Modellvorstellung von J.H. Pratt kompensiert sind. Zudem ist es natürlich auch möglich eine kombinierte Lösung beider Modelle in Form einer Kompensation nach Vening-Meinesz anzusetzen.



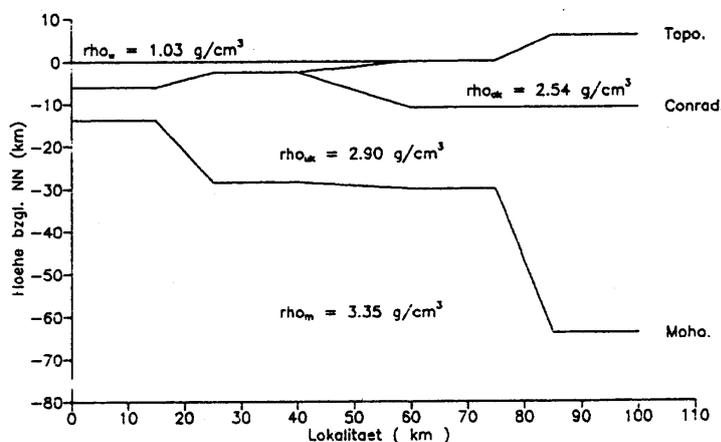
Figur 5.3: Isostasie nach Vening-Meinesz  
[Makhloof, 2007]

Diese kombinierte Modellvorstellung geht nicht mehr nur davon aus, dass die Kompensation ausschließlich innerhalb einer vertikalen Einheit (Säule) stattfindet, sondern dass der isostatische Ausgleich wegen der Biegesteifigkeit der betroffenen tektonischen Einheiten in die Umgebung „ausstrahlt“ (Modell von Vening-Meinesz). Die numerische Behandlung isostatischer Modellvorstellungen ist Gegenstand umfangreicher Literatur. Einen kurzen, sehr lesbaren Überblick gibt z. B. [Makhloof, 2007].

## 5.2 Das isostatische Krustenmodell

Ein im Sinne eines 3-D Schichtenmodells (Kapitel 3.1.1) zu konstruierendes Dichtemodell muss folgende generalisierte Situation im Bereich der Erdkruste berücksichtigen:

Im kontinentalen Bereich befindet sich die obere (kontinentale) Kruste, die durch die Conrad-Diskontinuität von der unteren (ozeanische) Kruste getrennt ist. Die Grenze zwischen Kruste und oberem Mantel bildet die Mohorovicic-Diskontinuität, mit dem entsprechenden Dichtekontrast. Die oft auch kurz Moho genannte Grenzschicht liegt, wie aus seismischen Untersuchungen bekannt ist, im kontinentalen Bereich deutlich tiefer als im ozeanischen Bereich, jedoch nicht tiefer als ca. 60-70 km. Die generelle Unterteilung in kontinentale und ozeanische Bereiche muss mindestens durch eine Übergangszone ergänzt werden, in der die kontinentale Kruste zu den Tiefseen hin ausdünnert, sowie durch die Bereiche der Erde, in denen die Topographie durch Eismassen gebildet wird, wie dies (in vereinfachender Betrachtungsweise) auf Grönland und in der Antarktis der Fall ist. Hieraus ergibt sich eine Unterteilung in 4 Bereiche.

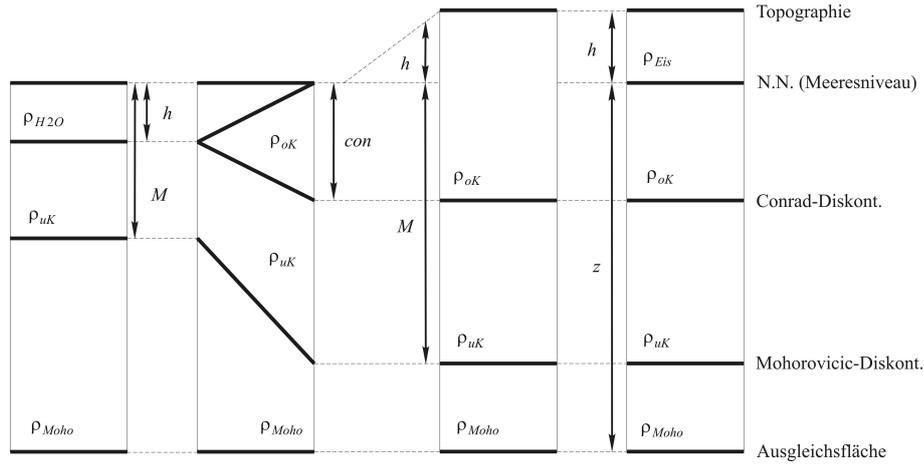


Figur 5.4: Schematischer Aufbau der oberen Kruste

Für eine derartige Aufteilung der Erdkruste in unterschiedliche Bereiche lassen sich die Blockschichtungen (Kapitel 3.1.1) mit den vereinfachenden und unter globalen Gesichtspunkten vertretbaren Annahmen

- die Conrad-Diskontinuität hat im Mittel eine Tiefe von 15 km,
- die Fläche konstanter Auflast befindet sich in 80 km Tiefe,
- der Übergangsbereich ist definiert durch topographische Höhen zwischen 0 m und -2.5 km,
- die beiden Bereiche kontinentaler Massen mit Eisauflast (Antarktis, Grönland) können durch die Angabe der geographischen Grenzen bestimmt werden,

nach dem Prinzip der Airy-Kompensation bis hinunter zu der Fläche konstanter Auflast berechnen.



**Figur 5.5:** Berechnung Blockschichtung

Mit der Bestimmung der jeweils konstanten Masse einer Säule oberhalb der Ausgleichsfläche kann eine Flächendichte berechnet werden, aus der wiederum die unbekannte theoretische Tiefe der Mohorovicic-Diskontinuität abgeleitet werden kann. Die konstante Gesamtmasse einer beliebigen Säule berechnet sich aus der Differenz der Erdmasse und der Masse, die sich bis zum mittleren Radius  $R=(6371-80)$  km ergibt. Setzt man diesen Wert ins Verhältnis zur Oberfläche der Erde, ergibt sich die konstante Flächendichte  $const.$  Mit dieser erhält man für die Mohotiefe  $M$

$$\begin{aligned}
 \text{ozeanische Säule} \quad M &= \left( z - \frac{const.}{\rho_m} \right) \frac{\rho_{uK}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}} + h \frac{\rho_{uK} - \rho_{H2O}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}} \\
 \text{kontinentale Säule} \quad M &= \left( z - \frac{const.}{\rho_m} \right) \frac{\rho_{Moho}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}} - con \frac{\rho_{uK} - \rho_{oK}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}} + h \frac{\rho_{oK}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}} \\
 \text{kont. Säule mit Eisauflast} \quad M &= \left( z - \frac{const.}{\rho_m} \right) \frac{\rho_{Moho}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}} - con \frac{\rho_{uK} - \rho_{oK}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}} + h \frac{\rho_{Eis}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}} \\
 \text{Übergangsbereich} \quad M &= \left( z - \frac{const.}{\rho_m} \right) \frac{\rho_{Moho}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}} - \left( con - h \frac{con}{congrad} \right) \frac{\rho_{uK} - \rho_{oK}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}} + h \frac{\rho_{uK} - \rho_{H2O}}{\rho_{Moho} - \rho_{uK}}
 \end{aligned}$$

wenn man für den Übergangsbereich jeweils einen linearen Zusammenhang zwischen Meerestiefe und Tiefe der Conrad-Diskontinuität  $congrad$  annimmt.

Die zur Anwendung empfohlenen Standardwerte für die Dichten lauten

$$\begin{aligned}
 \rho_{Luft} &= 0.00g/cm^3, & \rho_{oK} &= 2.67g/cm^3, & \rho_{H2O} &= 1.03g/cm^3 \\
 \rho_{uK} &= 2.90g/cm^3, & \rho_{Eis} &= 0.92g/cm^3, & \rho_{Moho} &= 3.37g/cm^3
 \end{aligned}$$

Hiermit lässt sich aus dem isostatischen Ansatz ein dreidimensionales, geschichtetes Modell der Erdkruste berechnen, wie in Kapitel 3.1.1 vorgeschlagen. [Pavlis und Rapp, 1990] haben hier sogar eine noch detailliertere Unterteilung vorgeschlagen.

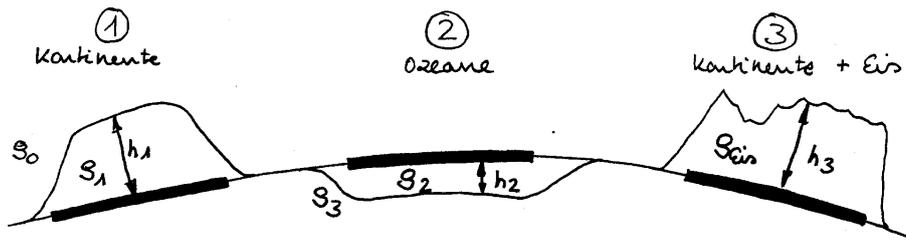
Interpretiert man das weitestgehend verwirklichte Schwimmgleichgewicht als Kompensation eines Massenüberschusses (im Fall topographischer Erhebungen) bzw. eines Massendefizits (im Fall ozeanischer Bereiche oder Senken), lässt sich die Situation unabhängig von der Art des jeweiligen Kompensationsmechanismus durch Flächenbelegungen formulieren (Kapitel 3.4) [Tsoulis und Stary, 2005].

Ein Massenüberschuss resp. -defizit an der Oberfläche muss durch ein entsprechend entgegengesetzt wirkendes Massendefizit bzw. einen Massenüberschuss kompensiert werden. Der einzige zu bestimmende Parameter ist die so genannte Ausgleichstiefe  $h_a$ , also der Abstand zwischen positiver und negativer Massenbelegung.

Die Flächenbelegung  $\kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q)$  zur Beschreibung des isostatischen Massenausgleichs unter Verwendung mittlerer Gesteinsdichten kann wie folgt berechnet werden:

Für einen Block  $(i, j)$  der Größe  $\Delta\lambda_j \cdot \Delta\vartheta_i$  wird ein aus topographischer Information (hier: ETOPO2v2 – Kapitel 6.5) entnommener Höhenwert  $h_{Topo./Bathy.}$  mit dem am Ort vorherrschenden Dichtekontrast  $\Delta\rho_{i,j}$  multipliziert und man erhält für jeden Block einen Wert  $\kappa_{i,j}(\vartheta_Q, \lambda_Q)$ .

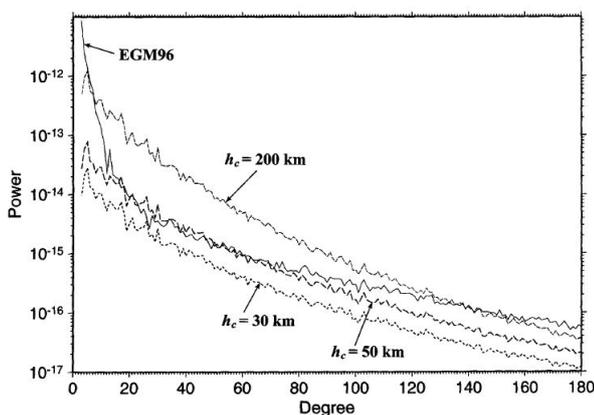
Je nach geologischer Situation berechnen sich die jeweiligen Flächenbelegungen wie folgt:



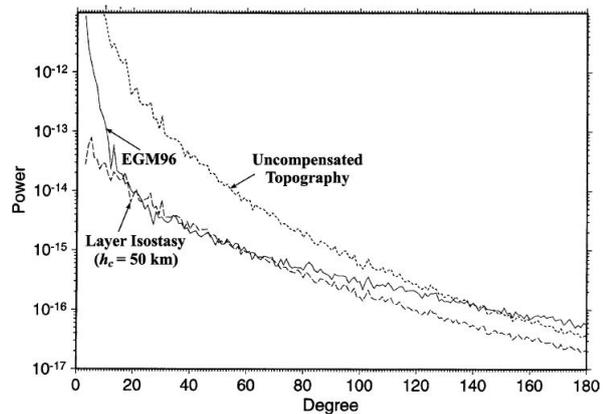
**Figur 5.6:** Zur Berechnung von Flächenbelegungen je nach geologischer Situation (ohne Übergangsbereich)

$$\kappa_{i,j;Kont.} = +(h_1 * (\rho_1 - \rho_0)) \quad \kappa_{i,j;Ozean} = -(h_2 * (\rho_3 - \rho_2)) \quad \kappa_{i,j;Eis} = +(h_3 * (\rho_{Eis} - \rho_0))$$

Die Qualität dieser in der Regel aus topographischen Informationen abgeleiteten Potentialmodelle, wird zumeist aus der Korrelation des Amplitudenspektrums des isostatischen Modells mit dem Amplitudenspektrum eines tatsächlichen Feldes abgeschätzt (3.36 - 3.38). Es wird davon ausgegangen, dass sich eine isostatisch kompenzierte Topographie im nach Kugelfunktionen entwickelten Schwerefeld besonders im Entwicklungsbereich  $12 \leq n \leq 75$  ausprägt.



**Figur 5.7:** Gradvarianzen des isostatischen Modells in sphärischer Approximation für unterschiedliche Ausgleichstiefen [Tsoulis und Stary, 2005]



**Figur 5.8:** Gradvarianzen des isostatischen Modells in sphärischer Approximation für unkompenzierte Topographie [Tsoulis und Stary, 2005]

Natürlich ist wegen der schwierigen Beziehungen von Kugelfunktionen, deren Frequenzinhalt und dem Amplitudenspektrum klar, dass eine besonders gute Anpassung des Modellspektrums an das Spektrum des tatsächlichen Feldes nicht zwangsläufig eine besonders gute Anpassung einzelner Koeffizienten und damit des durch diese Koeffizienten repräsentierten Schwerefeldes bedeutet [Sünkel, 1990].

Das Spektrum der unkompenzierten Topographie ist vielfach bestimmt worden, z. B. von [Balmino u. a., 1973]. Zur Bestimmung einer optimalen Ausgleichstiefe gibt es ebenfalls zahlreiche Untersuchungen. Eine optimale

global anwendbare Ausgleichstiefe von ca. 50 km wurde unter anderem auch von [Rapp, 1982] bestimmt. Allerdings ist dieser Wert bei genauerer, regionaler Betrachtungsweise nicht immer zutreffend. Einige Autoren gehen von einer Ausgleichstiefe aus, die im Bereich von  $25 \text{ km} \leq h_a \leq 50 \text{ km}$  [Kaban u. a., 1997b] liegt. [Rummel u. a., 1988] haben zeigen können, dass die wahrscheinlichsten Ausgleichstiefen nur in geringem Umfang von der Wahl des Modells abhängen, also unabhängig davon, ob das Airy-Modell, das Pratt-Modell oder ein anderes (z. B. Vening-Meinesz-Modell) Modell in Ansatz gebracht wird. Zudem wird hierin vermutet, dass eventuell zu große Ausgleichstiefen mit Effekten der Mantelkonvektion erklärt werden können.

Alle genannten Autoren leiten ihre Untersuchungen zur Bestimmung der optimalen Ausgleichstiefe zumeist für einen kugelförmigen Erdkörper mit dem Radius  $R$  ab, d. h. in sphärischen Approximation. Die hier vorgeschlagene Modellierung isostatischer Kompensation mit Flächenbelegungen hat den Vorteil unabhängig von der gewählten Referenz gültig zu sein. Das durch isostatische Effekte verursachte „Störpotential“ kann, mittels Flächenbelegungen formuliert, auch als Störung an ein hydrostatisches und ellipsoidisches Referenzpotential angebracht werden (Kapitel 7.5). Dies ist ein Vorteil der hier vorgeschlagenen Modellbildung.

## 6 Daten

Das Schwerfeld der Erde wird durch das Kugelfunktionsmodell EIGEN-GL04C von GFZ-Potsdam und GRGS-Toulouse [Förste u. a., 2008] repräsentiert und zur Bestimmung von Erdschwerfeldparametern wie Geoidundulationen mit dem Normalschwerfeld des GRS80 verglichen.

Das Modell einer hydrostatisch abgeplatteten Erde wird aus dem von [Wziontek, 2004] vorgestellten Dichtemodell HA2-337-C (abgekürzt: WZIO) entwickelt. Als zusätzliche Referenz wird weiterhin das Dichtemodell des PREM [Dziewonski und Anderson, 1981] verwendet.

Die für die Formulierung eines globalen isostatischen Massenausgleichs notwendigen topographischen Informationen werden dem globalen Topographie-/Bathymetrie-Modell ETOPO2v2 entnommen. Für die Modellierung der Kern-Mantel-Grenze wird in dieser Arbeit auf die Kugelfunktionsentwicklungen der Topographie dieser Grenze von [Morelli und Dziewonski, 1987], [Doornbos und Hilton, 1989] und [Sze und van der Hilst, 2003] zurückgegriffen.

### 6.1 Das Schwerereferenzfeld GRS80

Das GRS80 (für Anwendungen der Satellitengeodäsie modifiziert als WGS84) stellt das zurzeit beste verfügbare globale geodätische Referenzsystem für die Erde für Kartierungs-, Positionierungs- und Navigationsaufgaben dar. Das GRS80/WGS84-Koordinatensystem ist ein konventionelles erdverbundenes Referenzsystem. Es ist geozentrisch gelagert. Die das GRS80 beschreibenden Konstanten wurden im Dezember 1979 auf der 17. Generalversammlung der IUGG in Canberra, Kanada festgelegt. Die Bestimmung des Massenzentrums bezieht die Masse der Atmosphäre mit ein und das ermittelte Massenzentrum ist zugleich geometrischer Ursprung für die Beschreibung des GRS80/WGS84 und seiner z-Achse als Rotationsachse des Rotationsellipsoids. Die das GRS80 definierenden Parameter (Geometrie und ellipsoidisches Normalschwerfeld) sind:

$$\begin{aligned} a &= 6378137.0 \text{ m} \\ J_2 &= 108263 \cdot 10^{-8} \\ GM(\text{inkl. Atmosphäre}) &= 3986005 \cdot 10^8 \frac{\text{m}^3}{\text{sec}^2} = 398600.5 \frac{\text{km}^3}{\text{sec}^2} \\ \omega &= 7292115 \times 10^{-11} \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Das WGS84 verwendet die geringfügig geänderten Werte

$$\begin{aligned} f &= 1/298.257223563 \\ GM(\text{inkl. Atmosphäre}) &= 3986004.418 \cdot 10^8 \frac{\text{m}^3}{\text{sec}^2} = 398600.4418 \frac{\text{km}^3}{\text{sec}^2} \end{aligned}$$

Die Gravitationskonstante  $G$  hat den Wert

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2} = 6,673 \cdot 10^{-20} \frac{\text{km}^3}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2} \tag{6.2}$$

Aus  $GM$  und  $G$  ergibt sich für das GRS80 eine Erdmasse von

$$M_{\text{Erde}} = 5.9733328 \cdot 10^{24} \text{ kg} \tag{6.3}$$

Für die Berechnung des Normalpotentials und aller daraus abzuleitenden Größen werden die folgenden harmonischen, vollständig normalisierten zonalen Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationspotentials verwendet.

$$\begin{aligned}
C_{2,0}^{WGS84} &= -0.484166774985 \cdot 10^{-3} \\
C_{4,0}^{WGS84} &= 0.790303733511 \cdot 10^{-6} \\
C_{6,0}^{WGS84} &= -0.168724961151 \cdot 10^{-8} \\
C_{8,0}^{WGS84} &= 0.346052468394 \cdot 10^{-11} \\
C_{10,0}^{WGS84} &= -0.265002225747 \cdot 10^{-14}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Das Normalpotential  $U$  berechnet sich mit diesen Koeffizienten wie folgt:

$$U(r, \vartheta) = \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{n=2}^{10,2} C_{n0}^{WGS84} \left( \frac{a}{r} \right)^n \bar{P}_n(\cos \vartheta) \right) \tag{6.5}$$

und hat auf der Oberfläche des geometrisch definierten Ellipsoids den Wert

$$U_0 = 6.26368517146 \cdot 10^7 \frac{m^2}{sec^2} \tag{6.6}$$

Weitere nützliche abgeleitete geometrische und physikalische Konstanten des WGS84 sind:

$$\begin{aligned}
b &= 6356752.3142 \text{ m} \\
e &= 8.1819190842622 \cdot 10^{-2} \\
\gamma_{\text{Äqu}} &= 9.7803253359 \frac{m}{sec^2} \\
\gamma_{\text{Pol}} &= 9.8321849378 \frac{m}{sec^2} \\
m &= \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} = 0.00344978650684
\end{aligned} \tag{6.7}$$

## 6.2 Das Schwerfeld von GFZ-Potsdam und GRGS-Toulouse EIGEN-GL04C

Das Schwerfeldmodell EIGEN-GL04C (abgekürzt: EIGEN) aus dem Jahr 2006 ist eine kombinierte Schwerfeldlösung aus GRACE<sup>1</sup>- und LAGEOS<sup>2</sup>-Daten, sowie  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  gravimetrischen und altimetrischen Oberflächendaten. Die Eingangsdaten wurden am GFZ-Potsdam und dem GRGS (Groupe de Recherche de Geodesie Spatiale) Toulouse prozessiert [Förste u. a., 2008].

Zusätzlich zu den Satellitendaten wurden folgende Daten integriert (Figur 6.1):

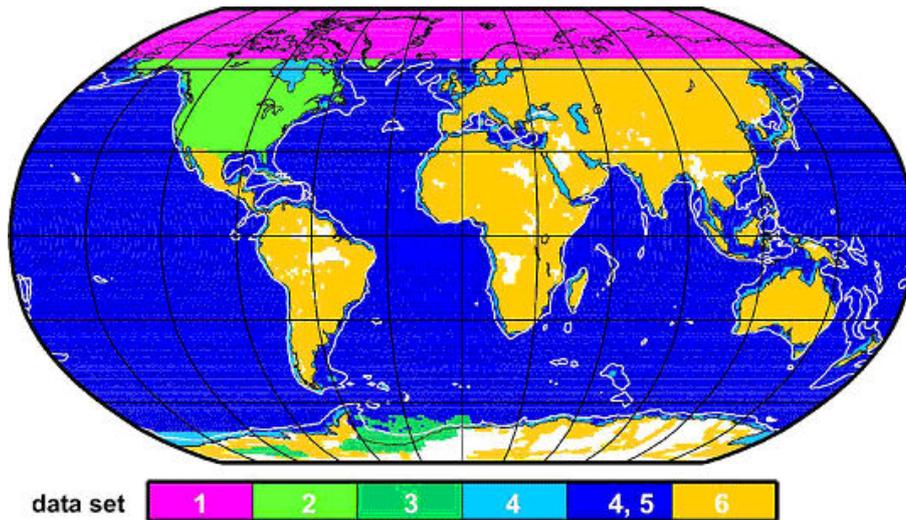
- Datensatz 1: ArcGP (arktisches Gravimetrie Projekt) Schwereanomalien für  $\vartheta \leq 26^\circ$
- Datensatz 2: NRCan Schwereanomalien für Nordamerika
- Datensatz 3: AWI und LDO Schwereanomalien in Teilbereichen der Antarktis und ozeanischen Eisflächen
- Datensatz 4: NIMA altimetrische Schwereanomalien über den Ozeanen
- Datensatz 5: ozeanische Geoidundulationen aus CLS01 altimetrischen Ozeantopographien
- Datensatz 6: NIMA Schwereanomalien an Land, wenn nicht bereits durch die Datensätze 1-3 beschrieben
- Datensatz 7: Schiffsgravimetrische Schwereanomalien in ozeanischen Bereichen mit Meerestiefen kleiner als 2000 m

Das Schwerfeldmodell EIGEN wird als Satz vollständig normalisierter Kugelfunktionskoeffizienten bis zu Grad und Ordnung 360 zur Verfügung gestellt. Für EIGEN wurde mit geringfügig anderen Werten für die große Halbachse des Erdellipsoids  $a$  und die geozentrische Gravitationskonstante  $GM$  gerechnet

$$\begin{aligned}
a &= 6378136.460 \text{ m} \\
GM(\text{mit Atmosphäre}) &= 3986004.415 \cdot 10^8 \frac{km^3}{sec^2}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

<sup>1</sup>GRACE: Gravity Recovery and Climate Experiment

<sup>2</sup>LAGEOS: Laser Geodynamics Satellite



**Figur 6.1:** Datenherkunft für das Schwerefeldmodell EIGEN

Die dynamische Abplattung  $J_2$  beträgt abweichend vom Wert des WGS84

$$J_2 = 0.484165227094 \cdot 10^{-3} \quad (6.9)$$

### 6.3 Das radialsymmetrische Dichtemodell PREM und seine Modifikation

Das globale radialsymmetrische Dichtemodell aus PREM [Dziewonski und Anderson, 1981] teilt den Erdkörper in 11 Schichten ein. Mit den entsprechenden Schichtkantenradien und schichtweisen Dichtefunktionen sind dies im Einzelnen.

k	Bezeichnung	Radius $r_{k-1}$ [km]	Radius $r_k$ [km]	$\rho_{k_{Anf}}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\rho_{k_{End}}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\bar{\rho}_k$ [g/cm <sup>3</sup> ]
1	Inner core	0.0	1221.5	13.08850	12.76360	12.89360
2	Outer core	1221.5	3480.0	12.16630	9.90344	10.90070
3	Lower mantle	3480.0	5701.0	5.56646	4.38074	4.90358
4	Transition zone	5701.0	5771.0	3.99212	3.97582	3.98394
5		5771.0	5971.0	3.97582	3.72375	3.84835
6		5971.0	6151.0	3.54326	3.43577	3.48899
7	LVZ	6151.0	6291.0	3.35949	3.37471	3.36716
8	LID	6291.0	6346.6	3.37471	3.38075	3.37774
9	Crust	6346.6	6356.0	2.90000	2.90000	2.90000
10		6356.0	6368.0	2.60000	2.60000	2.60000
11	Ocean	6368.0	6371.0	1.02000	1.02000	1.02000

**Tabelle 6.1:** Das Dichtemodell aus PREM – mittlere Dichten

Der Dichteverlauf innerhalb einer Schicht berechnet sich über

$$\rho(r) = B + C \frac{r}{A} + D \frac{r^2}{A^2} + E \frac{r^3}{A^3} \quad \text{mit} \quad A = 6371.000 \text{ km} \quad (6.10)$$

bei Verwendung der Koeffizienten aus Tabelle 6.2:

$k$	Bezeichnung	$r_{kmin}$ [km]	$r_{kmax}$ [km]	$B$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$C$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$D$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$E$ [g/cm <sup>3</sup> ]
p01	innerer Kern	0.0	1221.5	13.0885	0.0000	-8.8381	0.0000
p02	äußerer Kern	1221.5	3480.0	12.5815	-1.2638	-3.6426	-5.5281
p03	unterer Mantel	3480.0	5701.0	7.9565	-6.4761	+5.5283	-3.0807
p04	oberer Mantel 1	5701.0	5771.0	5.3197	-1.4836	0.0000	0.0000
p05	oberer Mantel 2	5771.0	5971.0	11.2494	-8.0298	0.0000	0.0000
p06	oberer Mantel 3	5971.0	6151.0	7.1089	-3.8045	0.0000	0.0000
p07	oberer Mantel 4	6151.0	6291.0	2.6910	+0.6924	0.0000	0.0000
p08	oberer Mantel 5	6291.0	6346.6	2.6910	+0.6924	0.0000	0.0000
p09	untere Kruste	6346.6	6356.0	2.9000	0.0000	0.0000	0.0000
p10	obere Kruste	6356.0	6368.0	2.6000	0.0000	0.0000	0.0000
p11	Ozeane	6368.0	6371.0	1.0200	0.0000	0.0000	0.0000

**Tabelle 6.2:** Das Dichtemodell PREM – Koeffizienten zur Dichtebestimmung

Zur Berechnung des Außenraumpotentials einer ellipsoidisch geschichteten Modellerde (ausgehend vom globalen Dichtemodell PREM), muss das kugelsymmetrische Modell PREM ellipsoidisch modifiziert werden. Randbedingung an die Einführung einer schalenweisen Abplattung  $f_k$  ist aber, dass das Volumen einer jeden Schale gegenüber der kugelsymmetrischen Formulierung unverändert bleibt und sich damit die gleiche Gesamtmasse des Systems ergibt. Zudem wird die in Tabelle 6.1 angegebene mittlere Dichte  $\bar{\rho}_k$  benötigt, da zunächst mit schalenweise konstanter Dichte gerechnet werden soll. Alle Schalen müssen nach ellipsoidischer Modifikation das gleiche Volumen und die gleiche Masse haben, wie im PREM vorgegeben. Die Masse, das Volumen und die mittlere Dichte einer Schicht berechnen sich wie folgt:

$$M_k = \iiint_{\text{Körper}} \rho r^2 \sin \vartheta \, d\lambda \, d\theta \, dr = 4\pi \int_{r_{kmin}}^{r_{kmax}} \rho r^2 \, dr \quad (6.11)$$

$$= 4\pi \left[ \frac{B}{3} (r_{kmax}^3 - r_{kmin}^3) + \frac{C}{4A} (r_{kmax}^4 - r_{kmin}^4) + \frac{D}{5A^2} (r_{kmax}^5 - r_{kmin}^5) + \frac{E}{6A^3} (r_{kmax}^6 - r_{kmin}^6) \right]$$

$$V_k = \frac{4}{3}\pi (r_{kmax}^3 - r_{kmin}^3) \quad (6.12)$$

$$\bar{\rho}_k = \frac{M_k}{V_k} \quad (6.13)$$

Für die Gleichheit von Masse und Volumen muss für jede Schale gelten

$$V_{k \text{ Ellipsoidschale}} = \frac{4}{3}\pi a_k^2 b_k - \frac{4}{3}\pi a_{k-1}^2 b_{k-1} \equiv V_{k \text{ Kugelschale}} = \frac{4}{3}\pi (r_{kmax}^3 - r_{kmin}^3) \quad (6.14)$$

Damit ergibt sich für die Geometrie einer Ellipsoidschale folgende Bestimmungsgleichung

$$a_k^2 b_k - a_{k-1}^2 b_{k-1} = r_{kmax}^3 - r_{kmin}^3$$

Berücksichtigt man die geometrische Abplattung einer Schale  $f_k$

$$f_k = \frac{a_k - b_k}{a_k} \quad (6.15)$$

folgt für die Schalengeometrie

$$a_{k-1} = \sqrt[3]{\frac{a_k^2 b_k - r_{kmax}^3 + r_{kmin}^3}{1 - f_{k-1}}} \quad (6.16)$$

So lässt sich bei vorgegebener Abplattung  $f_k$  die Geometrie aller Schichten bestimmen. Für PREM ergibt sich mit dem globalen Abplattungsgradienten aus (4.11) Tabelle 6.3

$k_{PREM}$	$r_{k \min}$ [km]	$r_{k \max}$ [km]	$\bar{\rho}_k$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$f_k$ [ ]	$a$ [km]	$b$ [km]	$a - b$ [km]
1	0.0	1221.5	12.8936	0.00180186	1222.2560	1220.0537	2.2023
2	1221.5	3480.0	10.9007	0.00248209	3482.8866	3474.2418	8.6448
3	3480.0	5701.0	4.9036	0.00315102	5707.0016	5689.0187	17.9829
4	5701.0	5771.0	3.9839	0.00317210	5777.1160	5758.7904	18.3256
5	5771.0	5971.0	3.8484	0.00323234	5977.4482	5958.1271	19.3211
6	5971.0	6151.0	3.4890	0.00328655	6157.7542	6137.5164	20.2378
7	6151.0	6291.0	3.3672	0.00332872	6297.9967	6277.0324	20.9642
8	6291.0	6346.6	3.3777	0.00334546	6353.6941	6332.4380	21.2560
9	6346.6	6356.0	2.9000	0.00334829	6363.1106	6341.8050	21.3056
10	6356.0	6368.0	2.6000	0.00335191	6375.1317	6353.7629	21.3688
11	6368.0	6371.0	1.0200	0.00335281	6378.1370	6356.7523	21.3847

**Tabelle 6.3:** Das Dichtemodell PREM – ellipsoidisch modifiziert

Die Gesamtmasse des Modells beträgt  $5.97318 \cdot 10^{24}$ kg. Die Masse liegt unterhalb des Wertes aus (3.6), den man als Erdmasse der Definition des GRS80 entnehmen kann.

## 6.4 Das radialsymmetrische Dichtemodell HA2-337-C und seine Modifikation

[Wziontek, 2004] hat, ausgehend von einem sphärischen  $n$ -Schichtenmodell gemäß PREM, das Dichtemodell HA2-337-C (abgekürzt: WZIO) entwickelt, welches die geodätischen Primärdaten (Erdmasse, Trägheitsmomente, etc.) reproduziert und darüber hinaus physikalisch plausibel, einen hydrostatisch ausgeglichenen Körper beschreibt. Er konnte zeigen, dass es möglich ist, eine in guter Übereinstimmung mit dem physikalischen Zusammenhang zwischen Dichte, seismischen Geschwindigkeiten und den elastischen Parametern einzelner Gesteinsschichten stehende radialsymmetrische Dichtefunktion für eine hydrostatisch ausgeglichene Erde abzuleiten.

Postuliert man eine für den gesamten Körper gültige Druck-Dichte-Relation und berücksichtigt die Poisson-Gleichung für das Gravitationspotential im Innenraum des Körpers unter der Annahme hydrostatischen Gleichgewichts, ergibt sich eine Differentialgleichung, deren Lösungen eine solche Parametrisierung der Dichtefunktion ermöglichen.

Allerdings ist auch weiterhin die Unterscheidung in einzelne Datengruppen (Schichten) notwendig, um eine stabile Lösung zu bekommen. So kann z. B. alleine aus den seismischen Geschwindigkeiten nur der Verlauf der schichtweisen Dichtefunktion abgeleitet werden. Deren absolutes Niveau ergibt sich erst unter Einbeziehung weiterer Informationen, wie der Dichte an der Kruste-Mantel-Grenze, den Angaben zu Gesamtmasse und Trägheitsmomenten der Erde, sowie den Frequenzen von Erdeigenschwingungen. Neben diesen Primärdaten ist aber zu berücksichtigen, dass die mechanische Stabilität eines selbst gravitierenden Körpers nur dann gewährleistet sein kann, wenn die Dichte kontinuierlich mit der Tiefe zunimmt. Diese Forderung ist im PREM für die LVZ (low velocity zone) nicht erfüllt. Hier nimmt die Dichte mit der Tiefe ab. PREM bildet aber dennoch die Grundlage für die Beschreibung der von Wziontek abgeleiteten Dichtefunktion für eine vollständig hydrostatisch ausgeglichene Erde mit einem strengen hydrostatischen Dichtegradienten.

Da es sich bei der Erde in guter Näherung um einen abgeplatteten Rotationskörper handelt, kann nun abweichend von der Formulierung von Wziontek ein radialsymmetrisches Dichtemodell entwickelt werden, dessen Schichten hydrostatisch abgeplattet sind.

[Wziontek, 2004] geht von einem sphärischen 11-Schichten Modell, gemäß PREM aus.

Region	Tiefe [km]	Radius [km]	Bezeichnung
A	24	6346	Kruste
B	80	6291	
B	220	6151	
B	400	5971	oberer Mantel
C	600	5771	
C	670	5701	
D'	771	5600	Übergangszone
D	2741	3630	unterer Mantel
D''	2891	3480	Übergangszone
E	5149	1221	äußerer Kern
G	6371	0	innerer Kern

Dabei werden die physikalischen Eigenschaften der Kruste (Dichte, seismische Geschwindigkeiten, etc.) nicht modelliert und später durch die Schichtung der Kruste (untere Kruste, obere Kruste, Ozeane) mit jeweils konstanter Dichte ersetzt. Daraus ergibt sich das 13-Schicht Modell der Erde WZIO.

**Figur 6.2:** PREM-11-Schichten-Modell

[Wziontek, 2004] parametrisiert die globale Dichtefunktion mit Polynomen, die nur gerade Potenzen des Radius enthalten, wie folgt (mit  $A$  aus (6.10))

$$\rho(r) = \left( \sum_{i=0}^N d_{2i} \frac{r^{2i}}{A^{2i}} \right) + e \left( \frac{r}{A} \right)^{-\lambda} = d_0 + d_2 \frac{r^2}{A^2} + d_4 \frac{r^4}{A^4} + d_6 \frac{r^6}{A^6} + d_8 \frac{r^8}{A^8} + e \left( \frac{r}{A} \right)^{-\lambda} \quad (6.17)$$

Die Anzahl der notwendigen Koeffizienten ergibt sich gemäß Wziontek aus der gewünschten Genauigkeit der Anpassung an den seismischen Parameter  $\eta$  der Modellschichten. Mit

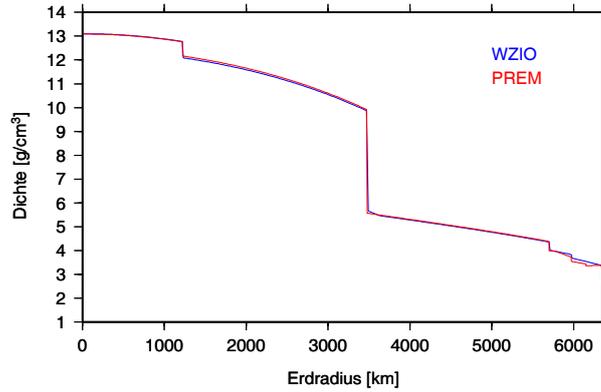
- einer Dichte unterhalb der Mohorovicic-Diskontinuität von  $\rho_M = 3.37g/cm^3$
- $\eta$  als lineare Funktion  $\eta = A_\eta + B_\eta x$
- einer Anpassung an die Eigenschwingungen aus PREM

ergeben sich für das Modell WZIO folgende Koeffizienten:

$k$	Bezeichnung	$r_{k \min}$ [km]	$r_{k \max}$ [km]	$d_0$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$d_2$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$d_4$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$d_6$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$d_8$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$e$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\lambda$ [-]
w01	innerer Kern	0.0	1221.5	13.100	-8.921	0.000	0.000	0.000	0.00000	0.00000
w02	äußerer Kern	1221.5	3480.0	12.361	-7.893	-0.589	-4.109	0.000	0.00416	1.00000
w03	Übergangszone	3480.0	3630.0	3.278	-3.204	0.000	0.000	0.000	1.83764	1.00000
w04	unterer Mantel	3630.0	5600.0	6.623	-4.753	4.735	-3.719	0.998	0.00000	0.00000
w05	Übergangszone	5600.0	5701.0	6.128	-2.225	0.015	0.000	0.000	0.00000	0.00000
w06	oberer Mantel 1	5701.0	5771.0	5.859	-2.388	0.102	0.000	0.000	0.00000	0.00000
w07	oberer Mantel 2	5771.0	5971.0	3.950	2.261	-2.728	0.000	0.000	0.00000	0.00000
w08	oberer Mantel 3	5971.0	6151.0	5.484	-1.564	-0.555	0.000	0.000	0.00000	0.00000
w09	oberer Mantel 4	6151.0	6291.0	8.854	-8.335	2.830	0.000	0.000	0.00000	0.00000
w10	oberer Mantel 5	6291.0	6346.6	8.642	-7.899	2.606	0.000	0.000	0.00000	0.00000
w11	untere Kruste	6346.6	6356.0	2.900	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000	0.00000
w12	obere Kruste	6356.0	6368.0	2.600	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000	0.00000
w13	Ozeane	6368.0	6371.0	1.020	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00000	0.00000

**Tabelle 6.4:** Das Dichtemodell WZIO

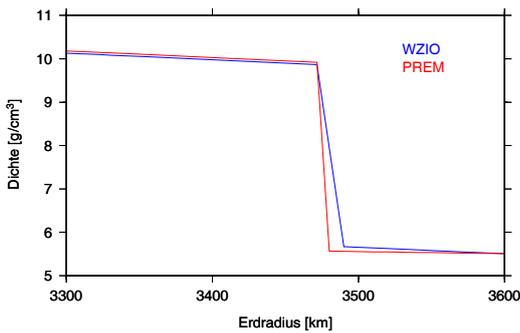
Der Vergleich der Dichtefunktion gemäß WZIO mit der Dichtefunktion aus PREM ergibt Figur 6.3:



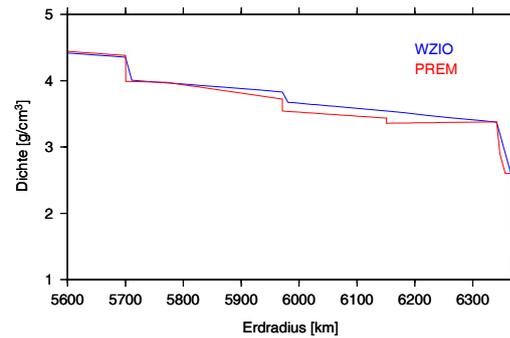
**Figur 6.3:** Dichteverlauf der Modelle PREM und WZIO

Beide Dichtefunktionen unterscheiden sich besonders an der Kern-Mantel-Grenze und im Krustenbereich. Das Modell WZIO verzichtet auf eine Zone abnehmender Dichte und hält sich damit streng an die durch den hydrostatischen Ansatz gegebene Forderung (4.4).

In Ausschnitten sieht der Dichteverlauf wie folgt aus:



**Figur 6.4:** Dichteverlauf an der Kern-Mantel-Grenze



**Figur 6.5:** Dichteverlauf in der Kruste

Wendet man nun auf das Modell WZIO den globalen Abplattungsgradienten (4.10) an, ergibt sich folgende Geometrie

$k_{HA2}$	$r_{k \min}$ [km]	$r_{k \max}$ [km]	$\bar{\rho}_k$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$f_k$ [ ]	$a$ [km]	$b$ [km]	$a - b$ [km]
1	0.1	1221.5	12.9032	0.00180186	1222.2560	1220.0537	2.2023
2	1221.5	3480.0	10.8410	0.00248209	3482.8866	3474.2418	8.6448
3	3480.0	3630.0	5.5725	0.00252726	3633.0656	3623.8839	9.1817
4	3630.0	5600.0	4.8885	0.00312060	5605.8383	5588.3447	17.4936
5	5600.0	5701.0	4.3869	0.00315102	5707.0016	5689.0187	17.9829
6	5701.0	5771.0	3.9902	0.00317210	5777.1160	5758.7904	18.3256
7	5771.0	5971.0	3.9010	0.00323234	5977.4482	5958.1271	19.3211
8	5971.0	6151.0	3.6129	0.00328655	6157.7542	6137.5164	20.2378
9	6151.0	6291.0	3.4795	0.00332872	6297.9967	6277.0324	20.9642
10	6291.0	6346.6	3.3935	0.00334546	6353.6941	6332.4380	21.2560
11	6346.6	6356.0	2.9000	0.00334829	6363.1106	6341.8050	21.3056
12	6356.0	6368.0	2.6000	0.00335191	6375.1317	6353.7629	21.3688
13	6368.0	6371.0	1.0200	0.00335281	6378.1370	6356.7523	21.3847

**Tabelle 6.5:** Das Dichtemodell WZIO – ellipsoidisch modifiziert (STY1)

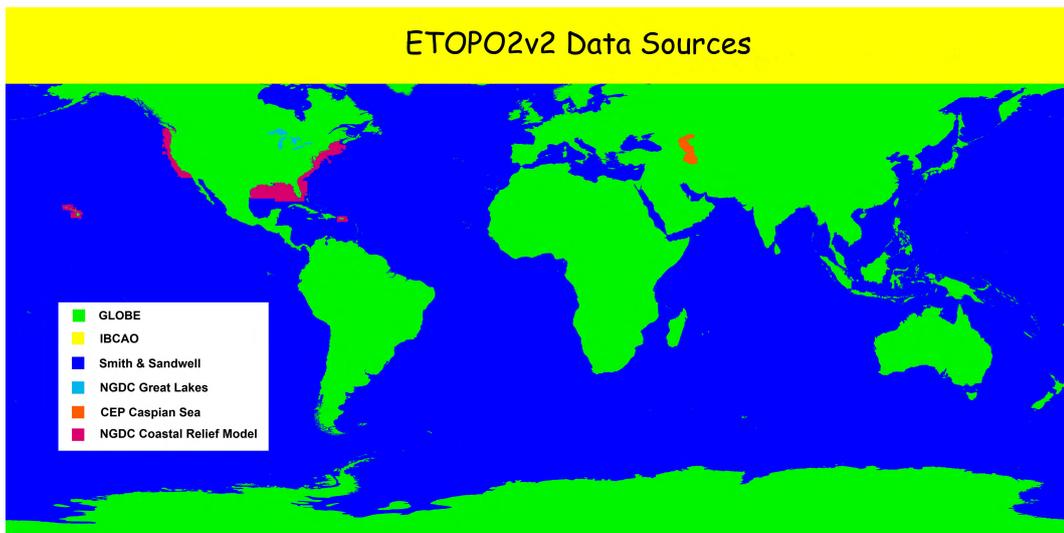
Dieses Modell besitzt eine Gesamtmasse von  $5.97321 \cdot 10^{24}$  kg, die ebenfalls unterhalb des GRS80-Wertes liegt. Zusammen mit dem Abplattungsgradienten aus (4.10)

$$\frac{df}{dq} = 3.0118 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{\text{km}}$$

definiert dieses ellipsoidisch modifizierte Modell, das Startmodell **STY1**.

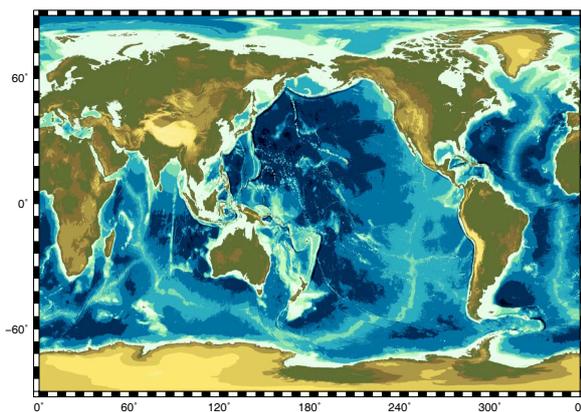
## 6.5 Das globale digitale Höhenmodell ETOPO2v2

Das globale digitale Höhenmodell ETOPO2v2<sup>3</sup> aus dem Jahr 2006 (vom National Geophysical Data Center NGDC zur Verfügung gestellt) ist ein Geländemodell mit der Auflösung  $2' \times 2'$  und beinhaltet topographische/bathymetrische Daten unterschiedlichster Herkunft. ETOPO2v2 enthält Daten aus folgenden Quellen:

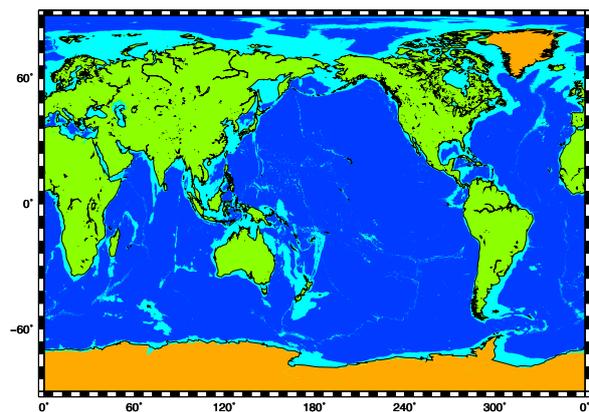


*Figur 6.6: Datenherkunft ETOPO2v2*

Es ergeben sich für die Topographie in der Relief Darstellung mit GMT (Generic Mapping Tools), sowie für die nach Kapitel 5.2 blockweise klassifizierte Oberfläche folgende Abbildungen:



*Figur 6.7: Globale Topographie – Reliefdarstellung*



*Figur 6.8: Klassifizierte Erdoberfläche für die isostatische Analyse*

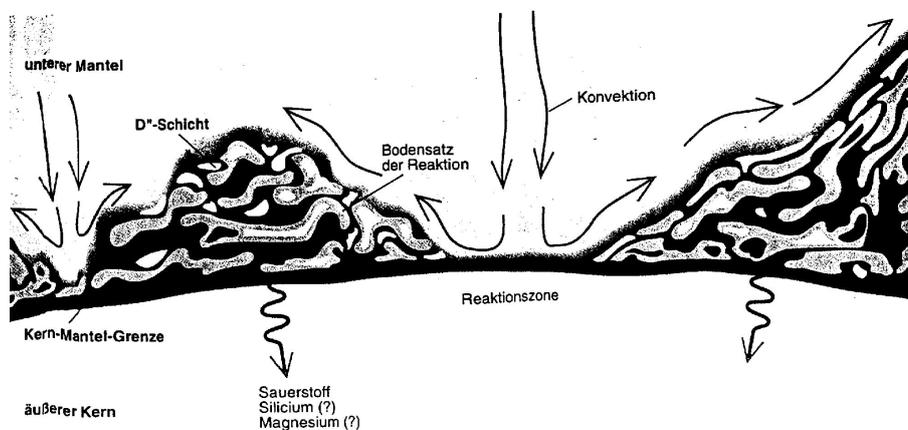
In Figur 6.8 symbolisiert grün für Kontinente, hellblau für Übergangsbereiche, dunkelblau für ozeanische Bereiche und orange für kontinentale Bereiche mit Eisauflast.

<sup>3</sup>Seit Juli 2008 steht auch das  $1' \times 1'$  aufgelöste Global Relief Modell ETOPO1 zur Verfügung [Amante und Eakins, 2008]

## 6.6 Die Grenzschicht zwischen Erdmantel und Erdkern - Die D''-Schicht

In der Tiefe von ca. 2900 km befindet sich der Grenzbereich zwischen Erdkern und Erdmantel, welcher sich durch eine dort nicht mehr mit der Tiefe zunehmende seismische Geschwindigkeit auszeichnet. Vielmehr wurde dort ein beachtlicher Sprung in den seismischen Geschwindigkeiten (auch lateral) festgestellt, was dazu führte, dass man diesem etwa 200 - 400 km mächtigen untersten Bereich des Mantels einen eigenen Namen gab - D''-Schicht. Dieser Name ist ein historisches Relikt aus einer Zeit, in der Geologen jeder Schicht des Erdinneren einen Buchstaben zuordneten. Jede später entdeckte Zwischenschicht erhielt dann einen Strich als Unterscheidungsmerkmal. Die meisten Schichten wurden seitdem umbenannt - der Name D''-Schicht hat sich bis heute erhalten.

In den letzten Jahrzehnten wurden mit Hilfe seismischer Methoden einige wesentliche Charakteristika dieses Bereiches erforscht. Zu den wesentlichen Erkenntnissen zählt unter anderem die Feststellung, dass man es bei den hier vorherrschenden Drücken und Temperaturen mit dem wohl aktivsten Bereich des Systems Erde zu tun hat. Weiterhin wird vermutet, dass von hier wesentliche Ursachen des Erdmagnetfeldes, sowie eines nicht durch Gezeitenkräfte erkläraren Anteils der Nutation ausgehen. An der Kern-Mantel-Grenze treffen eine dichte Form



**Figur 6.9:** Der Übergangsbereich zwischen Kern und Mantel - die D''-Schicht [Anderson und Dziewonski, 1984]

von Eisen-Magnesium-Silicat (Magnesiumsilicat-Perowskit bildet sich bei Drücken von über 20 Gigapascal) und eine flüssige Eisenlegierung aufeinander. Diese Substanzen reagieren an der Kern-Mantel-Grenze bei Drücken von ca. 136 Gigapascal miteinander. Geschmolzenes Material des äußeren Kerns dringt unter dem Einfluss von Kapillarkräften in das Mantelmaterial ein und erzeugt dort eine Art Reaktionsschutt mit einer eigenen seismischen Charakteristik - die D''-Schicht.

Die Unterkante dieser Schicht - die eigentliche Kern-Mantel-Grenze - weicht von einer idealen, glatten Form um bis zu einigen Kilometern ab, was die Auswertung von an dieser Grenzschicht reflektierten und refraktierten P-Wellen zeigt.

Die zur Auswertung herangezogenen seismischen Raumwellen durchlaufen das Untersuchungsgebiet nur auf einer kurzen Strecke relativ zum Gesamtlaufweg der Wellen. Trotzdem erlaubt eine Inversion der Laufzeitinformationen dieser Wellen, eine globale Kartierung der CMB [Dziewonski, 1984]. Die Auswertungen zeigen mögliche Undulationen der CMB (Core-Mantel Boundary) von maximal  $\pm 6$  km relativ zu einem mittleren Schichtradius von 3480 km z. B. in [Morelli und Dziewonski, 1987]. Die Genauigkeit der Auswertung lässt sich steigern, wenn zusätzlich diffraktierte Welleninformationen herangezogen werden [Franck u. a., 1992], da diese eine wesentlich längere Strecke entlang der CMB zurücklegen.

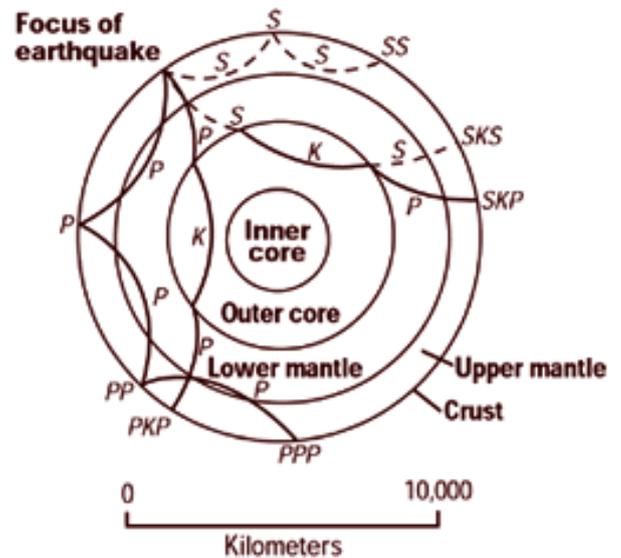
Die Kern-Mantel-Grenze ist, je nach Vorstellung zum Dichtemodell, durch einen Dichtesprung von ca.  $4.9 \text{ g/cm}^3$  auf  $10.9 \text{ g/cm}^3$  gekennzeichnet, welcher, verbunden mit der entsprechenden Topographie dieser Diskontinuität, eine sichtbare Struktur im Schwerfeld an der Erdoberfläche erzeugen müsste. Je nach Auswertemethode ergeben sich bei unterschiedlichen Autoren deutlich unterschiedliche Topographien der CMB.

[Bowin, 1986] konnte allerdings abschätzen, dass die Topographie der Kern-Mantel-Grenze - üblicherweise größer angegeben - maximal um 3 km undulieren dürfte, wenn man deren Wirkung auf das Erdschwerfeld betrachtet. Die in älteren Modellen vorgeschlagenen Undulationen würden bei dem oben genannten Dichtekontrast Geoidundulationen erzeugen, deren Beträge deutlich über denen des tatsächlichen Feldes liegen. Plausibler erscheinen deutlich kleinere Undulationen an der Kern-Mantel-Grenze.

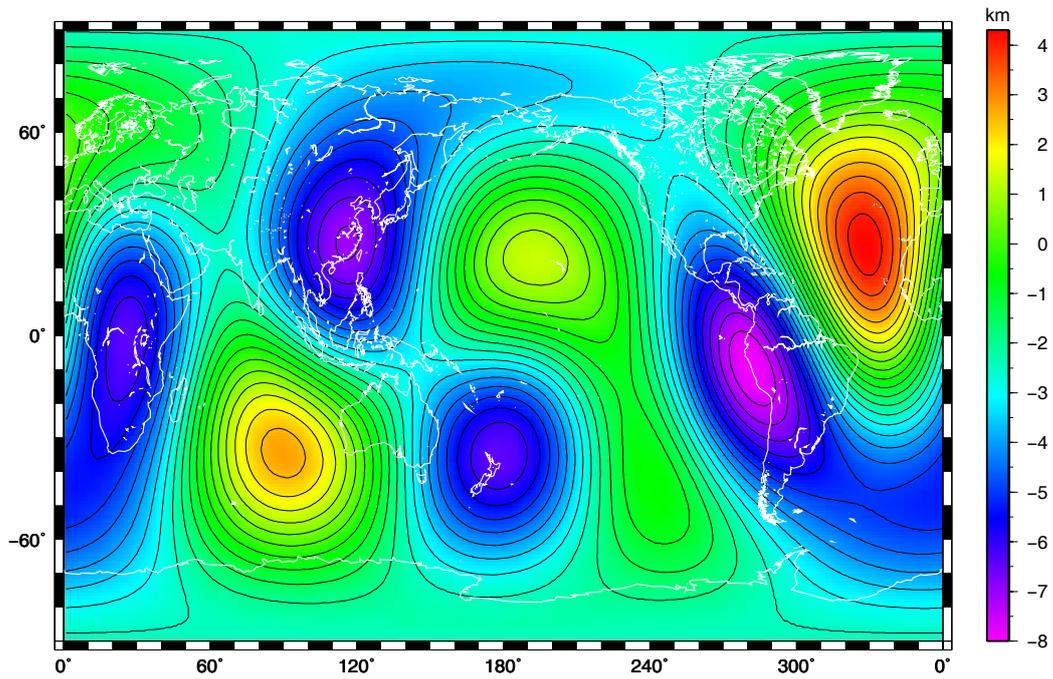
Exemplarisch sind hier die Topographien von [Morelli und Dziewonski, 1987], [Doornbos und Hilton, 1989] und [Sze und van der Hilst, 2003] berücksichtigt. Die Modelle sind jeweils durch die Koeffizienten einer Kugelfunktionsentwicklung nach [Dziewonski, 1984] gegeben. Der maximale Entwicklungsgrad liegt bei  $n=4$ . Die jeweilige Topographie  $\delta r$  in km, also die Abweichung der CMB von einem mittleren Ort, wird mit der Formel

$$\delta r(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n [c_n^m \cos m\lambda + s_n^m \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}^{(\cos \vartheta)} \quad (6.18)$$

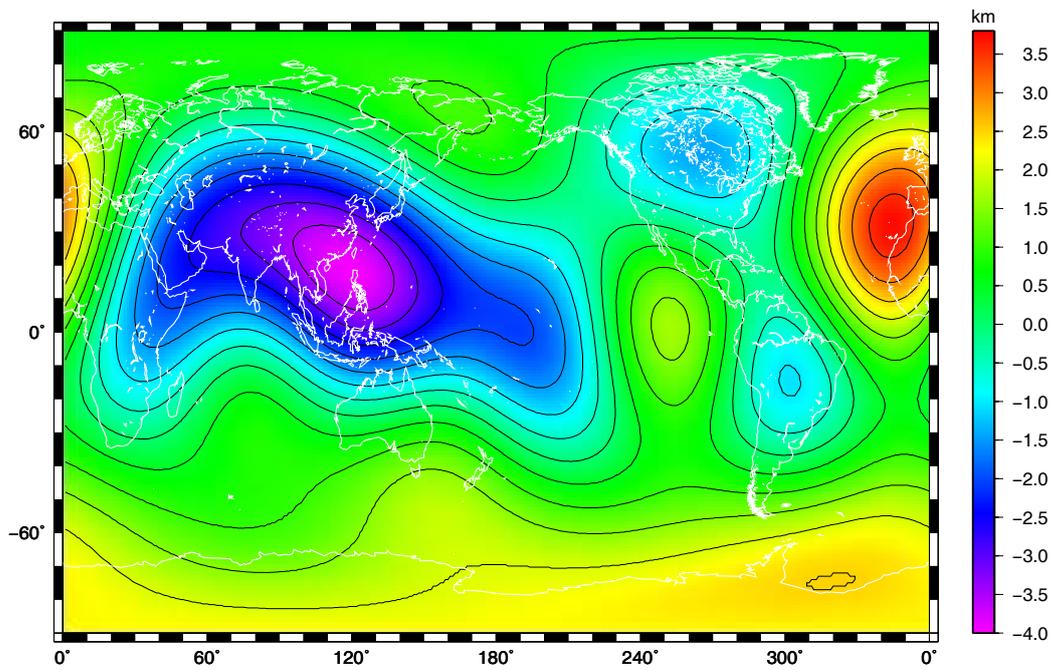
berechnet. Die für diese Modelle gegebenen Koeffizienten sind allerdings im Gegensatz zu den Koeffizienten der Reihenentwicklung für das Potential dimensionslos – sie haben die Einheit km. Die Umrechnung dieser topographischen Koeffizienten in Potentialkoeffizienten ist in Kapitel 7.6 beschrieben. Die zugeordneten vollständig normalisierten Legendreschen Funktionen sind durch (2.18) gegeben.



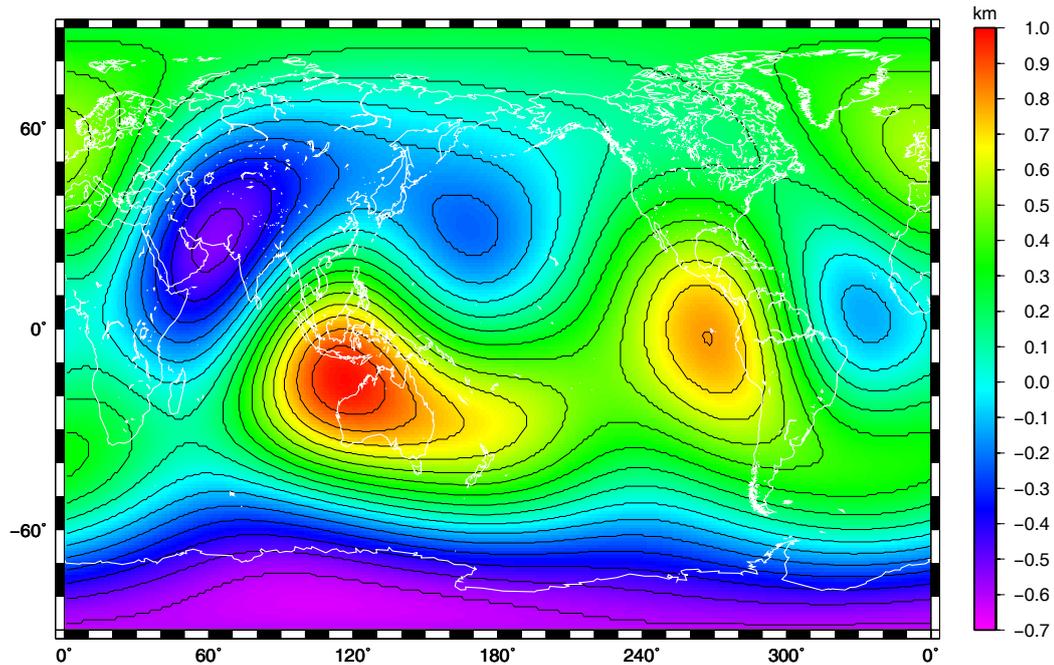
Figur 6.10: Seismische Raumwellen (Quelle: United States Geological Survey)



Figur 6.11: Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach [Morelli und Dziewonski, 1987]



Figur 6.12: Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach [Doornbos und Hilton, 1989]



**Figur 6.13:** Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach [Sze und van der Hilst, 2003]

Alle Modelle zeigen unterschiedliche Strukturen bei unterschiedlichen Beträgen der Topographie. Das Modell von [Sze und van der Hilst, 2003] prägt die „kleinste“ Topographie in der Größenordnung von  $\pm 1$  km aus, das Modell von [Morelli und Dziewonski, 1987] zeigt hingegen die größten topographischen Abweichungen von  $\pm 6$  km.

Die Unterschiede in den jeweiligen Strukturen resultieren zumeist aus dem verwendeten Datenmaterial [Garcia und Souriau, 2000]. Je nach Autor werden unterschiedliche Phaseninformationen verarbeitet. So verwenden [Creager und Jordan, 1986] ausschließlich refraktierte Kernphasen, [Morelli und Dziewonski, 1987] werten zusätzlich reflektierte Phasen aus.

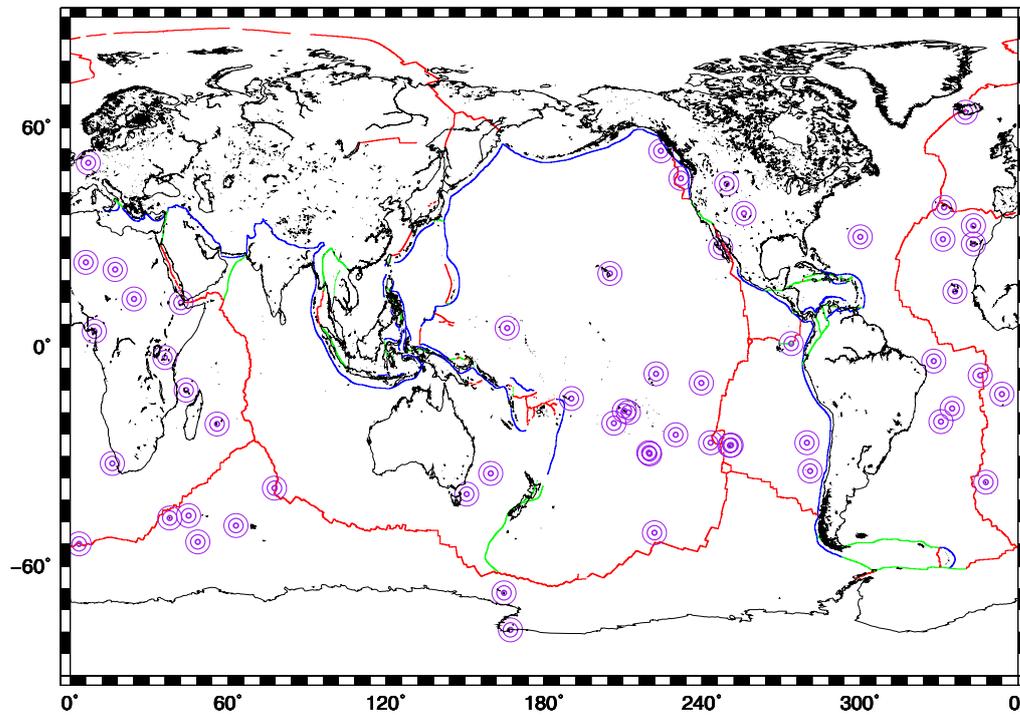
Ein weiteres Problem ergibt sich daraus, dass aus den Laufzeiten zunächst nur Geschwindigkeitsanomalien abgeleitet werden können. Diese lassen sich zwar relativ gut lokalisieren, jedoch ist eine zweifelsfreie Trennung der zwei möglichen Hauptursachen (laterale Geschwindigkeitsanomalien in der D"-Schicht und das Vorhandensein einer Topographie der CMB) mit großer Unsicherheit behaftet. [Garcia und Souriau, 2000] haben die unterschiedlichen Ansätze stochastisch untersucht und erstmals Maximalwerte der CMB-Topographie gefunden, die auch im Sinne dieser Arbeit besser zu den durch die CMB-Topographie verursachten Anomalien im Erdschwerefeld passen. Auf dieser Arbeit aufbauend haben [Sze und van der Hilst, 2003] Ihr Modell der CMB entwickelt.

Zwischen der Erstellung des Modells von [Morelli und Dziewonski, 1987] und dem von [Sze und van der Hilst, 2003] liegen 16 Jahre. Die der Erstellung zugrunde liegenden seismischen Informationen sind in dieser Zeit zahlreicher geworden, und wurden besseren Auswertemethoden unterzogen, so dass das Modell von Sze viel eher der Realität entsprechen wird, auch wenn grundsätzlich die seismischen Auswertemethoden im Hinblick auf ihre Aussagekraft zu Existenz und Gestalt der CMB-Topographie kritisch hinterfragt werden müssen.

## 6.7 Plattengrenzen und Hotspots

Die Grenzen tektonischer Einheiten und Platten, werden von der Universität Texas zur Verfügung gestellt. Eine Liste aktiver Hotspots folgt der Arbeit von [Müller u. a., 1993] und ist ebenfalls an der Universität Texas digital erhältlich.

Es ergibt sich das folgende Bild



*Figur 6.14: Plattengrenzen (rot: Rücken; grün: Transformstörungen; blau: Gräben) und Hotspots*

## 7 Methoden der Potentialberechnung

Alle Potentialberechnungen werden im Folgenden aus Flächenbelegungen abgeleitet. Da die Erde in erster Näherung eine Kugel vom Radius  $R$  ist, kann jede bessere Darstellung der Erdfigur als Abweichung von dieser Kugelform formuliert werden, so auch das Erdellipsoid, die undulierende Kern-Mantel-Grenze, die topographischen Massen an der Erdoberfläche oder die Tiefe der Mohorovicic-Diskontinuität. Diese Strukturen prägen gegenüber dem Potential einer Kugel  $V_{Kugel}(P)$  jeweils ein „Störpotential“  $\nu_{Struktur}$  aus. Diese Potentiale überlagern sich störungsfrei und bilden das Gesamtpotential  $V(P)$

$$V(P) = V_{Kugel}(P) + \sum_{i=1}^n \nu_{Struktur\ i} \quad (7.1)$$

Die „korrigierenden“ Potentiale  $\nu_{Struktur\ i}$  ergeben sich aus überschüssigen bzw. fehlenden Massen, die man sich auf die Referenzfläche gelegt denken muss (Kapitel 3.2). Die daraus resultierende Flächenbelegungsichte  $\mu$  lässt sich mit dem Dichtekontrast  $\Delta\rho$  und der reduzierten Höhe  $\delta r$  formulieren. Es gilt

$$\mu = \Delta\rho \cdot \delta r := \text{Flächenbelegungsichte einer Struktur} \quad (7.2)$$

Nachfolgend werden die Potentialfelder eines hydrostatisch ausgeglichenen Modellkörpers unter sehr vereinfachenden Annahmen (schichtweise konstante Dichte, Beschreibung der geometrischen Orte in 1. Näherung) berechnet. Schrittweise werden die Modellkörper durch das Hinzufügen besserer Annahmen verfeinert. Ziel ist es, ein realistisches hydrostatisch-isostatisches Dichtemodell zu entwickeln, dessen Potentialfeld für Residualfeldbetrachtungen genutzt werden kann.

### 7.1 Das Potential einer ellipsoidischen Modellerde mit schichtweise konstanter Dichte und $r$ in 1. Näherung

Das Potential eines homogenen Ellipsoids in einem Punkt  $P$  im Außenraum des Ellipsoids berechnet sich mit der Flächenbelegungsichte (7.2) gemäß Figur 3.2 (Kapitel 3.2) als Summe des Potentials einer homogenen Kugel vom mittleren Radius  $R$  und dem Potential der ellipsoidischen Abweichung.

$$V(P) = V_{Kugel}(P) + \nu \quad (7.3)$$

Für das Störpotential  $\nu$  folgt nach (3.11)

$$\nu = G\rho R^2 \iint_{\sigma} \frac{h}{l} d\sigma \quad (7.4)$$

Die Abweichung  $h$  zwischen  $r$  und  $R$  wird mit  $r$  in 1. Näherung (3.16)

$$r = R \left( 1 - \frac{2}{3} f P_2(\cos \vartheta) \right)$$

beschrieben. Für  $h$  ergibt sich

$$h = r - R = -\frac{2}{3} R f P_2(\cos \vartheta) \quad (7.5)$$

Für das Potential  $\nu$  bedeutet dies

$$\nu = -\frac{2}{3} G\rho f R^3 \iint_{\sigma} \frac{P_2(\cos \vartheta)}{l} d\sigma \quad (7.6)$$

Mit der Reihenentwicklung für den reziproken Abstand  $1/\ell$  (2.5) und  $r_Q = R$  ergibt sich

$$\nu = -\frac{2}{3} G\rho f R^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} \iint_{\sigma} P_2(\cos \vartheta) P_n(\cos \psi) d\sigma$$

Wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Legendreschen Polynome (Kapitel 2.3) verbleibt unter dem Integral lediglich der Ausdruck für  $n = 2$

$$\iint_{\sigma} P_2(\cos \vartheta) P_2(\cos \psi) d\sigma = \frac{4\pi}{5} P_2(\cos \vartheta)$$

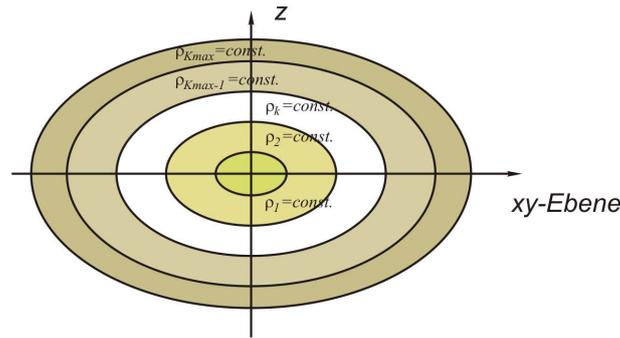
Damit ist  $\nu$  bestimmt

$$\nu = -\frac{8\pi}{15} G \rho f \frac{R^5}{r^3} P_2(\cos \vartheta) \quad (7.7)$$

Addiert man nun noch das Potential für die homogene Kugel, so ergibt sich das gesamte Außenraumpotential eines homogenen Ellipsoids

$$\begin{aligned} V(P) &= V_{KugelR}(P) + \nu \\ &= \frac{4\pi}{3} G \rho \frac{R^3}{r} + \nu \\ &= \frac{4\pi}{3} G \rho \left[ \frac{R^3}{r} - \frac{2}{5} \frac{R^5}{r^3} f P_2(\cos \vartheta) \right] \end{aligned} \quad (7.8)$$

Ist der Modellkörper ellipsoidisch geschichtet ergibt sich das Gesamtpotential durch geschickte Summation, bzw. Differenzbildung der Potentiale einzelner ellipsoidischer Schalen  $k$ . Es ist zu beachten, dass die Oberflächen der einzelnen Schalen abgeplattete Rotationsellipsoide mit unterschiedlicher Abplattung  $f$  sind.



**Figur 7.1:** Ellipsoidischer Schalenbau mit schichtweise konstanter Dichte

Für die Berechnung des Potentials einer ellipsoidischen Schale  $S_i$  wird die Differenz von zwei homogenen Ellipsoiden unterschiedlicher Dimension ( $f_k$ ) gemäß (7.8) gebildet

$$\begin{aligned} V_{S_i}(P) &= \frac{4\pi}{3} G \rho_k \left[ \frac{R_k^3}{r} - \frac{2}{5} \frac{R_k^5}{r^3} f_k P_2(\cos \vartheta) \right] - \frac{4\pi}{3} G \rho_k \left[ \frac{R_{k-1}^3}{r} - \frac{2}{5} \frac{R_{k-1}^5}{r^3} f_{k-1} P_2(\cos \vartheta) \right] \\ &= \frac{4\pi}{3} G \rho_k \left[ \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{r} - \frac{2}{5} \frac{(R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{r^3} P_2(\cos \vartheta) \right] \end{aligned}$$

Für das Gesamtpotential eines ellipsoidisch geschichteten Körpers ergibt sich daraus durch Summation

$$V(P) = \frac{4\pi}{3} G \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left[ \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{r} - \frac{2}{5} \frac{(R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{r^3} P_2(\cos \vartheta) \right] \quad (7.9)$$

Mit

$$P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}$$

ergibt sich

$$V(r, \vartheta) = \frac{4\pi}{3} G \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left[ \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{r} - \frac{(3 \cos^2 \vartheta - 1)}{5} \frac{(R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{r^3} \right] \quad (7.10)$$

bzw.

$$\begin{aligned} W(r, \vartheta) &= V(r, \vartheta) + \Phi(r, \vartheta) \\ &= \frac{4\pi}{3} G \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left[ \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{r} - \frac{(3 \cos^2 \vartheta - 1) (R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 r^3} \right] + \frac{\omega^2}{2} (r^2 \sin^2 \vartheta) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Zudem gilt für die Schwerebeschleunigung (senkrecht zur Oberfläche)

$$\begin{aligned} |\vec{g}_{\text{Modell}}(r, \vartheta)| &= -|\text{grad}W(r, \vartheta)| = -\frac{dW(r, \vartheta)}{dr} \\ &= \frac{4\pi}{3} G \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left[ \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{r^2} - \frac{3(3 \cos^2 \vartheta - 1) (R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 r^4} \right] - \omega^2 r \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (7.12)$$

Das Potential (7.10) lässt sich nach Kapitel 2.4 in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickeln. Einzige Bedingung ist, dass die Funktion auf der Oberfläche einer Kugel gegeben sein muss. Dies ist für  $r_P = a$  der Fall.

$$V(r_P = a, \vartheta_P, \lambda_P) = \frac{4\pi}{3} G \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left[ \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{a} - \frac{(3 \cos^2 \vartheta_P - 1) (R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 a^3} \right] \quad (7.13)$$

Die Kugelfunktionskoeffizienten berechnen sich nach (2.24) zu

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_n^m(Q) \\ \bar{S}_n^m(Q) \end{array} \right\} &= \frac{G}{3} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left[ \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{a} - \frac{(3 \cos^2 \vartheta_P - 1) (R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 a^3} \right] \\ &\cdot \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_n^m(Q) \\ \bar{S}_n^m(Q) \end{array} \right\} &= \frac{G}{3} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left\{ \left[ \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{a} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P \right] \right. \\ &\left. - \left[ \frac{(3 \cos^2 \vartheta_P - 1) (R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 a^3} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P \right] \right\} \end{aligned}$$

Vertauschen von Summation und Integration, sowie Umsortieren liefert

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_n^m(Q) \\ \bar{S}_n^m(Q) \end{array} \right\} &= \frac{G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left\{ \left[ \left( \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{a} + \frac{(R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 a^3} \right) \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P \right] \right. \\ &\left. - \left[ \frac{3 (R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 a^3} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} \cos^2 \vartheta_P \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P \right] \right\} \end{aligned}$$

Mit den Kugelflächenfunktionen aus (2.22) vereinfacht sich die Integration zu

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_n^m(Q) \\ \bar{S}_n^m(Q) \end{array} \right\} &= \frac{G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left\{ \left[ \left( \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{a} + \frac{(R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 a^3} \right) \int_{\lambda=0}^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_P \\ \sin m\lambda_P \end{array} \right\} d\lambda_P \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \right] \right. \\ &\left. - \left[ \frac{3 (R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 a^3} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_P \\ \sin m\lambda_P \end{array} \right\} d\lambda_P \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \cos^2 \vartheta_P \sin \vartheta_P d\vartheta_P \right] \right\} \end{aligned}$$

Im Fall ellipsoidischer Geometrie geht die Längenabhängigkeit verloren ( $m = 0$ ). Daher gilt

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_n^m(Q) \\ \bar{S}_n^m(Q) \end{array} \right\} &= \frac{G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left\{ \left[ \left( \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{a} + \frac{(R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 a^3} \right) \int_{\lambda=0}^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\} d\lambda_P \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \right] \right. \\ &\left. - \left[ \frac{3 (R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5 a^3} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\} d\lambda_P \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \cos^2 \vartheta_P \sin \vartheta_P d\vartheta_P \right] \right\} \end{aligned}$$

Die Integration über  $\lambda_P$  kann ausgeführt werden. Hierbei werden alle Koeffizienten  $\bar{S}_n^m(Q)$  wegen der Längenunabhängigkeit zu 0. Nach Umsortieren erhält man die Koeffizienten

$$\begin{aligned}\bar{C}_n^m(Q) &= \frac{2\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left( \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{a} + \frac{(R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5a^3} \right) \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \\ &\quad - \frac{2\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left( \frac{3(R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5a^3} \right) \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \cos^2 \vartheta_P \sin \vartheta_P d\vartheta_P\end{aligned}$$

Es bleiben folgende 2 Integrale zu lösen:

$$\begin{aligned}\int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \\ \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \cos^2 \vartheta_P \sin \vartheta_P d\vartheta_P\end{aligned}$$

Nach Lösen dieser Integrale durch numerische Integration und mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}Fak1 &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left( \frac{R_k^3 - R_{k-1}^3}{a} + \frac{(R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5a^3} \right) \\ Fak2 &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho_k \left( \frac{3(R_k^5 f_k - R_{k-1}^5 f_{k-1})}{5a^3} \right) \\ IntPnm &= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \\ IntPnmCos &= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \cos^2 \vartheta_P \sin \vartheta_P d\vartheta_P\end{aligned}$$

ergibt sich für die Potentialkoeffizienten

$$\bar{C}_n^m(Q) = \frac{2\pi G}{3} \{Fak1 \cdot IntPnm - Fak2 \cdot IntPnmCos\} \quad (7.14)$$

Die mit diesen Koeffizienten beschriebene Potentialdarstellung muss, damit die Potentiale verglichen werden können, mit der „traditionellen“ Darstellung vergleichbar gemacht werden. Diese lautet nach (3.3)

$$V(r_P, \vartheta_P, \lambda_P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r_P} \right)^n \sum_{m=0}^n [C_n^m(Q) \bar{R}_{nm}(P) + S_n^m(Q) \bar{S}_{nm}(P)]$$

Man erhält für  $r_p = a$

$$\begin{aligned}V(a, \vartheta_P, \lambda_P) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{C}_n^m(Q) \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) + \bar{S}_n^m(Q) \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ &= \frac{GM_{\text{Körper}}}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{a} \right)^n \sum_{m=0}^n \left[ \frac{a}{GM_{\text{Körper}}} \bar{C}_n^m(Q) \bar{R}_{nm}(P) + \frac{a}{GM_{\text{Körper}}} \bar{S}_n^m(Q) \bar{S}_{nm}(P) \right] \\ &= \frac{GM_{\text{Körper}}}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ \frac{a}{GM_{\text{Körper}}} \bar{C}_n^m(Q) \bar{R}_{nm}(P) + \frac{a}{GM_{\text{Körper}}} \bar{S}_n^m(Q) \bar{S}_{nm}(P) \right]\end{aligned}$$

und als Zusammenhang zwischen den errechneten Koeffizienten  $\bar{C}_n^m(Q)$ ,  $\bar{S}_n^m(Q)$  und den allgemeinen Potentialkoeffizienten  $C_n^m(Q)$ ,  $S_n^m(Q)$  aus Kapitel 3

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n^m(Q) \\ S_n^m(Q) \end{array} \right\} = \frac{a}{GM_{\text{Körper}}} \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_n^m(Q) \\ \bar{S}_n^m(Q) \end{array} \right\} \quad (7.15)$$

## 7.2 Das Potential einer ellipsoidischen Modellerde mit ortsabhängiger Dichte

In Kapitel 7.1 wurden die Potentiale für ein Modell mit schichtweise konstanter Dichte berechnet. Nachfolgend werden die Potentiale für den Fall einer vom Ort  $q$  abhängigen Dichte entwickelt.

Für den Ort eines Punktes auf einem Ellipsoid mit dem mittleren Radius  $R$  gilt (3.16). Denkt man sich nun eine ellipsoidisch geschichtete Modellerde aus infinitesimalen Schichten unterschiedlicher Dichte aufgebaut, ergibt sich für den geometrischen Ort einer solchen Haut

$$r(q) = q \left( 1 - \frac{2}{3} f(q) P_2(\cos \vartheta) \right) \quad (7.16)$$

mit dem mittleren Radius einer Haut  $q$  und der dazugehörigen ortsabhängigen Abplattung  $f(q)$ .

Ein differentielles Außenraumpotential muss sich also allgemein als totales Differential [Moritz, 1990] schreiben lassen

$$dV_e = V_{Haut} = V(q + dq) - V(q) = \frac{dV_e}{dq} dq \quad (7.17)$$

da die einzige Variable  $q$  ist.

Das Potential für ein homogenes Ellipsoid ist nach Kapitel 7.1 (7.8) in 1. Näherung gegeben. Demnach bestimmt sich ein differentielles Potential mit  $R = q$  zu

$$dV_e = \frac{4\pi}{3} G \rho(q) \frac{d}{dq} \left[ \frac{q^3}{r} - \frac{2}{5} \frac{q^5}{r^3} f(q) P_2(\cos \vartheta) \right] dq \quad (7.18)$$

Zur Bestimmung der inneren Differentiation wird die Funktion  $f(q)$  benötigt. Diese ist aus (4.11) bekannt

$$f(q) = f_{RErde} - f_{grad}(R_{Erde} - q) \quad (7.19)$$

Demnach ergibt sich für das infinitesimale Potential

$$dV_e = \frac{4\pi}{3} G \rho(q) \frac{d}{dq} \left[ \frac{q^3}{r} - \frac{2}{5} \frac{q^5}{r^3} (f_{RErde} - f_{grad}(R_{Erde} - q)) P_2(\cos \vartheta) \right] dq$$

und für die Ableitung

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dq} \left[ \frac{q^3}{r} - \frac{2}{5} \frac{q^5}{r^3} (f_{RErde} - f_{grad}(R_{Erde} - q)) P_2(\cos \vartheta) \right] \\ &= \frac{3q^2}{r} - 2 \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3} (f_{RErde} - f_{grad} R_{Erde}) q^4 - \frac{12}{5} \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3} f_{grad} q^5 \end{aligned}$$

woraus für das infinitesimale Potential folgt:

$$dV_e = \frac{4\pi}{3} G \rho(q) \left[ \frac{3q^2}{r} - 2 \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3} (f_{RErde} - f_{grad} R_{Erde}) q^4 - \frac{12}{5} \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3} f_{grad} q^5 \right] dq$$

Das Gesamtpotential berechnet sich durch Integration über  $0 \leq q \leq R_{Erde}$ . Allerdings ist zu beachten, dass die Funktion  $\rho(q)$  jeweils nur schichtweise verarbeitet werden kann. Deshalb ist nicht direkt über den gesamten Bereich zu integrieren, sondern die Summe der Integrale über alle Schichten zu bilden.

$$\begin{aligned} V(r, \vartheta) &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} dV_e \\ &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left\{ \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \frac{4\pi}{3} G \rho_k(q) \left[ \frac{3q^2}{r} - 2 \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3} (f_{RErde} - f_{grad} R_{Erde}) q^4 - \frac{12}{5} \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3} f_{grad} q^5 \right] dq \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{4\pi G}{r} \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \rho_k(q) q^2 dq - \frac{8\pi G}{3r^3} P_2(\cos \vartheta) (f_{RErde} - f_{grad} R_{Erde}) \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \rho_k(q) q^4 dq \right. \\ &\quad \left. - \frac{16\pi G}{5r^3} P_2(\cos \vartheta) f_{grad} \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \rho_k(q) q^5 dq \right] \end{aligned}$$

Es bleiben 3 Integrale für die jeweilige Schicht  $k$  zu lösen

$$\begin{aligned}
L_{k,Modell}^2 &= \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \rho_k(q) q^2 dq \\
L_{k,Modell}^4 &= \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \rho_k(q) q^4 dq \\
L_{k,Modell}^5 &= \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \rho_k(q) q^5 dq
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Die Funktionen  $\rho_k(q)$  können je nach Modellbildung z. B. aus Überlegungen zum hydrostatischen Ausgleich abgeleitet werden. So ergibt sich für das Modell PREM (6.10) mit  $j=2,4,5$

$$\begin{aligned}
L_{k,PREM}^j &= \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \left( B_k q^j + C_k \frac{q^{j+1}}{A} + D_k \frac{q^{j+2}}{A^2} + E_k \frac{q^{j+3}}{A^3} \right) dq \\
&= \frac{B_k}{(j+1)} q^{j+1} + \frac{C_k}{(j+2)} \frac{q^{j+2}}{A} + \frac{D_k}{(j+3)} \frac{q^{j+3}}{A^2} + \frac{E_k}{(j+4)} \frac{q^{j+4}}{A^3} \Big|_{R_{k-1}}^{R_k} \\
&= \frac{B_k}{(j+1)} \left( R_k^{j+1} - R_{k-1}^{j+1} \right) + \frac{C_k}{(j+2)A} \left( R_k^{j+2} - R_{k-1}^{j+2} \right) + \frac{D_k}{(j+3)A^2} \left( R_k^{j+3} - R_{k-1}^{j+3} \right) \\
&\quad + \frac{E_k}{(j+4)A^3} \left( R_k^{j+4} - R_{k-1}^{j+4} \right)
\end{aligned} \tag{7.21}$$

und für das Modell WZIO nach (6.17) ebenfalls mit  $j=2,4,5$

$$\begin{aligned}
L_{k,WZIO}^j &= \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \left( d_{k0} q^j + d_{k2} \frac{q^{j+2}}{A^2} + d_{k4} \frac{q^{j+4}}{A^4} + d_{k6} \frac{q^{j+6}}{A^6} + d_{k8} \frac{q^{j+8}}{A^8} + e_k q^j \left( \frac{q}{A} \right)^{-\lambda_k} \right) dq \\
&= \frac{d_{k0}}{(j+1)} q^{j+1} + \frac{d_{k2}}{(j+3)A^2} q^{j+3} + \frac{d_{k4}}{(j+5)A^4} q^{j+5} + \frac{d_{k6}}{(j+7)A^6} q^{j+7} + \frac{d_{k8}}{(j+9)A^8} q^{j+9} \\
&\quad + e_k \frac{q^{j+1-\lambda_k}}{(j+1-\lambda_k) A^{-\lambda_k}} \Big|_{R_{k-1}}^{R_k} \\
&= \frac{d_{k0}}{(j+1)} \left( R_k^{j+1} - R_{k-1}^{j+1} \right) + \frac{d_{k2}}{(j+3)A^2} \left( R_k^{j+3} - R_{k-1}^{j+3} \right) + \frac{d_{k4}}{(j+5)A^4} \left( R_k^{j+5} - R_{k-1}^{j+5} \right) \\
&\quad + \frac{d_{k6}}{(j+7)A^6} \left( R_k^{j+7} - R_{k-1}^{j+7} \right) + \frac{d_{k8}}{(j+9)A^8} \left( R_k^{j+9} - R_{k-1}^{j+9} \right) + e_k \frac{\left( R_k^{j+1-\lambda_k} - R_{k-1}^{j+1-\lambda_k} \right)}{(j+1-\lambda_k) A^{-\lambda_k}}
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Damit sind das Gravitationspotential

$$\begin{aligned}
V_{Modell}(r, \vartheta) &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} dV_{e,Modell} \\
&= \frac{4\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{3}{r} L_{k,Modell}^2 - \frac{2}{r^3} P_2(\cos \vartheta) (f_{RErde} - f_{grad} R_{Erde}) L_{k,Modell}^4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{12}{5r^3} P_2(\cos \vartheta) f_{grad} L_{k,Modell}^5 \right]
\end{aligned}$$

bzw. das Schwerepotential gegeben

$$\begin{aligned}
W_{Modell}(r, \vartheta) &= V_{Modell}(r, \vartheta) + \Phi(r, \vartheta) \\
&= \frac{4\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{3}{r} L_{k,Modell}^2 - \frac{2}{r^3} P_2(\cos \vartheta) (f_{RErde} - f_{grad} R_{Erde}) L_{k,Modell}^4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{12}{5r^3} P_2(\cos \vartheta) f_{grad} L_{k,Modell}^5 \right] + \frac{\omega^2}{2} (r^2 \sin^2 \vartheta)
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Ebenso erhält man wieder die Schwerebeschleunigung

$$\begin{aligned}
|\vec{g}_{Modell}(r, \vartheta)| &= -|\text{grad}W(r, \vartheta)| = -\frac{dW(r, \vartheta)}{dr} \\
&= \frac{4\pi}{3}G \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{3}{r^2} L_{k,Modell}^2 - \frac{6}{r^4} P_2(\cos \vartheta) (f_{R_{Erde}} - f_{grad} R_{Erde}) L_{k,Modell}^4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{36}{5r^4} P_2(\cos \vartheta) f_{grad} L_{k,Modell}^5 \right] - \omega^2 r \sin^2 \vartheta
\end{aligned} \tag{7.24}$$

### 7.3 Das Potential einer ellipsoidischen Modellerde mit ortsabhängiger Dichte und $r$ in 2. Näherung

In Kapitel 7.2 wurden Potentiale für Modelle mit ortsabhängiger Dichte berechnet. Nachfolgend werden die Potentiale für den Fall einer vom Ort  $q$  abhängigen Dichte und der Berücksichtigung höherer Terme in  $f^2$  entwickelt.

Allgemein gilt, dass eine ellipsoidisch geschichtete Modellerde, deren Schichten sich im hydrostatischen Gleichgewicht befinden sollen, hydrostatische Grenzflächen ausprägt, deren Form keine exakten Rotationsellipsoide sind. Das Theorem von Hamy-Pizzetti besagt: „An ellipsoidal stratification is impossible for heterogeneous, rotationally symmetric figures of equilibrium“ [Moritz, 1990]. Diese geometrische Abweichung wird zunächst vernachlässigt, da diese z. B. für das Dichtemodell PREM nach [Denis, 1989] an der Oberfläche max. 4,3 m beträgt. In Kapitel 7.4 wird diese jedoch berücksichtigt.

Zunächst wird unterstellt, dass Sphäroid und Ellipsoid zusammenfallen. Ein derartiger Ansatz scheint in generalisierter Darstellung durchaus gerechtfertigt (Kapitel 4.2).

Für den Ort eines Sphäroids findet man mit Termen 2. Ordnung nach (3.13)

$$r = a \left( 1 - f \cos^2 \vartheta - \frac{3}{8} f^2 \sin^2 2\vartheta \right)$$

Mit

$$\begin{aligned}
\cos^2 \vartheta &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P_2(\cos \vartheta) \\
\sin^2 2\vartheta &= \frac{8}{15} + \frac{8}{21} P_2(\cos \vartheta) - \frac{32}{35} P_4(\cos \vartheta)
\end{aligned}$$

und unter Verwendung des mittleren Radius  $q$ , formuliert bis  $O(f_2)$ ,

$$q = a \left( 1 - \frac{1}{3} f - \frac{1}{5} f^2 \right) \tag{7.25}$$

ergibt sich für  $r$

$$r(q) = q \left( 1 - \frac{2}{3} \left( f + \frac{23}{42} f^2 \right) P_2(\cos \vartheta) + \frac{12}{35} f^2 P_4(\cos \vartheta) \right) \tag{7.26}$$

Für die Berechnung des Potentials  $\nu$  nach (7.4) muss  $h$  (Abweichung von  $r$  zu  $R$ ) bestimmt werden. Es gilt in 2. Näherung

$$\begin{aligned}
h &= r - R \\
&= R \left( 1 - \frac{2}{3} \left( f + \frac{23}{42} f^2 \right) P_2(\cos \vartheta) + \frac{12}{35} f^2 P_4(\cos \vartheta) \right) - R \\
&= -\frac{2}{3} \left( f + \frac{23}{42} f^2 \right) R P_2(\cos \vartheta) + \frac{12}{35} f^2 R P_4(\cos \vartheta)
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Für das Potential  $\nu$  folgt

$$\nu = -\frac{2}{3} G\rho \left( f + \frac{23}{42} f^2 \right) R^3 \iint_{\sigma} \frac{P_2(\cos \vartheta)}{l} d\sigma + \frac{12}{35} G\rho f^2 R^3 \iint_{\sigma} \frac{P_4(\cos \vartheta)}{l} d\sigma$$

Mit (7.25) ergibt sich

$$\begin{aligned} \nu = & -\frac{2}{3}G\rho \left( f + \frac{23}{42}f^2 \right) R^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} \iint_{\sigma} P_2(\cos \vartheta) P_n(\cos \psi) d\sigma \\ & + \frac{12}{35}G\rho f^2 R^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} \iint_{\sigma} P_4(\cos \vartheta) P_n(\cos \psi) d\sigma \end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Legendreschen Polynome bleibt unter dem Integral jeweils nur der Ausdruck für  $n = 2$  bzw.  $n = 4$  stehen

$$\nu = -\frac{2}{3}G\rho \left( f + \frac{23}{42}f^2 \right) \frac{R^5}{r^3} \iint_{\sigma} P_2(\cos \vartheta) P_2(\cos \psi) d\sigma + \frac{12}{35}G\rho f^2 \frac{R^7}{r^5} \iint_{\sigma} P_4(\cos \vartheta) P_4(\cos \psi) d\sigma \quad (7.28)$$

Für die Integrale gilt

$$\iint_{\sigma} P_2(\cos \vartheta) P_2(\cos \psi) d\sigma = \frac{4\pi}{5} P_2(\cos \vartheta) \quad (7.29)$$

$$\iint_{\sigma} P_4(\cos \vartheta) P_4(\cos \psi) d\sigma = \frac{4\pi}{9} P_4(\cos \vartheta) \quad (7.30)$$

Damit ist  $\nu$  bestimmt

$$\nu = -\frac{8\pi}{15}G\rho \left( f + \frac{23}{42}f^2 \right) \frac{R^5}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \frac{16\pi}{105}G\rho f^2 \frac{R^7}{r^5} P_4(\cos \vartheta) \quad (7.31)$$

Für das Gesamtpotential eines homogenen Ellipsoid in 2. Näherung ergibt sich

$$V = \frac{4\pi}{3}G\rho \left[ \frac{R^3}{r} - \frac{2}{5} \left( f + \frac{23}{42}f^2 \right) \frac{R^5}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \frac{4}{35}f^2 \frac{R^7}{r^5} P_4(\cos \vartheta) \right] \quad (7.32)$$

Es wird wieder ein differentielles Außenraumpotential für eine ellipsoidische Schicht mit dem mittleren Radius  $q$  nach (7.17) berechnet. Dieses ergibt sich zu

$$dV_e = \frac{4\pi}{3}G\rho(q) \frac{d}{dq} \left[ \frac{q^3}{r} - \frac{2}{5} \left( f(q) + \frac{23}{42}f(q)^2 \right) \frac{R^5}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \frac{4}{35}f(q)^2 \frac{R^7}{r^5} P_4(\cos \vartheta) \right] dq \quad (7.33)$$

Mit  $f(q)$  aus (7.19) folgt

$$\begin{aligned} dV_e = & \frac{4\pi}{3}G\rho(q) \frac{d}{dq} \left[ \frac{q^3}{r} - \frac{2}{5} \left( f_R - f_g(R_E - q) + \frac{23}{42}(f_R - f_g(R_E - q))^2 \right) \frac{q^5}{r^3} P_2(\cos \vartheta) \right. \\ & \left. + \frac{4}{35}(f_R - f_g(R_E - q))^2 \frac{q^7}{r^5} P_4(\cos \vartheta) \right] dq \end{aligned} \quad (7.34)$$

Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dq} \left[ \frac{q^3}{r} - \frac{2}{5} \left( f_R - f_g(R_E - q) + \frac{23}{42}(f_R - f_g(R_E - q))^2 \right) \frac{q^5}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \frac{4}{35}(f_R - f_g(R_E - q))^2 \frac{q^7}{r^5} P_4(\cos \vartheta) \right] \\ & = \frac{3}{r}q^2 - \frac{2}{r^3} \left( \left( f_R - f_g R_E + \frac{23}{42}f_R^2 - \frac{46}{42}f_R f_g R_E + \frac{23}{42}f_g^2 R_E^2 \right) P_2(\cos \vartheta) \right) q^4 \\ & - \frac{12}{5r^3} \left( \left( f_g + \frac{46}{42}f_R f_g - \frac{46}{42}f_g^2 R_E \right) P_2(\cos \vartheta) \right) q^5 \\ & - \left( \frac{23}{15r^3} (f_g^2 P_2(\cos \vartheta)) - \frac{4}{5r^5} (f_R^2 - 2f_R f_g R_E + f_g^2 R_E^2) P_4(\cos \vartheta) \right) q^6 \\ & + \frac{64}{35r^5} ((f_R f_g - f_g^2 R_E) P_4(\cos \vartheta)) q^7 \\ & + \frac{36}{35r^5} (f_g^2 P_4(\cos \vartheta)) q^8 \end{aligned}$$

oder abgekürzt

$$= \frac{3}{r} q^2 - \frac{2}{r^3} A_1 q^4 - \frac{12}{5r^3} A_2 q^5 - \left( \frac{23}{15r^3} A_3 - \frac{4}{5r^5} A_4 \right) q^6 + \frac{64}{35r^5} A_5 q^7 + \frac{36}{35r^5} A_6 q^8 \quad (7.35)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_1 &= \bar{a}_1 P_2(\cos \vartheta) = \left( f_R - f_g R_E + \frac{23}{42} f_R^2 - \frac{46}{42} f_R f_g R_E + \frac{23}{42} f_g^2 R_E^2 \right) P_2(\cos \vartheta) \\ A_2 &= \bar{a}_2 P_2(\cos \vartheta) = \left( f_g + \frac{46}{42} f_R f_g - \frac{46}{42} f_g^2 R_E \right) P_2(\cos \vartheta) \\ A_3 &= \bar{a}_3 P_2(\cos \vartheta) = f_g^2 P_2(\cos \vartheta) \\ A_4 &= \bar{a}_4 P_4(\cos \vartheta) = (f_R^2 - 2f_R f_g R_E + f_g^2 R_E^2) P_4(\cos \vartheta) \\ A_5 &= \bar{a}_5 P_4(\cos \vartheta) = (f_R f_g - f_g^2 R_E) P_4(\cos \vartheta) \\ A_6 &= \bar{a}_6 P_4(\cos \vartheta) = f_g^2 P_4(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (7.36)$$

Damit lautet (7.34)

$$dV_e = \frac{4\pi}{3} G \rho(q) \left[ \frac{3}{r} q^2 - \frac{2}{r^3} A_1 q^4 - \frac{12}{5r^3} A_2 q^5 - \left( \frac{23}{15r^3} A_3 - \frac{4}{5r^5} A_4 \right) q^6 + \frac{64}{35r^5} A_5 q^7 + \frac{36}{35r^5} A_6 q^8 \right] dq \quad (7.37)$$

Das Gesamtpotential wird wieder durch Integration über  $0 \leq q \leq R_{Erde}$  berechnet.

$$\begin{aligned} V(r, \vartheta) &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} dV_e = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left\{ \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \frac{4\pi}{3} G \rho_k(q) \left[ \frac{3}{r} q^2 - \frac{2}{r^3} A_1 q^4 - \frac{12}{5r^3} A_2 q^5 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \frac{23}{15r^3} A_3 - \frac{4}{5r^5} A_4 \right) q^6 + \frac{64}{35r^4} A_5 q^7 + \frac{36}{35r^4} A_6 q^8 \right] dq \right\} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Es müssen abhängig vom Modell für die jeweilige Schicht  $k$  wieder 6 Integrale gelöst werden.

$$L_{k, \text{Modell}}^j = \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \rho_k(q) q^j dq \quad \text{für } j = 2, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (7.39)$$

Deren Lösungen für die Modelle PREM und WZIO sind bereits in (7.21) und (7.22) angegeben. Damit sind die jeweiligen Potential- und Schwerebeschleunigungsfunktionen bestimmt

$$\begin{aligned} V_{\text{Modell}}(r, \vartheta) &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} dV_e \\ &= \frac{4\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{3}{r} L_{k, \text{Modell}}^2 - \frac{2}{r^3} A_1 L_{k, \text{Modell}}^4 - \frac{12}{5r^3} A_2 L_{k, \text{Modell}}^5 - \left( \frac{23}{15r^3} A_3 - \frac{4}{5r^5} A_4 \right) L_{k, \text{Modell}}^6 \right. \\ &\quad \left. + \frac{64}{35r^5} A_5 L_{k, \text{Modell}}^7 + \frac{36}{35r^5} A_6 L_{k, \text{Modell}}^8 \right] \end{aligned} \quad (7.40)$$

$$\begin{aligned} W_{\text{Modell}}(r, \vartheta) &= V_{\text{Modell}}(r, \vartheta) + \Phi(r, \vartheta) \\ &= \frac{4\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{3}{r} L_{k, \text{Modell}}^2 - \frac{2}{r^3} A_1 L_{k, \text{Modell}}^4 - \frac{12}{5r^3} A_2 L_{k, \text{Modell}}^5 - \left( \frac{23}{15r^3} A_3 - \frac{4}{5r^5} A_4 \right) L_{k, \text{Modell}}^6 \right. \\ &\quad \left. + \frac{64}{35r^5} A_5 L_{k, \text{Modell}}^7 + \frac{36}{35r^5} A_6 L_{k, \text{Modell}}^8 \right] + \frac{\omega^2}{2} (r^2 \sin^2 \vartheta) \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned}
|\vec{g}_{Modell}(r, \vartheta)| &= -|\text{grad}W(r, \vartheta)| = -\frac{dW(r, \vartheta)}{dr} \\
&= \frac{4\pi}{3}G \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{3}{r^2} L_{k,Modell}^2 - \frac{6}{r^4} A_1 L_{k,Modell}^4 - \frac{36}{5r^4} A_2 L_{k,Modell}^5 - \left( \frac{69}{15r^4} A_3 - \frac{20}{5r^6} A_4 \right) L_{k,Modell}^6 \right. \\
&\quad \left. + \frac{64}{7r^6} A_5 L_{k,Modell}^7 + \frac{36}{7r^6} A_6 L_{k,Modell}^8 \right] - \omega^2 r \sin^2 \vartheta
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Auch dieses Gravitationspotential lässt sich wiederum in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickeln. Die vollständig normierten Kugelfunktionskoeffizienten lauten

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_n^m(Q) \\ \bar{S}_n^m(Q) \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} V(r_P, \vartheta_P, \lambda_P) \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P$$

Für das Gravitationspotential (7.40) berechnen sich die Kugelfunktionskoeffizienten gemäß

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_n^m(Q) \\ \bar{S}_n^m(Q) \end{array} \right\} &= \frac{G}{3} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{3}{a} L_{k,Modell}^2 - \frac{2}{a^3} A_1 L_{k,Modell}^4 - \frac{12}{5a^3} A_2 L_{k,Modell}^5 - \left( \frac{23}{15a^3} A_3 - \frac{4}{5a^5} A_4 \right) L_{k,Modell}^6 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{64}{35a^5} A_5 L_{k,Modell}^7 + \frac{36}{35a^5} A_6 L_{k,Modell}^8 \right] \right\} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P
\end{aligned}$$

bzw. nach einfachen numerischen Operationen mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{3}{a} L_{k,Modell}^2 \\
F_2 &= \left( \frac{2}{a^3} \bar{a}_1 L_{k,Modell}^4 + \frac{12}{5a^3} \bar{a}_2 L_{k,Modell}^5 + \frac{23}{15a^3} \bar{a}_3 L_{k,Modell}^6 \right) \\
F_3 &= \left( \frac{4}{5a^5} \bar{a}_4 L_{k,Modell}^6 + \frac{64}{35a^5} \bar{a}_5 L_{k,Modell}^7 + \frac{36}{35a^5} \bar{a}_6 L_{k,Modell}^8 \right)
\end{aligned} \tag{7.43}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_n^m(Q) \\ \bar{S}_n^m(Q) \end{array} \right\} &= \frac{G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left( F_1 \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P \right. \\
&\quad - F_2 \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} P_2(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P \\
&\quad \left. + F_3 \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_P, \lambda_P) \end{array} \right\} P_4(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P d\lambda_P \right)
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Die Integration liefert bei Forderung nach Längenunabhängigkeit der Lösung ( $m=0$ )

$$\begin{aligned}
\bar{C}_n^0(Q) &= \frac{2\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left( F_1 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_n(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \right. \\
&\quad - F_2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_n(\cos \vartheta_P) P_2(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \\
&\quad \left. + F_3 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_n(\cos \vartheta_P) P_4(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \right)
\end{aligned} \tag{7.45}$$

Es müssen die folgenden 3 Integrale gelöst werden

$$\begin{aligned} & \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_n(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \\ & \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_n(\cos \vartheta_P) P_2(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \\ & \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_n(\cos \vartheta_P) P_4(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \end{aligned} \quad (7.46)$$

Wegen der Orthogonalitätsrelation verbleibt für die Intergrale 2 und 3

im Fall  $n=2$

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_2(\cos \vartheta_P) P_2(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_2(\cos \vartheta_P) \bar{P}_2(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (7.47)$$

und im Fall  $n = 4$

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_4(\cos \vartheta_P) P_4(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P = \frac{1}{\sqrt{9}} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_4(\cos \vartheta_P) \bar{P}_4(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P = \frac{2}{\sqrt{9}} \quad (7.48)$$

Die gesuchten Kugelfunktionskoeffizienten nehmen für  $n \neq 2$  und  $n \neq 4$  die folgende Gestalt an:

$$\bar{C}_n^0(Q) = \frac{2\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left( F_1 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_n(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \right) \quad (7.49)$$

bzw. für  $n = 2$  und  $n = 4$

$$\bar{C}_2^0(Q) = \frac{2\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left( F_1 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_2(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P - F_2 \frac{2}{\sqrt{5}} + F_3 \frac{2}{\sqrt{9}} \right) \quad (7.50)$$

$$\bar{C}_4^0(Q) = \frac{2\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left( F_1 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_4(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P - F_2 \frac{2}{\sqrt{5}} + F_3 \frac{2}{\sqrt{9}} \right) \quad (7.51)$$

Zum Vergleich der Koeffizienten mit der herkömmlichen Potentialdarstellung aus Kapitel 3 wird wieder (7.15) verwendet.

## 7.4 Das Potential einer ellipsoidischen Modellerde mit ortsabhängiger Dichte, $r$ in 2. Näherung und Darwin-Abweichung $\kappa$

In den bisherigen Berechnungen wurde auf die Berücksichtigung der Abweichung der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren von exakten Ellipsoiden verzichtet. Jetzt wird auch diese orts- und tiefenabhängige Darwin-Abweichung  $\kappa$  (Kapitel 4.1.2) berücksichtigt.

Mit dieser Korrektur ergibt sich für die Geometrie eines Niveausphäroids (4.8)

$$r = a \left( 1 - f \cos^2 \vartheta - \left( \frac{3}{8} f^2 + \kappa \right) \sin^2 2\vartheta \right) \quad (7.52)$$

Unter Verwendung der Legendreschen Funktionen und mit dem mittleren Radius  $q$

$$q = a \left( 1 - \frac{1}{3} f - \frac{1}{5} f^2 - \frac{8}{15} \kappa \right) \quad (7.53)$$

ergibt sich analog zu (7.26)

$$r(q) = q \left( 1 - \frac{2}{3} \left( f + \frac{23}{42} f^2 + \frac{4}{7} \kappa \right) P_2(\cos \vartheta) + \frac{12}{35} \left( f^2 + \frac{8}{3} \kappa \right) P_4(\cos \vartheta) \right) \quad (7.54)$$

Für die Potentialberechnung mittels Flächenbelegung wird wiederum der geometrische Abstand  $h$  zwischen Kugel und Sphäroid benötigt.

$$\begin{aligned} h &= r - R \\ &= -\frac{2}{3} \left( f + \frac{23}{42} f^2 + \frac{4}{7} \kappa \right) R P_2(\cos \vartheta) + \frac{12}{35} \left( f^2 + \frac{8}{3} \kappa \right) R P_4(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (7.55)$$

Das Potential  $\nu$  berechnet man analog (7.28)

$$\nu = -\frac{2}{3} G \rho \left( f + \frac{23}{42} f^2 + \frac{4}{7} \kappa \right) \frac{R^5}{r^3} \iint_{\sigma} P_2(\cos \vartheta) P_2(\cos \psi) d\sigma + \frac{12}{35} G \rho \left( f^2 + \frac{8}{3} \kappa \right) \frac{R^7}{r^5} \iint_{\sigma} P_4(\cos \vartheta) P_4(\cos \psi) d\sigma$$

Mit (7.29 und 7.30) sind die Integrale gelöst und für  $\nu$  ergibt sich

$$\nu = -\frac{8\pi}{15} G \rho \left( f + \frac{23}{42} f^2 + \frac{4}{7} \kappa \right) \frac{R^5}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \frac{16\pi}{105} G \rho \left( f^2 + \frac{8}{3} \kappa \right) \frac{R^7}{r^5} P_4(\cos \vartheta) \quad (7.56)$$

Das differentielle Schalenpotential berücksichtigt nicht mehr nur die tiefenabhängige Funktion  $f(q)$  der Abplattung, sondern auch die ebenfalls tiefenabhängige Funktion  $\kappa(q)$  für die Darwin-Abweichung

$$dV_e = \frac{4\pi}{3} G \rho(q) \frac{d}{dq} \left[ \frac{q^3}{r} - \frac{2}{5} \left( f(q) + \frac{23}{42} f(q)^2 + \frac{4}{7} \kappa(q) \right) \frac{R^5}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \frac{4}{35} \left( f(q)^2 + \frac{8}{3} \kappa(q) \right) \frac{R^7}{r^5} P_4(\cos \vartheta) \right] dq$$

Beide Funktionen werden wieder mit dem einfachen Ansatz eines globalen Gradienten beschrieben (4.13 und 4.14).

$$f(q) = f_{R=6371} - \frac{df}{dq} (6371 \text{ km} - q) \quad \text{bzw. abgekürzt} \quad f(q) = f_R - f_g(R_E - q) \quad (7.57)$$

$$\kappa(q) = \kappa_{R=6371} - \frac{d\kappa}{dq} (6371 \text{ km} - q) \quad \text{bzw. abgekürzt} \quad \kappa(q) = \kappa_R - \kappa_g(R_E - q) \quad (7.58)$$

Demnach ergibt sich für das infinitesimale Potential

$$\begin{aligned} dV_e &= \frac{4\pi}{3} G \rho(q) \frac{d}{dq} \left[ \frac{q^3}{r} - \frac{2}{5} \left( f_R - f_g(R_E - q) + \frac{23}{42} (f_R - f_g(R_E - q))^2 + \frac{4}{7} (\kappa_R - \kappa_g(R_E - q)) \right) \frac{q^5}{r^3} P_2(\cos \vartheta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{35} \left( (f_R - f_g(R_E - q))^2 + \frac{8}{3} (\kappa_R - \kappa_g(R_E - q)) \right) \frac{q^7}{r^5} P_4(\cos \vartheta) \right] dq \end{aligned}$$

Die Ableitung lässt sich berechnen und ergibt identisch mit (7.35)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dq} \left[ \frac{q^3}{r} - \frac{2}{5} \left( f_R - f_g(R_E - q) + \frac{23}{42} (f_R - f_g(R_E - q))^2 + \frac{4}{7} (\kappa_R - \kappa_g(R_E - q)) \right) \frac{q^5}{r^3} P_2(\cos \vartheta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{35} \left( (f_R - f_g(R_E - q))^2 + \frac{8}{3} (\kappa_R - \kappa_g(R_E - q)) \right) \frac{q^7}{r^5} P_4(\cos \vartheta) \right] \\ &= \frac{3}{r} q^2 - \frac{2}{r^3} \bar{A}_1 q^4 - \frac{12}{5r^3} \bar{A}_2 q^5 - \left( \frac{23}{15r^3} \bar{A}_3 - \frac{4}{5r^5} \bar{A}_4 \right) q^6 + \frac{64}{35r^5} \bar{A}_5 q^7 + \frac{36}{35r^5} \bar{A}_6 q^8 \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \bar{a}_1 P_2(\cos \vartheta) = \left( f_R - f_g R_E + \frac{23}{42} f_R^2 - \frac{46}{42} f_R f_g R_E + \frac{23}{42} f_g^2 R_E^2 + \frac{4}{7} \kappa_R - \frac{4}{7} \kappa_g R_E \right) P_2(\cos \vartheta) \\ \bar{A}_2 &= \bar{a}_2 P_2(\cos \vartheta) = \left( f_g + \frac{46}{42} f_R f_g - \frac{46}{42} f_g^2 R_E + \frac{4}{7} \kappa_g \right) P_2(\cos \vartheta) \\ \bar{A}_3 &= \bar{a}_3 P_2(\cos \vartheta) = (f_g^2) P_2(\cos \vartheta) \\ \bar{A}_4 &= \bar{a}_4 P_4(\cos \vartheta) = \left( f_R^2 - 2f_R f_g R_E + f_g^2 R_E^2 + \frac{8}{3} \kappa_R - \frac{8}{3} \kappa_g R_E \right) P_4(\cos \vartheta) \\ \bar{A}_5 &= \bar{a}_5 P_4(\cos \vartheta) = \left( f_R f_g - f_g^2 R_E + \frac{4}{3} \kappa_g \right) P_4(\cos \vartheta) \\ \bar{A}_6 &= \bar{a}_6 P_4(\cos \vartheta) = (f_g^2) P_4(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (7.59)$$

Eingesetzt in den Ausdruck für das Potential ergibt sich

$$dV_e = \frac{4\pi}{3} G \rho(q) \left[ \frac{3}{r} q^2 - \frac{2}{r^3} \bar{A}_1 q^4 - \frac{12}{5r^3} \bar{A}_2 q^5 - \left( \frac{23}{15r^3} \bar{A}_3 - \frac{1}{5r^5} \bar{A}_4 \right) q^6 + \frac{16}{35r^5} \bar{A}_5 q^7 + \frac{9}{35r^5} \bar{A}_6 q^8 \right] dq$$

Damit ist das Gesamtpotential bestimmt

$$\begin{aligned} V(r, \vartheta) &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} dV_e \\ &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left\{ \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \frac{4\pi}{3} G \rho(q) \left[ \frac{3}{r} q^2 - \frac{2}{r^3} \bar{A}_1 q^4 - \frac{12}{5r^3} \bar{A}_2 q^5 - \left( \frac{23}{15r^3} \bar{A}_3 - \frac{4}{5r^5} \bar{A}_4 \right) q^6 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{64}{35r^4} \bar{A}_5 q^7 + \frac{36}{35r^4} \bar{A}_6 q^8 \right] dq \right\} \end{aligned}$$

(7.21) und (7.22) lösen die Dichtemodellintegrale  $L_{k,Modell}^j = \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} \rho_k(q) q^j dq$  für  $j=2,4,5,6,7,8$

Mit den Koeffizienten (7.59) ergeben sich Potentiale und Schwerebeschleunigung wiederum zu

$$\begin{aligned} V_{Modell}(r, \vartheta) &= \sum_{k=1}^{k_{\max}} \int_{q=R_{k-1}}^{R_k} dV_e \\ &= \frac{4\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{3}{r} L_{k,Modell}^2 - \frac{2}{r^3} \bar{A}_1 L_{k,Modell}^4 - \frac{12}{5r^3} \bar{A}_2 L_{k,Modell}^5 \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{23}{15r^3} \bar{A}_3 - \frac{4}{5r^5} \bar{A}_4 \right) L_{k,Modell}^6 + \frac{64}{35r^5} \bar{A}_5 L_{k,Modell}^7 + \frac{36}{35r^5} \bar{A}_6 L_{k,Modell}^8 \right] \end{aligned} \quad (7.60)$$

$$\begin{aligned} W_{Modell}(r, \vartheta) &= V_{Modell}(r, \vartheta) + \Phi(r, \vartheta) \\ &= \frac{4\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{3}{r} L_{k,Modell}^2 - \frac{2}{r^3} \bar{A}_1 L_{k,Modell}^4 - \frac{12}{5r^3} \bar{A}_2 L_{k,Modell}^5 \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{23}{15r^3} \bar{A}_3 - \frac{4}{5r^5} \bar{A}_4 \right) L_{k,Modell}^6 + \frac{64}{35r^5} \bar{A}_5 L_{k,Modell}^7 + \frac{36}{35r^5} \bar{A}_6 L_{k,Modell}^8 \right] \\ &\quad + \frac{\omega^2}{2} (r^2 \sin^2 \vartheta) \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} |\vec{g}_{Modell}(r, \vartheta)| &= -|gradW(r, \vartheta)| = -\frac{dW(r, \vartheta)}{dr} \\ &= \frac{4\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[ \frac{3}{r^2} L_{k,Modell}^2 - \frac{6}{r^4} \bar{A}_1 L_{k,Modell}^4 - \frac{36}{5r^4} \bar{A}_2 L_{k,Modell}^5 \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{69}{15r^4} \bar{A}_3 - \frac{20}{5r^6} \bar{A}_4 \right) L_{k,Modell}^6 + \frac{64}{7r^6} \bar{A}_5 L_{k,Modell}^7 + \frac{36}{7r^6} \bar{A}_6 L_{k,Modell}^8 \right] \\ &\quad - \omega^2 r \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (7.62)$$

Analog zu Kapitel 7.3 können nun wieder die Kugelfunktionskoeffizienten berechnet werden. Diese ergeben sich mit

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{3}{a} L_{k,Modell}^2 \\ F_2 &= \left( \frac{2}{a^3} \bar{a}_1 L_{k,Modell}^4 + \frac{12}{5a^3} \bar{a}_2 L_{k,Modell}^5 + \frac{23}{15a^3} \bar{a}_3 L_{k,Modell}^6 \right) \\ F_3 &= \left( \frac{4}{5a^5} \bar{a}_4 L_{k,Modell}^6 + \frac{64}{35a^5} \bar{a}_5 L_{k,Modell}^7 + \frac{36}{35a^5} \bar{a}_6 L_{k,Modell}^8 \right) \end{aligned} \quad (7.63)$$

wie in (7.49 - 7.51) für  $n \neq 2$  und  $n \neq 4$  zu

$$\bar{C}_n^0(Q) = \frac{2\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left( F_1 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_n(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P \right) \quad (7.64)$$

bzw. für  $n = 2$  und  $n = 4$  zu

$$\bar{C}_2^0(Q) = \frac{2\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left( F_1 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_2(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P - F_2 \frac{2}{\sqrt{5}} + F_3 \frac{2}{\sqrt{9}} \right) \quad (7.65)$$

$$\bar{C}_4^0(Q) = \frac{2\pi G}{3} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left( F_1 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \bar{P}_4(\cos \vartheta_P) \sin \vartheta_P d\vartheta_P - F_2 \frac{2}{\sqrt{5}} + F_3 \frac{2}{\sqrt{9}} \right) \quad (7.66)$$

## 7.5 Das Gravitationspotential einer an der Oberfläche isostatisch ausgeglichenen Erde

Begreift man isostatischen Massenausgleich als Summe zweier Massenbelegungen (Massenüberschuss z. B. durch topographische Massen und Massendefizit in einer Ausgleichstiefe  $h_a$  darunter), dann berechnet sich ein derart definiertes Potential nach (3.26) zu

$$\begin{aligned} \nu(P) = & \frac{GM_{Erde}}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{R}{r_P} \right)^n \sum_{m=0}^n \left[ \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n + 1)} \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{R}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \bar{R}_{nm}(P) \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^n \left[ \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n + 1)} \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \bar{S}_{nm}(Q) \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \right] \bar{S}_{nm}(P) \right\} \end{aligned}$$

mit den vollständig normalisierten und dimensionslosen Potentialkoeffizienten (3.27)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n^m \\ b_n^m \end{array} \right\} = \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n + 1)} \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_Q, \lambda_Q) \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(Q) \\ \bar{S}_{nm}(Q) \end{array} \right\} \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q$$

Im Sinne der hier vorgestellten Arbeit soll das Modell einer hydrostatisch-isostatisch ausgeglichenen Modellerde durch Flächenbelegungen beschrieben werden. Die durch Abweichungen von der Idealgestalt einer schichtweise radialsymmetrischen Schichtung verursachten Potentiale werden als Störpotentiale bezeichnet.

Bisher ging man von einem Gesamtpotential aus, welches sich aus dem Potential einer Punktmasse mit der Masse der Erde und dem davon abweichenden Potential einer als ellipsoidisch geschichtet anzunehmenden Erde zusammensetzt.

$$V(P) = V_{KugelR}(P) + \nu_{ellip}. \quad (7.67)$$

Jetzt wird ein Störpotential verursacht durch das Modell einer isostatisch ausgeglichenen Kruste hinzugefügt.

$$V(P) = V_{KugelR}(P) + \nu_{ellip}. + \nu_{iso} \quad (7.68)$$

Bei der Berechnung des isostatischen Störpotentials  $\nu_{iso}$  muss bedacht werden, dass die Funktion der Flächendichte analytisch nicht bekannt ist. Die Flächendichten können nur diskret für Blöcke einer bestimmten flächenhaften Ausdehnung angegeben werden. In Kapitel 5.2 wurde bereits eingeführt, dass es für globale Betrachtungen sinnvoll und ausreichend ist, grundsätzlich von 3 bzw. 4 verschiedenen topographischen Blöcken auszugehen.

Eine entsprechende Blockenteilung mit zugeordneten Flächendichten ergibt sich aus den topographischen Informationen des Modells ETOPO2v2 (Kapitel 6.5). Letztlich lassen sich diese Flächenbelegungsichten, nach Auswertung der topographischen Informationen, auch wieder als eine auf der Kugeloberfläche gegebene Funktion verstehen, die z. B. auch in eine Reihe von Kugelfunktionen entwickelt werden kann.

Die Integration über die Oberfläche des Körpers geht damit über in eine Summation über die Blöcke der Modellerde.

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} a_n^m \\ b_n^m \end{array} \right\} &= \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n + 1)} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \iint_{\sigma} \kappa(\vartheta_i, \lambda_j) \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(Q) \\ \bar{S}_{nm}(Q) \end{array} \right\} \sin \vartheta_i d\vartheta_i d\lambda_j \\
&= \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n + 1)} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \kappa(\vartheta_i, \lambda_j) \int_{\vartheta_i} \int_{\lambda_j} \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{nm}(\vartheta_i, \lambda_j) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta_i, \lambda_j) \end{array} \right\} \sin \vartheta_i d\vartheta_i d\lambda_j \\
&= \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n + 1)} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \kappa(\vartheta_i, \lambda_j) \int_{\lambda_j} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{array} \right\} d\lambda_j \int_{\vartheta_i} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_i) \sin \vartheta_i d\vartheta_i \\
&= \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n + 1)} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \kappa(\vartheta_i, \lambda_j) \left\{ \begin{array}{l} \sin(m\lambda_j) - \sin(m\lambda_{j-1}) \\ -\cos(m\lambda_j) + \cos(m\lambda_{j-1}) \end{array} \right\} \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_i) \sin \vartheta_i d\vartheta_i
\end{aligned} \tag{7.69}$$

Mit (3.8) gilt für Kugelfunktionskoeffizienten einer im Krustenbereich isostatisch ausgeglichenen Erde

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} a_n^m \\ b_n^m \end{array} \right\} &= \frac{R^{n+2} - (R - h_a)^{n+2}}{M_{Erde} R^n (2n + 1)} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \kappa(\vartheta_i, \lambda_j) \left\{ \begin{array}{l} \sin(m\lambda_j) - \sin(m\lambda_{j-1}) \\ -\cos(m\lambda_j) + \cos(m\lambda_{j-1}) \end{array} \right\} \frac{\Delta\vartheta}{3 \cdot \text{Intsim}} \\
&\left[ \begin{array}{l} \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_{i-1}) \sin \vartheta_{i-1} + \sum_{p=1}^{(\text{Intsim}-1),2} 4 \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_p) \sin \vartheta_p \\ + \sum_{p=2}^{(\text{Intsim}-2),2} 2 \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_p) \sin \vartheta_p + \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_i) \sin \vartheta_i \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{7.70}$$

## 7.6 Das Gravitationspotential einer CMB-Topographie

Die jeweilige Topographie  $\delta r$  der Kern-Mantel-Grenze (CMB = **C**ore-**M**antle **B**oundary) ergibt sich mit den zur Verfügung stehenden Kugelfunktionskoeffizienten nach (6.18).

Diese undulierende Grenzschicht zwischen Erdkern und -mantel wirkt sich auf das Schwerfeld der Erde aus [Bowin, 1986] und erzeugt ein weiteres Störpotential  $\nu_{CMB}$  im Sinne von (7.1). Es folgt

$$V(P) = V_{KugelR}(P) + \nu_{ellip.} + \nu_{iso} + \nu_{CMB} \tag{7.71}$$

Das „korrigierende“ Potential der durch die undulierende CMB verursachten überschüssigen bzw. fehlenden Massen ergibt sich wiederum aus Flächenbelegungsdichten

$$\mu_{CMB} = \Delta\rho_{CMB} \cdot \delta r := \text{Flächenbelegungsdichte der CMB}$$

mit dem Dichtekontrast zwischen der Oberkante des äußeren Kerns und der Unterkante des unteren Mantels

$$\Delta\rho = \rho_{outer\ core} - \rho_{lower\ mantle} \tag{7.72}$$

Damit ergibt sich

$$\nu_{CMB} = G \iint_S \frac{\mu_{CMB}}{l} ds = G \Delta\rho R^2 \iint_S \frac{\delta r}{l} d\sigma$$

Einsetzen von (6.18) für  $\delta r$  und des reziproken Abstandes  $1/l$  (2.5) liefert

$$\begin{aligned}
\nu_{CMB}(\lambda_P, \vartheta_P) &= G \Delta\rho_{CMB} R_{CMB}^2 \iint_S \left\{ \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n [c_n^m \cos m\lambda_Q + s_n^m \sin m\lambda_Q] \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_Q) \right\} \\
&\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{CMB}^n}{r_P^{n+1}} P_n(\cos \psi_{PQ}) \right\} \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q
\end{aligned}$$

Mit (2.8) und den Abkürzungen

$$F_1(\lambda_Q, n, m) = [c_n^m \cos m\lambda_Q + s_n^m \sin m\lambda_Q]$$

$$F_2(r_P, n) = \frac{R_{CMB}^n}{r_P^{n+1}} \frac{1}{2n+1}$$

$$F_3(\lambda_Q, \lambda_P, \vartheta_P, n, m) = [\cos m\lambda_Q \cdot \cos m\lambda_P + \sin m\lambda_Q \cdot \sin m\lambda_P] \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P)$$

$$H_1 = G\Delta\rho_{CMB}R_{CMB}^2$$

$$H_2 = F_1(\lambda_Q, n, m)$$

$$H_3 = F_2(r_P, n) F_3(\lambda_Q, \lambda_P, \vartheta_P, n, m)$$

folgt zunächst

$$\begin{aligned} \nu_{CMB}(\lambda_P, \vartheta_P) = H_1 \iint_S \left\{ \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n F_1(\lambda_Q, n, m) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_Q) \right\} \\ \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n F_2(r_P, n) \cdot F_3(\lambda_Q, \lambda_P, \vartheta_P, n, m) \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_Q) \right\} \cdot \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \end{aligned}$$

und dann

$$\nu_{CMB}(\lambda_P, \vartheta_P) = H_1 \iint_S \left\{ \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n H_2 \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_Q) \right\} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n H_3 \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_Q) \right\} \cdot \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q$$

Hier tauchen nach dem Ausmultiplizieren der beiden Doppelsummen in jedem Summanden die Produkte der normalisierten Legendreschen Funktionen  $\bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_Q)$  auf. Jeder dieser Summanden muss über  $\vartheta_Q$  integriert werden. Zur Lösung kommen erneut die Orthogonalitätseigenschaften der Legendreschen Funktionen zur Anwendung (Kapitel 2.3.1). Zunächst werden alle Produkte von Legendreschen Funktion unterschiedlichen Grades oder Ordnung identisch Null. Es gilt (2.19). Damit folgt:

$$\begin{aligned} \nu_{CMB}(r_P, \lambda_P, \vartheta_P) = H_1 \iint_S \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n H_2 H_3 \bar{P}_{nm}^2(\cos \vartheta_Q) \right\} \cdot \sin \vartheta_Q d\vartheta_Q d\lambda_Q \\ = 2(2 - \delta_{m0}) \cdot H_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0, \lambda=0}^n \int_0^{2\pi} H_2 H_3 d\lambda_Q \end{aligned}$$

Weitere Umformungen und Rücknahme der Abkürzungen ergibt:

$$\nu_{CMB}(r_P, \lambda_P, \vartheta_P)$$

$$\begin{aligned} &= 2(2 - \delta_{m0}) \cdot G\Delta\rho_{CMB}R_{CMB}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0, \lambda=0}^n \int_0^{2\pi} F_1(\lambda_Q, n, m) \cdot F_2(r_P, n) F_3(\lambda_Q, \lambda_P, \vartheta_P, n, m) d\lambda_Q \\ &= \frac{4\pi G}{r_P} \cdot R_{CMB}^2 \cdot \Delta\rho_{CMB} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R_{CMB}}{r_P} \right)^n \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n [c_n^m \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \cos m\lambda_P + s_n^m \cdot \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta_P) \sin m\lambda_P] \\ &= \frac{4\pi G}{r_P} \cdot R_{CMB}^2 \cdot \Delta\rho_{CMB} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R_{CMB}}{r_P} \right)^n \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n [c_n^m \cdot \bar{R}_{nm}(P) + s_n^m \cdot \bar{S}_{nm}(P)] \end{aligned} \tag{7.73}$$

Durch Umformen und Koeffizientenvergleich können hieraus die Potentialkoeffizienten für eine undulierende CMB berechnet werden. In der allgemeine Form beschreibt sich das Gravitationspotential zu

$$V(r_P, \vartheta_P, \lambda_P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r_P} \right)^n \sum_{m=0}^n [C_n^m(Q) \bar{R}_{nm}(P) + S_n^m(Q) \bar{S}_{nm}(P)] \tag{7.74}$$

Das Störpotential der CMB kann umbeschrieben werden

$$\begin{aligned} \nu_{CMB}(r_P, \lambda_P, \vartheta_P) &= \frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ c_n^m \frac{4\pi}{2n+1} \cdot \frac{R_{CMB}^2 \cdot \Delta\rho_{CMB}}{M_{\text{Körper}}} \left(\frac{R_{CMB}}{a}\right)^n \cdot \bar{R}_{nm}(P) \right. \\ &\quad \left. + s_n^m \frac{4\pi}{2n+1} \cdot \frac{R_{CMB}^2 \cdot \Delta\rho_{CMB}}{M_{\text{Körper}}} \left(\frac{R_{CMB}}{a}\right)^n \cdot \bar{S}_{nm}(P) \right] \end{aligned} \quad (7.75)$$

Daraus ergeben sich die Potentialkoeffizienten des Störpotentials, verursacht durch die Undulationen der CMB und dem in dieser Tiefe vorherrschenden Dichtekontrast, aus den Koeffizienten der Reihenentwicklung der Topographie der Kern-Mantel-Grenze

$$\left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\} = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot \frac{R_{CMB}^2 \cdot \Delta\rho_{CMB}}{M_{\text{Körper}}} \left(\frac{R_{CMB}}{a}\right)^n \cdot \left\{ \begin{array}{c} c_n^m \\ s_n^m \end{array} \right\} \quad (7.76)$$

## 7.7 Kombinierte Modelle

Da sich die jeweiligen Potentialwirkungen einzelner Strukturen störungsfrei überlagern, kann das Potential eines kombinierten Modells immer als Summe gemäß (7.1) geschrieben werden

$$V(P) = V_{Kugel}(P) + \sum_{l=1}^{l_{\max}} \nu_{\text{Struktur } l}$$

wie das z. B. auch in (3.3) für das Gravitationspotential der Erde (als Summe aus dem Potential einer Punktmasse (Kugel) und dem Potential der Abweichungen  $\Delta Kugel$ ) getan wurde

$$V(P) = V_{Kugel}(P) + \nu_{\Delta Kugel}$$

$$V(P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n [C_n^m \Delta Kugel \bar{R}_{nm}(P) + S_n^m \Delta Kugel \bar{S}_{nm}(P)] \right\} \quad (7.77)$$

Für die praktische Anwendung bedeutet dies, dass alle Modellpotentiale, sofern die jeweilige Kugelfunktionsentwicklung vorliegt, als Abweichung vom Potential einer Punktmasse der Masse  $M_{\text{Erde}}$  dargestellt werden können. Dieser Primäreffekt wird durch den Kugelfunktionskoeffizienten  $C_n^0$  beschrieben. Die Summe der Störpotentiale ergibt sich durch die Summierung der Reihendarstellungen der Störpotentiale, und somit durch Summierung der Kugelfunktionskoeffizienten

$$\sum_{i=1}^n \nu_{\text{Struktur } i} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[ \left( \sum_{l=1}^{l_{\max}} C_n^m \text{Struktur } l \right) \bar{R}_{nm}(P) + \left( \sum_{l=1}^{l_{\max}} S_n^m \text{Struktur } l \right) \bar{S}_{nm}(P) \right] \quad (7.78)$$

Es werden also formal alle Kugelfunktionskoeffizienten für  $n \geq 1$  summiert. Die Koeffizienten vom Grad  $n = 1$  beschreiben die Lage des Modellschwerpunktes relativ zum Entwicklungspunkt. Nach Kapitel 3.7 wird aber bei der Entwicklung dafür gesorgt, dass der Entwicklungspunkt immer im Schwerpunkt liegt.

## 8 Ergebnisse

Das mit dem geodätischen Referenzellipsoid des GRS80/WGS84 verbundene Normalpotential ist, wie in Kapitel 4.2 gezeigt, nicht aus potentialtheoretischen Überlegungen zu einem homogenen Rotationsellipsoid abzuleiten. Damit kommt das homogene Referenzellipsoid auch nicht als hydrostatisches Dichtereferenzmodell für die Erde infrage.

Zur Berechnung der Potentiale von Dichtemodellen werden nachfolgend die in Kapitel 7 beschriebenen Möglichkeiten genutzt, um ausgehend vom Startmodell STY1 (Tabelle 6.5) ein Dichtemodell zu entwickeln, das als geophysikalisches Referenzmodell für weitere Interpretationen des Erdschwerefeldes geeignet ist. Die Modellvorstellungen, die dem Startmodell zugrunde liegen, werden schrittweise verbessert. Das abschließende Modell STY5 beschreibt die gesuchte hydrostatische Referenz.

Die wesentlichen Forderungen an das hydrostatische Dichtemodell der Erde sind durch folgende Ansätze gegeben:

1. Die Erde ist hydrostatisch ausgeglichen.
2. Der Erdkörper ist schalenförmig, gemäß der im PREM vorgeschlagenen Schichtung, aufgebaut (11, resp. 13 Schichten).
3. Der Dichteverlauf aus PREM wurde durch [Wziontek, 2004] streng hydrostatisch erweitert (Modell WZIO).
4. Das Dichtemodell erfüllt wesentliche primäre und sekundäre geodätische, sowie geophysikalische Merkmale (wie z. B. Gesamtmasse, Trägheitsmomente oder geometrische Abplattung).
5. Der Modellkörper ist selbstgravitierend und rotierend. Deshalb sind alle Schichten abgeplattet.

Die Beschreibung der Modelle erfolgt mittels

1. des radiusabhängigen stetigen Dichteverlaufs einzelner Schichten der Modelle aus [Wziontek, 2004],
2. der Größe der Dichtesprünge an den Diskontinuitäten (Schichtgrenzen),
3. der globalen Gradienten für die Abplattung  $f_{grad}$ ,
4. des globalen Gradienten für die Darwin-Abweichung  $\kappa_{grad}$ , sowie durch
5. den Radius der Kern-Mantel-Grenze  $r_{CMB}$ .

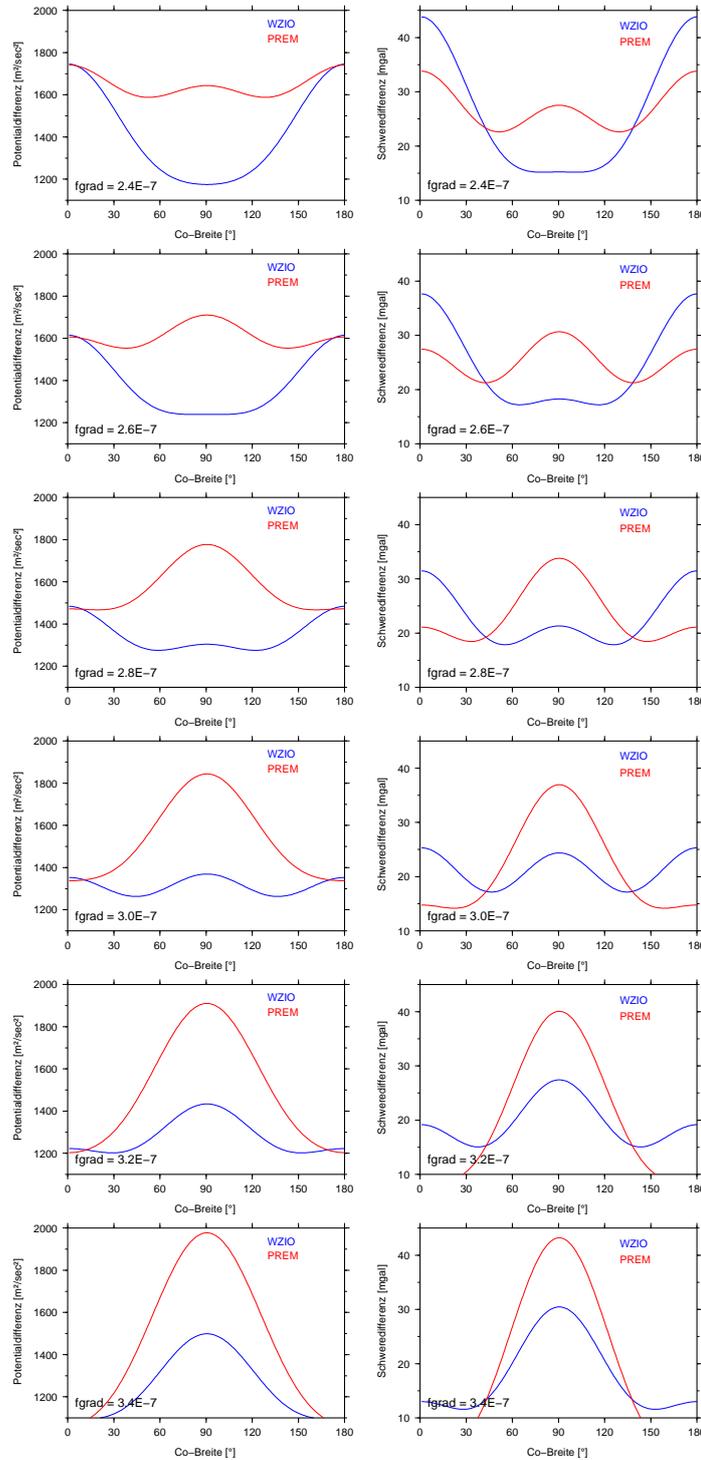
Da aus den Überlegungen in Kapitel 4.2 folgt, dass die Gleichgewichtsfigur der Erde einem Rotationsellipsoid sehr ähnlich ist und hydrostatischer Ausgleich für die gesamte Erde gefordert wird, muss auch die Oberfläche des hydrostatischen Modells Äquipotentialfläche sein. An ein geophysikalisches Referenzfeld ist deshalb die Forderung zu stellen, dass es in möglichst guter Übereinstimmung zu dem geodätischen Normalfeld stehen muss. Als Kriterium hierfür ist zum einen das Potential am geodätischen Referenzellipsoid zu nennen, zum anderen aber auch die durchschnittliche breitenabhängige Abweichung (also die Glattheit der Differenz) von diesem Normalpotential.

Der hydrostatische Gleichgewichtskörper, der die Erde modelliert kann nach Kapitel 4.2 keine ellipsoidische Schichtung haben (Theorem von Hamy-Pizzetti [Pizzetti, 1913]). Die mit der äußeren Gestalt des hydrostatischen Gleichgewichtskörpers verbundene Äquipotentialfläche ist deshalb kein Ellipsoid. Eine völlige Übereinstimmung von geodätischem Normalpotential und geophysikalischem Referenzpotential kann somit natürlich nicht erreicht werden, kann aber mindestens gefordert werden. Erreicht werden kann, dass beide Felder konsistent sind, nur über ein möglichst ähnliches Referenzpotential und eine möglichst ähnliche geometrische Form (definiert über die geometrische Abplattung) der Referenzkörper, die den Potentialen zugeordnet sind.

## 8.1 Einfluss des Abplattungsgradienten auf die vorgeschlagene Lösung

Zunächst wurde untersucht, wie sensibel die Modelle gegenüber der Änderung des Abplattungsgradienten  $f_{grad}$  sind.

Der in (4.10) vorgeschlagene Gradient wurde auf die Modelle PREM und WZIO angewendet und schrittweise in Stufen zu  $0.1 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$  variiert. Das gemäß (7.10) berechnete Potential wird jeweils mit dem geodätischen Normalpotential (6.6) am Ellipsoid verglichen.



Figur 8.1-8.6: Potential- und Schwereverlauf am Ellipsoid; abhängig vom gewählten Abplattungsgradienten

Den glattesten Kurvenverlauf findet man für PREM bei  $f_{grad}=2.6 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$  und für WZIO bei  $f_{grad}=3.0 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$ . Durch Variation des Gradienten für die Abplattung kann, je nach verwendetem Dichtemodell, eine unterschiedlich verbesserte Anpassung an den glatten Verlauf des Normalpotentials erreicht werden. Hier zeigt sich die bereits von [Denis, 1989] beschriebene starke Abhängigkeit des resultierenden Potentialfeldes vom gewählten Abplattungsgradienten, also von den verwendeten Dichtemodellen.

## 8.2 Das Gravitationspotential der Modelle

### 8.2.1 Das Modell STY1

Ausgehend von einem ellipsoidisch abgeplatteten, hydrostatischen Dichtemodell für die Erde, wurde das Modell WZIO mit dem Gradienten für eine tiefenabhängige Abplattung (4.10) ellipsoidisch modifiziert. Hieraus ergibt sich das Modell STY1 (Tabelle 8.1). In Tabelle 8.1 sind neben den Radien der Schichtgrenzen die mittleren Dichten sowie die Geometrien dieser Schichten in Form von geometrischer Abplattung  $f$ , die Länge der großen und kleinen Halbachse  $a$  bzw.  $b$  und deren Differenz  $a - b$  in km angegeben. Das Modell PREM wurde gleichfalls ellipsoidisch modifiziert und zum Vergleich ebenfalls dargestellt (Tabelle 6.3). Alle Modelle haben eine gemeinsame äußere Geometrie. Sie ergibt sich aus der für die Erde gegebenen geometrischen Abplattung  $f$  (Kapitel 6.1). Die möglichst gute Übereinstimmung von zu bestimmender geophysikalischer und existierender geodätischer Referenz ist eine wesentliche Forderung an alle Modelle und für zwangsläufig zu der äquivalenten äußeren Geometrie.

$k_{STY1}$	$r_{k \min}$ [km]	$r_{k \max}$ [km]	$\bar{\rho}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$f$ [ ]	$a$ [km]	$b$ [km]	$a - b$ [km]
1	0.1	1221.5	12.9032	0.00180186	1222.2560	1220.0537	2.2023
2	1221.5	<b>3480.0</b>	10.8410	0.00248209	3482.8866	3474.2418	8.6448
3	<b>3480.0</b>	3630.0	5.5725	0.00252726	3633.0656	3623.8839	9.1817
4	3630.0	5600.0	4.8885	0.00312060	5605.8383	588.3447	17.4936
5	5600.0	5701.0	4.3869	0.00315102	5707.0016	5689.0187	17.9829
6	5701.0	5771.0	3.9902	0.00317210	5777.1160	5758.7904	18.3256
7	5771.0	5971.0	3.9010	0.00323234	5977.4482	5958.1271	19.3211
8	5971.0	6151.0	3.6129	0.00328655	6157.7542	6137.5164	20.2378
9	6151.0	6291.0	3.4795	0.00332872	6297.9967	6277.0324	20.9642
10	6291.0	6346.6	3.3935	0.00334546	6353.6941	6332.4380	21.2560
11	6346.6	6356.0	2.9000	0.00334829	6363.1106	6341.8050	21.3056
12	6356.0	6368.0	2.6000	0.00335191	6375.1317	6353.7629	21.3688
13	6368.0	6371.0	1.0200	0.00335281	6378.1370	6356.7523	21.3847

**Tabelle 8.1:** Das Modell STY1

Hierin haben die beiden Parameter  $f_{grad}$  und  $r_{CMB}$  folgende Werte

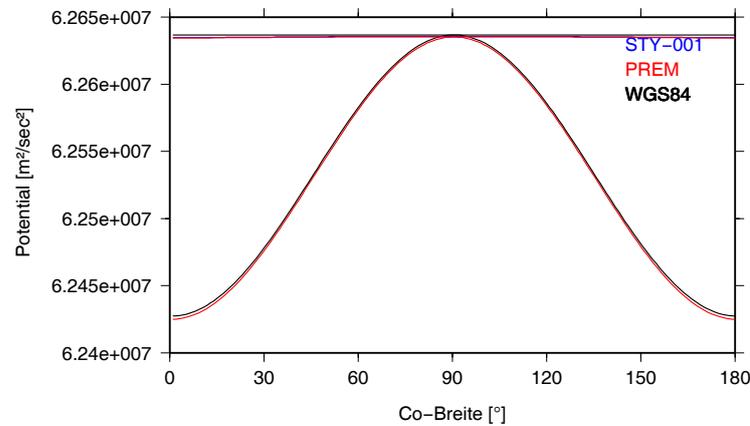
- $f_{grad} = 3.0118 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$
- $r_{CMB} = 3480.000 \text{ km}$

Für dieses Modell errechnet sich die Gesamtmasse zu  $5.97320674 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . Diese Masse liegt unterhalb der Erdmasse, die sich nach (6.3) durch Division der geozentrischen Gravitationskonstanten  $GM_{Erde}$  durch die Gravitationskonstante  $G$  (6.2) ergibt.

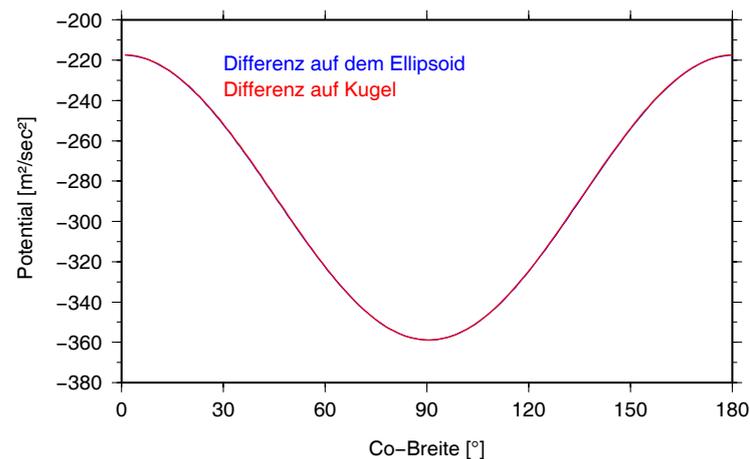
### Das Außenraumpotential des Modells STY1

Mit dem Ansatz für das Potential einer hydrostatisch abgeplatteten Modellerde aus (7.11) ergeben sich die Potentialverläufe der hier zum Vergleich gebrachten Felder des Normalpotentials des WGS84 (berechnet aus den Kugelfunktionskoeffizienten (6.4) mit (6.5)) sowie von PREM und STY1. Interessant sind jeweils die

Potentialverläufe direkt auf der Oberfläche des Referenzellipsoids, da dieses Äquipotentialfläche des geodätischen Normalpotentials ist, und auf einer Kugel mit Radius  $a$  (große Halbachse des Erdellipsoids), da diese die betrachtete Erdmasse gerade vollständig umschließt. Die breitenabhängigen Potentialverläufe ergeben folgendes Bild:



**Figur 8.7:** Potentiale am Ellipsoid und bei  $a = 6378.137$  km für unterschiedliche Modelle



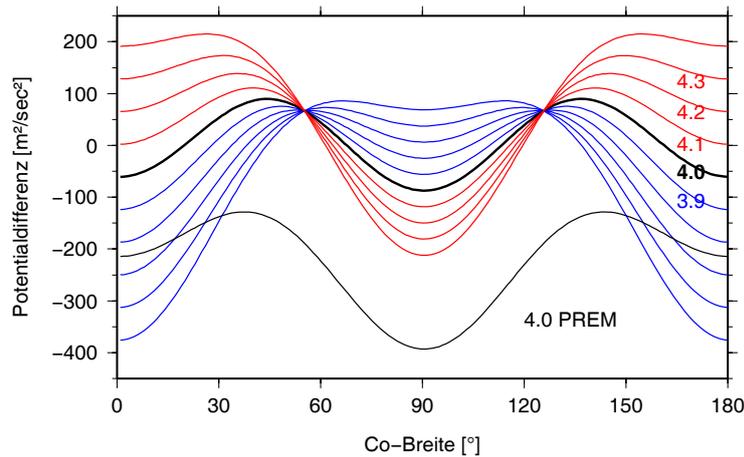
**Figur 8.8:** Potentialdifferenzen der Modelle STY-001 und PREM zum Potential des WGS84

Alle drei Potentialverläufe sind sich ähnlich. Jedoch fallen zwei wesentliche Unterschiede auf: Zum einen liegen die Potentiale der Modelle STY1 und PREM geringfügig unterhalb des geodätischen Normalpotentials, zum anderen unterscheiden sich die Potentiale an den Polen stärker als am Äquator.

### Anpassung der Modellparameter des Modells STY1

Diese Unterschiede lassen sich nicht dadurch erklären, dass zur Berechnung der Modellpotentiale lediglich mit dem Ortsvektor  $r$  in 1. Näherung (3.16) gearbeitet wurde. Vielmehr haben die Unterschiede folgende zwei Ursachen:

1. Die Variation der Werte zwischen Pol und Äquator lässt auf einen falschen Abplattungsgradienten schließen. Durch Veränderung des Wertes hin zu einem möglichst gut an das Normalpotential angepassten Potentialverlauf kann das Modell verbessert werden. Der in Figur 8.8 hervorgehobene Wert von  $f_{grad} = 4.0 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$  repräsentiert für dieses Modell am Besten einen „glatten“ Kurvenverlauf. Als Kriterium wurde die Variationsbreite, der Abstand zwischen Minima und Maxima, gewertet. Im Vergleich ist der entsprechende Kurvenverlauf für das Modell PREM dargestellt.



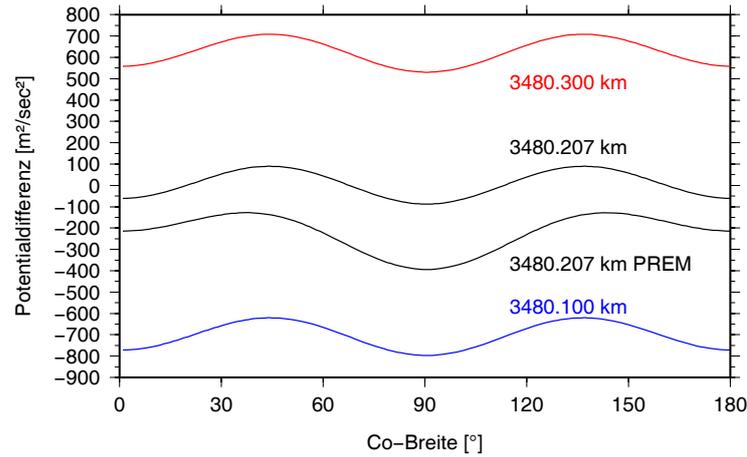
**Figur 8.9:** Potentialdifferenz zum Normalpotential für unterschiedliche  $f_{grad}$

2. Das generell zu niedrige Niveau der Modellpotentiale folgt aus der Gesamtmasse der Modelle. Darauf wurde schon in den Kapiteln 6.3 und 6.4 hingewiesen. Das Modell wird dahin gehend modifiziert. Infrage kommen Veränderungen am Dichteverlauf einzelner Schichten oder die Variation von Schichtkantenradien.

Eine weitere Möglichkeit, ein Minderpotential, das vermeintlich durch eine zu geringe Gesamtmasse des Modells verursacht ist, zu begründen bzw. auszugleichen liegt in der für Potentialberechnungen elementaren Gravitationskonstanten  $G$ . Eine um  $1 \cdot 10^{-24} \frac{km^3}{kg \cdot sec^2}$  geänderte Gravitationskonstante verändert den nach (7.10) bzw. (7.11) berechneten Potentialwert um ca.  $940 \frac{m^2}{sec^2}$ , was aus einer einfachen Abschätzung folgt. Dies ist besonders bemerkenswerter, da die Gravitationskonstante experimentell nur auf 3 Nachkommastellen genau bestimmt ist. Etwaige mittlere Potentialunterschiede ließen sich somit problemlos durch eine nicht ausreichend genau bestimmte Gravitationskonstante erklären. Das gilt jedoch nicht für den breitenabhängigen Verlauf der Potentiale, da dieser nicht von  $G$  abhängt. In dieser Arbeit wird weiterhin mit dem allgemein anerkannten und auf 3 Nachkommastellen angegeben Wert für die Gravitationskonstante (6.2)

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot sec^2} \text{ gerechnet.}$$

[Dziewonski und Anderson, 1981] haben bereits darauf verwiesen, dass der mittlere Radius des äußeren Kerns, aufgrund einer systematischen Abweichung zwischen den PcP-Laufzeiten des Modells und denen der Beobachtungen, etwas größer sein könnte. Allerdings gehen [Dziewonski und Anderson, 1981] sogar von einer möglichen Differenz von bis zu 1.7 km aus. Aus diesem Grund wird in der hier vorliegenden Arbeit ausschließlich der Radius der Kern-Mantel-Grenze als variabler Parameter betrachtet und mit ihm eine Anpassung von Gesamtmasse des Modells und Erdmasse erreicht. Als Kriterium gilt das mittlere Potential, welches den Wert  $U_0$  aus (6.6) bestmöglich annähert.



**Figur 8.10:** Potentialdifferenz zwischen Normalpotential und STY1 am Ellipsoid für unterschiedliche  $r_{CMB}$

### 8.2.2 Das Modell STY2

Es ergeben sich zwei neue Ausgangswerte für die Modellierung. Dies sind

- der Abplattungsgradient  $f_{grad} = 4.0 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$  und
- der Radius der Kern-Mantel-Grenze  $r_{CMB} = 3480.207 \text{ km}$

Die Angabe des Radius der CMB mit m-Genauigkeit ist in Anbetracht des enormen Dichteunterschiedes an der Kern-Mantel-Grenze plausibel. Auch hier zeigt sich die große Sensibilität des Systems gegenüber Veränderungen der Schichtradien an Stellen großer Dichtekontraste. Mit diesen geänderten Parametern und den Werten aus Tabelle 8.1 ergibt sich das modifizierte Modell STY2

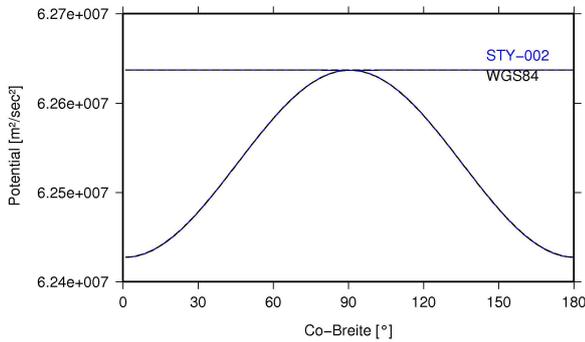
$k_{STY2}$	$r_{k \text{ min}}$ [km]	$r_{k \text{ max}}$ [km]	$\bar{\rho}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$f$ [ ]	$a$ [km]	$b$ [km]	$a - b$ [km]
1	0.000	1221.500	12.9026	0.00129301	1222.0484	1220.4683	1.5801
2	1221.500	<b>3480.207</b>	10.8408	0.00219649	3482.7615	3475.1116	7.6499
3	<b>3480.207</b>	3630.000	5.57230	0.00225641	3632.7368	3624.5399	8.1969
4	3630.000	5600.000	4.88847	0.00304441	5605.6955	5588.6294	17.0660
5	5600.000	5701.000	4.38685	0.00308481	5706.8752	5689.2706	17.6046
6	5701.000	5771.000	3.99021	0.00311281	5777.0014	5759.0187	17.9827
7	5771.000	5971.000	3.90104	0.00319281	5977.3692	5958.2846	19.0846
8	5971.000	6151.000	3.61290	0.00326481	6157.7094	6137.6057	20.1038
9	6151.000	6291.000	3.47945	0.00332081	6297.9800	6277.0656	20.9144
10	6291.000	6346.600	3.39352	0.00334305	6353.6889	6332.4482	21.2407
11	6346.600	6356.000	2.90000	0.00334681	6363.1074	6341.8113	21.2961
12	6356.000	6368.000	2.60000	0.00335161	6375.1311	6353.7641	21.3670
13	6368.000	6371.000	1.02000	0.00335281	6378.1370	6356.7523	21.3847

**Tabelle 8.2:** Das Modell STY2

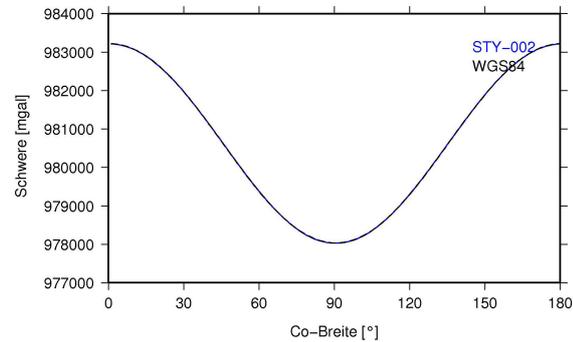
Für dieses Modell errechnet sich in guter Übereinstimmung mit (6.3) die Gesamtmasse zu  $5.973338 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

## Das Außenraumpotential des Modells STY2

Für das Modell STY2 werden Schwerepotential- und Schwerebeschleunigung nach (7.11 und 7.12) berechnet.

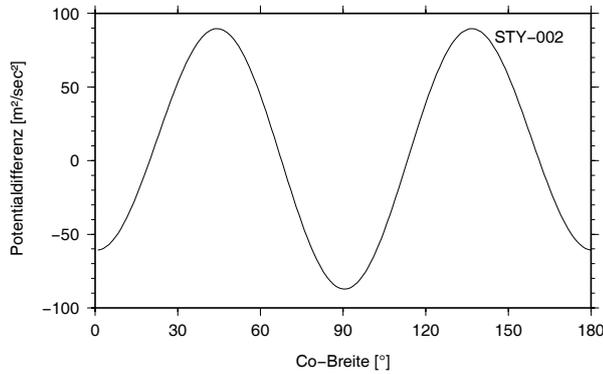


Figur 8.11: Potentiale am Ellipsoid

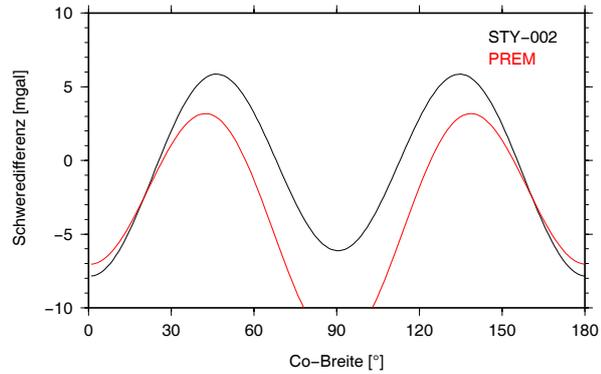


Figur 8.12: Schwereverlauf am Ellipsoid

Schwerepotential- und Schwerebeschleunigung unterscheiden sich am Ellipsoid wie folgt:



Figur 8.13: Potential am Ellipsoid für STY2



Figur 8.14: Schwereverlauf am Ellipsoid für STY2

Die Potential- und Schwerewerte des Modells STY2 unterscheiden sich von den Werten des WGS84 wie folgt:

Ist-Wert (STY2) [ $\text{m}^2/\text{sec}^2$ ]	Soll-Wert (WGS84) [ $\text{m}^2/\text{sec}^2$ ]	Differenz [ $\text{m}^2/\text{sec}^2$ ]
$U_{Pol} = 0.62427253 \cdot 10^8$	$U_{Pol} = 0.624274620000 \cdot 10^8$	$\Delta U_{Pol} = 210$
$U_{\ddot{A}qu} = 0.62636749 \cdot 10^8$	$U_{\ddot{A}qu} = 0.626367598090 \cdot 10^8$	$\Delta U_{qu} = 10$

Tabelle 8.3: Soll-Ist Vergleich Potentialwerte STY2 bei  $a = 6378.137$  km

Ist-Wert (STY2)[mgal]	Soll-Wert (WGS84)[mgal]	Differenz [mgal]
$\gamma_{Pol} = 983210.251087$	$\gamma_{Pol} = 983218.49378$	$\Delta \gamma_{Pol} = 8.25$
$\gamma_{\ddot{A}qu} = 978026.814207$	$\gamma_{\ddot{A}qu} = 978032.53359$	$\Delta \gamma_{\ddot{A}qu} = 5.74$

Tabelle 8.4: Soll-Ist Vergleich Schwerebeschleunigungswerte STY2 bei  $a = 6378.137$  km

## Die Kugelfunktionsentwicklung des Außenraumpotentials für das Modell STY2

Die Kugelfunktionskoeffizienten für das Modell STY2 berechnen sich mit (7.14) und (7.15) (Alle Koeffizienten, die den Wert von  $1.0 \cdot 10^{-15}$  nicht überschreiten, werden zu Null gesetzt, da dies numerische Rechengenauigkeit ist).

$n$	$m$	$C_n^m$	$S_n^m$
0	0	$0.100000013581 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
1	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+00}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
2	0	<b><math>-0.483593120549 \cdot 10^{-03}</math></b>	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
3	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
4	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
5	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
6	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
7	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
8	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
9	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
10	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$

**Tabelle 8.5:** Kugelfunktionskoeffizienten STY2

Aus der Kugelfunktionsentwicklung kann sich nur der Koeffizient  $C_2^0$  ergeben, da der Ortsvektor der ellipsoidischen Schalen nur in 1. Näherung angeben ist (folglich lediglich in Abhängigkeit von  $P_2(\cos \vartheta)$ ) Dieser hat den Wert

$$C_2^0 = -0.483593120549 \cdot 10^{-3}$$

Mit der dynamischen Abplattung (dynamischer Formfaktor)  $J_2 = -\sqrt{5} \cdot C_2^0$  und mit (4.17) folgt als Wert für  $f$

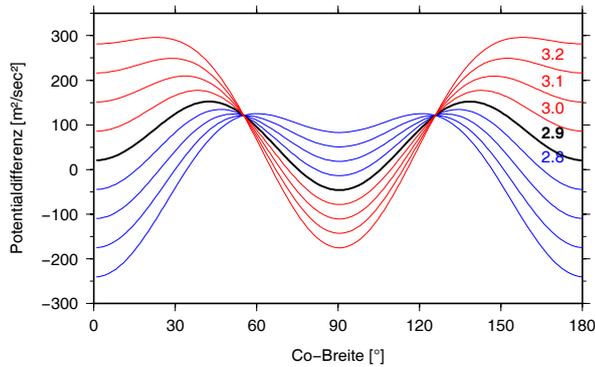
$$f_h = 0.0033508650201095$$

der allein aus hydrostatischen Überlegungen entwickelt wurde und deshalb hydrostatische Abplattung  $f_h$  genannt werden kann. Für den Wert der reziproken hydrostatischen Abplattung erhält man

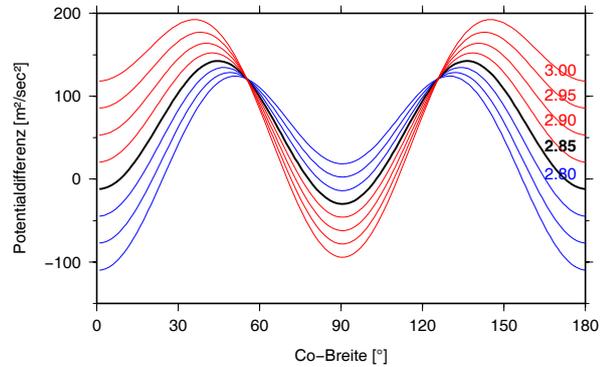
$$\frac{1}{f_h} = 298.430403$$

### 8.2.3 Das Modell STY3

Wird zusätzlich die Dichte als radiusabhängige Funktion berücksichtigt, berechnen sich Potential- und Schwereverlauf nach (7.23 und 7.24). Für das Modell STY3 mit radiusabhängiger Dichte sind, bei Forderung nach einem möglichst „glatten“ Potentialverlauf am Ellipsoid und minimaler Differenz zum Wert des Normalpotentials, wieder die Modellparameter  $f_{grad}$  und  $r_{CMB}$  anzupassen.

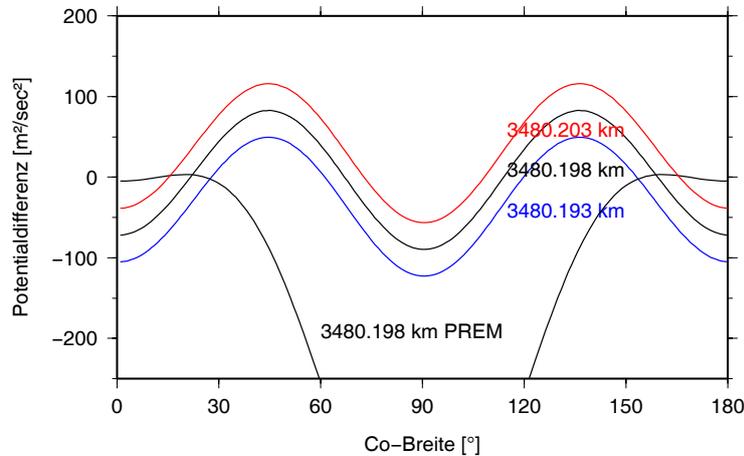


**Figur 8.15:** Bester Abplattungsgradient - grob



**Figur 8.16:** Bester Abplattungsgradient - fein

Wird  $f_{grad}$  mit einem Wert von  $2.85 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$  angesetzt, nähert sich das Gesamtpotential des Modells dem Oberflächenwert des Normalpotentials gut an. Um außerdem zu erreichen, dass die Gesamtmasse des Modells mit der tatsächlichen übereinstimmt und das resultierende Potential möglichst glatt ist, muss der Radius der Kern-Mantel-Grenze erneut geringfügig verändert werden.



**Figur 8.17:** Potentialdifferenz zwischen Normalpotential und STY3 am Ellipsoid für unterschiedliche  $r_{CMB}$

Daraus folgt mit den Werten

- $f_{grad} = 2.85 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$
- $r_{CMB} = 3480.198 \text{ km}$

und den Daten aus Tabelle 8.2 das Modell STY3:

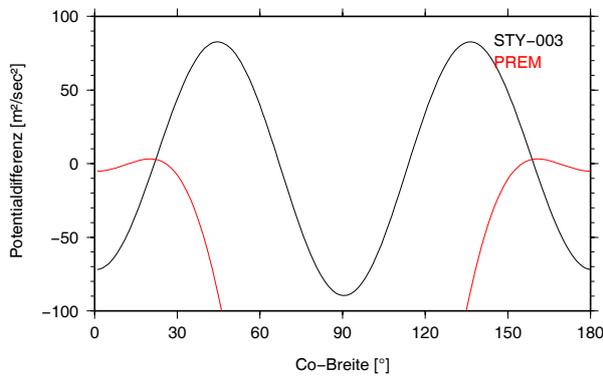
$k_{STY3}$	$r_k$ min [km]	$r_k$ max [km]	$\bar{\rho}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$f$ [ ]	$a$ [km]	$b$ [km]	$a - b$ [km]
1	0.000	1221.500	12.9026	0.00188520	1222.2901	1219.9858	2.3043
2	1221.500	<b>3480.198</b>	10.8408	0.00252893	3483.1393	3474.3307	8.8086
3	<b>3480.198</b>	3630.000	5.57230	0.00257163	3633.1194	3623.7764	9.3430
4	3630.000	5600.000	4.88847	0.00313308	5605.8617	5588.2981	17.5636
5	5600.000	5701.000	4.38685	0.00316186	5707.0223	5688.9775	18.0448
6	5701.000	5771.000	3.99021	0.00318181	5777.1347	5758.7530	18.3817
7	5771.000	5971.000	3.90104	0.00323881	5977.4612	5958.1013	19.3599
8	5971.000	6151.000	3.61290	0.00329011	6157.7615	6137.5018	20.2597
9	6151.000	6291.000	3.47945	0.00333001	6297.9994	6277.0270	20.9724
10	6291.000	6346.600	3.39352	0.00334586	6353.6949	6332.4363	21.2586
11	6346.600	6356.000	2.90000	0.00334854	6363.1111	6341.8040	21.3071
12	6356.000	6368.000	2.60000	0.00335196	6375.1318	6353.7627	21.3692
13	6368.000	6371.000	1.02000	0.00335281	6378.1370	6356.7523	21.3847

Tabelle 8.6: Das Modell STY3

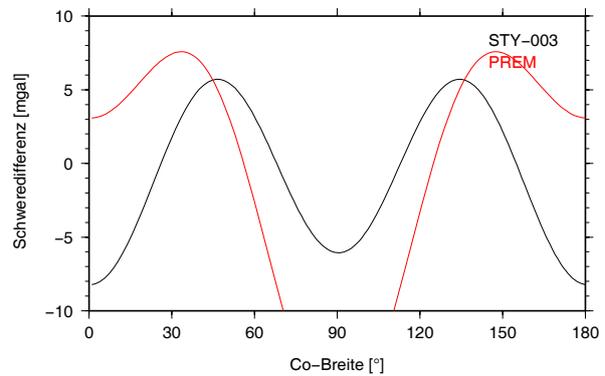
Die Gesamtmasse des Modells beträgt  $5.973332 \cdot 10^{24}$  kg.

### Das Außenraumpotential des Modells STY3

Potential- und Schwereverlauf unterscheiden sich von den Werten des Normalpotentials und der Normalschwere, wie folgt:



Figur 8.18: Potentiale am Ellipsoid für STY3



Figur 8.19: Schwereverlauf am Ellipsoid für STY3

An Pol und Äquator stellt sich die Situation wie folgt dar:

Ist-Wert (STY3) [m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]	Soll-Wert (WGS84) [m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]	Differenz [m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]
$U_{Pol} = 0.62427242 \cdot 10^8$	$U_{Pol} = 0.624274620000 \cdot 10^8$	$\Delta U_{Pol} = 220$
$U_{\ddot{A}qu} = 0.62636746 \cdot 10^8$	$U_{\ddot{A}qu} = 0.626367598090 \cdot 10^8$	$\Delta U_{\ddot{A}qu} = 13$

Tabelle 8.7: Soll-Ist Vergleich Potentialwerte STY3 bei  $a = 6378.137$  km

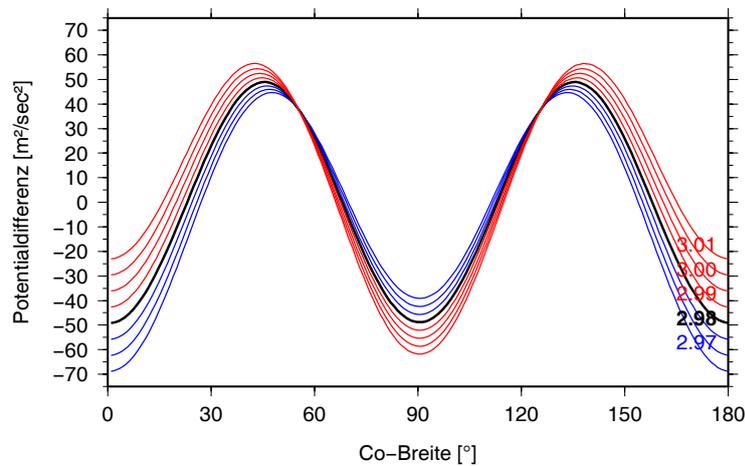
Ist-Wert (STY3) [mgal]	Soll-Wert (WGS84) [mgal]	Differenz [mgal]
$\gamma_{Pol} = 983209.890883$	$\gamma_{Pol} = 983218.49378$	$\Delta \gamma_{Pol} = 8.60$
$\gamma_{\ddot{A}qu} = 978026.867384$	$\gamma_{\ddot{A}qu} = 978032.53359$	$\Delta \gamma_{\ddot{A}qu} = 5.66$

Tabelle 8.8: Soll-Ist Vergleich Schwerebeschleunigungswerte STY3 bei  $a = 6378.137$  km

Der Unterschied in den Ergebnissen, zwischen dem Modell mit schichtweise konstanter Dichte und dem Modell STY3 mit ortsabhängiger Dichte, zeigt wiederum die Empfindlichkeit der resultierenden Potentiale bei Änderung des Abplattungsverlaufs. Die Modelle STY2 und STY3 unterscheiden sich unwesentlich im Hinblick auf den wählenden Radius der CMB und der Variationsbreite des Potentials. Allerdings muss ein anderer Abplattungsgradient in Anwendung gebracht werden, um ein Potential zu erhalten, das dem geodätischen Referenzpotential ähnlich ist.

#### 8.2.4 Das Modell STY4

Die Potentiale einer ellipsoidisch geschichteten Modellerde mit radiusabhängiger Dichte und der Beschreibung des Ortes aller ellipsoidischen Schichten in 2. Näherung berechnen sich nach (7.41 und 7.42). Auch hier muss der in Anwendung zu bringende Abplattungsgradient gegenüber dem Modell STY3 angepasst werden.



**Figur 8.20:** Potentialdifferenzen zwischen Normalpotential und STY3 am Ellipsoid für unterschiedliche  $f_{grad}$

Es ergibt sich ein idealer Wert von  $f_{grad} = 2.98 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$ . Der Radius der CMB kann unverändert bleiben, da die Gesamtmasse des Modells gut zum Sollwert passt. Eine entscheidende Verbesserung ergibt sich bei der Abweichung des Modellpotentials vom Normalpotential des WGS84 am Ellipsoid. Waren es in den Varianten zuvor noch Abweichungen von  $\pm 85 \text{ m}^2/\text{sec}^2$  (Figur 8.13 und Figur 8.18) sind es jetzt nur noch  $\pm 49 \text{ m}^2/\text{sec}^2$  (Figur 8.20). Dies bedeutet eine wesentlich bessere Anpassung allein dadurch, dass der Radius  $r$  jetzt nicht mehr in 1. sondern in 2. Näherung verwendet wird. Im Abschnitt zum mittleren Radius (Kapitel 3.3) wurde bereits festgestellt, dass die maximale Abweichung vom exakten Ort eines Ellipsoids zur Angabe dieses Ortes in 1. bzw. 2. Näherung von knapp 27 m auf ca. 6 cm fällt.

Somit ist mit den Werten

- $f_{grad} = 2.98 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$
- $r_{CMB} = 3480.198 \text{ km}$

und den Daten aus Tabelle 8.6 das Modell STY4 definiert:

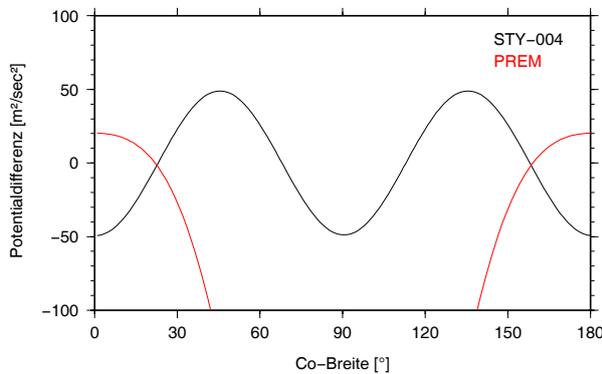
$k_{STY4}$	$r_{k \text{ min}}$ [km]	$r_{k \text{ max}}$ [km]	$\bar{\rho}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$f$ [ ]	$a$ [km]	$b$ [km]	$a - b$ [km]
1	0.000	1221.500	12.9032	0.00181826	1222.2627	1220.0403	2.2224
2	1221.500	3480.198	10.8408	0.00249135	3483.0956	3474.4180	8.6776
3	3480.198	3630.000	5.57230	0.00253599	3633.0762	3623.8627	9.2135
4	3630.000	5600.000	4.88847	0.00312305	5605.8429	5588.3355	17.5073
5	5600.000	5701.000	4.38685	0.00315315	5707.0057	5689.0106	17.9950
6	5701.000	5771.000	3.99021	0.00317401	5777.1197	5758.7830	18.3366
7	5771.000	5971.000	3.90104	0.00323361	5977.4508	5958.1220	19.3287
8	5971.000	6151.000	3.61290	0.00328725	6157.7556	6137.5135	20.2421
9	6151.000	6291.000	3.47945	0.00332897	6297.9972	6277.0313	20.9658
10	6291.000	6346.600	3.39352	0.00334554	6353.6942	6332.4377	21.2565
11	6346.600	6356.000	2.90000	0.00334834	6363.1107	6341.8048	21.3059
12	6356.000	6368.000	2.60000	0.00335192	6375.1317	6353.7628	21.3689
13	6368.000	6371.000	1.02000	0.00335281	6378.1370	6356.7523	21.3847

Tabelle 8.9: Das Modell STY4

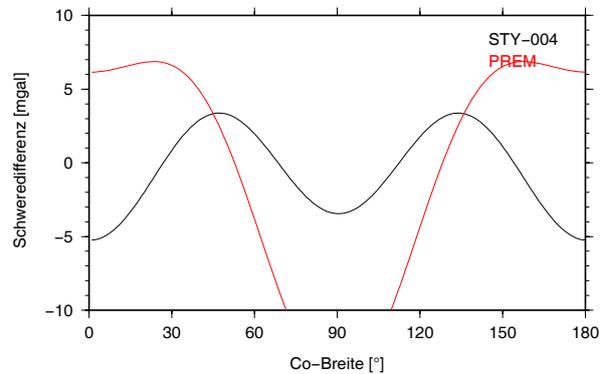
Dieses Modell liefert selbstverständlich wieder eine Gesamtmasse von  $5.973332 \cdot 10^{24}$  kg.

### Das Außenraumpotential des Modells STY4

Potential- und Schwereverlauf für das Modell STY4 unterscheiden sich von den Werten des Normalpotentials und der Normalschwere wie folgt:



Figur 8.21: Potentiale am Ellipsoid für STY4



Figur 8.22: Schwereverlauf am Ellipsoid für STY4

Ist-Wert (STY4) [m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]	Soll-Wert (WGS84) [m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]	Differenz [m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]
$U_{Pol} = 0.62427290 \cdot 10^8$	$U_{Pol} = 0.624274620000 \cdot 10^8$	$\Delta U_{Pol} = 170$
$U_{Äqu} = 0.62636774 \cdot 10^8$	$U_{Äqu} = 0.626367598090 \cdot 10^8$	$\Delta U_{Äqu} = 15$

Tabelle 8.10: Soll-Ist Vergleich Potentialwerte STY4 bei  $a = 6378.137$  km

Ist-Wert (STY4) [mgal]	Soll-Wert (WGS84) [mgal]	Differenz [mgal]
$\gamma_{Pol} = 983214.091352$	$\gamma_{Pol} = 983218.49378$	$\Delta \gamma_{Pol} = 4.40$
$\gamma_{Äqu} = 978028.869931$	$\gamma_{Äqu} = 978032.53359$	$\Delta \gamma_{Äqu} = 3.66$

Tabelle 8.11: Soll-Ist Vergleich Schwerebeschleunigungswerte STY4 bei  $a = 6378.137$  km

Der Unterschied in den Ergebnissen zeigt deutlich den starken Einfluss dieser Näherung auf den Oberflächenpotentialwert. Dieser variiert um den signifikanten Betrag von ca.  $\pm 30 \text{ m}^2/\text{sec}^2$ .

### Die Kugelfunktionsentwicklung des Außenraumpotentials für das Modell STY4

Die Kugelfunktionskoeffizienten dieses Modells, berechnet nach (7.49 - 7.51), sind

$n$	$m$	$C_n^m$	$S_n^m$
0	0	$0.100000005164 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
1	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+00}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
2	0	<b><math>-0.483900259995 \cdot 10^{-03}</math></b>	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
3	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
4	0	<b><math>0.315918477425 \cdot 10^{-06}</math></b>	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
5	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
6	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
7	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
8	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
9	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
10	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$

**Tabelle 8.12:** Kugelfunktionskoeffizienten STY4

Da hier alle Ortsvektoren mit den Legendreschen Funktionen  $P_2(\cos \vartheta)$  und  $P_4(\cos \vartheta)$  beschrieben werden (3.18), ergeben sich bei Entwicklung die Koeffizienten  $C_2^0$  und  $C_4^0$ .

$C_2^0$  hat den Wert

$$C_2^0 = -0.483900259995 \cdot 10^{-3}$$

Nach (4.17) ergibt sich eine hydrostatische Abplattung von

$$f_h = 0.0033518981378748$$

bzw. ein Wert für die reziproke hydrostatische Abplattung von

$$\frac{1}{f_h} = 298.338422$$

Dieser Wert stellt eine gute Annäherung an den realen Wert der geometrischen Abplattung dar und nähert diese deutlich besser an, als das der Wert aus Kapitel 8.2.6, für das Modell einer schalenweise homogenen Modellerde, bewirkt. Geht man davon aus, dass die Erde nicht vollständig im hydrostatischen Gleichgewicht sein kann, ist ein Unterschied dieser Größenordnung sogar zu erwarten.

### 8.3 Das Modell STY5: Endgültiges geophysikalisches Referenzmodell

Abschließend werden die tiefenabhängigen Korrekturen des geometrischen Abstandes zwischen Niveauellipsoid und Niveausphäroid, in Form eines Gradienten  $\kappa_{grad}$ , für die Darwin-Abweichung (Kapitel 4.2) eingerechnet. Dies führt für die Potentialdifferenz zum Normalpotential nur zu geringfügig besseren Werten. Die Berücksichtigung der Abweichung hat zum Ziel, das Sphäroid der Gleichgewichtsfigur geometrisch korrekt mittels seiner Abweichung vom Ellipsoid zu beschreiben.

Der durchschnittliche Abplattungsgradient wurde erneut geringfügig erhöht, auf den nunmehr endgültigen Wert von  $f_{grad} = 2.99 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$

Es ergibt sich das Modell STY5, das mit den Werten

- $f_{grad} = 2.99 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$
- $\kappa_{grad} = 2.10 \cdot 10^{-10} \cdot 1/\text{km}$
- $r_{CMB} = 3480.198 \text{ km}$

$k_{STY5}$	$r_{k \text{ min}}$ [km]	$r_{k \text{ max}}$ [km]	$\bar{\rho}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$f$ [ ]	$a$ [km]	$b$ [km]	$a - b$ [km]
1	0.000	1221.500	12.9032	0.00181826	1222.2627	1220.0403	2.2224
2	1221.500	3480.198	10.8408	0.00249135	3483.0956	3474.4180	8.6776
3	3480.198	3630.000	5.57230	0.00253599	3633.0762	3623.8627	9.2135
4	3630.000	5600.000	4.88847	0.00312305	5605.8429	5588.3355	17.5073
5	5600.000	5701.000	4.38685	0.00315315	5707.0057	5689.0106	17.9950
6	5701.000	5771.000	3.99021	0.00317401	5777.1197	5758.7830	18.3366
7	5771.000	5971.000	3.90104	0.00323361	5977.4508	5958.1220	19.3287
8	5971.000	6151.000	3.61290	0.00328725	6157.7556	6137.5135	20.2421
9	6151.000	6291.000	3.47945	0.00332897	6297.9972	6277.0313	20.9658
10	6291.000	6346.600	3.39352	0.00334554	6353.6942	6332.4377	21.2565
11	6346.600	6356.000	2.90000	0.00334834	6363.1107	6341.8048	21.3059
12	6356.000	6368.000	2.60000	0.00335192	6375.1317	6353.7628	21.3689
13	6368.000	6371.000	1.02000	0.00335281	6378.1370	6356.7523	21.3847

**Tabelle 8.13:** Das Modell STY5

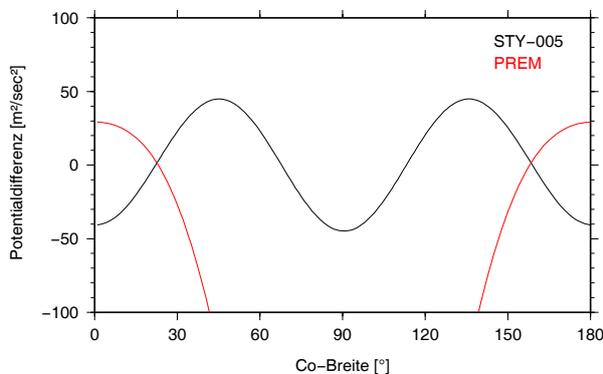
sowie der Dichtefunktion

$$\rho(q) = \left( \sum_{i=0}^N d_{2i} \frac{q^{2i}}{A^{2i}} \right) + e \left( \frac{q}{A} \right)^{-\lambda} = d_0 + d_2 \frac{q^2}{A^2} + d_4 \frac{q^4}{A^4} + d_6 \frac{q^6}{A^6} + d_8 \frac{q^8}{A^8} + e \left( \frac{q}{A} \right)^{-\lambda}$$

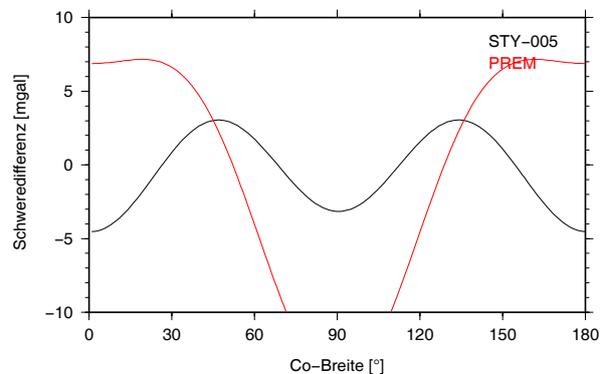
(abhängig vom mittleren Radius  $q$  und den von [Wziontek, 2004] angegebenen Koeffizienten (Tabelle 6.4)), beschrieben wird. Dieses Modell liefert wieder die Gesamtmasse von  $5.973332 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

### 8.3.1 Das Außenraumpotential des Modells STY5

Potential- und Schwereverlauf für das Modell STY5 unterscheiden sich von den Werten des Normalpotentials und der Normalschwere wie folgt:



**Figur 8.23:** Potentiale am Ellipsoid für STY5



**Figur 8.24:** Schwereverlauf am Ellipsoid für STY5

Ist-Wert (STY5) [m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]	Soll-Wert (WGS84) [m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]	Differenz [m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]
$U_{Pol} = \mathbf{0.62427273} \cdot 10^8$	$U_{Pol} = 0.624274620000 \cdot 10^8$	$\Delta U_{Pol} = 190$
$U_{\ddot{A}qu} = \mathbf{0.62636791} \cdot 10^8$	$U_{\ddot{A}qu} = 0.626367598090 \cdot 10^8$	$\Delta U_{\ddot{A}qu} = 32$

**Tabelle 8.14:** Soll-Ist Vergleich Potentialwerte STY5 bei  $a = 6378.137$  km

Ist-Wert (STY5) [mgal]	Soll-Wert (WGS84) [mgal]	Differenz [mgal]
$\gamma_{Pol} = \mathbf{983213.571682}$	$\gamma_{Pol} = 983218.49378$	$\Delta\gamma_{Pol} = 4.92$
$\gamma_{\ddot{A}qu} = \mathbf{978029.779717}$	$\gamma_{\ddot{A}qu} = 978032.53359$	$\Delta\gamma_{\ddot{A}qu} = 2.75$

**Tabelle 8.15:** Soll-Ist Vergleich Schwerebeschleunigungswerte STY5 bei  $a = 6378.137$  km

Bei der Abweichung des Modellpotentials vom Normalpotential  $U_0$  ergibt sich keine entscheidende Verbesserung. Waren es in den Varianten zuvor noch Abweichungen von  $\pm 49$  m<sup>2</sup>/sec<sup>2</sup> (Figur 8.21) sind es jetzt  $\pm 44$  m<sup>2</sup>/sec<sup>2</sup> (Figur 8.23). Dies bedeutet eine geringfügig bessere Anpassung an das Normalpotential des WGS84.

### 8.3.2 Die Kugelfunktionsentwicklung des Außenraumpotentials für das Modell STY5

Die Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationspotentials berechnen sich nach (7.64 – 7.66)

$n$	$m$	$C_n^m$	$S_n^m$
0	0	$0.100000005164 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
1	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+00}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
2	0	$\mathbf{-0.483906877467} \cdot 10^{-03}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
3	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
4	0	$\mathbf{0.366454495650} \cdot 10^{-06}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
5	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
6	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
7	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
8	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
9	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
10	0	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$

**Tabelle 8.16:** Kugelfunktionskoeffizienten STY5

Es ergeben sich wieder die Koeffizienten  $C_2^0$  und  $C_4^0$ .  $C_2^0$  hat den Wert

$$C_2^0 = -0.483906877467 \cdot 10^{-3}$$

Hieraus ergibt sich nach (4.18) analog Kapitel 8.3 die hydrostatische Abplattung unter Berücksichtigung des Korrekturterms  $\kappa$

$$f_h = 0.0033519203969221$$

bzw. der Wert für die reziproke Abplattung

$$\frac{1}{f_h} = 298.336440$$

Wie schon bei der Potentialberechnung verbessert sich die geometrische Abplattung bei Berücksichtigung der Darwin-Abweichung nur geringfügig.

### 8.3.3 Verwendung des Modells STY5 für die Interpretation des Erdschwerefeldes

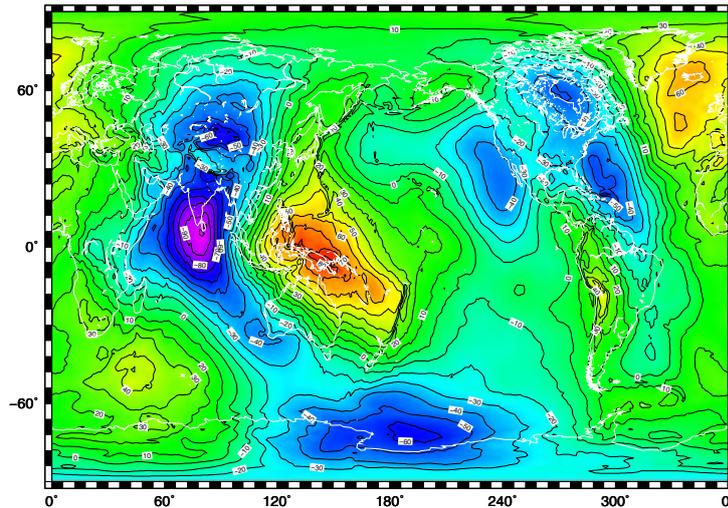
Das Dichtemodell STY5 erfüllt alle an ein hydrostatisches Referenzmodell zu stellenden Forderungen. Es ist ein Dichtemodell, dessen tiefenabhängiger Dichteverlauf streng der Forderung nach hydrostatischem Ausgleich in allen Erdschichten gerecht wird. Das Modell STY5 ist in jeder Tiefe ellipsoidisch abgeplattet. Die Forderung, dass ein heterogener Gleichgewichtskörper keine rein ellipsoidische Form haben kann, erfordert die Korrektur der schichtweise ellipsoidischen Form. Sie wird als Darwin-Abweichung  $\kappa$  im Modell berücksichtigt. Die Gesamtmasse des Modells stimmt mit der Masse der Erde überein und das Oberflächenpotential des Modells (hier: am Ort des geodätischen Referenzellipsoids) nähert sich gut an den Wert des geodätischen Normalpotentials an.

Aus dem Potentialverlauf für das Modell STY5 lässt sich eine hydrostatische Abplattung  $f_h$  ableiten, die in der Größenordnung der geometrischen Abplattung  $f$  der Erde liegt.

Das Modell STY5 stellt somit ein gutes geophysikalisches Dichtemodell dar, das, als hydrostatisches Dichtemodell für das Gravitationspotential der Erde, für die weitere Interpretation des Erdschwerefeldes genutzt werden kann.

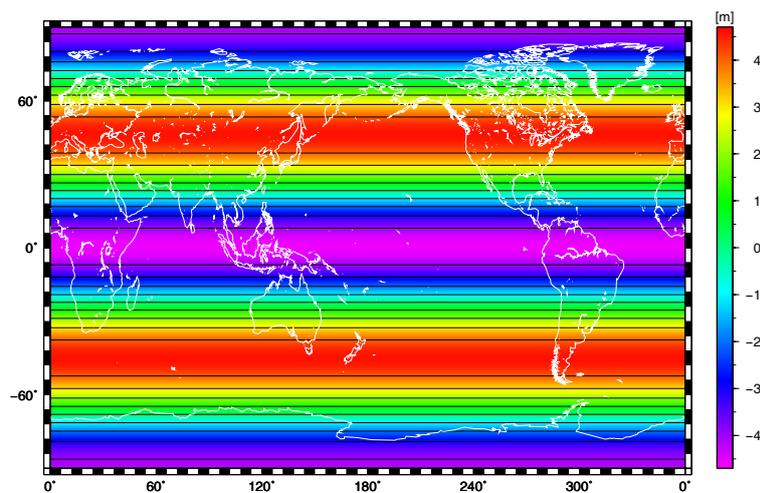
## 9 Geophysikalische Interpretation des realen Schwerefeldes

Verwendet man das hydrostatische Dichtemodell der Erde STY5 als „geophysikalische“ Referenz, ergeben sich aus der Kugelfunktionsentwicklung des Modells und im Vergleich zum realen Erdschwerefeld EIGEN folgende Geoidundulationen:



*Figur 9.1: Restfeld EIGEN – STY5*

Die hier abgebildeten Geoidundulationen unterscheiden sich von den Geoidundulationen, die man erhält, wenn man das geodätische Normalpotential in Anwendung bringt, um die Differenz von  $U_0$  zu dem Potential des Modells STY5 (siehe Figur 9.2).

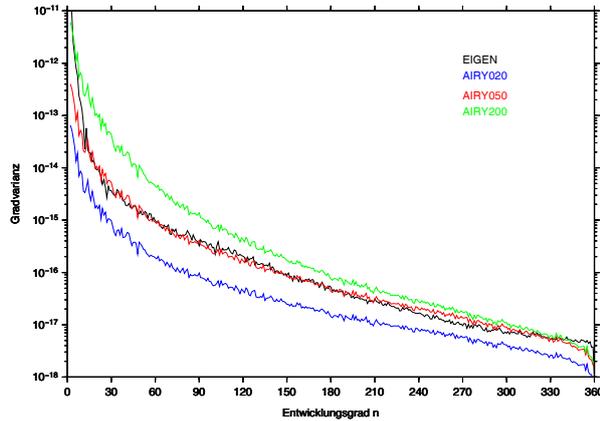


*Figur 9.2: Restfeld STY5 – Normalpotential*

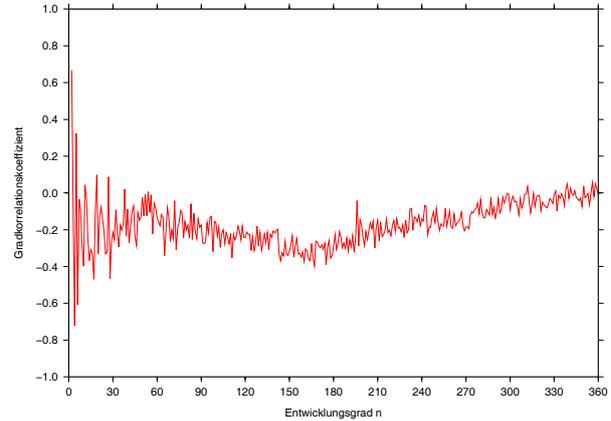
Der Unterschied zwischen den Potentialfeldern schwankt im Bereich von  $\pm 4.58$  m, was in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Kapitel 8.3.1 steht. Dort wurde eine Potentialdifferenz des hydrostatischen Potentials gegenüber dem Normalpotential  $U_0$  von  $\pm 44$  m<sup>2</sup>/sec<sup>2</sup> festgestellt.

### 9.1 Das Gravitationspotential einer an der Oberfläche isostatisch ausgeglichenen Erde

Das Gravitationspotential einer isostatisch ausgeglichenen Erde kann nach (3.26) mittels Flächenbelegungen berechnet werden. Einziger Parameter für die Bestimmung des Potentials, das bestmöglich zum realen Potential passt, ist die Ausgleichstiefe  $h_a$ . Diese kann im Bereich  $20 \text{ km} \leq h_a \leq 200 \text{ km}$  variieren. Der wahrscheinlichste Wert für die Ausgleichstiefe kann über das resultierende Amplitudenspektrum gut abgeschätzt werden. Als global wahrscheinlichste Ausgleichstiefe ist diejenige zu wählen, die, über alle Frequenzen gesehen, Amplituden liefert, die mindestens dem Betrag nach den Amplituden des Referenzfeldes (hier: EIGEN) entsprechen.



**Figur 9.3:** Amplitudenspektrum isostatisches Potential für verschiedene Ausgleichstiefen  $h_a$



**Figur 9.4:** Gradkorrelation isostatisches Potential - EIGEN

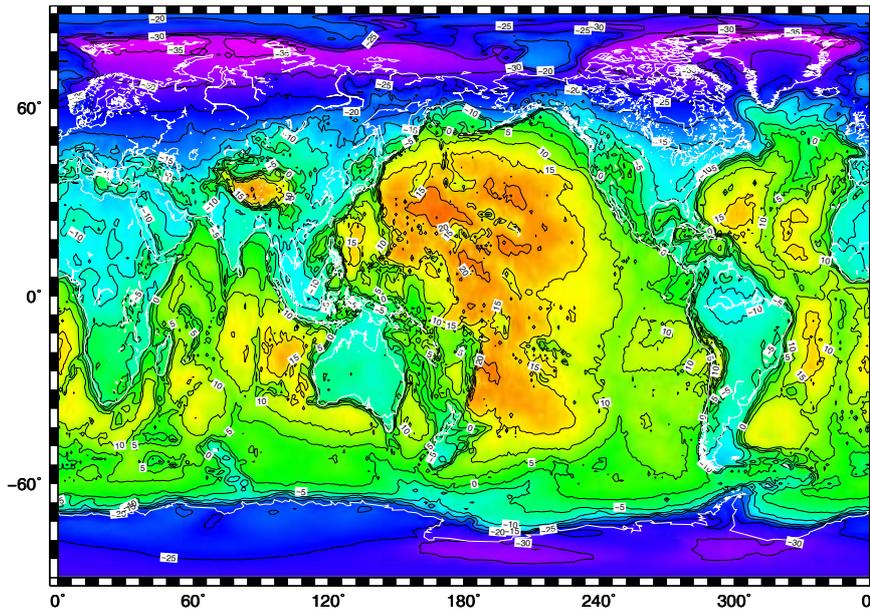
Die Ausgleichstiefe von  $h_a = 50 \text{ km}$  liefert gemessen am generellen Verlauf des Amplitudenspektrums eine optimale Anpassung an das Amplitudenspektrum des Modells EIGEN, auch wenn die Gradkorrelation zwischen den Koeffizientensätzen des isostatischen Modells und des Modells EIGEN keine guten Werte liefert. Hier ist auf die Problematik hinzuweisen, dass die Gradvarianzen eben nur einen Eindruck über die Qualität der Modelle liefern, der über alle Frequenzen vom Grad  $n$  gemittelt ist.

Die nach (7.70) berechneten Kugelfunktionskoeffizienten lauten (in Tabelle 9.1 sind nur die zonalen Koeffizienten für  $n \leq 10$  dargestellt)

$n$	$m$	$C_n^m$	$S_n^m$
0	0	$0.721351648584 \cdot 10^{-05}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
1	0	$-0.628313458649 \cdot 10^{-06}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
2	0	<b><math>-0.422389933752 \cdot 10^{-06}</math></b>	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
3	0	$-0.795868184968 \cdot 10^{-07}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
4	0	<b><math>-0.263901365008 \cdot 10^{-06}</math></b>	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
5	0	$0.214306525775 \cdot 10^{-06}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
6	0	$-0.269204402515 \cdot 10^{-07}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
7	0	$0.191999951506 \cdot 10^{-06}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
8	0	$0.530526516182 \cdot 10^{-07}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
9	0	$0.485076583238 \cdot 10^{-07}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$
10	0	$0.936895207620 \cdot 10^{-08}$	$0.000000000000 \cdot 10^{+01}$

**Tabelle 9.1:** Die ersten zonalen Kugelfunktionskoeffizienten für eine isostatisch ausgeglichene Modellerde mit  $h_a = 50 \text{ km}$

Die isostatisch berechneten Geoidundulationen sind in Figur 9.5 dargestellt.



**Figur 9.5:** Isostatische Undulationen mit  $h_a = 50$  km

Diese stehen in guter Übereinstimmung mit der topographischen Information, da isostatische Kompensation immer eine Funktion der Topographie ist und als solche auch berechnet wird (Kapitel 5.2). Die isostatischen Korrekturen betragen -19 m bis +22 m. In den Anden sind es z. B. +12 m, im Himalaja + 17 m.

Hierin erkennt man deutlich die bei der Berechnung des globalen isostatischen Ausgleichs erfolgte Einteilung der Erdoberfläche in die 4 vorgeschlagenen Blöcke (Kapitel 5.2). Die Bereiche junger Faltengebirge z. B. werden isostatisch gut abgebildet. In Figur 9.5 ist z. B. die Korrelation zwischen Topographie und Geoidundulation im Bereich der Zentralanden sehr ausgeprägt.

## 9.2 Das kombinierte hydrostatisch-isostatische Modell STY5-ISO

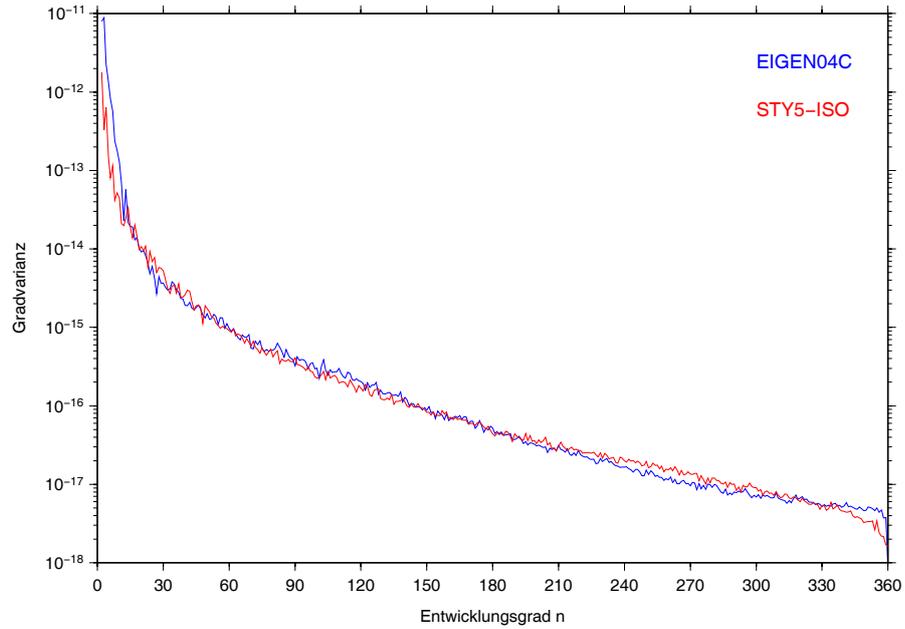
Ein kombiniertes hydrostatisch-isostatisches Modell ergibt sich aus der Überlagerung des hydrostatischen Modells STY5 mit dem globalen isostatischen Ansatz unter Verwendung einer isostatischen Ausgleichstiefe von  $h_a = 50$  km. (Kapitel 9.1).

In (3.31) wird zur Interpretation des Feldes das Störpotential als Differenz zwischen einem Modellpotential und einem Normalpotential definiert.

Das kombinierte hydrostatisch-isostatische Modell STY5-ISO ergibt sich durch Summation der Kugelfunktionskoeffizienten

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n^m{}_{STY5-ISO} \\ S_n^m{}_{STY5-ISO} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} C_n^m{}_{STY5} + C_n^m{}_{AIRY050} \\ S_n^m{}_{STY5} + S_n^m{}_{AIRY050} \end{array} \right\}$$

mit dem nach (3.36) berechneten Amplitudenspektrum des Modells STY5-ISO (Figur 9.6).



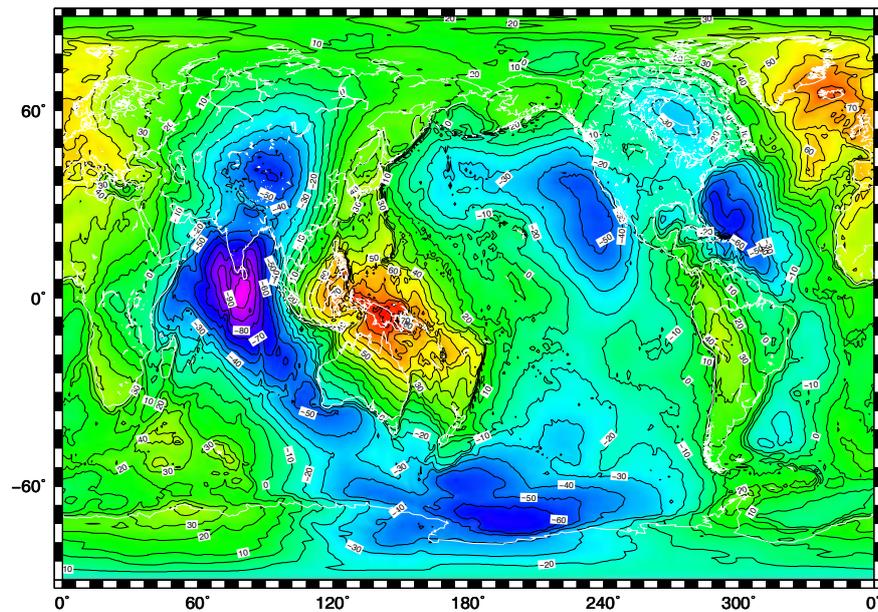
**Figur 9.6:** Gradvarianzen des Modells STY5-ISO im Vergleich zu EIGEN

Das Amplitudenspektrum des kombinierten Modells STY5-ISO zeigt ein ähnliches Verhalten wie das Amplitudenspektrum des Schwerfeldes EIGEN. Durch die Hinzunahme des hydrostatischen Modells haben sich die modellierten Gradvarianzen im langwelligen Bereich noch besser angepasst. Die wesentlichen und langwelligen Geoidstrukturen (Figur 1.2) werden durch dieses Modell nicht erklärt, da sie nicht auf hydrostatisch-isostatische Effekte zurückzuführen sind, sondern auf Abweichungen hiervon.

Damit liefert (3.31) das Störpotential

$$T(P) = \frac{GM_{\text{Körper}}}{r_P} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P}\right)^n \sum_{m=0}^n [(C_n^m \text{EIGEN} - C_n^m \text{STY5-ISO})\bar{R}_{nm}(P) + (S_n^m \text{EIGEN} - S_n^m \text{STY5-ISO})\bar{S}_{nm}(P)]$$

Die hieraus nach (3.34) berechneten Geoidundulationen ergeben das folgende Bild in Figur 9.7.



**Figur 9.7:** Geoidundulationen des Modells EIGEN bei Verwendung von STY5-ISO als Referenzpotential

$n$	$m$	$C_n^m$	$S_n^m$
0	0	0.100000726498D+01	0.000000000000D+00
1	0	-0.628298029044D-06	0.000000000000D+00
2	0	<b>-0.484329257028D-03</b>	0.000000000000D+00
3	0	-0.795848638600D-07	0.000000000000D+00
4	0	<b>0.102559611401D-06</b>	0.000000000000D+00
5	0	0.214301262928D-06	0.000000000000D+00
6	0	-0.269197779241D-07	0.000000000000D+00
7	0	0.191995236412D-06	0.000000000000D+00
8	0	0.530513486858D-07	0.000000000000D+00
9	0	0.485064669883D-07	0.000000000000D+00
10	0	0.936872317502D-08	0.000000000000D+00

**Tabelle 9.2:** Kugelfunktionskoeffizienten des kombinierten Modells STY5-ISO

Mit der negativen vollständig normalisierten dynamischen Abplattung  $C_2^0 = -0.484329257028 \cdot 10^{-3}$  ergibt sich nach (4.17) für die hydrostatische Abplattung

$$f_h = 0.0033533411469294$$

bzw. für den Wert der reziproken Abplattung

$$\frac{1}{f_h} = 298.2100407$$

Gegenüber der rein hydrostatischen Betrachtungsweise verändert das Berücksichtigen des isostatischen Massenausgleichs in der Kruste und Hinzufügen zum rein hydrostatischen Modell der Erde die Differenz zwischen geometrischer (tatsächlicher) und hydrostatischer Abplattung. Lag diese ohne den isostatischen Ansatz noch unterhalb der tatsächlichen Abplattung der Erde, ist sie bei Berücksichtigung einer isostatischen Massenverteilung in der Erdkruste größer als der reale Wert. Allerdings ist der Betrag der Differenz von tatsächlicher zu hydrostatisch-isostatischer Abplattung kleiner geworden.

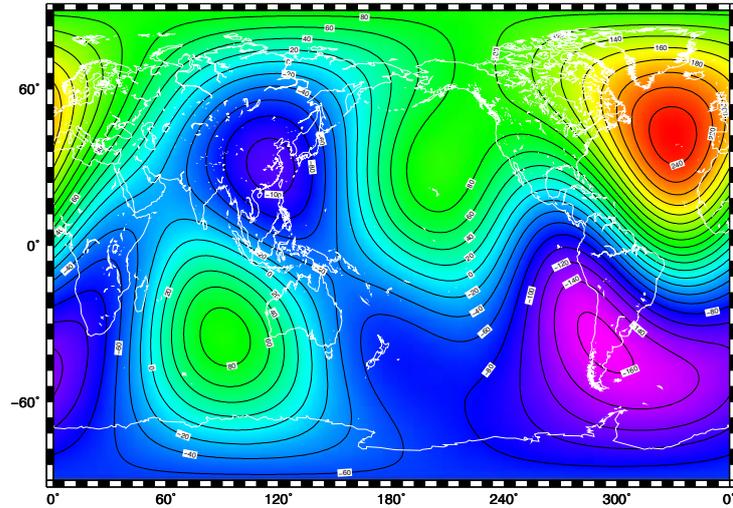
### 9.3 Das Gravitationspotential einer CMB-Topographie

Berücksichtigen wir darüberhinaus die Topographie der Kern-Mantel-Grenze, wie sie z. B. von [Morelli und Dziewonski, 1987], bzw. [Sze und van der Hilst, 2003] (siehe Kapitel 6.6) angegeben wurde, lassen sich mit (7.75) die entsprechenden Störpotentiale bestimmen. Aus ihnen können mit (3.6) und (3.34) Geoidundulationen zum Vergleich mit dem tatsächlichen Schwerefeld berechnet werden.

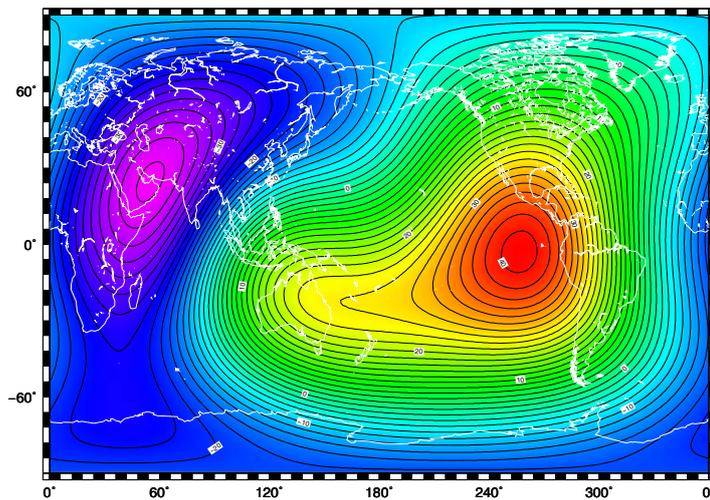
Die in Figur 9.8 dargestellten Geoidundulationen übersteigen das zu erwartende Niveau um ein Vielfaches (die Undulationen der Erde betragen nur ungefähr  $\pm 100$  m). Dies deckt sich mit der von [Bowin, 1986] gemachten Abschätzung, dass die Topographie der CMB einen bestimmten Wert nicht überschreiten sollte, den er mit  $\pm 1$  km angegeben hat. Die Topographie von Sze erfüllt diese Bedingung und liefert plausible Beiträge zum Erdschwerefeld. Allerdings zeigen sowohl Figur 9.8 als auch Figur 9.9 im Wesentlichen nicht die Strukturen, die sich im langwellig gefilterten Geoid (Figur 9.10) zeigen. Das kann zum einen an der Qualität und der Richtigkeit des Modells der Kern-Mantel-Grenze liegen (in Kapitel 6.6 wurde bereits auf die Schwierigkeit bei der Interpretation der seismischen Informationen hingewiesen), zum anderen daran, dass die wesentlichen Strukturen in EIGEN nicht durch Undulationen an der Kern-Mantel-Grenze zu erklären sind.

Das Modell von [Sze und van der Hilst, 2003] zeigt eine Topographie, die deutlich kleinere Geoidundulationen liefert, was in besserer Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Feld steht. Das Problem mit den nicht vergleichbaren Strukturen hingegen bleibt. In beiden Fällen sind die gegenüber der Topographie (Figur 6.11 und Figur 6.13) deutlich geglätteten Strukturen zu erkennen. Sie sind mit der Potentialwirkung in großer Entfernung zu erklären. Bei der Feldfortsetzung nach oben verlieren die kurzwelligen Signalanteile an Einfluss und das Signal wird verstärkt durch die langwelligen Anteile bestimmt.

Im Vergleich zu den durch die Topographien der Kern-Mantel-Grenzen verursachten Undulationen (Figur 9.8 und Figur 9.9), werden die Geoidundulationen des Feldes EIGEN für  $n \leq 4$  in Figur 9.10 dargestellt.



**Figur 9.8:** Geoidundulationen aus der Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach [Morelli und Dziewonski, 1987];  $-166 \text{ m} \leq N \leq 252 \text{ m}$



**Figur 9.9:** Geoidundulationen aus der Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach [Sze und van der Hilst, 2003];  $-39 \text{ m} \leq N \leq 41 \text{ m}$

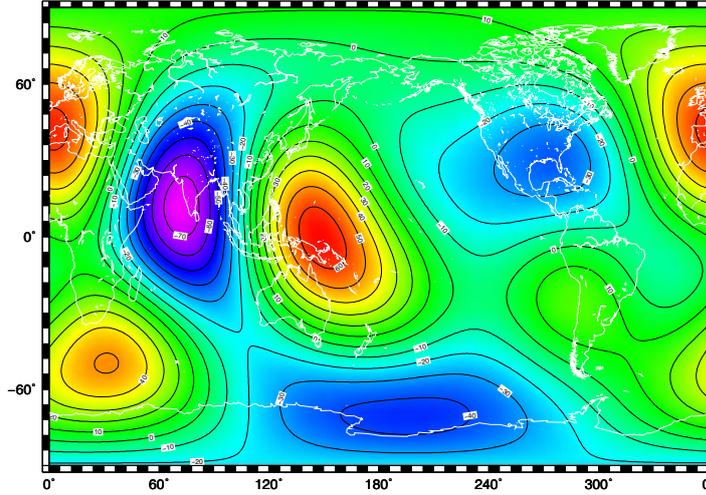
Nach (7.76) berechnen sich die Koeffizienten des Gravitationspotentials (verursacht durch eine undulierende Kern-Mantel-Grenze) aus den Reihenentwicklungskoeffizienten der Topographie wie folgt:

$$\begin{Bmatrix} \hat{C}_n^m \\ \hat{S}_n^m \end{Bmatrix} = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot \frac{R_{CMB}^2 \cdot \Delta\rho_{CMB}}{M_{\text{Körper}}} \left( \frac{R_{CMB}}{a} \right)^n \cdot \begin{Bmatrix} c_n^m \\ s_n^m \end{Bmatrix}$$

Mit dieser Beziehung lassen sich aus gegebenen Potentialkoeffizienten umgekehrt auch die Reihenentwicklungskoeffizienten der Topographie der CMB berechnen.

$$\begin{Bmatrix} c_n^m \\ s_n^m \end{Bmatrix} = \left( \frac{a}{R_{CMB}} \right)^n \cdot \frac{M_{\text{Körper}}}{R_{CMB}^2 \cdot \Delta\rho_{CMB}} \frac{2n+1}{4\pi} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{C}_n^m \\ \hat{S}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.1)$$

Diese Koeffizienten repräsentieren diejenige Topographie an der Kern-Mantel-Grenze, die sich vollständig aus dem durch die Potentialkoeffizienten beschriebenen residualen Schwerefeld ergibt, nachdem das Modell STY5-ISO in Abzug gebracht wurde.



**Figur 9.10:** Langwellige Geoidundulationen des Modells EIGEN für  $n \leq 4$ ;  $-77 m \leq N \leq 67 m$

Die Topographie berechnet sich nach (6.18) zu

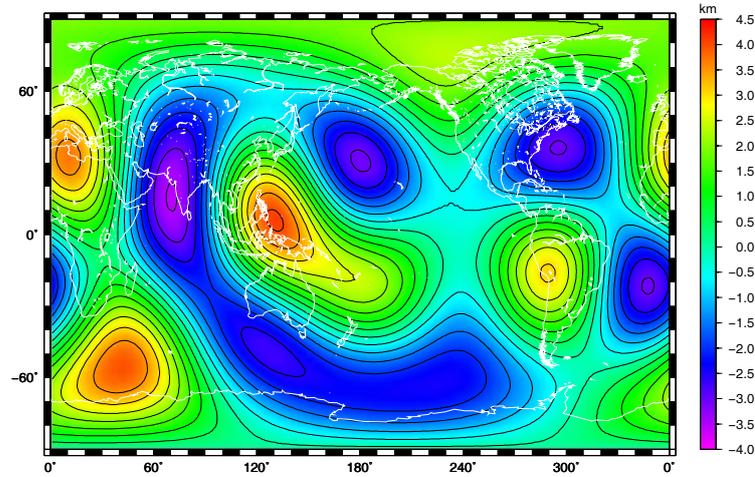
$$\delta r(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n [c_n^m \cos m\lambda + s_n^m \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \quad (9.2)$$

Für die hieraus abgeleitete Topographie (auszugsweise für  $n \leq 6$ ) ergeben sich folgende Koeffizienten

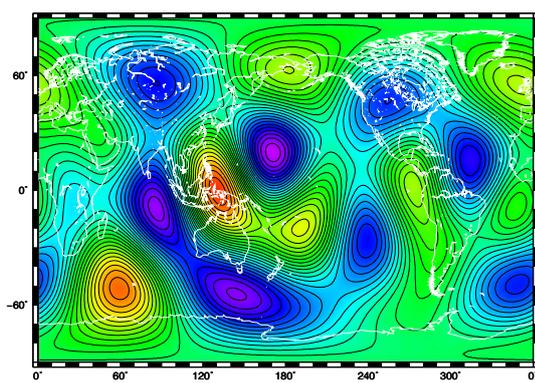
$n$	$m$	$C_n^m$	$S_n^m$
0	0	0.740581630262D+04	0.000000000000D+00
1	0	0.255557274993D-01	0.000000000000D+00
2	0	0.203574216578D-01	0.000000000000D+00
3	0	0.329797150826D+00	0.000000000000D+00
4	0	0.327521654682D+00	0.000000000000D+00
5	0	-0.243961578795D+00	0.000000000000D+00
6	0	-0.445975694752D+00	0.000000000000D+00
1	1	0.223920955704D-01	0.118762101266D-01
2	1	0.413645964951D-01	0.180682390896D-01
3	1	0.626706916426D+00	0.791498276665D-01
4	1	-0.516044047727D+00	-0.402850727731D+00
5	1	-0.165764289752D+00	-0.169105401853D+00
6	1	-0.176833913627D+00	0.155553945421D+00
2	2	0.269956268088D+00	-0.192938887437D+00
3	2	0.229518885226D+00	-0.103478388720D+00
4	2	0.174316526022D+00	0.534792514654D+00
5	2	0.113006162190D+01	-0.682516311216D+00
6	2	-0.459871554996D-02	-0.162364585583D+01
3	3	0.266884421897D+00	0.586171798311D+00
4	3	0.905858347475D+00	-0.136294731999D+00
5	3	-0.692369442792D+00	-0.135286960457D+00
6	3	0.253883500579D+00	0.594139379124D+00
4	4	-0.201832168661D+00	0.423564753435D+00
5	4	-0.588242896832D-01	0.150857316697D+00
6	4	-0.201640868485D+00	-0.200818977478D+01
5	5	0.277448665972D+00	-0.987696935213D+00
6	5	-0.105900092037D+01	-0.259084733537D+01
6	6	0.324000995401D+00	-0.790619376956D+00

**Tabelle 9.3:** Die ersten Kugelfunktionskoeffizienten der Topographie einer theoretischen Kern-Mantel-Grenze

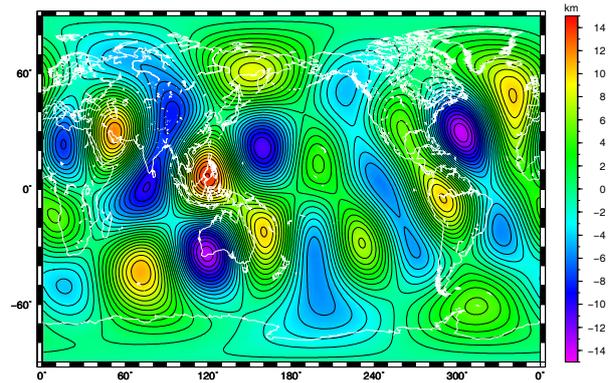
Die theoretischen Topographien für die Kern-Mantel-Grenze, bei Verwendung von Kugelfunktionskoeffizienten unterschiedlicher Entwicklungsgrade (für  $n \leq 4$ ,  $n \leq 5$  und  $n \leq 6$ ), berechnen sich mit (9.2)



*Figur 9.11: Die theoretische Topographie der CMB für  $n \leq 4$*



*Figur 9.12: Die theoretische Topographie der CMB für  $n \leq 5$*



*Figur 9.13: Die theoretische Topographie der CMB für  $n \leq 6$*

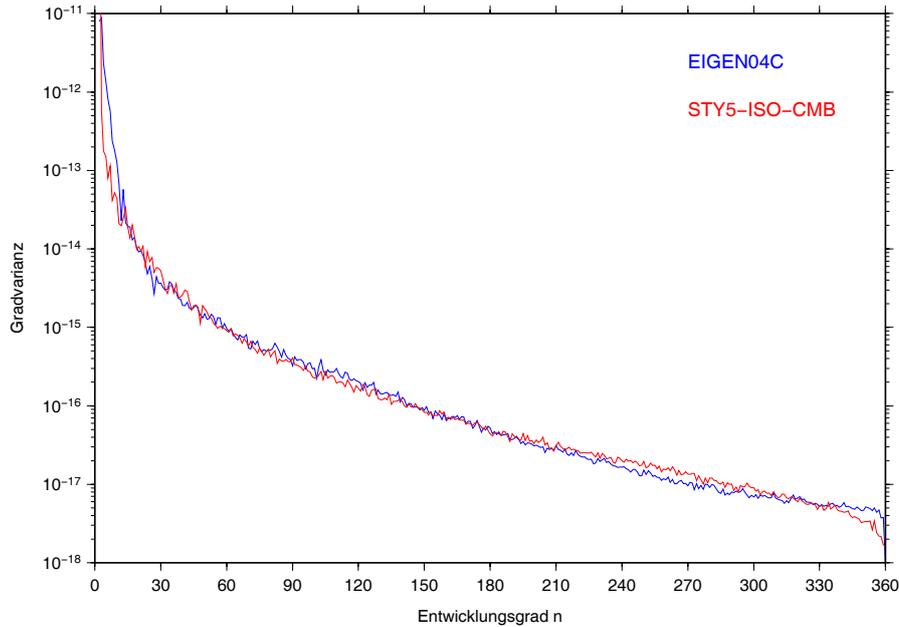
Die meisten in der Literatur vorgestellten Modelle einer Kern-Mantel-Grenze sind als Kugelfunktionsentwicklung bis zum Grad  $n=4$  dargestellt. Es ist nicht zu erwarten, dass aus seismischen Untersuchungen wesentlich genauere Ergebnisse erzielt werden können, als sie einer Auflösung bis zum Grad  $n=4$  entsprechen. Zudem sind die Beträge für die Topographie ab  $n=5$  viel zu groß, als dass sie mit den Erkenntnissen der Seismik übereinstimmen würden.

Wenn angenommen wird, dass die Topographie der Kern-Mantel-Grenze die Koeffizienten des tatsächlichen Schwerfeldes bis zum Entwicklungsgrad  $n=4$  vollständig erklärt, dann bleiben nur die Frequenzanteile übrig, die ab  $n > 4$  das Restfeld beschreiben.

## 9.4 Das kombinierte hydrostatisch-isostatische Modell mit CMB Topographie STY5-ISO-CMB

Für dieses Modell wird auch noch die theoretische Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach den Überlegungen aus Kapitel 9.3 hinzugerechnet.

Die Gradvarianzen des Modells STY5-ISO-CMB (gebildet als Summe der Modelle STY5, AIRY050 und CMB) nähern die Gradvarianzen des EIGEN-Spektrums noch besser an.



**Figur 9.14:** Gradvarianten des Modells STY5-ISO-CMB im Vergleich zu EIGEN

Das Modell STY5-ISO-CMB wurde aus Überlegungen zu einem globalen hydrostatischen Ausgleich, einem isostatischen Ausgleich, sowie zu einer Topographie der Kern-Mantel-Grenze entwickelt. Die Gradvarianzen des Modells STY5-ISO-CMB zeigen, dass dieses Modell ein insgesamt schlüssiges geophysikalisches Referenzfeld zur Interpretation des tatsächlichen Schwerefeldes beschreibt. Die außerhalb der Entwicklungsgrade  $10 \leq n \leq 190$  liegenden Schwerefeldeffekte werden durch das kombinierte Modell sehr gut aber nicht vollständig erklärt.

Für die sehr hochfrequenten Signalanteile der Entwicklungsgrade  $n \geq 190$  muss angenommen werden, dass der globale isostatische Ausgleich nicht realisiert ist. Diese Abweichungen sind aber allerhöchstens regional (auch wegen der hohen Frequenzen) und gegebenenfalls als solche, in Form von Abweichungen von dem hier beschriebenen globalen Modell, zu modellieren.

Die Geoidundulationen der in Figur 9.15 dargestellten residualen Schwerefeldanomalien zeigen Beträge in der Größenordnung von  $\pm 45$  m und eine erwartungsgemäß starke Korrelation zu tektonischen Gegebenheiten der Erde, die mit dynamischen Prozessen in den obersten ca. 600 km der Erde in Verbindung gebracht werden müssen. Zum einen sind dies die klar erkennbaren Plattengrenzen, zum anderen die Hotspots, die sich im residualen Schwerefeld auffällig zeigen.

Diese verbleibenden Anomalien wurden von der bisherigen Modellbildung nicht erfasst.

Als großräumige Ursachen für die Residuen kommen hauptsächlich durch Temperaturunterschiede verursachte Dichteanomalien infrage. Diese sind auf Mantelplumes zurückzuführen, also auf aufsteigendes heißes Mantelmaterial, verbunden mit den deutlich sichtbaren Hotspots z. B. bei Island und den Hawaiianischen Inseln.

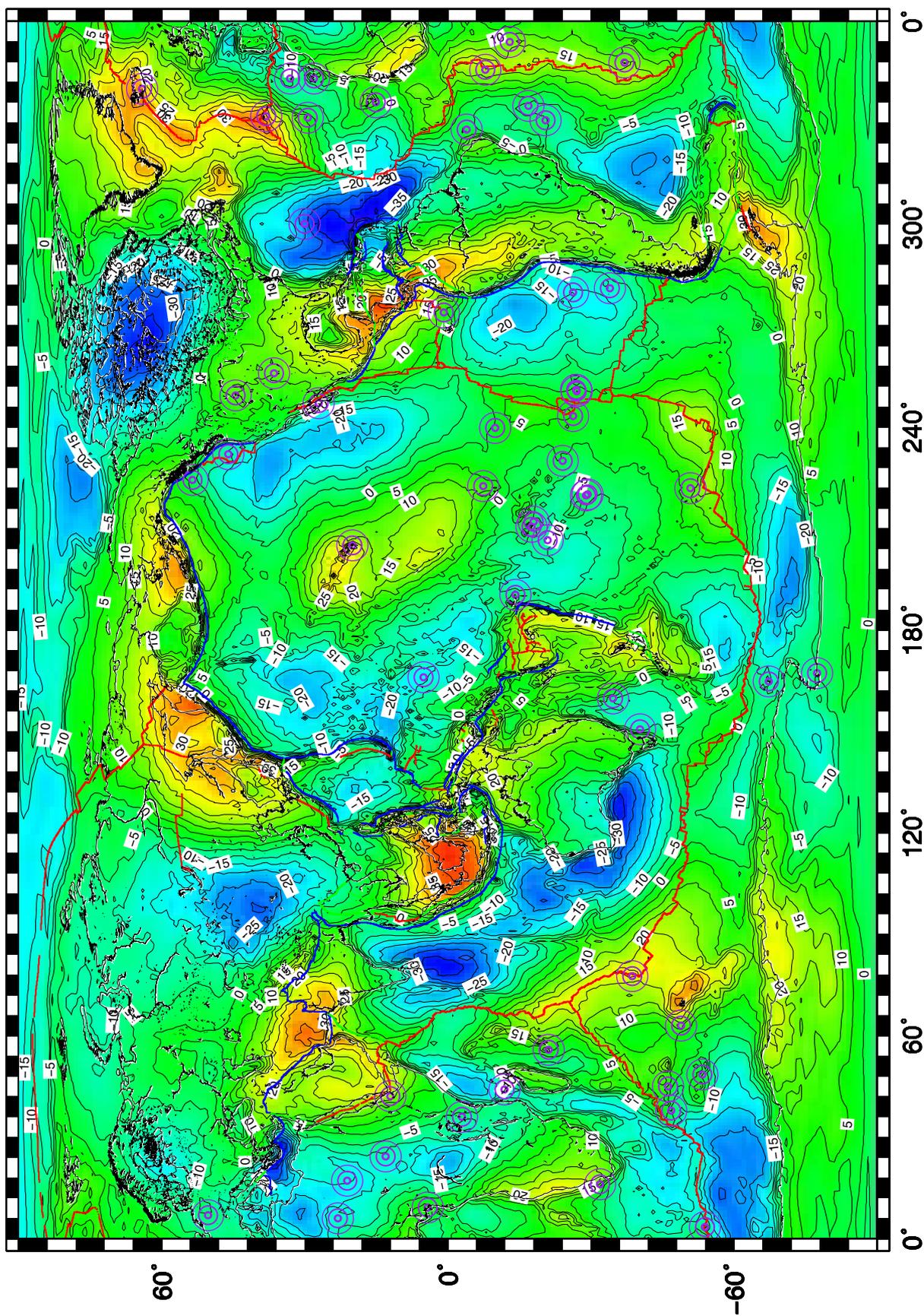
Für die weitere Interpretation ist zunächst auf vorliegende tomographische Modelle der Mantelkonvektion zurückzugreifen, um die durch die Konvektion verursachten Schwerefeldanomalien zu modellieren. Die thermodynamischen Modelle können einen Beitrag zur Erklärung der Schwerefeldstrukturen liefern, die durch die Entwicklungsgrade  $n \leq 10$  repräsentiert sind. Ferner kann die Einbeziehung seismischer Informationen über die Grenze zwischen Erdkruste und oberem Mantel (seismisch ermittelte Mohorovicic-Diskontinuität) die Modellvorstellung weiter verbessern.

Schon [Masters u. a., 1982] haben aus unabhängigen Untersuchungen von Eigenschwingungen des Erdkörpers Heterogenitäten im Erdmantel gefunden, deren geographische Verteilung hoch korreliert ist mit den harmonischen Koeffizienten des Erdschwerefeldes vom Grad  $n=2$ . [Masters u. a., 1982] vermuten, dass hierin eine Ursache für den Unterschied zwischen geometrischer und hydrostatischer Abplattung zu suchen ist. Diese Heterogenitäten erzeugen nach Master's Aussage Geoidundulationen, die deutlich über dem erwarteten Wert liegen und deren Ursachen in der Übergangszone zwischen oberem und unterem Mantel (in 400 km bis 700 km Tiefe) zu finden sein müssten. Genau hier befinden sich die großmaßstäbigen Komponenten der Mantelkonvektion.

Diese und weitere Modellvorstellungen können ebenfalls mit Flächendichten dargestellt, oder im Falle von Mantelplumes als auf- bzw. absteigendes Material mit Liniendichten modelliert werden.

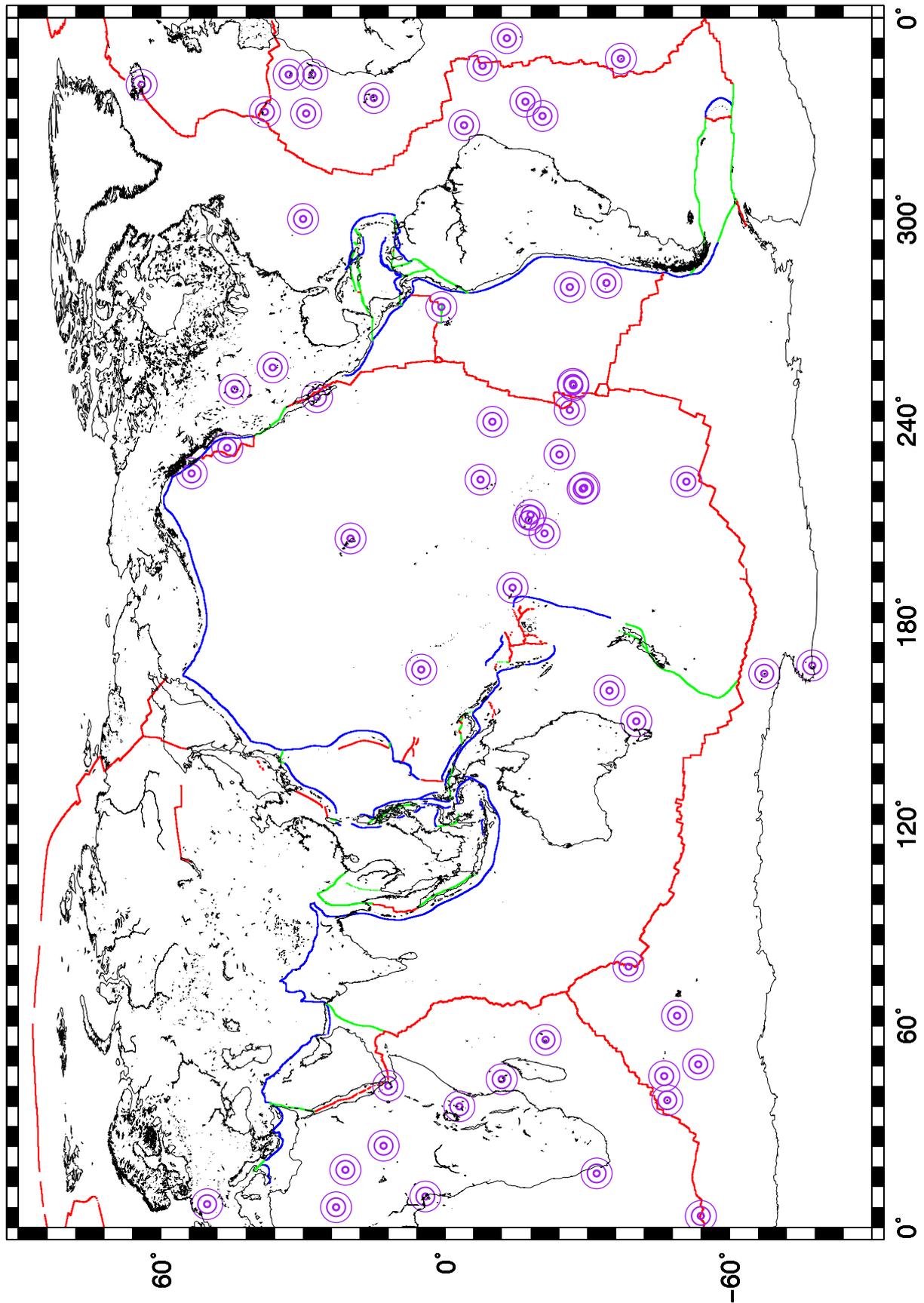
Erst nach Bildung eines **hydrostatisch-isostatisch-thermodynamischen Modells** kann an eine Interpretation einzelner Störkörper, etwa nach der von [Krokowski, 1999] vorgeschlagenen Methode der Abschätzung von Störkörpertiefe und -ausdehnung gedacht werden, wobei die isostatischen und thermodynamischen Modellparameter gegebenenfalls zu ändern sind.

Abschließend ergibt sich für das Residualfeld des Modells STY5-ISO-CMB folgendes Bild (Figur 9.15).



Figur 9.15: Restfeld  $EIGEN - (STY5-ISO-CMB)$





Figur 9.16: Plattengrenzen und Hotspots

## 10 Zusammenfassung und Ausblick

Aus den Überlegungen zu einer vollständig hydrostatisch ausgeglichenen und nach PREM/WZIO geschichteten Erde lässt sich ein globales Dichtemodell für die Erde entwickeln, das geeignet ist, als geophysikalisches Referenzpotential verwendet zu werden.

Das Modell bezieht die für die Erdoberfläche bestimmte geometrische Abplattung in die Modellbildung ein und definiert für alle Erdschichten eine von diesem Oberflächenwert ausgehende tiefenabhängige Abplattung. Zudem wird dem Umstand Rechnung getragen, dass ein rotierender, nicht homogener Körper keine rein ellipsoidische Gleichgewichtsfigur ausprägen kann (Theorem von Hamy-Pizetti). Das erfolgt, indem über den Parameter  $\kappa$  der breiten- und tiefenabhängige Abstand zwischen einem Rotationsellipsoid und dem Sphäroid des Gleichgewichtskörpers in die Modellierung einfließt.

Die Berechnung des Außenraumpotentials mittels Flächenbelegungen für das Dichtemodells erfordert die Definition einer Referenzfläche, die in guter Näherung zu der tatsächlichen Gestalt der Erde steht. Hierfür kann die Kugel als geeignet angesehen werden. Mit der angenommenen geometrischen Abplattung der Erde werden aus einer maximalen Abweichung von  $h = 14$  km (Differenz zwischen mittlerem Erdradius und Länge der kleinen Halbachse des Erdellipsoids an der Erdoberfläche) Flächenbelegungsichten bestimmt. Somit berechnen sich alle in dieser Arbeit vorgestellten Außenraumpotentiale der Erde als Störungen, die an das Referenzpotential einer homogenen Kugel mit einem mittlerem Radius  $R$  und der Masse  $M$  der Erde angebracht werden.

Die aus Flächenbelegungen zu berechnenden Potentiale lassen sich zumeist sehr einfach durch Oberflächenintegrale beschreiben und auch gut in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen entwickeln. So ermittelte Kugelfunktionskoeffizienten können im Orts- bzw. Frequenzbereich interpretiert werden; sinnvollerweise durch den Vergleich mit einem Kugelfunktionsmodell des tatsächlichen Schwerefeldes (hier: EIGEN-GL04C).

Die Methode der Potentialberechnung ist auch für Modellverbesserungen bzw. Modellverfeinerungen bestens geeignet. Sie ermöglicht, weitere Änderungen direkt an die Modelle anzubringen (hier z. B. durch die Potentialwirkung eines globalen isostatischen Massenausgleichs an der Erdoberfläche oder einer undulierenden Kern-Mantel-Grenze), sofern sich diese vernünftig mit Flächenbelegungen beschreiben lassen.

### 10.1 Das hydrostatische Modell

Für die Berechnung des Potentials einer hydrostatisch ausgeglichenen und abgeplatteten Modellerde mit einem Dichteverlauf nach [Wziontek, 2004] wurden vereinfachende Annahmen gemacht, die sich im Rahmen der vorgestellten globalen Betrachtungsweise rechtfertigen lassen.

Der Betrag des breitenabhängigen Ortsvektors  $r$  geht in Form einer Reihenentwicklung nach Legendreschen Polynomen sowohl in die Berechnung der Flächenbelegungsichte als auch in den als Integrationsvariable verwendeten mittleren Radius  $q$  einer Ellipsoidschicht ein. Bereits bei einem Abbruch dieser Reihenentwicklung nach dem 2. Glied, d. h. dem Entwicklungsgrad  $n = 4$ , werden die Radien mit einer maximalen Abweichung von ca. 6 cm vom exakten Wert beschrieben. Dies ist im Hinblick auf die generalisierte Betrachtungsweise der Arbeit vollkommen ausreichend, auch wenn es mit größerem Rechenaufwand möglich wäre, mindestens bis zu einem Grad  $n = 10$  zu entwickeln. Eine entsprechende Entwicklung würde, bei Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen, Koeffizienten bis zum Entwicklungsgrad  $n = 10$  liefern und somit das Potential mit dem gleichen Detaillierungsgrad wie das geodätische Normalpotential beschrieben sein.

Der starke Einfluss des Abbruchkriteriums  $n = 2$  bzw.  $n = 4$  zeigt sich hingegen deutlich im Unterschied der Oberflächenpotentialwerte. Sie variieren um ca.  $30 \text{ m}^2/\text{sec}^2$ . Das im Sinne einer exakten Formulierung eines Oberflächenpotentials nicht zu vernachlässigen.

Der tiefenabhängige Gradient der geometrischen Abplattung, der für die Modellierung verwendet wurde ist, ausgehend vom Oberflächenwert der geometrischen Abplattung des WGS84, als konstant zu  $2.99 \cdot 10^{-7} \cdot 1/\text{km}$  angesetzt worden. Für den überwiegenden Teil der Erde, in einem Bereich von der Erdoberfläche bis hinunter

zur Kern-Mantel-Grenze in ca. 2900 km Tiefe, deckt sich dieser Wert mit dem über die Clairaut-Gleichung für das Dichtemodell PREM ermittelten Wert. In größeren Tiefen weicht dieser aber von dem in dieser Arbeit benutzten Wert ab.

Die Verwendung des globalen Gradienten auch in den o. g. Tiefen scheint jedoch allein deshalb gerechtfertigt, weil sich dort, wegen der streng mit der Tiefe abnehmenden Abplattung Veränderungen in der geometrischen Abplattung weniger stark auf das Verhältnis zwischen großer und kleiner Halbachse einer Ellipsoidschicht auswirken. Der Einfluss einer geänderten Annahme zum tiefenabhängigen Dichteverlauf prägt sich dagegen um ein Vielfaches stärker aus. Es bleibt an anderer Stelle zu untersuchen, ob eine Berücksichtigung von Termen in  $O(f^2)$  das Ergebnis signifikant verbessern kann.

Für die Darwin-Abweichung (als Parameter für die Bestimmung des geometrischen Abstands zwischen Ellipsoid und Sphäroid) wird ebenfalls eine tiefenabhängige Funktion angesetzt, die mindestens bis hinunter zur Kern-Mantel-Grenze die numerischen Ergebnisse aus der Lösung der Darwin-Gleichung für das Dichtemodell PREM bestätigt. Die Fortsetzung des Gradienten auch in größere Tiefen scheint schon deshalb gerechtfertigt, weil der Maximalwert dieser Abweichung an der Oberfläche des Modellkörpers in der Breite von  $45^\circ$  lediglich ca. 4.5 m beträgt. Dieser Wert nimmt tiefenabhängig und breitenabhängig ab und wird an den Polen zu Null.

Die Arbeit hat die generelle Machbarkeit der einfachen Parametrisierung eines geophysikalischen Referenzfeldes gezeigt, das auf der physikalisch sinnvollen Annahme basiert, dass die Erde in 1. Näherung als abgeplatteter, hydrostatisch ausgeglichener Rotationskörper mit einer Schichtung gemäß [Wziontek, 2004] beschrieben werden kann. Das berechnete Außenraumpotential weicht von der einfachen Geometrie des Normalschwerfeldes ab, was dem Theorem von Hamy-Pizetti zufolge, auch zu erwarten war. Für die Modellbildung wurden diejenigen Parameter verwendet, die eine bestmögliche Anpassung an das Normalpotential ermöglichen.

Der aus dem Modell resultierende Unterschied zwischen hydrostatischer und geometrischer Abplattung untermauert die allgemeine Vermutung, dass die Erde nicht vollständig hydrostatisch ausgeglichen ist. Das ist einerseits dem Umstand geschuldet, dass großmaßstäbige Massenverlagerungen im System Erde (Mantelkonvektion, Plattentektonik) das Gleichgewicht permanent stören, zum anderen kann hierin auch direkt eine Ursache für diese geodynamischen Prozesse gesehen werden. Die aus dem hydrostatischen Modell abgeleitete geometrische Abplattung ist kleiner, als die für das GRS80 festgelegte. Dies könnte, wie von einigen Autoren vermutet, ein verzögerter Relaxationseffekt aus der Zeit sein, als sich die Erde noch schneller drehte und somit etwas stärker abgeplattet gewesen sein müsste. Allerdings ist zu beachten, dass die Berücksichtigung eines einfachen isostatischen Modells diesen Effekt ausgleichen kann.

## 10.2 Das isostatische Modell

Der Ansatz eines isostatischen Massenausgleichs im Bereich der Erdkruste und dem oberen Mantel nach dem Archimedischen Prinzip wurde in der Form einer Airy-Kompensation beschrieben. Mittels Flächenbelegungen und einer an das Amplitudenspektrum des tatsächlichen Schwerfeldes angepassten Ausgleichstiefe von  $h_a = 50$  km konnte das Potential eines isostatischen Massenausgleichs berechnet und dem Modell des hydrostatischen Ausgleichs hinzugefügt werden.

Es liegt in der Natur der Sache, dass ein isostatisches Ausgleichspotential nach Airy stark mit der Topographie korreliert ist. Deshalb prägen sich einige topographische Strukturen deutlich im berechneten Restfeld aus. Diese Bereiche sind höchstwahrscheinlich anders bzw. gar nicht kompensiert oder besser formuliert: Anomalien, die nach der Reduktion um das isostatische Störpotential verbleiben, müssen durch andere Ursachen erklärt werden.

Im Gegensatz dazu zeigt sich z. B. in den Zentralanden, dass die Struktur des dortigen Schwerfeldes zu einem großen Teil durch einen Massenausgleich nach AIRY erklärbar ist. Natürlich ist eine vernünftige Modellbildung daran zu messen, wie gut die jeweiligen Verhältnisse angenähert werden. So ist bekannt, dass im Bereich junger Faltengebirge eher ein Massenausgleich nach Airy stattfindet, im Bereich ozeanischer Rückensysteme hingegen eher ein Ausgleich nach Pratt sinnvoll erscheint. Zumindest ist anerkannt, dass die zur Beschreibung der allgemeinen Isostasie notwendige Ausgleichstiefe  $h_a$  nicht wesentlich durch den gewählten Ausgleichsmechanismus beeinflusst wird. Die ermittelten isostatischen Korrekturen liegen mit Werten von ca.  $\pm 25$  m in der zu erwartenden Größenordnung.

Ein weiterer Vorteil der hier vorgeschlagenen isostatischen Modellbildung, liegt in der Unterteilung der Oberfläche in vier geologisch deutlich voneinander unterscheidbare Bereiche. Für sie werden die in der Tiefe  $h_a$  zu

kompensierenden Massen nicht alleine aus der topographischen Information (bei Verwendung einer mittleren Dichte) ermittelt, sondern auch noch stratigraphische Unterscheidungsmerkmale berücksichtigt.

Es muss darauf hingewiesen werden, dass jede Modellbildung für einen globalen Aufbau der Erdkruste unter einheitlichen isostatischen Bedingungen fehlerbehaftet sein wird, sodass es sinnvoll erscheint, für die Beschreibung der Erdkruste auch auf geologische Krustenmodelle zurückzugreifen. [Hahn u. a., 1984] haben z. B. eine Unterteilung der Erdoberfläche in  $2^\circ \times 2^\circ$  Blöcke durchgeführt und jedem dieser Blöcke eine von sechzehn möglichen Schichtprofilen zugeordnet, die bis zur Mohorovicic-Diskontinuität herunterreichen.

Bisher wurden Modelle zur globalen isostatischen Beschreibung zumeist in sphärischer Approximation gerechnet und gegebenenfalls ellipsoidisch korrigiert. Dabei zeigte sich eine besonders gute Korrelation der topographisch-isostatischen Koeffizienten im Amplitudenspektrum ungefähr im Bereich der Entwicklungsgrade  $n$  zwischen 15 und 60. Durch die verwendete Formulierung des Massenausgleichs als Störpotential eines hydrostatischen Potentials kann sogar für Entwicklungsgrade  $15 \leq n \leq 75$  des Amplitudenspektrums eine relativ gute Übereinstimmung erzielt werden. Bei den darüber hinausgehenden Entwicklungsgraden wird ebenfalls eine bessere Anschmiegung erreicht. Dies spricht für die Möglichkeit, dass die sehr hochfrequenten Informationen im Schwerfeld zu einem großen Teil durch globale Isostasie erklärbar sein könnten. Sicherlich wirkt sich positiv aus, dass nicht in sphärischer Approximation gerechnet wird und die gewählte Blocksichtung eher der Realität entspricht.

### 10.3 Das Potential einer undulierenden Kern-Mantel-Grenze

Es existieren diverse Modelle für die Topographie der Kern-Mantel-Grenze, die alle überschlägig von Undulationen in der Größenordnung von  $\pm 6$  km ausgehen. Die Topographien des untersten Bereiches der Übergangszone zwischen Kern und Mantel zeigen, je nach Auswerteverfahren und verwendeten seismischen Daten, nur schwer vergleichbare Strukturen. Die Schwierigkeiten bei der Auswertung der seismischen Raumwellen, aus denen zunächst lediglich Laufzeitdifferenzen und deren Verortung abgeleitet werden können, ist Gegenstand wiederkehrender Untersuchungen.

Es gibt eine Reihe vielversprechender Ansätze, um die zwei Hauptursachen der Laufzeitdifferenzen voneinander zu trennen. Zum einen können es laterale Laufzeitunterschiede aufgrund anisotroper Materialeigenschaften sein, zum anderen die Topographie der Kern-Mantel-Grenze selbst, die bei dem (z. B. über globale Dichtemodelle) bestimmbaren Dichteunterschied ein signifikantes Signal im Erdschwerefeld ausprägen. Die durch den Dichtekontrast verursachten Undulationen des Erdschwerefeldes bewegen sich in der Größenordnung von  $\pm 40$  m.

Allerdings zeigen unterschiedliche Modelle zumeist keine Strukturen, wie sie das tatsächliche Erdschwerefeld enthält. Unterstellt man, dass die seismisch verwertbaren Informationen eine Auflösung im Frequenzbereich oberhalb von  $n = 4$  nicht ermöglichen und das tatsächliche Erdschwerefeld im langwelligen Bereich hauptsächlich durch diese Grenzschicht geprägt ist, kann man problemlos durch eine Feldfortsetzung nach Unten aus dem Erdschwerefeld eine theoretische Topographie ableiten. Diese Topographie zeigt in einigen Hauptstrukturen Ähnlichkeit mit dem aktuellsten hier vorgestellten Modell der Kern-Mantel-Grenze von [Sze und van der Hilst, 2003].

Aufgrund der bekannten Schwierigkeiten bei der Auswertung der seismischen Raumwellen und der damit verbundenen Unsicherheit in den Ergebnissen kann daran gedacht werden, vorliegende Modelle durch Rotationen und ellipsoidische Korrektur zu verbessern, um eine maximale Übereinstimmung mit den langwelligen Strukturen des tatsächlichen Schwerfeldes zu erreichen.

Interessanterweise gelingt es, bei Verwendung der hier ermittelten theoretischen Topographie der Kern-Mantel-Grenze ein Residualfeld zu beschreiben, dessen Hauptstrukturen eindeutig mit bekannten geodynamischen Charakteristika wie Plattengrenzen und Hotspots korreliert sind.

## 10.4 Das Restfeld und weiterführende Arbeiten

Nach abgeschlossener Modellbildung wurde, ausgehend vom tatsächlichen Schwerefeld des Modells EIGEN-GL04C, ein Residualfeld berechnet. Es ergibt sich durch Vergleich mit einem Gesamtmodell, entwickelt aus einer hydrostatisch ausgeglichenen Modellerde, einem globalen isostatischen Ansatz und einer theoretischen Topographie der Kern-Mantel-Grenze.

Das Restfeld zeigt deutlich Strukturen, die mit wichtigen Charakteristika geodynamischer Prozesse an der Erdoberfläche korreliert sind. Hauptsächlich sind dies Plattengrenzen und Hotspots, die an der Oberfläche die deutlichsten sichtbaren Merkmale sind. Die verbleibenden Restanomalien liefern Geoidundulationen in der Größenordnung von  $\pm 45$  m.

In weiterführenden Arbeiten muss versucht werden, aus Daten, die die seismische Tomographie zur Verfügung stellen kann, die vorliegende Modellbildung um Effekte aus thermodynamisch verursachten Dichteanomalien zu erweitern. Wenn thermodynamische Effekte Dichteanomalien erzeugen können, die im Erdschwerefeld deutlich erkennbar sind, dann kann erwartet werden, dass sich, nach Erweiterung des Erdmodells um diese Ursachen, das Residualfeld nochmals deutlich verkleinern wird oder mindestens einige noch nicht modellierte Strukturen aus dem Restfeld eliminiert werden.

Zudem ist nach Möglichkeit der Verlauf der seismischen Moho als Grenze zwischen oberer und unterer Kruste in die Modellbildung einzubeziehen, da sie eine gesicherte Erkenntnis über einen Dichtekontrast und damit über einen signifikanten Schwerefeldeffekt darstellt.

Sollte die Modellierung zu den gewünschten Ergebnissen führen, kann die großmaßstäbige, sprich globale Modellierung des Dichtefeldes der Erde als abgeschlossen angesehen werden. Noch verbleibende Anomalien wären vermutlich in relativ hochfrequenten Signalanteilen enthalten und könnten somit einer regionalen Modellierung unterzogen werden. Ein vernünftiger Ansatz wäre z. B. alle Restanomalien auf einzelne Störkörper (im Sinne einer sich lokal oder regional von der Umgebung unterscheidenden Dichte) zurückzuführen.

Die hier vorgelegte Arbeit zeigt, dass es möglich ist, ein geophysikalisches Referenzmodell für die innere Dichteverteilung der Erde zu entwickeln, das sowohl für weitergehende Interpretationen des Gravitationspotentials der Erde (im Hinblick auf ihre innere Dichteverteilung) geeignet ist, als auch im geodätischen Sinne als Referenzpotential Verwendung finden kann.

Bei allen sehr viel versprechenden Ansätzen darf die allgemeine Motivation nicht vergessen werden, die [Denis, 1989] beschreibt. Er motiviert diese und zukünftige Arbeiten, warnt aber gleichermaßen deutlich und zutreffend mit dem folgenden Zitat in freier Übersetzung: „Man muss sich die Frage stellen, ob die Anomalien die wir sehen, nicht teilweise nur deswegen vorhanden zu sein scheinen, weil das Erdmodell einfach falsch ist.“

Zwar kann das einerseits egal sein, weil die Interpretation solcher Anomalien auch immer die Interpretation von Modellfehlern sein muss. Andererseits ist jedoch stets zu bedenken, dass eine falsche Modellbildung unter Umständen falsche Interpretationen zulässt, die bei sachgerechter Modellbildung nicht möglich gewesen wären, und in eine völlig falsche Richtung führen.

## Literaturverzeichnis

- [Amante und Eakins 2008] AMANTE, C. ; EAKINS, B.W.: ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model: Procedures, Data Sources and Analysis / National Geophysical Data Center, NESDIS, NOAA, U.S. Department of Commerce. Boulder, CO, 2008. – Draft Development Report
- [Anderson u. a. 1992] ANDERSON, A.J. ; SABADINI, R. ; TINTI, S. ; ZERBINI, S. ; ACHACHE, J. ; KLINGELE, E. ; ARNET, F. ; STRAUB, Ch. ; GEIGER, A. ; COCARD, M. ; KAHLE, H.G.: Study of the Geophysical Impact of High Resolution Earth Potential Fields Information / ESOC. Darmstadt, April 29, 1992 1992. – Mid-term Presentation
- [Anderson und Dziewonski 1984] ANDERSON, D.L. ; DZIEWONSKI, A.M.: Seismische Tomographie: 3D-Bilder des Erdmantels. In: *Spektrum der Wissenschaft* 12 (1984), S. 70–91
- [Arabelos 1984] ARABELOS, D.: Validation of ETOPO5U in the Hellenic area. In: *Bull. Géod.* 68 (1984), S. 88–99
- [Arnold 1980a] ARNOLD, K.: Determination of the Global Isostatic Overcompensation from Gravity Measurements Including the 2nd-Order Terms. In: *Gerlands Beitr. zur Geophysik* 89 (1980), S. 383–388. – Leipzig
- [Arnold 1980b] ARNOLD, K.: The Isostatic Potential Including the 2nd-Order Terms. In: *Gerlands Beitr. zur Geophysik* 89 (1980), S. 287–293. – Leipzig
- [Artyushkov 1967] ARTYUSHKOV, E.V.: On the Isostatic Equilibrium of the Earths Crust. In: *Geophys. J. R. astr. Soc* 14 (1967), S. 251–260
- [Backus 1967] BACKUS, G.E.: Converting Vector and Tensor Equations to Scalar Equations in Spherical Coordinates. In: *Geophys. J. R. astr. Soc.* 13 (1967), S. 71–101
- [Balmino u. a. 1973] BALMINO, G. ; LAMBECK, K. ; KAULA, W.M.: A Spherical Harmonic Analysis of the Earths Topography. In: *J. Geophys. Res.* 78 (1973), S. 478–481
- [Barta und Hajósy 1981] BARTA, G. ; HAJÓSY, A.: Recent results of the study of physical background of the geoidal figur. In: *Space Res.* 1 (1981), S. 195–202
- [Bowin 1986] BOWIN, C.: Topography at the core-mantle boundary. In: *Geophys. Res. Lett.* 13 (1986), S. 1513–1516
- [Bowin 2000] BOWIN, C.: Mass Anomaly Structure of the Earth. In: *Rev. of Geophys.* 38,3 (2000), S. 355–387
- [Bronstein und Semendjajew 1979] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Lizenzausgabe für den Verlag Harri Deutsch Thun 1981, 1979
- [Bullard 1948] BULLARD, E.C.: The figure of the earth. In: *Monthly Not. R. Astr. Soc., Geophys. Suppl.* 5 (1948), S. 186–192
- [Bullen und Haddon 1967] BULLEN, K.E. ; HADDON, R.A.W.: Earth Models Based on Compressibility Theory. In: *Phys. Earth Planet. Int.* 1 (1967), S. 1–13
- [Chandrasekhar 1969] CHANDRASEKHAR, S.: *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. New Haven and London : Yale University Press, 1969
- [Chen 1981] CHEN, J.Y.: Formulae for Computing Ellipsoidal Parameters. In: *Bull. Géod.* 55 (1981), S. 170–178
- [Clairaut 1743] CLAIRAUT, A.C.: *La Théorie de la Figure de la Terre tirée des Principes de l'Hydrostatique*. Bd. Nr. 189. Leipzig : Verlag von Wilhelm Engelmann, 1913 1743. – Deutsche Übersetzung: Theorie der Erdgestalt nach Gesetzen der Hydrostatik
- [Colombo 1981] COLOMBO, O.L.: Numerical methods for harmonic analysis on the sphere. Columbus : The Ohio State University, 1981
- [Creager und Jordan 1986] CREAGER, K.C. ; JORDAN, T.H.: Aspherical structure of the core-mantle boundary from PKP travel times. In: *Geophys. Res. Lett.* 13 (1986), S. 1497–1500
- [Darwin 1899] DARWIN, G.H.: The theory of the figure of the Earth carried to the second order of small quantities. In: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 60 (1899), S. 82–124
- [Dechambre und Scheeres 2002] DECHAMBRE, D. ; SCHEERES, D.J.: Transformation of spherical harmonic coefficients to ellipsoidal harmonic coefficient. In: *Astronomy & Astrophysics* 387 (2002), S. 1114–1122
- [Denis 1989] DENIS, C.: The Hydrostatic Figur of the Earth. In: In „*Physics and Evolution of the Earth's Interior*“ (ed. by R. Teisseyre) 4 (1989), S. 111–186. – Gravity and low-frequency geodynamics, Amsterdam
- [Denis u. a. 1998] DENIS, M. ; REGISTER, Y. ; TOMECKA-SUCHON, S.: Methods for computing internal flattening, with applications to the Earth's structure and geodynamics. In: *Geophys. J. Int.* 132, No. 3 (1998), S. 603 – 642
- [Doornbos und Hilton 1989] DOORNBOS, D.J. ; HILTON, T.: Models of the Core-Mantle Boundary and the Travel Times of Internally Reflected Core Phases. In: *J. Geophys. Res.* 94 (1989), S. 15741–15751
- [Dziewonski 1984] DZIEWONSKI, A.M.: Mapping the Lower Mantle: Determination of Lateral Heterogeneity in P Velocity up to Degree and Order 6. In: *J. Geophys. Res.* 89 (B7) (1984), S. 5929–5952

- [Dziewonski und Anderson 1981] DZIEWONSKI, A.M. ; ANDERSON, D.L.: Preliminary reference Earth model. In: *Phys. Earth Planet. Int.* 25 (1981), S. 297–356
- [Efimov u. a. 1978] EFIMOV, A. B. ; ZHARKOV, V. N. ; TRUBITSYN, V. P.: In: *Astronomicheskii Zhurnal* 55 (1978), 1287–1292 S. – Translation: *Soviet Astronomy*, 22, p. 733–736.
- [Featherstone 1997] FEATHERSTONE, W.E.: On the Use of the Geoid in Geophysics: A Case Study Over the North-West Shelf of Australia. In: *Exploartion Geophysics* 28(1) (1997), S. 52–57
- [Franck u. a. 1992] FRANCK, S. ; KOWALLE, G. ; THÜRMER, Ch.: Undulations of the Core-Mantle Boundary: Estimations and Observations / WIP-Projektgruppe Allgemeine Geophysik bei der Universität Potsdam. 1992. – Forschungsbericht
- [Förste u. a. 2008] FÖRSTE, C. ; FLECHTNER, F. ; SCHMIDT, R. ; KÖNIG, R. ; MEYER, U. ; STUBENVOLL, R. ; ROTHACHER, M. ; BARTHELMES, F. ; NEUMAYER, R. ; S., Bruinsma ; LEMOINE, J.-M. ; LOYER, S.: The GeoForschungszentrum Potsdam/Groupe de Recherche de Gèodésie Spatiale satellite-only and combined gravity field models: EIGEN-GL04S1 and EIGEN-GL04C. In: *J. Geod.* 82 (2008), S. 331–346
- [Garcia und Souriau 2000] GARCIA, R. ; SOURIAU, A.: Amplitude of the core-mantle boundary topography estimated by stochastic analysis of core phases. In: *Phys. Earth Planet. Int.* 117 (2000), S. 345–359
- [Gellert u. a. ] GELLERT, W. ; KÜSTNER, H. ; HELLWICH, M. ; KÄSTNER, H.: *Handbuch der Mathematik*. Lizenzausgabe für die Buch und Zeit Verlagsgesellschaft mbH Köln
- [Gerstl 1980] GERSTL, M.: On the Recursive Computation of the Integrals of the Associated Legendre Functions. In: *Manuscripta geodaetica* 5 (1980), S. 181–199
- [Gruber 2007] GRUBER, C.: *Kugelfunktionen und Analyse heterogener Schweredaten im Spektralbereich*, Fakultät VI Planen Bauen Umwelt; Technische Universität Berlin, Dissertation, 2007. – D83
- [Hager und Richards 1989] HAGER, B.H. ; RICHARDS, M.A.: Long-wavelength variations in Earth's geoid: Physical models and dynamic implications. In: *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 1989
- [Hager u. a. 1985] HAGER, B.W. ; CLAYTON, R.W. ; RICHARDS, M.A. ; COMER, R.P. ; DZIEWONSKI, A.: Lower mantle heterogeneity, dynamic topography and the geoid. In: *Nature* 313 (1985), S. 541–545
- [Hahn u. a. 1984] HAHN, A. ; AHRENDT, H. ; MEYER, J. ; HUFEN, J.-H.: A Model of Magnetic Sources within the Earth's Crust Compatible with the Field Measured by the Satellite Magsat. In: *Geol. Jb.* A75 (1984), S. 125–156
- [Hecimovic ] HECIMOVIC, Z.: *Spectral behavior of global gravitational models considering EUVN network*. Internetpublikation, [http://www.cgi.hr/radovi/Hecimovic-20Spectral behavior of GPM in EUVN.pdf](http://www.cgi.hr/radovi/Hecimovic-20Spectral%20behavior%20of%20GPM%20in%20EUVN.pdf)
- [Heiskanen und Moritz 1967] HEISKANEN, W.A. ; MORITZ, H. ; GILLULY, J. (Hrsg.) ; WOODFORD, A.O. (Hrsg.): *Physical Geodesy*. Verlag W.H. Freeman and Company, 1967
- [Hofmann-Wellenhof und Moritz 2005] HOFMANN-WELLENHOF, B. ; MORITZ, H.: *Physical Geodesy*. Springer Verlag Wien, 2005
- [Jacobi 1834] JACOBI, H.: Über die Figur des Gleichgewichtes. In: *Annal. Phys.* 33 (1834), S. 229–233. – auch: *Gesammelte Werke*, Bd. 2, 1882, p. 17–22
- [Jarosh 1984] JAROSH, M.: Darstellung des Gravitationspotentials der Erde in kartesischen Basisfunktionen. In: *DGK-Reihe A* Heft Nr. 100 (1984)
- [Jeanloz und Lay 1993] JEANLOZ, R. ; LAY, T.: Der Grenzbereich zwischen Erdkern und Erdmantel. In: *Spektrum der Wissenschaft* (1993), Juli 1993, S. 48–55
- [Jekeli 1996] JEKELI, C.: Spherical harmonic analysis, aliasing and filtering. In: *J. o. G.* 70 (1996), S. 241–223
- [Jekeli 1999] JEKELI, C.: An analysis of vertical deflections derived from high-degree spherical harmonic models. In: *J. o. G.* 73 (1999), S. 10–22
- [Jones 1954] JONES, H.S.: *The Earth as a Planet*. Kap. Dimensions and rotation., S. 1–41, Univ. of Chicago Press, 1954
- [Jordan u. a. 1969] JORDAN (Hrsg.) ; EGGERT (Hrsg.) ; KNEISSL (Hrsg.): *Handbuch der Vermessungskunde, Band V: Astronomische und Physikalische Geodäsie (Erdmessung)*. Kap. Kapitel X: Das Problem des Niveausphäroides der Erde, S. 455–574, 1969
- [Kaban u. a. 1997a] KABAN, M. ; TIKHOTSKY, S. ; SCHWINTZER, P.: Global Isostatic Residual Geoid and Isostatic Gravity Anomalies, Internal Report / GFZ Potsdam. 1997. – Forschungsbericht
- [Kaban u. a. 1997b] KABAN, M. ; TIKHOTSKY, S. ; SCHWINTZER, P.: Globales isostatisch reduziertes Schwerfeld und Mantelstrukturen. In: *Geodätische Woche Berlin 1997*, 1997. – Umdruck
- [Kendall und Shearer 1994] KENDALL, J.-M. ; SHEARER, P.M.: Lateral variations in D" thickness from long-period shear wave data. In: *J. Geophys. Res.* 99 (1994), S. 11575–11590
- [King-Hele 1976] KING-HELE, D.: The Shape of the Earth. In: *Science* 192 (1976), S. 1293–1300
- [King-Hele und Walker 1984] KING-HELE, D. G. ; WALKER, D.M.C.: Geopotential harmonics of order 15 and 30. In: *Nature* 310 (1984), S. 218–219

- [Krokowski 1997] KROKOWSKI, C.: Eine Methode zur Bestimmung von Gesamtmasse und Schwerpunktskoordinaten eines Störkörpers. In: *Extended Abstract Geodätische Woche Berlin 1997*, 1997
- [Krokowski 1999] KROKOWSKI, C.: *Zur Bestimmung der Schwerpunkstiefe von Störkörpern anhand gravimetrischer Daten*, Fachbereich 9 - Bauingenieurwesen und Angewandte Geowissenschaften der Technischen Universität Berlin, Dissertation, 1999. – D83
- [Lambeck 1979] LAMBECK, K.: Methods and Geophysical Applications of Satellite Geodesy. In: *Reports on Progress in Physics* 42 (1979), S. 547–628
- [Lelgemann und Marchenko 1997] LELGEMANN, D. ; MARCHENKO, A.: *The Earth's mass and the radial density profile derived from seismic data: An application of generalized Darwin's functions*. 1997
- [Lense 1954] LENSE, J. ; A. KRATZER, E. H. (Hrsg.): *Kugelfunktionen*. Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1954. – Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, A23
- [Li und Götze 2001] LI, X. ; GÖTZE, H.-J.: Tutorial: Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics. In: *Geophysics* 66, No.6 (2001), S. 1660–1668
- [Makhloof 2007] MAKHLOOF, A.A.-E.: The Use of Topographic-Isostatic Mass Information in Geodetic Applications / Universität Bonn, Institut für Geodäsie und Geoinformation. 2007 (4). – Schriftenreihe
- [Masters u. a. 1982] MASTERS, G. ; JORDAN, T.H. ; SILVER, P.G. ; GILBERT, F.: Aspherical earth structure from fundamental spheroidal - mode data. In: *Nature* 298 (1982), S. 609–613
- [Melchior 1982] MELCHIOR, P.: Geodasy and Geodynamics. In: *Lectures Delivered at the Third International Summer School in the Mountains on Geodesy and Geodynamics*. Frauenberg/Admont, Austria : H. Moritz / H. Sünkel, 1982, S. 12–66. – Mitteilungen der geodätischen Institute der Universität Graz, Folge 41
- [Morelli und Dziewonski 1987] MORELLI, A. ; DZIEWONSKI, A.M.: Topography of the core-mantle boundary and lateral homogeneity of the liquid core. In: *Nature* 325 (1987), S. 678–683
- [Moritz 1990] MORITZ, H.: *The figure of the Earth: Theoretical Geodesy and the Earth's Interior*. Karlsruhe : Herbert Wichmann Verlag GmbH, 1990. – 279 S
- [Müller u. a. 1993] MÜLLER, R.D. ; ROYER, J.-Y. ; LAWVER, L.A.: Revised plate motions relative to the hotspots from combined Atlantic and Indian Ocean hotspot tracks. In: *Geology* 21 (1993), S. 275–278
- [Murphy u. a. 1997] MURPHY, F.E. ; NEUBERG, J.W. ; JACOB, A.W.B.: Alternatives to core-mantle boundary topography. In: *Phys. Earth Planet. Int.* 103 (1997), S. 349–364
- [Nakiboglu 1982] NAKIBOGLU, S.M.: Hydrostatic theory of the earth and its mechanical implications. In: *Phys. Earth Planet. Int.* 28 (1982), S. 302–311
- [NIMA 2000] NIMA: World Geodetic System 1984, Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems / Department of Defense. 2000 (TR8350.2). – NIMA Technical Report. Amendment 1 (3. Januar 2000), Amendment 2 (23. Juni 2004), Third Edition
- [Ockendon und Turcotte 1977] OCKENDON, J.R. ; TURCOTTE, D.L.: On the gravitational potential and field anomalies due to thin mass layers. In: *Geophys. J. R. astr. Soc.* 48 (1977), S. 479–492
- [Paul 1978] PAUL, M.K.: Recurrence Relations for Integrals of Associated Legendre Functions. In: *Bull. Géod.* 52 (1978), S. 177–190
- [Pavlis und Rapp 1990] PAVLIS, N.K. ; RAPP, R.H.: The development of an isostatic gravitational model to degree 360 and its use in global gravity modelling. In: *Geophys. J. Int.* 100 (1990), S. 369–378
- [Pavoni 1988] PAVONI, N.: Das bipolare geotektonische Modell - Ein Versuch zur Beschreibung der großräumigen Bewegungsvorgänge im Erdmantel. In: *Geographische Rundschau* 40, Heft 10 (1988)
- [Pizzetti 1913] PIZZETTI, P.: *Principii della Teoria Meccanica della Figura dei Pianeti*. (1913). – Enrico Spoerri, Pisa
- [Rapp 1981] RAPP, R.H.: The Earth's Gravity Field to Degree and Order 180 using Seasat Altimeter Data, Terrestrial Gravity Data, and other Data / The Ohio State University. Columbus, 1981 (322). – Report of the Dept. of Geodetic Science and Surveying
- [Rapp 1982] RAPP, R.H.: Degree Variances of the Earth's Potential, Topography and its Isostatic Compensation. In: *Bull. Géod.* 56 (1982), S. 84–94
- [Rapp 1989] RAPP, R.H.: The decay of the spectrum of the gravitational potential and the topography of the Earth. In: *Geophys. J. Int.* 99 (1989), S. 449–455
- [Rapp und Cruz 1986] RAPP, R.H. ; CRUZ, J.Y.: The Representation of the Earth's Gravitational Potential in a Spherical Harmonic Expansion to Degree 25 / The Ohio State University. Columbus, 1986 (372). – Report of the Dept. of Geodetic Science and Surveying
- [Richards und Hager 1984] RICHARDS, M.A. ; HAGER, B.H.: Geoid Anomalies in a Dynamic Earth. In: *J. Geophys. Res.* 89 (1984), S. 5987–6002
- [Roberts und Stewartson 1963] ROBERTS, P. H. ; STEWARTSON, K.: On the Stability of a Maclaurin Spheroid of Small Viscosity. In: *Astrophysical Journal* 137 (1963), S. 777–790
- [Routh 1892] ROUTH, E.J.: *A treatise on analytical statics*. University Press, 1892. – 235 pp S

- [Rummel u. a. 1988] RUMMEL, R. ; RAPP, R.H. ; SÜNKELE, H. ; TSCHERNING, C.C.: Comparisons of global topographic/isostatic models to the Earth's observed gravity field / The Ohio State University. Columbus, 1988 (388). – Report of the Dept. of Geodetic Science and Surveying
- [Schramm 2005] SCHRAMM, T.: Potenziale elliptischer Massenverteilungen / Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg. 2005 (p.69-77). – Festschrift zur Verabschiedung von Prof. Dr. h. c. Dipl.-Ing. Jürgen Zastra
- [Smith und Wessel 1990] SMITH, W.H.F. ; WESSEL, P.: Gridding with continuous curvature splines in tension. In: *Geophysics* 55, 3 (1990), S. 293–305
- [Stary 1997] STARY, B.: *Berechnung des Potentialfeldes einer isostatisch kompensierten Erde mittels Flächenbelegungen und Vergleich mit EGM96*. 1997. – Interner Arbeitsbericht, Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik, TU-Berlin
- [Sünkel 1986] SÜNKELE, H.: Global Topographic-Isostatic Models. In: H.SÜNKELE (Hrsg.): *Lecture Notes in Earth Science* Bd. 7. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986, S. 417–462
- [Sünkel 1990] SÜNKELE, H.: Optimized Global Isostatic Models. 1990 (67), S. 58–69
- [Sze und van der Hilst 2003] SZE, E.K.M. ; HILST, R.D van der: Core Mantle Boundary Topography from short period PcP, PKP, and PKKP Data. In: *Phys. Earth Planet. Int.* 135 (2003), S. 27–46
- [Torge 2001] TORGE, W.: *Geodesy*. Berlin; New York : Verlag Walter de Gruyter & Co., April 2001. – 3rd completely rev. and extended ed.
- [Tsoulis und Stary 2005] TSOULIS, D. ; STARY, B.: An isostatically compensated gravity model using spherical layer distribution. In: *J. o. G.* 78 (2005), S. 418–424
- [Vening Meinesz 1939] VENING MEINESZ, F.A: Tables Fondamentales pour la Réduction Isostatique Régionale. In: *Bulletin Géodésique* 63 (1939), S. 711–776
- [Wagner und Lerch 1978] WAGNER, C.A. ; LERCH, F.J: The accuracy of geopotential models. In: *Planet. Space Sci.* 26 (1978), S. 1081
- [Wenzel 1998] WENZEL, H.G.: *Ultra-high degree geopotential models GPM98A, B and C to degree 1800*. 1998. – preprint of a paper to be submitted to Bulletin of International Geoid Service Milan/Italy
- [Wenzel 1998b] WENZEL, H.G: *Spherical Harmonic Models*. Auszug aus Homepage [www.ife.uni-hannover.de/wenzel/geopmods.htm](http://www.ife.uni-hannover.de/wenzel/geopmods.htm) (nicht mehr in Betrieb). 1998b
- [Wenzel 1998c] WENZEL, H.G: Ultra hochauflösende Kugelfunktionsmodelle GPM98A und GPM98B des Erdschwerefeldes. In: *preprint für proceedings, Geodätische Woche 1998*, 1998c
- [Wziontek 2004] WZIONTEK, H.: *Zur Parametrisierung tadialsymmetrischer Dichtemodelle für die Erde*, Fakultät VI - Bauingenieurwesen und angewandte Geowissenschaften der Technischen Universität Berlin, Dissertation, 2004. – D83
- [Zenner 2006] ZENNER, L.: *Zeitliche Schwerefeldvariationen aus GRACE und Hydrologiemodellen*, Technische Universität München, Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, Diplomarbeit, 2006
- [Zenner 2007] ZENNER, L: Analyse und Vergleich verschiedener Schwerefeldlösungen. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen* 3/2007 (2007), S. 147–157
- [Zharkov u. a. 1996] ZHARKOV, V.N. ; MOLODENSKI, S.M. ; BREZEZINSKI, A. ; GROTEN, E. ; VARGA, P.: Models of the Earth. In: *The Earth and its Rotation, Low frequency geodynamics - Kapitel 1*. Heidelberg : Herbert Wichmann Verlag, Hüthig GmbH, 1996
- [Zharkov und Trubitsyn 1970] ZHARKOV, V.N. ; TRUBITSYN, V.P.: Theory of the figure of rotating planets in hydrostatic equilibrium a third approximation. In: *Sov. Astron* 13 (1970), S. 981–988

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Das Geoid des Modells EIGEN - komplett . . . . .	11
1.2	Das Geoid des Modells EIGEN - gefiltert für $2 \leq n \leq 10$ . . . . .	11
1.3	Die Gradvarianzen des Modells EIGEN . . . . .	12
1.4	Dichteverlauf des Erdmodells PREM . . . . .	12
2.1	Konfiguration Quellpunktmassen - Aufpunkt . . . . .	14
2.2 - 2.4	Kugeloberflächenaufteilung mit Kugelflächenfunktionen . . . . .	20
2.5	Beispiele für Legendresche Funktionen $P_{48,20}(\cos \vartheta)$ und $P_{1800,1798}(\cos \vartheta)$ . . . . .	21
3.1	Schematische Modellschichtung . . . . .	26
3.2	Ellipsoidische Flächenbelegung . . . . .	28
3.3	Abweichung exakter Ort $r$ von Ort in 1. Näherung: max 26.900 m . . . . .	31
3.4	Abweichung exakter Ort $r$ von Ort in 2. Näherung: max 0.063 m . . . . .	31
3.5	System mehrerer Flächenbelegungen . . . . .	33
3.6	Potentialflächen und Schwerevektoren . . . . .	35
3.7	Potentialflächen - Situation am Geoid . . . . .	36
3.8	Lage des Massenmittelpunkts relativ zum Entwicklungspunkt . . . . .	38
3.9	Idealer Tiefpass-Filter $n_{max}$ im Orts- und Spektralbereich [Zenner, 2006] . . . . .	40
4.1	Ellipsoidisch-harmonische Koordinaten (Quelle: [Hofmann-Wellenhof und Moritz, 2005]) . . . . .	44
4.2	Potential eines homogenen Ellipsoids relativ zum geodätischen Normalpotential $U_0$ . . . . .	46
4.3	Darwin-Abweichung $\kappa$ zwischen Sphäroid und Ellipsoid . . . . .	49
4.4	Abplattungs- und Abweichungsverlauf für ein Dichtemodell nach [Bullard, 1948] aus [Moritz, 1990] . . . . .	52
4.5	Abplattungsverlauf für das Dichtemodell PREM aus [Moritz, 1990] . . . . .	52
4.6	Verlauf von Abplattung (blau) und Darwin-Abweichung (rot) für das Dichtemodell PREM . . . . .	53
5.1	Isostasie nach G. Airy . . . . .	55
5.2	Isostasie nach J.H. Pratt . . . . .	55
5.3	Isostasie nach Vening-Meinesz [Makhloof, 2007] . . . . .	56
5.4	Schematischer Aufbau der oberen Kruste . . . . .	56
5.5	Berechnung Blockschichtung . . . . .	57
5.6	Zur Berechnung von Flächenbelegungen je nach geologischer Situation (ohne Übergangsbereich) . . . . .	58
5.7	Gradvarianzen des isostatischen Modells in sphärischer Approximation für unterschiedliche Ausgleichstiefen [Tsoulis und Sary, 2005] . . . . .	58
5.8	Gradvarianzen des isostatischen Modells in sphärischer Approximation für unkomensierte Topographie [Tsoulis und Sary, 2005] . . . . .	58
6.1	Datenherkunft für das Schwerefeldmodell EIGEN . . . . .	62
6.2	PREM-11-Schichten-Modell . . . . .	65
6.3	Dichteverlauf der Modelle PREM und WZIO . . . . .	66
6.4	Dichteverlauf an der Kern-Mantel-Grenze . . . . .	66
6.5	Dichteverlauf in der Kruste . . . . .	66
6.6	Datenherkunft ETOPO2v2 . . . . .	67
6.7	Globale Topographie – Reliefdarstellung . . . . .	67
6.8	Klassifizierte Erdoberfläche für die isostatische Analyse . . . . .	67
6.9	Der Übergangsbereich zwischen Kern und Mantel - die D"-Schicht [Anderson und Dziewonski, 1984] . . . . .	68
6.10	Seismische Raumwellen (Quelle: United States Geological Survey) . . . . .	69
6.11	Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach [Morelli und Dziewonski, 1987] . . . . .	70
6.12	Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach [Doornbos und Hilton, 1989] . . . . .	70

6.13	Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach [Sze und van der Hilst, 2003]	71
6.14	Plattengrenzen ( <b>rot</b> : Rücken; <b>grün</b> : Transformstörungen; <b>blau</b> : Gräben) und Hotspots	72
7.1	Ellipsoidischer Schalenbau mit schichtweise konstanter Dichte	74
8.8 - 8.6	Potential- und Schwereverlauf am Ellipsoid; abhängig vom gewählten Abplattungsgradienten	91
8.7	Potentiale am Ellipsoid und bei $a = 6378.137$ km für unterschiedliche Modelle	93
8.8	Potentialdifferenzen der Modelle STY-001 und PREM zum Potential des WGS84	93
8.9	Potentialdifferenz zum Normalpotential für unterschiedliche $f_{grad}$	94
8.10	Potentialdifferenz zwischen Normalpotential und STY1 am Ellipsoid für unterschiedliche $r_{CMB}$	95
8.11	Potentiale am Ellipsoid	96
8.12	Schwereverlauf am Ellipsoid	96
8.13	Potential am Ellipsoid für STY2	96
8.14	Schwereverlauf am Ellipsoid für STY2	96
8.15	Bester Abplattungsgradient - grob	98
8.16	Bester Abplattungsgradient - fein	98
8.17	Potentialdifferenz zwischen Normalpotential und STY3 am Ellipsoid für unterschiedliche $r_{CMB}$	98
8.18	Potentiale am Ellipsoid für STY3	99
8.19	Schwereverlauf am Ellipsoid für STY3	99
8.20	Potentialdifferenzen zwischen Normalpotential und STY3 am Ellipsoid für unterschiedliche $f_{grad}$	100
8.21	Potentiale am Ellipsoid für STY4	101
8.22	Schwereverlauf am Ellipsoid für STY4	101
8.23	Potentiale am Ellipsoid für STY5	103
8.24	Schwereverlauf am Ellipsoid für STY5	103
9.1	Restfeld EIGEN – STY5	106
9.2	Restfeld STY5 – Normalpotential	106
9.3	Amplitudenspektrum isostatisches Potential für verschiedene Ausgleichstiefen $h_a$	107
9.4	Gradkorrelation isostatisches Potential – EIGEN	107
9.5	Isostatische Undulationen mit $h_a = 50$ km	108
9.6	Gradvarianzen des Modells STY5-ISO im Vergleich zu EIGEN	109
9.7	Geoidundulationen des Modells EIGEN bei Verwendung von STY5-ISO als Referenzpotential	109
9.8	Geoidundulationen aus der Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach [Morelli und Dziewonski, 1987]; $-166 \text{ m} \leq N \leq 252 \text{ m}$	111
9.9	Geoidundulationen aus der Topographie der Kern-Mantel-Grenze nach [Sze und van der Hilst, 2003]; $-39 \text{ m} \leq N \leq 41 \text{ m}$	111
9.10	Langwellige Geoidundulationen des Modells EIGEN für $n \leq 4$ ; $-77 \text{ m} \leq N \leq 67 \text{ m}$	112
9.11	Die theoretische Topographie der CMB für $n \leq 4$	113
9.12	Die theoretische Topographie der CMB für $n \leq 5$	113
9.13	Die theoretische Topographie der CMB für $n \leq 6$	113
9.14	Gradvarianten des Modells STY5-ISO-CMB im Vergleich zu EIGEN	114
9.15	Restfeld EIGEN – (STY5-ISO-CMB)	116
9.16	Plattengrenzen und Hotspots	118

## Tabellenverzeichnis

3.1	Funktionale des Störpotentials . . . . .	37
4.1	Mögliche Rotationsfiguren in Abhängigkeit der Rotationsgeschwindigkeit . . . . .	43
6.1	Das Dichtemodell aus PREM – mittlere Dichten . . . . .	62
6.2	Das Dichtemodell PREM – Koeffizienten zur Dichtebestimmung . . . . .	63
6.3	Das Dichtemodell PREM – ellipsoidisch modifiziert . . . . .	64
6.4	Das Dichtemodell WZIO . . . . .	65
6.5	Das Dichtemodell WZIO – ellipsoidisch modifiziert (STY1) . . . . .	66
8.1	Das Modell STY1 . . . . .	92
8.2	Das Modell STY2 . . . . .	95
8.3	Soll-Ist Vergleich Potentialwerte STY2 bei $a = 6378.137$ km . . . . .	96
8.4	Soll-Ist Vergleich Schwerebeschleunigungswerte STY2 bei $a = 6378.137$ km . . . . .	96
8.5	Kugelfunktionskoeffizienten STY2 . . . . .	97
8.6	Das Modell STY3 . . . . .	99
8.7	Soll-Ist Vergleich Potentialwerte STY3 bei $a = 6378.137$ km . . . . .	99
8.8	Soll-Ist Vergleich Schwerebeschleunigungswerte STY3 bei $a = 6378.137$ km . . . . .	99
8.9	Das Modell STY4 . . . . .	101
8.10	Soll-Ist Vergleich Potentialwerte STY4 bei $a = 6378.137$ km . . . . .	101
8.11	Soll-Ist Vergleich Schwerebeschleunigungswerte STY4 bei $a = 6378.137$ km . . . . .	101
8.12	Kugelfunktionskoeffizienten STY4 . . . . .	102
8.13	Das Modell STY5 . . . . .	103
8.14	Soll-Ist Vergleich Potentialwerte STY5 bei $a = 6378.137$ km . . . . .	104
8.15	Soll-Ist Vergleich Schwerebeschleunigungswerte STY5 bei $a = 6378.137$ km . . . . .	104
8.16	Kugelfunktionskoeffizienten STY5 . . . . .	104
9.1	Die ersten zonalen Kugelfunktionskoeffizienten für eine isostatisch ausgeglichene Modellerde mit $h_a = 50$ km . . . . .	107
9.2	Kugelfunktionskoeffizienten des kombinierten Modells STY5-ISO . . . . .	110
9.3	Die ersten Kugelfunktionskoeffizienten der Topographie einer theoretischen Kern-Mantel-Grenze . . . . .	112

## Danksagung

Diese Arbeit konnte nur zu Stande kommen, weil ich eine Menge Unterstützung bekommen habe.

Ich bedanke mich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dieter Lelgemann dafür, dass er mir immer den richtigen Weg gezeigt hat und bei Herrn Prof. Markus Rothacher für die Übernahme des Korreferats. Herr Prof. Lothar Gründig hat mein Vorhaben erst möglich gemacht, indem er mich zurück an die Uni geholt hat und auch Herrn Prof. Thomas Kolbe gilt mein Dank, da er mir bei meiner nur einjährigen Tätigkeit am Institut von Beginn an uneingeschränktes Vertrauen entgegengebracht hat.

Diese Arbeit wurde nur fertig, weil Frau Rosemarie Kunkel mit Charme und Geschick alles dafür getan hat, dass es so gekommen ist.

Die Hegemann Stiftung hat mir die Fertigstellung der Arbeit durch ihre finanzielle Unterstützung ermöglicht. Auch dafür bedanke ich mich.

Mein Dank gilt auch ganz besonders meiner Familie, meinen Freunden, den Kollegen des Instituts für Geodäsie und Geoinformationstechnik der TU Berlin und der technet GmbH, namentlich Herrn Bernd Aschoff, die alle mit Verständnis akzeptiert haben, dass ich in der harten Phase manchmal einfach nicht ansprechbar war.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei meiner tollen Frau Katrin, die mich in jeder Phase der Arbeit, und darüber hinaus, vollständig unterstützt hat und nie einen Zweifel daran zugelassen hat, dass alles gut wird.

## Lebenslauf

	Bernd Stary
Geboren	5. August 1963 in Berlin
Familienstand	verheiratet mit Katrin Stary, geb. Buhrow
Schulbildung	08/1969 – 06/1975: Grundschule, Berlin  09/1975 – 11/1981: allgemeine Hochschulreife Hans-Carossa-Oberschule, Berlin Albert-Einstein-Oberschule, Berlin
Studium	04/1982 – 03/1992: TU-Berlin: Bauingenieurwesen TU-Berlin: Geophysik mit Abschluss Dipl.-Geophys.
Berufstätigkeit	04/1992 – 09/1992: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik der TU-Berlin im Forschungsprojekt: „ERS-1 Altimeterdatennutzung: Signaltrennung mittels Spektralanalyseverfahren“  10/1992 – 09/1997: Wissenschaftlicher Mitarbeiter mit Lehraufgaben am Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik der TU-Berlin im Fachgebiet Mathematische, Astronomische und Physikalische Geodäsie  11/1997: Auszeichnung durch die TU-Berlin zum Champion in der Lehre  01/1998 – 08/2007: Gesellschafter und Angestellter der technet GmbH mit den Aufgabenbereichen Marketing, Projektsteuerung und Entwicklung  10/2006 – 07/2007: Lehraufträge an der TU-Berlin im englischsprachigen Masterstudiengang „M.Sc. Geodesy and Geoinformation Science“ für „Geodetic Reference Systems“ und „Physical Geodesy“  09/2007 – 08/2008: Wissenschaftlicher Mitarbeiter mit Lehraufgaben am Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik der TU-Berlin im Fachgebiet Physical Geodesy  09/2008 – 10/2008: Promotionsstudent an der TU-Berlin und Stipendiat der Hegemann-Stiftung  seit 11/2009: Studiengangskoordinator und PostDoc am Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik der TU-Berlin