

**Laura Sánchez**

**Ein einheitliches vertikales Referenzsystem für Südamerika  
im Rahmen eines globalen Höhensystems**

**München 2015**

---

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**





**Ein einheitliches vertikales Referenzsystem für Südamerika  
im Rahmen eines globalen Höhensystems**

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
an der Fakultät Umweltwissenschaften  
der Technischen Universität Dresden

vorgelegt von

**Laura Sánchez**

aus Bogotá, Kolumbien

**München 2015**

---

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission beim Verlag C. H. Beck

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:



Deutsche Geodätische Kommission

Alfons-Goppel-Straße 11 • D – 80 539 München  
Telefon +49 – 89 – 23 031 1113 • Telefax +49 – 89 – 23 031 -1283 / - 1100  
e-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://www.dgk.badw.de>

Gutachter: Prof. (i.R.) Dr.-Ing. habil. Reinhard Dietrich  
Technische Universität Dresden  
Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Bernhard Heck  
Karlsruher Institut für Technologie  
Prof. Dr.-Ing. Martin Horwath  
Technische Universität Dresden

Tag der Einreichung: 11.07.2014

Tag der Verteidigung: 19.12.2014

Diese Dissertation ist auf dem Server der Deutschen Geodätischen Kommission unter <http://dgk.badw.de/>  
sowie auf dem Server der Technischen Universität Dresden unter  
[http://www.qucosa.de/recherche/frontdoor/?tx\\_slubopus4frontend\[id\]=16235](http://www.qucosa.de/recherche/frontdoor/?tx_slubopus4frontend[id]=16235) elektronisch publiziert

---

© 2015 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,  
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

## Kurzfassung

Ziel dieser Arbeit ist die Vereinheitlichung der in Südamerika existierenden Höhensysteme, die sich auf verschiedene Meeresspiegel beziehen, in einem globalen vertikalen Referenzsystem, das die Erfordernisse moderner geodätischer Verfahren erfüllt. Dabei werden folgende Themen bearbeitet:

- a) Alternativen für die Definition und Realisierung eines konventionellen Welthöhensystems;
- b) Diagnostik und Standardisierung der südamerikanischen Höhensysteme;
- c) Strategien für die genaue Transformation der lokalen Höhensysteme in das Welthöhensystem.

Unter der Voraussetzung, dass ein modernes Höhensystem die genaue Kombination von physikalischen und geometrischen Höhen unterstützen muss, werden zwei Komponenten betrachtet:

- a) eine geometrische Komponente bestehend aus ellipsoidischen Höhen als Koordinaten und ein Niveauellipsoid als Referenzfläche und
- b) eine physikalische Komponente bestehend aus geopotentiellen Koten als Koordinaten und eine durch einen bestimmten  $W_0$ -Wert definierte Äquipotentialfläche als Referenzniveau.

Die physikalische Komponente wird durch Potentialparameter definiert, damit sie als Bezug für jeden Typ von physikalischen Höhen (d.h. orthometrische Höhen, Normalhöhen, usw.) dienen kann. Die Umwandlung von geopotentiellen Koten in metrische Höhen und die Modellierung der Bezugsfläche (Geoid- bzw. Quasigeoid-Bestimmung) werden als ein Teil der Realisierung betrachtet. Da das ganze Konzept sich auf die Kombination von geometrischen und physikalischen Parametern bezieht, war es nötig, eine Inventur der zurzeit angewendeten Konventionen zu machen und diese zu analysieren, um systematische Fehler zu reduzieren und die zeitlichen Veränderungen der verschiedenen Daten zu berücksichtigen.

Hauptprodukte dieser Arbeit sind:

- a) Detaillierte Beschreibung der Charakteristiken des Festpunktfeldes, das das globale vertikale Bezugssystem realisieren soll. Diese Beschreibung enthält genaue Formulierungen für die Berücksichtigung der notwendigen Konventionen und die Bereitstellung von Normalgleichungssystemen der nationalen Höhennetze, um ihre Kombination durch überregionale Ausgleichungen zu ermöglichen.
- b) Bestimmung eines  $W_0$ -Referenzwertes unter Anwendung verschiedener Ansätze und der Kombination neuester Modelle der Erdoberfläche und des Erdschwerefeldes. Dabei wurde besonders auf die rigorose Fehlerfortpflanzung der Rechnungen geachtet, um die Zuverlässigkeit dieses Wertes zu schätzen.

- c) Formulierung der Beobachtungsgleichungen für die Bestimmung der Niveaudifferenzen zwischen den lokalen Höhensystemen und dem Welthöhenbezugssystem. Dies wurde in drei Ansätzen betrachtet: ein Ozean-Ansatz (im Meeresgebiet um die Referenzpegel), ein Küsten-Ansatz (auf dem Festland an den Referenzpegeln) und ein Kontinent-Ansatz (mit kontinentalen Festpunktfeldern des geometrischen Referenzsystems).
- d) Vereinheitlichung der existierenden Höhensysteme Südamerikas in dem globalen vertikalen Referenzsystem. Die Genauigkeit der Ergebnisse liegt derzeit um  $\pm 5$  cm für die Gebiete mit der größten Anzahl von Beobachtungen (Argentinien, Brasilien-Imbituba, Kolumbien, Ecuador, Uruguay und Venezuela) und um  $\pm 2 \dots 3$  dm für Gebiete mit geringer Verfügbarkeit und großer Unsicherheit der Daten (Brasilien-Santana, Bolivien, Peru und Chile). Die geschätzten Höhenniveaus sind größtenteils positiv, d.h. die lokalen vertikalen Datums liegen über dem globalen Referenzwert  $W_0$ . Dieses sowie auch der Nord-Süd-Anstieg am Atlantik und der Süd-Nord-Anstieg am Pazifik spiegelt die Meeresoberflächentopographie in der Region wieder.
- e) Vorschläge zur Fortführung der Arbeiten mit zusätzlichen Daten in den einzelnen Ländern.

---

## Abstract

The objective of this study is the unification of the South American height systems into a global vertical reference system satisfying the requirements of modern Geodesy. The following topics are discussed:

- a) Definition and realisation of a conventional global vertical reference system;
- b) Review and standardisation of the geodetic data referring to the South American height systems;
- c) Strategies for the precise transformation of the local height datums into the global vertical reference system.

It is expected that a modern vertical reference system supports the combination of physical and geometric heights with high accuracy globally. Therefore, two components are considered:

- a) A geometric component consisting of ellipsoidal heights as coordinates and a level ellipsoid as the reference surface, and
- b) A physical component comprising geopotential numbers as coordinates and an equipotential surface defined by a conventional  $W_0$  value as the reference surface.

The definition of the physical component is based on potential parameters in order to provide reference to any type of physical heights (normal, orthometric, etc.). The conversion of geopotential numbers into metric heights and the modelling of the reference surface (geoid or quasigeoid determination) are considered as steps of the realisation. Since the approach developed in this study is based on the combination of geometric and physical parameters, it was necessary to include an inventory of the standards used in the determination of the vertical coordinates. This inventory is the basis for the identification and consequent removal of systematic errors caused by the application of different models and methods in the generation of the data available for this study.

The main results of this study are:

- a) A detailed description of the characteristics to be satisfied by the reference stations realising the global vertical reference system. This description includes the needed conventions for the standardisation of the vertical coordinates and the computation of normal equations for the national levelling networks. These equations are required to integrate the local height systems into the global one.
- b) Estimation of the reference value  $W_0$  following different approaches and applying the latest geodetic models of the Earth's surface and gravity field. This procedure also includes a rigorous error propagation analysis to assess the reliability of the  $W_0$  estimate.
- c) Observation equations for the determination of the level discrepancies between the local height datums and the global  $W_0$ . This is performed in three approaches: in the ocean

areas around the reference tide gauges (ocean approach), at the reference tide gauges (coastal approach), and at the reference stations of the geocentric reference system (continental approach).

- d) Vertical datum parameters for the unification of the South American height systems into a global vertical reference system. The accuracy is assessed to be about  $\pm 5$  cm for those countries with a good coverage of measurements (Argentina, Brazil-Imbituba, Colombia, Ecuador, Uruguay, and Venezuela). For those regions with poor data coverage or high uncertainties in the data quality (Brazil-Santana, Bolivia, Peru, and Chile), the accuracy is estimated to be about  $\pm 2 \dots 3$  dm. The obtained level differences are in general positive, i.e., local vertical datums are above the global reference level  $W_0$ . This and the north-south increase along the Atlantic coast and the south-north increase along the Pacific coast reflect well the behaviour of the sea surface topography in these regions.
- e) A description of the further activities to be developed by each country to improve the results of this study.

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Verzeichnis der Tabellen</b>   | <b>9</b>  |
| <b>Verzeichnis der Abbildungen</b>  | <b>9</b>  |
| <b>1. Einleitung, Problemstellung, Ziel und Aufbau der Arbeit</b>                                 | <b>13</b> |
| <b>2. Definition eines globalen vertikalen Referenzsystems</b>                                    | <b>23</b> |
| 2.1. Stand bei der Einrichtung eines globalen vertikalen Referenzsystems                          | 25        |
| 2.2. Vorschlag zur Definition eines globalen vertikalen Referenzsystems                           | 27        |
| 2.2.1. Geometrische Komponente des globalen vertikalen Referenzsystems                            | 29        |
| 2.2.2. Physikalische Komponente des globalen vertikalen Referenzsystems                           | 32        |
| 2.3. Referenzniveau für die physikalische Komponente  | 33        |
| 2.3.1. Bestimmung von $W_0$ im Rahmen des Randwertproblems  | 37        |
| 2.3.2. Aktuelle Werte von $W_0$   | 40        |
| 2.4. Schlussfolgerungen   | 43        |
| <b>3. Konventionen für die Realisierung eines globalen vertikalen Referenzsystems</b>             | <b>45</b> |
| 3.1. Vertikale Lage und zeitliche Änderungen des Erdschwerefeldes und der Erdoberfläche           | 45        |
| 3.1.1. Ellipsoidische Höhen in Gebieten der festen Erde   | 46        |
| 3.1.2. Ellipsoidische Höhen in ozeanischen Gebieten   | 49        |
| 3.1.3. Erdschwerefeld   | 52        |
| 3.1.4. Geopotentielle Koten   | 56        |
| 3.2. Stationäre und zeitabhängige Komponenten bei der Höhenbestimmung                             | 57        |
| 3.3. Aktueller Stand bei der Reduktion zeitabhängiger Komponenten                                 | 59        |
| 3.4. Vertikale Lage und permanente Gezeit   | 64        |
| 3.5. Folgerungen bezüglich der stationären und zeitabhängigen Komponenten bei der Höhenbestimmung | 70        |
| <b>4. Realisierung eines konventionellen globalen vertikalen Referenzsystems</b>                  | <b>73</b> |
| 4.1. Referenzrahmen   | 73        |
| 4.1.1. Verbindung mit dem ITRS/ITRF   | 73        |
| 4.1.2. Verbindung zum lokalen vertikalen Datum  | 74        |
| 4.1.3. Kinematische Ausgleichung geopotentieller Koten  | 77        |
| 4.1.4. Vertikale Koordinaten bezüglich eines globalen Referenzniveaus                             | 81        |
| 4.2. Referenzniveau $W_0$   | 81        |
| 4.2.1. Formulierung des festen Randwertproblems   | 82        |
| 4.2.2. Vom Störpotential $T$ zum Wert $W_0$   | 86        |

|   |            |
|---|------------|
| 4.3. Empirische Bestimmung von $W_0$  | 87         |
| 4.3.1. Abhängigkeit von $W_0$ als Funktion des gewählten<br>Schwerefeldmodells  | 87         |
| 4.3.2. Abhängigkeit von $W_0$ als Funktion des gewählten<br>Meeresoberflächenmodells  | 95         |
| 4.3.3. Auswirkungen der Vernachlässigung der Meeresflächentopographie<br>bei der Schätzung des $W_0$                          | 101        |
| 4.3.4. Zuverlässigkeit der Schätzung von $W_0$  | 103        |
| 4.4. Annahme eines Referenzwertes $W_0$   | 105        |
| <b>5. Vereinheitlichung lokaler Höhensysteme im Rahmen eines globalen<br/>vertikalen Referenzsystems</b>                      | <b>109</b> |
| 5.1. Formulierung des skalar freien Randwertproblems  | 109        |
| 5.2. Beobachtungsgleichungen zur Vereinheitlichung lokaler<br>vertikaler Datums   | 112        |
| 5.3. In Südamerika verfügbare physikalische und geometrische<br>Observable zur Vereinheitlichung der bestehenden Höhensysteme | 113        |
| 5.3.1. Geometrische Koordinaten   | 114        |
| 5.3.2. Höhenanomalien   | 120        |
| 5.3.3. Physikalische Höhen  | 125        |
| 5.3.4. Geometrische und physikalische Höhen in marinen Gebieten   | 128        |
| 5.4. Bestimmung der Datumparameter der lokalen vertikalen<br>Referenzsysteme in Südamerika                                    | 131        |
| <b>6. Diskussion und Ausblick</b>   | <b>141</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>   | <b>145</b> |
| <br>  |            |
| <b>Anhang</b>   |            |
| A Gezeitenreduktion der Nivellements  | 159        |
| B Ellipsoidische Korrektur zur Lösung des fixen Randwertproblems  | 161        |

## Verzeichnis der Tabellen

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Physikalische Höhen  | 26  |
| 2.2 | Aktuelle Werte von $W_0$   | 42  |
| 4.1 | Erforderliche Präzision der Schwerewerte für die Bestimmung<br>geopotentieller Koten   | 78  |
| 4.2 | Schwerefeldmodelle, die zur empirischen Schätzung von $W_0$ verwendet<br>wurden  | 89  |
| 4.3 | Streuung der $W_0^i$ und Standardabweichung des Mittelwertes $W_0$ aus den<br>GGM in Tab. 4.2  | 93  |
| 4.4 | Globale Meeresoberflächenmodelle, die zur empirischen Schätzung<br>von $W_0$ verwendet wurden  | 96  |
| 5.1 | Nationale Verdichtungen von SIRGAS in Südamerika   | 116 |
| 5.2 | Verfügbare Geoid- und Quasigeoid-Modelle hoher Präzision in Südamerika   | 121 |
| 5.3 | Bekannt Details der bestehenden Höhensysteme in Südamerika   | 127 |
| 5.4 | Aus GNSS, Pegelregistrierungen und Satellitenaltimetrie an Referenzpegeln<br>abgeleitete vertikale Trends in Südamerika  | 130 |
| 5.5 | Bestimmung der Parameter des vertikalen Datums mit Originaldaten:<br>Statistik der Genauigkeit der Eingangsdaten und der Residuen aus der ersten<br>Ausgleichung | 134 |
| 5.6 | Bestimmung der Parameter der vertikalen Datums: Vergleich der aus den<br>Originaldaten und den standardisierten Daten erhaltenen Residuen                        | 136 |
| 5.7 | Datumparameter der Höhensysteme und Referenzwerte $w_0^i$ in Südamerika  | 138 |

## Verzeichnis der Abbildungen

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Nivellementslinien und Referenzpegel der Höhennetze erster Ordnung in<br>Südamerika  | 13 |
| 1.2 | Mittlere dynamische Ozeantopographie [m] für den Zeitraum 1993 - 2013  | 14 |
| 1.3 | Variation der Meeresoberfläche für die Zeiträume 1993 - 1998, 1999 - 2004<br>und 2005-2010   | 15 |
| 1.4 | Größenordnung der gravimetrischen Reduktionen für eine<br>Nivellementsschleife   | 16 |
| 1.5 | Durch kontinuierliche GNSS-Positionierung geschätzte vertikale<br>Geschwindigkeiten in Latein-Amerika                                | 17 |
| 1.6 | Durch die Verbindung der vertikalen Netze an Grenzpunkten berechnete<br>Höhenunterschiede zwischen einigen südamerikanischen Ländern | 18 |
| 1.7 | Vorgehensweise für die Einrichtung eines einheitlichen globalen<br>vertikalen Referenzsystems  | 21 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Höhentypen und die zugehörigen Referenzflächen   | 23 |
| 2.2  | Vertikale Datumparameter bei individuellen Höhensystemen   | 38 |
| 2.3  | Vertikale Datumparameter bei miteinander verbundenen Höhensystemen   | 39 |
| 3.1  | Zeitabhängigkeit der Stationspositionen  | 46 |
| 3.2  | Amplituden der saisonalen Variationen einiger SIRGAS-Stationen mit eindeutigen periodischen Bewegungen   | 48 |
| 3.3  | Zeitabhängigkeit der Meeresoberfläche an einer festen geographischen Position  | 50 |
| 3.4  | Zeitliche Variationen in den Höhenunterschieden zwischen zwei Punkten  | 57 |
| 3.5  | Schematische Darstellung der in der Geodäsie gebräuchlichen Gezeitsysteme  | 65 |
| 3.6  | Differenzen in den ellipsoidischen Höhen von 23 SLR-Stationen, die in den Gezeitsystemen <i>mean (zero) tide</i> , <i>tide free</i> und <i>conventional tide free</i> berechnet wurden           | 66 |
| 3.7  | Trennung der zeitlichen Änderungen der Vertikalkoordinaten und seiner Referenzflächen  | 72 |
| 4.1  | Effekt der permanenten Gezeit, der an den geometrischen Koordinaten (gemäß IERS) angebracht werden muss, um die Lage der Punkte im <i>mean (<math>\equiv zero</math>) tide</i> -System anzugeben | 75 |
| 4.2  | Auswirkungen des Abbruchfehlers auf den geschätzten Wert $W_0$ nach Abschneiden des Modells EGM2008 bei den Graden $n$   | 90 |
| 4.3  | Potentialdifferenzen zwischen einem beliebigen gemeinsamen Wert und dem Wert $W_0$ , der aus den in der Tab. 4.2 aufgeführten GGM erhalten wird  | 91 |
| 4.4  | Niveaudifferenzen zwischen den durch den Wert $W_0$ definierten Äquipotentialflächen nach Abschneiden der in Tab. 4.2 aufgeführten GGM beim Grad $n$   | 91 |
| 4.5  | Residuen $W_0^k - W_0^{n=180}$ für jedes in Tab. 4.2 aufgeführte GGM   | 92 |
| 4.6  | Variation der aus den monatlichen GGM GRACE GFZ Release 05 und dem Modell EIGEN-6C2 mit säkularen und periodischen (jährlichen und halbjährlichen) Änderungen geschätzten Werte $W_0$            | 94 |
| 4.7  | Werte des Terms $g_I$ in der Lösung des festen Randwertproblems in marinen Gebieten  | 94 |
| 4.8  | Ellipsoidische Korrektur für die sphärische Lösung des festen Randwertproblems   | 95 |
| 4.9  | $W_0$ aus Modellen MSS_CNES_CLS11 und DTU10 mit verschiedener Breitenüberdeckung   | 96 |
| 4.10 | Differenz des Niveaus der Potentialwerte berechnet aus den Modellen MSS_CNES_CLS11 und DTU10 in Kombination mit dem GGM: EIGEN-6C3stat   | 97 |
| 4.11 | Streuung und Standardabweichung des Wertes $W_0$ geschätzt aus den Modellen MSS_CNES_CLS11 und DTU10 mit unterschiedlicher Breitenüberdeckung  | 97 |
| 4.12 | Missionen der Satellitenaltimetrie in OpenADB  | 98 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.13 | Wert von $W_0$ geschätzt aus den jährlichen Modellen der mittleren Meeresoberfläche  | 100 |
| 4.14 | Vergleich des Wertes $W_0$ geschätzt mit ( $h$ ) und ( $h$ -MDT) als Grenzfläche   | 102 |
| 4.15 | Residuen $W_0^k - W_0^{h-MDT}$   | 102 |
| 4.16 | Standardabweichung des Störpotentials aus dem Modell EIGEN-6C3stat, $n = 200$  | 104 |
| 4.17 | Standardabweichung der Werte $h_k$ für das Jahr 2005   | 104 |
| 4.18 | Standardabweichung der Werte $W_0^k$ für das Jahr 2005   | 105 |
| 4.19 | Vergleich des berechneten Wertes $W_0$ mit den Gewichten $p = 1$ und $p = 1/(\sigma_{T_k}^2 + \gamma^2 \sigma_{h_k}^2)$  | 105 |
| 5.1  | Referenzrahmen SIRGAS95 und SIRGAS2000   | 115 |
| 5.2  | Referenzrahmen SIRGAS-CON  | 115 |
| 5.3  | VEMOS: <i>Velocity Model for SIRGAS</i>  | 117 |
| 5.4  | Referenzstationen SIRGAS2000, SIRGAS-CON und nationale Verdichtungen von SIRGAS, die durch Präzisionsnivellements mit den lokalen vertikalen Datums verbunden sind | 119 |
| 5.5  | Verfügbare Nivellements in Südamerika  | 126 |
| 5.6  | Pegelregistrierungen dargestellt durch eine harmonische Schwingungsfunktion mit zwei Frequenzen  | 129 |
| 5.7  | Aus der Satellitenaltimetrie abgeleitete Meeresoberflächentrends   | 131 |
| 5.8  | Präzision der Eingangsdaten, die bei der Formulierung der Beobachtungsgleichungen zur Vereinheitlichung der Höhensysteme in Südamerika benutzt wurden              | 133 |
| 5.9  | Bestimmung der Parameter der vertikalen Datums: Geografische Verteilung der aus den Originaldaten und den standardisierten Daten erhaltenen Residuen               | 134 |
| 5.10 | Vertikale Datumparameter in Südamerika bezüglich eines globalen Referenzniveaus  | 138 |



## 1. Einleitung, Problemstellung, Ziel und Aufbau der Arbeit

Die existierenden Höhensysteme in Südamerika wurden in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts unter der Annahme definiert, dass der mittleren Meeresspiegel mit dem Geoid zusammenfällt (siehe z. B. Luz et al. 2002a, Maturana and Barriga 2002, Sánchez and Martínez 2002, Subiza et al. 2002, Lauría et al. 2002). Das vertikale Datum bzw. Höhendatum wurde durch einen Höhenfestpunkt, der über langjährige Beobachtungen des mittleren Meeresspiegels den Bezug zum Meeresniveau vermittelt, realisiert. Dafür hat jedes Land einen individuellen (lokalen) Referenzmeerespiegel ausgewählt (Abb. 1.1), dessen Wasserstandregistrierungen in willkürlich ausgewählten Zeitperioden gemittelt wurden.

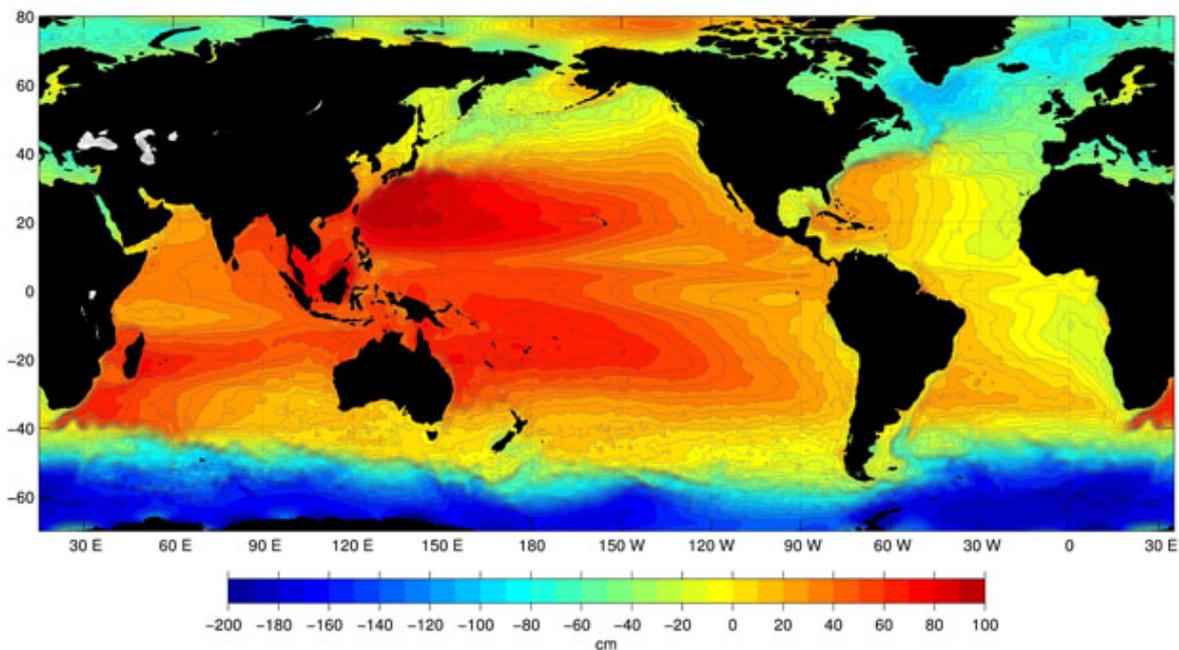


*Abb. 1.1: Nivellementslinien und Referenzpegel der Höhennetze erster Ordnung in Südamerika.*

In einigen Fällen wurden mehrere Meerespiegel als Höhenfestpunkte desselben Vertikaldatums eingeführt. Die Festpunktfelder bzw. die Haupthöhennetze wurden durch geometrisches (bzw. geodätisches) Nivellement bestimmt, die vermessenen Höhenunterschiede enthalten aber im Allgemeinen keine gravimetrische Reduktionen und die Gebrauchshöhen können weder als Normal- noch als orthometrische Höhen bezeichnet werden. Infolgedessen entsprechen die zugehörigen Höhenbezugsflächen weder einem Geoid noch einem Quasigeoid, sie werden durch

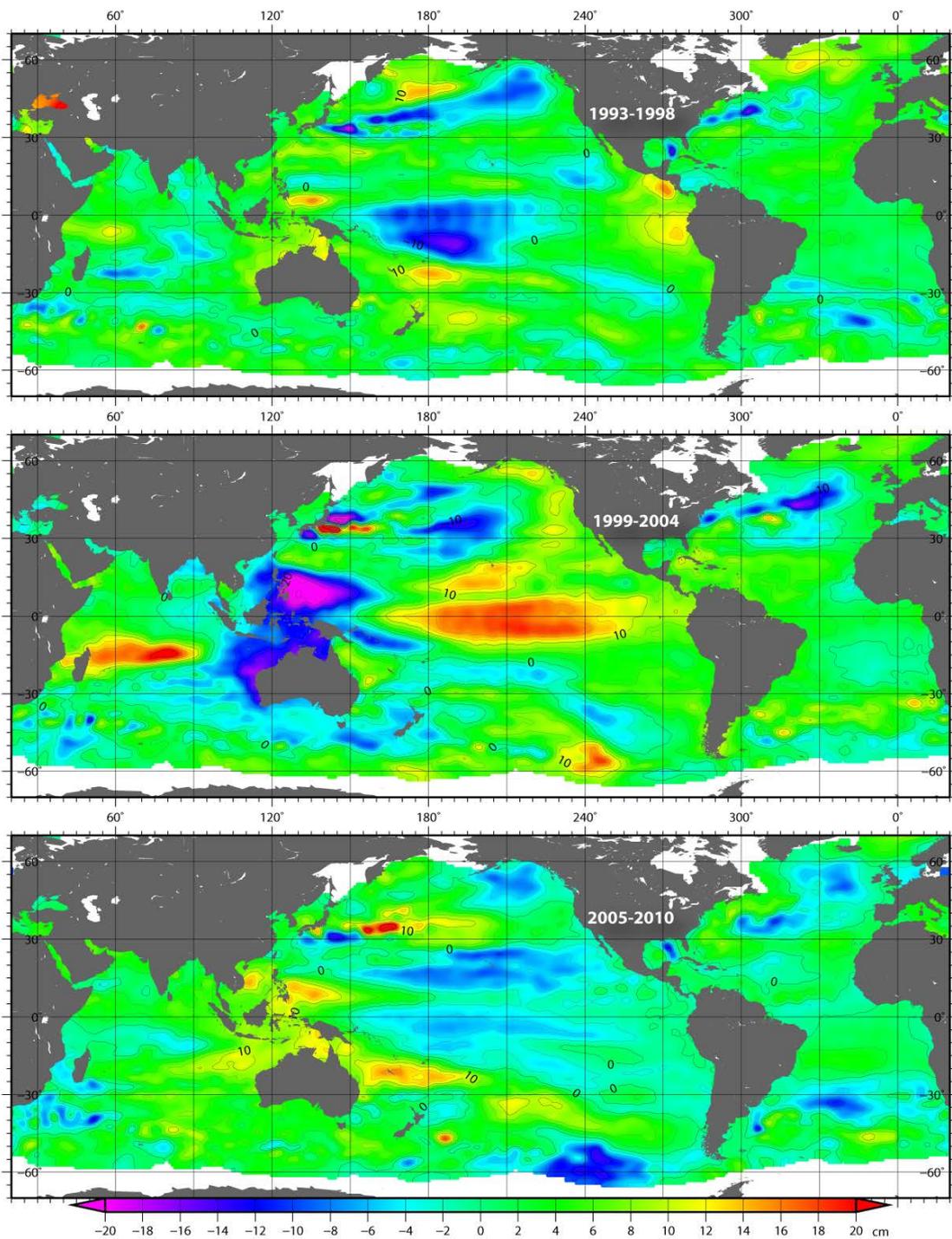
das Höhenfestpunktfeld selbst definiert. Ausgehend von diesen Charakteristiken ist folgendes zu beachten:

Aufgrund der Meerestopographie (auch *dynamische Ozeantopographie* oder *dynamische Meereshöhe* genannt), die die Abweichungen zwischen der mittleren Meeresoberfläche und einer globalen Niveauläche des Erdschwerefeldes (bzw. einem globalen Geoid) darstellt, liegen die Referenzpegel auf verschiedenen Niveaulächen, die sehr nahe beieinander liegen, aber deren Abweichungen bezüglich des globalen Geoids und untereinander unbekannt sind. Die Meerestopographie weist Variationen auf, die üblicherweise in zwei Komponenten aufgeteilt werden: ein permanenter Anteil, der konstant für ein bestimmtes Zeitintervall ist und deswegen als quasistationäre oder mittlere Meerestopographie bezeichnet wird, und ein zeitabhängiger Anteil, der einen säkularen Meeresspiegelanstieg (-abfall) sowie jährliche, halbjährliche und höhere Frequenzen aufzeigt. Während die Effekte der periodischen Variationen durch Mittelbildung (generell über 18 Jahre) der Wasserstandregistrierungen reduziert wurden, enthalten die Referenzniveaus die durch die quasistationäre Meerestopographie und zeitliche Veränderungen erzeugten Diskrepanzen, die bis zu  $\sim \pm 2$  m (Abb. 1.2) bzw. bis zu  $\pm 4$  cm/Jahr (Abb. 1.3) erreichen können. Hierbei ist auch zu beachten, dass die in jedem Pegel abgeleiteten mittleren Meeresniveauwerte systematisch verfälscht sein können, da die Pegel nicht immer im offenen Ozean liegen und lokale oder regionale vertikale Krustenbewegungen, die eventuell am Pegelstandort auftreten, bisher nicht berücksichtigt wurden. Demzufolge sind die Niveauunterschiede zwischen den lokalen Vertikaldatums und dem globalen Geoid nicht nur von der geographischen Position, sondern auch von dem für die Mittelbildung ausgewählten Zeitintervall abhängig.



**Abb. 1.2:** Mittlere dynamische Ozeantopographie [cm] für den Zeitraum 1993 - 2013 (von W. Bosch, DGF<sup>1</sup>).

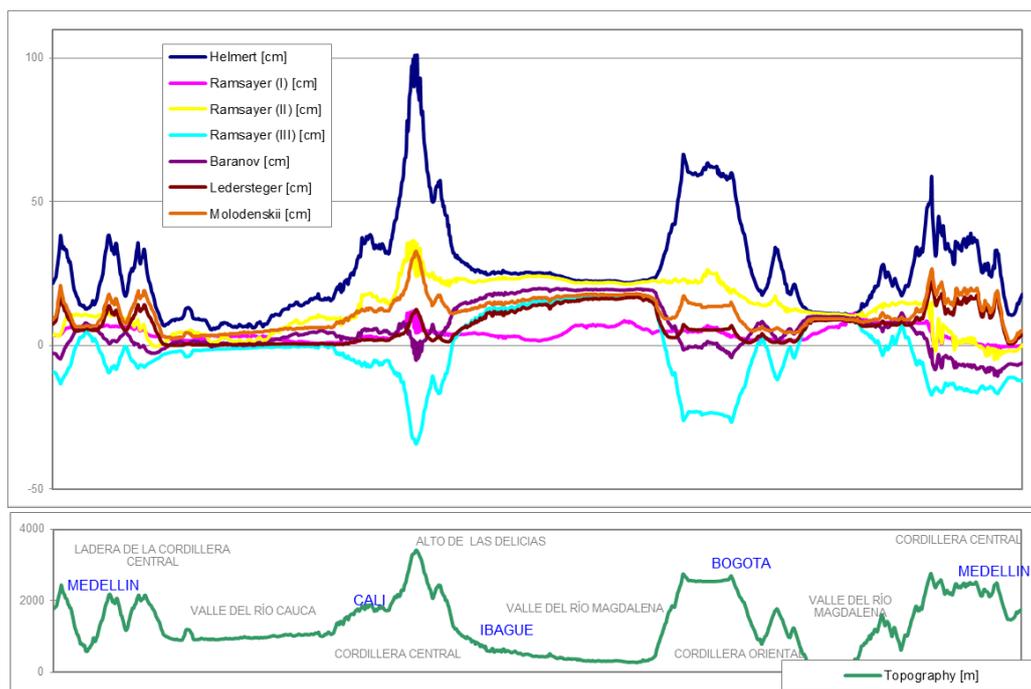
<sup>1</sup> DGF: Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, [www.dgfi.badw.de](http://www.dgfi.badw.de)



**Abb. 1.3:** Variation der Meeresoberfläche für die Zeiträume 1993 - 1998 (oben), 1999 - 2004 (Mitte), und 2005-2010 (unten) (von W. Bosch, DGFI).

Da die Genauigkeit der nivellierten Höhen mit der Entfernung vom Pegel zurückgeht, wurden bei längeren Nivellementslinien bzw. größeren Netzen mehrere Meerespegel als Höhennullpunkte eingeführt, sodass mehr Bedingungen als notwendig für die Datumsfestlegung eingeführt wurden. Daraus ergibt sich, dass neben den inhärenten systematischen Fehlern des Nivellements weitere große Deformationen in den Höhennetzen existieren. Die Größenordnung solcher Deformationen kann mehrere Dezimeter erreichen, z.B. wurden beim amerikanischen Vertikalnetz NGVD29 (*National Geodetic Vertical Datum 1929*) durch den Vergleich der bedingten Ausgleichung

bezogen auf 26 Meeresspiegel als Nullhöhenfestpunkte mit der freien Ausgleichung desselben Netzes Differenzen zwischen -27 cm und +86 cm gefunden (Zilkoski et al. 1995). Derartige Diskrepanzen werden in den südamerikanischen Ländern von den durch die Vernachlässigung des Erdschwerefeldinflusses auf die gemessenen Höhenunterschiede erzeugten Fehlern überlagert. Abb. 1.4 zeigt die Größenordnung der gravimetrischen Reduktionen für eine Nivellementsline mit ca. 4000 m Höhenunterschied und 1800 km Länge: sie variiert zwischen 1 cm und 37 cm für die Normalhöhen und bis zu 93 cm für die nach Helmert berechneten orthometrischen Höhen (Sánchez 2002).

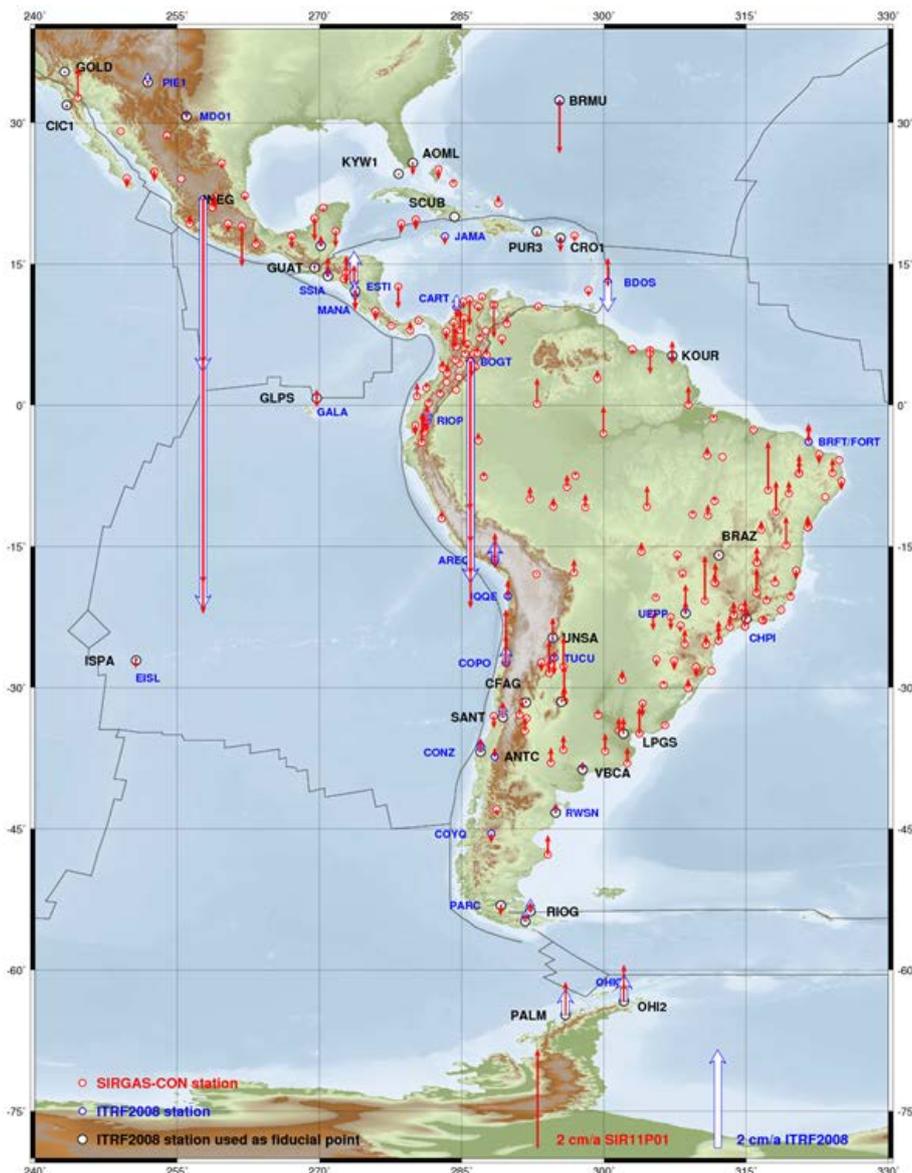


**Abb. 1.4:** Größenordnung der gravimetrischen Reduktionen für eine Nivellementsschleife nach der Formulierung von Helmert (Heiskanen and Moritz 1967), Ramsayer (1953, 1954), Baranov (Leismann et al. 1992), Ledersteger (1956), Molodenskii (Leismann et al. 1992), Vignal (Leismann et al. 1992) und Hirvonen (Leismann et al. 1992). Abb. nach Sánchez (2002).

Da das geodätische Nivellement sehr zeitaufwändig ist, enthalten die Vertikalnetze darüber hinaus Höhenunterschiede, die in verschiedenen Epochen (bis zu 30 Jahre Zeitunterschied) gemessen wurden. Damit werden Hebungen oder Senkungen der Nivellementsunkte, die in Südamerika wegen Krusten- oder Oberflächenbewegungen bis zu  $\pm 4$  cm/Jahr erreichen können (Abb. 1.5), als Messfehler interpretiert, und die Gebrauchshöhen werden weiter verfälscht. Abb. 1.6 präsentiert die durch die Verbindung der vertikalen Netze an Grenzpunkten berechneten Höhenunterschiede zwischen einigen südamerikanischen Ländern.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die existierenden Höhensysteme in Südamerika Diskrepanzen im Meterbereich enthalten, die die lokalen Anwendungen (Bauwerke, Verkehrswege, etc.) und die Genauigkeit der kartographischen Abbildung der Erdoberfläche (in kleinmaßstäbigen Karten) nicht sehr stark beeinflussen, die aber im Zusammenhang mit der hohen Genauigkeit der modernen geodätischen Messverfahren sowie der neuen Analysestrategien ein Hindernis für die präzise Ausführung transnationaler Aufgaben (z. B. Erforschung des

globalen Wandels, kontinentale Geoidbestimmung, automatisierte Navigation, große Ingenieurbauwerke, internationale Geodatenbanken, etc.) und für die direkte Anwendung der aktuellen Technologien in der Höhenbestimmung (insbesondere Satellitenmethoden in der Positionierung in Kombination mit hoch präzisen Geoidmodellen) geworden sind. Nach der Einführung und breiten Anwendung des ITRS<sup>2</sup> und seiner Realisierung ITRF<sup>3</sup> durch SIRGAS<sup>4</sup> als offizielles geometrisches Referenzsystem in Südamerika (Sánchez and Brunini 2009) erfordern Praxis und Wissenschaft ein einheitliches vertikales Referenzsystem, das die neuen Messverfahren und Auswertemethoden unterstützt und dessen Genauigkeit dasselbe Präzisionsniveau des geometrischen Referenzsystems (im Millimeterbereich) erreicht.

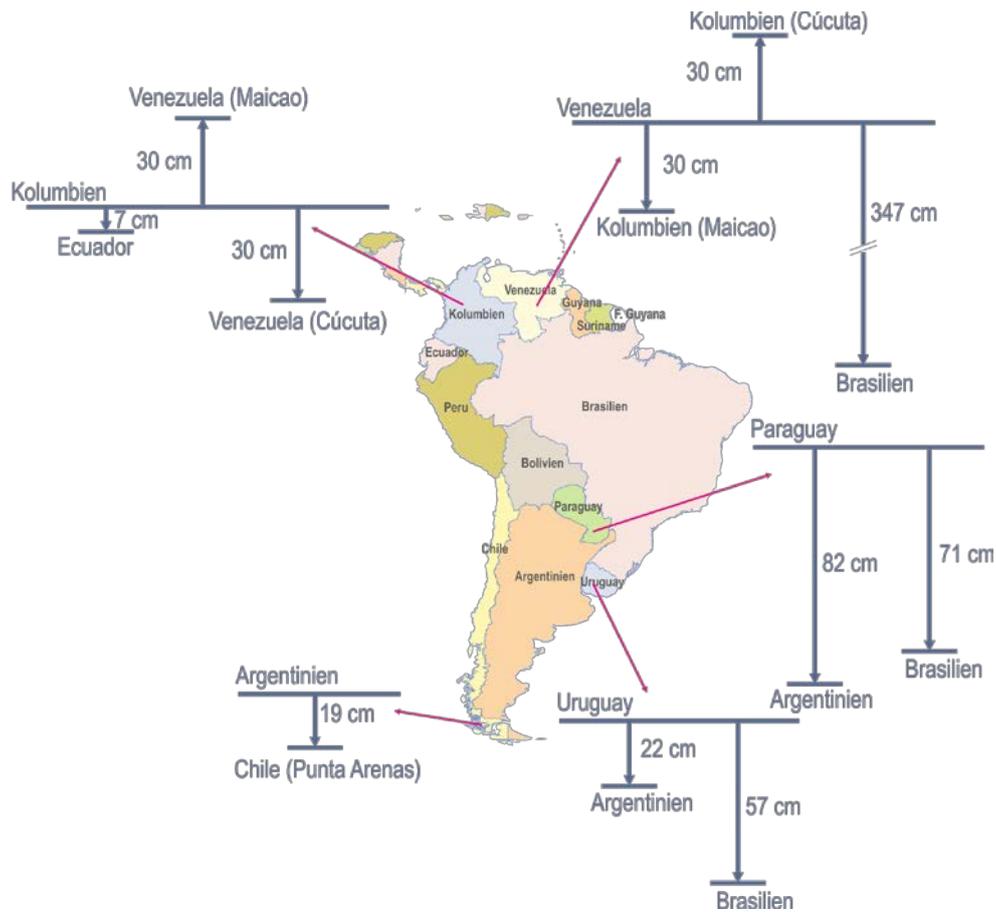


**Abb. 1.5:** Durch kontinuierliche GNSS-Positionierung geschätzte vertikale Geschwindigkeiten in Latein-Amerika (nach Sánchez and Seitz 2011).

<sup>2</sup> ITRS: *International Terrestrial Reference System*, [www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/ITRS/itrs.html](http://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/ITRS/itrs.html)

<sup>3</sup> ITRF: *International Terrestrial Reference Frame*, [www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/ITRF/itrf.html](http://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/ITRF/itrf.html)

<sup>4</sup> SIRGAS: *Sistema de Referencia Geocéntrico para Las Américas*, [www.sirgas.org](http://www.sirgas.org)



**Abb. 1.6:** Durch die Verbindung der vertikalen Netze an Grenzpunkten berechnete Höhenunterschiede zwischen einigen südamerikanischen Ländern. Abb. aus Ihde and Sánchez (2005)

Die vertikale Komponente des geometrischen Bezugssystems (d.h. ellipsoidische Höhe) weist zwar mehrere Vorteile gegenüber den nivellierten Höhen auf, wie z.B. schnelle und preiswerte Bestimmung, hohe Genauigkeit über langen Distanzen, genaue Ermittlung ihrer Änderung mit der Zeit, etc.; aber sie hat keine direkte Verbindung mit der Fließrichtung des Wassers und die Horizontierung geodätischer Instrumente, und deswegen kann sie die physikalischen Höhensysteme in der Praxis nicht vollständig ersetzen. Demzufolge müssen die existierenden Höhensysteme durch ihre Vereinheitlichung so modernisiert werden, dass sie die oben genannten Anforderungen erfüllen.

Die durch die Vernachlässigung der gravimetrischen Reduktionen und die Einführung mehrerer Höhennullpunkte erzeugten Diskrepanzen können minimiert werden, wenn die gemessenen Höhenunterschiede als geopotentielle Koten, bezogen auf ein einziges Referenzniveau, neu ausgeglichen werden. Wird diese Ausgleichung über den gesamten kontinentalen Bereich Südamerikas durchgeführt, wie z. B. in Europa (UENL-95/98: *United European Levelling Network* 1995/1998, z. B. Sacher et al. 1999, 2008) oder in den Vereinigten Staaten (NAVD88, Zilkoski et al. 1995), ist ein einheitliches Vertikaldatum für Südamerika verfügbar. Dennoch wird, wenn das Referenzniveau weiter klassisch, d. h. durch einen einzigen Höhennullpunkt (bzw. Meeresspiegel) realisiert wird, dieses Datum weiterhin die genannten Probleme aufweisen:

- a) die Anwendung der darauf bezogenen physikalischen Höhen (bzw. geopotentiellen Koten) wird auf Südamerika beschränkt,
- b) der Zusammenhang mit anderen Vertikaldatum (insbesondere diejenigen, die nicht durch Nivellements verbunden werden können) wird weiter unbekannt oder sehr ungenau (im Meterbereich) bekannt sein,
- c) die aus Satellitenverfahren abgeleiteten physikalischen Höhen (GNSS-Positionierung und präzise Geoidmodelle) werden mit den aus Nivellements (und gravimetrischen Reduktionen) berechneten Höhen global nicht kompatibel.

Um diese Nachteile zu vermeiden, muss die Vereinheitlichung der südamerikanischen Höhensysteme in einem globalen Rahmen durchgeführt werden. Im Grunde genommen bedeutet dies, dass das Referenzniveau, auf das sich alle geopotentiellen Koten beziehen sollen, global definiert und realisiert sein muss (z. B. Rapp 1983a, 1995a, Xu and Rummel 1991, Balasubramania 1994, van Onselen 1997). Daraus ergibt sich auch als wichtige Aufgabe die genaue Verknüpfung zwischen den lokalen Höhenbezugsflächen und dem globalen Referenzniveau. Die Lösung dieses sogenannten Vertikaldatumproblems wird seit mehreren Dekaden untersucht. Die einschlägigen Vorgehensweisen basieren auf der Lösung des geodätischen Randwertproblems (z. B. Rummel and Teunissen 1988, Heck and Rummel 1990, Rapp 1994, Sansò and Usai 1995) und seine Umformulierung in Anlehnung an die Verfügbarkeit neuer Beobachtungsverfahren und Messdaten, insbesondere die detaillierte Kenntnis der Erdoberflächengeometrie durch GNSS, hochauflösende Höhenmodelle auf den Kontinenten durch SAR und auf den Ozeanen durch Satellitenradaraltimetrie (Rummel and Ilk 1995, Pan and Sjöberg 1998, Lehmann 2000, Sacerdote and Sansò 2004, Sánchez 2009, Čunderlík et al. 2008), sowie die verbesserte Genauigkeit der Erdschwerefeldbestimmung durch die dedizierten Satellitenmissionen CHAMP<sup>5</sup>, GRACE<sup>6</sup> und GOCE<sup>7</sup> (z.B. Rummel 2001, 2012, Arabelos and Tscherning 2010, Hirt et al. 2011).

Ausgehend von diesen Grundlagen ist es das Ziel dieser Arbeit, ein einheitliches vertikales Referenzsystem für Südamerika zu definieren und die Vorgehensweise für seine Realisierung detailliert zu beschreiben. Neben der physikalischen Komponente (Geoid und physikalische Höhen), die im Mittelpunkt der bisherigen Ansätze für die Realisierung eines globalen Vertikaldatums steht, ist auch eine geometrische Komponente (Referenzellipsoid und ellipsoidische Höhen) hinzuzufügen, damit das neue Bezugssystem die folgenden Anforderungen erfüllt:

- a) Unterstützung von geometrischen und physikalischen Höhen und deren globaler Kombination mit hoher Genauigkeit (1 cm); d.h. geometrisches und physikalisches Referenzniveau global zu realisieren und nachhaltige Zuverlässigkeit von (vertikalen) Stationspositionen und deren zeitlichen Veränderungen zu garantieren;
- b) Ermöglichung der präzisen Vereinheitlichung aller weltweit existierenden lokalen Höhensysteme.

<sup>5</sup> CHAMP: *Challenging Minisatellite Payload*, <http://op.gfz-potsdam.de/champ/>

<sup>6</sup> GRACE: *Gravity Recovery and Climate Experiment*, [www.csr.utexas.edu/grace/](http://www.csr.utexas.edu/grace/)

<sup>7</sup> GOCE: *Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*, [www.esa.int/SPECIALS/GOCE/index.html](http://www.esa.int/SPECIALS/GOCE/index.html)

Die Definition des Bezugssystems sowie seiner Komponenten wird im Kapitel 2 formuliert. Wesentlich ist dabei die Festlegung der notwendigen Parameter für die eindeutige Definition des Systems. Die benötigten Konventionen für seine präzise Realisierung werden im Kapitel 3 betrachtet. Dies sind insbesondere die gemeinsamen Konventionen für das geometrische Referenzsystem (z.B. ITRS in Kombination mit einem Referenzellipsoid) und für das Erdschwerefeld (z.B. Bestimmung des Geoids und der physikalischen Höhen), wie z.B. Behandlung der Erdzeiten (Erdzeiteensystem), Parameter des Referenzellipsoids, numerische Standards, etc.

Kapitel 4 ist der Realisierung des im Kapitel 2 definierten Bezugssystems gewidmet. Dabei sind drei weitere Bestandteile zu berücksichtigen: ein globales Festpunktfeld (ähnlich wie beim ITRS/ITRF) und die Beschreibung der erforderlichen Stationscharakteristiken, die Festlegung der Bezugsflächen (Nullhöheniveau für physikalische und geometrische Stationspositionen) und die Methodik für die Bestimmung der Stationskoordinaten (Positionen und Geschwindigkeiten). Besonderer Wert wird auf die Anwendung des fixen geodätischen Randwertproblems auf den Ozeanen für die Bestimmung eines globalen physikalischen Referenzniveaus  $W_0$  gelegt. Bei diesem Ansatz sind die Geometrie der Randfläche (mittlere Meeresoberfläche) und der Modulus der Schwere auf dieser Oberfläche als bekannte Größen gegeben, gesucht wird die Potentialfunktion  $W$ . Neben den wesentlichen Grundlagen des fixen Randwertproblems werden numerische Untersuchungen vorgestellt, die auf globalen Erdschwerefeldmodellen und durch die Analyse von Satellitenaltimetriedaten abgeleiteten Meeresoberflächenmodellen basieren. Die Ergebnisse werden mit den bisher angewendeten  $W_0$ -Werten verglichen und es wird auf der Basis der notwendigen Genauigkeit und Zuverlässigkeit dieses Wertes eine Empfehlung gegeben.

Nachdem ein globales Referenzniveau  $W_0$  gegeben ist, befasst sich das Kapitel 5 mit der Vereinheitlichung der existierenden Höhensysteme durch ihre Verknüpfung mit dem globalen vertikalen Referenzsystem. Die zentrale Aufgabe ist die Bestimmung der Niveaudifferenzen (bzw. Transformationsparameter)  $\delta W_0^i = (W_0 - W_0^i)$  zwischen den lokalen Vertikaldatum ( $W_0^i$ ) und dem globalen System ( $W_0$ ). Diese Niveaudifferenzen werden durch die Lösung des skalarfreien linearen Randwertproblems geschätzt, wobei geopotentielle Knoten, Schwereanomalien, Meerestopographie und ellipsoidische Höhen als Randdaten eingeführt werden. Darüber hinaus werden diese Randbedingungen in drei Ansätzen betrachtet: Der Ozean-Ansatz (um die Referenzpegel) basiert auf durch Pegelregistrierungen verfeinerter Meerestopographie entlang der Küstenlinien. Der Küsten-Ansatz (an den Referenzpegeln) gründet sich auf der Kombination von GNSS-Positionierung an Pegeln, geopotentiellen Knoten, terrestrischen Schweredaten und Schwerefeldmodellen. Der Kontinent-Ansatz (mit Festpunktfeldern des geometrischen Referenzsystems, z. B. ITRF, SIRGAS, ...) besteht aus GNSS-Positionierung, Nivellement mit Schwereerduktionen, terrestrischen Schweredaten und reinen Satelliten-Schwerefeldmodellen, wobei in Punkten an den Grenzen zwischen benachbarten Ländern verschiedene geopotentielle Knoten verfügbar sind und die direkte Verbindung der lokalen Vertikaldatum bilden. Die gemeinsame Ausgleichung der in jedem Ansatz formulierten Beobachtungsgleichungen liefert die eindeutige Bestimmung der Niveaudifferenzen  $\delta W_0^i$ . Nachdem die lokalen Höhensysteme

damit vereinheitlicht sind, müssen die von der Höhe abhängigen Größen erneut berechnet und der ganze Prozess wiederholt werden, bis 1-cm-Genauigkeit erreicht ist. Abb. 1.7 fasst die gesamte Vorgehensweise zusammen.

Am Ende des Kapitels 5 wird die praktische Untersuchung für die Vereinheitlichung der existierenden Höhensysteme Südamerikas beispielhaft dargestellt. Zunächst wird das durch die SIRGAS-Arbeitsgruppe 3 (Vertikales Datum) verfügbare Datenmaterial aufbereitet, und fehlende Daten werden durch Simulationsgrößen ersetzt. Im nächsten Schritt werden die formulierten Beobachtungsgleichungssysteme für die einzelnen Länder vollständig aufgestellt, um durch ihre empirische Evaluierung grobe Messfehler aufzudecken. Mit möglichst von groben Fehlern bereinigten Eingangsdaten wird danach eine Gesamtlösung für die Beobachtungsgleichungen berechnet, um die auf das globale vertikale Referenzsystem bezogenen Niveaudifferenzen  $\delta W_0^i$  zu bestimmen. Nach einer detaillierten Beschreibung der numerischen Experimente und entsprechenden Ergebnisse wird die dabei erreichte Genauigkeit diskutiert.

Zum Abschluss gibt Kapitel 6 eine Zusammenfassung der gesamten Methodik und die erhaltenen Ergebnisse mit Schlussfolgerungen und Erkenntnissen für die Zukunft.

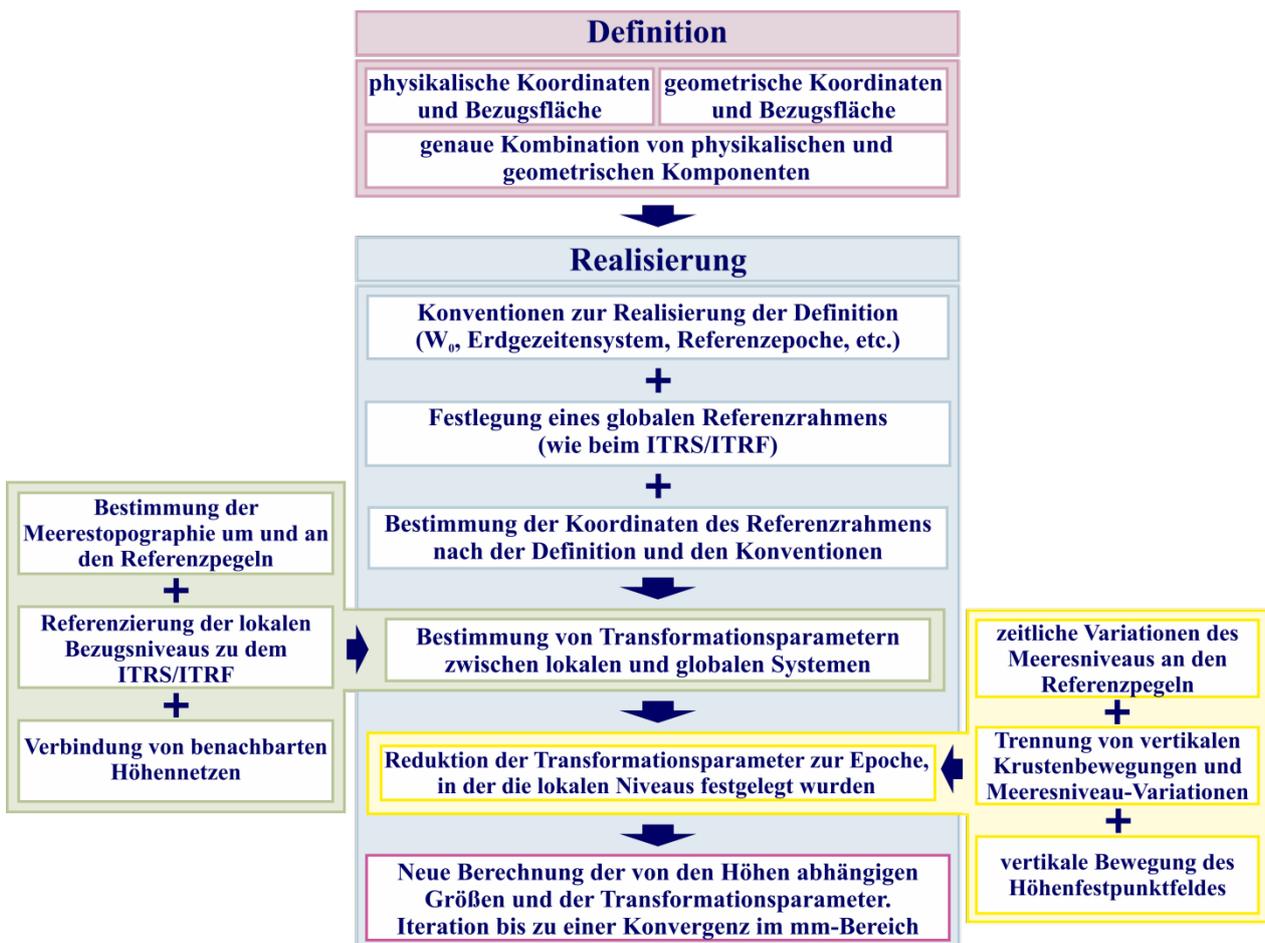


Abb. 1.7: Vorgehensweise für die Einrichtung eines einheitlichen globalen vertikalen Referenzsystems.



## 2. Definition eines globalen vertikalen Referenzsystems

Ein vertikales Referenzsystem wird konventionell durch die Art der Höhen und die zugehörige Referenzfläche definiert. Grundsätzlich unterscheiden wir physikalische (unter dem Einfluss des Erdschwerefeldes) und geometrische (unabhängig vom Schwerefeld) Höhen. Unter den physikalischen Höhen sind die orthometrischen ( $H^o$ ) und die Normalhöhen ( $H^N$ ) mit den Bezugsflächen Geoid bzw. Quasigeoid von herausragender Bedeutung, während unter den geometrischen vor allem die ellipsoidischen Höhen ( $h$ ) zu nennen sind (Abb. 2.1).

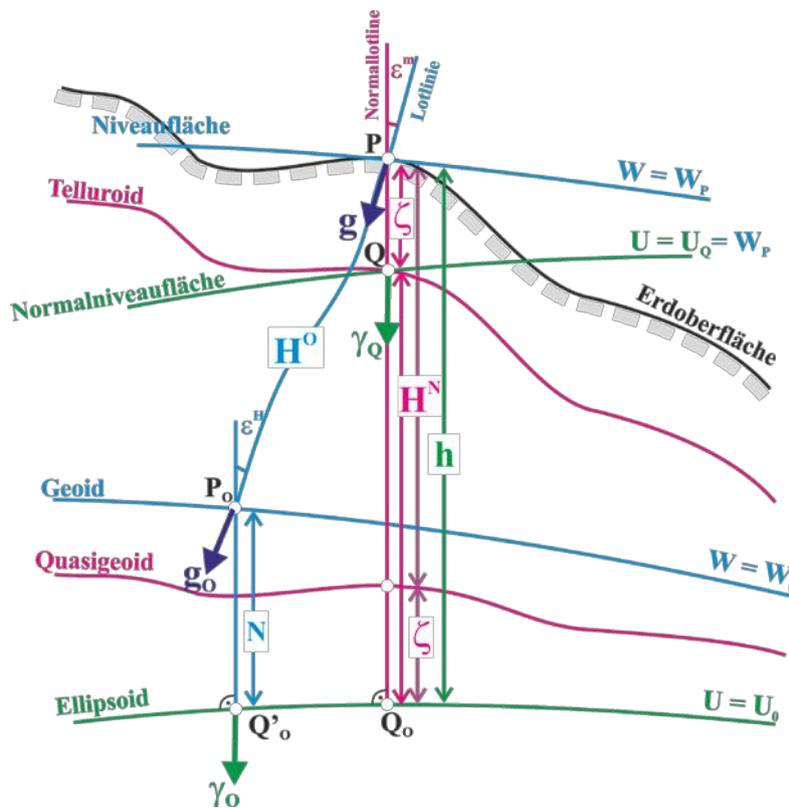


Abb. 2.1: Höhentypen und die zugehörigen Referenzflächen (nach Kuhn 2002).

Vor Einführung der Satellitenbeobachtungsverfahren zur Koordinatenbestimmung auf der Erdoberfläche wurden die ellipsoidischen Höhen, die zur Reduktion der geodätischen Beobachtungen von der topographischen Oberfläche auf das Ellipsoid nötig sind, relativ durch Nivellement oder trigonometrische Höhenbestimmung mit Zenitdistanz-Messungen in Kombination mit Lotabweichungsbestimmungen zwischen den betreffenden Punkten durchgeführt (Heck 2003, S. 300ff). Später, nachdem verlässliche (Quasi-) Geoid-Modelle verfügbar waren, wurden sie indirekt berechnet mit

$$h(\varphi, \lambda) \approx H^N(\varphi, \lambda) + \zeta(\varphi, \lambda) \approx H^o(\varphi, \lambda) + N(\varphi, \lambda) \quad [2.1]$$

wobei  $\varphi$  (geogr. Breite) und  $\lambda$  (geogr. Länge) die ellipsoidischen Koordinaten des betreffenden Punktes sind, und  $\zeta$  (Höhenanomalie) und  $N$  (Geoidundulation) die geometrische Repräsentation

des Quasigeoids bzw. des Geoids über einem Niveau-Ellipsoid darstellen, das nicht notwendigerweise mit dem geometrisch definierten Ellipsoid übereinstimmen muss, das zur Definition des lokalen horizontalen Datums (auf das sich  $\varphi$  und  $\lambda$  beziehen) dient. Heute werden die ellipsoidischen Höhen im Allgemeinen direkt aus den mit geodätischen Raumverfahren bestimmten kartesischen geozentrischen Koordinaten  $\mathbf{X}=[x, y, z]$  in einem konventionellen terrestrischen Referenzsystem, z.B. dem ITRS, berechnet und beziehen sich auf ein Ellipsoid, das ebenfalls geozentrisch gelagert ist (siehe Konversionsformeln  $[x, y, z] \leftrightarrow [\varphi, \lambda, h]$  z.B. in Torge 2001, S. 99ff). Der entsprechende Referenzrahmen ist durch eine Menge von Punkten, die mit dem ITRF verbunden sind, gegeben. Im Prinzip sind diese ellipsoidischen Höhen weltweit miteinander kompatibel (d.h. sie beziehen sich auf dieselbe Referenzfläche). Sie können jedoch Differenzen untereinander aufweisen, wenn unterschiedliche geometrische Ellipsoidparameter (große Halbachse  $a$ , Abplattung  $f$ ) zur Konversion der geozentrischen in krummlinige Koordinaten benutzt werden, wenn die Orientierung oder Lagerung des Ellipsoids sich ändert, oder wenn sie zeitlich variabel sind und zu verschiedenen Epochen gemessen wurden.

Die aus geodätischen Raubeobachtungsverfahren abgeleiteten ellipsoidischen Höhen weisen in der Praxis einige Vorteile gegenüber den durch Nivellement bestimmten physikalischen Höhen auf, vor allen die Schnelligkeit und Wirtschaftlichkeit der Bestimmung, geringere systematische Fehler über große Entfernungen sowie die Möglichkeit, vertikale Bewegungen der Erdkruste präzise zu erkennen. Jedoch ist ihre Nutzbarkeit in der Praxis beschränkt, da sie nicht, wie die physikalischen Höhen, den Verlauf des Wassers approximieren.

Die derzeit in der Praxis benutzten vertikalen Referenzsysteme sind physikalisch definiert. Die Höhen werden i. A. durch Nivellement bestimmt, wobei die verwendete Reduktion der gemessenen Höhendifferenzen wegen des Effekts des Erdschwerefeldes die Höhenart festlegt (Tab. 2.1). Die Realisierung basiert auf der Festlegung eines (vertikalen) Datums und einer Anzahl vermarkter Punkte (Referenznetz bzw. Referenzrahmen), deren Höhenwerte sich auf das gegebene Datum beziehen. Unter dem Datum wird dabei die Einführung einer hinreichenden und notwendigen Anzahl von Parametern zur eindeutigen Bestimmung der Koordinaten in dem spezifischen Referenzsystem verstanden. Im Fall der Höhen bedeutet dies die Festlegung eines *Referenzpunktes* (auch *Höhenbezugspunkt* oder *Datumspunkt* genannt), dessen Höhe (oder Potentialwert) als Ausgangswert zur Bestimmung der Höhen anderer Punkte mittels gemessener Differenzen dient. Die Referenzfläche (Fläche der Höhe null) fällt im Prinzip mit derjenigen Niveaufläche des Erdschwerefeldes zusammen, die durch den Datumspunkt verläuft. Sie kann aber auch realisiert werden, indem die Höhe des Datumspunktes von denen des Referenzrahmens reduziert wird. Diese Referenzfläche ist nicht immer identisch mit einem Geoid oder einem Quasigeoid, da in einigen Höhensystemen keine Schwerereduktionen angebracht oder orthometrische Reduktionsmodelle mit Normalschwerewerten eines Niveauellipsoids (normal-orthometrische Höhen) benutzt wurden. Außerdem fällt in den Fällen, in denen streng orthometrische oder Normalhöhen berechnet wurden, die aus den physikalischen Höhen abgeleitete Referenzfläche (nach [2.1]  $N \approx h - H^O$ ;  $\zeta \approx h - H^N$ ) nicht immer mit der aus dem Schwerefeld gewonnenen, d.h. aus der Berechnung des (Quasi-) Geoids durch Lösung des geodätischen Randwertproblems, zusammen. Als Folge existieren derzeit so viele Höhensysteme wie Datumspunkte, die untereinander nicht nur deshalb differieren, weil ihre Referenzniveaus nicht

auf derselben Äquipotentialfläche liegen (siehe Kapitel 1), sondern auch, weil sie unterschiedliche Höhenarten verwenden, die ihrerseits verschiedene Bezugsflächen bilden (vgl. Abb. 1.4).

## 2.1. Stand bei der Einrichtung eines globalen vertikalen Referenzsystems

Die veröffentlichten Vorschläge zur Einrichtung eines *globalen vertikalen Referenzsystems*, auch *Welthöhensystem* (Rapp and Balasubramania 1992), *globales vertikales Datum* (Rapp 1983a, Balasubramania 1994, Rapp 1995a) oder *globales vertikales Netz* (Colombo 1980) genannt, konzentrieren sich auf ein System physikalischer Höhen, d.h. in Abhängigkeit vom Erdschwerefeld. Das zentrale Ziel ist es, sämtliche Höhen oder geopotentielle Knoten auf eine gemeinsame Referenzfläche (d.h. ein einziges vertikales Datum) zu beziehen, die entweder mit einer bereits vereinbarten (z.B. eines beliebigen lokalen Höhensystems) zusammenfällt oder in einer *absoluten* Weise definiert wird, also unabhängig von den lokalen Systemen ist. Im ersten Fall kann die Definition oder Realisierung eines absoluten vertikalen Datums als nicht notwendig angesehen werden, da die ursprünglichen Beobachtungen zur Bestimmung physikalischer Höhen Niveau-Unterschiede sind, und deshalb die Referenzfläche beliebig zugewiesen werden kann (Heck and Rummel 1990, Rummel and Heck 2000, Heck 2004). Damit wird die Bedeutung der Definition der Referenzfläche selbst verringert, und der Schwerpunkt wird auf die Verbindung der einzelnen lokalen Systeme gelegt, insbesondere die auf verschiedenen Kontinenten liegenden. Diese Verbindung wird in der Literatur oft als *Lösung des Vertikalproblems* bezeichnet und im Kapitel 5 detailliert behandelt. Im zweiten Fall wird zuerst eine globale Referenzfläche definiert, die an jedem Ort der Erde zugänglich ist, und die Verbindung existierender Höhensysteme ist danach ein Teil der Realisierung.

Die *natürliche* Höhenreferenzfläche ist traditionell das Geoid. Die von Gauß 1828 gegebene Beschreibung spielt auf die *mathematische Figur der Erde* an (Gauß 1828, Heiskanen and Moritz 1967, S. 49, Torge 2001, S. 3), ohne die Bezeichnung *Geoid* selbst zu benutzen. Stokes entwirft 1849 die Formel zur Berechnung der *Oberfläche der Erde im originären flüssigen Zustand* (*surface of the Earth's original fluidity*) aus gravimetrischen Messungen auf seiner Oberfläche. Diese Formel ist bekannt als das Stokes-Integral (Stokes 1849, Heiskanen and Moritz 1967, S. 94). J. F. Listing benutzt 1873 den Terminus *Geoid*, um die von Gauß und Stokes eingeführte mathematische Oberfläche zu beschreiben (Listing 1873, Torge 2001, S. 3), und schließlich bezeichnet F. R. Helmert (1880) die Bestimmung dieser Oberfläche als die Hauptaufgabe der physikalischen Geodäsie.

Die allgemein akzeptierte Definition besagt, dass das Geoid diejenige Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes ist, die mit dem mittleren Meeresspiegel in vollkommener Ruhe zusammenfällt (bzw. im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate sich diesem am besten anpasst.). Da diese Gleichgewichtsbedingung (u. a. wegen der zeitlich variablen ozeanischen Strömungen, der Existenz der Kontinente, externer gravitativer Kräfte u. s. w.) ständig verändert wird, führte dies zur Formulierung *verfeinerter* Definitionen bei der Berechnung des Geoids (Mather 1978, Heck and Rummel 1990, Ekman 1995, Heck 2004), die im Wesentlichen auf die Nutzung unterschiedlicher Beobachtungstypen zielen, ohne das generelle Konzept zu verändern (siehe Abschnitt 2.3).

Tab. 2.1: Physikalische Höhen (nach Sánchez 2002).

|   | Dynamische Höhen   | Orthometrische Höhen   | Nomallhöhen   |
|---|--|--|---|
| Definition von H<br>$H = \frac{C}{\hat{g}}$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>Skalierte geopotentielle Koten<br/><math>H^{DIN} = \frac{C}{\gamma_o^\varphi}</math></li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Abstand längs der Lotlinie vom Geoid bis zum betrachteten Punkt (Abb. 2.1)<br/><math>H^o = \frac{C}{g_m} ; g_m = \frac{1}{H^o} \int_0^{H^o} g dH^o</math></li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Abstand längs der Normalotlinie vom Quasigeoid bis zum betrachteten Punkt (Abb. 2.1)<br/><math>H^N = \frac{C}{\gamma_m} ; \gamma_m = \frac{1}{H^N} \int_0^{H^N} \gamma dH^N</math></li> </ul>  |
| Definition von $\hat{g}$                    | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\gamma_o^k</math>: konstante Normalschwere auf dem Ellipsoid in einer beliebigen Breite <math>\varphi</math> (Normalerweise: <math>\varphi = 45^\circ</math>)</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>g_m</math>: Mittelwert der wahren Schwere längs der Lotlinie zwischen dem Geoid und dem betrachteten Punkt</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\gamma_m</math>: Mittelwert der Normalschwere längs der Normalotlinie zwischen Ellipsoid und Telluroid, oder hinreichend zwischen Quasigeoid und betrachtetem Punkt</li> </ul>   |
| Korrektion für Höhendifferenzen             | <ul style="list-style-type: none"> <li>Größenordnung: bis zu 20 m<br/><math>\Delta H_{AB}^{DIN} = \Delta n_{AB} + k_{AB}^{DIN}</math><br/><math>k_{AB}^{DIN} = \int_A^B \frac{g - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} dn = \sum_A^B \frac{g - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} \delta n</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Größenordnung: mm ... dm<br/><math>\Delta H_{AB}^o = \Delta n_{AB} + k_{AB}^o</math><br/><math>k_{AB}^o = \int_A^B \frac{g - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} dn + \frac{g^A - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} H_A^o - \frac{g^B - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} H_B^o</math></li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Größenordnung: mm ... dm<br/><math>\Delta H_{AB}^N = \Delta n_{AB} + k_{AB}^N</math><br/><math>k_{AB}^N = \int_A^B \frac{g - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} dn + \frac{\gamma_o^A - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} H_A^N - \frac{\gamma_o^B - \gamma_o^{45}}{\gamma_o^{45}} H_B^N</math></li> </ul>  |
| Besonderheiten                              | <ul style="list-style-type: none"> <li>Ohne geometrische Bedeutung</li> <li>Punkte auf der gleichen Niveaufläche haben gleiche dynamische Höhe</li> <li>Hypothesenfreie Bestimmung</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Referenzoberfläche: das Geoid<br/><math>H^o = h - N</math><br/><math>h</math>: ellipsoidische Höhe,<br/><math>N</math>: Geoidundulation</li> <li>Punkte auf der gleichen Niveaufläche sind genau so verschieden wie die Werte <math>g_m</math></li> <li>Bestimmung nur mit Hypothesen: Massenverteilung (Dichte der anomalen Massen) und vertikaler Schweregradient (<math>\partial g / \partial H</math>)</li> <li><math>g_m</math> ist nur approximativ bestimmbar</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Referenzoberfläche: das Quasigeoid<br/><math>H^N = h - \zeta</math><br/><math>h</math>: ellipsoidische Höhe,<br/><math>\zeta</math>: Höhenanomalie</li> <li>Punkte auf der gleichen Niveaufläche und auf dem gleichen Breitenkreis haben gleiche Normalhöhen, sonst variieren sie, wie <math>\gamma_m</math> mit der Breite variiert.</li> <li>hypothesenfreie Bestimmung</li> <li><math>\gamma_m</math> lässt sich genau bestimmen</li> </ul> |

Das Quasigeoid, das 1945 durch Molodenskii definiert wurde (Heiskanen and Moritz 1967, S. 291), ist i. A. mit Normalhöhen in lokalen oder regionalen vertikalen Referenzsystemen verbunden. Bei der Definition oder Realisierung eines globalen vertikalen Systems wird diese Bezugsfläche nicht besonders hervorgehoben und generell analog zum Geoid betrachtet.

## 2.2. Vorschlag zur Definition eines globalen vertikalen Referenzsystems

Die primäre Vertikalkoordinate (Abb. 2.1) ist durch die Potentialdifferenz zwischen einer Referenzfläche ( $W_0$ ) und der Äquipotentialfläche, die durch den betrachteten Punkt verläuft ( $W_P$ ) gegeben:

$$-\Delta W_P = C_P = W_0 - W_P \quad [2.2]$$

Diese Differenz kann wie folgt bestimmt werden:

- a) Durch Nivellement in Kombination mit Schweremessungen (z.B. Heck 2003, S. 281ff):

$$C(g, \delta n) = W_0 - W_P = \int_0^P g \, dn \cong \sum_0^P g \, \delta n \quad [2.3]$$

Wobei  $g$  der mittlere Wert der Schwerebeschleunigung zwischen jeweils zwei Punkten der Nivellementsline und  $\delta n$  der nivellierte Höhenunterschied zwischen den entsprechenden Punkten ist.

- b) Durch das Störpotential ( $T$ ) in Kombination mit einem Referenzellipsoid. In diesem Fall kann das Potential  $W_P$  als Funktion der ellipsoidischen Koordinaten geschrieben werden (z.B. Hofmann-Wellenhopf and Moritz 2005, S. 93):

$$W(\varphi, \lambda, h) = U(\varphi, h) + T(\varphi, \lambda, h) \quad [2.4]$$

$U(\varphi, h)$  stellt das durch das Ellipsoid erzeugte Normalpotential dar:

$$U(\varphi, h) = U_0 + \frac{\partial U_0}{\partial h} h + \dots = U_0 - \bar{\gamma} h + \dots \quad [2.5]$$

wobei  $U_0$  das Normalpotential auf der Ellipsoidoberfläche ist und  $\bar{\gamma}$  den mittleren Normalschwerewert entlang der Normalen zwischen  $P(\varphi, \lambda, h)$  und der Oberfläche des Ellipsoids darstellt. Setzt man [2.4] und [2.5] in [2.2] ein, so erhält man die Potentialdifferenzen  $C_P$  mit

$$C(U_0, T) = -(U_0 - W_0) + \bar{\gamma} h - T(\varphi, \lambda, h) \quad [2.6]$$

Diese Berechnung gilt genau dann, wenn  $U_0$  und die Koordinaten  $(\varphi, \lambda, h)$  sich auf dasselbe Ellipsoid beziehen wie das zur Bestimmung des Störpotentials  $T(\varphi, \lambda, h)$  verwendete. Das Störpotential ist durch die Lösung des geodätischen Randwertproblems bestimmbar.

- c) Durch ein globales Schwerefeldmodell in Kombination mit einem mit der Erde rotierenden geozentrischen Referenzsystem (wie z.B. das ITRS). Das Potential  $W_P$  berechnet sich aus der Summe des Gravitationspotentials ( $V$ ) und des Zentrifugalpotentials ( $Z$ ):

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + Z(x, y, z) \quad [2.7]$$

Da das Gravitationspotential außerhalb der anziehenden Massen harmonisch ist (d.h.  $\nabla^2 V = 0$ ), wird es üblicherweise mathematisch durch eine Kugelfunktionsentwicklung mit der großen Halbachse  $a$  und der Erdmasse  $M$  dargestellt (Hofmann-Wellenhopf and Moritz 2005, 56ff):

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \quad [2.8]$$

wobei  $(r, \theta, \lambda)$  die sphärischen Koordinaten (Radius, Poldistanz, Länge) des betrachteten Punktes sind, die aus den geozentrischen Koordinaten  $(x, y, z)$  abgeleitet werden (siehe Konversionsformeln  $(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, \lambda)$  z.B. in Torge 2001, S. 32ff);  $G$  ist die Gravitationskonstante,  $\bar{P}_{nm}$  sind die vollständig normierten Legendreschen Funktionen des Grades  $n$  und der Ordnung  $m$ , und  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  sind die normierten sphärisch-harmonischen Koeffizienten. Diese Darstellung gilt für alle Punkte  $P(r, \theta, \lambda)$  außerhalb der Masse  $M$ . Das Zentrifugalpotential ist

$$Z(r, \theta) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2(90^\circ - \theta) \quad [2.9]$$

wobei  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist. Auf diese Weise erhält man die geopotentiellen Koten durch Einsetzen von [2.8] und [2.9] in [2.2] wie folgt:

$$C(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}) = W_0 - [V(r, \theta, \lambda) + Z(r, \theta)] \quad [2.10]$$

Das Modell [2.8] ist durch  $(n_{\max} + 1)^2$  Koeffizienten sowie die Werte  $GM$  und  $a$  gegeben. Im Allgemeinen wird  $\bar{C}_{00} = 1$  angenommen, um den Wert  $GM$  (Potential der gesamten Erdmassen) nicht zu verändern und es wird  $\bar{C}_{10} = \bar{C}_{11} = \bar{S}_{11} = 0$  gesetzt, damit der Ursprung der Koordinaten  $x = y = z = 0$  mit dem Geozentrum zusammenfällt. Die Zuverlässigkeit des Modells (d.h. die Differenz zwischen dem tatsächlichen und dem aus dem Modell abgeleiteten Potential) hängt sowohl von der Genauigkeit der Koeffizienten als auch vom maximalen Grad ( $n_{\max}$ ) ab. Z.B. erlaubt eine Entwicklung bis  $n, m = 360$  eine räumliche Auflösung von 70,5 km (z.B. Barthelmes 2009, Tab. 1, S. 20), was in den Geoidundulationen (unabhängig von anderen Fehlerquellen) einen Vernachlässigungsfehler von ca. 0,22 m erzeugt (z.B. Rapp 1997, Tscherning et al. 1983). Soll eine Genauigkeit der aus einem Schwerefeldmodell abgeleiteten Geoidhöhen im

Zentimeterbereich erreicht werden, ist eine Entwicklung bis mindestens  $n, m = 2160$  erforderlich (Vernachlässigungsfehler ca. 0,02 m). Das einzige derzeitige Modell, das so viele Koeffizienten enthält, ist das EGM2008<sup>1</sup> (Pavlis et al. 2012, 2013), das jedoch in Regionen mit hoher Dichte an terrestrischer Schwereinformation Genauigkeiten von ca. 10 cm liefert, während es in Regionen mit wenigen gravimetrischen Daten Unsicherheiten von mehr als 50 cm aufweist (Pavlis et al. 2012, 2013). In gleicher Weise würden geopotentielle Koten, die nach [2.10] abgeleitet sind, die Bestimmung physikalischer Höhen mit Genauigkeiten in der Größenordnung von Dezimetern erlauben, was derzeit nicht vergleichbar oder kombinierbar mit Nivellements mit Schwerereduktion ist. Aus diesem Grund wird die Verwendung der Formel [2.10] in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt, und die Möglichkeit seiner Anwendung wird für die mittelfristige Zukunft, wenn die Genauigkeit der globalen Schwerefeldmodelle höher sein mag, offen gelassen.

Um die Konsistenz der nach [2.3] und [2.6] abgeleiteten vertikalen Koordinaten in einem einheitlichen Referenzsystem zu gewährleisten, muss in der Definition zusätzlich zu der in den bisherigen Vorschlägen zur Bestimmung eines globalen vertikalen Datums üblichen physikalischen Komponente auch eine geometrische enthalten sein, die die Größen bezüglich des zugrundeliegenden Ellipsoids nach [2.6] (entsprechend [2.1]) betrifft. Folglich gründet sich in dieser Arbeit vorgeschlagene globale vertikale Referenzsystem auf zwei Komponenten: eine geometrische und eine physikalische, die beide jeweils durch eine (geometrische und physikalische) Referenzfläche und (geometrische und physikalische) Koordinaten bezüglich derselben definiert sind. Das Hauptziel ist es, die fundamentale Bedingung zu erfüllen, dass diese beiden Komponenten konsistent untereinander sind, d.h. dass die geopotentiellen Koten nach [2.3] und [2.6] bestmöglich übereinstimmen.

### 2.2.1. Geometrische Komponente des globalen vertikalen Referenzsystems

Die Referenzfläche der geometrischen Komponente soll ein Niveauellipsoid, gleichbedeutend mit einer Äquipotentialfläche des normalen Erdschwerefeldes, sein, das durch ein Rotationsellipsoid erzeugt wird (Heiskanen and Moritz 1967, S. 64):

$$U_0 = U(\mathbf{X}_E) = \text{const.} \quad [2.11]$$

$\mathbf{X}_E$  ist der Ortsvektor der Punkte auf dem Ellipsoid.

Die entsprechenden Koordinaten sind ellipsoidische Höhen bezüglich eines festen Zeitpunkts  $t_0$  und ihre zeitliche Veränderung:

$$h(\mathbf{X}, t_0) \quad ; \quad \frac{dh(\mathbf{X})}{dt} \quad [2.12]$$

Die ellipsoidische Höhe eines Punktes  $P(\mathbf{X})$  wird durch den Abstand entlang der Ellipsoidnormalen zwischen  $P(\mathbf{X})$  und der Oberfläche  $U_0$  definiert (Abb. 2.1).

<sup>1</sup> EGM2008: *Earth Gravitational Model 2008*, <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/>

$U_0$  ist eindeutig durch die Masse  $M$  des Ellipsoids bestimmt sowie durch die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  und die geometrischen Ellipsoidparameter, die dessen Oberfläche festlegen, die große Halbachse  $a$  und die Abplattung  $f$  oder die kleine Halbachse  $b$  (vgl. Heiskanen and Moritz 1967, Eq. 2-61, 2-109 S. 67):

$$U_0 = \frac{GM}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 = \frac{GM}{b} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e'^{2n}}{2n+1} + \frac{1}{3} m\right) \quad [2.13]$$

Hier ist  $GM$  die geozentrische Gravitationskonstante, und:  $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ ,  $m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$ .

Wenn die Parameter  $M$ ,  $\omega$ ,  $a$  und  $f$  mit den tatsächlichen Werten der Erde übereinstimmen, erhält man ein *mittleres Erdellipsoid* (Torge 2001, S. 103, Heiskanen and Moritz 1967, S. 109), das auch aus anderen physikalischen Parametern als Alternative zu  $a$  und  $f$  berechnet werden kann, insbesondere das Potential  $W_0$  des Geoids (sofern  $U_0$  gleich  $W_0$  definiert wird) und die dynamische Abplattung  $J_2$  (Verhältnis der Hauptträgheitsmomente der Erde). Das Niveauellipsoid, das sich am besten der Form, den Dimensionen und dem Schwerfeld der Erde anpasst, kann u.a. mit folgenden Parametern berechnet werden:

$$U = f(a, f, \omega, GM) \quad [2.14a]$$

$$U = f(a, J_2, \omega, GM) \quad [2.14b]$$

$$U = f(U_0 = W_0, J_2, \omega, GM) \quad [2.14c]$$

Die Ellipsoidparameter, die nicht als unabhängig in einer der Gleichungen [2.14] enthalten sind, können leicht aus der Geometrie oder dem Schwerfeld des Ellipsoids berechnet werden (z.B. Torge 2001, S. 102, Heiskanen and Moritz 1967, S. 64, Moritz 2000). Vor Verfügbarkeit der künstlichen Erdsatelliten wurde [2.14a] benutzt, aber an Stelle der Konstanten  $GM$  (die nicht hinreichend genau bekannt war) wurde der Wert der Normalschwere für eine beliebige Breite ( $\gamma_\varphi$ ) eingeführt. Die bekanntesten Ellipsoide dieser Kategorie (siehe z.B. Ledersteger 1969) sind die von Bessel (1841), Clarke (1880), Hayford (1924), auch internationales Ellipsoid genannt, und Krassowsky (1940). Ausgehend von den Messungen zu künstlichen Erdsatelliten (dynamische oder Bahnverfolgungsmethode) konnten genauere Werte für  $GM$  und  $J_2$  geschätzt werden, so dass seit den sechziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts [2.14b] benutzt wurde. Zu diesen Ellipsoiden gehört das *Geodätische Referenzsystem* (GRS) von 1967 und 1980, sowie das *World Geodetic System* (WGS) von 1972 und 1984 (Hofmann-Wellenhof and Moritz 2005, S. 83). Neuere auf [2.14c] beruhende Berechnungen (einschließlich  $W_0$  als Definitionsparameter anstelle von  $a$ ) wurden von Grafarend and Ardalan (1999) und Burša et al. (2002) durchgeführt.

Die Beziehungen [2.14a] und [2.14b] schließen die sogenannte geometrische Bestimmung des Ellipsoids (Hofmann-Wellenhof and Moritz 2005, S. 236) ein, während [2.14c] ausschließlich auf physikalischen Parametern beruht. Unabhängig davon, welcher Satz ausgewählt wird, hängen die Ergebnisse bei der empirischen Schätzung der definierten Parameter von der Qualität und

Quantität der eingeschlossenen Beobachtungen ab, und wenn die Berechnungen konsistent sind, ist zu erwarten, dass das Ergebnis ähnlich oder identisch ist. Grundsätzlich beruht die geometrische Bestimmung der Dimensionen des Ellipsoids auf der Minimierung der Quadrate der Abweichungen zwischen der *wahren* Erdfigur und dem Ellipsoid, d.h. den Geoidundulationen ( $N$ ), den Lotabweichungen ( $\varepsilon, \eta$ ) und den Schwereanomalien ( $\Delta g$ ):

$$\iint_{\sigma} N^2 d\sigma = \min \quad [2.15a]$$

$$\iint_{\sigma} (\varepsilon^2 + \eta^2) d\sigma = \min \quad [2.15b]$$

$$\iint_{\sigma} \Delta g^2 d\sigma = \min \quad [2.15c]$$

Wenn sich der Integrationsbereich  $\sigma$  über die gesamte Erdoberfläche erstreckt, spricht man von einem *mittleren Erdellipsoid* (*mean earth ellipsoid*). Erfasst  $\sigma$  nur begrenzte geographische Flächen, nennt man es *bestanpassendes Ellipsoid* (*best fitting ellipsoid*). Die Bedingungen [2.15] erfordern, dass sich keine Massen außerhalb des Geoids befinden; deshalb müssen Messungen auf den Kontinenten wegen des Effekts der topographischen Massen gravimetrisch reduziert werden. Eine Methode, die Genauigkeit der Bestimmung der terrestrischen Parameter, die später zur Definition des Ellipsoids (insbesondere  $a$  oder  $W_0$ ) dienen sollen, zu verbessern, ist die Verwendung von ausschließlich in ozeanischen Gebieten durchgeführten Messungen (vgl. Abschnitt 4.3). Wenn das Ergebnis dadurch auch ein bestanpassendes Ellipsoid für die Ozeane ist, kann es doch durch Konvention als *mittleres Erdellipsoid* definiert werden (z.B. Rapp 1995b, Moritz 2000), da die Ozeane mehr als 70% der Erde überdecken.

Der IERS<sup>2</sup> empfiehlt derzeit das Ellipsoid GRS80<sup>3</sup> zur Konversion geozentrischer in ellipsoidische Koordinaten (Petit and Luzum 2010). Dasselbe Ellipsoid wird auch zur Analyse und für die Produkte von GOCE (Gruber et al. 2010 S. 41) benutzt. Bei vielen Arbeiten in der physikalischen Geodäsie wird jedoch eine Vielzahl verschiedener Referenzellipsoide verwendet, z.B. basieren die Erdschwerefeldmodelle EGM96<sup>4</sup> (Lemoine et al. 1998) und EGM2008 (Pavlis et al. 2012, 2013) auf den eigens bei diesen Berechnungen eingeführten Werten  $GM=0,3986004415 \cdot 10^{15} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$  und  $a=6378136,3 \text{ m}$ . Die Analyse der Daten der Satellitenaltimetrie und einige Modelle der mittleren Meeresoberfläche (z.B. CLS01<sup>5</sup> (Hernandes and Schaefer 2001), DTU10<sup>6</sup> (Andersen and Knudsen 2008)) beziehen sich auch auf dieses Ellipsoid. Die aus Satelliten-Missionen abgeleiteten Erdschwerefeldmodelle (z.B. EIGEN-GL05C<sup>7</sup> (Förste et al. 2008), ITG-Grace-2010S<sup>8</sup> (Kurtenbach et al. 2009), GOCO01S<sup>9</sup> (Pail et al.

<sup>2</sup> IERS: *International Earth Rotation and Reference Systems' Service*, [www.iers.org](http://www.iers.org)

<sup>3</sup> GRS80: *Geodetic Reference System 1980* (Moritz 2000)

<sup>4</sup> EGM96: *Earth Gravitational Model 1996*, <http://cddis.gsfc.nasa.gov/926/egm96/egm96.html>

<sup>5</sup> CLS01: *CLS (Collecte Localisation Satellites) mean sea surface model*

<sup>6</sup> DTU10: DTU (*Technical University of Denmark*) *mean sea surface model*, [http://www.space.dtu.dk/English/Research/Scientific\\_data\\_and\\_models/Global\\_Mean\\_sea\\_surface.aspx](http://www.space.dtu.dk/English/Research/Scientific_data_and_models/Global_Mean_sea_surface.aspx)

<sup>7</sup> EIGEN: *European Improved Gravity model of the Earth by New techniques*, [http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g007\\_eigen-05c.html](http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g007_eigen-05c.html)

2010)) benutzen allgemein dasselbe  $GM$ , aber unterschiedliche Werte für die große Halbachse  $a$  und Abplattung  $f$  (z. B.  $a = 6378136,46$  m,  $1/f = 298,25765$ ).

Wenn auch die geometrische Transformation von einem Ellipsoid zum anderen kein Problem in der Theorie darstellt, ist es doch nötig, ein konventionelles Ellipsoid zur gemeinsamen Nutzung in allen geodätischen Anwendungen (geometrisch und physikalisch) einzuführen, um die Präzision bei der Kombination physikalischer Höhen aus Nivellements mit ellipsoidischen Höhen aus der Satellitenpositionierung (z.B. GNSS) und (Quasi-) Geoidmodellen hoher Auflösung zu steigern. In der vergangenen Dekade begannen einige Diskussionen über den Ersatz (oder die Aktualisierung) des GRS80-Ellipsoids (z.B. Groten 2002, Hipkin 2002, Grafarend and Ardan 1999), bei denen einige  $W_0$  als definierenden Parameter anstelle der großen Halbachse  $a$  bei der Berechnung des Ellipsoids vorschlugen (z.B. Burša et al. 2002, Yurkina 1996). Dennoch orientierte sich die Schlussfolgerung an der Beibehaltung des GRS80-Ellipsoids als offiziell konventionell.

Unabhängig davon, welches Ellipsoid als Referenzfläche für die geometrische Komponente des vertikalen Referenzsystems gewählt wird, sollte dies *ein mittleres Erdellipsoid* sein, und seine Orientierung und Lagerung bezüglich des Erdkörpers der Definition des IERS folgen, d.h. sein geometrischer Mittelpunkt sollte im Koordinatenursprung  $[x = y = z = 0]$  des ITRS (d.h. im Geozentrum) liegen, seine kleine Halbachse mit der Z-Achse des ITRS zusammenfallen und der Null-Meridian (als Bezugsmeridian) in der X-Z-Ebene des ITRS (Petit and Luzum 2010) liegen. Gleichermaßen sollte das Potentialfeld bezüglich dieses Ellipsoids als Referenz bei der Bestimmung des Störpotentials durch Lösung des geodätischen Randwertproblems verwendet werden. Das Modell GRS80 erfüllt diese Bedingungen hinreichend, und deshalb wird es in dieser Arbeit als Referenzellipsoid benutzt.

Die ellipsoidischen Höhen und ihre zeitlichen Veränderungen (siehe Abschnitt 3.1.1) erhält man direkt aus den geozentrischen Koordinaten  $[\mathbf{X}]$ , die z.B. aus GNSS-Positionierungen abgeleitet werden (z.B. Hofmann-Wellenhopf and Moritz 2005, S. 194, Torge 2001, S. 99). Deshalb sollten die primären Koordinaten  $[\mathbf{X}]$  sich auf den ITRF (Realisierung des ITRS) beziehen, um die Konsistenz mit der oben definierten Referenzfläche zu garantieren.

### 2.2.2. Physikalische Komponente des globalen vertikalen Referenzsystems

Die physikalische Komponente des hier vorgeschlagenen vertikalen Referenzsystems wird ebenfalls durch eine Referenzfläche und darauf bezogene vertikale Koordinaten gebildet. Die primären Koordinaten sind Niveau-Unterschiede, auch geopotentielle Koten genannt ([2.2], [2.3], [2.6], [2.10]), die durch Konvention in metrische Größen, wie orthometrische Höhen  $H^O$  oder Normalhöhen  $H^N$ , transformiert werden. Dies erfordert die Einführung der entsprechenden Referenzfläche, d.h. im ersten Fall des Geoids bzw. des Quasigeoids im zweiten Fall (Abb. 2.1). Wenn die Definition der globalen Referenzfläche das Geoid ist (orthometrische Höhen), muss diese die Hypothesen zur Reduktion der Schweredaten auf diese Fläche enthalten. Geschieht dies

<sup>8</sup> *Institute of Theoretical Geodesy, University of Bonn*, [www.igg.uni-bonn.de/apmg/index.php?id=itg-grace2010](http://www.igg.uni-bonn.de/apmg/index.php?id=itg-grace2010)

<sup>9</sup> [http://portal.tugraz.at/portal/page/portal/TU\\_Graz/Einrichtungen/Institute/Homepages/i5210/research/goco/](http://portal.tugraz.at/portal/page/portal/TU_Graz/Einrichtungen/Institute/Homepages/i5210/research/goco/)

nicht, ist die Definition weder eindeutig noch konsistent: es würden so viele Referenzflächen und Höhensysteme existieren wie die angewendeten Hypothesen zur Berechnung des Geoids und zur Gewinnung der orthometrischen Höhen (siehe Abb. 1.4 und z.B. Leismann et al. 1992, Sánchez 2002, Tenzer et al. 2005, Santos et al. 2006). Um die erforderliche Eindeutigkeit und Konsistenz zu erlangen, müssen alle orthometrischen Höhen und gravimetrischen Geoidmodelle, einschließlich der aus Satellitenmessungen abgeleiteten, die für irgendeinen Teil der Erde berechnet werden, exakt denselben Annahmen bezüglich der Massenverteilung innerhalb der Erde und denselben resultierenden Vertikalgradienten der Schwere folgen. Außerdem wäre es erforderlich, dass immer wenn sich unsere Kenntnis der inneren Struktur der Erde verbessert und sich dadurch die entsprechenden Hypothesen verfeinern, die Definition des Vertikalsystems geändert und konsequenterweise seine Realisierung aktualisiert werden.

Wenn die Definition der globalen Referenzfläche sich auf das Quasigeoid bezieht (Normalhöhen), ist diese auf der ganzen Erde eindeutig und konsistent, weil keine Hypothesen zur Bestimmung benötigt werden. Da das Quasigeoid jedoch auf den Kontinenten nicht mit einer Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes zusammenfällt, hat es keine direkte und klare physikalische Bedeutung (Heiskanen and Moritz 1967, S. 109).

Um eine konsistente, von Mehrdeutigkeiten freie und aus Sicht der Theorie korrekte Definition zu formulieren, soll sich die physikalische Komponente des vorgeschlagenen vertikalen Referenzsystems auf geopotentielle Größen stützen, d.h. das Referenzniveau soll durch einen festen Potentialwert gegeben sein,

$$W(\mathbf{X}) = W_0 = \text{const.} \quad [2.16]$$

und die Koordinaten sollen geopotentielle Koten  $C$  bezüglich des genannten  $W_0$  sein. Ebenso wie in der geometrischen Komponente sollen sie sich auch auf einen festen Zeitpunkt  $t_0$  beziehen und ihren zeitliche Variationen berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 4.1.3):

$$C(\mathbf{X}, t_0) ; \quad \frac{dC(\mathbf{X})}{dt} \quad [2.17]$$

Die Transformation der geopotentiellen Koten in physikalische Höhen (orthometrische oder normale) sowie die geometrische Darstellung der Äquipotentialfläche mit dem Wert  $W_0$  [2.16] (Berechnung des Geoids) werden als eigenständige Aspekte der Realisierung des Referenzsystems und nicht der Definition gesehen. Auf diese Weise beeinträchtigen die Inkonsistenzen, die die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Vertikalkoordinaten beeinflussen können (wie z.B. die Benutzung von Hypothesen bei der Berechnung orthometrischer Höhen und des Geoids) nur die Realisierung des Systems und nicht die Definition.

### 2.3. Referenzniveau für die physikalische Komponente

Das Einführen einer Konstanten  $W_0$  als Referenzwert dient nur der Festlegung, welcher der unendlich vielen Niveaulächen des Erdschwerefeldes durch Vereinbarung (konventionell) die

Höhe null zugewiesen wird. Im Allgemeinen stützt sich die Auswahl der entsprechenden Fläche auf die von C. F. Gauß gegebene Definition der *mathematischen Oberfläche der Erde*:

«*Unter der mathematischen Oberfläche der Erde versteht man diejenige, welche der Oberfläche der im Gleichgewicht befindlichen Meere so nahe als möglich kommt*» (Gauß 1876, S. 32).

Explizit schreibt Gauß:

«*...Was wir im geometrischen Sinn Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet, und von der die Oberfläche des Weltmeeres einen Theil ausmacht...*» (Gauß 1828, S. 49).

Die Interpretation dieser Definition, und damit der von  $W_0$ , hat sich mit den verfügbaren Beobachtungs- und Auswertemethoden zur Bestimmung der Meeresoberfläche und des Erdschwerefeldes im Laufe der Zeit weiterentwickelt (vgl. Mather 1978, Heck and Rummel 1990, Heck 2004). Die traditionelle Approximation entspricht der an einem ausgewählten Meerespegel (oder Datumspunkt)  $i$  beobachteten mittleren Meeresoberfläche:

$$W_0 = W_0^{(i)} \quad [2.18]$$

Wegen der Unmöglichkeit den Wert  $W_0^{(i)}$  genau zu ermitteln und dem Konzept folgend, dass der Referenzwert willkürlich gewählt werden kann, wird im Allgemeinen ein entsprechender fester Wert eingeführt. Zum Beispiel wurde im Europäischen Vertikalen Referenzsystem (EVRS) (Ihde and Augath 2000) der Wert  $U_0$  der Äquipotentialfläche des Ellipsoids GRS80, die durch den Pegel von Amsterdam verläuft, als Referenzwert zugewiesen. Andere Autoren schlagen vor, den Wert  $W_0^{(i)}$  mit den durch GPS bestimmten geozentrischen Koordinaten des Datumspunktes aus globalen Schwerefeldmodellen zu berechnen (z.B. Burša et al. 2001, Ardalan and Safari 2005). Wenn diese Optionen auch für lokale vertikale Systeme gültig sein mögen, so ergeben sich bei deren Einführung im globalen Rahmen doch erhebliche Nachteile:

- a) Die Meeresoberflächentopographie im Referenzpegel wird vollständig vernachlässigt, so dass  $W_0^{(i)}$  sich nicht auf ein globales Geoid bezieht.
- b) Die Realisierung dieser Niveaufäche im globalen Rahmen hängt von der Genauigkeit ab, mit der die Verbindung zum Referenzpegel durchgeführt werden kann, sei es durch ozeanisches Nivellement zwischen verschiedenen Kontinenten (Rummel and Ilk 1995, Khafid 1998) oder durch terrestrisches Nivellement zwischen benachbarten Regionen.
- c) Die Bedingung  $V_\infty = 0$  ist nicht gewährleistet.

Die Verbindung vertikaler Datums mittels eines Geoids, das aus einem globalen Schwerefeldmodell abgeleitet wird, wie es Ardalan and Safari (2005) oder Burša et al. (2001) vorschlagen, ist von der Genauigkeit dieser Modelle abhängig, die, wie schon im Abschnitt 2.3

erwähnt wurde, in Regionen mit hoher Dichte terrestrischer Schwereinformation im Bereich von 10 cm liegt, während in weniger mit Schweredaten überdeckten Gebieten Unsicherheiten von mehr als 50 cm erreicht werden (Pavlis et al. 2012, 2013).

Eine zweite Möglichkeit der Realisierung des  $W_0$  besteht darin, diesen Wert dem Normalpotential eines globalen Niveauellipsoids gleichzusetzen:

$$W_0 = U_0 \quad [2.19]$$

Wenn jedoch  $U_0$  fixiert wird, ist die Bedingung  $V_\infty = 0$  ggf. nicht erfüllt. Dieser Ansatz war allerdings insbesondere nützlich, als eine Darstellung des globalen Erdschwerfeldes (d.h. des Geopotentials) noch nicht möglich war, und dieses durch das Schwerfeld (Potential) eines Referenzellipsoids ersetzt wurde ([2.14a], [2.14b]). Die heute verfügbaren (gravimetrischen und geometrischen) Messungen, besonders die Satellitenmethoden, bieten eine hohe Auflösung und Genauigkeit in Raum und Zeit und erlauben eine Verfeinerung der Schätzung von  $W_0$  (z.B. Groten 2004, Burša et al. 2007a, Sánchez 2009). Dies macht die Einführung eines  $U_0$  als Referenzwert für  $W_0$  überflüssig. Es kann im Gegenteil die empirische Bestimmung des  $W_0$  aus *realen* Messungen des Schwerfeldes und der Geometrie der Erde dazu benutzt werden, neue Referenzellipsoide zu berechnen, die ein *wahres*  $W_0$  als Definitionsparameter enthalten [2.14c].

Eine weitere Alternative der Realisierung des  $W_0$  stützt sich auf die Bestimmung der Meeresflächentopographie (Differenz zwischen Geoid und Meeresoberfläche). In diesem Fall wird angenommen, dass  $W_0$  das Potential derjenigen Niveauläche ist, relativ zu der die Quadratsumme der Meeresflächentopographie in jedem vertikalen Datum zum Minimum wird, d.h. (vgl. Gleichungen 2.4 und 2.5 in Lelgemann 1977):

$$\sum_{i=1}^n [W_0 - (W_0^{(i)} + \delta W^{(i)})]^2 = \min \quad ; \quad W_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_0^{(i)} + \delta W^{(i)}) \quad [2.20]$$

wobei  $\delta W^{(i)}$  die Potentialdifferenzen sind, die durch die Meeresoberflächentopographie in jedem Pegel  $i$  erzeugt werden. Diese Realisierung erfordert Beobachtungen der Satellitenaltimetrie sowie des ozeanischen und terrestrischen Schwerfeldes mit dem Ziel, die Meeresflächentopographie und das Geoid in unmittelbarer Nachbarschaft der Pegel zu bestimmen. Da die Berechnung der Meeresflächentopographie die Kenntnis des Geoids erfordert, ist ein iteratives Vorgehen erforderlich. Die wesentlichen Nachteile dieses Verfahrens bei der globalen Anwendung sind vor allem:

- a) Die gravimetrischen Beobachtungen (marine und terrestrische) beziehen sich auf unterschiedliche Referenzniveaus, so dass  $W_0$  von den einbezogenen Messungen abhängt.
- b) Die Genauigkeit der Satellitenaltimetrie im Küstenbereich ist schlecht, so dass die Minimumsbedingung nicht hinreichend genau erfüllt werden kann.
- c) Das Weglassen oder Hinzufügen eines Pegels führt zu einer neuen Definition des Referenzniveaus.

Mather (1978) modifiziert die Definition von Lelgemann in der Weise, dass  $W_0$  diejenige Niveaulfläche ist, relativ zu der das Mittel der Meeresflächentopographie an den Pegeln zu null wird. In der gleichen Publikation führt Mather (1978) eine *ozeanographische* Interpretation der Gaußschen Definition ein, indem er vorschlägt, dass die Bedingung [2.20] über alle marinen Gebiete der Erde ausgewertet wird. Auf diese Weise gehört  $W_0$  zu derjenigen Niveaulfläche, bezüglich derer das Mittel der Meeresoberflächentopographie über alle Ozeanflächen zu null wird (siehe Abschnitt 4.3). In diesem Fall wird die Meeresoberflächentopographie ( $\Xi$ ) mit der Normalhöhe aller Punkte  $j$ , die die globale Meeresoberfläche  $S$  beschreiben, gleichgesetzt:

$$\int_S \Xi^2 ds = \min; \quad \Xi = \frac{W_0 - W_j}{\gamma_j} \quad [2.21]$$

Die Minimumsbedingung [2.21] kann auch wie folgt geschrieben werden (vgl. Sacerdote and Sansò 2001):

$$\frac{\partial}{\partial W_0} \int_S \Xi^2 ds = \frac{\partial}{\partial W_0} \int_S \left[ \frac{W_0 - W_j}{\gamma_j} \right]^2 ds = 0; \quad W_0 = \frac{\int_S \frac{W_j}{\gamma_j^2} ds}{\int_S \frac{1}{\gamma_j^2} ds} \quad [2.22]$$

In den numerischen Auswertungen, die z.B. von Burša et al. (2002) oder Sánchez (2007) durchgeführt wurden, erhält man die Koordinaten  $[x, y, z]$  oder  $[\varphi, \lambda, h]$  der Punkte  $j$ , die die Meeresoberfläche repräsentieren, aus der Satellitenaltimetrie (Meeresoberflächenmodell), und die zugehörigen Potentialwerte werden aus einem globalen Schwerefeldmodell unter Benutzung der sphärischen Approximation nach [2.8] und Hinzufügen des Zentrifugalpotentials berechnet [2.9]. Dayub et al. (2012) schlagen vor, dass das aus der Satellitenaltimetrie abgeleitete Meeresoberflächenmodell durch ein Modell der mittleren dynamischen Ozeantopographie (MDT: *mean dynamic topography*, entsprechend der Meeresflächentopographie) korrigiert wird um so die Koordinaten  $[\varphi, \lambda, h - MDT]$  der Punkte  $j$  direkt auf dem Geoid zu erhalten. Die entsprechende MDT wird aus Modellen der Ozeanzirkulation (in diesem Fall ECCO-2<sup>10</sup>, Menemenlis et al. 2008) abgeleitet, so dass es unabhängig von vorherigen Geoidmodellen wird (in der *geodätischen* Berechnung der MDT wird ein Geoidmodell von der aus der Satellitenaltimetrie erhaltenen Meeresoberfläche subtrahiert).

Die rein numerische Auswertung von [2.21] und [2.22] (einschließlich [2.9]) unter Benutzung von  $h$  oder  $h-MDT$  hat einen bedeutenden Nachteil (Sacerdote and Sansò 2001): Die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{nm} = \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda),$$

die in [2.8] enthalten sind, bilden ein Orthonormalsystem über die gesamte Kugeloberfläche, und da es sich um analytische Funktionen über dieser Fläche handelt, kann jegliche lineare endliche

<sup>10</sup> ECCO-2: *Estimating the Circulation and Climate of the Ocean, Phase II: High-Resolution Global-Ocean and Sea-Ice Data Synthesis*, <http://ecco2.jpl.nasa.gov/>

Kombination von ihnen über eine Fläche, die kleiner als die Kugel ist (z.B. nur die Meeresflächen), nicht zu null werden, es sei denn, dass sie auch über jeden anderen Teil der Oberfläche zu null wird. In diesem Sinne entspricht das nach [2.22] in Kombination mit [2.8] (und [2.9]) berechnete  $W_0$  nicht dem Koeffizienten nullten Grades der Kugelfunktionsentwicklung des Schwerepotentials. Vielmehr ist es das Mittel der Potentialwerte der Punkte, die die Meeresoberfläche beschreiben, und nicht die Äquipotentialfläche, die das geometrische Mittel der Meeresflächentopographie darstellen würde.

### 2.3.1. Bestimmung von $W_0$ im Rahmen des Randwertproblems

Die empirische Schätzung von  $W_0$  ist nach Rummel and Heck (2000) irrelevant, weil

- a) die primären Messungen bei der Höhenbestimmung Potentialdifferenzen sind und der Referenzwert beliebig gewählt werden kann, und
- b) die direkte Berechnung der absoluten Potentialwerte aus den verfügbaren Beobachtungen nicht möglich ist.

Gleichwohl können, ebenso wie bei den geometrischen Referenzsystemen (bei denen nicht direkt Koordinaten sondern Zeitabschnitte, Strecken und Richtungen gemessen werden) durch das Einführen von entsprechenden Restriktionen oder Bedingungen recht präzise Potentialwerte abgeleitet werden. Die grundlegende Bedingung ist dabei, dass das Gravitationspotential  $V$  im Unendlichen gegen null strebt (oder null ist):

$$V_{\infty} = 0 \quad [2.23]$$

Durch diese Bedingung muss man nicht einen absoluten Wert des Potentials schätzen sondern die Differenz zwischen dem Gravitationspotential im Unendlichen und der Niveaufläche, die durch den Berechnungspunkt verläuft (Rummel and Heck 2000). Eine hinreichende Erfüllung dieser Bedingung liefert ausschließlich die Lösung des geodätischen Randwertproblems (GRWP).

Das primäre Ziel des GRWP ist die Bestimmung des (äußeren) Potentialfeldes der Erde aus gegebenen oder bekannten geodätischen Beobachtungen auf einer geschlossenen, geometrisch stetigen Fläche  $\Sigma$ , die sämtliche vorhandenen Massen (konzentriert in seinem Inneren) vom umgebenden Raum, der als vollständig frei von Massen angenommen wird, trennt. Die Formulierung des GRWP hängt von den verfügbaren Beobachtungen ab und davon, ob die Fläche  $\Sigma$  bekannt ist oder nicht. Wenn  $\Sigma$  bekannt ist, wird das GRWP *fix* genannt, falls nicht, spricht man vom *freien* GRWP. Im letzteren Fall unterscheidet man zwei weitere Formulierungen: einerseits das *skalare* GRWP, bei dem der Ortsvektor bezüglich seiner vertikalen Komponente unbekannt ist, zum anderen das *vektorielle* GRWP, bei dem der 3D-Ortsvektor der Randfläche vollständig unbekannt ist (vgl. Heck and Seitz 1993, Seitz 1997). Die üblicherweise benutzten Beobachtungen in der Lösung des GRWP sind Schweremessungen (gegeben als Schwereanomalien oder Schwerestörungen), Potentialdifferenzen (geopotentielle Koten), die aus Nivellements auf den Kontinenten sowie ozeanographischen Messungen in Kombination mit Strömungsmodellen in marinen Gebieten abgeleitet werden, sowie in geringerem Maße

Lotabweichungen. Aber auch die aktuellen geodätischen satellitengestützten Verfahren bieten die Verfügbarkeit zusätzlicher Beobachtungen, die zu gemischten oder überbestimmten Formulierungen des GRWP führen. Wenn man z. B. zu den Beobachtungen die ellipsoidische Höhe der Meeresoberfläche und/oder Schwereanomalien, die aus der Satellitenaltimetrie abgeleitet werden, hinzufügt, wird aus dem skalaren, freien GRWP das *gemischte* oder *Altimetrie-Gravimetrie-GRWP* (z.B. Sacerdote and Sansò 1987, Svensson 1988, Lehmann 2000).

Im vertikalen Problem ist bis heute das skalare, freie GRWP in sphärischer und linearer Näherung am gebräuchlichsten (z.B. Sacerdote and Sansò 1986, Heck 1989). Die üblichen Unbekannten (Fläche  $\Sigma$  und Schwerepotential  $W$ ) werden um den sogenannten *vertikalen Datumparameter*  $\Delta W_0$  ergänzt, der die Differenz zwischen dem terrestrischen Potential  $W_0$  und dem bei der Linearisierung der Beobachtungsgleichungen benutzten Normalpotential  $W_0$  darstellt (vgl.  $T_0$  in Lehmann 2000,  $\delta W$  in Sacerdote and Sansò 2004,  $\Delta \hat{w}$  in Heck and Rummel 1990):

$$\Delta W_0 = W_0 - U_0 \quad [2.24]$$

$W_0$  ist unbekannt, ist aber mit enthalten in den Beobachtungen, die die Randbedingungen bilden, insbesondere in den geopotentiellen Knoten und den physikalischen Höhen, die für die Berechnung der Schwereanomalien benutzt werden. Da diese Beobachtungen sich nicht auf ein einziges vereinheitlichtes Datum beziehen, müssen so viele  $\Delta W_0$  eingeführt werden, wie Datums  $i$  existieren ( $W_0^i$ ) (Abb. 2.2):

$$\Delta W_0^i = W_0^i - U_0 \quad [2.25]$$

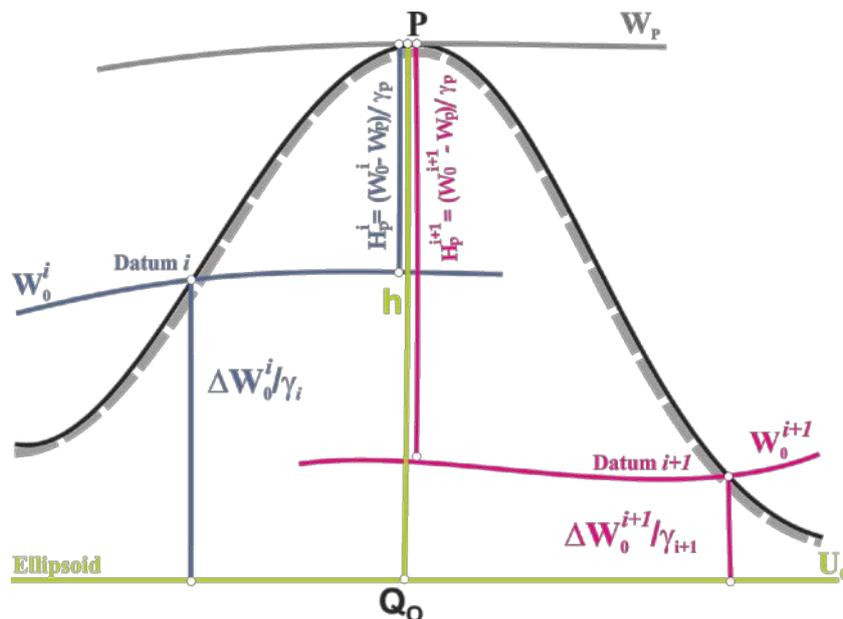


Abb. 2.2: Vertikale Datumparameter bei individuellen Höhensystemen.

Dies entspricht der Aussage, dass die Randfläche  $\Sigma$  in  $i$  Regionen geteilt wird, die nicht untereinander verbunden sind (Sacerdote and Sansò 2004). Falls eine Verbindung besteht (z.B.

durch terrestrisches oder geostrophisches Nivellement), ist  $\Delta W_0^i$  eine Konstante, d.h.  $\Delta W_0^i = \Delta W_0$ , und es entstünde eine neue Unbekannte  $\delta W_0^i$  (Abb. 2.3), die den Niveauunterschied zwischen den individuellen Datums ( $W_0^i$ ) und dem willkürlich als Referenz ausgewählten ( $W_0$ ) darstellt (vgl.  $C_{Q_{i_0}}$  in Rummel and Teunissen (1988) und nachfolgende Publikationen, z.B. Heck and Rummel (1990), Xu and Rummel (1991), van Onselen (1997)):

$$\delta W_0^i = W_0 - W_0^i \quad [2.26]$$

Da diese Methode die Bestimmung der Niveauunterschiede ( $\delta W_0^i$ ) zwischen verschiedenen Höhensystemen erlaubt, wird sie in der vorliegenden Arbeit für die Verbindung (Vereinheitlichung) der lokalen vertikalen Systeme  $W_0^i$  mit dem globalen  $W_0$  benutzt, die im Kapitel 5 diskutiert wird.

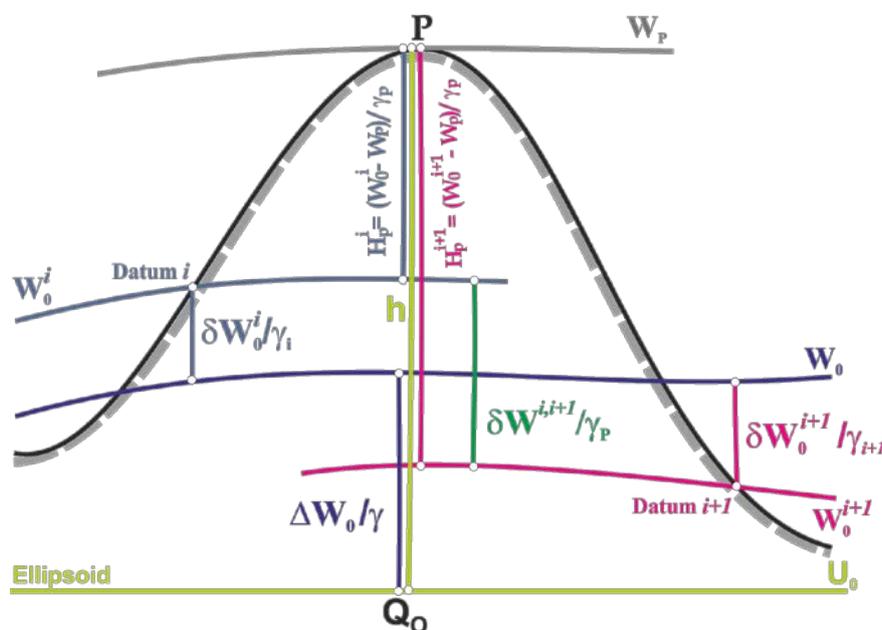


Abb. 2.3: Vertikale Datumparameter bei miteinander verbundenen Höhensystemen.

Es soll darauf hingewiesen werden, dass ähnliche Ansätze bestehen, um bei der Lösung des GRWP die Auswirkung der Koordinaten der Beobachtungen, die sich auf verschiedene horizontale lokale Datums beziehen, zu schätzen (Sansò and Usai 1995, Sansò and Venuti 2002). Diese werden jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt, da davon ausgegangen wird, dass einheitlich ITRS/ITRF-Koordinaten zur Georeferenzierung der Randwerte benutzt wird.

Die Schätzung von  $W_0$  ist hier auf das fixe GRWP nach Dirichelt bezogen. Die grundlegende Idee basiert auf den folgenden Argumenten (siehe Kapitel 4):

- a)  $W_0$  ist das Potential des Geoids.

- b) Nach Gauß (1828) ist das Geoid die Fläche, die den mittleren Meeresspiegel in völligem Gleichgewicht am besten approximiert.
- c) Die Meeresoberfläche kann mit Methoden der Satellitenaltimetrie vermessen werden, und die zeitlichen und räumlichen Störungen, die sie beeinflussen, können derart modelliert werden, dass eine genaue Darstellung der sogenannten quasistationären Meeresoberfläche erhalten wird.
- d) Wenn diese quasistationäre Fläche als identisch mit dem Geoid angenommen wird (wobei wir die Meeresflächentopographie zunächst außer acht lassen), kann die Geometrie des Geoids als bekannt angesehen werden.
- e) Diese Fläche kann als Randfläche in die Lösung des fixen GRWP eingeführt werden.

Sánchez (2009) präsentiert einige numerische Auswertungen mit Benutzung des Modells CLS01 (Hernandes and Schaeffer 2001) als geometrische Darstellung der Randfläche  $\Sigma$  sowie der globalen Schwerefeldmodelle (GGM) EGM96 (Lemoine et al. 1998) und EIGEN-GLS04S (Förste et al. 2006) für die notwendigen Randbedingungen, d.h. Schwerestörungen. Das Potential wird in jedem Punkt des CLS01 berechnet, und das resultierende  $W_0$  als Mittel nach [2.22] geschätzt. Čunderlik and Mikula (2009) lösen das GRWP unter Einschluss sowohl mariner als auch kontinentaler Gebiete. Bei den letzteren wird die Geometrie der Randfläche durch die ellipsoidischen Höhen, abgeleitet aus einem digitalen topographischen Modell (SRTM<sup>11</sup>\_PLUS V1.0, Becker and Sandwell 2003) in Kombination mit Geoidundulationen des Modells EGM96 (Lemoine et al. 1998) bezüglich des Ellipsoids GRS80 (Moritz 2000), dargestellt. Die Randbedingung in marinen Gebieten schließt als Unbekannte die in [2.25] definierte Konstante  $\Delta W$  ein, die *Störung der Randbedingung von Dirichlet* genannt wird (vgl.  $\delta W$  in Gleichung [8], S. 231, Čunderlik and Mikula 2009). Die Schätzung des  $\Delta W$  wird empirisch durchgeführt, wobei die Werte variiert und die Berechnungen wiederholt werden, bis eine Konvergenz zwischen den aus ihrer Methode abgeleiteten Beobachtungen und den Originalwerten des GGM als Ausgangsdaten erreicht ist. Die Wahl des endgültigen  $\Delta W$  stützt sich auf die minimalen Residuen der Schwerestörungen über den ozeanischen Gebieten, d.h. obwohl die numerische Auswertung des GRWP die gesamte Erdoberfläche einschließt, werden bei der Schätzung  $W_0 = U_0 + \Delta W_0$  nur marine Gebiete berücksichtigt.

### 2.3.2. Aktuelle Werte von $W_0$

Wie schon erwähnt, ist der Wert  $W_0$  für die Gewinnung vertikaler, auf das Erdschwerefeld bezogener Koordinaten nicht unbedingt erforderlich (vgl. Heck and Rummel 1990, Rummel and Heck 2000, Heck 2004), und jeder beliebige Wert kann angenommen werden. Dennoch eröffnen die modernen, auf geodätische Satellitenverfahren beruhenden Methoden neue Perspektiven, die früher aus praktischen Gesichtspunkten nicht möglich waren. Zum Beispiel, irgendwann in der Zukunft, wenn die erforderte Genauigkeit erreicht ist, wird die Bestimmung von geopotentiellen Knoten aus der Kombination von globalen Erdschwerefeldmodellen mit aus GNSS-Positionierung

<sup>11</sup> SRTM: *Shuttle Radar Topography Mission*, <http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/>

abgeleiteten geozentrischen Koordinaten möglich (direkte Auswertung der Formel [2.10]). Eine heutige Alternative ist die Lösung des fixen GRWP, das ebenfalls auf GNSS-Koordinaten und gravimetrischer Information hoher Auflösung, d.h. globalen Modellen mit Verfeinerung durch terrestrische (kontinentale oder marine) Schweredaten, basiert (Heck 2011). Damit globale Kompatibilität gewährleistet wird, ist es erforderlich, dass die Referenz  $W_0$  an jeder Stelle der Erde identisch ist, so dass sich die grundlegende Aufgabe auf die Realisierung eines verlässlichen  $W_0$  konzentriert. Mit anderen Worten, der Wert  $W_0$  *an sich* ist nicht hinreichend, um die (Position und Geometrie der) Äquipotentialfläche zu kennen, die er definiert. Er dient nur zur Identifizierung der speziellen Äquipotentialfläche, die als Referenzniveau ( $H = 0$ ) global gewählt wird. Damit diese Fläche an jedem Ort der Erde zuverlässig identifiziert werden kann (mit einer Unsicherheit von wenigen Zentimetern, evtl. Millimetern) ist es nötig, dass der Wert  $W_0$  aus denselben geodätischen Beobachtungen geschätzt wird, die zur Festlegung der Fläche ( $H = 0$ ) dienen.

Tab. 2.2 fasst die verschiedenen globalen Werte  $W_0$ , die nach der Berechnung des GRS80-Ellipsoids publiziert worden sind, zusammen (lokale Schätzungen des  $W_0$  sind nicht berücksichtigt). Die Unterschiede beruhen im Allgemeinen auf der Methodik und den verwendeten Modellen der Schwere und der Meeresoberfläche. Zum Beispiel basieren die Schätzungen von Burša et al. (z.B. 1998a, 2001, 2002, 2007a) auf Modellen der Meeresoberfläche, die von ihnen selbst aus z.B. den Missionen Topex/Poseidon (T/P)<sup>12</sup> und Jason 1 (J1)<sup>13</sup> abgeleitet wurden. Čunderlik and Mikula (2009), Sánchez (2007, 2009) und Dayoub et al. (2012) benutzen früher von anderen Forschern berechnete Modelle, z.B. GSFC00.1<sup>14</sup> (Koblinsky et al. 1999), CLS01 (Hernandes and Schaefer 2001) oder KMS04<sup>15</sup> (Andersen et al. 2004). Weitere empirische Auswertungen (z.B. Burša et al. 2007a, Sánchez 2007, Dayoub et al. 2012) konzentrieren sich auf:

- a) Verwendung von jährlichen Meeresflächenmodellen, um die zeitliche Variation des  $W_0$  zu erfassen,
- b) Abhängigkeit des  $W_0$  von der geographischen Überdeckung des Modells der Meeresoberfläche und seiner räumlichen Auflösung,
- c) Einfluss der spektralen Auflösung ( $n, m$ ) der globalen Schwerefeldmodelle bei der Schätzung von  $W_0$ .

Dies sind nur einige Beispiele der großen Vielfalt von vorhandenen Möglichkeiten die Berechnung von  $W_0$  voranzutreiben. Um diese Vielzahl zu reduzieren ist es nötig, die Konventionen zu definieren, nach denen die Bestimmung durchgeführt werden soll. Andernfalls gibt es so viele Werte  $W_0$  wie Berechnungsstrategien. Dieses Thema wird detailliert im Kapitel 4 behandelt.

---

<sup>12</sup> <http://sealevel.jpl.nasa.gov/missions/>

<sup>13</sup> Ibid.

<sup>14</sup> GSFC00.1: GSFC (Goddard Space Flight Center) mean sea surface model

<sup>15</sup> KMS04: KMS (Danish National Space Center) mean sea surface model

**Tab. 2.2.** Aktuelle Werte von  $W_0$  ( $62\,636\,000\text{ [m}^2/\text{s}^2]$  ist zu addieren).

| Annahme   | $W_0$ -Wert [ $\text{m}^2/\text{s}^2$ ]   | Kommentare   | Literatur                |
|---|---|--|--------------------------|
| $W_0 = U_0$   | 860,850   | GRS80  | Moritz (2000)            |
|   | 858,546   | bestangepasstes Ellipsoid für T/P-Meeresoberfläche   | Rapp et al. (1991)       |
|   | 856,88  | bestangepasstes Ellipsoid für T/P-Meeresoberfläche   | Rapp (1995b)             |
|   | 854,18  | bestangepasstes Ellipsoid für DNSC08 <sup>16</sup> -Meeresoberfläche   | Dayoub et al. (2012)     |
| $\int_s \Xi^2 ds = \min;$<br>$\Xi = \frac{W_0 - W_j}{\gamma_j}$ | $856,5 \pm 3$ <sup>17</sup>   | Meeresoberfläche: GEOSAT <sup>18</sup> , Schwerefeld: GEM-T2 <sup>19</sup>   | Burša et al. (1992)      |
|   | $857,5 \pm 1$ <sup>20</sup>   | Meeresoberfläche: GEOSAT, Schwerefeld: JGM-2 <sup>21</sup>   | Nesvorný and Šíma (1994) |
|   | $855,8 \pm 0,50$  | Meeresoberfläche: ERS1 <sup>22</sup> + T/P (10.1992 - 12.1993) minus MDT: POCM 4B <sup>23</sup> , Schwerefeld: EGM96 | Burša et al. (1997)      |
|   | $855,72 \pm 0,50$   | Meeresoberfläche: T/P (1994 - 1996) minus MDT: POCM 4B, Schwerefeld: EGM96   | Burša et al. (1998a)     |
|   | $855,611 \pm 0,008$ <sup>24</sup>   | Meeresoberfläche: T/P (1993-1996), Schwerefeld: EGM96  | Burša et al. (1998b)     |
|   | $856,161 \pm 0,002$   | Meeresoberfläche: T/P (1993-2001), Schwerefeld: EGM96  | Burša et al. (2002)      |
|   | $853,4 \pm ?$   | Meeresoberfläche: T/P (2000), Schwerefeld: EIGEN-GC03C <sup>25</sup><br>Referenzepoche 2000.0                        | Sánchez (2007)           |
|   | $853,35 \pm ?$  | Meeresoberfläche: CLS01 ( $\varphi = 60^\circ\text{N/S}$ ), Schwerefeld: EIGEN-GC03C<br>Referenzepoche 2000.0        |                          |
|   | $854,61 \pm ?$  | Meeresoberfläche: CLS01 ( $\varphi = 80^\circ\text{N/S}$ ), Schwerefeld: EIGEN-GC03C<br>Referenzepoche 2000.0        |                          |
|   | $853,24 \pm ?$  | Meeresoberfläche: KMS04 ( $\varphi = 60^\circ\text{N/S}$ ), Schwerefeld: EIGEN-GC03C<br>Referenzepoche 2000.0        |                          |
| $854,46 \pm ?$  | Meeresoberfläche: KMS04 ( $\varphi = 80^\circ\text{N/S}$ ), Schwerefeld: EIGEN-GC03C<br>Referenzepoche 2000.0 |  |                          |

<sup>16</sup> DNSC08: *Danish National Space Center 08 sea surface model*,

[www.space.dtu.dk/upload/institutter/space/data\\_og\\_modeller/global\\_mean\\_sea\\_surface\\_model/dnsc08mss.pdf](http://www.space.dtu.dk/upload/institutter/space/data_og_modeller/global_mean_sea_surface_model/dnsc08mss.pdf)

<sup>17</sup>  $W_0$  wird durch den sog. *geopotential scale factor*  $R_0 = GM/W_0$  berechnet. Die Bestimmung von  $R_0$  folgt ähnlichen Bedingungen wie [2.21] und [2.22].

<sup>18</sup> GEOSAT: *U.S. Navy Geodetic Satellite*, <http://science.nasa.gov/missions/geosat/>

<sup>19</sup> GEM-T2 *gravitational model* (Marsh et al. 1989).

<sup>20</sup> Siehe Fußnote 16.

<sup>21</sup> JGM-2: *Joint Gravity Model 2* (Nerem et al. 1994)

<sup>22</sup> ERS: *European Remote Sensing satellite*, [http://www.esa.int/esaEO/SEMGWH2VQUUD\\_index\\_0\\_m.html](http://www.esa.int/esaEO/SEMGWH2VQUUD_index_0_m.html)

<sup>23</sup> [http://www.oc.nps.edu/~rtt/model\\_info/pocm\\_4b\\_c\\_info.html](http://www.oc.nps.edu/~rtt/model_info/pocm_4b_c_info.html)

<sup>24</sup> Dieser Werte wurde zu  $62\,636\,856,0 \pm 0,5$  gerundet und seit 2003 in den *IERS-Conventions* benutzt (McCarthy and Petit 2004).

<sup>25</sup> Förste et al. 2005.

|                          |                  |  |                                |
|--------------------------|------------------|--|--------------------------------|
|                          | 855, 619 ± 0,004 | Meeresoberfläche: T/P-J1 (1993 - 2003),<br>Schwerefeld: EGM96  | Burša et al. (2007a)           |
|                          | 855, 832 ± 0,005 | Meeresoberfläche: T/P-J1 (1993 - 2003),<br>Schwerefeld: GGM02C   |                                |
|                          | 855, 883 ± 0,005 | Meeresoberfläche: T/P-J1 (1993 - 2003),<br>Schwerefeld: EIGEN-CG01   |                                |
|                          | 854,6 ± 0,004    | Meeresoberfläche: T/P (1993 - 2003),<br>Schwerefeld: EGM96   | Burša et al. (2007b)           |
|                          | 853,19 ± ?       | Meeresoberfläche: CLS01 ( $\varphi = 60^\circ\text{N/S}$ ),<br>Schwerefeld: EGM2008, Referenzepoche<br>2005.0  | Dayoub et al. (2012)           |
|                          | 854,22 ± ?       | Meeresoberfläche: CLS01 ( $\varphi = 80^\circ\text{N/S}$ ),<br>Schwerefeld: EGM2008, Referenzepoche<br>2005.0  |                                |
|                          | 853,43 ± ?       | Meeresoberfläche: DNSC08 ( $\varphi = 60^\circ\text{N/S}$ ),<br>Schwerefeld: EGM2008, Referenzepoche<br>2005.0 |                                |
|                          | 854,43 ± ?       | Meeresoberfläche: DNSC08 ( $\varphi = 80^\circ\text{N/S}$ ),<br>Schwerefeld: EGM2008, Referenzepoche<br>2005.0 |                                |
|                          | 853,31 ± ?       | Meeresoberfläche: T/P-J1 (1992 - 2009),<br>Schwerefeld: EGM2008, Referenzepoche<br>2005.0                      |                                |
|                          | 854,2 ± 0,2      | Meeresoberfläche: CLS01/DNSC08 minus<br>MDT: ECCO2, Schwerefeld: EGM2008                                       |                                |
|                          | 854,38 ± 0,03    | Meeresoberfläche: CLS01 ( $\varphi = 80^\circ\text{N/S}$ ),<br>Schwerefeld: + EIGEN-GL04S <sup>26</sup>        |                                |
|                          | 853,11 ± 0,03    | Meeresoberfläche: CLS01 ( $\varphi = 60^\circ\text{N/S}$ ),<br>Schwerefeld: + EIGEN-GL04S                      |                                |
| $W_0 = U_0 + \Delta W_0$ | 857,95 ± ?       | Meeresoberfläche: KMS04, Schwerefeld:<br>EGM96   | Čunderlík and<br>Mikula (2009) |

## 2.4. Schlussfolgerungen

Als Folgerung aus den oben dargestellten Argumenten wird die Definition eines globalen vertikalen Referenzsystems mit folgender Charakteristik vorgeschlagen:

- Es soll durch zwei Komponenten gebildet werden, eine geometrische und eine physikalische.
- Die geometrische Komponente besteht aus ellipsoidischen Höhen und deren zeitlicher Änderungen als Koordinaten und ein mittleres Erdellipsoid (*mean Earth ellipsoid*) als Referenzfläche.
- Die Lage und Orientierung des Ellipsoids soll durch den ITRS gegeben sein: der geometrische Mittelpunkt des Ellipsoids soll mit dem Koordinatenursprung des ITRS übereinstimmen, die kleine Halbachse soll mit der Z-Achse des ITRS zusammenfallen,

<sup>26</sup> <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>

der Referenzmeridian soll in der XZ-Ebene des ITRS liegen, das Ellipsoid muss mit der gleichen Rotationsgeschwindigkeit des ITRS (bzw. der Erde) rotieren.

- d) Die ellipsoidischen Höhen und deren zeitlichen Änderungen sollen aus geozentrischen Koordinaten bezüglich des ITRS/ITRF abgeleitet werden.
- e) Die physikalische Komponente soll die Ableitung jedweden Typs von physikalischen Höhen (z.B. orthometrische, normale u.s.w.) erlauben. Da sich diese allesamt von Potentialdifferenzen ableiten (d.h. geopotentielle Koten), werden Potentialdifferenzen und deren zeitliche Änderungen direkt als primäre Koordinaten vorgeschlagen. Diese Potentialdifferenzen sollen sich auf einen einheitlichen Wert  $W_0$  beziehen.
- f) Die Verwendung von Potentialgrößen in der Definition der physikalischen Komponente führt dazu, dass die erforderliche Hypothese über die Massenverteilung innerhalb der Erde und die Schweregradienten bei der Bestimmung des Geoids und der orthometrischen Höhen Teil der Realisierung des Referenzsystems ist, ohne die Exaktheit der eigentlichen Definition zu beeinträchtigen.
- g) Der Wert  $W_0$  soll durch Lösung eines Dirichlet-Randwertproblems bestimmt werden, denn dies ist der einzige Rahmen, der es erlaubt, die notwendigen Bedingungen zur Schätzung der absoluten Werte des Potentials einzuführen, d.h. grundsätzlich, dass die gravitative Komponente des Potentials im Unendlichen zu null wird (oder gegen null strebt).
- h) Der Wert  $W_0$  selbst erlaubt nicht, die Geometrie und Lage der Äquipotentialfläche, auf die er sich bezieht, festzulegen, so dass die Realisierung dieses Wertes sich auf die Auswahl der geeignetsten Äquipotentialfläche konzentriert. Die Festlegung muss an jedem Ort der Erde durchführbar sein, und deshalb muss das  $W_0$  aus denselben geodätischen (geometrischen und gravimetrischen) Messungen abgeleitet werden, die zur Bestimmung der entsprechenden Äquipotentialfläche verwendet werden.
- i) Es wird vorgeschlagen, dass der Wert  $W_0$  durch die Lösung des fixen GRWP geschätzt und die Verbindung der bestehenden Höhensysteme mit dem besagten  $W_0$  durch Lösung des skalaren freien GRWP durchgeführt wird (siehe Kapitel 5).
- j) Das hier vorgeschlagene vertikale Bezugssystem muss die genaue Kombination seiner geometrischen und physikalischen Komponente gewährleisten, d.h. Diskrepanzen zwischen geopotentiellen Koten aus Nivellements und Schwerereduktionen [2.3] und Potentialdifferenzen aus der Kombination von Störpotential und Referenzellipsoid [2.6] dürfen nicht größer als die Beobachtungsgenauigkeit sein.

### 3. Konventionen für die Realisierung eines globalen vertikalen Referenzsystems

Im Kapitel 2 wurde die Definition eines globalen vertikalen Referenzsystems basierend auf einer geometrischen ([2.11], [2.12]) und einer physikalischen ([2.16], [2.17]) Komponente, die mit hoher Genauigkeit kombinierbar sein müssen (Gleichwertigkeit von [2.3] und [2.6]), vorgeschlagen. Damit dieses System realisierbar ist, muss die Definition ergänzt werden durch

- a) die Darlegung der notwendigen Charakteristiken, um die genannte Kombination mit der größtmöglichen Näherung durchführen zu können, und
- b) die Einrichtung einer physikalischen Infrastruktur, die den direkten Zugang zum Referenzsystem ermöglicht.

Der grundlegende Gedanke ist es, die Elemente, die die physikalische Infrastruktur bilden (z.B. materielle Punkte), durch Koordinaten, die aus Messungen abgeleitet werden und dem Referenzsystem zugeordnet sind, zu beschreiben. Die Eindeutigkeit und Allgemeingültigkeit dieser Beschreibung wird durch die unter a) genannten Charakteristiken gewährleistet, die u.a. zuvor festgelegte Modelle, Standards und Verfahren enthalten, und damit eine präzise und stabile Beziehung über lange Zeiträume zwischen der physikalischen Infrastruktur und den verfügbaren Messverfahren erlauben. Die gewählten Modelle, Standards und Verfahren zur bestmöglichen Approximation der Definition des Referenzsystems werden unter dem Namen *konventionelles Referenzsystem* zusammengefasst, und die entsprechende physikalische Infrastruktur, mit bekannten Koordinaten in diesem Referenzsystem, wird als *Realisierung des konventionellen Referenzsystems* bezeichnet. Die Charakteristiken des konventionellen Referenzsystems, als *Konventionen* bezeichnet, sind grundsätzlich willkürlich, so dass eine Vielfalt von Möglichkeiten besteht, die zu verschiedenen Optionen führt (siehe als Beispiel Tab. 2.2). Es ist wichtig, dass die Konventionen in generellem Konsens ausgewählt und vereinbart werden, so dass sie allgemeine Anwendung finden. Demgemäß konzentriert sich das vorliegende Kapitel auf die Beschreibung und Auswahl der Konventionen, die für eine konsistente, präzise und dauerhafte (d.h. über lange Zeit stabile) Realisierung des im Kapitel 2 definierten globalen vertikalen Referenzsystems erforderlich sind.

#### 3.1. Vertikale Lage und zeitliche Änderungen des Erdschwerefeldes und der Erdoberfläche

Das vorrangige Ziel eines vertikalen Referenzsystems ist es, die Position (Höhe) eines beliebigen Objekts quantitativ festzulegen. Dazu benötigt man eine Grundmenge von leicht zugänglichen Punkten mit bekannten Koordinaten, die als Bezug für die Positionsbestimmung anderer Punkte oder Objekte durch verfügbare Mess- und Auswerteverfahren dienen. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit (Nutzerfreundlichkeit und Verfügbarkeit) liegen diese Referenzpunkte auf der Erdoberfläche. Diese unterliegt säkularen, periodischen und sporadischen Bewegungen, die durch

geodynamische Erscheinungen oder Prozesse<sup>1</sup>, Plattentektonik, gravitative Einflüsse der Himmelskörper, seismische Ereignisse, menschliche Eingriffe usw. verursacht werden. Die sich ergebenden Veränderungen der Erdoberfläche spiegeln sich notwendigerweise in den Positionen sowohl der Bezugspunkte als auch der neu zu bestimmenden Punkte wider. Aus diesem Grunde und im Hinblick darauf, dass die definierten Koordinaten des vorgeschlagenen vertikalen Referenzsystems Niveauunterschiede und deren zeitliche Veränderungen sind, muss zunächst zwischen dem Teil von  $h$  bzw.  $C$ , der als statisch (konstant) angesehen werden kann, und dem Teil, der die zeitliche Ableitung  $\frac{dh}{dt}$  bzw.  $\frac{dC}{dt}$  enthält, unterschieden werden.

### 3.1.1. Ellipsoidische Höhen in Gebieten der festen Erde

Im geometrischen Referenzrahmen ITRF (vgl. Petit and Luzum 2010, Kap. 4), wird die momentane Lage  $\mathbf{X}(t)$  eines Punktes auf der Erdoberfläche durch (Abb. 3.1)

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t - t_0) + \sum_i \Delta\mathbf{X}_i(t) + \varepsilon_{\mathbf{X}} \quad [3.1]$$

beschrieben, wobei  $t$  die Epoche angibt, für die  $\mathbf{X}$  gilt.  $\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t - t_0)$  repräsentiert die lineare Änderung von  $\mathbf{X}$  mit der Zeit (Geschwindigkeit) und ist hauptsächlich auf die tektonischen Plattenbewegungen zurückzuführen.  $\sum_i \Delta\mathbf{X}_i(t)$  enthält die übrigen Effekte, die Änderungen von

$\mathbf{X}$  in einer Größenordnung größer als die Messgenauigkeit hervorrufen. Üblicherweise werden diese Effekte von den Positionen  $\mathbf{X}$  durch konventionell vereinbarte Modelle reduziert, so dass  $\mathbf{X}(t)$  keine hochfrequenten zeitlichen Variationen enthält und sein zeitlicher Verlauf möglichst gleichförmig ist, d.h. ohne große oder abrupte Änderungen.

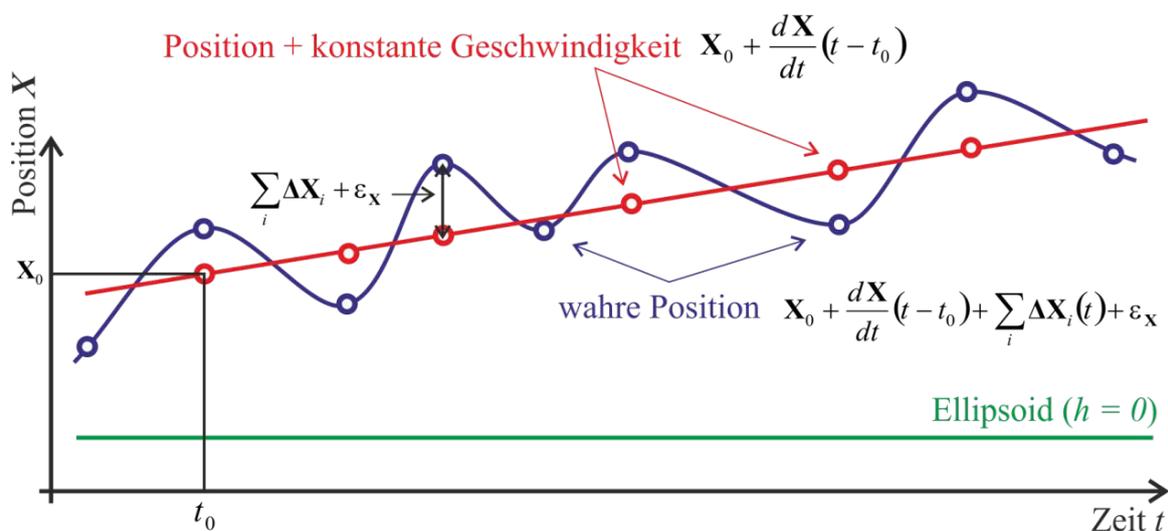


Abb. 3.1: Zeitabhängigkeit der Stationspositionen.

<sup>1</sup> Ein Prozess wird als eine Menge aufeinanderfolgender Ereignisse verstanden.

Derzeit werden Effekte (Versetzungen) durch folgende Prozesse berücksichtigt (Petit and Luzum 2010, Kap. 7):

- a) Erdgezeiten (Deformation der festen Erde aufgrund der gravitativen Wirkung von Sonne, Mond und anderen Himmelskörpern). Der Betrag der permanenten Gezeit auf der festen Erde ist nicht genau bekannt, da diese immer vorhanden sind und keine Messungen durchgeführt werden können, die den Effekt nicht enthalten (um die Differenz zwischen ihrer Präsenz und Abwesenheit darzustellen). Nach Melchior (1966) wird eine Deformation von  $-0,28$  m an den Polen und  $+0,14$  m am Äquator erzeugt. Mit den Konventionen des IERS 2010 erreicht diese Deformation  $-0,12$  m an den Polen und  $+0,06$  m am Äquator (siehe Abschnitt 3.4). Die periodischen Komponenten sind mit hoher Genauigkeit bekannt, die erzeugten Deformationen werden mit maximalen Werten (am Äquator) von  $+0,36$  m (durch den Mond) bzw.  $+0,16$  m (durch die Sonne) und minimalen Werten (am Pol) von  $-0,18$  m (Mond) bzw.  $-0,08$  m (Sonne) geschätzt (vgl. Torge 2001).
- b) Ozeanische Auflast (elastische Reaktion der Erdkruste auf die ozeanischen Massen), deren Maximalwerte um die  $+0,10$  m liegen.
- c) Atmosphärische Auflast (elastische Reaktion der Erdkruste auf die variable Verteilung des Atmosphärendrucks). Dabei müssen die durch die direkte gravitative Anziehung von Sonne und Mond auf die Atmosphärenmassen (Gezeiteneffekt) und die durch andere Ursachen, d.h. nicht gezeitenbedingt generierten Druckänderungen, z.B. Winde, Temperaturschwankungen, andere meteorologische Bedingungen, sprunghafte Änderungen der Erdoberflächenstruktur usw., berücksichtigt werden. Derzeit werden nur die Gezeiteneffekte reduziert, deren größte Beträge liegen bei  $0,0015$  m.
- d) Zentrifugale Deformationen, die durch Variation der Erdrotationsgeschwindigkeit und die Polbewegung, die ihrerseits eine Zentrifugalwirkung auf die feste Erde (Polgezeiten) und die Ozeane (ozeanische Polgezeiten) erzeugt, hervorgerufen werden, Polgezeiten und ozeanische Polgezeiten sind als elastische Reaktion der Erdkruste bzw. der ozeanischen Massen auf die Polbewegungen zu verstehen. Die Effekte der Polgezeiten werden auf ungefähr  $\pm 0,027$  m in der radialen (vertikalen) und  $\pm 0,007$  m in der horizontalen Komponente geschätzt, während die ozeanischen Polgezeiten bei  $\pm 0,0018$  m radial (vertikal) und  $\pm 0,0005$  m horizontal liegen.

Trotz dieser Reduktionen zeigen neuere Berechnungen des ITRF, z.B. ITRF2005 (Altamimi et al. 2007, Angermann et al. 2009) und ITRF2008 (Altamimi et al. 2011, Seitz et al. 2010), dass die Zeitreihen der Referenzstationen noch periodische Bewegungen aufweisen, deren Größenordnung mehrere Zentimeter erreicht<sup>2</sup> (Abb. 3.2). Auch wenn der Einfluss der systematischen Fehler durch die Beobachtungsverfahren (z.B. Appleby et al. 2009, Rothacher 2002, Sarti et al. 2010) oder Inkonsistenzen bei der Realisierung des ITRS (Drewes 2009, Collilieux and Wöppelmann 2011, Drewes 2012, Drewes et al. 2013) nicht vernachlässigt werden

<sup>2</sup> In der Region des Amazonas weisen einige kontinuierlich messende SIRGAS-Stationen saisonale Bewegungen mit Amplituden bis zu 5 cm auf, die invers mit der jährlichen Regen- und Trockenzeit und der daraus folgenden Änderung des Wasserstandes des Amazonas korreliert sind (Sánchez und Seitz 2011).

dürfen, so ist doch anzunehmen, dass die periodischen Bewegungen hauptsächlich durch die kontinentale Hydrologie sowie durch nicht gezeitenbedingte atmosphärische und ozeanische Auflasten verursacht sind, z.B. durch Massenverlagerungen des Grundwassers und der Bodenfeuchte, in Meeresströmungen und meteorologische Luftdruckschwankungen (Petit and Luzum 2010, Abschnitt 7.2). Die Reduktion dieser speziellen Effekte kann derzeit nicht durchgeführt werden, da noch keine Modelle mit der notwendigen Genauigkeit vorliegen, d.h. die Unsicherheit der verfügbaren Modelle ist größer als die Genauigkeit der Messungen, so dass ihre Anwendung eine Verschlechterung der Ergebnisse erzeugen würde.

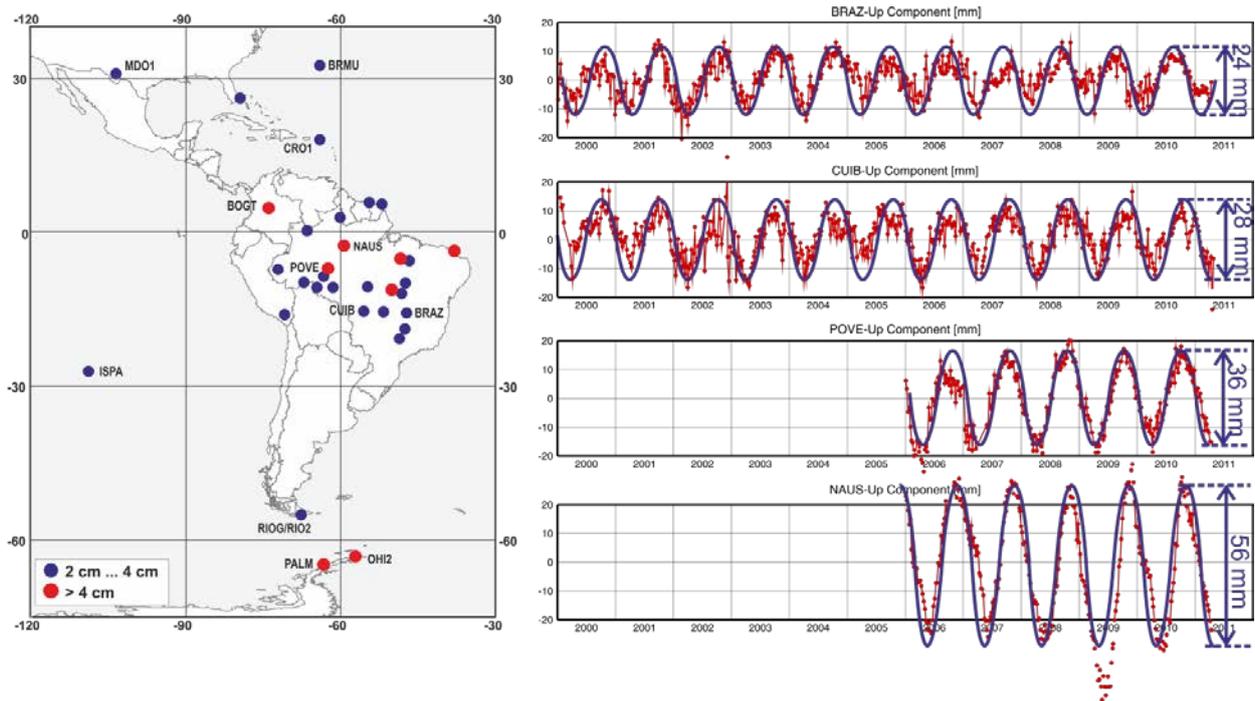


Abb. 3.2: Amplituden der saisonalen Variationen einiger SIRGAS-Stationen mit eindeutigen periodischen Bewegungen (aus Sánchez and Seitz 2011).

Außer den beschriebenen Bewegungen ist  $\mathbf{X}(t)$  lokalen<sup>3</sup> Prozessen unterworfen, wie z.B. postglazialen Hebungen (z.B. Lidberg et al. 2007, Sella et al. 2007), seismischen und post-seismischen Verlagerungen (z.B. Kaniuth et al. 2002a, Kaniuth 2005, Sánchez et al. 2013), Absenkungen durch Extraktion unterirdischer Flüssigkeiten (z.B. Kaniuth et al. 2002b, Munekane et al. 2004) usw. Der lokale Charakter dieser Effekte erschwert deren Modellierung (Vorhersage) im globalen Rahmen, und bis heute werden sie nur punktuell berücksichtigt. Im Falle der postglazialen Hebungen sind deren Auswirkungen in den Daten enthalten, oder besser gesagt, sie werden nicht vom Term  $\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t - t_0)$  getrennt.

Der letzte Summand in [3.1] ( $\varepsilon_x$ ) repräsentiert die Summe von

- a) zufälligen Fehlern durch die zur Bestimmung von  $\mathbf{X}(t)$  verwendeten Messungen,

<sup>3</sup> Ein lokaler Prozess wird als eine Erscheinung verstanden, die auf geographische Regionen begrenzt ist und nicht den gesamten Referenzrahmen betrifft, d.h. die Effekte sind nicht gemein für alle Punkte und können deshalb nicht systematisch während der Auswertung der Messungen reduziert werden.

- b) Fehlern in den verwendeten Modellen zur Schätzung von  $\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t-t_0)$  und zur Reduktion der in  $\sum_i \Delta\mathbf{X}_i(t)$  enthaltenen Effekte,
- c) Effekten, die noch nicht reduziert werden können, da sie nicht bekannt sind oder weil ihre Modellierung nicht hinreichend genau ist.

Es ist zu beachten, dass in dieser Beschreibung keine Störeffekte in den Messmethoden selbst berücksichtigt wurden (z.B. durch die Ausbreitung von Mikrowellen in der Atmosphäre, Variationen der Phasenzentren in den Empfangs- und Sendegeräten, Uhrensynchronisation usw.), sondern dass vorausgesetzt wird, dass diese in der Datenverarbeitung berücksichtigt wurden und deren Restfehler in  $(\varepsilon_x)$  enthalten sind. Mit dem gleichen Argument werden im Folgenden die inhärenten (instrumentellen, systematischen, usw.) Fehlereinflüsse, die den zur Bestimmung der Geometrie der Erdoberfläche und des Schwerefeldes der Erde verwendeten Messmethoden anhaften (z.B. relative und absolute Schweremessungen, Nivellement, Satellitenaltimetrie), vernachlässigt.

Die zeitliche Änderung der ellipsoidischen Höhen  $h$  wird durch (kontinuierliche oder wiederholte) GNSS-Positionierung bestimmt. Normalerweise wird ein lineares Verhalten angenommen, obwohl, wie bereits erwähnt, die Zeitreihen saisonale Variationen (Jahresperioden) mit Amplituden in der Größenordnung mehrerer Millimeter aufweisen. Zur Bestimmung von  $h$  aus den geozentrischen Koordinaten  $\mathbf{X}$  wird z.B. auf Heck (2003, S. 73 ff) und Hofmann-Wellenhof et al. (2001, S. 280 ff) verwiesen.

### 3.1.2. Ellipsoidische Höhen in ozeanischen Gebieten

Die Geometrie der Meeresoberfläche bestimmt man heute im Allgemeinen aus Messungen der Satellitenaltimetrie, die den Abstand zwischen dem Satelliten und der momentanen Meeresoberfläche liefert. Mittels einfacher geometrischer Beziehungen erhält man die ellipsoidischen Höhen dieser Fläche bezüglich eines Referenzellipsoids (z.B. Seeber 2003, S. 451 ff, Chelton et al. 2001, S. 2 ff). Nach der Ausgleichung der Fehler in den Instrumenten (z.B. Drift, Phasenzentrenvariationen usw.), in den Messungen (z.B. Signalausbreitung in der Atmosphäre), im sogenannten *sea state bias*, (d.i. die variable Reflexion des Signals durch den sich verändernden Wellenzustand der Meeresoberfläche, z.B. Tran et al. 2010) und die Satellitenbahnbestimmung, lassen sich diese Höhen wie folgt beschreiben (Abb. 3.3):

$$h_s(t) = N + \Xi(t) + \varepsilon_{\Xi} = N + \left[ \Xi_0 + \sum_i \Delta\Xi_i(t) \right] + \varepsilon_{\Xi} \quad [3.2]$$

$\Xi(t)$  gibt die *Meeresflächentopographie*<sup>4</sup> an, die der Differenz zwischen der momentanen Meeresoberfläche und einer festen Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes, d.h. dem Geoid,

<sup>4</sup> Auch *Dynamic Topography* (DT) genannt.

entspricht.  $\Xi$  kann in einen stationären Teil<sup>5</sup>  $\Xi_0$  (über lange Zeiträume konstanten, aber von der Lage  $\mathbf{X}$  abhängigen) und einen zeitabhängigen Teil<sup>6</sup>  $\sum_i \Delta \Xi_i(t)$ , der die temporären Veränderungen der Meeresoberfläche angibt, zerlegt werden (in diesem Fall wird das Geoid als zeitlich invariant angesehen).  $\Xi_0$  wird hauptsächlich von quasistationären ozeanischen und meteorologischen Effekten beherrscht, die ozeanische Strömungen und Neigungen der Wasseroberfläche erzeugen, wodurch das mittlere Meeresniveau von der Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes abweicht, d.h.  $\Xi_0 \neq 0$ .

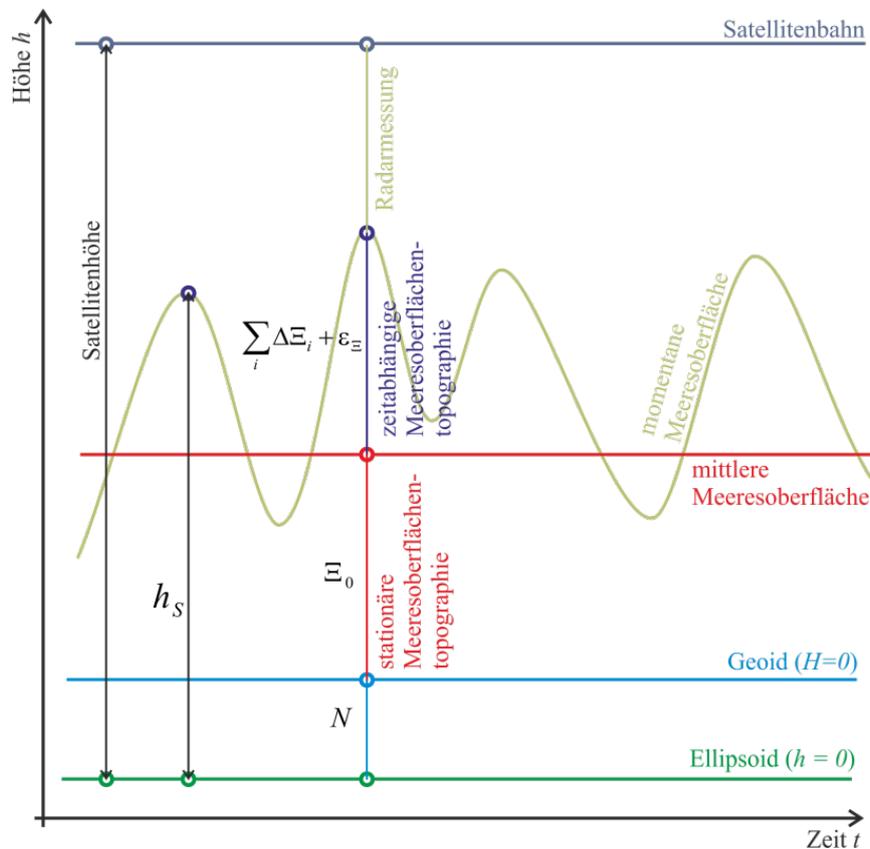


Abb. 3.3: Zeitabhängigkeit der Meeresoberfläche an einer festen geographischen Position.

Die zeitabhängige Komponente  $\sum_i \Delta \Xi_i(t)$  enthält die Effekte folgender Prozesse (vgl. Chelton et al. 2001, Rio und Andersen 2009, Ablain et al. 2009):

- a) ozeanische Gezeiten (Variationen der Meeresoberfläche durch die gravitative Wirkung von Sonne, Mond und anderen Himmelskörpern, die den Gesetzen der Hydrodynamik folgen und ihre größten Werte im Küstenbereich annehmen). Im offenen Meer ist die Amplitude maximal 1 m, während im Küstenbereich Werte größer als 16 m (in der Fundy Bay, Kanada, vgl. Vaniček und Krakiwsky 1986, S. 128).
- b) Erdgezeiten (vgl. 3.1.1).

<sup>5</sup> Auch *Mean Dynamic Topography* (MDT) genannt.

<sup>6</sup> Auch *Dynamic Ocean Topography* (DOT) genannt.

- c) Zentrifugale Deformation durch Variationen der Erdrotationsgeschwindigkeit und der Polbewegung (*Polzeiten*, vgl. 3.1.1).
- d) Variationen der Meeresoberfläche, die indirekt durch die Wirkung der Gezeitenkräfte auf die Erdoberfläche bzw. auf den Meeresboden induziert werden (*Gezeitenauflast*).
- e) Atmosphärische Auflast auf den Ozeanen (Reaktion der Meeresoberfläche auf den Atmosphärendruck). Dieser Effekt wird in zwei Komponenten zerlegt: ein Teil enthält die statische Reaktion des Ozeans (*inverser Barometereffekt*), der andere Teil nimmt die hochfrequenten Variationen, d.h. die dynamische Reaktion auf (*barotroper Effekt*, vgl. Abschnitt 3.3, S. 61, und z. B. Wunsch and Stammer 1997, Carrère and Lyard 2003).
- f) Veränderungen in den ozeanischen Strömungen, Winden, nicht modellierten Gezeiten, Änderungen der Oberflächentemperatur und des Salzgehalts des Wassers, Eddies usw. (z.B. Fu and Le Traon 2006, Fu et al. 2010).

$\varepsilon_{\Xi}$  repräsentiert (in ähnlicher Weise wie  $\varepsilon_{\mathbf{x}}$ ) die Kombination der Fehler aus den Messungen, aus den Modellen, die bei den in  $\sum_i \Delta \Xi_i(t)$  enthaltenen Reduktionen benutzt wurden und aus nicht berücksichtigten unbekanntem oder nur mit geringer Genauigkeit modellierten Effekten.

Im Prinzip erhält man die Höhen  $h_s(t)$  entlang der Satellitenspuren über den Ozeanen. Um die verbleibenden radialen Fehler (insbesondere aus der Bahnbestimmung) zu minimieren, wird die sogenannte *Kreuzungspunkt-Kalibrierung* (*crossover calibration*) benutzt, die es erlaubt, die Differenz zwischen den aus aufsteigenden und absteigenden Satellitenbahnen abgeleiteten Höhen des gleichen Punktes (Kreuzungspunkt) zu schätzen. Da die Kreuzungspunkte nicht immer über einem Reflexionspunkt der Radarmessung (*footprint*) liegen, werden Interpolationen durchgeführt, die einen direkten Vergleich erlauben. Die erhaltenen Differenzen führt man in die Bahnbestimmung ein, so dass die gemessenen Distanzen zwischen dem Satelliten und der Meeresoberfläche verbessert werden. Anschließend wird ein Mittelwert der  $h_s(t)$  für jeden Kreuzungspunkt berechnet, der die Messungen einer bestimmten Periode (z.B. ein Jahr) enthält, und eventuell werden auch aus verschiedenen Altimeter-Missionen abgeleitete Werte kombiniert (siehe Abschnitt 4.3.2). Diese Mittelwerte von  $h_s(t)$  stellt man in regulären Rastern von  $2' \times 2'$  dar und bezeichnet dieses dann als *mittlere Meeresoberfläche* (Tapley und Kim 2001). Deren Zuverlässigkeit hängt, außer von der sachgerechten Reduktion der in [3.2] dargestellten Effekte, von den Interpolationsmethoden und dem betrachteten Zeitraum für die Mittelbildung ab (z.B. Andersen and Rio 2011). In Übereinstimmung mit dem oben Gesagten treten zwei zusätzliche Bezeichnungen auf, die eine Änderung von  $h_s(t)$  beschreiben. Die erste, die sog. *ozeanische Oberflächenanomalie* oder *Meeresspiegelanomalie*, bezeichnet die Abweichungen der Meeresoberfläche zu einem beliebigen Zeitpunkt bezüglich der über einen gegebenen Zeitraum gemittelten Meeresoberfläche, z.B. die Abweichung von einem saisonalen Mittel. Die zweite, die *Variabilität des mittleren Meeresspiegels*, gibt die mittleren Änderungen der Ozeanoberfläche innerhalb dieses Zeitraums an (statistisch gleichbedeutend mit der Standardabweichung des Mittelwerts). Langfristige Änderungen des Meeresspiegels (*long-term sea level changes*) werden

aus Analysen der Zeitreihen der mittleren Meeresoberfläche über gleichmäßige Intervalle, z.B. 10 Tage, 60 Tage oder ein Jahr bestimmt (Nerem and Mitchum 2001).

Anders als bei der Definition und Realisierung des geometrischen Referenzsystems (ITRS/ITRF) gibt es keine Zusammenstellung der notwendigen Konventionen zur Standardisierung der Auswertung in der Satellitenaltimetrie. Nach Kriterien der Einrichtungen<sup>7</sup>, die mit der Sammlung, Auswertung und Bereitstellung der aus den verschiedenen Altimetrie-Missionen gewonnenen Daten befasst sind, werden z.B. verschiedene Modelle zur Korrektur der atmosphärischen Laufzeitverzögerung der Altimetermessungen, unterschiedliche Näherungen zur Reduktion der in  $\sum_i \Delta \Xi_i(t)$  enthaltenen Effekte oder verschiedene Zeiträume zur Mittelbildung der Meeresoberfläche verwendet. Dadurch weisen die geschätzten Höhen  $h_s(t)$  und die abgeleiteten Modelle der mittleren Meeresoberfläche untereinander Diskrepanzen von mehreren Zentimetern auf (siehe Abb. 4.9 und 4.10 und vgl. z.B. Rio und Andersen 2011, Abschnitt 3.2, Tab. 2). Deshalb konzentrieren sich die aktuellen Arbeiten auf die konsistente Kombination der aus den verschiedenen Missionen gewonnenen Beobachtungen der Satellitenaltimetrie (z.B. Bosch and Savcenko 2007, Beckley et al. 2010, Dettmering and Bosch 2010, Bosch et al. 2014), nicht nur um die Zuverlässigkeit der abgeleiteten Produkte zu verbessern, sondern auch um die Kontinuität und Stabilität der Beobachtungen der Ozeanoberfläche über einen möglichst langen Zeitraum (ab 1992, als die Mission Topex/Poseidon begann, vgl. Cazenave et al. 2010) zu gewährleisten.

### 3.1.3. Erdschwerefeld

Ebenso wie die geometrischen Positionen  $\mathbf{x}(t)$  und  $h_s(t)$  sind auch die mit dem terrestrischen Schwerefeld (bzw. Potentialfeld) verbundenen Koordinaten (z.B. Schwerewerte, geopotentielle Knoten, Geoidundulationen, Lotabweichungen) säkularen oder sporadischen zeitlichen Änderungen unterworfen. Im konkreten Fall der Bestimmung physikalischer Höhen bzw. geopotentieller Knoten sind besonders diejenigen Prozesse von Bedeutung, die eine Bewegung oder Verlagerung von Massen hervorrufen, denn diese verändern die Geometrie (Krümmung) und/oder die relative Position (den Abstand) der Äquipotentialflächen, was einen direkten Einfluss auf die physikalischen Höhen hat. Während die Änderungen in  $\mathbf{x}(t)$  nur die Variation der Geometrie der Erdoberfläche wiedergeben, können Änderungen der physikalischen Höhen die Folge von Veränderungen der Erdoberfläche, des Erdschwerefeldes oder einer Kombination der beiden sein (z.B. Ekman 1989).

In einem Punkt auf der Erdoberfläche kann der momentane Schwerevektor  $\mathbf{g}$  geschrieben werden als (vgl. Heck 1984, 2004):

$$\mathbf{g}(t) = \left( \mathbf{\Gamma}_0 + \sum_i \Delta \mathbf{\Gamma}_i(t) \right) + \left( \mathbf{\Phi}_0 + \sum_i \Delta \mathbf{\Phi}_i(t) \right) + \mathbf{a}_{\text{tide}}(t) + \mathbf{a}_{\text{Coriolis}}(t) + \mathbf{a}_{\text{Euler}}(t) + \sum_i \Delta \mathbf{g}_i(t) + \varepsilon_g \quad [3.3]$$

<sup>7</sup> Siehe [www.altimetry.info/html/missions/welcome\\_en.html](http://www.altimetry.info/html/missions/welcome_en.html)

Der erste Term  $\left( \Gamma_0 + \sum_i \Delta\Gamma_i(t) \right)$  repräsentiert die Gravitationsbeschleunigung durch die terrestrischen Massen (einschließlich der Atmosphäre und Ozeane), die sich aus einem konstanten Term  $\Gamma_0$  und einem variablen Term  $\sum_i \Delta\Gamma_i(t)$  zusammensetzt. Der letztere wird hauptsächlich durch die Bewegung oder Neuverteilung der festen, flüssigen und gasförmigen Massen innerhalb, auf und in der Nähe des Erdkörpers erzeugt. Seine Hauptkomponente ist mit den periodischen Variationen durch die Gezeiten der festen Erde, der Ozeane und der Atmosphäre verbunden, die sich in direkte (Änderungen der Gravitationsbeschleunigung durch die Massenverlagerung) und indirekte (zusätzliche Änderungen wegen der durch die Massenauflast erzeugten Deformationen) Effekte gliedern. Punktuelle Variationen aufgrund lokaler Massenverlagerungen (z.B. Erosion, Senkungen, hydrologische Auflast, Grundwasser, u.s.w.) sind im Term  $\sum_i \Delta\mathbf{g}_i(t)$  enthalten (siehe unten). Falls  $\Delta\Gamma$  als Gradient des Deformationspotentials  $\delta V_{def}$  ausgedrückt wird, erhält man (vgl. Heck 1984, S. 39, Gl. 2.66):

$$\Delta\Gamma = grad \delta V_{def} \quad ; \quad \sum_i \delta V_{def_i} = \delta V_E + (\delta V_O + \delta V_{def,O}) + (\delta V_A + \delta V_{def,A}) \quad [3.4]$$

Darin ist  $\delta V_E$  die Änderung des Gravitationspotentials aufgrund der Deformation des festen Erdkörpers durch die Gezeitenbeschleunigung der Massen  $\mathbf{a}_{tide}(t)$ , die den direkten Effekt der Massen anderer Himmelskörper auf den betrachteten Punkt darstellt und als Differenz zwischen der Gravitationsbeschleunigung auf diesen Punkt und derjenigen auf den gesamten Erdkörper zu verstehen ist. Normalerweise werden nur Sonne und Mond berücksichtigt, der Einfluss anderer Himmelskörper wird als nicht signifikant betrachtet (vgl. Vaníček und Krakiwski 1986, Tab. 8.1).  $\delta V_O$  und  $\delta V_A$  geben die Potentialänderung durch die direkte Gravitationswirkung der verlagerten ozeanischen ( $O$ ) und atmosphärischen ( $A$ ) Massen an, und  $\delta V_{def,O}$ ,  $\delta V_{def,A}$  sind die zusätzlichen durch Auflast dieser Massen erzeugten Effekte. Hier müssen auch die Wirkungen der Massenverlagerungen aus anderen Ursachen als der Schwerewirkung von Sonne und Mond berücksichtigt werden, die im Meer von ozeanischen Strömungen und in der Atmosphäre durch Luftdruck- und Temperaturschwankungen beherrscht werden (siehe Abschnitt 3.3).

Die permanente Gezeit erzeugt einen Effekt von  $-0,30 \mu\text{ms}^{-2}$  in der Schwerebeschleunigung am Äquator und  $+0,61 \mu\text{ms}^{-2}$  an den Polen. Die periodischen Variationen durch den Mond liegen zwischen  $-1,1 \mu\text{ms}^{-2}$  und  $+0,5 \mu\text{ms}^{-2}$  und durch die Sonne zwischen  $-0,5 \mu\text{ms}^{-2}$  und  $+0,3 \mu\text{ms}^{-2}$ . Luftdruckschwankungen variieren im Allgemeinen zwischen  $-3 \dots -4 \text{ nms}^{-2}/\text{hPa}$ , wodurch Änderungen bis zu  $\pm 0,15 \mu\text{ms}^{-2}$  in absoluten und bis zu  $\pm 0,03 \mu\text{ms}^{-2}$  in relativen Schweremessungen verursacht werden können (vgl. Torge 1989, S. 322 ff). Der indirekte Effekt der atmosphärischen Massenverlagerungen (atmosphärische Auflast) durch die Gezeiten wird bis jetzt als nicht signifikant angesehen (maximale Werte  $0,003 \mu\text{ms}^{-2}$ , Heck 1984). Die durch ozeanische Auflast erzeugten Variationen werden zwischen  $\pm 0,01 \mu\text{ms}^{-2}$  und  $\pm 0,2 \mu\text{ms}^{-2}$  abgeschätzt (vgl. Torge 2001, S. 87).

Der zweite Term in [3.2]  $\left( \Phi_0 + \sum_i \Delta\Phi_i(t) \right)$  zeigt die Zentrifugalbeschleunigung an, die ebenfalls in einen konstanten Teil  $\Phi_0$  und einen zeitabhängigen Teil  $\sum_i \Delta\Phi_i(t)$  aufgespalten werden kann. Der erste Teil stammt vom konstanten Anteil in der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, der zweite von den Variationen der Richtung des Rotationsvektors  $\Omega$ , d.h. der Polbewegung (Verlagerung der momentanen Rotationsachse gegenüber dem vereinbarten ITRS-Pol), Ungleichförmigkeiten der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation (Variation der Tageslänge, LOD) und indirekten Effekten der zusätzlichen Auflast aufgrund der durch die Polbewegung generierten Deformation (Polgezeit und ozeanische Polgezeit). Die Polbewegung erzeugt maximale Effekte von +82 nms<sup>-2</sup> (in der Breite  $\varphi = 45^\circ$ ), während die Variation der Winkelgeschwindigkeit zu Änderungen zwischen 0,7 nms<sup>-2</sup> und 7 nms<sup>-2</sup> führt (vgl. Torge 1989, p. 65ff).

$\mathbf{a}_{\text{Coriolis}}(t)$  ist die Coriolis-Beschleunigung, die bei der Bewegung eines Punktes relativ zum terrestrischen Referenzsystem auf der rotierenden Erde (hier ITRS) entsteht. Solche Bewegungen werden grundsätzlich durch die Plattentektonik und Gezeitendeformationen erzeugt. Heck (2004, S. 165, Gl. 10) drückt sie durch  $(2D_\tau \mathbf{X} \times \Omega)$  aus, dabei sind  $D_\tau \mathbf{X}$  die Ableitung des Positionsvektors  $\mathbf{X}$  nach der Zeit  $\tau$  und  $\Omega$  der Vektor der Winkelgeschwindigkeit. Der Term  $\mathbf{a}_{\text{Euler}}(t)$  entspricht der Euler- (oder Rotations-) Beschleunigung, die durch zeitliche Veränderungen des Rotationsvektors bezüglich des Quasiinertialsystems generiert wird. Darin bilden sich die aus der Präzession und Nutation sowie den Unregelmäßigkeiten der Tageslänge (LOD) entstehenden Effekte ab. Sie kann durch  $(\mathbf{X} \times D_\tau \Omega)$  quantifiziert werden (Heck 2004, S. 165, Gl. 10). Heck (1984, 2004) misst diesen beiden Beschleunigungen besondere Bedeutung bei, da sie nicht konservativ sind und vom momentanen Schwerevektor  $\mathbf{g}(t)$  reduziert werden müssen, um zu gewährleisten, dass dieser konservativ bleibt (z.B. als Gradient eines skalaren Potentialfeldes dargestellt werden kann). Diese Effekte können die Größenordnung von etwa 0,01  $\mu\text{ms}^{-2}$  erreichen (Heck 1984), was die Reduktion bei Messungen hoher Genauigkeit (absolute oder supraleitende Gravimeter) erforderlich macht. In der Praxis werden sie jedoch nur bei Schweremessungen auf bewegten Plattformen, z.B. auf Flugzeugen, Schiffen usw., berücksichtigt (Torge 1989, S. 271ff), und nicht auf vermarkten Punkten auf der Erdoberfläche (feste Erdkruste).

$\sum_i \Delta\mathbf{g}_i(t)$  fasst die übrigen Effekte zusammen, die durch Verlagerungen oder Veränderungen der Dichte von Massen in der Umgebung des betrachteten Punktes entstehen. Hier können besonders Senkungen, hydrologische Auflast oder seismische Versetzungen erwähnt werden. Gegenwärtig wird der Effekt, der durch Variationen des Grundwassers in Regenzeiten erzeugt wird, am meisten beachtet. Er kann in der gemessenen Schwerebeschleunigung einen Betrag zwischen 50 nms<sup>-2</sup> und 100 nms<sup>-2</sup> erreichen, unter Umständen mehr, wenn die Regenfälle sehr ergiebig sind (z.B. in tropischen Regenwaldgebieten). Der letzte Summand in [3.2],  $\varepsilon_g$  (ähnlich wie  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_z$ ), stellt die Kombination der Beobachtungsfehler dar, die durch die Mängel der verwendeten Modelle und die vernachlässigten Effekte verursacht werden

Die Variationen des Schwerefeldes werden durch Wiederholungsmessungen bestimmt. Für globale Veränderungen berechnet man Modelle des Erdschwerepotentials in Form von Kugelfunktionen [2.8] aus Satellitenmessungen (heute vor allem *satellite-to-satellite tracking*) über einen bestimmten Zeitraum, wobei die Koeffizienten niedriger Ordnung zwischen verschiedenen Epochen verglichen werden (z.B. Cheng and Tapley 1999, Nerem et al. 2000). Davon ausgehend ist es heute üblich, die Koeffizienten durch einen konstanten Term  $(C_{20}^0, C_{30}^0, C_{40}^0, \dots)$ , der für eine bestimmte Epoche  $t_0$  gültig ist, und eine säkulare Änderung  $(\dot{C}_{20}, \dot{C}_{30}, \dot{C}_{40}, \dots)$  darzustellen, wie z.B. in den Modellen EIGEN-GL04C<sup>8</sup> (Förste et al. 2006) und EIGEN-GL05C<sup>9</sup> (Förste et al. 2008). Die Verfügbarkeit von GRACE hat es erlaubt, die Genauigkeit und zeitliche Auflösung der geschätzten Änderungen zu verbessern (z.B. Tapley et al. 2004, Wahr et al. 2004, Chen et al. 2005, Lemoine et al. 2010), so dass es möglich ist, zusätzlich zu den säkularen Änderungen auch die periodischen Variationen zu berücksichtigen. Zum Beispiel enthält das Modell EIGEN-6<sup>10</sup> (Förste et al. 2011) die zeitabhängigen Koeffizienten bis zu Grad und Ordnung  $n, m = 50$  durch übliche lineare Terme und die jährlichen und halbjährlichen Perioden durch Sinus- und Cosinus-Funktionen. Peters (2007) präsentiert die aktuell verwendeten unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung der Kugelfunktionen als Funktion der Zeit, d.h.  $(\bar{C}_{nm}(t), \bar{S}_{nm}(t))$ .

Die aus dem Vergleich der Schwerefeldmodelle zu verschiedenen Referenz-Epochen erhaltenen Ergebnisse werden validiert (bzw. kombiniert) mit den aus wiederholten terrestrischen Schweremessungen hoher Genauigkeit (d.h. Absolut- oder Superconducting-Gravimeter), abgeleiteten Änderungen (e.g. Crossley et al. 2005, Timmen et al. 2006, Müller et al. 2007, Steffen et al. 2009).

Die zeitlichen Veränderungen des Schwerefeldes werden auch in der Realisierung des ITRS berücksichtigt, denn der ITRF stützt sich grundsätzlich auf Messungen zu extraterrestrischen Zielen (Satelliten und Quasare), wobei die Satelliten dem Einfluss des Schwerefeldes unterliegen, dessen Variationen mit hinreichender Präzision modelliert werden müssen, um die Zuverlässigkeit der Transformation zwischen dem quasiinertialen (in dem die Bewegung der extraterrestrischen Objekte bestimmt wird) und dem terrestrischen System (in dem die Koordinaten der Referenzpunkte gegeben sind) zu garantieren. Die Effekte werden durch eine Darstellung des Erdschwerepotentials in Kugelfunktionen [2.8] berechnet, und die Reduktion der entsprechenden Störungen wird direkt in den Koeffizienten niedriger Ordnung ( $n < 12$ ) vorgenommen. Gegenwärtig schließen die Konventionen des IERS (Petit and Luzum 2010, Kap 6.) als Standard das Modell EGM2008 (Pavlis et al. 2012, 2013) ein. Dessen Koeffizienten ( $C_{20}, C_{30}, C_{40}$ ) werden durch säkulare Änderungen verfeinert, wobei die Effekte der Erdzeiten, der ozeanischen Gezeiten und der Gezeiten (der festen Erde und der Ozeane), die durch die Zentrifugaldeformation aufgrund der Polbewegung (*Polzeit und ozeanische Polzeit*) entstehen, berücksichtigt werden. Die Behandlung der mit den Erdzeiten verbundenen Effekte und die Analyse der mit CHAMP, GRACE und GOCE gewonnenen Beobachtungen stimmen im

<sup>8</sup> [http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g005\\_eigen-gl04c.html](http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g005_eigen-gl04c.html)

<sup>9</sup> [http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g007\\_eigen-05c.html](http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g007_eigen-05c.html)

<sup>10</sup> [http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/documents/Foerste-et-al-EGU\\_2011-01.pdf](http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/documents/Foerste-et-al-EGU_2011-01.pdf)

Allgemeinen mit dem in den IERS-Konventionen beschriebenen Vorgehen überein (Lühr et al. 2002, Flechtner 2007a, Gruber et al. 2010).

Die Geoid- oder Quasigeoid-Modelle sind ebenfalls gegenüber den in [3.3] genannten Effekten sensitiv, da sie primär aus Analysen des Schwerefeldes hervorgehen. Dennoch werden sie herkömmlicherweise als statisch angesehen, und ihre Bestimmung enthält neben den Reduktionen, die für die Berechnung der Schwereanomalien verwendet wurden, nur die Reduktion der lunisolaren Gezeiten  $\mathbf{a}_{\text{tide}}(t)$ . Heute ist es möglich, Variationen der Geoidundulationen oder Höhenanomalien durch Vergleich der Kugelfunktionskoeffizienten verschiedener Epochen, d.h.  $(\bar{C}_{nm}(t), \bar{S}_{nm}(t))$ , zu schätzen.

### 3.1.4. Geopotentielle Knoten

Der Nachweis zeitlicher Variationen der geopotentiellen Knoten  $C$  ist ein komplexer Prozess, da diese normalerweise aus dem Präzisionsnivellement in Kombination mit gravimetrischen Reduktionen abgeleitet werden. Wenn auch die nivellierten Höhenunterschiede in erster Näherung durch die Veränderungen der Geometrie der Erdoberfläche gegeben sind [3.1], so ist der Messvorgang doch sehr langwierig und überdeckt geographisch nur sehr kleine Gebiete (einige Kilometer pro Tag), wodurch es schwierig ist, den Einfluss zeitlicher Änderungen von den Messfehlern zu trennen. Da die nivellierten Punkte sehr nahe beieinander liegen, wird vorausgesetzt, dass die globalen geodynamischen Erscheinungen (mit großen räumlichen Wellenlängen und langen zeitlichen Perioden) diese in gleicher Weise beeinflussen, und es wird angenommen, dass sich der Effekt durch den Prozess der Hin- und Rückmessung symmetrisch<sup>11</sup> eliminiert (vgl.  $dn_{BA}(t_1)$  und  $dn_{BA}(t_2)$  in Abb. 3.4). Die einzige Reduktion, die heute angewendet wird, ist die *astronomische Korrektur* (siehe Anhang A), die den Einfluss der variablen Komponente (kurzer Perioden) der Erdgezeiten auf die Lotabweichungen beziffert, der sich letztlich in periodischen Neigungsänderungen des Zielstrahls zwischen dem Nivellierinstrument und den Nivellierplatten zeigt (Torge 2001, S. 209). Die Größenordnung dieser Korrektur wird pro Kilometer Nivellement mit ungefähr  $\pm 0,056$  mm für die lunaren und  $\pm 0,026$  mm für die solaren Effekte abgeschätzt (vgl. Vaníček and Krakiwski 1986 S.599). Streng genommen muss dieser Effekt in Höhennetzen von mehr als 50 km Ausdehnung von den gemessenen Höhenunterschieden reduziert werden, jedoch wird dies gewöhnlich nicht immer gemacht, und es ist nicht klar, wann und wo es angewendet wurde. Andererseits sind die anzubringenden zeitabhängigen gravimetrischen Reduktionen zur Umformung der gemessenen Höhenunterschiede in geopotentielle Knoten bzw. physikalische Höhen so klein, dass Genauigkeiten um  $\pm 10 \mu\text{ms}^{-2}$  ausreichen, um die relative Präzision des Nivellements zu erhalten (Torge 2001, S. 250, Sánchez 2002, Tab. 2). Als Konsequenz bleibt die einzige Korrektur, die normalerweise bei den terrestrischen gravimetrischen Messungen (zur Berechnung geopotentieller Knoten) angewendet wird, die durch  $\mathbf{a}_{\text{tide}}(t)$  in [3.2] gegebene.

<sup>11</sup> Zum Beispiel zeigt Heck (1984), wie die Polbewegung quasi-periodische Verlagerungen der Niveauflächen von  $\pm 3$  cm mit einer Periode von 430 Tagen (Chandler-Periode) erzeugt, die praktisch konstant über große Entfernungen und deshalb im Präzisionsnivellement schwierig aufzudecken sind.

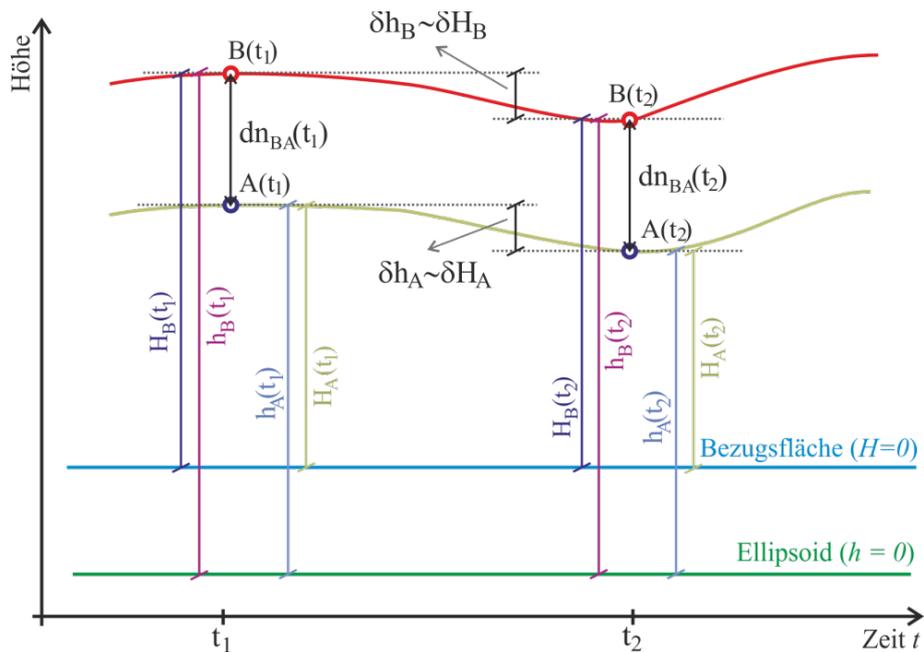


Abb. 3.4: Zeitliche Variationen in den Höhenunterschieden zwischen zwei Punkten.

Die Bestimmung linearer zeitlicher Änderungen der physikalischen Höhen  $H$  wurde durch wiederholte Nivellements und Gravimetrie durchgeführt (z.B. Heck und Mälzer 1983, Ekman and Mäkinen 1996, Mäkinen and Saaranen 1998). Im Allgemeinen wird ein lineares Verhältnis zwischen den genannten Änderungen angenommen, d.h.  $\frac{\dot{g}}{H} \approx \frac{\delta g}{\delta H}$  (vgl. Torge 1989, S. 123,

Ekman 1989, Mäkinen et al. 2005), was die detaillierte Kenntnis der lokalen Massenverteilung voraussetzt und deshalb nur in kleinen Gebieten gültig ist. Da die Durchführung von Nivellements aufwändig und teuer ist und über große Entfernungen zu einer Akkumulation der Fehler führt, benutzte man diese Relation früher, um vertikale Erdkrustenbewegungen aus wiederholten Gravimetermessungen abzuleiten (z.B. Wassef 1976, Torge 1986). Heute werden diese Bewegungen durch GNSS-Positionierung bestimmt. Heck und Mälzer (1983) zeigen, dass die maximalen Differenzen zwischen linearen ellipsoidischen und physikalischen (orthometrischen, Normal-, usw.) Höhenänderungen um 10% des Gesamtbetrages liegen, so dass oft  $\delta h \approx \delta H$  angenommen wird (siehe  $\delta H_A$  und  $\delta H_B$  in Abb. 3.4). Die Referenzflächen ( $H=0$ ,  $h=0$ ) werden als zeitlich konstant angesehen. Ein ähnlicher Vergleich findet sich auch in Mäkinen et al. (2003).

### 3.2. Stationäre und zeitabhängige Komponenten bei der Höhenbestimmung

Die Terme  $\sum_i \Delta \mathbf{X}_i(t)$  in [3.1],  $\sum_i \Delta \Xi_i(t)$  in [3.2] und  $\sum_i \Delta \Gamma_i(t)$ ,  $\sum_i \Delta \Phi_i(t)$ ,  $\sum_i \Delta \mathbf{g}_i(t)$  in [3.3] werden erst seit sehr kurzer Zeit (letzte Dekaden des vorigen Jahrhunderts) berücksichtigt, denn die Größenordnung ihrer Auswirkung ist gering (oder kaum messbar) bezüglich der Präzision der traditionell verfügbaren Messverfahren. Die technologische Entwicklung (vor allem bei den Weltraumverfahren) erlaubte es, die Frequenz und die Präzision der Messungen zu erhöhen, so dass Zeitreihen der beobachteten geodätischen Parameter erzeugt und Signale erkannt werden

konnten, die nur durch physikalische Interpretationen zu erklären sind. Um eine Erscheinung (oder einen Prozess) zu erkennen, der zu einem besonderen Verhalten des beobachteten Parameters führt, wird deshalb ein Apriori-Modell dieser Erscheinung erstellt, und durch Simulation wird der Effekt nachgebildet, den das genannte Modell in dem interessierenden Parameter erzeugt. Die Differenz zwischen dem „Gemessenen“ und mit dem Modell „Gerechneten“ erlaubt es, das Anfangsmodell zu verfeinern und in einem iterativen Prozess fortzufahren, bis die physikalische Erscheinung und der Effekt, den sie in der Zeitreihe des betrachteten Parameters erzeugt, vollständig erklärt sind. Sobald dieser Effekt genau bekannt ist, wird er von den Messungen reduziert, so dass möglicherweise andere Komponenten sichtbar werden, und es beginnt eine entsprechende Analyse, um die Erscheinungen aufzudecken, die diese Komponenten erzeugen.

Da sich dieselben Erscheinungen oder Prozesse des Systems Erde i. A. sowohl in der Geometrie als auch im Schwerfeld niederschlagen, ist die integrierte Analyse geometrischer und gravimetrischer Beobachtungen eines der primären Ziele der gegenwärtigen Geodäsie, die den Aufbau konsistenter Modelle hoher Präzision mit sich bringt (vgl. Plag and Pearlman 2009). Damit dies möglich wird, ist es erforderlich, dass die Definition und Realisierung der geodätischen Referenzsysteme eine höhere Genauigkeit haben als die Größe der Effekte, die dargestellt werden sollen (z.B. Cazenave et al. 2010, Drewes 2012) und zwar nicht nur im räumlichen (als Funktion der Position) sondern auch im zeitlichen Sinne (als Funktion der Zeit). Das heißt, die Realisierung jedes geodätischen Referenzsystems muss hinreichend stabil (ohne sprunghafte Änderungen in Raum und Zeit) sein, um als Grundlage für das Aufdecken und Vergleichen der Effekte, die durch dieselben Erscheinungen an verschiedenen geographischen Orten und zu verschiedenen Epochen hervorgerufen werden, zu dienen. Aus diesem Gesichtspunkt sind die zeitabhängigen (insbesondere die periodischen) Variationen beim Aufbau der Referenzrahmen als störend zu betrachten und müssen ausgeschaltet oder beseitigt werden. Dies hat dazu geführt, dass die geodätischen Konzepte der *regularisierten Position* und *Stationarität* eingeführt wurden. Das erstgenannte bezieht sich auf die Möglichkeit, die Position eines Punktes durch seine Koordinaten zu einer gegebenen Epoche und die *reguläre* (möglichst gleichförmige) Änderung mit der Zeit darzustellen (Petit and Luzum 2010, Kap. 4). Das zweitgenannte Konzept hängt mit dem konstanten Aufbau oder Verhalten (permanent, stationär, statisch) eines Parameters  $\kappa$  über einen bestimmten Zeitraum  $\Delta t$  zusammen:  $\frac{d\kappa}{dt}=0$ . Auf jeden

Fall treten die zeitlichen Veränderungen eines bestimmten Parameters (besonders die periodischen) stärker hervor, d.h. sind offensichtlicher, und seine Modellierung wird vereinfacht, wenn die regularisierte Position oder die stationäre Darstellung von seinen momentanen Werten subtrahiert werden.

Die Stationarität wird manchmal gleichbedeutend mit dem Mittelwert des speziellen Parameters über einen betrachteten Zeitraum  $\Delta t$  angesehen. So werden zum Beispiel die stationäre Meeresoberfläche (Mittelwert von  $h_s(t)$ , z.B. Tapley und Kim 2001) oder die stationären globalen Modelle des Schwerfeldes (Mittelwert von  $\bar{C}_{nm}(t), \bar{S}_{nm}(t)$ ) bestimmt und auch als statisch oder mittleres Geopotential bezeichnet. Diese Näherung ist nützlich, um die periodischen

Effekte zu eliminieren, hängt jedoch vom Zeitraum  $\Delta t$  ab, der zum Berechnen des Mittels verwendet wurde, und ändert sich, wenn dieser variiert (siehe Abschnitt 4.3.2). Eine andere Besonderheit des Konzepts der Stationarität ist die Vernachlässigung der säkularen oder langperiodischen Änderungen (über Millionen Jahre), die im System Erde auftreten und zu  $\frac{d\kappa}{dt} \approx \text{const.} \neq 0$  führen. Unter diesen können die tektonischen Plattenbewegungen, Umverteilung oder Abschmelzen der Eismassen, Gezeitenreibung in den Ozeanen, postglaziale Hebungen, lineare Variationen des mittleren Meeresspiegels, Prozesse wie die Konvektion im Erdmantel usw. genannt werden. Aufgrund dieser Argumente kann die stationäre Darstellung jedes geodätischen Parameters im Laufe verschiedener Zeiträume unterschiedlich sein, weshalb es präziser ist, den Ausdruck *quasistationär* statt *stationär* zu verwenden.

Es soll hier erwähnt werden, dass die Notwendigkeit, Ursachen und Wirkungen der verschiedenen Erscheinungen und Prozesse in den geodätischen Messungen zu erkennen, dazu geführt hat, dass sich die Geodäsie zur Wissenschaft der Messung des Wandels im System Erde erweitert hat (Drewes 2006). Was hier als *Störung* und somit als *zu reduzieren* betrachtet wird, ist in anderen Geowissenschaften Gegenstand der Forschung und dient als grundlegendes Material zur Verbesserung der Kenntnisse über die Erde und seiner Umwelt. Diese Thematik ist eine Begründung für GGOS, das *Global Geodetic Observing System* (Plag and Pearlman 2009) und wird hier nicht weiter behandelt.

### 3.3. Aktueller Stand bei der Reduktion zeitabhängiger Komponenten

Die Reduktionen der Effekte, die durch Gezeiten und die direkte Attraktionswirkung von Sonne und Mond auf die Messungen erzeugt werden, stellt man im Allgemeinen durch eine Reihenentwicklung in Frequenzen und Kugelfunktionen dar. Derzeit schließt der IERS (Petit and Luzum 2010, Kap. 6.2 und Kap. 7.1.1) als vereinbarte Modelle die von Cartwright and Taylor (1971) sowie Cartwright and Edden (1973) ein, und stellt Transformationsparameter zwischen deren Amplituden und denen der Modelle von Doodson (1921) sowie Hartmann and Wenzel (1995) zur Verfügung. Bei der Verarbeitung der Daten der Satellitenaltimetrie (Rio and Andersen 2009) und der Satellitenschwerefeldmissionen (CHAMP, GRACE, GOCE) folgt man den Konventionen des IERS (Lühr et al. 2002, Flechtner 2007a, Gruber et al. 2010), während bei den terrestrischen Schwermessungen<sup>12</sup> neben den Modellen von Cartwright and Taylor (1971) sowie Cartwright and Edden (1973) vor dem IGSN71<sup>13</sup> auch die von Longman<sup>14</sup> (1959) und später die von Hartmann and Wenzel (1995) verwendet wurden. Die Entwicklung von Cartwright and Taylor (1971) sowie Cartwright and Edden (1973) in 505 Partialtiden erlaubt die Berechnung der Gezeitenbeschleunigung mit einer Präzision besser als  $\pm 1 \text{ nms}^{-2}$ , und die von Hartmann and Wenzel (1995) mit 12935 Partialtiden bietet eine Sicherheit besser als  $\pm 0,001 \text{ nms}^{-2}$  (vgl. Torge

<sup>12</sup> Messungen auf mobilen Plattformen (Flugzeuge oder Schiffe) werden in dieser Arbeit ausgeklammert.

<sup>13</sup> *International Gravity Standardization Net 1971* (Morelli et al. 1974)

<sup>14</sup> Das Modell von Longman liefert direkt die durch die Gezeiten erzeugten lunisolaren Beschleunigungen und enthält keine Reihenentwicklungen des Gezeitenpotentials.

2001, S. 88ff). Die Love- und Shida-Zahlen<sup>15</sup>, die zur Schätzung der Änderungen des Potentials (Petit and Luzum 2010, Kap. 6.2) und der Geometrie der Erde (Petit and Luzum 2010, Kap. 7.1.1) durch die Erdzeiten erforderlich sind, werden nach Wahr (1981) und Mathews et al. (1995) für eine ellipsoidische, elastische, rotierende Erde ohne Ozeane mit einer Massenverteilung nach dem Modell PREM<sup>16</sup> (Dziewonski and Anderson 1981) bestimmt. Korrekturen wegen der Viskosität des Mantels und sekundärer (Resonanz-) Effekte durch ozeanische Strömungen und Auflasten sowie der Resonanzen zwischen *Chandler-Wobble*, retrograder freier Nutation des Erdkerns (*FCN*) und direkter (*prograde*) Nutation des inneren Kerns (*FICN*) werden dabei berücksichtigt. In erster Näherung wird der Effekt mit frequenzunabhängigen (*nominellen*) Love-Zahlen berechnet, die denen für die halbtägigen Wellen entsprechen, danach werden Korrekturen bezogen auf die Differenz zwischen den nominellen und denen der berücksichtigten Frequenzen angebracht. Die Verfeinerung bei der Bestimmung der nominellen und später korrigierten Love-Zahlen wird detailliert z.B. von Wang (1997), Dehant et al. (1999) und Mathews and Guo (2005) dargestellt.

Die durch die Polbewegung verursachten Störeffekte auf die feste Erde (*Polzeit*) und die Ozeane (*ozeanische Polzeit*) werden als Funktion der mittleren (quasistationären) Winkelgeschwindigkeit der Erde und der zeitabhängigen Ablage (*offset*) des momentanen Pols  $(x_p, y_p)$  gegenüber dem mittleren Pol des IERS (*IERS reference pole*) gemäß der Formulierung durch Wahr (1985) berechnet. Im Falle des Potentials werden die Polzeiten direkt in den Koeffizienten  $\bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}$  reduziert (vgl. Petit and Luzum 2010, Kap. 6.4), während die ozeanischen Polzeiten bei den Koeffizienten  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  bis  $n,m=10$  zum Einsatz kommen (vgl. Petit and Luzum 2010, Kap. 6.5). Die Versetzungen, die durch die Polzeit der festen Erde verursacht sind, werden mit den von Munk und MacDonald (1960, S. 24ff) vorgeschlagenen Love-Zahlen geschätzt. Diese werden *fluid Love numbers* genannt, weil sie die Deformation der Erde im hydrostatischen Gleichgewicht darstellen. Es ist zu beachten, dass diese Love-Zahlen von denen, die zur Reduktion der direkten Effekte der lunisolaren Gezeiten (Petit and Luzum 2010, Kap. 7.1.1) benutzt werden, abweichen, weil jene von einer elastischen und nicht von einer hydrostatisch ausgeglichenen Erde ausgehen. Komplementär wird die Auflast der *ozeanischen Polzeit* nach dem Gleichgewichtsmodell von Desai (2002) geschätzt (vgl. Petit and Luzum 2010, Kap. 7.1.4 und Kap. 7.1.5). Die Effekte der *Polzeit* und der Auflast der *ozeanischen Polzeit* werden bei Auswertungen der Satellitenaltimetrie und GRACE und GOCE<sup>17</sup> nach den IERS-Konventionen reduziert. Hochpräzise terrestrische (absolute und supraleitende) Schweremessungen werden ebenfalls wegen der Polbewegung und Polzeit nach dem Modell von Wahr (1985) korrigiert (vgl. Torge 2001, S. 175).

Die Antwort der Meeresoberfläche auf die Schwerewirkung von Sonne und Mond wird durch ozeanische Gezeitenmodelle dargestellt (z.B. Le Provost 2001), die ihrerseits die Grundlage zur

<sup>15</sup> Im Folgenden werden diese allgemein als *Love-Zahlen* bezeichnet, ohne explizit die Shida-Zahl zu nennen.

<sup>16</sup> PREM: *Preliminary Reference Earth Model*

<sup>17</sup> Formell basieren die GRACE- (Flechtner 2007a) und GOCE-Standards (Gruber et al. 2010) auf den IERS-Konventionen 2003 (McCarthy und Petit 2004), jedoch wurden diese an deren Änderungen angepasst, so dass sie endgültig wie die IERS-Konventionen 2010 publiziert wurden.

Schätzung des Einflusses auf das Potential und die Geometrie der festen Erde (*ozeanische Auflast*) liefern. Die Genauigkeit dieser Modelle erreicht im offenen Meer  $\pm 2$  cm, während sie im Küstenbereich und in Polargebieten (wegen der Mängel oder des Fehlens von Messungen, besonders der Satellitenaltimetrie) schlechter als  $\pm 10$  cm ist. Im Falle des Potentials werden diese Effekte als periodische Variationen der Koeffizienten  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$  berücksichtigt, während die ozeanische Auflast in einem gleichabständigen Gitter von Knoten nach einem Integrationsmodell von Farrell (1972) dargestellt wird. Die IERS-Konventionen empfehlen eine vereinbarte *Routine zur Berechnung der ozeanischen Auflast* (Scherneck 1991, 1999), die 342 konstituierende Frequenzen enthält, deren Amplituden und Phasen ausgehend von den 11 Hauptzeiten interpoliert werden (Petit and Luzum 2010, Kap. 7.1.2). Da die größte Unsicherheit der Berechnung der Deformationen durch die ozeanische Auflast von den ozeanischen Gezeitenmodellen herrührt, empfehlen die IERS-Konventionen, aktuelle Modelle zu verwenden (da deren Bestimmung eine größere Anzahl von Messungen enthält), ausdrücklich ohne die vorherigen Modelle abzuwerten (Petit and Luzum 2010, Tabelle 7.4, S. 111). Bei der Berechnung des ITRF werden gegenwärtig die Modelle TPXO<sup>18</sup>7.2 (Egbert et al. 1994) und FES<sup>19</sup>2004 (Letellier 2004) bevorzugt. Das letztgenannte Modell wird ebenfalls bei der Auswertung von GRACE- (Flechtner 2007a) und GOCE-Daten (Gruber et al. 2010) verwendet, während man in der Satellitenaltimetrie auch andere Modelle wie FES99 (Lefevre et al. 2002) und einige aus den Serien GOT<sup>20</sup> (Schrama und Ray 1994) oder TPXO (Egbert et al. 1994) benutzt. Die Verwendung unterschiedlicher ozeanischer Gezeitenmodelle bei der Bestimmung der mittleren Meeresoberfläche erzeugt im Mittel Widersprüche zwischen  $\pm 2$  cm und  $\pm 5$  cm, wobei die größten Werte im Küstenbereich auftreten (Rio and Andersen 2009). Savcenko and Bosch (2008) zeigen den heutigen Stand ozeanischer Gezeitenmodelle, deren Nachteile und Möglichkeiten zur Verbesserung der Genauigkeit in den genannten Gebieten.

Bei den durch den atmosphärischen Luftdruck induzierten Effekten beschränkt sich der IERS derzeit nur auf die durch Gezeiten erzeugten Änderungen; nicht gezeitenbedingte Einflüsse werden bei der Berechnung des ITRF<sup>21</sup> nicht berücksichtigt (Altamimi et al. 2011, Kap. 3.1) und auch nicht bei der Modellierung in der Satellitenbahnbestimmung (Petit and Luzum 2010, Kap. 6). Die durch die täglichen und halbtäglichen solaren Frequenzen erzeugte atmosphärische Auflast wird nach dem Modell von Ray and Ponte (2003) berechnet (vgl. Petit and Luzum 2010, Kap. 7.1.3). Im Fall von GRACE und GOCE wird die atmosphärische Auflast vernachlässigt, während die Effekte durch nicht gezeitenbedingte, kurzperiodische (von Wochen bis Stunden) Massenverlagerungen im System Atmosphäre-Ozean direkt in den Koeffizienten der

<sup>18</sup> TPXO: *The OSU TOPEX/Poseidon Global Inverse Solution*, <http://volkov.oce.orst.edu/tides/global.html>

<sup>19</sup> FES: *Finite Element Solution*, <http://www.aviso.oceanobs.com/index.php?id=1279>

<sup>20</sup> GOT: *Global Ocean Tide Model*, [http://bowie.gsfc.nasa.gov/ggfc/tides/eop\\_got99.html](http://bowie.gsfc.nasa.gov/ggfc/tides/eop_got99.html)

<sup>21</sup> Im Februar 2012 eröffnete die Arbeitsgruppe *Modelling environment loading effects for reference frame* der Kommission 1 der Internationalen Assoziation für Geodäsie gemeinsam mit dem *ITRF Product Centre* und dem *Global Geophysical Fluid Centre* einen Aufruf, dass die Prozessierungszentren der verschiedenen Verfahren in der Realisierung des ITRF (VLBI, SLR, GPS, DORIS) gleichermaßen tägliche und wöchentliche Lösungen mit und ohne Korrekturen der nicht gezeitenbedingten atmosphärischen Auflast für den Zeitraum 2006,0 bis 2011,0 liefern. Durch den Vergleich dieser Lösungen erwartet man, den Effekt der atmosphärischen Auflast in der Bestimmung des ITRF und der Erdorientierungsparameter abzuschätzen und die Möglichkeit zu untersuchen, diese Korrekturen in der routinemäßigen Auswertung der Messungen zu integrieren. Ergebnisse dieser Untersuchungen sollen etwa 2015 verfügbar sein.

Kugelfunktionen des (quasi) statischen Potentials reduziert werden. Die Berechnung dieser Reduktionen beruht auf einer Kombination der durch den ECMWF<sup>22</sup> gegebenen meteorologischen Information mit dem baroklinen ozeanischen Modell OMCT<sup>23</sup> (Thomas 2002). Zunächst werden Geschwindigkeit und Kraft der Winde, die Variabilität der Temperatur, zeitliche Änderungen von Luftdruck und Süßwassertransport (Abfluss durch Flüsse zum Meer und Niederschlag minus Verdunstung) assimiliert; danach nimmt man diese Eingangsdaten und simuliert die Auswirkungen, die sie in der Verteilung (Zirkulation) der ozeanischen Massen verursachen, wobei die eisbedeckten Gebiete und die Schwerkraft sowie zusätzliche Auflasten durch die bewegten Massen berücksichtigt werden. Die entsprechenden Korrekturen werden alle sechs Stunden berechnet und auf die Koeffizienten bis Grad und Ordnung  $n,m=50$  (Flechtner 2007b) angewandt. Bei GRACE berechnet man die gezeitenbedingten atmosphärischen Effekte für die täglichen und halbtäglichen solaren Frequenzen nach dem Modell von Biancale and Bode (2006), nachdem der Effekt der halbtäglichen Frequenz vorher vom ozeanischen Modell nach Ponte and Ray (2002) subtrahiert wurde, und reduziert dann direkt die Koeffizienten bis  $n=8$  und  $m=5$ . Bei GOCE werden diese Effekte im ozeanischen Modell berücksichtigt.

Bei der Auswertung der Daten der Satellitenaltimetrie ist das Vorgehen ähnlich. Die Antwort der Meeresoberfläche auf Luftdruckänderungen wird derzeit durch Kombination niederfrequenter Variationen aus der statischen Reaktion des Ozeans (*Gesetz des inversen Barometers*) mit der hochfrequenten Ozeandynamik (*barotroper Effekt*) berechnet. Diese Kombination bezeichnet man als *dynamische atmosphärische Korrektur*. Der statische Effekt wird mit den vom ECMWF bereitgestellten Luftdruckfeldern als Eingangsdaten bestimmt, und der barotrope Effekt wird aus dem Modell Mog2D<sup>24</sup> (Lynch and Gray 1979, Carrère and Lyard 2003) simuliert. Es ist zu beachten, dass bei GRACE und GOCE ein baroklines ozeanisches Modell verwendet wird, während die Satellitenaltimetrie ein barotropes benutzt. Die grundsätzliche Differenz zwischen diesen beiden Bezeichnungen ist, dass ein barotropes Modell von einer homogenen Dichte jeder Wassersäule ausgeht, die nur als Funktion der Tiefe variiert, während in einem baroklinen vertikale Änderungen auftreten, die außer von der Tiefe auch von der Temperatur und dem Salzgehalt des Wassers abhängen. Die Verwendung des einen oder anderen Modells bei der Bestimmung mittlerer Höhen der Meeresoberfläche ist unerheblich, denn die globalen Abweichungen für Perioden nicht größer als 100 Tage sind kleiner als 0,1 mm (Tierney et al. 2000). Die Effekte längerer Perioden sind im statischen Modell (*inverser Barometereffekt*) enthalten. Obwohl bei der Auswertung der GRACE-Daten auch die Möglichkeit der Verwendung eines barotropen Modells betrachtet wird (PPHA<sup>25</sup>, Flechtner 2007b), gibt man derzeit sowohl bei GRACE als auch bei GOCE dem baroklinen Modell den Vorzug, weil es sich besser der tatsächlichen Bewegung der ozeanischen Massen anpasst und die Überdeckung in polaren Zonen besser ist. Die mittlere Differenz der Geoidundulationen bei Verwendung des einen oder anderen Modells liegt bei  $\pm 1,5$  mm (Flechtner et al. 2006). Ähnliche Modelle zur Auswertung der

<sup>22</sup> ECMWF: *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts*, [www.ecmwf.int](http://www.ecmwf.int).

<sup>23</sup> OMCT: *Ocean Model for Circulation and Tides*, [http://www.gfz.potsdam.de/portal/gfz/Struktur/Departments/Department+1/sec13/services/OMCT\\_Simulations](http://www.gfz.potsdam.de/portal/gfz/Struktur/Departments/Department+1/sec13/services/OMCT_Simulations)

<sup>24</sup> Dieses Modell wird heute mit dem Namen T-UGOm 2D (*Toulouse Unstructured Grid Ocean model 2D*) identifiziert, <http://sirocco.omp.obs-mip.fr/eng/tools/Tugo/Home/TugoHome.htm>

<sup>25</sup> PPHA: Abkürzung der Namen seiner Autoren : Pacanowski, Ponte, Hirose, Ali (Hirose et al. 2001).

Änderungen des Schwerefeldes wegen dynamischer Ozeaneffekte sind die von Menemenlis et al. (2008) und POP<sup>26</sup> (Johnson et al. 2001).

Bei terrestrischen Schweremessungen wird der Einfluss der atmosphärischen Massen üblicherweise aus einer *Standardatmosphäre* abgeleitet (vgl. Torge 1989), d.h. einem sphärischen Modell mit radialen Dichteveriationen, das geographische und zeitliche Änderungen des Luftdrucks und der Temperatur vernachlässigt. Diese Korrektur wird durch Unregelmäßigkeiten des topographischen Reliefs in der Atmosphären-Oberflächen-Kopplung verfeinert, deren Auswirkung man als eine *invertierte* Bouguer-Platte mit der mittleren Atmosphärendichte approximiert. Der gesamte Effekt wird zu den Schweremessungen hinzugefügt, als wenn die Atmosphäre in einer Kappe über der Erdoberfläche läge. Hochpräzise (absolute) Messungen haben jedoch die Notwendigkeit gezeigt, den Effekt unter Berücksichtigung zeitlicher und geographischer Variationen des Luftdrucks zu modellieren (Neumeyer et al. 2004, Gitlein and Timmen 2007). Dieser Vorschlag ist relativ neu und beginnt erst berücksichtigt zu werden.

Eine weitere wichtige Quelle zeitlicher Variationen des Schwerefeldes ist die Hydrologie, die sich in diesem Fall auf die Wassermassen in kontinentalen Gebieten bezieht, insbesondere Wasser im Untergrund und Akkumulation (bzw. Abschmelzen) von Schnee oder Eis<sup>27</sup>. Da es keine hinreichend genauen globalen hydrologischen Modelle gibt, werden diese Effekte nicht wie diejenigen der Atmosphäre und des Ozeans reduziert (d.h. durch mathematische und physikalische Modelle, die reale Beobachtungen des betroffenen Parameters assimilieren). Sie werden unter der Annahme, dass die Differenzen zwischen einem statischen Modell des Potentials und den monatlichen GRACE-Modellen *per se* den saisonalen Einfluss der Hydrologie wiedergeben, empirisch bestimmt, und die Differenzen werden angebracht, z.B. bei GOCE als Ersatz für die nötigen Reduktionen. Dies führt dazu, dass andere mögliche Quellen der Variationen oder der Fehler (z.B. säkulare Änderungen, Fehler der Modellierung des Atmosphären-Ozean-Systems, systematische Fehler in den Beobachtungen usw.) als hydrologische Variable betrachtet werden. Es soll erwähnt werden, dass es regionale Studien gibt (besonders in tropischen Urwaldzonen und großen Flusseinzugsgebieten), in denen das hydrologische Signal in den GRACE-Messungen klar erkannt wird (z.B. Schmidt et al. 2006, Llovel et al. 2010, Cazenave and Chen 2010). Diese sind jedoch in ihrer geographischen Ausdehnung begrenzt und deshalb nicht ausreichend zur Erstellung globaler Modelle.

Nominell sollte die nicht gezeitenbedingte Bewegung atmosphärischer Massen periodische Änderungen von  $\pm 15$  mm mit Wellenlängen zwischen 20 km und 2000 km im Geoid erzeugen. Ähnlich wird abgeschätzt, dass die nichtgezeitenbedingte Bewegung ozeanischer und kontinentaler Wassermassen (Wasser im Untergrund und Eismassen) periodische Variationen des

<sup>26</sup> POP: *Paralle Ocean Program*, <http://climate.lanl.gov/Models/POP/>

<sup>27</sup> Tatsächlich deckt der Begriff *Hydrologie* den Wasserkreislauf von der Erdoberfläche in die Atmosphäre und von der Atmosphäre zurück auf die Erde ab, d.h. Verdunstung, Kondensation (in Wolken), Niederschlag, Akkumulation im Boden und in Wassergebieten (Flüsse und Seen), Abfluss ins Meer und wieder Verdunstung. Desungeachtet ist der Wassergehalt der Atmosphäre in den Atmosphärenmodellen durch die Luftfeuchtigkeit und den Luftdruck enthalten. Ebenso schließen die ozeanischen Modelle die Differenz zwischen Niederschlag und Verdunstung sowie den Süßwasserabfluss zum Meer ein. Somit geben die hydrologischen Modelle vor, die fehlenden Komponenten darzustellen: Wasser im Untergrund, Eis und Akkumulation von Schnee.

Geoids zwischen 10 mm und 12 mm mit Wellenlängen von 100 km bis 1000 km im ersten und 10 km bis 8000 km im zweiten Fall hervorrufen (vgl. Peters 2007, Tab. 3.1). Trotzdem konzentrieren sich die derzeitigen Untersuchungen hauptsächlich auf die Minimierung der Fehler aus den Abtastungsintervallen und folglich dem *Aliasing* in den Beobachtungen von GRACE und GOCE (bei CHAMP werden nur die mit den Gezeiten verbundenen Effekte reduziert), wofür die harmonischen Koeffizienten bis Grad und Ordnung  $n,m=50$  korrigiert werden, was einer räumlichen Auflösung von 400 km entspricht. Die Effekte der kürzeren Wellenlängen können noch nicht berücksichtigt werden, da zu ihrer Bestimmung die homogene Überdeckung der Erdoberfläche mit kontinuierlichen und wiederholten hochpräzisen Schweremessungen (z.B. mit Absolut- und Supraleit-Gravimetern) erforderlich wäre, die es erlauben, die räumliche Auflösung der Satelliten-Schwerfeldmissionen zu ergänzen (erhöhen).

Bezüglich der Messung der Niveauunterschiede durch Nivellement ist – wie bereits in 3.1.4 erwähnt – die einzige berücksichtigte (aber nicht immer angebrachte) Reduktion die der lunisolaren Gezeiteneffekte (sog. astronomische Korrektur). In diesem Fall werden die *fluid Love numbers* (siehe Abschnitt 3.4 und vgl. Vaniček und Krakiwsky 1986, S. 599) benutzt und nicht die einer elastischen Erde, wie es in den IERS-Konventionen zur Schätzung der Koordinaten  $\mathbf{X}$  der Punkte auf der Erdoberfläche vereinbart ist. Änderungen durch die Polbewegung (*pole tides*) und die ozeanische oder atmosphärische Auflast werden bis heute als nicht signifikant betrachtet (vgl. Heck 1984).

Diese Beschreibung ist noch sehr unvollständig. Sie erwähnt nur die Modelle, die heute benutzt werden, um die bekannten zeitlichen Änderungen in der Geometrie der Erdoberfläche und im Schwerfeld zu reduzieren. Die detaillierte Auswertung dieser Modelle sowie die Möglichkeiten ihrer Verbesserung gehen über den Umfang dieser Arbeit hinaus und werden hier nicht vertieft. Die Beschreibung ist jedoch nötig, um einige mit den vertikalen Koordinaten verbundene Betrachtungen, dem Gegenstand dieser Arbeit, zu machen (siehe Abschnitt 3.5).

### 3.4. Vertikale Lage und permanente Gezeit

Die Behandlung der permanenten Gezeit ist von besonderer Bedeutung für die Bestimmung vertikaler Koordinaten, da die Reduktion oder Beibehaltung ihrer Effekte (direkt oder indirekt) zu unterschiedlichen Darstellungen sowohl der Erdoberfläche als auch des Schwerfeldes bzw. des Potentials führt (vgl. Abb. 3.5 und Abb. 3.6). Gegenwärtig werden die folgenden Fälle<sup>28</sup> unterschieden (vgl. Mäkinen and Ihde 2009):

- a) *Mean tide*: Die direkten ( $V_t$ ) und indirekten ( $V_d$ ) Effekte der permanenten Gezeit werden beibehalten. Damit entspricht die Geometrie der Erdoberfläche der mittleren Figur (über eine lange bzw. unendliche zeitliche Periode) der durch die permanenten Gezeiten deformierten Erde. Das entsprechende Potentialfeld enthält die Summe des durch diese mittlere deformierte Erde erzeugten Potentials ( $W + V_d$ ) und des Potentials der Gezeiten (bzw. dem direkt durch Sonne und Mond erzeugten) ( $V_t$ ).

<sup>28</sup> Dabei wird davon ausgegangen, dass die periodischen Komponenten immer reduziert werden.

- b) *Zero tide*: Der direkte Effekt ( $V_t$ ) der permanenten Gezeit wird reduziert, während der indirekte Effekt ( $V_d$ ) beibehalten wird. Hierbei ist die Geometrie der Erdoberfläche genauso wie bei der *mean tide*, und das Potentialfeld wird nur durch das Potential der Deformation ( $W + V_d$ ) verändert. D.h. das resultierende Potential wird ausschließlich durch die terrestrischen Massen erzeugt.
- c) *Tide free* (auch *non tide* genannt): Die direkten ( $V_t$ ) und indirekten ( $V_d$ ) Effekte der permanenten Gezeit werden vollständig reduziert, so dass die geometrische Figur und das Schwerfeld der Erde dem Zustand entsprechen, als wenn Sonne und Mond (und die übrigen Himmelskörper) sich im Unendlichen befänden. Die entsprechenden Reduktionen werden normalerweise unter der Annahme bestimmt, dass die säkulare Antwort der Erde auf die Anziehung von Sonne und Mond der Charakteristik eines flüssigen Körpers im hydrostatischen Gleichgewicht entspricht (Munk und McDonald 1960, Zschau und Wang 1985). Dennoch werden diese Reduktionen in einigen Fällen (speziell in den IERS-Konventionen) unter Annahme der gleichen elastischen Reaktion der Erde wie bei den zeitabhängigen Effekten geschätzt, konkret wie bei der halbtägigen Gezeitenfrequenz (siehe Abschnitt 3.3). Dieses Vorgehen erzeugt einen vierten Fall, der *conventional tide free* genannt wird und nach Petit and Luzum (2010, S. 15) "... «conventional tide free» values of quantities do not correspond to truly tide free values that would be observed if tidal perturbations were absent."

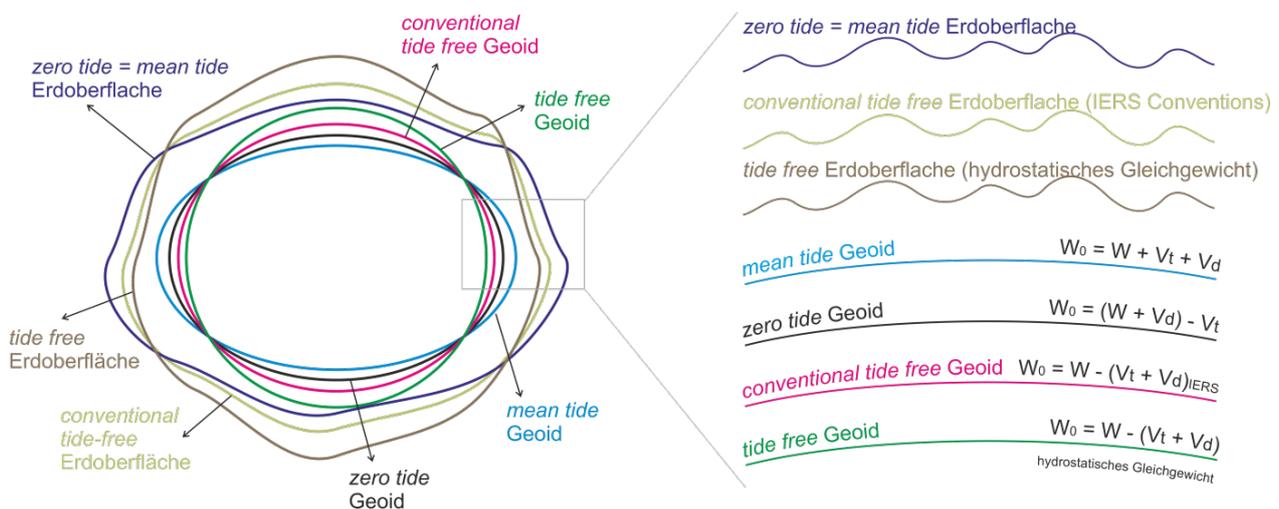
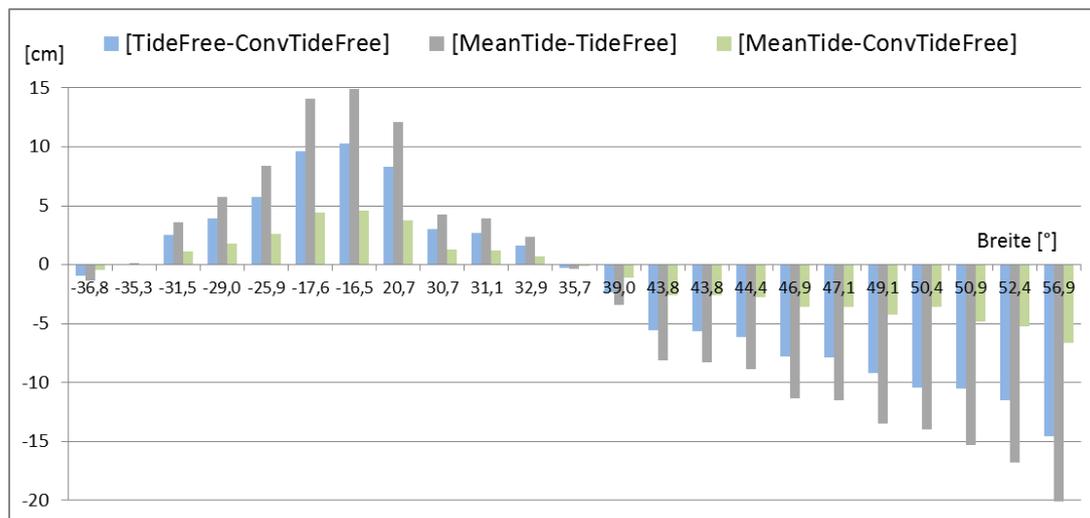


Abb. 3.5: Schematische Darstellung der in der Geodäsie gebräuchlichen Gezeitensysteme

In Übereinstimmung damit kann die Erdoberfläche je nach den angewandten Reduktionen in den Systemen *tide free*, *conventional tide free* oder *mean tide* ( $\equiv$  *zero tide*) dargestellt werden. Analog dazu kann das Schwerfeld (bzw. Schwerebeschleunigung, Potentialfeld, Geoid) in den Systemen *tide free*, *conventional tide free*, *mean tide* oder *zero tide* angegeben werden. Normalerweise werden die Gezeiten ausgehend von der Potentialtheorie und den Ephemeriden der Störkörper (Sonne, Mond usw.) bestimmt. Dabei sind zwei Darstellungsformen gebräuchlich: die erste basiert auf der Laplacesche Gezeitengleichung (vgl. Heck 1993, Gl. 6), die zweite auf der Entwicklung in

sphärisch-harmonische (Kugel-) Funktionen (vgl. Heck 1993, Gl. 8). Beim ersten Vorgehen ist es nicht möglich, die permanenten Effekte von den zeitabhängigen zu unterscheiden oder zu trennen; im Gegenteil, es werden mittlere Love-Zahlen benutzt, die simultan sämtliche Komponenten der Gezeiten enthalten. Durch Anwendung dieser Reduktion erhält man *per se* das Gezeitensystem *tide free*. Um in das System *zero tide* oder *mean tide* zu gelangen, müssen die entsprechenden Effekte analytisch berechnet und in die Ergebnisse des Systems *tide free* eingegliedert werden. Die zweite Darstellungsform erlaubt es, den Effekt jeder Gezeitenkomponente unabhängig zu ermitteln. Um das System *zero tide* oder *mean tide* zu erhalten, genügt es dann, die zur permanenten Gezeit (Frequenz null) gehörenden Love-Zahlen zu Null zu setzen (Heck 1984, S. 41).



**Abb. 3.6:** Differenzen in den ellipsoidischen Höhen von 23 SLR-Stationen, die in den Gezeitensystemen *mean (zero) tide*, *tide free* und *conventional tide free* berechnet wurden.

Bei der Kombination geometrischer und physikalischer Koordinaten geht man davon aus, dass sich beide auf dasselbe Gezeitensystem beziehen, was nicht immer der Fall ist. Es gibt eine große Zahl von Veröffentlichungen, die die Beziehung zwischen den verschiedenen Systemen und deren Pros und Contras erklären. Da es zu weit führt, diese Literatur hier neu zu schreiben, werden im Folgenden die wichtigsten Aspekte von Heikkinen (1979), Groten (1980), Rapp (1983b, 1989), Heck (1984 S. 35ff, 1993), Ekman (1988, 1989, 1996) sowie Mäkinen and Ihde (2009) zusammengefasst. Die grundlegende Theorie zur Modellierung der Reduktionen kann z.B. bei Melchior (1966), Vaníček and Krakiwsky (1986, S. 123ff und S. 587ff), Strobach (1991, S. 105ff), Torge (2001, S. 362ff) nachgelesen werden.

Der Hauptvorteil des Systems *mean tide* ist, dass es die mittlere Lage der tatsächlichen Erdoberfläche (bzw. des Geoids) wiedergibt. Seine Nutzung ist besonders wichtig für ozeanographische und hydrographische Studien, da das Verhalten der Wasseroberfläche nach Reduktion der periodischen Gezeiten getreu reproduziert wird. Daher ist es das Gezeitensystem, das zur Bestimmung des mittleren Meeresniveaus (bzw. der Oberfläche) aus periodischen Messungen der Satellitenaltimetrie oder Pegelregistrierungen benutzt wird (Ekman 1989, Rapp 1989, Heck 1993, Chelton et al. 2001). Der Hauptnachteil dieses Systems ist, dass bei der Lösung des Randwertproblems nach der Formulierung von Stokes keine Massen außerhalb der Randfläche

vorhanden sein dürfen. Dieses System enthält aber die direkte Schwerewirkung von Sonne und Mond, d.h. Massen, die definitiv außerhalb des Geoids liegen (Heck 1993, Ekman 1996). Damit führt die Verwendung von auf das System *mean tide* bezogenen Schwereanomalien bei der Auswertung der Formel von Stokes zu Fehlern von  $\sim 90$  cm in den berechneten Geoidundulationen (Heikkinen 1979). Es gibt einige Vorschläge, die Lösung des Randwertproblems so neu zu formulieren, dass Massen innerhalb und außerhalb des Geoids *akzeptiert* werden (Grafarend and Sansò 1984) oder dass im theoretischen Schwerfeld die Wirkung der permanenten Gezeit als eine zusätzliche Abplattung zu der durch die Erdrotation erzeugten eingeschlossen wird (Zeman 1987, 1993, Poutanen et al. 1996). Bei der Berechnung der Schwereanomalien wären diese dann frei von den genannten Effekten. Der erstgenannte Vorschlag wurde niemals angewandt, während der zweite die Unzulänglichkeit hat, dass bei Lage des Punktes (oder des Objekts) außerhalb der Erde die Rotation (bzw. die Zentrifugalbeschleunigung) verschwindet, die direkte Wirkung der permanenten Gezeit jedoch erhalten bleibt, so dass das Störpotential im Außenraum nicht harmonisch ist, mit der Konsequenz, dass die richtige Modellierung von Satellitenbahnen verhindert wird (Groten 1980, Ekman 1996).

Wenn der direkte Effekt der permanenten Gezeit reduziert wird (d.h. im System *zero tide*), ist das Störpotential im Außenraum harmonisch und genügt den notwendigen Bedingungen zur Berechnung von Satellitenbahnen und der Geoidbestimmung nach der Formel von Stokes. Diese Reduktion ist vergleichbar mit dem Entfernen anderer Masseneffekte außerhalb des Geoids, z.B. der Atmosphäre und der Topographie (Poutanen et al. 1996). Physisch wird die Erdoberfläche nicht verändert (entsprechend der *mean tide*), während das Geoid im System *zero tide* vorliegt. Auch wenn dieses System der grundlegenden Theorie der Physikalischen Geodäsie genügt, ist sein Hauptnachteil, dass die zugehörigen Potentialdifferenzen den Lauf des Wassers, das sich nach dem gesamten Potential bewegt, unabhängig von welchem Körper es erzeugt wird, nicht beschreiben. Die gleiche Begründung gilt für das Verhalten der Frequenzen von Uhren nach der allgemeinen Relativitätstheorie (Mäkinen and Ihde 2009).

Die größte kontroverse Diskussion gibt es im Falle des Systems *tide free* (bzw. *non tidal*). Das Hauptargument dagegen ist die Unmöglichkeit, mittels empirischer Methoden die Love-Zahlen zu bestimmen, die zuverlässig die durch die permanente Gezeit erzeugte Deformation des Erdkörpers und Änderung des indirekten Effekts auf das Schwerepotential beschreiben (Groten 1980, Heck 1984), da ihre Auswirkung nicht von anderen Erscheinungen getrennt werden kann, die ebenfalls zur *ausgeglichenen* Figur der Erde beitragen, d.h. die Zentrifugalbeschleunigung, Konvektion im Mantel und postglaziale Hebung (Heck 1984, Poutanen et al. 1996). Diese unabänderliche Situation führt zur Formulierung von Hypothesen über das rheologische Verhalten der Erde, deren meist akzeptierte, wie bereits erwähnt, die des hydrostatischen Gleichgewichts ist (Munk und McDonald 1960, Zschau und Wang 1985). Aber selbst wenn man die säkularen Love-Zahlen genau bestimmen könnte, würde die Reduktion der permanenten Deformation die wirkliche Form und das Potential der Erde ändern, so dass es nötig wäre, die Trägheitsmomente, die Rotationsgeschwindigkeit und die Zentrifugalbeschleunigung entsprechen zu modifizieren (Ekman 1989). Auf diese Weise stellen die Geometrie und das Schwerfeld eine Erde vollkommen unabhängig von der Wirklichkeit dar. Um die Einführung von Hypothesen und einer irrealen Erde

bei der Analyse geodätischer Beobachtungen zu vermeiden, wird seit Anfang der 1980er Jahre die Benutzung des Systems *zero tide* für das Schwerfeld und des Systems *mean tide* für die Geometrie der Erdoberfläche empfohlen (z.B. Groten 1980, Rapp 1983b, Tscherning 1984, Ekman 1989).

Es ist nicht klar, weshalb beim IERS das System *conventional tide free* benutzt wird. Tatsächlich wird in der Beschreibung des konventionellen terrestrischen Referenzrahmens in den IERS-Standards 1989 (McCarthy et al. 1989, S. 12) ausdrücklich erwähnt, dass die Koordinaten der Referenzstationen *"include the permanent solid Earth tidal deformation so that the adopted coordinates will differ from the instantaneous coordinates by only periodic terms"*. In der folgenden Version der IERS-Standards 1992 (McCarthy 1992, S. 16) wird geschrieben: *"The corrections [der Referenzkoordinaten] to be considered are solid Earth displacement (full correction including permanent effect, so that the extra correction which was originally recommended in order to have zero mean correction is not longer valid), ocean loading, and atmospheric loading"*. Diese Änderung wird in keiner Weise durch Argumente unterstützt, die den Gebrauch des Systems *non tide* an Stelle von *zero tide* rechtfertigen. Außerdem wird diese Empfehlung im Kap. 7 desselben Dokuments (S. 58) revidiert: *"Since the values for the Love numbers  $h_2$  and  $l_2$  substituted in [Formel] (6) are representative only for short-period deformation, this permanent part has no physical significance and must be subtracted from [Formel] (6). As a result, the tide model relates to the true long-time average positions of sites"*. Trotz dieser Inkonsistenz wird klar gesagt, dass die *Reintegration* des Effekts der permanenten Deformation (analytisch mittels Gleichung 6, S. 57 abgezogen) mit denselben Love-Zahlen vorgenommen werden soll, mit denen dieser reduziert wurde. In den späteren Ausgaben, die bereits IERS-Konventionen genannt werden (1992, 2003 und 2010) wird die Behandlung der Effekte der permanenten Gezeit als *site displacement* beibehalten und nicht als eine intrinsische Komponente der Position der Stationen. Außerdem wird ausdrücklich empfohlen, dass die ITRF-Koordinaten im System *tide free* gegeben sein sollen. Im speziellen Fall der IERS-Konventionen 1992 (McCarthy 1996, S. 47 und S. 65) wird gesagt, dass der Effekt der permanenten Deformation auch mit den säkularen (flüssigen) Love-Zahlen berechnet werden kann, was eine gewisse Konfusion erzeugt, da im Falle der Restituierung des Effekts dieselben nominellen Love-Zahlen benutzt werden sollen wie bei der anfänglichen Reduktion. Wenn auch im Laufe der verschiedenen Ausgaben die Entwicklung der Genauigkeit der verwendeten nominellen<sup>29</sup> Love-Zahlen hervorgehoben wird, ergibt sich eine wichtige Änderung von den IERS-Konventionen 1992 (McCarthy 1996) zu denen von 2003 (McCarthy und Petit 2004) indem die Love-Zahlen nicht mehr der reinen elastischen Reaktion der Erde entsprechen sondern auch die unelastische Reaktion berücksichtigen. Schließlich wird die Bezeichnung *conventional tide free system* zum ersten Mal durch die IERS-Konventionen 2003 eingeführt (McCarthy and Petit 2004).

Die geometrisch orientierten Geodäten sind sich bewusst, dass die IERS-Koordinaten sich auf eine irreale Erdoberfläche beziehen (siehe Zitat Petit and Luzum 2010, S. 15). Dennoch wird diese Konvention beibehalten, und die einzige Rechtfertigung ist, dass die Stationspositionen sich um

<sup>29</sup> Z.B. ist die Love-Zahl  $k_{20} = 0,29$  in den IERS-Standards 1989 (McCarthy et al. 1989), 0,30 in den IERS-Standards 1992 (McCarthy 1992), 0,29525 in den IERS-Konventionen 1992 (McCarthy 1996) und 0,30190 in den IERS-Konventionen 2003 (McCarthy und Petit 2004) und 2010 (Petit und Luzum 2010).

mehrere Zentimeter ändern würden und es keine Kontinuität in den Zeitreihen gäbe (Poutanen et al. 1996, Mäkinen and Ihde 2009). Jedoch gab es bereits eine Reprozessierung aller Beobachtungen, die zur Bestimmung des ITRF beitragen (z.B. ITRF2005, ITRF2008) und die Änderung des Gezeitensystems hätte man einschließen können, ohne große Traumata zu verursachen, denn die Stationskoordinaten und deren Zeitreihen wurden völlig neu berechnet. Das Problem würde sich lösen, wenn die bestehenden Programme zur Auswertung der geodätischen Beobachtungen den Effekt der permanenten Gezeit nicht subtrahieren (was erreicht wird, indem die zur permanenten Deformation gehörenden Love-Zahlen zu null und nicht mit den für die halbtägigen Frequenzen gültigen gleich gesetzt werden) oder den Effekt in den endgültigen Stationskoordinaten restaurieren würden (Petit and Luzum 2010, S. 108, Gl. 7.14a, 7.14b).

Dank der IERS-Konventionen und ihres generellen Gebrauchs besteht Gewissheit über das Gezeitensystem in dem Sinne, dass die geometrischen Koordinaten des ITRF, darunter die SIRGAS-Koordinaten, im System *conventional tide free* gegeben sind. Unglücklicherweise ist die Situation bei anderen für die Höhen notwendigen Variablen ganz anders. Z.B. ist es im Falle des Nivellements nicht klar, ob die sogenannte astronomische Korrektur (siehe 3.3) angebracht wurde und wenn ja, ob der Effekt der permanenten Gezeit bei den gemessenen Niveauunterschieden restituiert wurde. Diese Information ist in Südamerika nicht dokumentiert, und deshalb wird angenommen, dass die Gebrauchshöhen derzeit im System *mean tide* gegeben sind. Bei der terrestrischen Gravimetrie benutzte man bis Ende der 1970er Jahre das Potsdamer Referenzsystem (Borrass 1911), dessen Genauigkeit mit  $\pm 3 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  bewertet wurde. Aus späteren Vergleichen mit absoluten Schwerewerten wurden Diskrepanzen von  $+12 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  bis  $+16 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  gefunden, die man in Südamerika nicht berücksichtigte und die ursprünglichen Werte weiterhin benutzte. In Anbetracht dieser Unsicherheit ist das Gezeitensystem irrelevant. Mit der Bestimmung des IGSN71 (Morelli et al. 1974) beginnt die Anwendung der sogenannten Korrektur von Honkasalo (1964), die zum System *mean tide* führt. Wegen der Missstände, die dieses System bei der Geoidbestimmung mit der Formel von Stokes erzeugt (Heikkinen 1979), wurde 1979 entschieden, die Korrektur von Honkasalo nicht mehr anzubringen (Uotila 1980), und es wird die Annahme des Systems *non tide* empfohlen (Mueller 1980). Im speziellen Fall Lateinamerikas wird die Verdichtung des IGSN71 durch das LAGSN77<sup>30</sup> (McConnell et al. 1979) durchgeführt, das diese Empfehlung aufnimmt, und deshalb die Annahme rechtfertigt, dass die entsprechenden Schwerewerte im System *non tide* gegeben sind. Ende der 1980er Jahre beginnt in Südamerika die Schweremessung mit Absolutgravimetern (vgl. Pacino 2007), die allgemein den von Boedecker (1988) aufgestellten Standards folgen und der (heute gültigen) Empfehlung entsprechen, das System *zero tide* zu benutzen (Tscherning 1984). Als Folge wird angenommen, dass die nach 1990 in den Ländern dieser Region eingerichteten Schwerereferenzsysteme im System *zero tide* gegeben sind. Aus dieser Perspektive beziehen sich die verfügbaren Schwerewerte sowohl für die Berechnung geopotentieller Knoten als auch für gravimetrische Geoidmodelle auf unterschiedliche Gezeitenmodelle, und wegen des Fehlens entsprechender Dokumentationen (die noch problematischer bei Informationen aus geophysikalischen Explorationskampagnen sind) ist es unmöglich diese zu unterscheiden, um die notwendige Transformation durchführen zu können.

<sup>30</sup> LAGSN77: *Latin American Gravity Standardization Net 1977*.

Deshalb wird für die numerischen Berechnungen in dieser Arbeit angenommen, dass sich die terrestrischen Schwerewerte auf das System *zero tide* beziehen.

Die globalen Schweremodelle (genauer deren Koeffizient  $\bar{C}_{20}$ ) werden undifferenziert in den Systemen *tide free* und *zero tide* angegeben, und die Konvertierung zwischen ihnen wird als Funktion der Amplitude des permanenten Potentials und der Love-Zahl  $k_{20}$  vorgenommen (vgl. Petit and Luzum 2010, S. 89, Gl. 6.14). Der Wert von  $k_{20}$  ist dabei normalerweise  $0,3^{31}$ , was zu einem System *conventional tide free* führt, das nicht vollkommen konsistent mit dem *conventional tide free* der IERS-Konventionen ist, wo  $k_{20} = 0,30190$  gilt. Außerdem werden unterschiedliche Werte für die Amplitude des permanenten Potentials benutzt, z.B.  $-0,31446$  m bei Cartwright and Edden (1973),  $-0,314593$  m bei Tamura (1987),  $-0,31458$  m bei der Auswertung der Daten der Satellitenaltimetrie,  $-0,31455$  m in den ersten drei Versionen der IERS-Konventionen (bzw. Standards) 1989, 1992, 1996, oder  $-0,31460$  in den beiden letzten (IERS2003 und IERS 2010). Ähnliche Inkonsistenzen finden sich bei der Schätzung der säkularen Love-Zahlen, z.B. definiert Lambeck (1980)  $k_s = 0,94$ , während Mathews (1999) für das Modell PREM  $k_s = 0,933$  angibt.

### 3.5. Folgerungen bezüglich der stationären und zeitabhängigen Komponenten bei der Höhenbestimmung

Als Folgerung aus der in diesem Kapitel diskutierten Standards und Konventionen wird folgendes klar gestellt:

- a) Die Reduktion der durch  $\sum_i \Delta \mathbf{X}_i(t)$  [3.1],  $\sum_i \Delta \Xi_i(t)$  [3.2] sowie  $\sum_i \Delta \Gamma_i(t)$ ,  $\sum_i \Delta \Phi_i(t)$  und  $\sum_i \Delta \mathbf{g}_i(t)$  [3.3] dargestellten Effekte ist nur sinnvoll, wenn diese mit Genauigkeiten besser als oder gleich wie die interne Messgenauigkeit möglich ist, denn andernfalls nimmt die Zuverlässigkeit der Koordinaten ab. Es ist offensichtlich, dass die Modelle, die den Einfluss der lunisolaren Gezeiten beschreiben, diese Bedingung erfüllen (außer bei der permanenten Deformation, siehe 3.4), während diejenigen, die Massenverlagerungen durch nicht-gezeitenbedingte Ursachen in Ozeanen, Atmosphäre und fester Erde repräsentieren, verbessert werden müssen. Eine Möglichkeit wäre, diese Modelle in die Prozessierung einzuführen und deren Parameter durch Ausgleichung zu verfeinern.
- b) Die IERS-Konventionen wirken als Standardisierung bei der Modellierung der mit Erdgezeiten verbundenen periodischen Effekte, denn diese werden im Allgemeinen auch bei der Auswertung der gravimetrischen Satellitenbeobachtungen benutzt. Dennoch muss beachtet werden, dass die auf das Geopotential bezogenen Formulierungen in diesen Konventionen sich an der Satellitenbahnbestimmung orientieren, die für die Positionierung und Schätzung der Erdorientierung benutzt wird (deshalb sind sie kaum für Koeffizienten von Grad und Ordnung größer als  $n,m=12$  anwendbar). Für die Verbesserung der Genauigkeit und Konsistenz bei der Darstellung mit höheren

<sup>31</sup> GOCE benutzt denselben Wert  $k_{20}$  wie in den IERS-Konventionen 2010 definiert (Gruber et al. 2010).

Auflösungen ist die Vereinbarung gleichwertiger Konventionen erforderlich, die speziell auf die Behandlung der durch Effekte nicht-gezeitenbedingter Massenverlagerungen fokussiert sind. Auf diese Weise äußern sich eventuelle Mängel der benutzten Modelle zumindest bei sämtlichen Auswertungen gleich, so dass die notwendige Kompatibilität bei ihren Vergleichen garantiert ist. Ebenso ist es wünschenswert, dass die ozeanischen, atmosphärischen und hydrologischen Modelle bei der Auswertung gravimetrischer Messungen dieselben sind wie die bei der Analyse von Daten der Satellitenaltimetrie und bei der Bestimmung der Erdkrustenauflast benutzen.

- c) Um die überregionale Konsistenz zwischen den Stationen, die den Referenzrahmen bilden, zu garantieren, ist es empfehlenswert, nur die Effekte derjenigen globalen Effekte zu berücksichtigen, die in gleicher Weise (systematisch) berechnet und direkt in allen Punkten, die eine vertikale Koordinate repräsentieren, von den Beobachtungen reduziert werden können. Die Auswirkungen lokaler oder regionaler Erscheinungen (die in begrenzten geographischen Zonen gelegene Punkte beeinflussen) dürfen nicht von den Beobachtungen reduziert werden, und ihre Analyse muss nach der Prozessierung vorgenommen werden, d.h. sie müssen in den Zeitreihen der Vertikalkoordinaten enthalten sein, und ihre Effekte müssen direkt auf der Grundlage dieser Zeitreihen modelliert (bzw. reduziert) werden.
- d) Es ist unbestreitbar, dass die kurzperiodischen geodynamischen Effekte von den terrestrischen gravimetrischen Messungen und dem Nivellement reduziert werden müssen, da sie lange Zeiträume erfordern, um eine ausgedehnte geographische Region (z.B. ein Land) zu überdecken. Die Effekte längerer Perioden, die als konstant für aufeinanderfolgende Messungen bzw. nahegelegene Punkte anzusehen sind und deshalb nicht berücksichtigt werden, können minimiert werden, indem man die Ausgleichung der Beobachtungen mit kinematischen Modellen durchführt, die zeitliche Koordinatenänderungen (Niveau- und Schweredifferenzen) als zusätzliche Unbekannte einschließen. Dazu wäre es nötig, beim Registrieren der entsprechenden Messungen den genauen Zeitpunkt ihrer Durchführung anzugeben, und ebenso wie bei der GNSS-Positionierung müssen die Koordinatenwerte die gültige Epoche enthalten.
- e) Um zu vermeiden, dass die vertikale Position von Inkonsistenzen in den benutzten Hypothesen bei der Realisierung des Systems *tide free* (bzw. *conventional tide free*) beeinflusst wird, muss der Effekt der permanenten Gezeit als integraler Bestandteil der Punktposition betrachtet werden und nicht als eine *Verlagerung*, wie es die IERS-Konventionen bezeichnen, d.h. es muss die Definition aus den IERS-Standards 1989 wiederaufgenommen werden (McCarthy et al. 1989, S. 12). Gleichermäßen ist es empfehlenswert, dass die Schweremodelle direkt im System *zero tide* bestimmt werden, und später können Interessierte diese in *conventional-tide-free*-Werte konvertieren. Dennoch stimmt die Autorin dieser Arbeit mit Ekman (1996, S. 9511) überein, der schreibt: "*The non-tidal case is not relevant in any situation and should be done away with where still used!*"
- f) Um die Konsistenz mit denjenigen Anwendungen sicherzustellen, die das Geoid im System *mean tide* (z.B. Ozeanographie, Bestimmung von Niveauunterschieden durch

Atomuhren) erfordern, müssen die Konversionsparameter als Teil der Konventionen des Vertikalsystems bereitgestellt werden.

- g) Die Modellierung der zeitlichen Variationen der Vertikalkoordinaten erfordert quasistationäre Referenzflächen, denn wenn die Realisierung dieser Flächen zeitliche Änderungen aufnahme, wäre es sehr schwierig, die Veränderung der Koordinaten selbst von den Änderungen der Referenzfläche zu trennen. Z.B. dürfen eventuelle Geoidvariationen (siehe  $\delta N_p$  in Abb. 3.7) nicht als Änderungen der Höhe eines gegebenen Punktes interpretiert werden (siehe  $\delta h_p \sim \delta H_p$  in Abb. 3.7). Um zu wissen, ob ein Punkt seine Position verändert hat, ist es vielmehr unerlässlich, dass seine Höhe (vgl.  $H_p(t_0), H_p(t_i)$  in Fig. 3.7) über einer unveränderlichen Referenzfläche gegeben ist ( $H=0, t_0$ ), wie Hipkin (2002, S. 124) schreibt: *"We shall have very great difficulty understanding the physics of how and why the Earth varies if we keep redefining the length of the ruler to match our current best estimate of the object being measured"*. Es darf nicht übersehen werden, dass das Geoid eine Äquipotentialfläche und deshalb den durch das Schwerfeld verursachten Änderungen unterworfen ist. Folglich wird empfohlen, dass das Geoid (bzw.  $W_0$ ) als Referenzfläche quasistationär definiert, aber seine Realisierung mit einer bestimmten Epoche verbunden wird. Dadurch können seine Variationen bezüglich einer *absoluten* Referenzfläche, z.B. ( $H=0, t_0$ ) in Abb. 3.7, modelliert werden. Das Geoid übereinstimmend mit dem veränderlichen mittleren Meeresspiegel zu halten ist unangebracht, denn *„Geodesy has a vital role to play in providing a rigorous datum against which the rise in 'mean sea level' can be measured and against which state-switching in the pattern of ocean circulation might be identified. How can this be done if the datum is defined to remain coincident with the phenomenon?"* (Hipkin 2002, S. 126; der unterstrichene Text ist im Original hervorgehoben). Das Referenzellipsoid (bzw.  $U_0$ ) kann zeitlich invariant gehalten werden, ohne dass dies die Bestimmung der geometrischen Vertikalkoordinate beeinflusst.

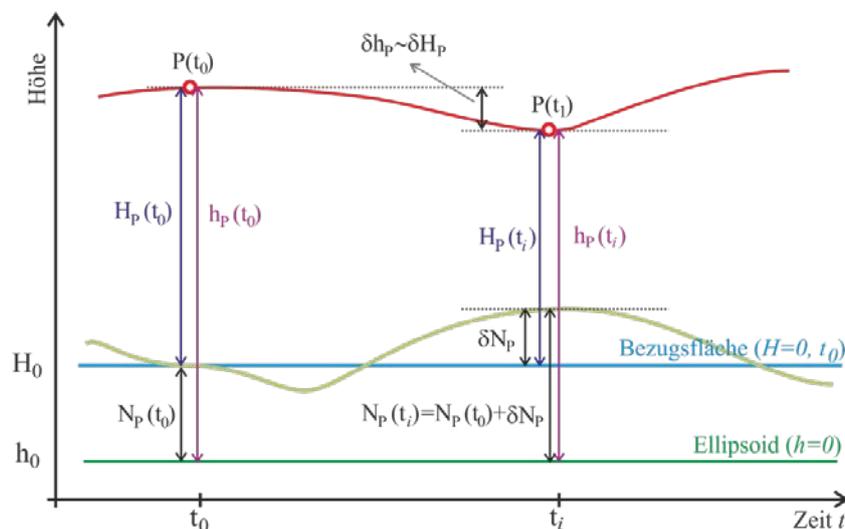


Abb. 3.7: Trennung der zeitlichen Änderungen der Vertikalkoordinaten und seiner Referenzflächen.

## 4. Realisierung eines konventionellen globalen vertikalen Referenzsystems

Schwerpunkte der Realisierung des im Kapitel 2 definierten vertikalen Referenzsystems sind erstens die Einrichtung eines zugänglichen Referenzrahmens, dessen Stationskoordinaten sich unter Berücksichtigung der im Kapitel 3 beschriebenen Konventionen auf dieses System beziehen, und zweitens die Festlegung des physikalischen Referenzniveaus, d.h. des Referenzwertes  $W_0$ , und die folgende Modellierung der durch dieses  $W_0$  definierten Referenzfläche. Demzufolge werden in diesem Kapitel die Charakteristiken des vertikalen Referenzrahmens sowie die Strategie für die Bestimmung und Realisierung des  $W_0$  beschrieben.

### 4.1. Referenzrahmen

Der direkte Zugang zum globalen vertikalen Referenzsystem ist über ein Netz von Punkten mit Vertikalkoordinaten bezüglich dieses Systems, d.h. über einen globalen vertikalen Referenzrahmen, möglich. Dieser Rahmen sollte in ähnlicher Weise wie der geometrische eingerichtet werden, d.h. mit globaler Überdeckung (wie z.B. der ITRF<sup>1</sup>) und kontinentalen Verdichtungen (wie z.B. SIRGAS<sup>2</sup>, EUREF-EPN<sup>3</sup>, NAREF<sup>4</sup>, ...), die ihrerseits durch nationale Netze verdichtet sind (z.B. MAGNA<sup>5</sup>-Kolumbien, RAMSAC<sup>6</sup>-Argentinien, REMOS<sup>7</sup>-Venezuela, ...). Diese Hierarchie ermöglicht den Zugang zum einheitlichen globalen Referenzsystem auf jedem regionalen oder lokalen Niveau. Gemäß der im Abschnitt 2.3 dargestellten Definition und den Empfehlungen im Abschnitt 3.5 werden im Folgenden die Grundcharakteristiken dieses Rahmens diskutiert.

#### 4.1.1. Verbindung mit dem ITRS/ITRF

Die Fundamentalstationen des vertikalen Referenzrahmens müssen mit ununterbrochen registrierenden GNSS-Empfängern ausgerüstet sein, so dass die ellipsoidischen Höhen und deren zeitliche Änderungen (Definition [2.12]), einschließlich solchen seismischen Ursprungs (Erdbeben), mit höchster Genauigkeit (mm) über den ITRF bestimmt werden können. Auf jeden Fall muss sichergestellt werden, dass die entsprechenden GNSS-Messungen jedes Mal reprozessiert werden können, wenn die Standards und Konventionen des IERS sich ändern, so wie es derzeit (2014) mit den Netzen der verschiedenen geodätischen Verfahren im ITRF (d.h. GNSS<sup>8</sup>, VLBI<sup>9</sup>, SLR<sup>10</sup>, DORIS<sup>11</sup>) geschieht. Es ist unbestreitbar, dass die Bestimmung der

<sup>1</sup> ITRF: *International Terrestrial Reference Frame*, [www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/ITRF/itrf.html](http://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/ITRF/itrf.html)

<sup>2</sup> SIRGAS: *Sistema de Referencia Geocéntrico para las Americas*, [www.sirgas.org](http://www.sirgas.org)

<sup>3</sup> EUREF-EPN: *European Reference Frame, Permanent Network*, [www.epncb.oma.be](http://www.epncb.oma.be)

<sup>4</sup> NAREF: *North America Reference Frame Densification*, [www.naref.org/naref/index.html](http://www.naref.org/naref/index.html)

<sup>5</sup> MAGNA: *Marco Geocéntrico Nacional de Referencia*, [www.igac.gov.co](http://www.igac.gov.co)

<sup>6</sup> RAMSAC: *Red argentina de monitoreo satelital continuo*, [www.ign.gov.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Ramsac](http://www.ign.gov.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Ramsac)

<sup>7</sup> REMOS: *Red de estaciones de monitoreo satelital GPS*, [www.igvsb.gob.ve/vistas/remos.php](http://www.igvsb.gob.ve/vistas/remos.php)

<sup>8</sup> GNSS: *Global Navigation Satellite Systems*

<sup>9</sup> VLBI: *Very Long Baseline Interferometry*

<sup>10</sup> SLR: *Satellite Laser Ranging*

<sup>11</sup> DORIS: *Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*

geometrischen Koordinaten [3.1] des vertikalen Referenzrahmens sich auf die Vorschriften des IERS (siehe Abschnitt 3.1.1) beschränken muss mit der einzigen Ausnahme des Gezeitensystems. Solange der IERS die Vereinbarung des *conventional tide free*-Systems beibehält, muss der indirekte Effekt der Permanentzeit an den geometrischen Stationskoordinaten wieder restituiert werden. Auf diese Weise bleiben diese Koordinaten in Übereinstimmung mit den Resolutionen der IAG<sup>12</sup> (z.B. Rapp 1983b, Tscherning 1984) und denen, die im Abschnitt 3.5 dargelegt sind, im *mean* ( $\equiv$  *zero*) *tide*-System. Die Restitution ist durch Anwendung der von Petit and Luzum (2010, S. 108) gegebenen Gleichungen (7.14a) und (7.14b) möglich:

$$\Delta r = [-0,1206 + 0,0001 P_2(\sin \phi)] P_2(\sin \phi) \quad [\text{m}] \quad [4.1a]$$

$$\Delta t = [-0,0252 + 0,0001 P_2(\sin \phi)] \sin 2\phi \quad [\text{m}] \quad [4.1b]$$

worin  $P_2(\sin \phi) = (3 \sin^2 \phi - 1)/2$  und  $\phi$  die geozentrische Breite des Berechnungspunktes sind. Die Gleichungen [4.1] geben die Korrektionswerte in Meter und gelten für eine Amplitude des Permanentpotentials von -0,31460 m (siehe Abschnitt 3.4) und dieselben Love-Zahlen in der ursprünglichen Reduktion der Gezeiteneffekte, d.h.  $h_2 = 0,6078$ ,  $l_2 = 0,0827$ ,  $h^{(2)} = 0,0006$ ,  $l^{(2)} = 0,0002$  (siehe Petit and Luzum 2010, Table 7.1). Falls der IERS diese Werte ändert, müssen die Gleichungen [4.1] gleichermaßen angepasst werden. Die radiale Komponente ( $\Delta r$ ) dieses Effekts variiert zwischen -0,12 m und +0,06 m, während die tangentielle Komponente (Nord-Süd ( $\Delta t$ )) sich von -0,025 m bis +0,025 m ändert (Abb. 4.1). Dieser Effekt in der ellipsoidischen Höhe ( $\Delta h_T$ ) der Stationen ist gegeben durch (vgl. Ihde et al. 2008):

$$\Delta h_T = 0,0602 - 0,1790 \sin^2 \varphi - 0,0018 \sin^4 \varphi \quad [\text{m}] \quad [4.2]$$

worin  $\varphi$  die geodätische Breite ist, deren Beziehung zur geozentrischen Breite auf dem GRS80-Ellipsoid durch  $\varphi - \phi = 0,192424^\circ \sin 2\varphi$  gegeben ist.

#### 4.1.2. Verbindung zum lokalen vertikalen Datum

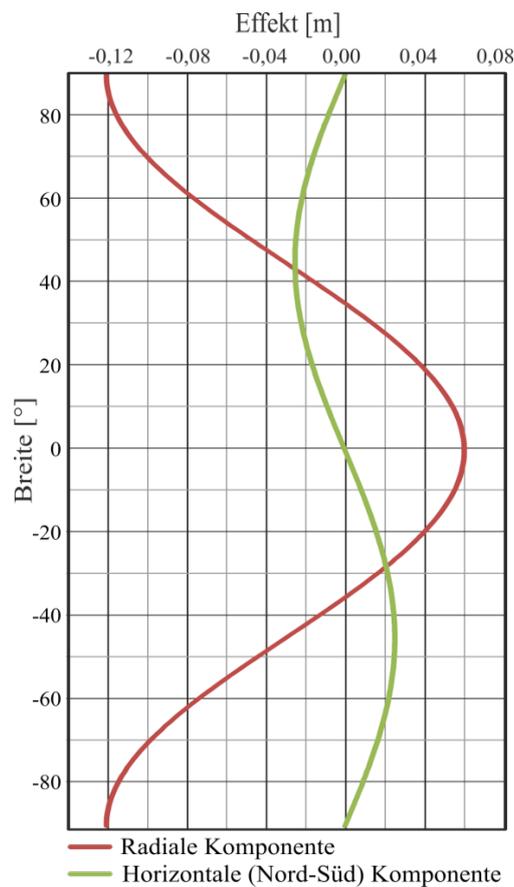
Analog zu [3.1], [3.2] und [3.3] können die geopotentiellen Koten geschrieben werden als

$$C^i(t) = C_0^i + \left. \frac{dC}{dt} \right|_{t_0} (t - t_0) + \sum_n \Delta C_n(t) + \varepsilon_C \quad [4.3]$$

Der obere Index  $i$  zeigt an, dass die geopotentielle Kote sich auf ein lokales Referenzniveau (Meerespegel) bezieht, der Subindex 0 gibt die Epoche  $t_0$  an, für die die geopotentielle Kote gilt, der zweite Term berücksichtigt die lineare zeitliche Veränderung von  $C$ ,  $\sum_n \Delta C_n(t)$  enthält die Effekte der Variationen von  $C$  mit Magnituden größer als die Messunsicherheit und  $\varepsilon_C$  schließt die Summe der zufälligen Fehler und verbleibenden nicht oder mit unzureichender Genauigkeit modellierten Effekte ein. Die Verbindung der Stationen des globalen vertikalen Referenzrahmens mit dem lokalen vertikalen Datum (Bestimmung von  $C_0^{(i)}$  in [4.3]) muss mittels geopotentieller

<sup>12</sup> IAG: *International Association of Geodesy*, [www.iag-aig.org](http://www.iag-aig.org)

Koten, die aus geometrischen Nivellements erster Ordnung (vgl. [2.3]) abgeleitet wurden, durchgeführt werden, da dies die Methode mit der zur Zeit höchsten Genauigkeit ist. Es muss erwartet werden, dass die nivellierten Höhenunterschiede  $\delta n$  in der Berechnung von  $C_0^{(i)}$  bestmöglich frei von systematischen Fehlern sind, was durch die Anwendung der erforderlichen Strategien zur Minimierung von Effekten, wie z.B. unzureichende Kalibrierung der Latten, Bewegung des Nivellierinstrumentes oder der Latten während der Messung, Instabilität des Messsystems durch abrupte Temperaturänderungen, troposphärische Refraktion usw. (vgl. z.B. Kahmen 1997, Kap. 11.2.4), erreicht werden kann.



**Abb. 4.1:** Effekt der permanenten Gezeit, der an den geometrischen Koordinaten (gemäß IERS) angebracht werden muss, um die Lage der Punkte im mean ( $\equiv$  zero) tide-System anzugeben.

In  $\sum_n \Delta C_n(t)$  werden vor allem die Effekte der periodischen Komponenten der Erdzeiten berücksichtigt, da diese systematische Fehler in ausgedehnten vertikalen Netzen (siehe Abschnitt 3.1.4) erzeugen können, insbesondere wenn sie sich in Nord-Süd-Richtung erstrecken. Die Auswirkungen  $\Delta \delta n_T$  können abgeschätzt werden durch (vgl. Vaniček und Krakiwski 1986, S. 599, Heck 1993, S.19):

$$\Delta \delta n_T = -\frac{d}{r g} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=2}^{\infty} (1 + k_n - h_n) \frac{\partial \delta V(t)_{E_{n,j}}}{\partial z(t)_j} \cos(A(t)_j - \alpha) \quad [4.4]$$

Der Subindex  $j$  gibt den Beitrag des Mondes ( $j=1$ ) und der Sonne ( $j=2$ ) an,  $-\frac{\delta V(t)_{E_n,j}}{r\bar{g}} \frac{\partial z(t)_j}{\partial z(t)_j}$  ist die Horizontalkomponente der Gezeitenbeschleunigung (vgl. [3.4]),  $z(t)_j, A(t)_j$  stellen die geozentrische Zenitdistanz und das Azimut des entsprechenden Himmelskörpers dar,  $d$  ist die Strecke zwischen den nivellierten Punkten  $P_k$  und  $P_{k+1}$ ,  $\alpha$  das Azimut zwischen  $P_k$  und  $P_{k+1}$ ,  $r$  der mittlere Erdradius,  $\bar{g}$  der mittlere globale Schwerewert und  $k_n, h_n$  sind die Love-Zahlen. Berücksichtigt man nur die zonalen harmonischen Koeffizienten von  $\delta V(t)_E$  bis  $n=3$  für den Mond und  $n=2$  für die Sonne, so kann man [4.4] mit den gültigen Konstanten der *Internationalen Astronomischen Union* (Luzum et al. 2011), den nominellen Werten der Love-Zahlen in den IERS-Standards (Petit and Luzum 2010, S. 83 und 103) und den Parametern des GRS80 (Moritz 2000) schreiben als (vgl. Linzhang et al. 1995):

$$\begin{aligned} \Delta \delta n_r = & \left[ 1,16092 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \left( \frac{\rho}{a} \right) \left( \frac{D_1}{R(t)_1} \right)^3 \cos z(t)_1 + 0,01122 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \left( \frac{D_1}{R(t)_1} \right)^4 (5 \cos^2 z(t)_1 - 1) \right] \times \\ & [d \cos \alpha (\sin \varphi \cos \delta(t)_1 \cos \tau(t)_1 - \cos \varphi \sin \delta(t)_1) + d \sin \alpha (\cos \delta(t)_1 \sin \tau(t)_1)] + \\ & \left[ 0,53314 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \left( \frac{\rho}{a} \right) \left( \frac{D_2}{R(t)_2} \right)^3 \cos z(t)_2 \right] \times \quad [4.5] \\ & [d \cos \alpha (\sin \varphi \cos \delta(t)_2 \cos \tau(t)_2 - \cos \varphi \sin \delta(t)_2) + d \sin \alpha (\cos \delta(t)_2 \sin \tau(t)_2)] - \\ & \left[ 0,57765 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \left( \frac{\rho}{a} \right) d \cos \alpha \sin 2\varphi \right] \quad [\times 10^{-7} \text{ m}] \end{aligned}$$

Die einzelnen Glieder von [4.5] sind in Anhang A beschrieben.

Der letzte Term in [4.5] restituiert den indirekten Effekt der permanenten Gezeit, der implizit in [4.4] reduziert wird, so dass die nivellierten Höhenunterschiede im System *zero tide* dargestellt werden und konsistent mit den IAG-Resolutionen sind. Die Reduktion [4.5] muss unabhängig im Hin- und Rückweg des Nivellements berücksichtigt werden (und nicht in der Kombination aus beiden), weil diese zu unterschiedlichen Zeiten durchgeführt werden.

Streng genommen muss [4.3] auch die Effekte enthalten, die durch gezeitenbedingte Verlagerungen der ozeanischen und atmosphärischen Massen (vgl. [3.4]) verursacht sind und die Oberfläche und Schwere der Erde verändern. Die Reduktion dieser Effekte bei der Auswertung der Nivellements hat die gleiche Struktur wie [4.4] (vgl. Vaniček und Krakiwski 1986, S. 606) mit dem Unterschied, dass  $\delta V_E$  durch  $(\delta V_O + \delta V_{def,O})$  bzw.  $(\delta V_A + \delta V_{def,A})$  ersetzt werden muss (siehe [3.4]). Zum Beweis wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit einige Berechnungen des ozeanischen Auflasteffekts nach dem Modell von Farrell (1972) mit dem Programm SPOTL (Agnew 2012) in Kombination mit den Amplituden und Frequenzen des ozeanischen Gezeitenmodells FES2004 (Letellier 2004, Werte bereitgestellt von OLF, H.-G. Scherneck, Onsala Space Observatory, <http://holt.oso.chalmers.se/loading/>) und den in den Konventionen IERS 2010 (Petit and Luzum 2010) gegebenen Auflast-Love-Zahlen (*load Love numbers*) berechnet. Die Werte der Reduktion ( $\sim 0,005$  mm / 100 km) sind viel kleiner als die erwartete Genauigkeit der endgültigen Höhen und werden deshalb beim geometrischen Nivellement als

vernachlässigbar betrachtet. Analog wird der Effekt der gezeitenbedingten atmosphärischen Auflast als irrelevant angesehen, da dieser zwei- bis dreimal kleiner als die ozeanische Auflast ist. In lokalen vertikalen Netzen sind die in  $\sum_n \Delta C_n(t)$  enthaltenen Effekte vollkommen insignifikant.

### 4.1.3. Kinematische Ausgleichung geopotentieller Knoten

Den Gleichungen [2.2], [2.3] und [4.3] folgend und nach Anbringen der Reduktion [4.5] ist die Potentialdifferenz  $\Delta W_{(k,k+1)}$  zwischen zwei Stationen  $(k,k+1)$  des globalen vertikalen Referenzrahmens zum Zeitpunkt  $t$  gegeben durch:

$$\Delta W_{(k,k+1),t} = \left( C_{0,k+1} + \frac{dC_{k+1}}{dt}(t-t_0) \right) - \left( C_{0,k} + \frac{dC_k}{dt}(t-t_0) \right) + \varepsilon_{\Delta W} \quad [4.6]$$

worin  $\Delta W_{(k,k+1)}$  die Nivellementsmeasurements sind, d.h.

$$\sum_{m=k}^{k+1} [\bar{g}_{(m,m+1),t} \delta n_{(m,m+1),t}] = \left( C_{0,k+1} + \frac{dC_{k+1}}{dt}(t-t_0) \right) - \left( C_{0,k} + \frac{dC_k}{dt}(t-t_0) \right) + \varepsilon_{\Delta W} \quad [4.7]$$

Dabei ist  $\delta n_{(m,m+1)}$  die nivellierte Differenz zwischen zwei benachbarten Höhenfestpunkten  $(m,m+1)$  zum Zeitpunkt  $t$ ,  $\bar{g}_{(m,m+1),t} = \frac{1}{2}(g_{m,t} + g_{m+1,t})$  ist das Mittel der Schwerewerte  $g_m$  und  $g_{m+1}$  ebenfalls zum Zeitpunkt  $t$  und  $\varepsilon_{\Delta W}$  enthält die zufälligen Messfehler und ggf. vernachlässigte Modellfehler. Im Idealfall wird erwartet, dass die nivellierten Differenzen  $\delta n_{(m,m+1)}$  und die Schwerewerte  $g_m$  und  $g_{m+1}$  entlang einer Nivellementsschleife in kürzester Zeit gemessen werden, so dass keine Deformationen durch Bewegungen der Höhenfestpunkte oder Änderungen des Erdschwerfeldes auftreten. Da das geometrische Nivellement besonders in schwierigem Gelände jedoch aufwändig und langsam ist, werden in einem Netz häufig auch Messungen aus verschiedenen Zeiträumen kombiniert, manchmal aus mehreren Jahren. Als Konsequenz ist es erforderlich, in der Ausgleichung der vertikalen Netze eine Reduktion der Potentialdifferenzen auf eine gemeinsame Epoche vorzunehmen. Streng genommen sollte die Gleichung [4.7] zeitliche Veränderungen sowohl der Schwerewerte  $\bar{g}_{(m,m+1)}$  als auch der Höhenunterschiede  $\delta n_{(m,m+1)}$  berücksichtigen. Allerdings erweisen sich die Schwereänderungen insignifikant gegenüber den Höhenänderungen. Falls der durch die Schwerewerte  $\bar{g}_{(m,m+1)}$  erzeugte Fehler in den geopotentiellen Knoten nur 1% derer aus den nivellierten Höhenunterschieden betragen soll, also vernachlässigbar ist, liegt er bei den physikalischen Höhen in der Größenordnung von zehntel Millimetern. Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ist der Fehler in den geopotentiellen Knoten  $\sigma_C$  als Funktion der nivellierten Höhendifferenzen  $\delta n$  und der Schwerewerte  $\bar{g}_{(m,m+1)}$  mit ihren Fehlern  $\sigma_{\delta n}$  bzw.  $\sigma_{\bar{g}}$  gegeben durch

$$\sigma_C^2 = \bar{g}^2 \sigma_{\delta n}^2 + \delta n^2 \sigma_{\bar{g}}^2 \quad [4.8]$$

Im besonderen Fall von Südamerika folgen die mit dem geodätischen Nivellement verbundenen Arbeiten den Vorschriften des *Manual of first order levelling*<sup>13</sup> des *US Coast and Geodetic Survey*, in dem die Präzision der Nivellementsabschnitte erster Ordnung mit  $\pm 4\text{mm}\sqrt{d}$  (mit  $d$  als Distanz in [km] zwischen den nivellierten Punkten) spezifiziert ist. Wenn man diesen Wert als  $\sigma_{\delta n}$  in [4.8] einführt und die Bedingung  $(\bar{g}^2 \sigma_{\delta n}^2) > (\delta n^2 \sigma_{\bar{g}}^2 * 100)$  erfüllt, sind die maximal erforderlichen Amplituden in  $\sigma_{\bar{g}}$  ungefähr  $1 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  für die gemessenen Höhenunterschiede in einer mittleren Höhe von 4000 m (Tab. 4.1). Eine Änderung dieser Größenordnung in  $\bar{g}_{(m,m+1)}$  ist gleichbedeutend entweder mit einer Variation der Höhe der betreffenden Punkte von ungefähr 3 m oder einer beträchtlichen Massenverlagerung, die eine detaillierte Modellierung der Punktumgebung erfordert oder den Punkt als Referenzstation ausschließt. Mit diesen Voraussetzungen und der Tatsache, dass Änderungen dieser Größe normalerweise nicht vorkommen, kann angenommen werden, dass  $\frac{d\bar{g}_{(m,m+1)}}{dt} = 0$  und dass Variationen in  $C_k$  und  $C_{k+1}$  eine Folge von Änderungen in  $\delta n_{(m,m+1)}$  sind. Da die Zeitdauer des Nivellements von  $k$  nach  $k+1$  sehr kurz im Vergleich zur gesamten Messung des Höhennetzes ist, wird vereinbart, dass jedes  $\delta n_{(m,m+1)}$  sich auf die spezifizierte Epoche  $t$  bezieht, d.h. es wird angenommen, dass zwischen  $k$  und  $k+1$  keine (vertikalen) Positionsveränderungen während der Messung von  $\delta n_{(m,m+1)}$  stattfinden und dass der Zeitraum für diese Messung durch den Zeitpunkt  $t$  repräsentiert wird. Damit sind  $k$  und  $k+1$  nicht nur Fundamentalpunkte des vertikalen Referenzrahmens, sondern sie stellen auch die Endpunkte der in verschiedenen Zeiträumen gemessenen Nivellementslinien dar.

**Tab. 4.1:** Erforderliche Präzision der Schwerewerte für die Bestimmung geopotentieller Koten (aus Sánchez 2002).

| Höhe, in der der Unterschied gemessen wird [m] | $\sigma_g$ für $d = 1$ km<br>[ $10^{-5} \text{ m s}^{-2}$ ] | $\sigma_g$ für $d = 2$ km<br>[ $10^{-5} \text{ m s}^{-2}$ ] |
|--|---|---|
| 10   | 400   | 566   |
| 20   | 200   | 283   |
| 30   | 133   | 189   |
| 40   | 100   | 141   |
| 50   | 80  | 113   |
| 70   | 57  | 81  |
| 100  | 40  | 57  |
| 200  | 20  | 28  |
| 500  | 8   | 11  |
| 1000   | 4   | 8   |
| 2000   | 2   | 4   |
| 4000   | 1   | 2   |

Schreibt man [4.7] um in

<sup>13</sup> Erste Ausgabe veröffentlicht 1929 mit Aktualisierungen 1935, 1939, 1943 und 1948. Z. Zt. Verfügbar unter [www.ngs.noaa.gov/PUBS\\_LIB/Geodeticleveling\\_nos\\_3.pdf](http://www.ngs.noaa.gov/PUBS_LIB/Geodeticleveling_nos_3.pdf)

$$\sum_{m=k}^{k+1} \left[ \bar{g}_{(m,m+1)} \delta n_{(m,m+1)} \right]_t = C_{0,k+1} - C_{0,k} + \frac{dC_{k+1}}{dt}(t-t_0) - \frac{dC_k}{dt}(t-t_0) + \varepsilon_{\Delta W} \quad [4.9]$$

und setzt überschüssige Messungen voraus, so kann [4.9] mittels eines Gauß-Markov-Modells mit  $n$  Messungen (gemessene geopotentielle Koten: Vektor  $\mathbf{b}$ ) und  $u$  Unbekannten (geopotentielle Koten und deren zeitliche Änderungen: Vektor  $\hat{\mathbf{x}}$ ) gelöst werden:

$$\hat{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{b} + \mathbf{v} ; \mathbf{K}_{bb} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{bb} = \sigma_0^2 \mathbf{P}_{bb}^{-1} , \quad [4.10]$$

Darin ist  $\boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{x}})$  das funktionale Modell,  $\mathbf{v}$  der Vektor der Residuen der Beobachtungen,  $\hat{\mathbf{b}}$  der Vektor der korrigierten Beobachtungen (d.h. die dem funktionalen Modell entsprechenden),  $\sigma_0^2$  ist die a-priori-Varianz der Beobachtungen,  $\mathbf{Q}_{bb}$  die Kofaktorenmatrix der Beobachtungen und  $\mathbf{P}_{bb}$  die Gewichtsmatrix der Beobachtungen, die beim Nivellement einer Diagonalmatrix mit dem Kehrwert der Entfernung der Punkte  $k, k+1$  entspricht, d.h.  $P_{\delta n(k,k+1)} = \frac{1}{d_{(k,k+1)}}$ .

Das funktionale Modell in [4.10] wird allgemein linearisiert als

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}} &= \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{b} + \mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A} \Delta \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{A} &= \left( \partial \boldsymbol{\psi}(x) / \partial x \right)_{\mathbf{x}_0} \end{aligned} \quad [4.11]$$

worin  $\mathbf{x}_0$  die Anfangswerte der Parameter darstellt und  $\mathbf{A}$  die Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen des funktionalen Modells bezüglich der Parameter ist. Im vorliegenden Fall, da [4.9] linear ist, gilt:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{T} \mathbf{A}_1] ; \hat{\mathbf{x}} = \left[ \hat{\mathbf{C}}_{0,k}^T \mid \frac{d\hat{\mathbf{C}}_k}{dt} \right]^T \quad [4.12]$$

$\mathbf{A}_1$  ist die übliche Matrix der stationären Nivellements-Ausgleichung und die Diagonalmatrix  $\mathbf{T}$  enthält die Elemente  $(t - t_0)$  für  $t = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ .

[4.11] kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A} \Delta \hat{\mathbf{x}} - (\mathbf{b} - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{A} \Delta \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}_0 + \Delta \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{l} &= \mathbf{b} - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad [4.13]$$

und unter der Grundbedingung  $\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{v} = \min$  ist die Lösung gegeben als

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{l}) = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{l}' \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} &= \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{A} \\ \mathbf{l}' &= \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{l} \end{aligned} \quad [4.14]$$

Darin ist  $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$  die Kofaktorenmatrix der Parameter,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{v}}{n - u} = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{1} - \Delta \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{1}}{n - u}$$
 die a-posteriori Varianz und

$$\hat{\mathbf{K}}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$$
 die Varianz-Kovarianz-Matrix der Parameter.

In [4.12] wird angenommen, dass jede betrachtete Station  $k, k+1$  in mindestens zwei Epochen gemessen wurde. Da aber in Südamerika Wiederholungsmessungen der Nivellements in nationalen Höhennetzen sehr limitiert (fast nicht vorhanden) sind, können Singularitäten auftreten und die Inversion ( $\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1}$ ) wird nicht möglich sein. Um diesen Missstand zu lösen, wird unter Bezug auf die Ausführungen im Abschnitt 3.1.4 vorgeschlagen, die in [4.9] enthaltenen Werte  $\frac{dC_k}{dt}, \frac{dC_{k+1}}{dt}$  mit  $\frac{dh_k}{dt} \gamma_k, \frac{dh_{k+1}}{dt} \gamma_{k+1}$  gleichzusetzen. Darin sind  $\frac{dh_k}{dt}, \frac{dh_{k+1}}{dt}$  die aus kontinuierlichen GNSS-Messungen berechneten linearen Variationen der ellipsoidischen Höhen auf den Referenzstationen  $k, k+1$ , die mit einer zusätzlichen Variation  $v_k$  bzw.  $v_{k+1}$  verfeinert werden können, falls Wiederholungsnivellements verfügbar sind. Eine solche Vereinbarung ist sehr nützlich, weil

- der Rangdefekt bezüglich der zeitlichen Veränderung der geopotentiellen Knoten in der Matrix  $\mathbf{N}$  in [4.14] beseitigt wird,
- die in verschiedenen Epochen durchgeführten Nivellements kombinierbar sind,
- $\frac{dC_k}{dt} = \frac{dh_k}{dt} \gamma_k, \frac{dC_{k+1}}{dt} = \frac{dh_{k+1}}{dt} \gamma_{k+1}$  auch aus einem auf GNSS-Positionierung gestützten vertikalen kinematischen Modell abgeleitet werden können, falls  $k, k+1$  Knotenpunkte darstellen, auf denen keine kontinuierlichen oder wiederholten GNSS-Positionierungen vorliegen, und
- die Werte  $v_k, v_{k+1}$  auf solchen Linien geschätzt werden können, die wiederholt nivelliert wurden.

Der verbleibende Rangdefekt (bezüglich des Datums der geopotentiellen Knoten) in  $\mathbf{N}$  wird durch die Bedingung

$$\mathbf{B}^T \Delta \hat{\mathbf{x}} = 0 \quad [4.15]$$

beseitigt, die besagt, dass das Referenzniveau des ausgeglichenen Netzes dem Mittelwert der Anfangswerte für die geopotentiellen Knoten, d.h.  $\mathbf{x}_0$  in [4.13], entspricht. Auf diese Weise wird das Normalgleichungssystem erweitert auf

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}}_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [4.16]$$

dessen Lösung

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{Q}_{11} \mathbf{l}_i' \quad [4.17]$$

ist, mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad [4.18]$$

Der Subindex  $i$  zeigt an, dass die Normalgleichungen und deren Lösung datumsabhängig sind.

Das Hauptziel dieser Ausgleichung ist es, lokale Normalgleichungen (bezogen auf ein spezifisches vertikales Datum  $i$ ) zu erhalten, die frei von groben Fehlern sind und deren nivellierte Höhendifferenzen (bzw. geopotentielle Koten) sich auf eine gemeinsame Epoche beziehen. Die auf der Ausgleichung eines freien Netzes basierende Methode gewährleistet, dass die interne Konsistenz erhalten bleibt und die Transformation auf (bzw. Integration in) einen globalen vertikalen Referenzrahmen ermöglicht wird. Dieses Thema wird im Kapitel 5 wieder aufgenommen.

#### 4.1.4. Vertikale Koordinaten bezüglich eines globalen Referenzniveaus

Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Vorgehensweise führt zu geopotentiellen Koten bezogen auf ein lokales vertikales Datum ( $W_0^i$ ). Dessen Verbindung zu einem globalen Referenzniveau ( $W_0$ ) ist mittels der Bestimmung von  $\delta W_0^i = W_0 - W_0^i$  (vgl. [2.6]) möglich, so dass [4.3] umgeformt wird in

$$C(t) = \delta W_0^i + C_0^i + \frac{dC}{dt}(t - t_0) + \sum_n \Delta C_n(t) + \varepsilon_C \quad [4.19]$$

Die Schätzung des Parameters  $\delta W_0^i$  ist der Inbegriff der Lösung des *Vertikalproblems* (Vereinheitlichung der Höhensysteme) und wird im folgenden Kapitel detailliert behandelt. Das Folgende beschreibt die Berechnung und Realisierung des globalen Referenzwertes  $W_0$ .

## 4.2. Referenzniveau $W_0$

Im Abschnitt 2.3.2 wird vorgeschlagen, das Referenzniveau der physikalischen Höhen (bzw. geopotentiellen Koten) durch einen spezifischen Wert  $W_0$  zu definieren (vgl. [2.16]). Auch wenn dieser Wert willkürlich gewählt werden kann, sollte er mit denselben Observablen bestimmt werden, die für seine Realisierung vorgesehen sind (d.h. die Geoidbestimmung), damit die Definition und ihre Realisierung (d.h. die geometrische Darstellung der Äquipotentialfläche, auf die sich das gewählte  $W_0$  bezieht) konsistent bleiben. Die bevorzugte Formulierung für dieses Vorgehen ist die Lösung des Randwertproblems, da dies die einzige ist, die das Einführen der notwendigen Bedingungen zur Gewinnung *absoluter* Potentialwerte erlaubt. Wie bereits im Abschnitt 2.4.1 erwähnt, ist es angemessen, die Randfläche in  $n$  Zonen zu unterteilen, von denen sich jede auf ein einzelnes vertikales Datum  $i$  bezieht, und deren Referenzniveaus durch ein  $W_0^i$  gegeben sind. Unter den vielen vorhandenen Zonen wird unterschieden nach der größten

geographischen Ausdehnung der im globalen Rahmen untereinander verbundenen ozeanischen Flächen, die ihrerseits zu demselben vertikalen Datum gehören. Damit wird der Wert  $W_0^{Ozean}$  als globale Referenz angenommen, und auf diesen Wert werden die übrigen existierenden Niveaus  $W_0^i$  in kontinentalen Regionen und Inseln bezogen. In der vorliegenden Arbeit basiert die Schätzung von  $W_0^{Ozean}$  auf der Lösung des fixen Randwertproblems, das grundsätzlich die Bestimmung des Gravitationspotentials  $V$  im Außenraum der Randfläche  $S$  (in diesem Fall die Erdoberfläche) aus den vorhandenen Schweremessungen auf dieser Oberfläche erlaubt und deren Geometrie als bekannt voraussetzt.

#### 4.2.1. Formulierung des fixen Randwertproblems

Die Formulierung des fixen Randwertproblems ist gegeben durch eine Feldgleichung [4.20a], die von  $V$  auf der bekannten Fläche  $S$  zu erfüllende Randbedingung [4.20b] und die Bedingung der Regularisierung im Unendlichen [4.20c] ( $Z$  ist das Zentrifugalpotential nach [2.9]):

$$\nabla^2 V(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \text{ext}(S) \quad [4.20a]$$

$$|\nabla(V + Z)(\mathbf{X})| = g(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in S \quad [4.20b]$$

$$V(\mathbf{X}) = O(|\mathbf{X}|^{-1}), \quad |\mathbf{X}| \rightarrow \infty \quad [4.20c]$$

[4.20a] gilt nur, wenn der Außenraum von  $S$  frei von Massen ist. Deshalb ist es notwendig, die Randwerte  $g$  von der Schwerewirkung der Massen außerhalb der Erdoberfläche zu reduzieren, insbesondere der Sonne, des Mondes und der Atmosphäre. Hier kommen die Empfehlungen im Abschnitt 3.4 zur Geltung: da der indirekte Effekt vollständig durch terrestrische Massen erzeugt wird, werden die Beobachtungen im Gezeitensystem *zero tide* behandelt. In [4.20b] hat unter den verschiedenen Observablen des Schwerfeldes die Norm  $g$  des Schwerevektors  $\mathbf{g}$  Präferenz, weil diese sowohl auf Ozean- als auch auf Kontinent-Flächen verfügbar ist und eine hinreichend homogene Überdeckung bietet, um mögliche Interpolationsfehler zu minimieren und vorauszusetzen, dass die Randwerte (d.h.  $g$ ) durch eine stetige Funktion  $g(\mathbf{X})$  über der gesamten Fläche  $S$  gegeben sind (vgl. Heck and Seitz 1993, Sansò 1995, Seitz 1997, Heck 2011). Diese Gleichung bedeutet, dass ausschließlich Randbedingungen dieses Typs verwendet werden können. Wenn weitere Typen eingeführt werden, ist das Randwertproblem nicht mehr *fest* und wird umgewandelt in ein gemischtes oder überbestimmtes. Hier soll erwähnt werden, dass man, weil der Schwerevektor  $\mathbf{g}$  nicht immer rechtwinklig auf der Fläche  $S$  steht (d.h. der Normalen-Einheitsvektor der Fläche ist  $\mathbf{n} \neq \frac{\mathbf{g}}{g}$ ), von einem schiefachsigen Randwertproblem (*oblique-derivative problem*) spricht, dessen eindeutige Lösung durch die Bedingung der Regularisierung [4.20c] gewährleistet ist (z.B. Koch and Pope (1972), Sansò (1995)).

Die Gleichungen [4.20] müssen zu jeder Zeit gültig sein, so dass die Funktionen  $V$ ,  $Z$  und  $g$  sowie die Fläche  $S$  als zeitlich invariant zu betrachten sind, d.h. als quasistationär (siehe Abschnitt 3.2). Folglich müssen die geodynamischen Effekte mit Magnituden größer als die Präzision der

Messungen von den Observablen  $g$  und der Geometrie  $S$  unter Anwendung der in 3.3 beschriebenen Modelle reduziert werden, um die in 3.5 dargelegten Bedingungen zu erfüllen.

Die analytische Lösung<sup>14</sup> des Gleichungssystems [4.20] erfordert eine Reihe von Näherungen (vgl. Seitz 1997, Heck and Seitz 2003, Heck 2011), deren erste ihre Linearisierung durch Einführen eines genäherten Anfangswertes für die zu bestimmende Unbekannte ist. Wenn das terrestrische Gravitationspotential  $V$  durch ein von einem Niveauellipsoid erzeugten Potential  $V_0$  approximiert wird, erhält man das sogenannte Störpotential  $T := V - V_0$ . Dieses ist genau dann identisch mit dem in [2.4] aufgeführten Potential, wenn das Referenzellipsoid eine der Erdmasse äquivalente Masse einschließt und eine Rotationsgeschwindigkeit (bzw. ein Zentrifugalpotential) äquivalent der quasistationären Erdrotation hat (d.h.  $U(\mathbf{X}) = (V_0 + Z)(\mathbf{X})$ ). Komplementär ist der Normalschwerevektor durch  $\gamma(\mathbf{X}) = \nabla(V_0 + Z)(\mathbf{X})$  gegeben und seine Norm ist  $\gamma(\mathbf{X}) = |\gamma(\mathbf{X})|$ . Auf diese Weise können die Gleichungen [4.20] geschrieben werden als (vgl. Lehmann 1997):

$$\nabla^2 T(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \text{ext}(S) \quad [4.21a]$$

$$\frac{\partial T}{\partial l}(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}) - \gamma(\mathbf{X}) = \delta g(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in S \quad [4.21b]$$

$$T(\mathbf{X}) = O(|\mathbf{X}|^{-1}), \quad |\mathbf{X}| \rightarrow \infty \quad [4.21c]$$

worin  $l(\mathbf{X}) := \frac{\gamma}{\gamma}$  die Richtung des Normalschwerevektors ist und  $\delta g(\mathbf{X})$  die sogenannte Schwerestörung. In Übereinstimmung mit den empirischen Auswertungen von Heck and Seitz (1993) können die vernachlässigten nicht-linearen Terme in [4.21] Auswirkungen der Größenordnung  $15 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$  in den Randbedingungen und  $-0,04 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  im Störpotential haben, Werte die um  $10^{-4}$  kleiner sind als der Beitrag des linearen Hauptterms. Unter Berücksichtigung der Präzision der verfügbaren Observablen unter quasistationären Bedingungen (siehe Abschnitt 3.2) kann der Beitrag der nicht-linearen Terme zur Lösung des Randwertproblems als insignifikant angesehen werden und die lineare Approximation als hinreichend für jede praktische Anwendung (vgl. Heck and Seitz 1993, S. 50).

In Fortführung der Sequenz notwendiger Approximationen ist die Beobachtungsgleichung zu nennen [4.21b], die eine binomiale Reihenentwicklung als Funktion des Quadrats der ersten Exzentrizität ( $e^2$ ) des Ellipsoids darstellt. Der Beitrag des Terms zweiter Ordnung ( $e^4$ ) ist kleiner als  $3 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$ , und man kann sich deshalb ohne größere Fehlerabschätzung auf den Term erster Ordnung beschränken. Damit sind die Gleichungen [4.21] gleichbedeutend mit (vgl. Heck 2011, Gl. 10):

$$\nabla^2 T(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \text{ext}(S) \quad [4.22a]$$

<sup>14</sup> Es gibt auch numerische Lösungen basierend auf der Diskretisierung der Randfläche hauptsächlich mit der Randelementmethode (z.B. Klees 1992, Lehmann 1997, Čunderlík et al. 2008, Čunderlík and Mikula 2009), die in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt werden.

$$-\frac{\partial T}{\partial r} - e^2 \sin \phi \cos \phi \frac{\partial T}{a \partial \phi} = \delta g(\phi, \lambda), \quad \text{auf } S \quad [4.22b]$$

$$T(\mathbf{X}) = O(|\mathbf{X}|^{-1}), \quad |\mathbf{X}| \rightarrow \infty \quad [4.22c]$$

worin  $(r, \phi, \lambda)$  die sphärischen Koordinaten (Radius, geozentrische Breite und Länge) und  $a$  die große Halbachse des Referenzellipsoids sind. Da eine geschlossene Lösung des fixen Randwertproblems nur auf einer sphärischen Randfläche bekannt ist, wird der Term mit  $e^2$  in [4.22b] im Allgemeinen vernachlässigt, und die Werte der Randbedingung werden von der (ungleichförmigen) Erdoberfläche  $S$  auf die Kugeloberfläche  $\Sigma$  übertragen. Diese beiden Näherungen erzeugen Ungenauigkeiten in den Randbedingungen bis zu  $3 \times 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$  für den ersten Fall und  $5 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-2}$  für den zweiten, so dass es notwendig ist, die Auswirkung ihrer Vernachlässigung in die endgültige Lösung wieder einzuführen. In der vorliegenden Arbeit folgen wir der von Heck and Seitz (2003) vorgestellten Strategie, in der das Randwertproblem in seiner einfachsten Form (sphärische Approximation mit konstantem Radius) gelöst wird und die ellipsoidischen Effekte als Korrektur angebracht werden. Um die Ungenauigkeiten zu reduzieren, die durch das Übertragen der Randbedingungen auf die gleichförmige Fläche  $\Sigma$  entstehen, wird die Lösung im Terminus der sogenannten *Molodenskii-Reihe* (z.B. Moritz 1980, Kap. 42, Hofmann-Wellenhof and Moritz 2005, Kap. 8.6) dargestellt. Dadurch wird die Lösung des Gleichungssystems [4.22] mit  $-e^2 \sin \phi \cos \phi \frac{\partial T}{a \partial \phi} = 0$  [4.22b]:

$$T = \sum_0^{\infty} T_k = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} (\delta g + g_1 + g_2 + \dots + g_k) S'(\psi) d\sigma \quad [4.23]$$

Die Korrekturen  $g_k$  können rekursiv durch  $g_k = -\sum_{r=1}^k (h - h_i)^r L_r(g_{(k-r)})$  erhalten werden mit

$$L_r(\delta g) = r^{-1} L_1[L_{r-1}(\delta g)], \quad L_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_i}{l_0^3} d\sigma, \quad l_0 = 2R \sin(\psi/2). \quad \text{Die Auswertung beginnt mit } g_0 = \delta g$$

und  $L_1 = L$ . Die Terme  $(h - h_i)$  und  $\psi$  stellen die Höhendifferenz bzw. den sphärischen Abstand des Berechnungspunktes  $(\phi, \lambda)$  vom Integrationspunkt  $(\phi_i, \lambda_i)$  dar, und  $S'(\psi)$  ist durch

$$S'(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - \ln \left( 1 + \frac{1}{\sin(\psi/2)} \right) \quad \text{gegeben. } R \text{ ist der Radius der Kugel } \Sigma, \text{ entsprechend dem}$$

mittleren Erdradius  $R = \sqrt[3]{a^2 b} \approx a(1 - e^2/6)$ , und  $\sigma$  ist die Einheitskugel mit dem Flächenelement  $d\sigma = \cos \phi_i d\phi d\lambda$ . In diesem Fall wird [4.23] ausschließlich in ozeanischen Gebieten ausgewertet, in denen die Randfläche (Meeresoberfläche) sehr viel glatter ist als auf den Kontinenten, und die Korrektur  $g_1$  in [4.23] wird als hinreichend angesehen. Dann formt sich [4.23] um in (vgl. Moritz 1980, Gl. 44-59; Stock 1983, Gl. 3.19; Heck 2011, Gl. 44):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} (\delta g + g_1) S'(\psi) d\sigma \quad ; \quad g_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_i}{l_0^3} \delta g d\sigma \quad [4.24]$$

Die sphärische Lösung [4.24] des Randwertproblems kann auf eine Ellipsoidoberfläche durch Addition des zusätzlichen Terms  $\delta T_E(\phi, \lambda)$ , der die ellipsoidischen Effekte darstellt, erweitert werden. Es gibt verschiedene Formulierungen (z.B. Molodenskii et al. 1962, Moritz 1980, Rapp 1981, Martinec and Grafarend 1997, Fei and Sideris 2000, 2001, Sjöberg 2003, 2004, Najafi-Alamdary et al. 2012)<sup>15</sup>, die grundsätzlich auf der Reihenentwicklung der Randbedingungen in Termen des Quadrats der ersten ( $e^2$ ) oder zweiten ( $e^2$ ) Exzentrizität des Referenzellipsoids basieren, so dass die durch diese Approximation erzeugten Fehler auf die Größenordnung  $O(e^4)$  bzw.  $O(e^4)$  reduziert werden ( $\sim \pm 2$  mm in den Geoidundulationen, siehe Martinec and Grafarend 1997). Die ellipsoidischen Korrekturen können entweder zum Störpotential (z.B. Fei and Sideris 2000, 2001, Heck and Seitz 2003, Sjöberg 2003), zu den Randwerten (z.B. Moritz 1980, S. 425), zur Gewichtsfunktion (Martinec and Grafarend 1997) oder zu mehreren von diesen gleichzeitig (Martinec and Grafarend 1997, Sjöberg 2004, Najafi-Alamdary et al. 2012) hinzugefügt werden. Die analytische Struktur der Korrekturterme variiert beträchtlich zwischen den verschiedenen Vorschlägen, da sie von der Definition der sphärischen Näherung, der Modifikation der Randbedingungen, dem verwendeten Koordinatensystem usw. abhängen. Dennoch zeigen Huang et al. (2003), Ellmann (2005) sowie Heck and Seitz (2003), dass die Endergebnisse praktisch äquivalent sind<sup>16</sup>.

Die in der vorliegenden Arbeit benutzte Strategie zur Schätzung der ellipsoidischen Korrektur  $\delta T_E(\phi, \lambda)$  [4.25] basiert auf der Arbeit von Heck and Seitz (2003), die das ganze Vorgehen für das lineare skalar freie Randwertproblem präsentieren. Die äquivalente Lösung für das fixeeste Randwertproblem ist (siehe die detaillierte Ableitung im Anhang B):

$$\begin{aligned} \delta T_E(\phi, \lambda) = & \frac{e^2}{5} \left[ T_{20} + \frac{12}{7} T_{30} \sin \phi + \frac{24}{7} (T_{31} \cos \lambda + T_{3,-1} \sin \lambda) \cos \phi \right] \\ & - \frac{e^2}{2} \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \left[ \frac{(n-3)}{(n+1)} \alpha_{n-2,m} T_{n-2,m} + \left[ \beta_{nm} \frac{(n-2)}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)} \right] T_{nm} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(n+3)}{(n+1)} \gamma_{n+2,m} T_{n+2,m} \right] Y_{nm}(\phi, \lambda) + O(e^4) \right] \end{aligned} \quad [4.25]$$

$T_{nm}$  sind die harmonischen Koeffizienten des Störpotentials  $T$ , die aus der Differenz zwischen den in einem globalen Schwerefeldmodell (GGM, vgl. [2.8]) enthaltenen Werten und dem Normalpotential eines Referenzellipsoids (hier das GRS80) gewonnen werden können, d.h. für  $T_{n0}$  mit  $n=2$ ,  $n=4$ ,  $n=6$  und  $n=8$  gilt  $T_{n0} = \bar{C}_{n0}^{GGM} - J_{n0}^{GRS80}$ . Für die übrigen in [4.25] notwendigen harmonischen Koeffizienten wird  $T_{nm} = \bar{C}_{nm}^{GGM}$ ,  $T_{n,-m} = \bar{S}_{nm}^{GGM}$  gesetzt. Die Koeffizienten  $\alpha_{nm}$ ,  $\beta_{nm}$  und  $\gamma_{nm}$  sind im Anhang B beschrieben.

<sup>15</sup> Diese Literatur widmet sich der ellipsoidischen Korrektur im skalar freien Randwertproblem; nur Brovar et al. (2001) und Najafi-Alamdary et al. (2012) betrachten das fixe Randwertproblem.

<sup>16</sup> Da die analytische Formulierung der ellipsoidischen Korrekturen sehr unterschiedlich ist, ist ein direkter Vergleich von diesen nicht möglich, und ihre Auswirkungen werden über die resultierenden Geoidundulationen abgeschätzt.

### 4.2.2. Vom Störpotential $T$ zum Wert $W_0$

Wäre die in [4.21] betrachtete Randfläche  $S$  eine Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes und zusätzlich (1) wären die für die Berechnung der Schwerestörungen und Koordinaten der Fläche  $S$  verwendeten gravimetrischen und geometrischen Messungen frei von Fehlern und (2) könnte das Randwertproblem ideal (d.h. ohne Approximationen) gelöst werden, würde es genügen, den Potentialwert  $U_0$  des Normalfeldes zum bekannten Wert  $T$  eines einzigen Punktes auf der Fläche  $S$  zu addieren und man würde den Potentialwert dieser Fläche, d.h.  $W_0 = U_0 + T$ , kennen. Dies ist jedoch nicht möglich, weil bis heute die Gleichung [4.24] in Kombination mit [4.25] das (quasistationäre) Störpotential in denjenigen Punkten  $k$  liefert, die in diskreter Form die (quasistationäre) Geometrie der Randfläche  $S$  darstellen. Wenn die genannte Gleichung nur auf Meeresflächen ausgewertet wird ( $S_o$ ), kann der Wert  $W_0$  ausgehend von [2.6] und [3.2] dargestellt werden durch

$$W_0^k = U_0 - (h^k - \Xi^k) \bar{\gamma}^k + T^k \quad [4.26]$$

worin  $h^k$  die ellipsoidische Höhe und  $\Xi^k$  die Meeresflächentopographie (siehe Abschnitt 3.1.2) in jedem Punkt  $k$  ist.  $h$  und  $\Xi$  müssen gleichermaßen als quasistationär angesehen werden, so dass sie bei der Lösung des Randwertproblems konsistent mit den im Abschnitt 4.2.1 aufgeführten Bedingungen sind. Aufgrund sämtlicher Unsicherheitsquellen, die mit den geodätischen Messungen verbunden sind, von der Modellierung des Schwerefeldes über die Geometrie der Erdoberfläche bis zur Lösung des Randwertproblems, existieren so viele Werte  $W_0$  wie Punkte  $k$ , und deshalb ist es notwendig, eine Ausgleichung durchzuführen, die diese Unsicherheiten minimiert und den wahrscheinlichsten Wert  $W_0$  liefert. Die zu erfüllende Bedingung ist (vgl. Mather 1978 oder [2.15])

$$\int_{S_o} (W_0^k - W_0)^2 dS_o = \min \quad [4.27]$$

und der wahrscheinlichste Wert von  $W_0$  ist

$$W_0 = U_0 + \frac{1}{S_o} \int_{S_o} [T^k - (h^k - \Xi^k) \bar{\gamma}^k] dS_o \quad [4.28]$$

Ersetzt man das Integral in [4.28] in eine Summe diskreter Punkt erhält man

$$W_0 = U_0 + \frac{\sum_1^k [T^k - (h^k - \Xi^k) \bar{\gamma}^k] \delta S_o^k}{\sum_1^k \delta S_o^k} ; \quad \delta S_o^k = \cos \varphi \delta \varphi \delta \lambda \quad [4.29]$$

worin  $\delta S_o^k$  die Größe des Kompartiments zur Diskretisierung der Meeresoberfläche ist.

### 4.3. Empirische Bestimmung von $W_0$

Für die numerische Auswertung von [4.29] werden folgende Daten berücksichtigt:

- a) Ellipsoidische Höhen der Meeresoberfläche  $h^k$ , dargestellt durch ein Modell des mittleren Meeresspiegels (*Mean Sea Surface Model* – MSS), das gemäß 3.5 im *zero tide*-System gegeben sein muss.
- b) Werte der Meeresflächentopographie  $\Xi^k$ , dargestellt durch ein Modell der mittleren dynamischen Topographie (MDT), das heißt, dass mit einer quasistationären Komponente der dynamischen Topographie (DT) gearbeitet wird (siehe Abschnitt 3.1.2). Dieses Modell muss im gleichen Gezeitentensystem wie die MSS gegeben sein.
- c) Das GRS80 (Moritz 2000) als Normalschwerefeld (Werte  $U_0$ ,  $\bar{\gamma}^k$  und Referenzschwerefeld in [4.22]).
- d) Ausgehend von [4.24] und [4.25] geschätzte Werte des Störpotentials  $T^k$ , für welche die Schwerestörungen  $\delta g$  und die für die ellipsoidische Korrektur notwendigen Koeffizienten aus einem Schwerefeldmodell (*Global Gravity Model* - GGM) im *zero tide*-System abgeleitet werden, und die Geometrie der Randfläche mit dem für  $h^k$  verwendeten MSS übereinstimmt.

#### 4.3.1. Abhängigkeit von $W_0$ als Funktion des gewählten Schwerefeldmodells

Zurzeit gibt es eine Vielfalt von GGM, die sich untereinander grundsätzlich durch die in der Berechnung der Koeffizienten enthaltenen Daten unterscheiden: Es gibt Modelle vor den Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE, die sich hauptsächlich auf die dynamische Methode der Satellitenbahnbestimmung stützen, das bekannteste davon ist das EGM96 (Lemoine et al. 1998). Es gibt auch Modelle, die nur CHAMP-Daten enthalten, z.B. die Reihen der Modelle EIGEN<sup>17</sup>-1, EIGEN-2 (Reigber et al. 2002, 2003) und ITG<sup>18</sup>-CHAMP (Ilk et al. 2003), oder nur GRACE-Daten, z.B. die Reihen GGM von UTEX-CSR<sup>19</sup> (Tapley et al. 2003, 2007, 2013) und ITG-GRACE (Mayer-Gürr et al. 2007, 2010), oder nur GOCE-Daten, z.B. die Reihe GO\_CONS\_GCF (Migliaccio et al. 2011, Pail et al. 2011, Bruinsma et al. 2010), oder eine Kombination von GRACE- und GOCE-Daten, z.B. die Modelle GOCO (Pail et al. 2010, Goiginger et al. 2011, Mayer-Gürr et al. 2012) und auch solche mit SLR-Messungen (besonders zum Satelliten Lageos), z.B. die Reihe EIGEN-6S (Förste et al. 2012), oder erweiterte Versionen der Modelle GO\_CONS\_GCF (Bruinsma et al. 2013). Einige dieser Modelle enthalten auch terrestrische Messungen, aus der Satellitenaltimetrie abgeleitete Schwereanomalien, z.B. EGM2008 (Pavlis et al. 2012, 2013) und die Reihe der Modelle EIGEN-6C (Förste et al. 2012). Tatsächlich bietet der IAG-Service *International Centre for Global Earth Models*<sup>20</sup> heute (2014) ungefähr 150 statische (quasistationäre) Modelle an und neun Reihen monatlicher aus GRACE-

<sup>17</sup> *European Improved Gravity model of the Earth by New techniques.*

<sup>18</sup> Institut für Theoretische Geodäsie, Universität Bonn.

<sup>19</sup> *The University of Texas at Austin, Center for Space Research, USA.*

<sup>20</sup> <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>

Messungen abgeleitete Modelle. Es ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit unmöglich, alle diese Modelle auszuwerten, und deshalb wurde eine Auswahl nach folgenden Kriterien getroffen:

- a) Modelle mit maximalem Grad und Ordnung, um die Abhängigkeit des geschätzten Wertes  $W_0$  von der Auflösung der Modelle zu untersuchen;
- b) Modelle, die die jüngsten Ausgaben (*releases*) der GRACE- und GOCE-Daten enthalten (höhere Präzision und größere Anzahl von Messungen);
- c) Modelle, die Analysen der dynamischen Satellitenbahnbestimmung enthalten, d.h. SLR-Messungen (höhere Präzision der Koeffizienten niederen Grades/Ordnung);
- d) Die Modelle EGM96 (weil der derzeit meist benutzte Wert  $W_0$  mit diesem Modell gerechnet wurde, siehe Burša et al. 1998b) und EGM2008 (weil es in den IERS Conventions 2010 (Petit and Luzum 2010) empfohlen wird und das erste Modell mit Grad und Ordnung größer als 360 ist).

Die Tabelle 4.2 zeigt die ausgewählten Modelle und ihre wichtigsten Charakteristiken. Die im System *tide free* gerechneten Modelle wurden mit der Konvention der GOCE Standards (vgl. Gruber et al. 2010, Gl. 80) in *zero tide* transformiert:

$$\bar{C}_{20}^{ZT} - \bar{C}_{20}^{TF} = k_{20} \cdot \langle \Delta \bar{C}_{20} \rangle \quad [4.30]$$

worin  $k_{20}=0,30190$  die Auflast-Lovezahl (*loading Love number*) für den Koeffizienten  $C_{20}$  und  $\langle \Delta \bar{C}_{20} \rangle = -1,391412 \cdot 10^{-8}$  der Mittelwert der luni-solaren Gezeitenkorrektur für diesen Koeffizienten ist.

Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Schätzung von  $W_0$  mit verschiedenen GGM wird ein gemeinsames MSS benutzt (in diesem Fall das MSS\_CNES\_CLS11, Schaeffer et al. 2012) und zunächst  $g_1=0$ ,  $\delta T_E=0$  und  $\Xi^k=0$  angenommen. Um die Effekte der Nichtberücksichtigung der Meeresflächentopographie (d.h.  $\Xi^k=0$ ) zu minimieren, wird unter Beachtung der Bedingung [2.21] die Gleichung [4.29] umgeformt in

$$W_0 = U_0 + \frac{\sum_1^k \left[ \frac{T^k - h^k \bar{\gamma}^k}{\bar{\gamma}^{k^2}} \right] \delta S_O^k}{\sum_1^k \left[ \frac{1}{\bar{\gamma}^{k^2}} \right] \delta S_O^k} \quad [4.31]$$

**Tab. 4.2:** Schwerefeldmodelle, die zur empirischen Schätzung von  $W_0$  verwendet wurden.

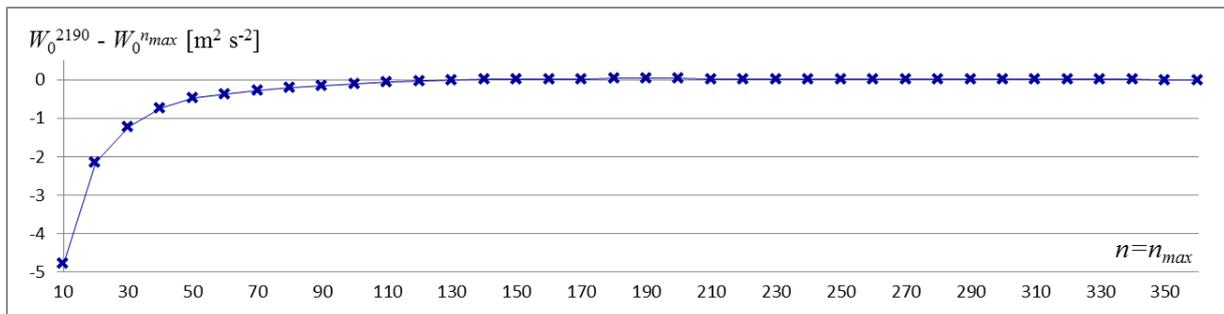
| Model   | Daten  | Referenz                                 |
|---|--|--|
| <b>EGM96</b><br>$n, m = 360$<br>tide-free system                | Dynamische Satellitenbahnanalyse: GPS (1995), Topex/Poseidon (1993-1994), SLR (1980-1994).<br>Mittlere Schwereanomalien (30'×30' und 1°×1°) abgeleitet aus terrestrischer, Flug- und Seegravimetrie<br>Mittlere Schwereanomalien (30'×30') abgeleitet aus Satellitenaltimetrie (Geosat GM, ERS-1 GM).<br>Digitales Geländehöhenmodell (5'×5').   | Lemoine et al. 1998                      |
| <b>EGM2008</b><br>$n, m = 2190$<br>tide-free system             | Modell ITG-GRACE03S (GRACE-Daten 2002 - 2007, $n \leq 180$ )<br>Modelle DNSC07 (Andersen et al. 2010), SSv18.1 und PGM2007B (Pavlis et al. 2007), die mittlere Schwereanomalien (1'×1') aus Satellitenaltimetrie enthalten: Topex/Poseidon-Jason ERM (1993-2004), ERS-2 ERM (1995-2002), Topex/Poseidon TDM (2002-2003), Envisat ERM (2002-2004), GFO ERM (2000-2002), Geosat GM (1985-1986), ERS-1 GM (1994-1995), ICESAT GM (3 Monate).<br>Mittlere Schwereanomalien (5'×5') abgeleitet aus terrestrischer, Flug- und Seegravimetrie<br>Digitales Geländehöhenmodell (30"×30") | Pavlis et al. 2012, 2013                 |
| <b>EIGEN-6C2</b><br>$n, m = 1949$<br>tide-free system           | LAGEOS: 1985 - 2010<br>GRACE: 03/2003 - 12/2010<br>GOCE: 11/2009 - 04/2011<br>Schwereanomalien und Geoidundulationen abgeleitet aus dem Modell DTU10 (Andersen and Knudsen 2009, Andersen 2010) Geoidhöhen des EGM2008 in kontinentalen Gebieten.  | Förste et al. 2012                       |
| <b>EIGEN-6C3stat</b><br>$n, m = 1949$<br>tide-free system       | LAGEOS ( $n = 2 - 30$ ): 1985 - 2010<br>GRACE RL02 GRGS ( $n = 2 - 100$ ): 02/2003 - 01/2011 (Bruinsma et al. 2009)<br>GRACE RL05 GFZ ( $n = 55 - 180$ ): 10/2003 - 09/2012 (Dahle et al. 2012)<br>GOCE-SGG ( $n \leq 235$ ): 837 Tage, 11/2009 - 08/2012; 225 Tage 09/2012 - 05/2013 (Pail et al. 2011, Bruinsma et al. 2013)<br>Terrestrische Daten ( $n \leq 370$ ): Geoidmodell abgeleitet aus DTU12MDT <sup>21</sup> in Meeresgebieten und EGM2008 in kontinentalen Gebieten. Erweiterung bis $n = 1949$ mit Schwereanomalien abgeleitet aus DTU12MDT.                      | Förste et al. 2012                       |
| <b>GOCO03S</b><br>$n, m = 250$<br>tide-free system              | GOCE (18 Monate: 11/2009 - 04/2011)<br>GRACE (7 Jahre)<br>CHAMP (8 Jahre)<br>SLR (5 Jahre, 5 Satelliten)   | Pail et al. 2010, Mayer-Gürr et al. 2012 |
| <b>GO_CONS_GCF_2_DIR_R4</b><br>$n, m = 260$<br>tide-free system | GOCE: 11/2009 - 08/2012<br>LAGEOS: 1985 - 2010<br>GRACE RL02 GRGS: 02/2003 - 01/2011 (Bruinsma et al. 2009)<br>GRACE RL05 GFZ: 10/2003 - 09/2012 (Dahle et al. 2012)   | Bruinsma et al. 2013                     |
| <b>GO_CONS_GCF_2_TIM_R4</b><br>$n, m = 250$<br>tide-free system | GOCE: 11/2009 - 06/2012  | Pail et al. 2011                         |
| <b>GGM05S</b><br>$n, m = 180$<br>zero-tide system               | GRACE: 03/2003 - 05/2013   | Tapley et al. 2013                       |

Als erstes soll der sogenannte Auslassungsfehler (*omission error*) untersucht werden. Dazu wird das Störpotential [4.24] unter Variation des maximalen Grades ( $n_{max} = 10, 20, \dots, 2190$ ) der Kugelfunktionsentwicklung berechnet, und die mit [4.31] erhaltenen Werte  $W_0^{n=n_{max}}$  werden mit demjenigen verglichen, der sich unter Einschluss sämtlicher verfügbaren Koeffizienten, d.h.  $W_0^{n=2190}$ , ergibt. Dieser Test wird mit dem Modell EGM2008 (Pavlis et al. 2012, 2013)

<sup>21</sup> DTU12MDT ist ein Modell der quasistationären Meeresflächentopographie, das aus dem Modell DTU10 in Kombination mit dem aus EIGEN62C abgeleiteten Geoid, berechnet wurde. Einzelheiten finden sich unter [http://www.space.dtu.dk/english/Research/Scientific\\_data\\_and\\_models/Global\\_Mean\\_Dynamic\\_topography](http://www.space.dtu.dk/english/Research/Scientific_data_and_models/Global_Mean_Dynamic_topography).

durchgeführt, da es den höchsten Grad hat. Alle Eingangsdaten werden dabei als fehlerfrei betrachtet, so dass die Diskrepanzen zwischen den verschiedenen Werten  $W_0^{n=2190} - W_0^{n=n_{max}}$  ausschließlich als Auswirkung des Abschneidens der GGM bei  $n_{max}$  anzusehen sind. Die Werte  $W_0^{n=2190} - W_0^{n=n_{max}}$  sind immer negativ (Abb. 4.2), was bedeutet, dass der Wert  $W_0$  umso größer wird, je weniger Koeffizienten in die Berechnung eingeführt werden und folglich die entsprechende Äquipotentialfläche einen kleineren geozentrischen Radius hat (sie liegt tiefer). Von  $n_{max} = 10$  bis  $n_{max} = 100$  variiert der Auslassungsfehler zwischen  $-4,778 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  und  $-0,100 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ , was positiven Verlagerungen (vom Geozentrum aus) der durch das geschätzte  $W_0$  gegebenen Äquipotentialfläche zwischen  $\sim 490 \text{ mm}$  und  $\sim 11 \text{ mm}$  entspricht. Ab  $n_{max} = 150$  verringert sich der Auslassungsfehler beträchtlich ( $-0,013 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \rightarrow \sim +1,4 \text{ mm}$ ), bis er praktisch bei  $n_{max} = 360$  ( $-0,0004 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \rightarrow \sim +0,04 \text{ mm}$ ) insignifikant wird.

Die unmittelbare Folgerung ist, dass der Wert  $W_0$  ausschließlich aus der Satelliten-Komponente der GGM ( $n_{max} \approx 200$ ) geschätzt werden kann. Dieser Schluss deckt sich mit den Empfehlungen in früheren Publikationen, insbesondere Sánchez (2007), Burša et al. (2007a) und Dayoub et al. (2012), die vorschlagen, den Grad  $n$  auf 120 zu beschränken. Dennoch soll erwähnt werden, dass die Ergebnisse von Burša et al. (2007a) zwei Maxima des Auslassungsfehlers suggerieren (Burša et al. 2007, Abb. 3), einen bei etwa  $n = 30$  mit einer viel größeren Magnitude als  $2 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  und einen weiteren bei  $n, m = 60$  mit einer Magnitude von  $0,8 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ . Diese beiden Maxima können in der vorliegenden Arbeit nicht bestätigt werden, und es ist nicht möglich, sie zu erklären. Im Gegenteil werden die in Abb. 4.2 gezeigten Auslassungsfehler durch die Ergebnisse aus der Fig. 2 in Sánchez (2007) und Fig. 2 in Dayoub et al. (2012) bestätigt.



**Abb. 4.2:** Auswirkungen des Abbruchfehlers auf den geschätzten Wert  $W_0$  nach Abschneiden des Modells EGM2008 bei den Graden  $n = n_{max}$  (MSS: MSS\_CNES\_CLS11).

Als zweites werden die Werte  $W_0$ , die mit den in Tab. 4.2 genannten Modellen geschätzt wurden, verglichen. Um diesen Vergleich zu ermöglichen, werden die Modelle bei  $n = 180$  abgeschnitten (maximaler Grad des Modells GGM05S). Die Niveaudifferenzen bezüglich eines beliebigen gemeinsamen Wertes (Abb. 4.3) zeigen, dass die Ergebnisse praktisch für alle GGM mit Ausnahme des EGM96 gleich sind. Die Modelle, die lange Reihen von SLR-Messungen enthalten (d.h. EIGEN-6C3stat, EIGEN-6C2 und GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R4) erzeugen einen etwas höheren  $W_0$ -Wert ( $0,006 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \rightarrow \sim -1 \text{ mm}$ ) als die Modelle, die diese Reihen nicht enthalten. Dennoch sind die Diskrepanzen viel kleiner als die formalen Fehler der Berechnungen (Tab. 4.3). Die mit dem EGM96 erhaltene Differenz ist signifikant ( $0,06 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \rightarrow \sim -7 \text{ mm}$ ) und

mag eine Konsequenz der geringen Präzision der mittleren Wellenlängen dieses Modells (ab  $n=70$ ) sein. Abb. 4.4 zeigt die Niveaudifferenzen zwischen den durch die geschätzten  $W_0$ -Werte definierten Äquipotentialflächen in Millimetern, und es ist evident, dass die Modelle, die Satelliten-Schweremessungen in Kombination mit SLR-Beobachtungen enthalten, die Wiederholbarkeit der Schätzung des  $W_0$ -Wertes gewährleisten.

Tab. 4.3 fasst die Varianzen und mittleren Fehler des aus den verschiedenen Modellen gewonnenen  $W_0$ -Wertes zusammen. Die erste Zeile zeigt die mittlere Streuung der Werte  $W_0$  in den Punkten  $k$  mit dem Gewicht eins (Breite  $0^\circ$ ), die zweite gibt die Standardabweichung des mit [4.31] erhaltenen Mittelwertes. Diese beiden Werte sind für das Modell GGM05S größer als für die anderen Modelle, was die Notwendigkeit bestätigt, dessen Koeffizienten um  $n = 150$  zu regularisieren (siehe Tapley et al. 2013). Abb. 4.5 zeigt die geographische Verteilung der Residuen  $W_0^k - W_0^{n=180}$  für jedes Modell. Die Ergebnisse sind sehr ähnlich außer für das EGM96 (siehe Breiten oberhalb/unterhalb von  $60^\circ$  Nord/Süd) und für das GGM05S, in dem die Residuen die Satellitenbahnschleifen widerspiegeln. Die Hauptschlussfolgerung dieses Vergleichs ist, dass das Referenzniveau  $W_0$  mit der Satellitenkomponente ( $n \leq 200$ ) eines GGM, das die Kombination von GRACE-, GOCE- und SLR-Daten enthält, bestimmt werden sollte.

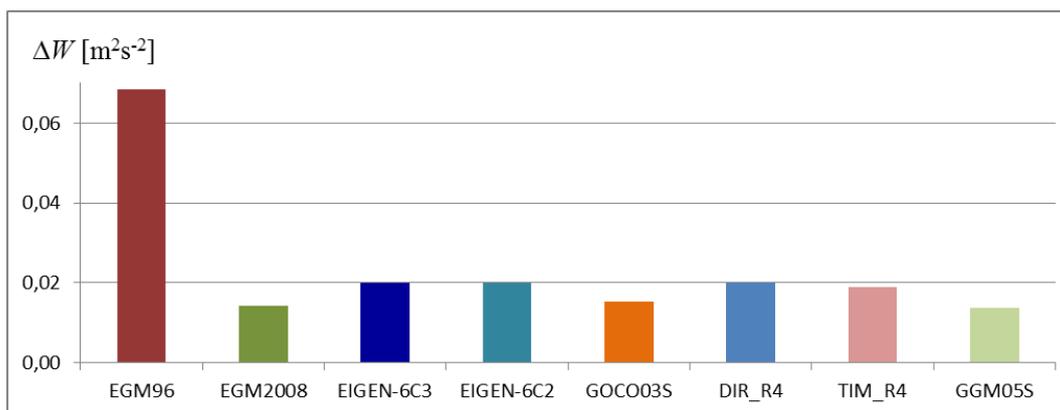


Abb. 4.3: Potentialdifferenzen zwischen einem beliebigen gemeinsamen Wert und dem Wert  $W_0$ , der aus den in der Tab. 4.2 aufgeführten GGM erhalten wird.

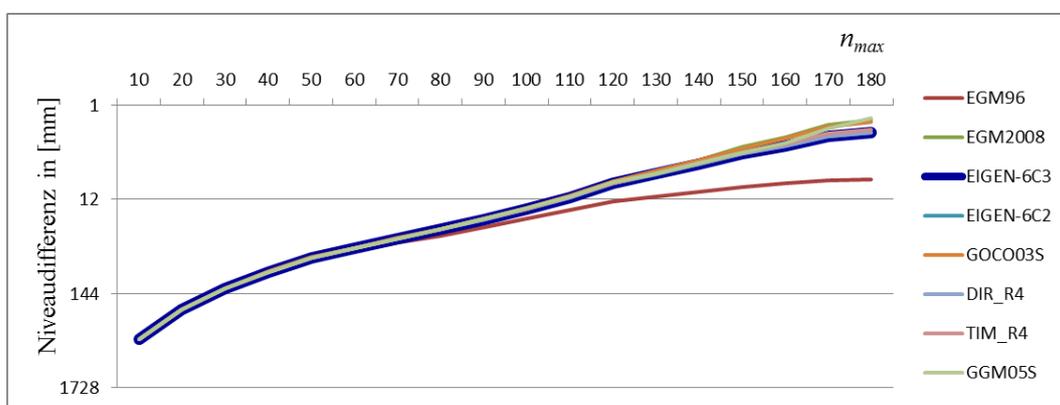


Abb. 4.4: Niveaudifferenzen in Millimeter zwischen den durch den Wert  $W_0$  definierten Äquipotentialflächen nach Abschneiden der in Tab. 4.2 aufgeführten GGM beim Grad  $n = n_{max} \leq 180$ .

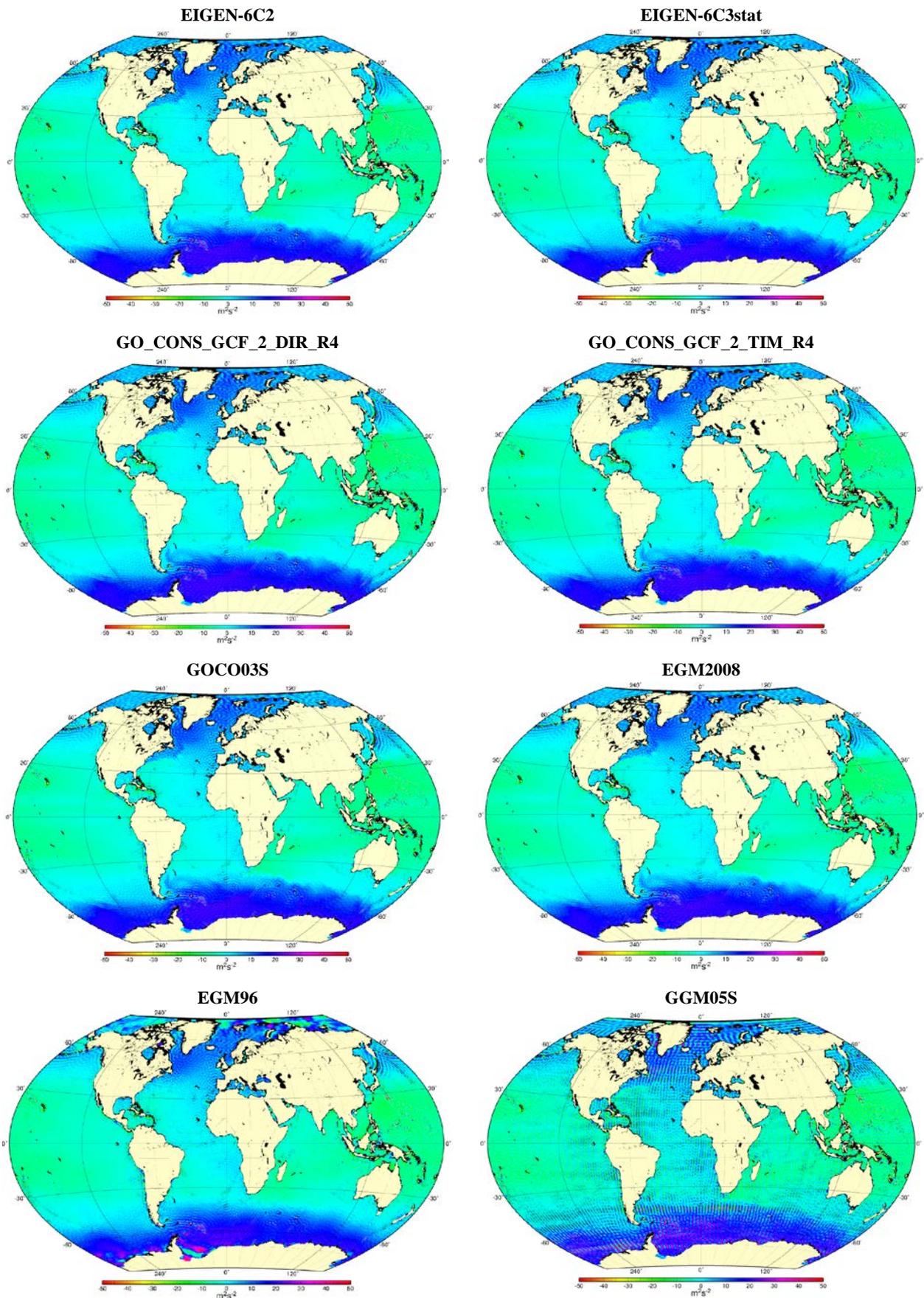


Abb. 4.5: Residuen  $W_0^k - W_0^{n=180}$  für jedes in Tab. 4.2 aufgeführte GGM.

**Tab. 4.3:** Streuung der  $W_0^i$  und Standardabweichung des Mittelwertes  $W_0$  aus den GGM in Tab. 4.2 [ $m^2s^{-2}$ ].

|   | EGM96   | EGM2008 | EIGEN-6C3 | EIGEN-6C2 | GOCO03S | DIR_R4  | TIM_R4  | GGM05S   |
|---|---------|---------|-----------|-----------|---------|---------|---------|----------|
| $\sigma = \sqrt{\frac{(W_0 - W_0^k)^2}{n}}$ | ±8,9830 | ±8,7016 | ±8,6965   | ±8,6997   | ±8,7146 | ±8,6973 | ±8,6891 | ±10,4477 |
| $\sigma_{W_0} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$    | ±0,0238 | ±0,0231 | ±0,0230   | ±0,0230   | ±0,0231 | ±0,0230 | ±0,0230 | ±0,0277  |

Ein zusätzlich beim Einfluss der GGM auf die empirische Schätzung des Wertes  $W_0$  zu berücksichtigender Aspekt ist die Modellierung der in Abschnitten 3.1.3 und 3.3 genannten säkularen und saisonalen Änderungen des Schwerefeldes. Dazu wird das Vorgehen mit den beiden oben beschriebenen Schritten wiederholt, indem nun aber einerseits monatliche, auf GRACE-Daten beruhende, vom GFZ als *Release 05*<sup>22</sup> (Dahle et al. 2012) publizierte GGM, zum anderen das Modell EIGEN-6C2 (Förste et al. 2012) mit zeitabhängigen Parametern für die Koeffizienten bis Grad 50 (vgl. Abschnitt 3.1.3) verwendet. In dieser Untersuchung werden die Berechnungen ebenfalls mit dem Modell MSS\_CNES\_CLS11 (Schaeffer et al. 2012) durchgeführt, und es wird angenommen, dass alle Eingangsdaten fehlerfrei sind.

Die mit dem Modell EIGEN-6C2 erhaltenen Werte  $W_0$  haben viel kleinere Amplituden als die aus den monatlichen Modellen *GFZ Release 05* (Abb. 4.6). Allerdings muss beachtet werden, dass das EIGEN-6C2 nur GRACE-Daten bis 2010 enthält. Möglicherweise passt sich die zeitabhängige Version von EIGEN-6C3 (die sich EIGEN-6C4 nennen wird) besser der Reihe der GRACE-Modelle an, sie ist jedoch aktuell (Sept. 2014) noch nicht verfügbar. Die Amplituden der mit der Reihe *GFZ Release 05* geschätzten Werte  $W_0$  variieren zwischen  $-0,0108 m^2s^{-2}$  und  $+0,0201 m^2s^{-2}$ , während die lineare jährliche Änderung  $-6,617 \times 10^{-4} m^2s^{-2}a^{-1}$  (+1,3 mm in 20 Jahren) für die Modelle *GRACE GFZ Release 05* und  $-2,647 \times 10^{-4} m^2s^{-2}a^{-1}$  (+0,5 mm in 20 Jahren) für das Modell EIGEN-6C2 ist. Diese Magnituden sind viel kleiner als die formalen Fehler aus den Ausgleichungen (vgl. Tab. 4.3) und können deshalb als insignifikant angesehen werden. Ähnliche Ergebnisse präsentieren Dayoub et al. (2012, Abschnitt 3.2). Die unmittelbare Schlussfolgerung ist, dass die Schätzung und praktische Umsetzung von  $W_0$  sich auf ein statisches Schwerefeldmodell stützen kann, ohne dass die zeitlichen Veränderungen (siehe Abschnitt 3.1.3) die Zuverlässigkeit des Referenzniveaus  $W_0$  reduzieren.

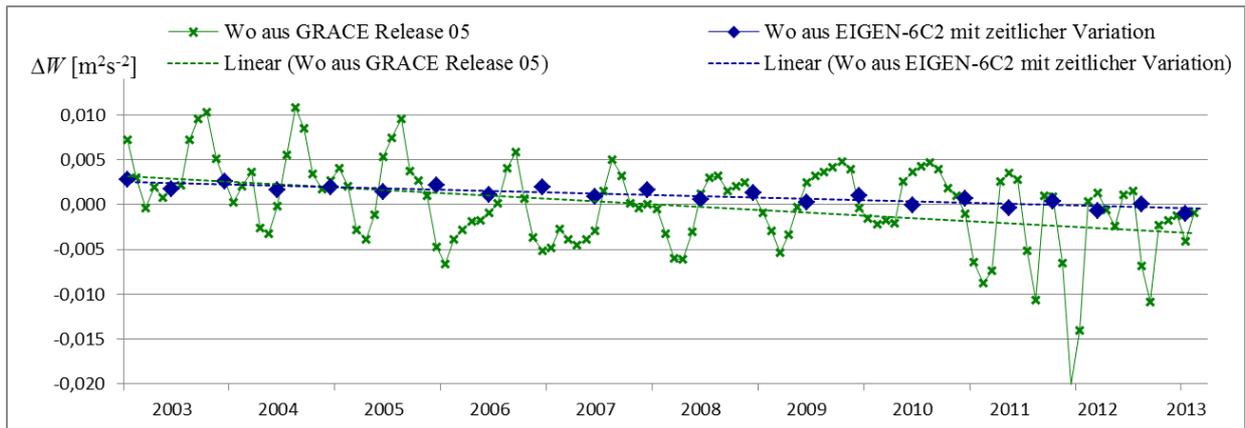
In Übereinstimmung mit den Schlussfolgerungen aus den durchgeführten Vergleichen der verschiedenen GGM wird im Folgenden das Modell EIGEN-6C3stat verwendet. Wenngleich es ähnliche Ergebnisse liefert wie die Modelle EIGEN-6C2, GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R4 und GO\_CONS\_GCF\_2\_TIM\_R4, umfasst es den längsten Zeitraum, besonders mit GOCE-Daten, was eine höhere Signifikanz in der Präzision der mittleren Wellenlängen (von  $n=60$  bis  $n=230$ )<sup>23</sup> vermuten lässt.

Um die strenge Berechnung des Störpotentials, das in [4.31] einzuführen ist, zu vervollständigen, zeigen die Abb. 4.7 und 4.8 die Werte  $g_1$  (vgl. [4.24]) und die ellipsoidische Korrektur  $\delta T_E(\phi, \lambda)$

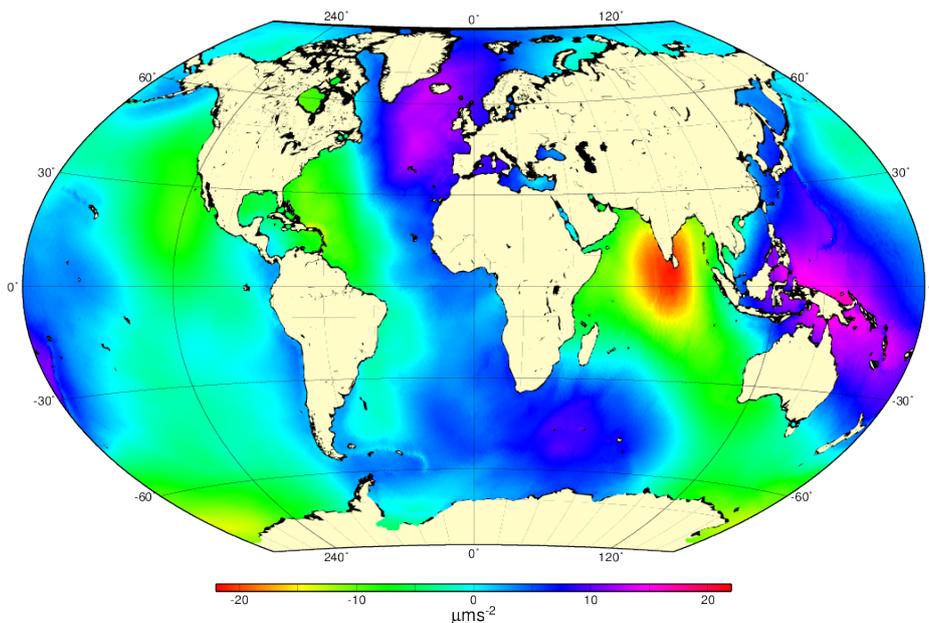
<sup>22</sup> Verfügbar unter <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>, Option *Models from dedicated time periods*.

<sup>23</sup> Vgl. <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/documents/Foerste-et-al-EIGEN-6C3stat.pdf>

[4.25]. Die Wirkung von  $g_1$  auf die Berechnung von  $W_0$  ist insignifikant, während die ellipsoidische Korrektur die Sicherheit des Ergebnisses etwas verbessert: Der Wert  $W_0$  selbst verändert sich nicht, aber die Streuung verbessert sich von  $\pm 8,6965 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  auf  $\pm 8,2965 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  und die Standardabweichung des Mittelwertes von  $\pm 0,023 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  auf  $\pm 0,020 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ . Diese Größenordnungen können in erster Näherung als insignifikant verstanden werden, aber die ellipsoidischen Korrekturen variieren in den Punkten  $k$  zwischen  $-2,11 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  und  $+2,43 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ , was ungefähr  $-21 \text{ cm}$  bis  $+25 \text{ cm}$  in der Geoidhöhe entspricht.



**Abb. 4.6:** Variation der aus den monatlichen GGM GRACE GFZ Release 05 und dem Modell EIGEN-6C2 mit säkularen und periodischen (jährlichen und halbjährlichen) Änderungen der Koeffizienten bis Grad 50 geschätzten Werte  $W_0$ . Die lineare Änderung der  $W_0$  aus den Modellen GRACE GFZ Release 05 ist  $-6,617 \times 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-2}\text{a}^{-1}$  und aus dem Modell EIGEN-6C2  $-2,647 \times 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-2}\text{a}^{-1}$ .



**Abb. 4.7:** Werte des Terms  $g_1$  in der Lösung des fixen Randwertproblems in marinen Gebieten.

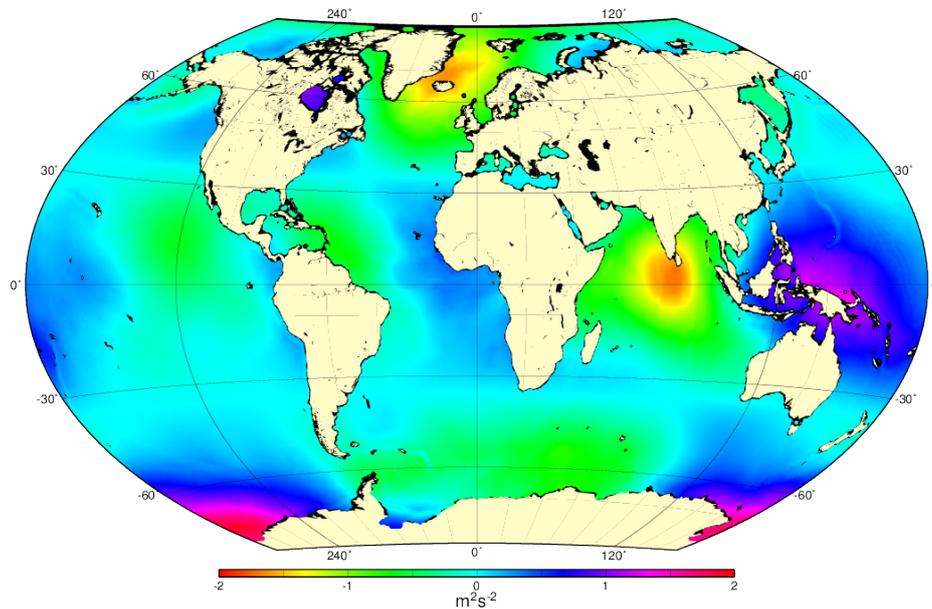


Abb. 4.8: Ellipsoidische Korrektur für die sphärische Lösung des fixen Randwertproblems.

### 4.3.2. Abhängigkeit von $W_0$ als Funktion des gewählten Meeresoberflächenmodells

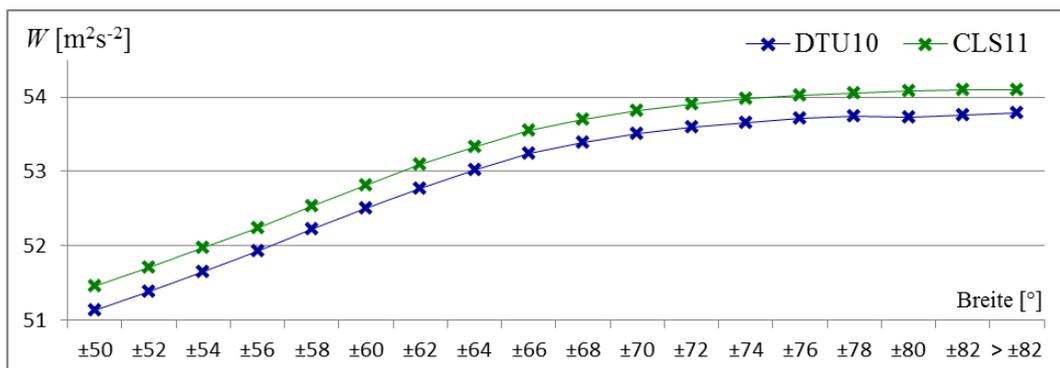
Für die empirische Berechnung von [4.29] bzw. [4.31] ist es angebracht, dass die Werte  $h^k$  aus einem Meeresoberflächenmodell gewonnen werden. Dafür werden in der vorliegenden Arbeit die Modelle MSS\_CNES\_CLS11 (Schaeffer et al. 2012) und DTU10 (Andersen and Knudsen 2009, Andersen 2010) verwendet. Ihre wichtigsten Charakteristiken werden in Tab. 4.4 zusammengefasst. Da die ellipsoidischen Koordinaten dieser Modelle auf dem sogenannten *Topex/Poseidon-Ellipsoid* beruhen ( $a = 6378136,3$  m,  $1/f = 298,257$ ), werden diese als erstes auf das GRS80-Ellipsoid transformiert, damit sie konsistent mit dem in der Auswertung von [4.24] verwendeten Referenzschwerefeld sind. Um zu gewährleisten, dass die Schätzung der Werte  $W_0^k$  genau in denselben Positionen geschieht, werden von jedem Modell die Mittelwerte der Meereshöhen in einer Auflösung von  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ <sup>24</sup> abgeleitet. Da die Modelle unterschiedliche geographische Breitenüberdeckung haben, wird auch ein Vergleich des Wertes  $W_0$  nach dem Abschneiden in verschiedenen Breiten durchgeführt. Die Werte des geschätzten Potentials aus dem Modell MSS\_CNES\_CLS11 sind allgemein um  $0,3 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  größer als die aus dem Modell DTU10 (Abb. 4.9). Diese Niveaudifferenz (negative Verlagerung der entsprechenden Äquipotentialfläche von 3 cm) reflektiert die von Schaeffer et al. (2012) identifizierte mittlere Diskrepanz zwischen beiden Modellen (Abb. 4.10). Die Autoren führen diese Inkonsistenz hauptsächlich auf (1) die Modellierung der Variabilität der Meeresoberfläche zwischen den Jahren (*interannual oceanic variability*), (2) die Prozessierung von Daten in hohen Breiten, (3)

<sup>24</sup> Gemäß dem normalen Verhalten der Funktion des Störpotentials [4.24] in marinen Gebieten kann die Größe des verwendeten Kompartiments zur Diskretisierung der Grenzfläche von  $2^\circ \times 2'$  bis  $1^\circ \times 1'$  variieren, ohne den erhaltenen  $W_0$ -Wert signifikant zu beeinflussen (Einzelheiten siehe Sánchez 2007).

die Glättung der sogenannten Tiefseeberge (*sea mounts*) im Modell MSS\_CNES\_CLS11 und (4) die Extrapolation der Satellitenaltimetrie in Küstengebiete und Inseln zurück.

**Tab. 4.4:** Globale Meeresoberflächenmodelle, die zur empirischen Schätzung von  $W_0$  verwendet wurden.

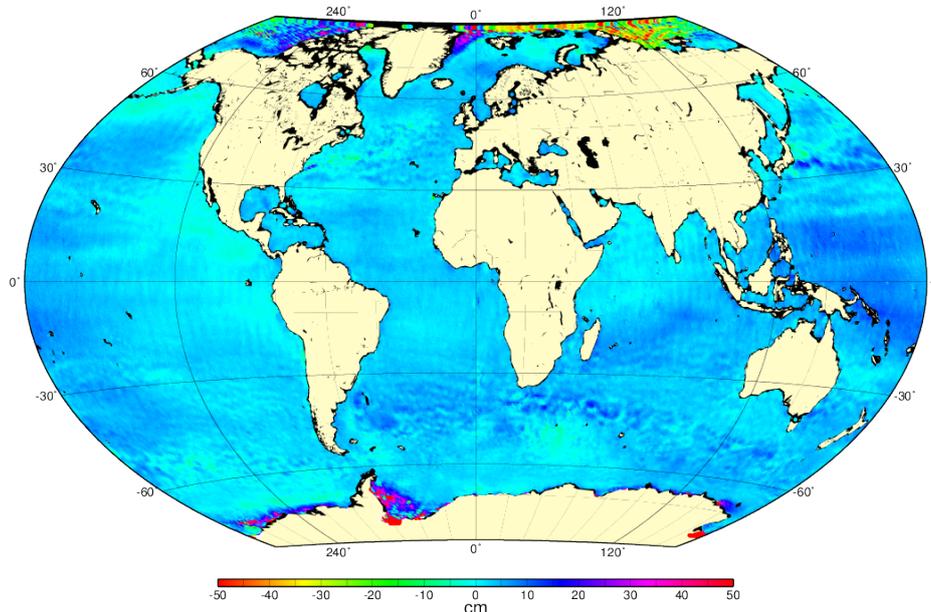
| Modell         | Charakteristiken   | Referenz                                 |
|----------------|--|--|
| MSS_CNES_CLS11 | 16 Jahre Altimetrie-Daten: Topex/Poseidon (10 Jahre), Topex/Poseidon TDM (3 Jahre), Jason 1 (7 Jahre), ERS-1 ERM+GM (168 Tage), ERS-2 ERM (8 Jahre), ENVISAT (7 Jahre), GFO (7 Jahre)<br>Referenzmission: Topex/Poseidon, Jason-1<br>Referenzperiode: 1993 – 1999<br>Überdeckung: 80°S – 84°N, Auflösung: 2'x2'<br>Mean tide System                            | Schaeffer et al. 2012                    |
| DTU10          | 17 Jahre Altimetrie-Daten: Topex/Poseidon (10 Jahre), Topex/Poseidon TDM (3 Jahre), Jason 1 (7 Jahre), ERS-1 ERM+GM (168 Tage), ERS-2 ERM (8 Jahre), ENVISAT (7 Jahre), GFO (7 Jahre), ICESAT (2 Jahre)<br>Referenzmission: Topex/Poseidon, Jason-1<br>Referenzperiode: 1993 – 2009<br>Überdeckung: 84°S – 90°N, Auflösung 1'x1' bis 2'x2'<br>Mean tide System | Andersen and Knudsen 2009, Andersen 2010 |



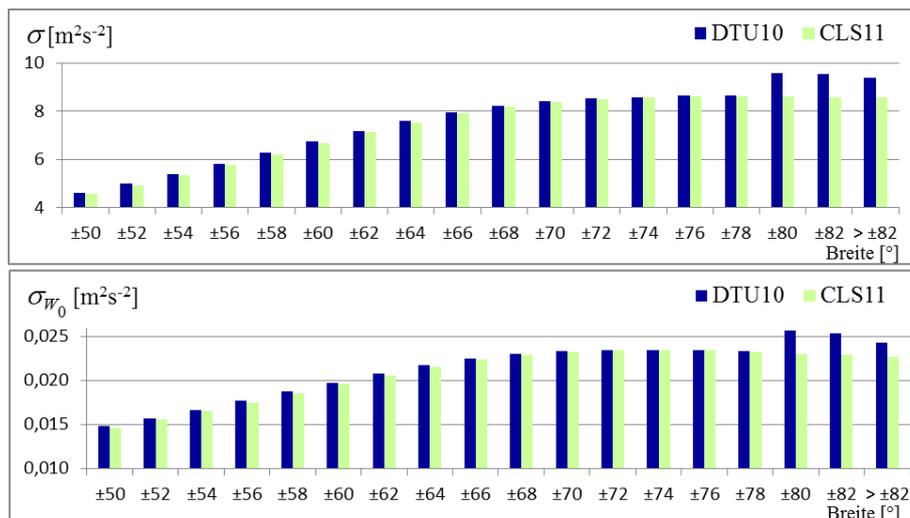
**Abb. 4.9:**  $W_0$  aus den Modellen MSS\_CNES\_CLS11 und DTU10 mit verschiedener Breitenüberdeckung. Der Wert 62 636 800  $m^2s^{-2}$  muss addiert werden. (GGM: EIGEN-6C3stat).

Hier sollte man beachten, dass beide Modelle als Referenzmission Topex/Poseidon verwenden, dessen Überdeckung bis  $\varphi = 67^\circ N/S$  reicht. Außerdem reduziert der Eisgehalt des Meerwassers in den Winterperioden an beiden Polen die Zuverlässigkeit der Altimetermessungen. Dadurch sind die Abschätzungen der Präzision (Streuung und mittlerer Fehler von  $W_0$ ) im Model DTU10 sehr viel pessimistischer, wenn sie die Gebiete außerhalb von  $\varphi = 80^\circ N/S$  (Abb. 4.11) einschließen. Deshalb wird in Sánchez (2007) der Ausschluss der Gebiete außerhalb von  $\varphi = 60^\circ N/S$  bei der Berechnung von  $W_0$  empfohlen. Aber durch die Maßnahme der Reduzierung der Breitenausdehnung verringert sich der geschätzte Wert  $W_0$  (Abb. 4.9), d.h. das Referenzniveau entfernt sich vom Geozentrum (steigt an). Der Grund für dieses Verhalten ist, dass die Meeresflächentopographie (Abb. 1.2) in hohen Breiten extrem negative Werte annimmt ( $\sim -2$  m im Einflussgebiet des antarktischen Zirkumpolarstroms und  $\sim -1$  m um Grönland) und extrem positive Werte in tropischen Zonen (z.B.  $\sim +1,5$  m in der Einflusszone der Kuroshima- und Aguhlas-Strömungen). Wenn man also die hohen Breiten ausschließt, wird die Bedingung [4.27] nicht über die globalen Meeresgebiete erfüllt, und der erhaltene  $W_0$ -Wert passt sich nur dem Meeresspiegel der ausgewählten Fläche an, d.h. der Effekt der Meeresflächentopographie führt

dazu, dass das geschätzte  $W_0$  lokalen und nicht globalen Charakter hat. Die unmittelbare Schlussfolgerung dieses Ergebnisses ist, dass die empirische Schätzung von  $W_0$  sich über die gesamte Breitenausdehnung der MSS erstrecken muss.



**Abb. 4.10:** Differenz des Niveaus der Potentialwerte berechnet aus den Modellen MSS\_CNES\_CLS11 und DTU10 in Kombination mit dem GGM: EIGEN-6C3stat. Die Potentialdifferenzen sind durch den Wert der Normalschwere dividiert, um sie in Längenmaß ausdrücken zu können.  $\left[ W_{CLS11}^k - W_{DTU10}^k \right] / \gamma^k$ .



**Abb. 4.11:** Streuung (oben) und Standardabweichung (unten) des Wertes  $W_0$  geschätzt aus den Modellen MSS\_CNES\_CLS11 und DTU10 mit unterschiedlicher Breitenüberdeckung. (GGM: EIGEN-6C3stat).

In Übereinstimmung mit den für die Berechnung der Modelle MSS\_CNES\_CLS11 und DTU10 verwendeten Referenzperioden (Tab. 4.4) könnte man sagen, dass das erstgenannte sich auf eine

mittlere Epoche 1996 und das zweite auf 2001 bezieht, was ihren direkten Vergleich erschwert (Abb. 4.10). Da der mittlere Meeresspiegel vom berücksichtigten Zeitraum bei der Berechnung des entsprechenden Mittels abhängt, konzentriert sich die folgende Untersuchung auf die Schätzung von  $W_0$  unter Verwendung jährlicher Modelle der mittleren Meeresoberfläche. Sie basiert auf Daten, die in *OpenADB*<sup>25</sup> (Schwatke et al. 2010) verfügbar sind und eine Reihe von Produkten der Satellitenaltimetrie (z.B. Höhen der Meeresoberfläche, Anomalien des Meeresspiegels, DOT-Profile usw.) nach durchgeführten Kreuzkalibrationen, Eliminieren grober Fehler und Schätzung relativer Varianzen der verschiedenen Missionen, bereitstellt. Der in der vorliegenden Arbeit verwendete Datensatz bezieht sich auf den aktuellen *release of OpenADB* (Version 4 für die Höhen der Meeresoberfläche), der die Kreuzkalibration sämtlicher Altimetermissionen seit 1992 (Abb. 4.12) basierend auf einer Standardisierung der Reduktionsmodelle und der Ausgleichung der radialen Kreuzungspunktfehler (siehe Abschnitt 3.1.2), enthält. Zum Beispiel beziehen sich alle Messungen auf den ITRF2008 (Altamimi et al. 2011), in der Bahnanalyse wird dasselbe GGM (EIGEN-6S2, Förste et al. 2012) benutzt, die ozeanischen Gezeitenreduktionen werden aus dem Modell EOT11a (Savcenko and Bosch 2012) abgeleitet, die Effekte des Atmosphärendrucks werden aus der *dynamic atmospheric correction* der CLS *Space Oceanography Division* mit dem Modell Mog2D<sup>26</sup> (siehe Abschnitt 3.3) erzeugt. Die Details des Prozessierens der in *OpenADB* enthaltenen Daten der Satellitenaltimetrie finden sich in Bosch et al. (2014). Wenn auch *OpenADB* die Höhen der Meeresoberfläche über den Spuren sämtlicher verfügbarer Satelliten seit 1992 (Ab. 4.12) bereitstellt, schließt die vorliegende Arbeit nur Topex/Poseidon, Topex-EM, ERS-1 ERM+GM, ERS-2 ERM, Jason-1, Jason-1 EM, Jason-2 und GFO ein.

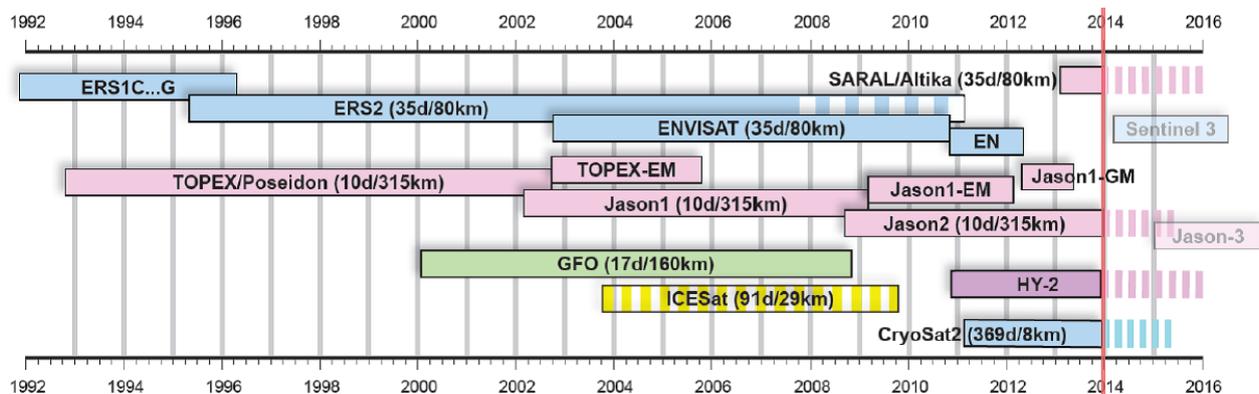


Abb. 4.12: Missionen der Satellitenaltimetrie in *OpenADB* (aus Bosch et al. 2014)

Die jährlichen mittleren Höhen werden über ein Gitternetz von  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$  nach der Strategie *Remove-Estimate-Restore* berechnet, die auf folgenden Prinzipien basiert:

- a) Bestimmung der Anomalien des Meeresspiegels (siehe Abschnitt 3.1.2) durch Subtraktion eines Referenzmodells (in diesem Fall `MSS_CNES_CLS11`);

<sup>25</sup> *Open Altimeter Database*, Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, München, <http://openadb.dgfi.badw.de>

<sup>26</sup> Dieses Modell wird heute mit dem Namen T-UGOm 2D (*Toulouse Unstructured Grid Ocean model 2D*) identifiziert, <http://sirocco.omp.obs-mip.fr/eng/tools/Tugo/Home/TugoHome.htm>

- b) Berechnung/Interpolation der mittleren Anomalien in den Knotenpunkten des  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ -Gitters;
- c) Wiedereinführen des Referenzmodells, um die mittleren Meeresoberflächenhöhen zu erhalten.

Um Fehler durch die Küstengebiete zu vermeiden, wird ein Streifen von 1000 km um die Kontinente und Inselzonen ausgeschlossen, wofür die Kontinentschablone des GMT<sup>27</sup> (Wessel et al. 2013) verwendet wird. Um die Unsicherheiten, die durch den Eisgehalt des Meereswassers in den Polargebieten verursacht werden, zu reduzieren, werden die Zonen innerhalb der vom NSIDC<sup>28</sup> veröffentlichten Grenzen der mittleren jährlichen Eisbedeckung (Fetterer et al. 2002) ebenso ausgeschlossen.

Die mittlere Anomalie des Meeresspiegels  $\hat{s}$  in jedem Knoten  $i$  des Gitters ist gegeben durch

$$\hat{s} = s_i + \hat{U}_i \quad [4.32]$$

worin  $s_i$  die Anomalien des Meeresspiegels aus den Daten der *OpenADB* darstellt. Um  $\hat{s}$  in jedem Knotenpunkt zu berechnen, werden alle verfügbaren Werte  $s_i$  innerhalb einer Kugelkappe mit dem Radius  $\psi$  eingeschlossen mit der Gewichtsfunktion

$$P_\psi = e^{-\sigma\psi^2} \quad ; \quad \sigma = \ln(2)\tau^{-2} \quad [4.33]$$

$\tau$  ist ein empirischer Faktor, der es erlaubt, die Steilheit der Exponentialfunktion  $P_\psi$  zu regeln. In diesem Fall werden Parameter verwendet, die für das Modell EOT11a definiert wurden (Savcenko and Bosch 2012), d.h.  $\psi = 1,5^\circ$  und  $\tau = 0,3\psi$ . Zusätzlich werden bei der Lösung der Normalgleichungen (vgl. [4.14]) die Inversen der von Bosch et al. (2014) gewonnenen Kovarianzmatrizen als Gewicht der Eingangshöhen in die Ausgleichung der Kreuzkalibration eingeführt (vgl. Bosch et al. 2014, Gl. [19], [20], [21]). Als Ergebnis führen auch die im Modell MSS\_CNES\_CLS11 enthaltenen Höhen zu einer Auflösung von  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ . Bei diesem Vorgehen wird die Korrelation zwischen benachbarten Knotenpunkten vernachlässigt, so dass die Präzision der *endgültigen* mittleren Höhen gegeben ist durch

$$\sigma_h = \sqrt{\sigma_{\hat{s}}^2 + \sigma_{CLS11}^2} \quad [4.34]$$

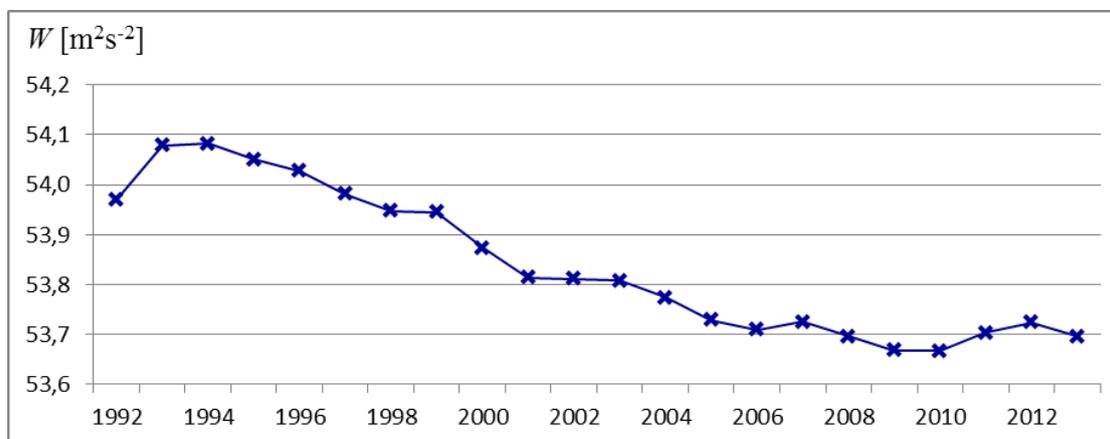
In den Knotenpunkten, in denen  $\sigma_h \geq 10 \text{ cm}$  ist, wird eine zweite Interpolation mit den Werten  $\hat{s}$  durchgeführt. Mit diesem Vorgehen erhält man jährliche Modelle der mittleren Meeresoberfläche von 1992 bis 2013. Diese Modelle werden als Referenzfläche in die Lösung des Störpotentials [4.24] und in das Mittel zur Schätzung von  $W_0$  [4.31] eingeführt. Abb. 4.13 zeigt den für jedes Jahr erhaltenen Wert  $W_0$ . Wie zu erwarten spiegeln die Änderungen des Wertes mit umgekehrtem Vorzeichen den mit der Satellitenaltimetrie beobachteten mittleren Meeresspiegelanstieg dar: die Äquipotentialfläche, die mit dem mittleren Meeresspiegel 1993 übereinstimmt, hat einen Wert

<sup>27</sup> *Generic Mapping Tools*, <http://gmt.soest.hawaii.edu/>

<sup>28</sup> *National Snow & Ice Data Center*, <http://nsidc.org/>

von  $0,4117 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  größer als die im Jahre 2010. Dies entspricht einer durchschnittlichen Veränderung der mittleren Meeresoberfläche von  $+2,4 \text{ mm a}^{-1}$  (vgl. z.B.  $+2,4 \pm 1,1 \text{ mm a}^{-1}$  mit Jason-1,  $+2,7 \pm 1,5 \text{ mm a}^{-1}$  mit Envisat, siehe Leuliette and Miller 2009). Diese Ergebnisse sind ähnlich wie die von früheren, auf den Missionen Topex/Poseidon und Jason-1 beruhenden Experimenten, genau  $-0,022 \text{ m}^2\text{s}^{-2}\text{a}^{-1}$  für den Zeitraum 1993-2001 (Sánchez 2007) und  $-0,027 \text{ m}^2\text{s}^{-2}\text{a}^{-1}$  für den Zeitraum 1992.9-2009 (Dayoub et al. 2012).

Die in Abb. 4.13 gezeigten Potentialwerte zeigen an, dass der für jedes Jahr berechnete mittlere Meeresspiegel jeweils mit einer anderen Äquipotentialfläche zusammenfällt. Dies darf nicht als eine Variation des Wertes  $W_0$  mit der Zeit interpretiert werden, denn dieses würde bedeuten, dass das Geoid (d.h. die Höhenreferenzfläche mit der Höhe null) sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie der Meeresspiegel ändert. Wenn man die Veränderung des Meeresspiegels bezüglich einer Referenzfläche erkennen will, und diese Referenzfläche ändert sich gleichermaßen mit dem zu bestimmenden Phänomen, ist es unmöglich etwas festzustellen, d.h. es gäbe keinen Meeresspiegelanstieg (vgl. Punkt (g) in 3.5). Ebenso bedeutet die Akzeptanz einer Geschwindigkeit (oder Änderung) des Wertes  $W_0$ , dass die vertikale Referenzfläche sich mit der Zeit ändert, und die Gebrauchshöhen würden nicht nur die Variationen des Referenzrahmens enthalten sondern auch die des Nullniveaus, d.h. die amtlichen Höhen in jedem Land müssen sich gleichermaßen wie das  $W_0$  ändern (vgl. Abb. 3.6). Die Schlussfolgerung dieser Diskussion ist, dass mit  $W_0$  genauso verfahren werden muss wie z.B. mit dem *Conventional International Origin* (CIO), bzw. *Conventional Terrestrial Pole* (CTP): der CIO definiert per Konvention die mittlere Lage des Nordpols der Erdrotationsachse, die durch Messungen in den Jahren 1900 und 1905 bestimmt wurde, und bezüglich des CIO werden die Bewegungen des Pols gemessen. Wenn der CIO identisch mit der momentanen Pollage definiert würde, gäbe es keine Polbewegung, aber alle geographischen Koordinaten der Erde würden sich ständig ändern. Dementsprechend muss zur Definition des konventionellen  $W_0$  eine Epoche angegeben werden, zu der die Bedingung [4.27] erfüllt ist, und  $W_0$  muss konstant sein in Raum und Zeit. In Zukunft, wenn man über mehr und genauere Messungen des Erdschwerefeldes und der Meeresoberfläche verfügt, mag man eine Aktualisierung des konventionellen  $W_0$ -Wertes vornehmen.



**Abb. 4.13:** Wert von  $W_0$  geschätzt aus den jährlichen Modellen der mittleren Meeresoberfläche. Der Wert  $62\,636\,800 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  muss addiert werden. (GGM: EIGEN-6C3stat). 1992 sind nur wenige Daten der Satellitenaltimetrie verfügbar (siehe Abb. 4.12).

### 4.3.3. Auswirkungen der Vernachlässigung der Meeresflächentopographie bei der Schätzung des $W_0$

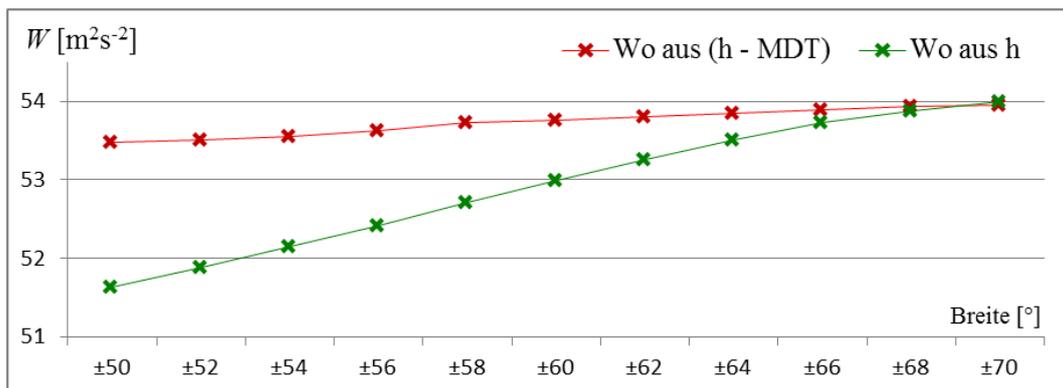
In den bisher durchgeführten Berechnungen wurde die Gleichung [4.31] benutzt, die die Meeresflächentopographie  $\Xi$  unter der Annahme  $\Xi = [W_0 - W^k] / \bar{\gamma}^k$  minimiert und die es erlaubt, die im Randwertproblem notwendige Randfläche durch ein Meeresoberflächenmodell zu beschreiben. Eine Möglichkeit, sich der Randfläche besser zu nähern ist, ein Modell der MDT vom MSS zu reduzieren. Die MDT-Modelle können, wie bereits in 3.1.2 und 3.3 erwähnt, geodätisch oder ozeanographisch bestimmt werden. Im geodätischen Fall benötigt man vorher die Kenntnis des Geoids, um  $\Xi = h - N$  mit [3.2] berechnen zu können, was dazu führt, dass der obere Term in [4.29] sich umwandelt in  $[T^k - N^k \bar{\gamma}^k]$ . Wenn  $T$  und  $N$  in konsistenter Weise bestimmt werden (abgeleitet aus denselben geodätischen Messungen und unter Nutzung gemeinsamer Modelle), ist es evident, dass die Residuen in [4.29] zu null werden und  $W_0 = U_0$ . Sind  $T$  und  $N$  nicht konsistent, z.B.  $T$  aus dem Modell EIGEN62C mit der Randfläche MSS\_CNES\_CLS11 und  $N$  aus dem Modell DTU12MDT (äquivalent mit DTU10 außer dem aus EIGEN62C abgeleiteten Geoid), geben die Residuen in [4.29] die Inkonsistenzen zwischen den beiden MSS (d.h. MSS\_CNES\_CLS11 und DTU10) und die Effekte der Auswertestrategien zur Berücksichtigung der ozeanischen Strömungen im MDT (z.B. Knudsen et al. 2011) wieder. Als Konsequenz macht es keinen Sinn, geodätische MDT bei der Auswertung von [4.29] zu benutzen.

Im ozeanographischen Fall bestimmt man die Höhen der Meeresoberfläche unter Annahme hydrostatischer und geostrophischer Gleichgewichtsbedingungen des Meerwassers bezüglich einer Isobarenfläche ohne Strömung (*no motion*), von der man annimmt, dass sie mit einer Äquipotentialfläche zusammenfällt. Die Wahl der Referenzfläche (mit der Höhe null) hängt ab von den aus verschiedenen Messungen verfügbaren hydrographischen Daten (z.B. Temperatur, Salzgehalt, Luftdruck, Geschwindigkeit des Meerwassers in Ozeanströmungen), den angenommenen hydrostatischen und geostrophischen Gleichgewichtsbedingungen und der Zuverlässigkeit, mit der man die Reibungskräfte, die die ozeanischen Strömungen regieren, kennt. Deshalb ist die besagte Fläche nicht immer dieselbe und schwerlich fällt sie mit dem Geoid (der beim geodätische MDT benutzten Äquipotentialfläche) zusammen. Tatsächlich werden die durch ozeanographische Messungen gestützten Modelle der Meeresflächentopographie durch geodätische Modelle evaluiert und verbessert (z.B. Le Traon und Morrow 2001). Derzeit ist das meist akzeptierte barokline Modell das ECCO-2 (Menemenlis et al. 2008), obwohl es nicht ausschließlich hydrodynamisch ist, da die Höhen der Meeresoberfläche unter Einschluss von MDT-Werten aus der Satellitenaltimetrie und einem GRACE-Geoid als Bedingungen (*constraints*) modelliert wurden. Dennoch werden versuchsweise jetzt  $W_0$ -Werte mit [4.29] (anstelle von [4.31]) geschätzt, wobei  $\Xi^k$  die MDT- Werte des Modells ECCO-2<sup>29</sup> annimmt. Diese Werte entsprechen dem Mittel von 1992 bis 2010 und haben eine Überdeckung von  $\varphi = 70^\circ\text{N/S}$  mit einer Auflösung von  $1^\circ \times 1^\circ$ . Die Höhen  $h^k$  der Meeresoberfläche werden aus dem Mittel der mittleren Jahresmodelle für denselben Zeitraum, d.h. 1992-2010, ebenfalls mit einer Auflösung von  $1^\circ \times 1^\circ$  abgeleitet. Abb. 4.14

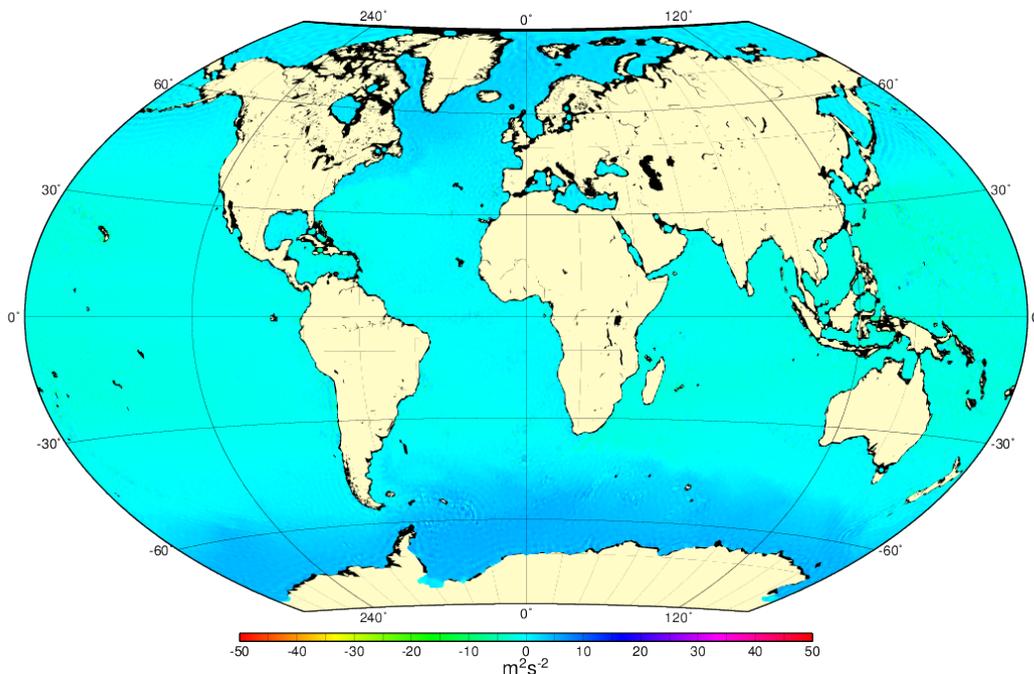
<sup>29</sup> Das Modell ist auf dem *OPeNDAP* verfügbar,

[http://ecco2.jpl.nasa.gov/opendap/data1/cube/cube92/lat\\_lon/quart\\_90S\\_90N/SSH.nc/contents.html](http://ecco2.jpl.nasa.gov/opendap/data1/cube/cube92/lat_lon/quart_90S_90N/SSH.nc/contents.html)

vergleicht den aus [4.29] mit  $(h - MDT)$  erhaltenen Wert und den aus [4.31] mit ausschließlich  $h$ . Wird die gesamte Breite überdeckt ( $\varphi = 70^\circ$ ), ist  $W_0^{h-MDT}$  praktisch identisch mit  $W_0^h$ . Wenn die Breitenüberdeckung sich verringert, nimmt  $W_0^{h-MDT}$  kaum ab, wie es bei  $W_0^h$  der Fall ist, was bestätigt, dass der in Abb. 4.9 beobachtete Effekt eine Folge des Ausschließens der geographischen Zonen mit negativen Extremen der Meeresflächentopographie ist. Die Residuen  $W^k - W_0^{h-MDT}$  (Abb. 4.15) verringern sich wie erwartet (vgl. Abb. 4.5), da die Punkte  $k$  sich näher an der Fläche  $W(x, y, z) = W_0$  befinden.



**Abb. 4.14:** Vergleich des Wertes  $W_0$  geschätzt mit  $(h)$  und  $(h-MDT)$  als Randfläche. Es muss der Wert  $62\,636\,800\text{ m}^2\text{s}^{-2}$  addiert werden. (GGM: EIGEN-6C3stat).



**Abb. 4.15:** Residuen  $W_0^k - W_0^{h-MDT}$

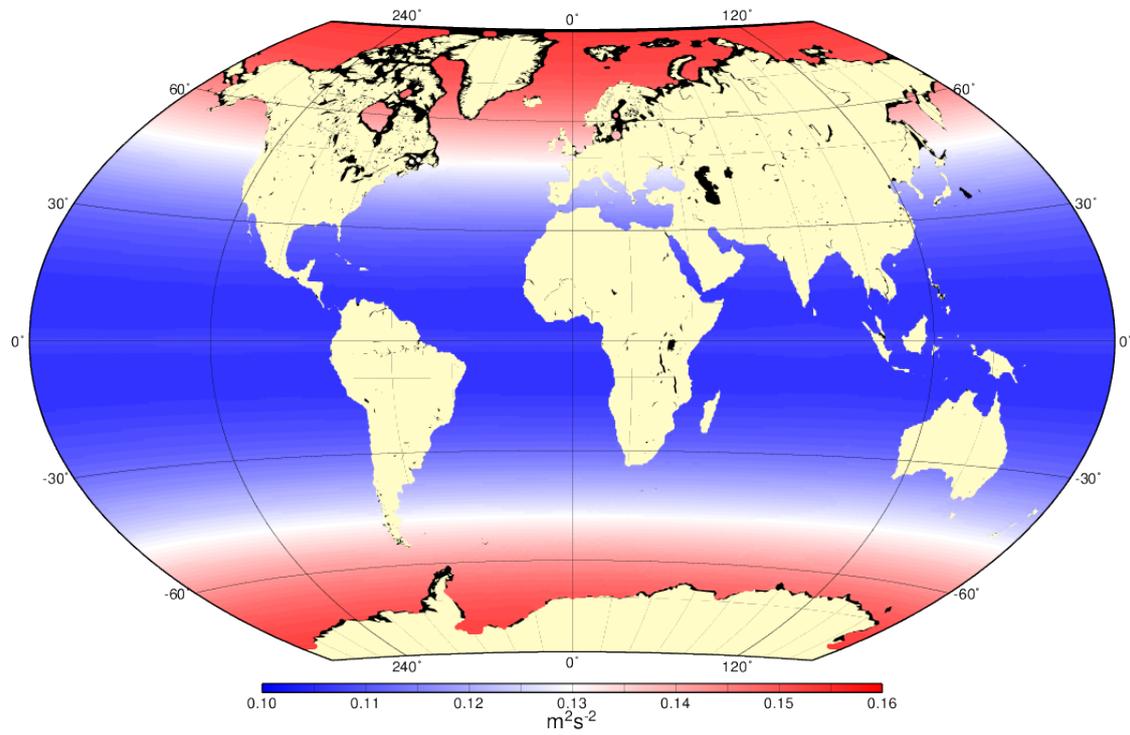
Die wichtigste Schlussfolgerung dieser Untersuchungen ist, dass die Gleichungen [4.29] und [4.31] dieselben Ergebnisse erzeugen, wenn die maximale geographische Ausdehnung des Meeresoberflächenmodells eingeschlossen wird, d.h.  $W_0$  kann ohne Benutzung eines Modells der MDT geschätzt werden.

#### 4.3.4. Zuverlässigkeit der Schätzung von $W_0$

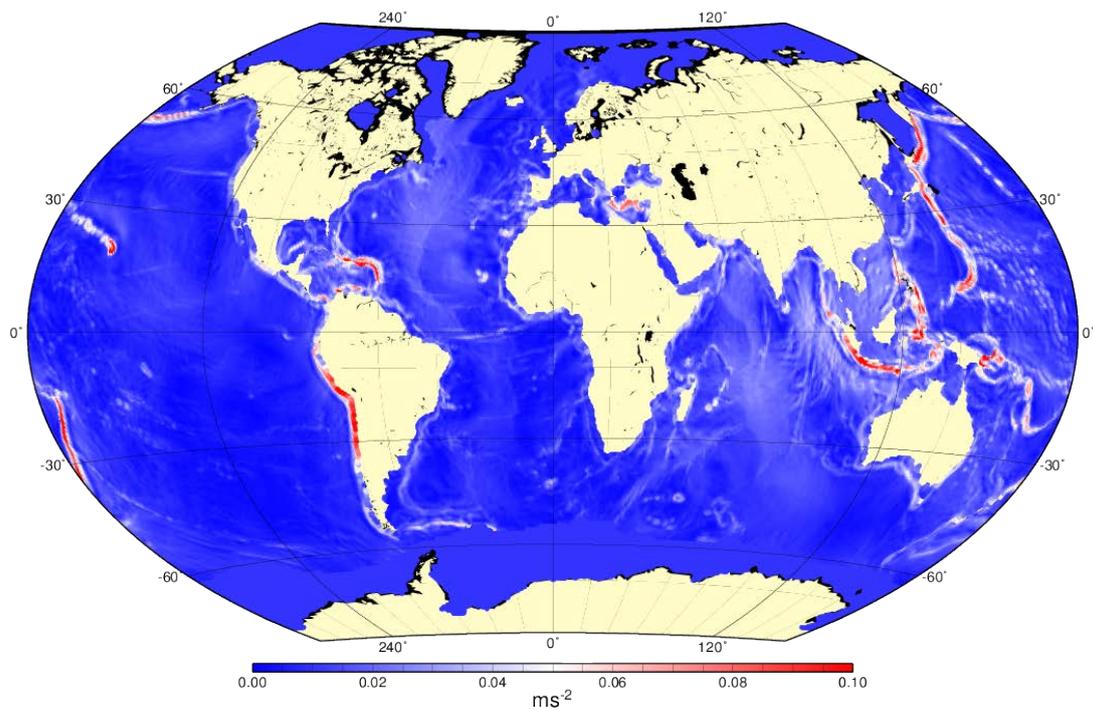
Bisher wurden alle Gleichungen unter der Annahme ausgewertet, dass die Eingangsdaten fehlerfrei sind und die Präzisionsangaben (vgl. Tab. 4.3) nur die Standardabweichung der Potentialwerte  $W_0^k$  in den Knotenpunkten  $k$  bezüglich des einfachen Mittelwerts  $W_0$  angeben. Jetzt soll die Varianz der  $W_0^k$ -Werte [4.26] geschätzt und ihre Inverse als Gewicht in die Berechnung von  $W_0$  [4.31] eingeführt werden. Die Standardabweichung  $\sigma_{h_k}$  der jährlichen mittleren Höhen der Meeresoberfläche  $h_k$  wird identisch mit [4.34] angenommen, während die Standardabweichung  $\sigma_{T_k}$  des Störpotentials aus der Varianz-Kovarianz-Matrix des gewählten Modells (d.h. EIGEN-6C3stat) abgeleitet wird. In diesem Fall benutzt man nur die Hauptdiagonale dieser Matrix, d.h. man vernachlässigt die Korrelation der Koeffizienten unterschiedlichen Grades und Ordnung (die bei den Orthogonalfunktionen null sein sollte, wegen der Ausgleichung aber ungleich null ist).  $\sigma_{T_k}$  variiert damit zwischen  $\pm 0,1055 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  und  $\pm 0,1535 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  (Abb. 4.16), während  $\sigma_{h_k}$  (Abb. 4.17) in der für die Interpolation der jährlichen mittleren Höhen betrachteten Fläche ( $64,5^\circ \text{ S} \leq \varphi \leq 78,5^\circ \text{ N}$ ) von  $\pm 0,002 \text{ m}$  bis  $\pm 0,010 \text{ m}$  variiert und  $\pm 0,014 \text{ m}$  in großen geographischen Breiten ( $79,5^\circ \text{ S} \leq \varphi < 64,5^\circ \text{ S}$  und  $78,5^\circ \text{ N} \leq \varphi \leq 83,5^\circ \text{ N}$ )<sup>30</sup> erreicht. Abb. 4.18 zeigt den kombinierten Effekt  $\sigma_{W^k} = \sqrt{\sigma_{T_k}^2 + \gamma^2 \sigma_{h_k}^2}$  für die Werte  $W_0^k$  im Jahre 2005 als Beispiel.

Als unmittelbarer Effekt der Gewichtung der einzelnen  $W_0^k$ -Werte mit der Inversen von  $\sigma_{W^k}^2 = (\sigma_{T_k}^2 + \gamma^2 \sigma_{h_k}^2)$  verringert sich  $W_0$  um  $0,34 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  (Abb. 4.19), d.h. die entsprechende Äquipotentialfläche hebt sich um  $\sim 3,4 \text{ cm}$ . Dies liegt daran, dass die geodätischen Modelle (der Schwere und Meeresoberfläche) größere Unsicherheiten genau in den geographischen Zonen aufweisen, wo die Meeresflächentopographie negativ ist. Gewichtet man diese Werte mit der Inversen der Unsicherheit, verringert sich ihr Einfluss auf das globale  $W_0$ , so dass dieses zunimmt. Die Standardabweichung der Einzelwerte ( $\sigma = \pm 8,517 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ ) und des Mittels ( $\sigma_{W_0} = \pm 0,022 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ ) verbessern sich ein wenig im Vergleich zu der Berechnung mit Einheitsgewichten (vgl. Tab. 4.3). Nach Durchsicht der vorhandenen Literatur über die Bestimmung eines Referenzwertes  $W_0$  (vgl. Tab. 2.2) war es nicht möglich, Informationen über die Schätzung der Fehlerfortpflanzung der Eingangsdaten in den Ergebnissen zu finden. Dies ist die erste rigorose Berechnung dieses Typs.

<sup>30</sup> In den Zonen  $79,5^\circ \text{ S} \leq \varphi < 64,5^\circ \text{ S}$  und  $78,5^\circ \text{ N} \leq \varphi \leq 83,5^\circ \text{ N}$  werden die Höhen des Modells MSS\_CNES\_CLS11 benutzt und die Genauigkeitsangabe entspricht der Standardabweichung des Mittelwertes beim Interpolieren des Gitternetzes von  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$  aus den originalen  $2' \times 2'$ -Werten.



*Abb. 4.16: Standardabweichung des Störpotentials aus dem Modell EIGEN-6C3stat,  $n=200$ .*



*Abb. 4.17: Standardabweichung der Werte  $h_k$  für das Jahr 2005.*

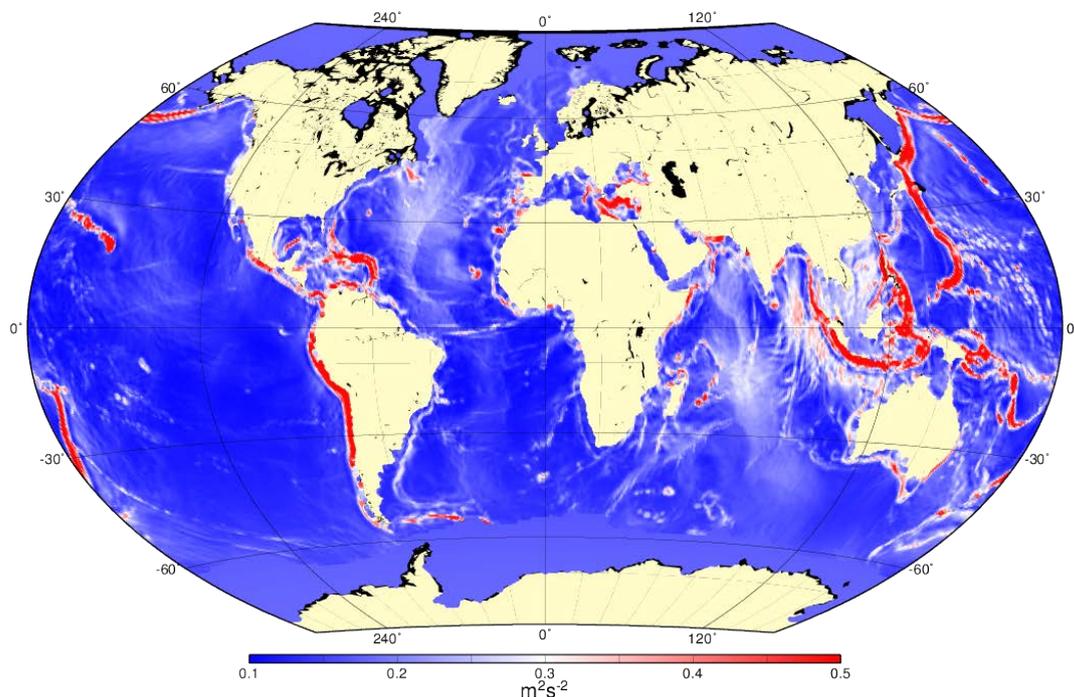


Abb. 4.18: Standardabweichung der Werte  $W_0^k$  (d.h.  $\sigma_{W^k} = \sqrt{\sigma_{T_k}^2 + \gamma^2 \sigma_{h_k}^2}$ ) für das Jahr 2005.

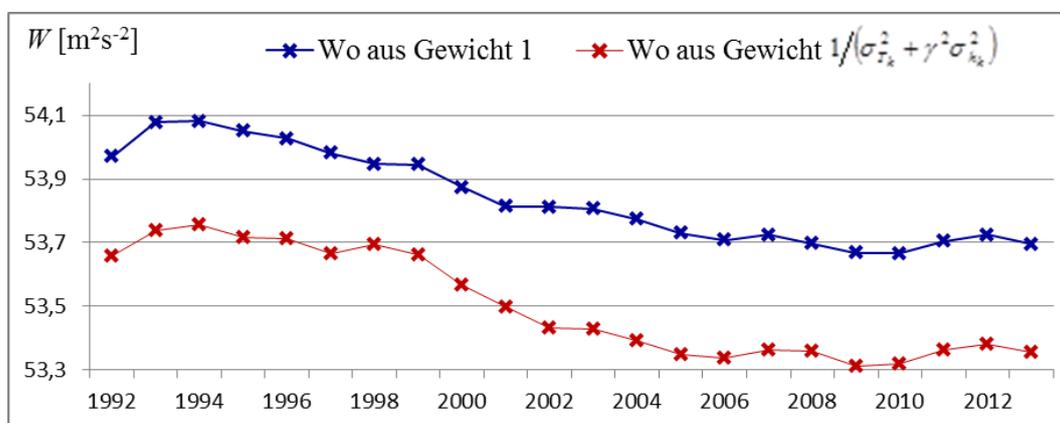


Abb. 4.19: Vergleich des berechneten Wertes  $W_0$  mit den Gewichten  $p = 1$  und  $p = 1/(\sigma_{T_k}^2 + \gamma^2 \sigma_{h_k}^2)$ .

#### 4.4. Annahme eines Referenzwertes $W_0$

Wie schon wiederholt erwähnt, kann man zur Bestimmung physikalischer Höhen jeden beliebigen Wert  $W_0$  für die Festlegung der Referenzfläche (Höhe null) einführen, da die Hauptobservablen Niveauunterschiede sind. Es ist allerdings wichtig, dass dieser Referenzwert überall auf der Erde realisiert werden kann und für den Gebrauch direkt zugänglich ist. Wenn man also z.B. (vgl. Abschnitt 2.4) den in Europa allgemein akzeptieren Wert  $W_0$  am Amsterdamer Pegel (der zu keinem der hier genannten Schwerefeld- und Meeresoberflächen-

Modelle passt) als globale Referenz einführen würde, gäbe es in den anderen Kontinenten Probleme mit der Realisierung und Zugänglichkeit.

Nach allgemeinem Verständnis soll der genannte Wert  $W_0$  mit der Äquipotentialfläche der Höhe null (d.h. dem Geoid) übereinstimmen, und deshalb wird vorgeschlagen, diesen aus denselben Messungen abzuleiten, die bei der Modellierung des Geoids verwendet wurden. Derzeit ist das meist akzeptierte  $W_0$  das in den IERS Conventions (Petit and Luzum 2010, Tab. 1.1) aufgeführte ( $62\,636\,856,0\text{ m}^2\text{s}^{-2}$ ), das Groten (2004) als besten im Jahre 2004 verfügbaren Wert (*best estimate*) empfohlen hat. Dieser Wert wurde von Burša et al. (1998b) aus dem Modell EGM96 (Lemoine et al. 1998) und einem aus Topex/Poseidon-Messungen der Jahre 1993 bis 1998 abgeleiteten Meeresoberflächenmodell berechnet. Bei dem Versuch, diesen Wert als Referenz bei der Vereinheitlichung der Höhensysteme in Südamerika einzuführen, wurde eine Diskrepanz von ca. 20 cm offensichtlich, d.h. bei der Absicht, die zum  $W_0$  von Burša et al. (1998b) gehörende Äquipotentialfläche mit aktuellen Schwerefeld- und Meeresoberflächen-Modellen zu realisieren, war es nicht möglich diesen Wert zu reproduzieren. Die erhaltenen Ergebnisse zeigten eine Differenz von etwa  $-2,0\text{ m}^2\text{s}^{-2}$ . Diese Diskrepanz wurde erstmals von Sánchez (2007) erwähnt und durch eine Reihe von späteren Publikationen bestätigt, z.B. Sánchez (2008, 2009), Čunderlik and Mikula (2009), Dayoub et al. (2012) (vgl. Tab. 2.2). Tatsächlich ist die Vielfalt der in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Approximationen und Kombinationen von GGM mit MSS auf die Notwendigkeit der Reproduktion (und des Verständnisses) des in den *IERS Conventions* enthaltenen  $W_0$ -Wertes (von Burša et al. 1998b) zurückzuführen. Dies war letztendlich nicht möglich, und deshalb wird vorgeschlagen, einen neuen Referenzwert  $W_0$  anzunehmen, der auf den folgenden Charakteristiken basiert:

- a) Definition des Geoids nach Gauß-Listing (siehe Seite 21):  $W_0$  stellt den Potentialwert derjenigen Niveaufläche dar, die sich bestmöglich (im Sinne der kleinsten Quadrate) der globalen Meeresoberfläche in völligem Ruhezustand anpasst.
- b) Wenn die Meeresoberfläche bekannt ist (aus Messungen der Satellitenaltimetrie), stellt die Bestimmung ihres Potentials ein fixes Randwertproblem dar, d.h. die Berechnung des Potentials einer Randfläche mit bekannter Geometrie.
- c) Bei der Lösung des fixen Randwertproblems muss ein globales Schwerefeldmodell basierend auf der Kombination von dynamischen Satellitenbahnanalysen (SLR), mit Satellitenschweremessungen (GRACE und COCE) berücksichtigt werden. Empirisch wurde nachgewiesen, dass die Kugelfunktionsentwicklung bis  $n = 200$  hinreichend ist.
- d) Da der *völlige Ruhezustand* der Meeresoberfläche nicht besteht, empfiehlt es sich, eine quasistationäre Fläche aus Messungen der Satellitenaltimetrie zu modellieren, die die höchste Genauigkeit beim Abtasten der Meeresoberfläche bietet.
- e) Die Gauß-Listing-Definition muss global erfüllt werden. Deshalb sind alle von der Satellitenaltimetrie überdeckten Gebiete einzuschließen. Um den Vernachlässigungsfehler zu reduzieren, dürfen Küstenzonen nicht berücksichtigt werden, und die Unsicherheiten in hohen Breiten müssen sich in der Gewichtung in der Ausgleichung widerspiegeln.

- f)  $W_0$  muss als Referenzwert stationär sein. Würde er zeitlich variieren, änderten sich die auf ihn bezogenen Höhen mit der gleichen Frequenz, was völlig unpraktisch wäre.
- g) Wegen der zeitlichen Veränderung des Meeresspiegels muss eine Epoche angegeben werden, auf die sich die Gauß-Listing-Definition bezieht. Es wird vorgeschlagen, die jährlichen  $W_0$ -Werte durch eine lineare Tendenz über die Jahre 1993-2013 anzupassen und den erhaltenen Wert für 2010.0 mit einer Nachkommastelle ( $\approx 1$  cm) als Konvention einzuführen:

$$W_0 = 62\,636\,853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \quad [4.35]$$

- h) Da der Wert eine Konvention ist, hat er keine Fehlerangabe. Es kann jedoch die Standardabweichung seiner Bestimmung mit  $\pm 0,02 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  angegeben werden.



## 5. Vereinheitlichung lokaler Höhensysteme im Rahmen eines globalen vertikalen Referenzsystems

Das Ziel der Vereinheitlichung der Höhensysteme ist es, die zahlreichen bestehenden geopotentiellen Koten (bzw. physikalischen Höhen) mit einer und derselben, in einem globalen Rahmen definierten und realisierten Äquipotentialfläche zu verbinden. Deren Definition ist durch einen Referenzwert  $W_0$  gegeben, und die Realisierung geschieht mittels dessen geometrischer Darstellung bezüglich eines Referenzellipsoids (d.h. durch eine Geoidbestimmung). Die Festlegung der Niveaudifferenzen zwischen einem gemeinsamen (globalen)  $W_0$  und den lokalen Datums  $W_0^i$  (vgl. [2.26]), allgemein bekannt als *Lösung des Vertikalproblems*, wird mit dem skalar freien Randwertproblem angegangen, wobei der ursprünglich von Rummel and Teunissen (1988) entworfenen und später z.B. von Heck and Rummel (1990), Xu and Rummel (1991), van Onselen (1991), Balasubramia (1994), Khafid (1998) erweiterten Formulierung gefolgt wird. Um die Beobachtungsgleichungen zur Lösung des Vertikalproblems aufzustellen, wird in diesem Abschnitt eine kurze Beschreibung des skalar freien Randwertproblems gegeben, und dessen Lösung wird den in Südamerika verfügbaren geodätischen Observablen angepasst. Die Eingangsdaten werden evaluiert und standardisiert, um mögliche systematische Fehler, die die Zuverlässigkeit der Ergebnisse beeinträchtigen, zu minimieren. Aus diesem Grund wird z.B. mit der Theorie von Molodenskii gearbeitet, um erforderliche orthometrische Hypothesen zu vermeiden (vgl. 2.3.2), und es wird die Kombination der verschiedenen Observablen nur in denjenigen Punkten durchgeführt, die die geodätischen Fundamentalnetze der südamerikanischen Länder bilden, so dass nur die in der Region verfügbaren Daten höchster Präzision verwendet werden. Da diese Eingangsdaten nicht über alle Länder homogen verteilt sind, ist die Einführung einiger Simulationen notwendig, die in Zukunft leicht durch reale Werte zu ersetzen sind.

### 5.1. Formulierung des skalar freien Randwertproblems

Wie bereits im Abschnitt 2.4.1 erwähnt, muss im skalar freien Randwertproblem die Geometrie der Randfläche  $S$  und das Schwerepotential  $W$  im Außenraum von  $S$  bestimmt werden. Da die Horizontalkomponente des Ortsvektors als bekannt angenommen wird, reduziert sich das Problem auf die Bestimmung der Vertikalkomponente (skalares Problem). Allgemein kennt man die vertikalen Positionen der Observablen (d.h. Schwereanomalien, geopotentielle Koten usw.) relativ zu einem unbekanntem Referenzniveau  $W_0$ , was bei der Formulierung der Randbedingungen berücksichtigt werden muss. Ebenso wie beim festen Randwertproblem (vgl. 4.2.1) ist es notwendig, eine Reihe von Approximationen einzuführen, um die analytische Lösung des Problems zu ermöglichen. Dies ist als erstes die Linearisierung der Beobachtungsgleichungen, wofür die Oberfläche  $S$  (in diesem Fall die Erdoberfläche) durch das Telluroid  $\Sigma$ , das Erdschwerepotential  $W = (V + Z)$  durch das Normalpotential  $U = (V_0 + Z)$  und der Referenzwert  $W_0$  durch  $U_0$  (vgl. [2.13]) approximiert werden. Auf diese Weise können die *normalen* geopotentiellen Koten definiert werden als

$$C(Q) = U_0 - U(Q), \quad [5.1]$$

deren Differenz zu den *tatsächlichen* geopotentiellen Knoten  $C(P) = W_0 - W(P)$  die sogenannte *Potentialanomalie* darstellt:

$$\begin{aligned}\Delta C = C(P) - C(Q) &= [W_0 - U_0] - [W(P) - U(Q)] \\ &= \Delta W_0 - [W(P) - U(Q)]\end{aligned}\quad [5.2]$$

Nach der Definition von Molodenskii ist der Punkt  $Q$  auf dem Telluroid die Projektion des Punktes  $P$  (auf  $S$ ) entlang der Ellipsoidnormalen,  $U_0 - U(Q) = W_0 - W(P)$ , und der vertikale Abstand (*Höhe*) zwischen  $P$  und  $Q$  ist die sogenannte Höhenanomalie  $\zeta$  (vgl. Abb. 2.1). Da  $W_0 = \text{const.}$  angenommen wird, formt sich diese Bedingung um in

$$[W(P) - U(Q)] = \Delta W_0 = \text{const} \quad [5.3]$$

Die Lösung des Problems erfordert eine dichte Verteilung von Schwerefeldbeobachtungen auf  $S$ , so dass diese durch eine kontinuierliche Funktion dargestellt oder ohne große Genauigkeitsverluste interpoliert werden können. Unter den verschiedenen Observablen wird üblicherweise die Norm des Schwerevektors  $g(P) = |\nabla W(P)|$  benutzt, da diese die häufigsten Messungen und beste geographische Verteilung bietet. Mit Einführung des Normalschwerefeldes in der Linearisierung formen sich die Originalbeobachtungen in die Schwereanomalien um:

$$\Delta g(\phi, \lambda) = g(P) - \gamma(Q) \quad [5.4]$$

Da sich die in [5.2] enthaltenen *tatsächlichen* geopotentiellen Knoten und in [5.4] dargestellten Schwereanomalien auf verschiedene lokale vertikale Datums (d.h.  $W_0^i$ ) beziehen, ist es angebracht,  $\Delta W_0$  in einen konstanten, für alle bestehenden vertikalen Datums gemeinsamen, und einen komplementären, die Verbindung zwischen den einzelnen  $W_0^i$  und dem gemeinsamen  $W_0$  (das [5.3] global erfüllt) darstellenden Teil zu zerlegen. Mit [2.25] und [2.26] erhält man dann

$$\Delta W_0^i = \Delta W_0 - \delta W_0^i \quad [5.5]$$

wobei  $\Delta W_0$  und  $\delta W_0^i$  zunächst unbekannt sind. Auf diese Weise hat das skalar freie Randwertproblem, linearisiert und mit dem sphärischen Radius  $r = R$  approximiert, die Form (vgl. z.B. Rummel and Teunissen 1988, Gl. 28, Heck and Rummel 1990, Gln. 10 und 11, Xu and Rummel 1991, Gl. 4, Lehmann 2000, Gl. 3):

$$\begin{aligned}\nabla^2 T(r) &= 0, & r \in \text{ext}(S) \\ -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}T &= \Delta g^i + \frac{2}{R}\delta W_0^i - \frac{2}{R}\Delta W_0, & \text{auf } S \\ T(r) &= 0, & r \rightarrow \infty\end{aligned}\quad [5.6]$$

Die Kombination  $\Delta g^i + \frac{2}{R}\delta W_0^i$  erlaubt die Transformation der Schwereanomalien  $\Delta g^i$  (bezogen auf das lokale vertikale Datum  $i$ ) in das durch  $W_0$  gegebene globale vertikale Datum. Die Lösung von [5.6] auf der Randfläche selbst ist gegeben durch (vgl. [4.23]):

$$T(\phi, \lambda) = \sum_0^{\infty} T_k = T_0 + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} (g_0 + g_1 + g_2 + \dots + g_k) S(\psi) d\sigma \quad \text{mit} \quad [5.7]$$

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)$$

Die Terme  $g_k$  der Molodenskii-Reihe werden ebenso wie in [4.23] bestimmt mit dem Unterschied, dass  $g_0 = \Delta g^i + \frac{2}{R} \delta W_0^i$  und die Werte  $h, h_i$  (in  $g_1$ ) durch die Normalhöhen  $H^N, H_i^N$  der betrachteten Punkte substituiert werden. Konventionell wird  $T_1(r) = 0$  gesetzt, da es aus den Randwerten nicht bestimmbar ist.  $T_0$  enthält die Massendifferenz  $\delta M$  zwischen dem Referenzellipsoid und der Erde:

$$T_0 = \frac{G \delta M}{R} \quad [5.8]$$

$G$  ist die Gravitationskonstante und  $R$  der mittlere Erdradius. Beschränkt man sich auf die Molodenskii-Terme bis  $g_1$  und stellt die Summanden in [5.7] um, erhält man das Störpotential

$$T(\phi, \lambda) = \frac{G \delta M}{R} + \delta W_0^i + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} (\Delta g^i(\phi_k, \lambda_k) + g_1^i(\phi_k, \lambda_k)) S(\psi(\phi, \lambda, \phi_k, \lambda_k)) d\sigma \quad [5.9]$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \delta W_0^i \iint_{\sigma} S(\psi(\phi, \lambda, \phi_k, \lambda_k)) d\sigma$$

$P(\phi, \lambda)$  stellt den Berechnungspunkt und  $P_k(\phi_k, \lambda_k)$  den Integrationspunkt dar. Bis hierher wurden die Schwereanomalien  $\Delta g^i(\phi_k, \lambda_k)$  bezogen auf das Datum  $i$  betrachtet. Schließt man jedoch in [5.9] auf andere vertikale Datums bezogene Anomalien ein, d.h.  $i = 1, 2 \dots J$ , formt sich [5.9] um in

$$T(\phi, \lambda) = \frac{G \delta M}{R} + \delta W_0^i + \frac{R}{4\pi} \sum_{i=1}^J \iint_{\sigma^i} (\Delta g^i(\phi_k, \lambda_k) + g_1^i(\phi_k, \lambda_k)) S(\psi(\phi, \lambda, \phi_k, \lambda_k)) d\sigma \quad [5.10]$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^J \delta W_0^i \iint_{\sigma^i} S(\psi(\phi, \lambda, \phi_k, \lambda_k)) d\sigma$$

Analog zur Lösung des fixen Randwertproblems (vgl. Abschnitt 4.2.1) wird in [5.10] der bei der sphärischen Formulierung vernachlässigte ellipsoidische Effekt [5.6] wieder eingegliedert. Diese Korrektur entspricht der Gleichung [59] von Heck and Seitz (2003) und ist vollständig konsistent mit der für das feste Randwertproblem abgeleiteten ellipsoidischen Korrektur [4.25] (vgl. auch Anhang B):

$$\delta T_E(\phi, \lambda) = \frac{e^2}{5} \left[ T_{20} + \frac{12}{7} T_{30} \sin \phi + \frac{24}{7} (T_{31} \cos \lambda + T_{3,-1} \sin \lambda) \cos \phi \right]$$

$$- \frac{e^2}{2} \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \left[ \frac{(n+1)}{(n-1)} \alpha_{n-2,m} T_{n-2,m} + \left[ \beta_{nm} \frac{(n+2)}{(n-1)} - \frac{3}{(n-1)} \right] T_{nm} \right] Y_{nm}(\phi, \lambda) + O(e^4) \right] \quad [5.11]$$

Schließlich ist die Höhenanomalie  $\zeta$  mit dem Theorem von Bruns schätzbar:

$$\begin{aligned}\zeta^i &= \frac{T - \Delta W_0}{\gamma} = \frac{G\delta M}{R\gamma} - \frac{1}{\gamma}\Delta W_0 + \frac{1}{\gamma}\delta W_0^i \\ &+ \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^J \iint_{\sigma} (\Delta g^i(P_k) + g_1^i(P_k)) S(\psi(P, P_k)) d\sigma + \frac{1}{\gamma} \delta T_E(P) \\ &+ \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=1}^J \delta W_0^i \iint_{\sigma} S(\psi(P, P_k)) d\sigma\end{aligned}\quad [5.12]$$

Der Term nullter Ordnung  $\zeta_0 = \frac{G\delta M}{R\gamma} - \frac{1}{\gamma}\Delta W_0$  stellt eine Maßstabsänderung im Quasigeoid bzw. im Geoid dar (vgl. Hofmann-Wellenhof and Moritz 2005, S. 113ff). Da dieser Term für alle vertikalen Datums als konstant angenommen wird, und da nur Höhendifferenzen gemessen werden, wird er im Allgemeinen weggelassen (vgl. Rummel and Teunissen 1988, Rummel et al. 2014). Da jedoch terrestrische Messungen mit satellitengestützten Messungen kombiniert werden sollen, ist es angebracht, diesen Term zu berücksichtigen und darauf zu achten, dass er kompatibel mit dem bei der Realisierung des geometrischen Referenzsystems, d.h. dem im ITRS/ITRF verwendeten Maßstab ist. Der dritte Term in [5.12] entspricht den Niveaudifferenzen  $W_0 - W_0^i$ , den sogenannten vertikalen Datumparametern und ist die als erstes zu bestimmende Unbekannte. Der vierte Summand in [5.12] ist das Ergebnis, das man üblicherweise beim Lösen des skalar freien Randwertproblems erhält, wenn die Effekte der Vielfalt des vertikalen Datums in den Observablen bzw. den Randbedingungen vernachlässigt werden und  $\delta M = 0$ ,  $\Delta W_0 = 0$  angenommen wird. Der letzte Term in [5.12] stellt den indirekten Effekt des vertikalen Datumparameters in den Randbedingungen dar.

## 5.2. Beobachtungsgleichungen zur Vereinheitlichung lokaler vertikaler Datums

Die Höhenanomalien  $\zeta$  können entweder ausgehend von der Lösung des Randwertproblems [5.12] oder durch die Kombination der aus GNSS-Messungen (oder anderen geodätischen Raumverfahren, wie z.B. SLR) abgeleiteten ellipsoidischen Höhen mit durch Nivellement (und gravimetrischen Reduktionen) erhaltenen Normalhöhen geschätzt werden. Der Vergleich dieser beiden Schätzverfahren erlaubt es, die Beobachtungsgleichungen zur Vereinheitlichung der lokalen vertikalen Datums zu formulieren. Einerseits erhält man [5.12], andererseits

$$\zeta_{GNSS}^i(P) = h(P) - H^{N,i}(P) \quad [5.13]$$

Setzt man [5.12] und [5.13] gleich und stellt die Summanden um, kann man schreiben

$$h(P) - H^{N,i}(P) = q\Delta W_0 + e^i(P)\delta W_0^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J f_0^j(P)\delta W_0^j(P) + E(\zeta(P)) \quad [5.14]$$

mit  $q := -\frac{1}{\gamma}$ ,  $e^i(P) := -q + f_0^i(P)$ ,  $f_0^i(P) := \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\sigma_i} S(\psi_{P,P_k}) d\sigma$ ,

$$E(\zeta(P)) := \frac{G\delta M}{R\gamma} + \sum_{i=1}^J \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_i} (\Delta g^i(P_k) + g_1^i(P_k)) S(\psi(P, P_k)) d\sigma + \frac{1}{\gamma} \delta T_E(P)$$

Zur Formulierung der Beobachtungsgleichungen werden die bekannten Terme auf die linke Seite und die unbekanntes auf die rechte Seite gestellt:

$$h(P) - H^{N,i}(P) - q\Delta W_0 - E(\zeta(P)) = e^i(P) \delta W_0^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J f_0^j(P) \delta W_0^j(P) \quad [5.15]$$

In der vorliegenden Arbeit ergibt sich  $\Delta W_0$  per Definition aus der Differenz zwischen dem im Abschnitt 4.2 abgeleiteten Wert  $W_0$  (Gleichung [4.35]) und dem Wert  $U_0$  des GRS80 und ist deshalb im Beobachtungsvektor enthalten.

Für jeden auf ein vertikales Datum  $i$  bezogenen Punkt  $P$  erhält man eine Beobachtungsgleichung der Form [5.15]. In Grenzpunkten, die auf zwei benachbarte vertikale Datums  $i, i+1$  bezogen sind, formt sich die Beobachtungsgleichung um in

$$H^{N,i+1}(P) - H^{N,i}(P) = q(\delta W_0^{i+1} - \delta W_0^i) \quad [5.16]$$

Die Lösung der Gleichungssysteme [5.15] und [5.16] erhält man mit dem im Abschnitt 4.1.3 beschriebenen Gauß-Markov-Modell (Gleichungen [4.10] bis [4.14]). In diesem Fall enthält der Beobachtungsvektor  $\mathbf{b}$   $[h(P) - H^{N,i}(P) - q\Delta W_0 - E(\zeta(P))]$  oder  $[H^{N,i+1}(P) - H^{N,i}(P)]$ , die Elemente der Matrix  $\mathbf{A}$  sind  $q, e^i$  oder  $f_0^i$  und der Unbekanntenvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  enthält  $\delta W_0^i$  mit  $i=1, 2, \dots, J$ . Bei diesem Vorgehen wird folgendes vorausgesetzt:

- a) In jeder zu einem vertikalen Datum ( $i = 1 \dots J$ ) gehörenden Zone gibt es eine dichte und homogene Überdeckung von auf dieses Datum bezogenen Schwereanomalien  $\Delta g^i$ .
- b) Die physikalischen Höhen (in diesem Fall Normalhöhen) sind durch geometrisches Nivellement mit gravimetrischen Reduktionen in kontinentalen Bereichen und durch ozeanisches Nivellement in Meeresgebieten verfügbar.
- c) Die geometrischen (bzw. ellipsoidischen) Höhen sind durch GNSS-Positionierung in kontinentalen und durch Satellitenaltimetrie in ozeanischen Gebieten bekannt.
- d) Die Verbindung zwischen benachbarten vertikalen Datums (in kontinentalen und ozeanischen Gebieten) ist durch gemeinsame Punkte in beiden Datums möglich.

### 5.3. In Südamerika verfügbare physikalische und geometrische Observable zur Vereinheitlichung der bestehenden Höhensysteme

Die numerische Auswertung von [5.15] und [5.16] hängt von den verfügbaren Eingangsdaten ab. In hochentwickelten Regionen mit guter geodätischer Infrastruktur und den finanziellen Mitteln zur ständigen Laufendhaltung der Referenzrahmen (z.B. in Europa oder Nordamerika) gibt es mit

der Lösung dieser Gleichungen keine Probleme. Dagegen müssen [5.15] und [5.16] in Regionen mit begrenzten Kapazitäten zur Bereitstellung der Beobachtungsdaten (wie Lateinamerika, die Karibik, Afrika, Ozeanien, Antarktis usw.) so den Gegebenheiten angepasst werden, dass mit der geringen geodätischen Information ein Optimum erreicht wird. Im Folgenden werden deshalb die Charakteristiken der verfügbaren Observablen in Südamerika zur praktischen Vereinheitlichung der Höhensysteme beschrieben.

### 5.3.1. Geometrische Koordinaten

Wie bereits im Abschnitt 3.4 erwähnt ist die Bestimmung der geometrischen Koordinaten durch die Konventionen und Produkte (vor allem ITRS und ITRF) des IERS in Südamerika eine standardisierte Prozedur. Der verwendete Referenzrahmen ist SIRGAS (*Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas*), der die regionale Verdichtung des globalen ITRF in Lateinamerika und der Karibik bildet. Dieser wird durch nationale Bezugsrahmen verdichtet, um die Zugänglichkeit des kontinentalen Referenzrahmens auf lokaler Ebene zu garantieren (Sánchez and Brunini 2009). SIRGAS ist auf zwei Arten realisiert, zunächst durch zwei zehntägige GPS-Messkampagnen im Abstand von fünf Jahren, anschließend durch ein Netz kontinuierlich beobachtender GNSS-Stationen. Die erste Realisierung SIRGAS95 ist ein hochpräzises GPS-Netz von 58 Punkten in Südamerika, deren Positionen auf den ITRF94 zur Referenzepoche 1995,4 bezogen sind und eine mittlere Genauigkeit von  $\pm 8$  mm in der Horizontalkomponente und  $\pm 15,0$  mm in der Vertikalkomponente haben (SIRGAS 1997). Im Jahre 2000 wurde dieses Netz neu vermessen und auf Mittel- und Nordamerika erweitert (Abb. 5.1). Diese zweite Realisierung SIRGAS2000 enthält 184 GPS-Stationen, deren Positionen im ITRF2000 zur Epoche 2000,4 berechnet wurden (Drewes et al. 2005). Hauptziel von SIRGAS2000 war die Verbindung der existierenden physikalischen Höhensysteme mit dem ITRF, deswegen wurden alle Referenzpegel mit GPS beobachtet und alle durch Nivellements zugänglichen SIRGAS2000-Stationen nivelliert (Luz et al. 2002b). Die mittlere Genauigkeit der SIRGAS2000 Koordinaten ist  $\pm 3,5$  mm für die Horizontalkomponente und  $\pm 7,5$  mm für die Vertikalkomponente (Drewes et al 2005).

Die dritte Realisierung von SIRGAS liefert das SIRGAS *Continuously Operating Network* (SIRGAS-CON-Netz, Abb. 5.2). SIRGAS-CON besteht derzeit aus etwa 350 Referenzpunkten, die wie folgt aufgeteilt werden:

- a) Ein kontinentales Kern-Netz (SIRGAS-C) als primäre Verdichtung des ITRF in Lateinamerika. Es enthält z.Zt. 135 Stationen, wovon 80 auch gleichzeitig durch die globalen Prozessierungszentren des IGS prozessiert und in die nächste Lösung des ITRF einbezogen werden.
- b) Nationale Verdichtungsnetze (SIRGAS-N) als Erweiterung des Kern-Netzes, um die geographische Verteilung von Referenzpunkten zu verbessern.

Das Kern-Netz sorgt für die langfristige und nachhaltige Stabilität des kontinentalen Bezugsrahmens; die Verdichtungsnetze ermöglichen den Zugang zum Bezugsrahmen auf nationaler und lokaler Ebene. Obwohl Haupt- und Verdichtungsnetze als zwei verschiedene Kategorien angesehen werden können, erfüllen beide Typen von Stationen gleichermaßen die

Anforderungen an die ITRF-Stationen bezüglich Leistung und Qualität. SIRGAS-CON wird wochenweise durch die SIRGAS-Analysezentren (zehn Prozessierungs- und zwei Kombinationszentren) ausgewertet (Sánchez et al. 2014). Die Verteilung der Stationen zwischen den Prozessierungszentren stellt sicher, dass jede regionale Station durch drei Zentren berechnet wird. Die Zentren wenden eine gemeinsame Vorgehensweise an, die von SIRGAS mit den Vorgaben der Standards von IGS und IERS festgelegt wurde, um Lösungen für die einzelnen Verdichtungsnetze zu berechnen (siehe z. B. Natali et al. 2009, Seemüller 2009, Costa et al. 2012a, Seemüller et al. 2012, Sánchez et al. 2014). Die individuellen Lösungen werden durch die zwei SIRGAS-Kombinationszentren in eine gemeinsame Lösung integriert (Costa et al. 2012b, Sánchez et al. 2012) und es werden wöchentliche Stationspositionen und akkumulierte Lösungen (mit Stationspositionen und Geschwindigkeiten) bereitgestellt. Die akkumulierten bzw. Mehrjahreslösungen werden jährlich aufaddiert, um alle Stationen, die mehr als zwei Jahre beobachtet haben, einzubeziehen. Die Koordinaten beziehen sich auf den zur Zeit der Berechnung aktuellen ITRF. Die Genauigkeit der wöchentlichen Stationspositionen wird auf  $\pm 1,5$  mm für Nord- und Ostkomponente und  $\pm 3,8$  mm für die Höhe geschätzt (Sánchez et al. 2013, 2014) und für die Mehrjahreslösungen zur Referenzepoche auf  $\pm 1,0$  mm für die horizontale Position und  $\pm 2,4$  mm für die Höhe, sowie auf  $\pm 0,5$  mm/Jahr (horizontal) und  $\pm 1,1$  mm/Jahr (vertikal) für die Geschwindigkeiten (Sánchez and Seitz 2011).

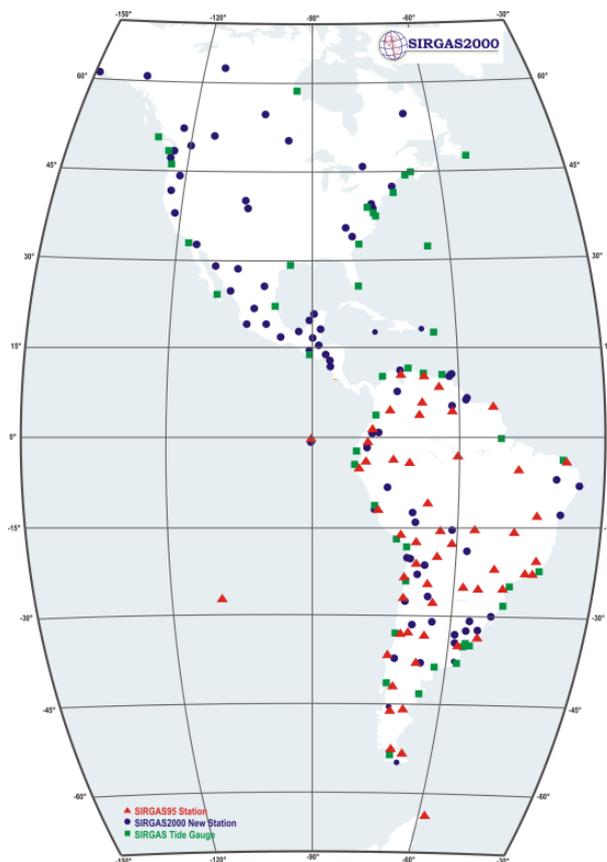


Abb. 5.1: Referenzrahmen SIRGAS95 und SIRGAS2000 (aus [www.sirgas.org](http://www.sirgas.org)).

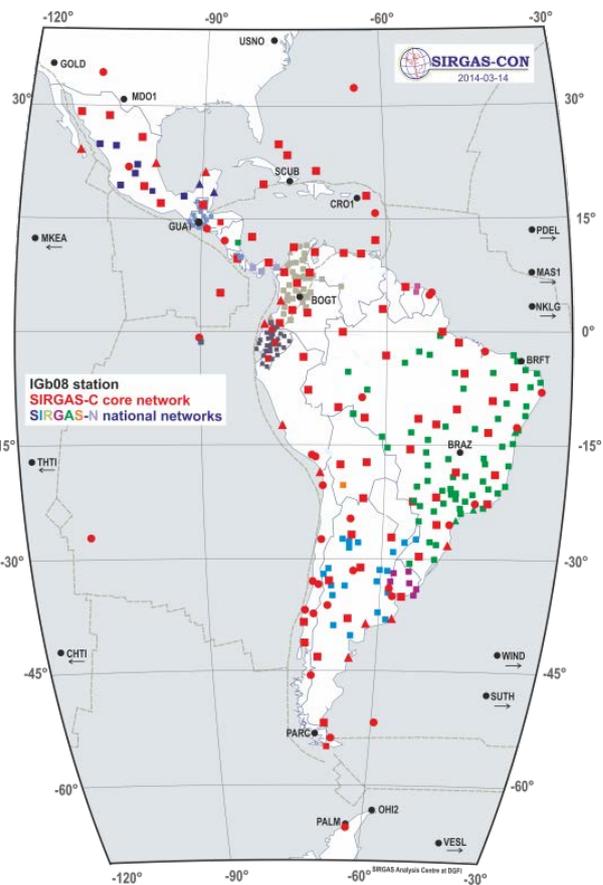


Abb. 5.2: Referenzrahmen SIRGAS-CON (aus [www.sirgas.org](http://www.sirgas.org)).

Nach der ersten Realisierung SIRGAS95 begannen die südamerikanischen Länder die Modernisierung ihrer traditionellen (lokalen) Bezugssysteme, um die neuen Satellitenpositionierungsverfahren, insbesondere das GPS, konsistent anzuwenden. Da die existierenden geodätischen Daten in den lokalen Bezugssystemen gegeben waren und sie weiter verwendet werden sollen, war es notwendig, eine Strategie zu entwickeln, die die Integration der alten Systeme in das neue SIRGAS ermöglicht. Die allgemeine Vorgehensweise umfasst: i) Festlegung eines nationalen Haupt-GPS-Netzes (durch Pfeiler oder kontinuierlich beobachtende Stationen) als lokale Verdichtung des kontinentalen SIRGAS-Netzes (Tab. 5.1); ii) Bestimmung der Transformationsparameter zwischen den alten Bezugssystemen und SIRGAS; iii) Einführung von SIRGAS als offizielles nationales Referenzsystem; und iv) Bezug aller existierenden und neuen geodätischen Daten auf SIRGAS (z. B. Drewes et al. 1998, Moirano et al. 1998, Schödlbauer und Muñoz 1999, Costa and Lima 2005, Martínez and Sánchez 2009, Figueroa et al. 2010).

Tab. 5.1: Nationale Verdichtungen von SIRGAS in Südamerika.

| Land                | SIRGAS-Verdichtung  |                      | Referenzrahmen und Referenzepoche  |
|---------------------|---|----------------------|------------------------------------|
|                     | Festpunktfeld (passive Stationen)   | Anzahl der Stationen |                                    |
| Argentinien         | <b>POSGAR07:</b> Posiciones geodésicas argentinas 2007, <a href="http://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Posgar07">www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Posgar07</a>  | 178                  | ITRF2005, 2006.632                 |
|                     | <b>RAMSAC:</b> Red argentina de monitoreo satelital continuo, <a href="http://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Ramsac">www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Ramsac</a>  | 37                   | ITRF2008, 200.5                    |
| Bolivien            | <b>MARGEN:</b> Marco Geodésico Nacional (Echalar y Sánchez 2010)  | 125                  | SIRGAS95, 1995.4<br>IGS05, 2010.2  |
|                     | <b>Red de estaciones GPS continuas</b>  | 4                    | ITRF2008, 200.5                    |
| Brasilien           | <b>Sistema Geodésico Brasileiro (SGB): Rede Planimétrica</b> (Costa und Lima 2005), <a href="http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/planimetrica.shtm">www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/planimetrica.shtm</a>  | 1903                 | SIRGAS2000, 2000.4                 |
|                     | <b>RBMC:</b> Rede brasileira de monitoramento continuo, <a href="http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/rbmc/rbmc.shtm">www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/rbmc/rbmc.shtm</a>  | 95                   | ITRF2008, 200.5                    |
| Chile               | <b>SIRGAS-CHILE,</b> <a href="http://www.igm.cl/vertices/Rgn/RGN.htm">http://www.igm.cl/vertices/Rgn/RGN.htm</a>  | 269                  | SIRGAS2000, 2002.0                 |
|                     | <b>Red de estaciones activas fijas</b>  | 12                   | ITRF2008, 200.5                    |
| Kolumbien           | <b>MAGNA-SIRGAS:</b> Marco geocéntrico nacional de referencia (Tremel et al. 2001, Martínez and Sánchez 2009, Martínez and Sánchez 2012), <a href="http://geoportal.igac.gov.co/ssigl2.0/visor/galeria.req?mapald=36&amp;title=Puntos%2520Geodesicos">http://geoportal.igac.gov.co/ssigl2.0/visor/galeria.req?mapald=36&amp;title=Puntos%2520Geodesicos</a> | 70                   | SIRGAS95, 1995.4<br>IGS08, 2011.76 |
|                     | <b>MAGNA-ECO:</b> MAGNA estaciones continuas, <a href="http://geoportal.igac.gov.co/ssigl2.0/visor/galeria.req?mapald=17&amp;title=RED%20MAGNA-ECO">http://geoportal.igac.gov.co/ssigl2.0/visor/galeria.req?mapald=17&amp;title=RED%20MAGNA-ECO</a>   | 45                   | ITRF2008, 200.5                    |
| Ecuador             | <b>RENAGE:</b> Red básica GPS (Tremel und Urbina 2000)  | 135                  | SIRGAS95, 1995.4                   |
|                     | <b>REGME:</b> Red GNSS de monitoreo continuo de Ecuador, <a href="http://www.geoportaligm.gob.ec/wordpress/">www.geoportaligm.gob.ec/wordpress/</a>   | 31                   | ITRF2008, 200.5                    |
| Französisch-Guayana | <b>RGFG:</b> Réseau Géodésique Français de Guyane, <a href="http://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/srtom/systemeDOM.pdf">http://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/srtom/systemeDOM.pdf</a>  | 7                    | ITRF93,1995.0                      |
|                     |   | 1                    | ITRF2008, 200.5                    |
| Peru                | <b>PERU96:</b> Sistema Geodésico Nacional (Schödlbauer und Muñoz 1999).   | 47                   | SIRGAS95, 1995.4                   |
|                     | <b>REPMOC:</b> Red peruana de monitoreo continuo, <a href="http://www.ign.gob.pe/rastreo_permanente/">www.ign.gob.pe/rastreo_permanente/</a>  | 3                    | ITRF2008, 200.5                    |
| Uruguay             | <b>SIRGAS-ROU98,</b> <a href="http://www.ejercito.mil.uy/cal/sgm/principal.html">www.ejercito.mil.uy/cal/sgm/principal.html</a>   | 17                   | SIRGAS95, 1995.4                   |
|                     | <b>REGNA-ROU:</b> Red geodésica nacional activa, <a href="http://www.ejercito.mil.uy/cal/sgm/principal.html">www.ejercito.mil.uy/cal/sgm/principal.html</a>   | 7                    | ITRF2008, 200.5                    |
| Venezuela           | <b>SIRGAS-REGVEN:</b> Red geocéntrica venezolana (Drewes et al. 1998), <a href="http://www.igvsb.gob.ve/regven/">www.igvsb.gob.ve/regven/</a>   | 156                  | SIRGAS95, 1995.4                   |
|                     | <b>REMOS:</b> Red de estaciones de monitoreo satelital GPS, <a href="http://www.igvsb.gob.ve/vistas/remos.php">www.igvsb.gob.ve/vistas/remos.php</a>  | 3                    | ITRF2008, 200.5                    |

Die ersten SIRGAS-Verdichtungen wurden nur durch Monumente (Pfeiler) vermarktet. Zurzeit betreiben die meisten Länder kontinuierlich beobachtende GNSS-Stationen (Tab. 5.1), die in den SIRGAS-CON-Referenzrahmen einbezogen sind (Abb. 5.2). In der Praxis benutzen die SIRGAS-Länder die wöchentlichen SIRGAS-CON-Stationspositionen als Referenzwerte für die Prozessierung ihrer Vermessungsprojekte. Um die Positionen neuer geodätischer Punkte von der Beobachtungsepoche auf die Referenzepeche des nationalen Bezugsrahmens zu extrapolieren, verwenden sie die linearen Geschwindigkeiten der neuesten Mehrjahreslösung des SIRGAS-CON-Netzes. Wenn die Geschwindigkeiten der Referenzstationen nicht bekannt sind, wird das Geschwindigkeitsmodell VEMOS (*Velocity Model for SIRGAS*, Abb. 5.3) verwendet (Drewes and Heidbach 2012). Daneben werden die Positionen der neuen Stationen vom aktuellen ITRF (bzw. IGS Referenzrahmen, siehe unten), in dem die IGS-Satellitenbahnen gegeben sind, auf den für den offiziellen nationalen Bezugsrahmen ausgewählten ITRF transformiert. Auf diese Weise sind die Positionen der neuen Punkte mit denen der existierenden Geodatenbanken konsistent.

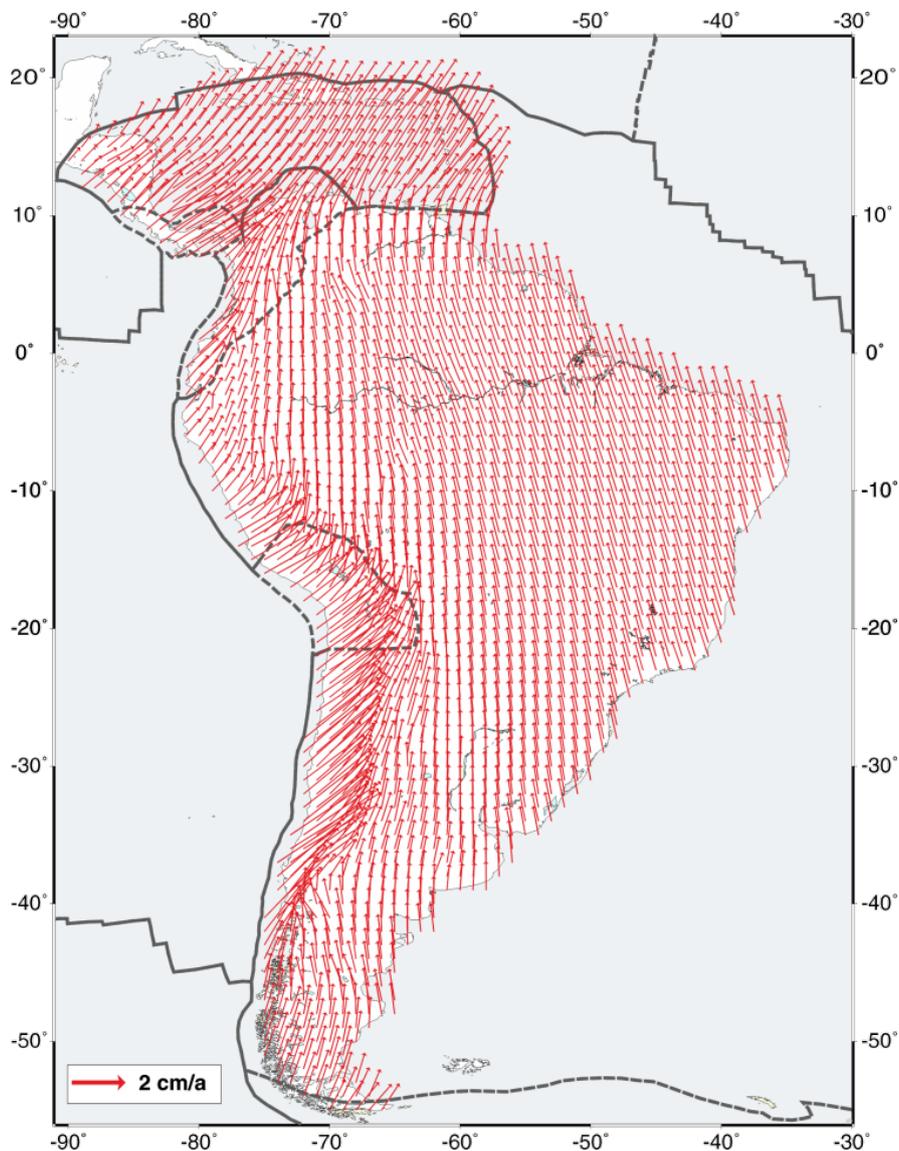


Abb. 5.3: VEMOS: Velocity Model for SIRGAS (Drewes and Heidbach 2012).

Streng genommen beziehen sich die Lösungen des SIRGAS-Referenzrahmens auf den des IGS, da dieser Grundlage für die in der SIRGAS-Prozessierung verwendeten IGS-Produkte ist. Ein IGS-Referenzrahmen ist eine Untermenge der Positionen und Geschwindigkeiten des ITRF für einen spezifizierten Satz von langfristig stabilen und global gut verteilten Stationen, z.B. entspricht der Rahmen IGS08 (Rebischung et al. 2012) dem ITRF2008 (Altamimi et al. 2011). Wenn ein IGS-Referenzrahmen verfeinert wird (z.B. durch Einschluss oder Ausschluss einiger Stationen), wird der Name geändert, z.B. für den IGS08 gibt es die verbesserte Version IGb08 (siehe <http://igscb.jpl.nasa.gov/pipermail/igsmail/2012/007853.html>). Der Hauptunterschied zwischen ITRF2008 und IGS08/IGb08 beruht auf dem für die Variation der Antennenphasenzentren angewendeten Modell. Während die ITRF2008-Koordinaten mit dem Kalibrierungssatz `igs05.atx` konsistent sind (Schmid et al. 2007), wurde der IGb08 mit dem Modell `igs08.atx` aufdatiert (Schmid 2011). Folglich differieren die IGS08/IGb08-Positionen von denen des ITRF2008 in einigen Stationen um wenige Millimeter (Details siehe in Rebischung et al. 2012 und <http://igscb.jpl.nasa.gov/pipermail/igsmail/2012/007853.html>). Die Koordinaten des IGS-Referenzrahmens sind intern konsistenter als die ursprünglichen ITRF-Werte, jedoch bestehen üblicherweise keine Translationen, Rotationen oder Maßstabsänderungen zwischen beiden Realisierungen. Deshalb können die IGS-Produkte und Berechnungen, die darauf basieren (wie die SIRGAS-Lösungen) nominell als im aktuellen ITRF gegeben angesehen werden. Eine Ausnahme ist die Übereinstimmung zwischen dem ITRF2005 (Altamimi et al. 2007) und dem IGS05 (<http://igscb.jpl.nasa.gov/pipermail/igsmail/2006/005518.html>), denn dieser ITRF wurde mit relativen Antennenphasenzentrumskorrekturen berechnet, während der IGS05 mit absoluten Werten aufdatiert wurde. Diese Differenz erzeugte eine Maßstabsänderung zwischen den beiden Referenzrahmen. Eine Beschreibung der verschiedenen IGS-Referenzrahmen findet sich unter <http://acc.igs.org/igs-frames.html>.

Sánchez et al. (2013) zeigen, dass die verschiedenen SIRGAS-Realisierungen untereinander im Millimeter-Niveau konsistent sind; jede von ihnen erfüllt die im Abschnitt 4.1.1 beschriebenen Charakteristiken (Verbindung mit dem ITRS/ITRF) und kann deshalb in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Die Hauptbeschränkung bei der Anwendung ist jedoch die Verbindung mit dem Nivellement erster Ordnung, d.h. zum lokalen vertikalen Datum (vgl. Abschnitt 4.1.2). Es ist folgendes verfügbar (Abb. 5.4):

- a) 45 Stationen der SIRGAS-Kampagne 2000, deren Koordinaten vom ITRF2000 in den ITRF2008 mit den vom *IERS ITRS Product Centre* veröffentlichten Parametern ([http://itrf.eng.ign.fr/doc\\_ITRF/Transfo-ITRF2008\\_ITRFs.txt](http://itrf.eng.ign.fr/doc_ITRF/Transfo-ITRF2008_ITRFs.txt)) transformiert wurden. Es wird angenommen, dass diese Parameter die durch die Verwendung relativer (ITRF2000) bzw. absoluter (ITRF2008) Antennenphasenzentrumskorrekturen erzeugten Maßstabsänderungen einschließen. Die Koordinaten der SIRGAS2000-Stationen beziehen sich ursprünglich auf die Epoche 2000,4 und werden deshalb mit den aus den Kampagnen 1995 und 2000 abgeleiteten mittleren jährlichen Änderungen (Geschwindigkeiten, Drewes et al. 2005) auf die ITRF2008-Referenzeпоche 2005,0 extrapoliert. Für solche Stationen, die nicht in beiden Kampagnen besetzt sind, werden die Geschwindigkeiten aus dem Modell VEMOS (Drewes and Heidbach 2012) benutzt. Die Koordinaten von SIRGAS95 werden hier nicht verwendet, weil alle darin verfügbaren Stationen mit

Nivellement-Anschluss auch in SIRGAS2000 enthalten sind und dort eine höhere Genauigkeit aufweisen.

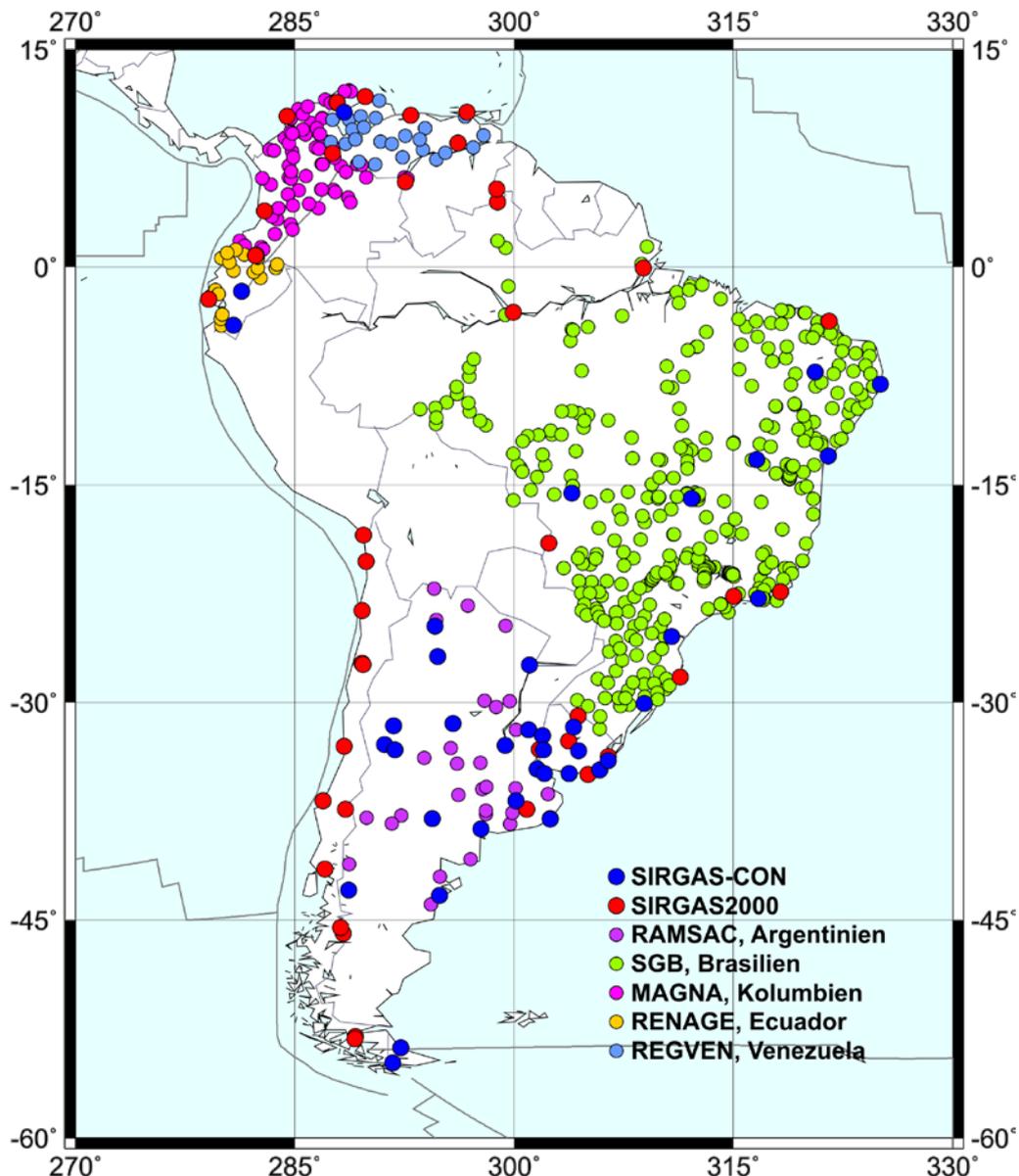


Abb. 5.4: Referenzstationen SIRGAS2000, SIRGAS-CON und nationale Verdichtungen von SIRGAS, die durch Präzisionsnivellements mit den lokalen vertikalen Datums verbunden sind.

- b) 39 Stationen SIRGAS-CON, deren Koordinaten aus der Multijahreslösung SIR11P01 (Sánchez and Seitz 2011) übernommen werden, da es die letzte ist, die berechnet wurde bevor der IGS begann seine Produkte im Referenzrahmen IGS08<sup>1</sup> zu erzeugen. Diese

<sup>1</sup> Die Änderung vom IGS05 zum IGS08 erzeugt (vor allem in den Höhen) einen Sprung in den Reihen der Stationskoordinaten, der bis zu 7 mm erreichen kann (abhängig von der Antenne und der geographischen Breite der Station). Um die Zuverlässigkeit der Zeitreihen sicher zu stellen, wurde entschieden, alle Wochenlösungen des SIRGAS-CON-Netzes ab 1997 mit dem IGS08-Referenzrahmen zu reprozessieren und dabei die vom IGS für seine zweite Reprozessierung definierten Standards (siehe <http://acc.igs.org/reprocess2.html>) zu benutzen. Die neue Berechnung des SIRGAS-CON-Netzes ist noch nicht abgeschlossen und kann in der vorliegenden Arbeit nicht verwendet werden.

Lösung beruht auf der Kombination von wöchentlichen Normalgleichungen von 2000-01-02 bis 2011-04-16 und enthält 230 Stationen mit 269 Besetzungen. Die Präzision wird mit  $\pm 1,0$  mm bzw.  $\pm 2,4$  mm für die Horizontal- und Vertikalpositionen, sowie  $\pm 0,7$  mm/a bzw.  $\pm 1,1$  mm/a für die entsprechenden Geschwindigkeiten geschätzt. Das geodätische Datum wurde mit den Koordinaten des ITRF2008 festgelegt, jedoch wurden die ursprünglichen Normalgleichungen auf der Grundlage des IGS05 und dem Modell igs05.atx berechnet. Damit sind die Koordinaten mit den im Punkt a) beschriebenen kompatibel. Die Referenzepoche ist 2005,0. Hier muss klargestellt werden, dass die durch das starke Maule-Erdbeben im Februar 2010 verursachten Diskontinuitäten (in mehr als 25 SIRGAS-Stationen) in der Lösung SIR11P01 ausgeschlossen wurden. Außerdem werden die in Bogotá, Kolumbien, gelegenen SIRGAS-CON Stationen BOGA und BOGT (vgl. Abb. 1.5) hier nicht berücksichtigt, da sie eine Vertikalgeschwindigkeit von fast 4 cm/a aufweisen, was ihre Kombination mit *statischen* physikalischen Höhen aus den Nivellements (vgl. Abschnitt 4.1.3) sehr erschweren würde.

- c) Die Punkte a) und b) beschreiben, genau gesagt, ausschließlich Stationen des kontinentalen Referenzrahmens. Dank der Unterstützung einiger südamerikanischer Länder war es möglich, auch weitere (nicht kontinuierlich messende) Stationen der nationalen Referenzrahmen (d.h. Verdichtungen des kontinentalen Rahmens) einzuschließen. Dies sind von Argentinien 28, Brasilien 427, Kolumbien 82, Ecuador 18 und Venezuela 24 Stationen. Dabei muss erwähnt werden, dass die von Chile und Uruguay beigetragenen Stationen kontinuierlich beobachten und im Punkt b) enthalten sind. Bedauerlicherweise gibt es keine Informationen aus Bolivien, Peru und Paraguay. Mit den nationalen Netzen wird genauso verfahren wie unter a) beschrieben, d.h. die Transformation der Koordinaten vom ursprünglich verwendeten ITRF (vgl. Tab. 5.1) in den ITRF2008 geschieht mit den vom *IERS ITRS Product Centre* veröffentlichten Parametern, die Stationspositionen verbleiben dabei in der originären Referenzepoche und werden entweder mit aus Wiederholungskampagnen abgeleiteten (wie z.B. in Kolumbien, Martínez and Sánchez 2012) oder mit dem Modell VEMOS berechneten Geschwindigkeiten in die ITRF2008-Epoche 2005,0 extrapoliert.

Das Ergebnis dieser Standardisierung ist eine Datenbank mit 663 Referenzstationen (mit der höchstmöglichen Genauigkeit) bezogen auf den ITRF2008 mit Koordinaten in der jeweiligen Messepoche (vgl. Tab. 5.1) und in der Epoche 2005,0. Für jeden Koordinatensatz gibt es Genauigkeitsangaben, die im ersten Fall der Varianz-Kovarianz-Matrix der individuellen Ausgleichungen und im zweiten Fall der Fehlerfortpflanzung aus diesen Werten und der Unsicherheit der verwendeten Geschwindigkeiten entsprechen. In allen Fällen wurden die geometrischen Stationskoordinaten  $[X, Y, Z]$  bzw.  $[\varphi, \lambda, h]$  mittels der Gleichungen [4.1] und [4.2] vom Gezeitensystem *tide free* in *zero tide* transformiert.

### 5.3.2 Höhenanomalien

Die genaue Modellierung des Geoids bzw. des Quasigeoids ist eine der wesentlichen Beschränkungen der Geodäsie in Südamerika. Als erstes gibt es keine dichte Verteilung von

terrestrischen (oder Flugzeug-) Schweremessungen. Obwohl mehrere geophysikalische Projekte mit Unterstützung der Gravimetrie existieren, die viele Daten erzeugt haben, sind diese nicht frei zugänglich und können in der vorliegenden Arbeit nicht verwendet werden. Als zweites ist die Topographie der Andenregion sehr rauh (große Höhenänderungen in kurzen horizontalen Entfernungen), und so sehr die digitalen Geländemodelle auch verbessert wurden (insbesondere durch SRTM<sup>2</sup>), weisen sie immer noch Unsicherheiten im Bereich einiger Meter auf. Als drittes ist die Urwaldzone entlang des Amazonas eine natürliche Barriere, die die Gewinnung terrestrischer geodätischer Daten sehr erschwert und in vielen Fällen unmöglich macht (z.B. Schweremessungen, Nivellement, GNSS). Unter diesen Umständen werden hier drei Möglichkeiten zur Handhabung der Höhenanomalien betrachtet:

- a) Verfügbarkeit terrestrischer Schwerefeldmessungen (Kolumbien, Ecuador, Venezuela): Modellierung des Quasigeoids durch Kombination eines globalen Schwerefeldmodells mit terrestrischen (bzw. Flugzeug-) Gravimetermessungen und topographischen Modellen.
- b) Verfügbarkeit von Geoid- (bzw. Quasigeoid-) Modellen (Tab. 5.2) hoher Auflösung (Brasilien, Kolumbien, Uruguay, Venezuela): Diese *lokalen* Modelle enthalten mehr Schweremessungen als für die Berechnung globaler Schwerefeldmodelle verfügbar sind, so dass die Genauigkeit verbessert wird. Diese Modelle werden an ein gemeinsames globales Schweremodell so angepasst, dass ihre langen Wellenlängen sich auf das gleiche Referenzniveau beziehen. In Argentinien existieren verschiedenen Geoid-Berechnungen (e.g. Pacino et al. 2002, Tocho et al. 2007, Pereira and Pacino 2010) aber diese Modelle sind nicht frei zugänglich und für diese Arbeit nicht verwendbar.
- c) Keine Verfügbarkeit von gravimetrischen Daten oder lokalen Geoidmodellen (Argentinien, Bolivien, Chile, Paraguay, Peru): Nutzung des globalen Schweremodells EIGEN-6C3stat mit seiner maximalen Auflösung ( $n, m = 1949$ ).

**Tab. 5.2:** Verfügbare Geoid- und Quasigeoid-Modelle hoher Präzision in Südamerika.

| Land      | Nationales Modell   | Global-Anteil             | Regional-Anteil  | Vergleich mit ( $h - H^N$ )   |
|-----------|---|---------------------------|--|---|
| Brasilien | MAPGEO2010: Quasigeoid, <i>remove-restore</i> -Verfahren, System <i>tide free</i><br>Quelle: <a href="http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/modelo_geoidal.shtm">www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/modelo_geoidal.shtm</a> | EGM2008<br>$n = 150$      | 950 000 Schwere-<br>werte +<br>Geländemodell:<br>SRTM v.2.1                | Mittel: 0,32 m<br>rms: $\pm 1,25$ m<br>Amazonas-Regenwald-<br>Region nicht enthalten<br>(50% der Landesfläche)  |
| Kolumbien | QGEOCOL2004: Quasigeoid, <i>remove-restore</i> -Verfahren, System <i>tide free</i><br>Quelle: Sánchez 2003,<br><a href="http://www.igac.gov.co">www.igac.gov.co</a>   | TEG4<br>$n = 200$         | 90 000 Schwere-<br>werte +<br>Geländemodell:<br>GTOPO30                    | Mittel: -2,16 m<br>rms: $\pm 1,33$ m<br>Amazonas-Regenwald-<br>Region nicht enthalten<br>(30% der Landesfläche) |
| Uruguay   | UruGeoide2007: Geoid, <i>remove-restore</i> -<br>Verfahren, System <i>tide free</i><br>Quelle: <a href="http://www.ejercito.mil.uy">www.ejercito.mil.uy</a>   | GGM02C<br>$n = 200$       | 8 500 Schwere-<br>werte +<br>Geländemodell:<br>SRTM30                      | Mittel: 0,26 m<br>rms: $\pm 0,77$ m   |
| Venezuela | VGM10: Geoid, <i>remove-restore</i> -<br>Verfahren, System <i>tide free</i><br>Quelle: <a href="http://www.lgfs.luz.edu.ve/lgfs/software.html">www.lgfs.luz.edu.ve/lgfs/software.html</a>   | EIGEN-6C<br>( $n = 240$ ) | Mehrere<br>Millionen (?)<br>Schwerewerte +<br>Geländemodell:<br>SRTM30plus | Mittel: ?<br>rms: $\pm 0,15$ m  |

<sup>2</sup> Shuttle Radar Topography Mission.

Die Modellierung des Quasigeoids<sup>3</sup> wird mit der Strategie des *remove-restore* durchgeführt. Zur Berechnung der Residualanomalien werden die Schwereanomalien des EIGEN-6C3stat-Modells bis zum Grad  $n = 200$  (dasselbe, das auch für den im Abschnitt 4.4 empfohlenen globalen  $W_0$ -Wert verwendet wurde) von dem regionalen Anomalienansatz, der die punktweise verteilten Faye-Anomalien enthält, subtrahiert. Der Schritt geschieht in zwei Stufen: Zuerst werden die kurzwelligen Komponenten des regionalen Schwerefeldes (topographische Effekte bzw. Geländereduktion) von den Freiluft-Anomalien nach Molodenskii subtrahiert, und danach werden die langwelligen Komponenten des globalen Schwerefeldes abgezogen. Da die Somigliana-Formulierung für die Berechnung der Normalschwere in [5.4] sowie die Anomalien aus dem Schwerefeldmodell die gravitative Wirkung der atmosphärischen Massen enthalten, wird die atmosphärische Reduktion zu den terrestrischen Anomalien addiert (Torge 1989, S. 54).

Die Geländereduktion wird durch das Programm TC aus der GRAVSOFTE-Software (Tscherning et al. 1992) durchgeführt. Es basiert auf der numerischen Integration der gravitativen Effekte der durch die sphärische Bouguer-Platte abgetragenen oder fehlenden Massen mit konstanter Gesteinsdichte, die in Geländeblöcken dargestellt werden (Forsberg 1997, S. 166ff). Dafür werden drei Integrationszonen definiert: eine äußere Zone mit einem (1'x1')-Geländegitter, eine mittlere Zone mit (15"×15")-Blöcken und eine innere Zone mit gemäß der *bicubic spline*-Interpolation verdichteten Höhendaten (Forsberg 1997, S. 167). Die Integrationsradien der drei Zonen entsprechen 1000 km, 160 km und 90". Das angewendete Höhenmodell ist die Version 2.1 der SRTM-Daten, die durch den U.S. Geological Survey<sup>4</sup> bereitgestellt werden.

Der Beitrag der residualen Anomalien zu den Höhenanomalien wird durch ähnliche Verfahren wie zur Bestimmung der Geländereduktion geschätzt. Die innerste Integrationszone erlaubt eine planare Approximation des Stokes-Integrals, während die mittlere und äußere Zone durch sphärische Approximation ausgewertet werden. In der planare Approximation wird ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, dessen Ursprung mit dem Berechnungspunkt zusammenfällt. Damit werden die Schwereanomalien als Funktion dieser Koordinaten durch (z.B. Kuhn 2000, S. 34ff):

$$\Delta g_r = \Delta g - \Delta g_{GGM} = \Delta g_r(x_i, y_j) \quad [5.17]$$

dargestellt.  $i, j$  sind die Indizes der Gitterpunkte in einem Gitter der Dimension  $M \times N$ .

Der Einfluss auf das Quasigeoid lautet:

$$\zeta(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta g_r(x_i, y_j) \cdot k(x_k - x_i, y_l - y_j) \cdot \Delta x \Delta y \quad [5.18]$$

mit:  $\Delta x \approx \Delta \varphi R$ ;  $\Delta y \approx \cos \varphi \Delta \lambda R$  und  $R = \text{Erdradius}$ .  $(x_k, y_l)$  entspricht dem inneren Element, in dessen Mitte der Berechnungspunkt liegt. Sein (schon in [5.18] enthaltener) Einfluss ist:

<sup>3</sup> Das Referenzellipsoid ist GRS80 (Moritz 2000).

<sup>4</sup> <http://dds.cr.usgs.gov/srtm/>

$$\zeta = \frac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\gamma \pi} \Delta g_r$$

Der Kern  $k$  ist die Stokes-Funktion in planarer Approximation:

$$k(x_k - x_i, y_l - y_j) = \begin{cases} \left[ (x_k - x_i)^2 + (y_l - y_j)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} & ; \quad x_k \neq x_i \text{ oder } y_l \neq y_j \\ \frac{2}{\sqrt{\Delta x \Delta y}} & ; \quad x_k = x_i \text{ oder } y_l = y_j \end{cases} \quad [5.19]$$

Bei der sphärischen Approximation lauten die Formulierungen (z.B. Kuhn 2000, S. 34ff)

für die Schwereanomalien:

$$\Delta g_r = \Delta g_r(\varphi_i, \lambda_j) \quad [5.20]$$

( $i, j$  Indizes der Gitterpunkte in einem Gitter der Dimension  $M \times N$ ),

für den Quasigeoid-Anteil:

$$\zeta(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta g_r(\varphi_j, \lambda_k) \cdot S[\psi(\varphi_l, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_i)] \cdot \cos \varphi_l \cdot \Delta \varphi \Delta \lambda \quad [5.21]$$

und für den Stokes-Kern:

$$S[\psi(\varphi_l, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_i)] = \begin{cases} S[\psi(\varphi_l, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_i)] & ; \quad \varphi_l \neq \varphi_j \text{ oder } \lambda_k \neq \lambda_i \\ \frac{4}{\sqrt{\cos \varphi \Delta \varphi \Delta \lambda}} & ; \quad \varphi_l = \varphi_j \text{ und } \lambda_k = \lambda_i \end{cases} \quad [5.22]$$

Die Auswertung der Formel [5.21] kann auch u.a. durch eine Fourier- oder Wavelet-Transformation durchgeführt werden. Die Vorteile dieser Techniken liegen in der einfachen Handhabung im Frequenzbereich der in der Stokes-Formel enthaltenen Operationen und in der Zeitersparnis bei den Berechnungen. Die Ergebnisse der verschiedenen Techniken sollten aber gleich sein. In der vorliegenden Arbeit wird eine numerische Integration durch das Programm STOKES von GRAVSOFT (Tscherning et al. 1992) durchgeführt. Die planare Approximation wird mit einem Integrationsradius von 200 m ausgewertet; dort werden die residualen Anomalien durch die *spline-cubic*-Methode interpoliert, um einen verdichteten Datensatz abzubilden. Der maximale Integrationsradius  $\psi_{max}$  der sphärischen Approximation wird auf  $2^\circ$  gesetzt; dies ist etwas größer als die Auflösung der langwelligen Komponenten des globalen Modells ( $n = 200 \rightarrow 1,3^\circ \approx 140,7$  km Auflösung).

Als letztes, im *restore*-Schritt, werden die von der regionalen Komponente durch den *remove*-Schritt entfernten langwelligen und kurzwelligen (topographischen) Anteile wieder addiert, um das gesamte Signal des Erdschwerefeldes im Quasigeoid zu rekonstruieren. Die globale Komponente des Quasigeoids wird mit den Koeffizienten desselben EIGEN-6C3stat-Modells

( $n=200$ ) berechnet. Zum kurzwelligen Anteil wird auch der sogenannte *indirekte Effekt* addiert. Dies ist durch (Heiskanen and Moritz 1967, S. 322; Sjöberg 2000, Gleichung 25b) gegeben:

$$\delta\zeta_{ind} \approx \frac{\pi \rho H^3}{\gamma_Q} \quad [5.23]$$

mit  $\rho = 2670 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $H^N$  (Normalhöhe)  $\approx$  nivellierte Höhe und  $\gamma_Q$  die Normalschwere auf dem Telluroid. Als letztes wird der Term  $T_0$  [5.8] hinzugefügt. Diese Berechnungen werden, wie im Abschnitt 3.4 beschrieben, im Gezeitensystem *zero tide* durchgeführt.

In den Fällen, in denen ein Geoid- (oder Quasigeoid-) Modell hoher Auflösung vorliegt (Tab.5.2), wird wie folgt vorgegangen:

- a) Wenn es ein Geoid-Modell ist (in Uruguay und Venezuela), wird dieses in ein Quasigeoid konvertiert mit der Beziehung (Heiskanen and Moritz 1967, S. 326)

$$N - \zeta = \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} H \quad [5.24]$$

- b) Die globale Komponente der Höhenanomalien wird durch das aus dem Modell EIGEN-6C3stat abgeleitete Äquivalent ersetzt. Z.B. wird von den Höhenanomalien des Modells MAPGEO2010 (in Brasilien) die mit dem EGM2008 bis  $n = 150$  berechnete Höhenanomalie abgezogen:  $\zeta_{Nationales\ Model}^{Regional} = \zeta_{Nationales\ Model} - \zeta_{GGM, n=150}$ , und später addiert man zu der erhaltenen regionalen Komponente die aus EIGEN-6C3stat, auch bis  $n = 150$ , abgeleitete.  $\zeta_{Standardisiertes\ National-Model} = \zeta_{Nationales\ Model}^{Regional} + \zeta_{EIGEN-6C, n=150}$ . Da die nationalen Modelle im Gezeitensystem *tide free* berechnet wurden, wird die Komponente  $\zeta_{EIGEN-6C}$  ebenfalls in diesem System gegeben.
- c) Die *standardisierten* Höhenanomalien werden von Gezeitensystem *tide free* in das System *zero tide* nach Ekman (1989) übergeführt:

$$\zeta_{ZT} - \zeta_{TF} = k_{20} (9,9 - 29,6 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-2} \quad [5.25]$$

In diesem Fall wird derselbe Wert für  $k_{20}$  verwendet, der auch bei der Konversion des Koeffizienten  $C_{20}$  des globalen Schweremodells benutzt wurde (vgl. Abschnitt 4.3.1).

- d) Schließlich wird zu den *standardisierten* Höhenanomalien im System *zero tide* die ellipsoidische Korrektur [5.11] hinzugefügt.

Das Ergebnis dieser Standardisierung sind Werte der Höhenanomalien  $\zeta$  für jede der im Abschnitt 5.3.1 ausgewählten 663 Stationen mit geometrischen Höhen. Die Angaben zur Genauigkeit beziehen sich auf den formalen Fehler aus dem *remove-restore*-Verfahren, den für die nationalen Modelle angegebenen (Tab. 5.2) oder den aus der Varianz-Kovarianz-Matrix des globalen Schweremodells erhaltenen Fehler. Es wäre ideal, jede Station punktweise berechnen zu können (wie es für Kolumbien, Ecuador und Venezuela gemacht wurde), aber wegen der

gegenwärtigen Restriktionen hinsichtlich der Zugänglichkeit der Schweredaten ist dieses nicht möglich. Dennoch ist der Vorteil des hier beschriebenen Verfahrens, dass die aus den verschiedenen verfügbaren Datentypen gewonnenen Ergebnisse verglichen werden können. Das heißt, es kann verifiziert werden wie ähnlich oder unterschiedlich die vertikalen Datumparameter sind, wenn man die Höhenanomalien direkt berechnet (*remove-restore-Verfahren*), oder wenn man die an ein gemeinsames globales Schwerefeldmodell gekoppelten regionalen Komponenten von Quasigeoid-Modellen hoher Auflösung (hier *nationale standardisierte Modelle* genannt) benutzt, oder wenn man ein gemeinsames globales Schwerefeldmodell hoher Auflösung (Kugelfunktionsentwicklungen mit  $n, m > 1800$ ) verwendet.

### 5.3.3. Physikalische Höhen

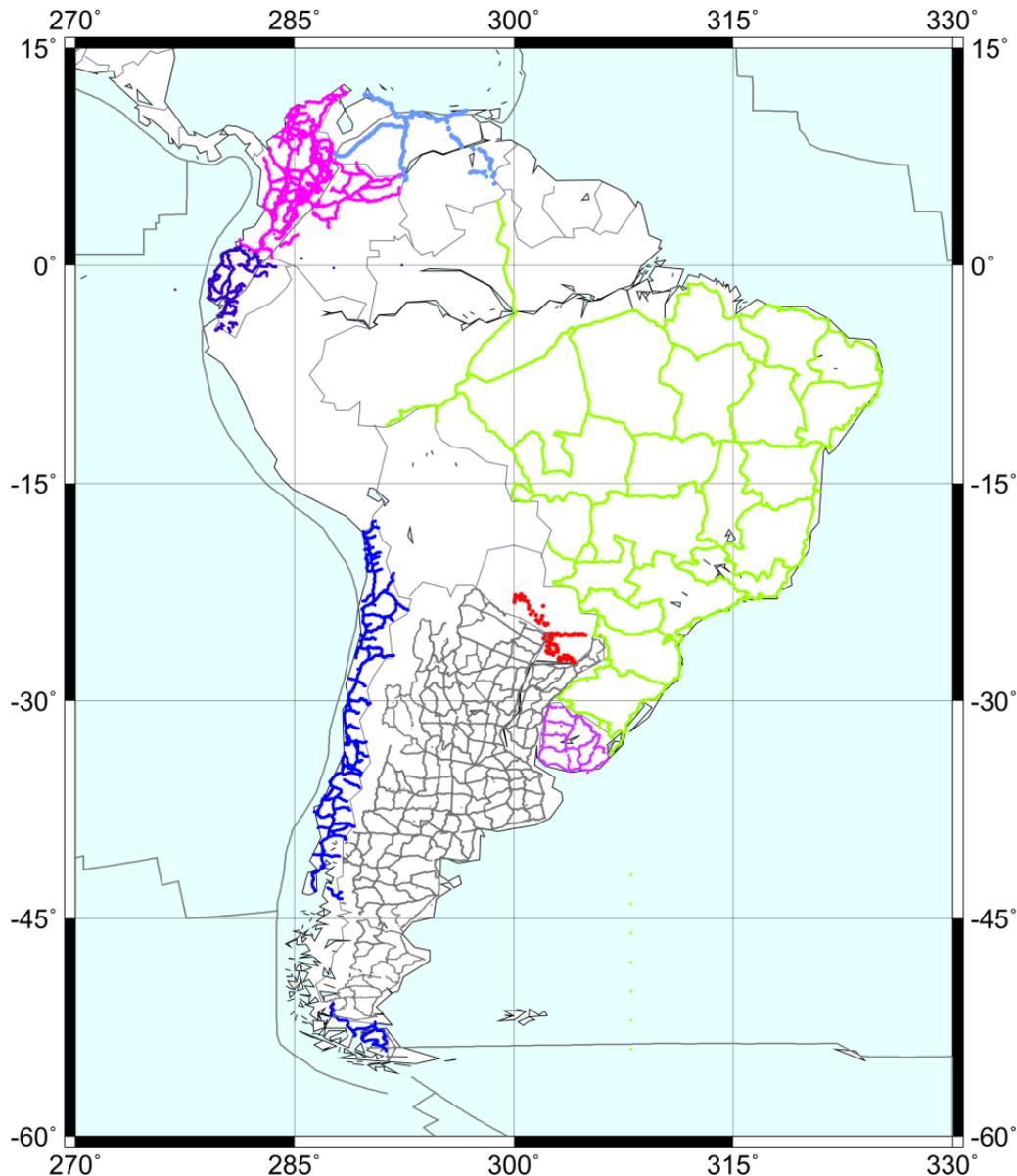
Im Kapitel 1 wird eine kurze Beschreibung der bestehenden Höhensysteme in Südamerika gegeben, Tab. 5.3 stellt deren Diagnose zusammen: Verschiedene Referenzpegel, Unsicherheit des Zeitraums der Messungen des mittleren Meeresspiegels, der als Referenzepoche dient, lange Zeiträume der durchgeführten Nivellements, verschiedene Standards bei der Auswertung der Nivellements, Vernachlässigung vertikaler Bewegungen des Festpunktfeldes und des Meeresspiegels, partielle Ausgleichungen der Nivellementsnetze, usw. Mit der Absicht, diese Information für die Vereinheitlichung der Höhensysteme zu standardisieren, wurde im September 1997 die SIRGAS-Arbeitsgruppe III: Vertikales Datum eingerichtet, die seit August 1998 unter anderem eine Neuausgleichung der bestehenden Nivellementsnetze voranzutreiben versucht (z.B. Drewes et al. 2002, Sánchez 2005, 2007). Zu diesem Zweck wurde jedes Land eingeladen, die Messungen der Nivellements erster und zweiter Ordnung in seinem Territorium auszuwerten, die Messdaten zu bereinigen und Datenbanken anzulegen, die sämtliche notwendigen Informationen zur Berechnung geopotentieller Koten enthalten (d.h. Jahr der Nivellements, gemessene Höhenunterschiede, geographische Koordinaten und Strecke zwischen den Nivellementspunkten und Schwerewerte). Obwohl der Aufbau der Nivellementsnetze in den Dekaden 1940 und 1950 begonnen wurde, dauerte deren Ausgleichung im *Inter American Geodetic Survey* der *US Defense Mapping Agency*<sup>5</sup> (DMA) bis in die 1980er Jahre, und die für die nationalen Referenzrahmen zuständigen südamerikanischen Behörden erhielten nur die Ergebnisse. Deshalb kennen diese im Allgemeinen nicht die Einzelheiten der Auswertung und der Netzausgleichung. Nachdem die DMA die Unterstützung der südamerikanischen Länder reduziert hat, sehen die Länder sich verpflichtet, die Aufgabe der Ausgleichung der Vertikalnetze zu übernehmen, was fast zwei Dekaden gedauert hat, ohne dass endgültige Ergebnisse vorliegen.

Im Rahmen der von der SIRGAS-Arbeitsgruppe III ausgelösten Aktivitäten sind die meisten Messungen der Nivellements 1. und 2. Ordnung von Brasilien, Chile, Kolumbien, Ecuador, Paraguay und Uruguay verfügbar (Abb. 5.5). Venezuela stellte diejenigen Nivellementslinien zur Verfügung, die einige Stationen des SIRGAS2000-Netzes mit dem Referenzpegel (La Guaira) verbinden (Abb. 5.4), und Argentinien lieferte die Normalgleichungen (für geopotentielle Koten) der Ausgleichung der Hauptlinien des nationalen Nivellementsnetzes. Bolivien und Peru haben bisher keine Daten eingebracht. Mit Ausnahme von Brasilien beschränkten sich die Länder darauf,

---

<sup>5</sup> Heute *National Geospatial-Intelligence Agency* - NGA.

die Feldbücher (einschließlich der Reduktion der Refraktion und der Kalibrierungskonstanten der Nivelliere und Latten) zu digitalisieren, ohne zu verifizieren, dass tatsächlich alle Nivellementslinien miteinander verbunden und keine groben Fehler mehr enthalten sind.



*Abb. 5.5: Verfügbare Nivellements in Südamerika (in Argentinien sind es keine Originalmessungen sondern Normalgleichungen).*

Die erste Aufgabe in der vorliegenden Arbeit war deshalb die Auswertung der von den einzelnen Ländern gelieferten Höhenunterschiede, insbesondere um fehlende Messungen (Lücken in den Netzen) zu identifizieren, um mit der Ausgleichung der nationalen Netze voranzukommen, wie in den Abschnitten 4.1.2 und 4.1.3 vorgeschlagen. Wegen der großen Menge gefundener Inkonsistenzen und der Verzögerung in den Ländern, die aufgeworfenen Zweifel zu klären, wurde entschieden, nur mit denjenigen Nivellementslinien zu arbeiten, die die geometrisch bestimmten Stationen mit den Referenzpegeln verbinden, insbesondere diejenigen, die sich in Landesgrenzgebieten befinden (um die Beobachtungsgleichungen [5.16] formulieren zu können).

Auf diese Weise war es möglich, für jedes Land Normalgleichungen des Typs [4.16] mit den nivellierten Höhen als Anfangswerte zu bilden.

**Tab. 5.3:** Bekannte Details der bestehenden Höhensysteme in Südamerika (übernommen aus Lauría et al. 2002, Sánchez and Martínez 2002, Subiza et al. 2002, Hernández et al. 2002, Sánchez 2005).

| Land        | Referenzpegel <sup>6</sup>   |  | Nivellementsnetz   |                                       |                | Standards         |   |
|-------------|--|--|--|---------------------------------------|----------------|-------------------|---|
|             | Name   | Epoche des ausgewählten mittleren Meeresspiegels | Ausdehnung [km]<br>1. Ordnung <sup>7</sup><br>2. Ordnung | Punktzahl<br>1. Ordnung<br>2. Ordnung | Messung        | Gezeitenreduktion | Schwere-reduktion                                   |
| Argentinien | Mar del Plata<br>Seit 1950 PARN:<br><i>Punto Altimétrico de Referencia Normal</i> (Tándil),<br>200 km v. Pegel | 1924   | 64 000<br>13 000   | 16 320<br>7 600                       | 1940 -<br>2010 | ?                 | orthometrisch                                       |
| Bolivien    | Arica (Chile)  | ?  | 25 388<br>1 923  | 12 208<br>865                         | ?              | ?                 | ?   |
| Brasilien   | Imbituba<br>Santana  | 1949<br>?  | 160 000  | 65 000                                | 1945 -<br>2010 | keine             | orthometrisch<br>mit Normal-<br>schwere             |
| Chile       | Valparaíso<br>Arica<br>Antofagasta<br>San Antonio<br>Talcahuano<br>Pto Montt<br>Pta Arenas                     | 1941<br>?<br>?<br>?<br>?<br>?                    | 11 550<br>1 750  | 8 592<br>1 138                        | 1950 -<br>2010 | ?                 | ?   |
| Kolumbien   | Buenaventura   | 1951   | 18 900<br>6 500  | 13 065<br>5 938                       | 1950 -<br>2010 | keine             | vor 1985<br>orthometrisch<br>mit Normal-<br>schwere |
| Ecuador     | La Libertad  | 1948   | 11 200<br>200  | 7 500<br>150                          | 1950 -<br>2010 | ?                 | ?   |
| Paraguay    | ?  | ?  | ?  | ?                                     | ?              | ?                 | ?   |
| Peru        | La Punta   | 1954   | ?<br>?   | 8 723<br>2 168                        | ?              | ?                 | ?   |
| Uruguay     | Montevideo   | 1948   | 3 883<br>3 836   | 1 347<br>835                          | 1950 -<br>2010 | keine             | orthometrisch                                       |
| Venezuela   | La Guaira  | ?  | ?  | ?                                     | ?              | ?                 | ?   |

Ziel dieses Vorgehens ist eine kontinentale Ausgleichung der Netze erster Ordnung, obwohl es noch keine hinreichende Redundanz gibt. Als Beispiel: Brasilien, Chile und Uruguay lieferten die Nivellementslinien, die ihre Netze mit Argentinien verbinden, aber die Normalgleichungen, die Argentinien bereitstellte, enthalten keine internationalen Verbindungen, und deshalb kann die Kombination nicht durchgeführt werden. Ebenso ist wegen des Fehlens der Daten von Peru und Bolivien z.B. die Verbindung von Kolumbien mit Chile (Abb. 5.5) nur über Venezuela-Brasilien-Uruguay-Argentinien möglich, aber ohne die Verbindung mit Argentinien bleibt Chile von der kontinentalen Ausgleichung isoliert. Wegen dieser Beschränkungen ist die Verfahrensweise für die Vereinheitlichung der südamerikanischen Höhensysteme zu erweitern. Die physikalischen Höhen zur Formulierung der Normalgleichungen [5.15] und [5.16] werden deshalb in zwei Arten aufgeteilt:

<sup>6</sup> Vgl. Abb. 1.1.

<sup>7</sup> Genauigkeitsspezifizierungen: 1. Ordnung: 4 mm  $\sqrt{d}$ , 2. Ordnung: 8 mm  $\sqrt{d}$ ,  $d$  in [km], vgl. Abschnitt 4.1.3.

- a) Die Gebrauchshöhen in jedem Land (d.h. mit allen im Kapitel 1 erwähnten Unzulänglichkeiten) und
- b) die in der vorliegenden Arbeit aus der Kombination der Normalgleichungen [4.16] erhaltenen Höhen für Ecuador, Kolumbien, Venezuela, Brasilien und Uruguay. Hier muss erwähnt werden, dass nicht alle nationalen Netze berücksichtigt wurden, sondern nur eine Auswahl von Linien, die große Schleifen bilden und die im Abschnitt 5.3.1 beschriebene Stationen mit geometrischen Koordinaten verbinden. In Übereinstimmung mit der Darstellung im Abschnitt 4.1 wurden die zeitabhängigen Gezeiteneffekte [4.5] reduziert und die geopotentiellen Knoten wurden statisch (bezogen auf die Epoche der Messungen) und kinematisch (bezogen auf die gemeinsame Epoche 2005,0) ausgeglichen. Die kinematische Ausgleichung war nur in Kolumbien und Ecuador möglich, da der Messungszeitraum der anderen Höhenunterschiede unbekannt ist. Bei diesem Vorgehen wurden die direkt aus den GNSS-Beobachtungen geschätzten Vertikalgeschwindigkeiten der Stationen benutzt (ein kinematisches Modell war nicht erforderlich). Wegen der großen Zeitunterschiede (mehrere Dekaden) zwischen der Durchführung der Nivellements und den GNSS-Messungen muss angenommen werden, dass die genannten Geschwindigkeiten konstant sind und dass keine abrupten Änderungen (z.B. durch Erdbeben) in den Vertikalpositionen der Punkte auftreten.

#### 5.3.4. Geometrische und physikalische Höhen in marinen Gebieten

Die Formulierung der Beobachtungsgleichungen [5.15] und [5.16] in marinen Gebieten um die Referenzpegel ist nur mit der Satellitenaltimetrie möglich. Unglücklicherweise sind keine Messungen ozeanischer Nivellements verfügbar, was die Verfeinerung der Altimetrie in Küstengebieten verhindert. Jedoch ist der Grundgedanke, wie bereits erwähnt, alle verfügbare Information zu nutzen und anschließend mittels einer Zuverlässigkeitsabschätzung der Ergebnisse zu definieren, welche Methoden für die Vereinheitlichung der Höhendatums in Regionen begrenzter geodätischer Infrastruktur anwendbar sind. Das Ziel ist es in diesem Fall, die Meeressflächentopographie an den Pegeln im Zeitraum der Definition des Nullpunktes der nationalen Höhensysteme (Tab. 5.3) zu schätzen. Die Vorgehensweise lässt sich wie folgt zusammenfassen (vgl. Sánchez and Bosch 2007):

- a) Mittels wiederholter oder kontinuierlicher GNSS-Positionierung werden Stationen an den Referenzpegeln in den ITRS/ITRF eingebunden, und es wird der Trend ihrer Vertikalbewegung (konstante Geschwindigkeit) bestimmt.
- b) Aus verfügbaren Pegelregistrierungen wird der Trend der Veränderung des Meeresspiegels an den Referenzpegeln abgeleitet.
- c) Durch die Satellitenaltimetrie wird die langfristige Veränderung der Meeresoberfläche in der Umgebung der Referenzpegel bestimmt.
- d) Der geschätzte Trend der Pegelregistrierungen wird um den Trend aus der GNSS-Positionierung reduziert, um die unverfälschte mittlere Meeresspiegeländerung an den

Referenzpegeln zu erhalten. Diese Ergebnisse werden mit dem Trend aus der Satellitenaltimetrie verglichen.

- e) Mit Kenntnis der linearen Änderung des mittleren Meeresspiegels an jedem Pegel werden die aus der Satellitenaltimetrie geschätzten Meeresoberflächenhöhen auf den Zeitraum der Definition des Höhennullpunkts jedes Landes reduziert. Diese Werte werden als geometrische Höhen  $h(P)$  in [5.15] eingeführt.

Die geometrischen Koordinaten (Positionen und Geschwindigkeiten) der Referenzpunkte (BM) der Pegel werden gemäß den Standards des IGS und IERS (vgl. Abschnitt 5.3.1) bestimmt. Die lineare Änderung des Meeresspiegels erhält man aus den verfügbaren Daten des *Permanent Service for Mean Sea Level*<sup>8</sup> (PSMSL, Holgate et al. 2013). Dafür werden die mittleren Monatswerte der Datenbank RLR (*Revised Local Reference*) verwendet, in der die Pegelregistrierungen auf dasselbe Tabellierungsdatum bezogen sind (Woodworth und Player 2003), so dass Zeitreihen der Meeresspiegelmessungen an jedem Pegel erzeugt werden. Die aus GNSS abgeleiteten Geschwindigkeiten werden als konstant über den Zeitraum der Pegelregistrierungen angenommen. Die säkulare Änderung des Meeresspiegels wird durch die Ausgleichung einer harmonischen Schwingungsfunktion mit einem linearen Term und zwei Frequenzen, einer jährlichen und einer halbjährlichen, geschätzt. Dieses Vorgehen gibt die saisonalen Zyklen der Meeresspiegelvariationen an den Pegeln angemessen wieder (Abb. 5.6), berücksichtigt aber nicht Mehrjahreszyklen, die durch Temperatur, Strömungen oder Winde erzeugt werden. Es wird momentan angenommen, dass diese die säkularen Änderungen nicht signifikant beeinflussen. Bei zukünftigen Arbeiten sollten jedoch Strategien eingeschlossen werden, die auch nicht-lineare Trends oder Mehrjahreszyklen berücksichtigen (z.B. Jerejeva et al. 2006, Snay et al. 2007).

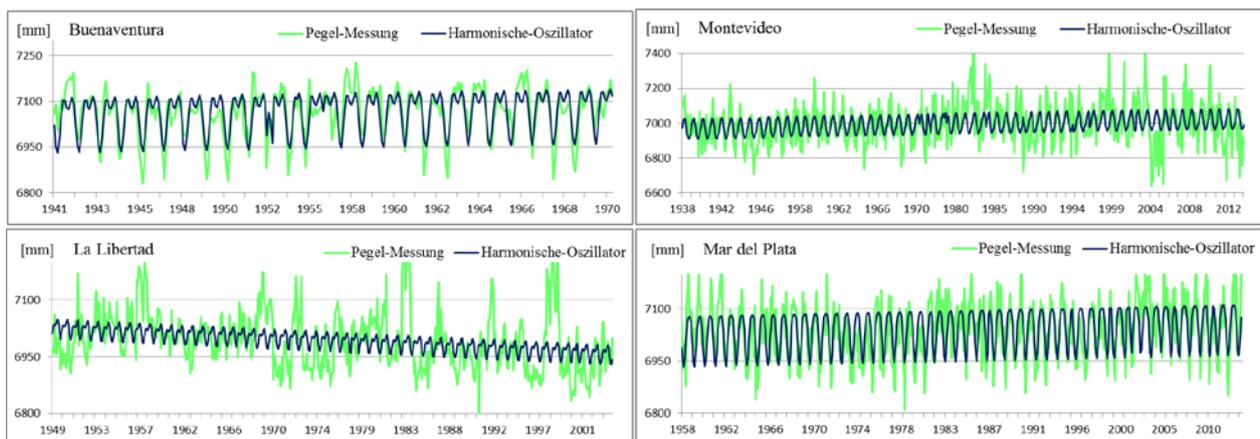


Abb. 5.6: Pegelregistrierungen dargestellt durch eine harmonische Schwingungsfunktion mit zwei Frequenzen.

An jedem Pegel entspricht die absolute Meeresspiegeländerung bezüglich dem ITRS/ITRF der Summe des aus den Pegelregistrierungen abgeleiteten Trends und der mit GNSS beobachteten vertikalen Krustenbewegung (Tab. 5.4). Es sollte erwähnt werden, dass die Distanz zwischen Pegel und GNSS-Station, d.h. eine eventuelle unterschiedliche Bewegung, nicht berücksichtigt wurde, so dass die Bewegungen als gleich angenommen wurden.

<sup>8</sup> www.psmsl.org

Diese absoluten Meeresspiegeländerungen an den Pegeln werden mit den aus der Satellitenaltimetrie in deren Umgebung abgeleiteten Trends der Meeresoberfläche verglichen. Dazu dienen in diesem Fall erneut die in der *OpenADB* (Schwatke et al. 2010, vgl. Abschnitt 4.3.2, Abb. 4.12) verfügbaren Daten. Die Meeresoberflächenhöhen werden in sogenannten BINs (kleine Zellen entlang der nominellen Spur) neu angeordnet, um die Zeitreihenanalyse zu ermöglichen. Die Länge der BINs (~7 km) ist so gewählt, dass für jeden Zyklus der Topex/Poseidon-Mission mindestens eine Beobachtung darin liegt. Da die wiederholten Messungen nicht immer genau in derselben Position liegen, werden die Beobachtungen innerhalb einer BIN unter Verwendung der Neigung des mittleren Meeresoberflächenmodells CLS11 (Schaeffer et al. 2012) auf ihren Mittelpunkt reduziert. Anschließend wird der Meeresspiegeltrend für jede BIN mittels Fourier-Reihenanalyse abgeleitet, wobei Jahres-, Halbjahres- und Vierteljahresperioden sowie eine M2-alias-Periode zur Berücksichtigung residualer Gezeitenfehler im Flachwasser eingeführt werden.

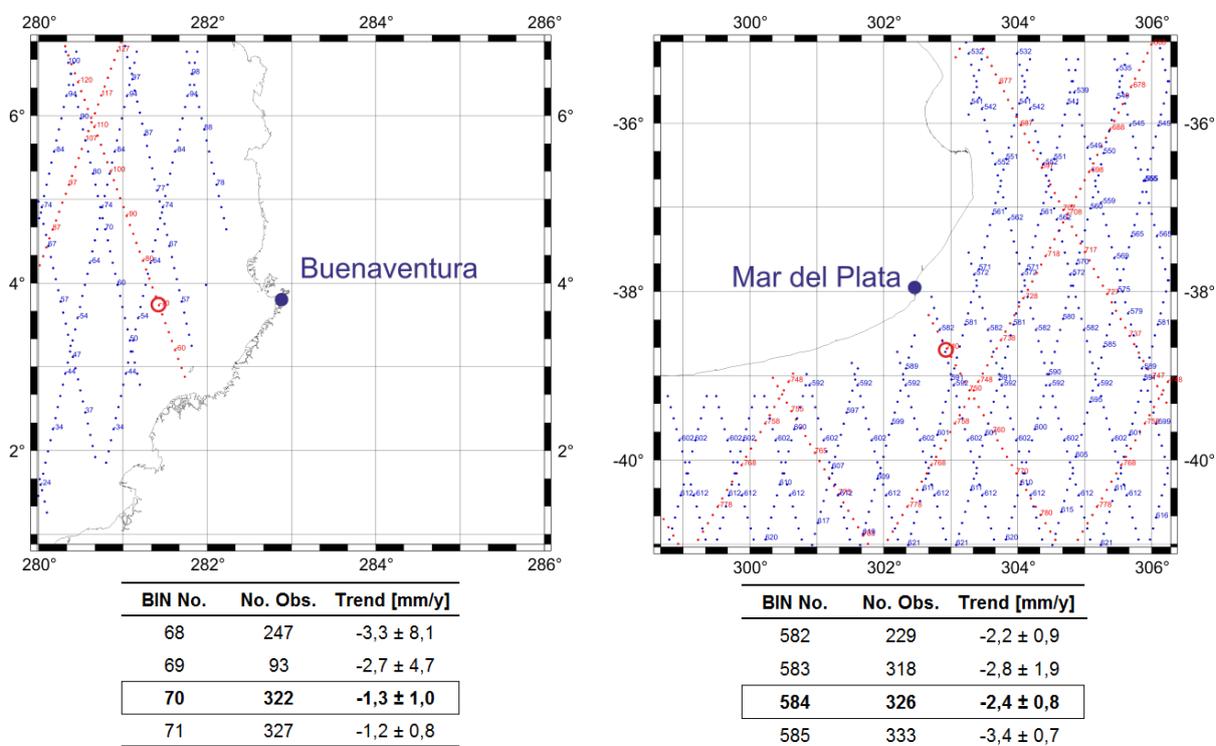
**Tab. 5.4:** Aus GNSS, Pegelregistrierungen und Satellitenaltimetrie an Referenzpegeln abgeleitete vertikale Trends in Südamerika (vgl. Abb. 1.1).

| Land        | Pegel         | GNSS           |               | Pegel          |               | Satelliten-Altimetrie |               |
|-------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|-----------------------|---------------|
|             |               | Trend [mm/a]   | Zeitspanne    | Trend [mm/a]   | Zeitspanne    | Trend [mm/a]          | Zeitspanne    |
| Argentinien | Mar del Plata | $2,2 \pm 2,2$  | 2002.7-2008.2 | $0,6 \pm 0,2$  | 1957.5-2012.9 | $2,4 \pm 0,8$         | 1993.9-2013.9 |
| Brasilien   | Imbituba      | $-0,1 \pm 1,1$ | 2007.8-2011.4 | $-1,0 \pm 0,6$ | 1948.7-1969.0 | $2,8 \pm 1,0$         | 1993.9-2013.9 |
| Brasilien   | Santana       |                |               | $158 \pm 136$  | 1984.0-1984.9 | $6,5 \pm 2,4$         | 1993.9-2013.9 |
| Chile       | Arica         |                |               | $-1,1 \pm 0,3$ | 1950.9-1992.0 | $1,1 \pm 1,4$         | 1993.9-2013.9 |
| Chile       | Antofagasta   |                |               | $-1,3 \pm 0,1$ | 1945.9-1993.0 | $1,4 \pm 1,3$         | 1993.9-2013.9 |
| Chile       | Punta Arenas  |                |               | $-5,7 \pm 5,5$ | 1964.6-1970.9 | $-4,8 \pm 3,1$        | 1993.9-2013.9 |
| Chile       | Valparaiso    | $-2,4 \pm 1,0$ | 2000.5-2010.1 | $1,4 \pm 0,1$  | 1944.0-2012.9 | $0,9 \pm 1,1$         | 1993.9-2013.9 |
| Chile       | Puerto Montt  |                |               |                |               | $1,0 \pm 1,5$         | 1993.9-2013.9 |
| Chile       | Talcahuano    |                |               | $2,0 \pm 0,3$  | 1949.6-1991.9 | $3,6 \pm 2,2$         | 1993.9-2013.9 |
| Kolumbien   | Buenaventura  | $1,6 \pm 1,5$  | 2005.8-2011.4 | $1,0 \pm 0,3$  | 1941.0-1969.9 | $1,3 \pm 1,0$         | 1993.9-2013.9 |
| Ecuador     | La Libertad   |                |               | $-1,2 \pm 0,2$ | 1948.8-2003.8 | $0,7 \pm 1,1$         | 1993.9-2013.9 |
| Peru        | La Punta      | $1,5 \pm 2,0$  | 2009.2-2011.2 |                |               | $0,8 \pm 0,9$         | 1993.9-2013.9 |
| Uruguay     | Montevideo    | $1,6 \pm 2,1$  | 1995.4-2000.4 | $0,8 \pm 0,2$  | 1938.0-2013.8 | $-2,8 \pm 1,2$        | 1993.9-2013.9 |
| Venezuela   | La Guaira     |                |               |                |               | $2,9 \pm 0,8$         | 1993.9-2013.9 |

Wegen bestehender Datenlücken und unzuverlässiger Korrekturen für Altimetermessungen in Küstengebieten repräsentiert die dem Pegel nächstgelegene BIN nicht unbedingt das wahrscheinlichste Verhalten der Region. Deshalb wird aus den BINs, die den Pegel umgeben, diejenige mit der maximalen Anzahl von Beobachtungen und den minimalen residualen Schwankungen ausgewählt. Abb. 5.7 zeigt zwei Beispiele und Tab. 5.4 fasst die verschiedenen in dieser Arbeit bestimmten Trends zusammen. Die großen Diskrepanzen an einigen Pegeln sind die Konsequenz bekannter Probleme im Zusammenhang mit:

- den Pegelregistrierungen wegen ihrer regionalen Lage (Buchten, Flussarme usw.),
- den Unsicherheiten der Altimetermessungen in Küstengebieten,
- der verschiedenen geographischen Lage von Pegel und Altimetriemessungen,

- den unterschiedlichen von den verschiedenen Datenquellen überdeckten Zeiträumen (GNSS-Positionierung, Pegelregistrierungen und Satellitenaltimetrie).



**Abb. 5.7:** Aus der Satellitenaltimetrie abgeleitete Meeresoberflächentrends. Die Zeitreihenanalyse basiert auf der BIN-Datenstruktur (Neuanordnung der Meeresoberflächenhöhen in kleinen Zellen entlang der nominellen Spur). Rote Kreise zeigen die ausgewählte BIN an jedem Pegel. (rot: Topex/Poseidon, blau: Jason-1, negative Zahlen für absteigende Bahnbögen, positive Zahlen für aufsteigende Bahnbögen). Die endgültigen Werte sind in den Kästen angegeben.

## 5.4. Bestimmung der Datumparameter der lokalen vertikalen Referenzsysteme in Südamerika

Mit den verfügbaren Daten lassen sich die Beobachtungsgleichungen [5.15] und [5.16] wie folgt lösen:

- Zur Aufdeckung grober Fehler werden erste Iterationen gerechnet unter der Annahme eines nicht signifikanten indirekten Effekts ( $f_0^i$  in [5.14]), der zu null gesetzt wird.
- Die erste Berechnung beruht auf den offiziellen Gebrauchswerten in den einzelnen Ländern, d.h.
  - Höhenanomalien der Quasigeoid- bzw. Geoid-Modelle, die in Brasilien, Kolumbien, Uruguay und Venezuela benutzt werden (vgl. Tab. 5.2). Für die übrigen Länder (Argentinien, Bolivien, Chile, Ecuador, Paraguay und Peru) wird das Modell EGM2008 verwendet.
  - Geometrische Höhen aus SIRGAS2000 und SIR11P01 sowie deren nationaler Verdichtungen (vgl. 5.1) in Argentinien (POSGAR07), Brasilien (SBG - Rede

Planimétrica), Chile (SIRGAS-Chile), Kolumbien (MAGNA-SIRGAS), Ecuador (RENAGE), Uruguay (SIRGAS-ROU98) und Venezuela (REGVEN). Aus Bolivien, Paraguay und Peru ist keine Information verfügbar.

- Offizielle physikalische Höhen, d.h. die Werte, die in den Ländern derzeit benutzt werden, auch wenn sie nicht den erforderlichen Standards entsprechen (Vernachlässigung der gravimetrischen Reduktion, keine Fehlerausgleichung usw., vgl. Tab. 5.3).
  - Meeresoberflächenhöhen aus der im Abschnitt 5.3.4 dargestellten Modellierung.
- c) Bei der Lösung der Normalgleichungen [4.14] wird als Gewicht die Inverse der Quadrate der von den Ländern angegebenen Standardabweichungen für die verschiedenen Höhen angesetzt. Alle Höhenanomalien und Meeresoberflächenhöhen enthalten diese Genauigkeitsangaben aus einer Fehlerschätzung, während sie bei einigen nivellierten oder geometrischen Höhen fehlen. Die nivellierten Höhen ohne Genauigkeitsangaben werden mit der Inversen der Entfernung zwischen Referenzpegel und nivelliertem Punkt gewichtet (vgl. [4.10]). Bei ellipsoidischen Höhen ohne Standardabweichung wird  $\pm 1$  cm als Standardabweichung eingeführt.
- d) Insgesamt stehen zur Verfügung:

**14 Beobachtungsgleichungen des Typs [5.15]** an Referenzpegeln, bei denen  $h(P)$  den aus der Satellitenaltimetrie abgeleiteten Meeresoberflächenhöhen entspricht, und  $\zeta(P)$  ist die Höhenanomalie, die aus demselben Schwerefeldmodell abgeleitet wurde, das auch für die Stationen auf den Kontinenten benutzt wird.  $H(P)$  wird als Pegelnullpunkt zu null angenommen.

**7 Beobachtungsgleichungen des Typs [5.16]:** zwei Verbindungen zwischen Ecuador und Kolumbien, zwei zwischen Kolumbien und Venezuela, eine zwischen Venezuela und Brasilien und zwei zwischen Brasilien und Argentinien (Abb. 5.5).

**663 Beobachtungsgleichungen des Typs [5.15]** auf Stationen des geometrischen Referenzsystems SIRGAS und dessen nationalen Verdichtungen, die durch Nivellement mit dem nationalen Höhensystem verbunden sind.

Die **erste Ausgleichung** basiert auf den *Originaldaten* mit zwei prinzipiellen Zielen: die Zuverlässigkeit der Ergebnisse zu sehen, die man erhält, wenn man die Daten ohne größere Bearbeitung benutzt, was heute bei dem durch die Verfügbarkeit der globalen Schwerefeldmodelle aus gravimetrischen Satellitenmissionen geförderten *Boom* der Diskussion des Vertikalproblems im Allgemeinen gemacht wird. So oder so wurde der Mythos geschaffen, dass allein die Existenz der GRACE- und GOCE-Messungen *per se* das Vertikalproblem löst, und dass es keine Notwendigkeit für das zeitaufwändige und teure Nivellement mehr gibt. Als Konsequenz folgt die Tendenz, die aus dem Nivellement erhaltenen Höhen  $H$  mit den ellipsoidischen Höhen  $h$  aus einer GNSS-Positionierung und  $N$  aus globalen Geoidmodellen zu vergleichen, und jede Art von Interpretationen durchzuführen unter der Annahme, dass  $h$  und  $N$  fehlerfrei sind und die Widersprüche ausschließlich durch  $H$  erzeugt werden. Dies führt zum zweiten Ziel dieser Ausgleichung, nämlich zu sehen, ob die Standardisierung der verfügbaren Daten die Schätzung der

Parameter des vertikalen Datums verbessert. Die in den Abschnitten 5.3.2, 5.3.3 und 5.3.4 beschriebene Vorgehensweise braucht viel Zeit, und es lohnt sich zu untersuchen, ob dieser Aufwand gerechtfertigt ist.

Tab. 5.5 fasst die statistischen Kennzahlen der Genauigkeit der Eingangsdaten und der erhaltenen Residuen für jede Beobachtungsgleichung aus der ersten Ausgleichung zusammen. Die Abbildungen 5.8 und 5.9 zeigen die geographische Verteilung.

Die Standardabweichung dieser Ausgleichung ist  $\pm 0,076$  m und die Residuen variieren zwischen  $-2,523$  m und  $+4,324$  m. Wie in Fig. 5.9 zu sehen, befinden sich die größten Residuen in den Anden (Kolumbien, Ecuador, Chile, westlicher Teil von Argentinien), was eine direkte Folge des Weglassens der gravimetrischen Reduktionen bei den heute benutzten Höhen, aber auch des Vorkommens tektonischer Aktivität sein kann. Der westliche Teil Südamerikas liegt in einer Konvergenzzone tektonischer Platten, die zu sehr starken seismischen Aktivitäten führt, und es ist sehr wahrscheinlich, dass nach den Nivellements Vertikalbewegungen seismischen Ursprungs stattgefunden haben, die sich im Vergleich mit den geometrischen Höhen aus den neueren GNSS-Positionierungen niederschlagen. Zum Beispiel wird im Gebiet des kolumbianischen Referenzpegels (Buenaventura) über eine Absenkung von 1,6 m nach dem Erdbeben am 12. Dezember 1979 berichtet (Herd et al. 1981). Dieser Wert wurde aus einem geophysikalischen Modell geschätzt und enthält keine Genauigkeitsangaben. Beim Vergleich der physikalischen Höhe der in der Dekade 1940 eingerichteten Pegelreferenzpunkte mit heutigen GNSS-Positionierungen müsste die Verschiebung durch das genannte Erdbeben jedoch berücksichtigt werden. Ähnliche Fälle treten an der Küste Chiles auf. Viele der Referenzpunkte zeigen durch Erdbeben erzeugte Sprünge in der vertikalen Position, die seit Ende der 1990er Jahre (dank der intensiven Anwendung der GNSS-Verfahren) gut dokumentiert, in früheren Zeiten jedoch unbekannt sind.

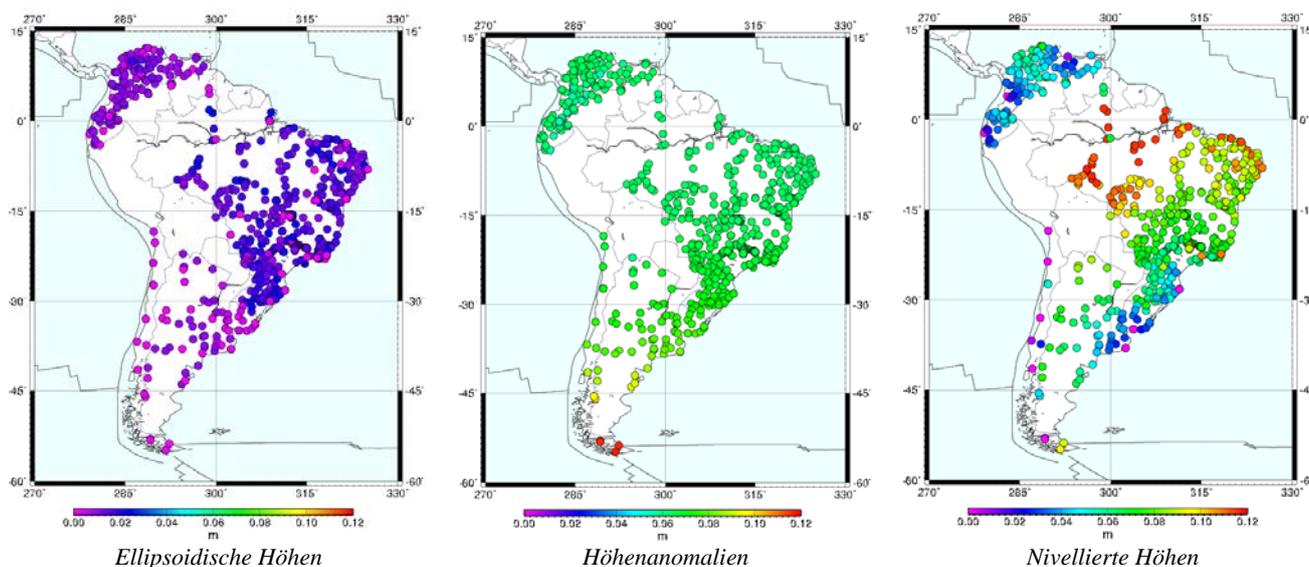


Abb. 5.8: Präzision der Eingangsdaten, die bei der Formulierung der Beobachtungsgleichungen zur Vereinheitlichung der Höhensysteme in Südamerika benutzt wurden.

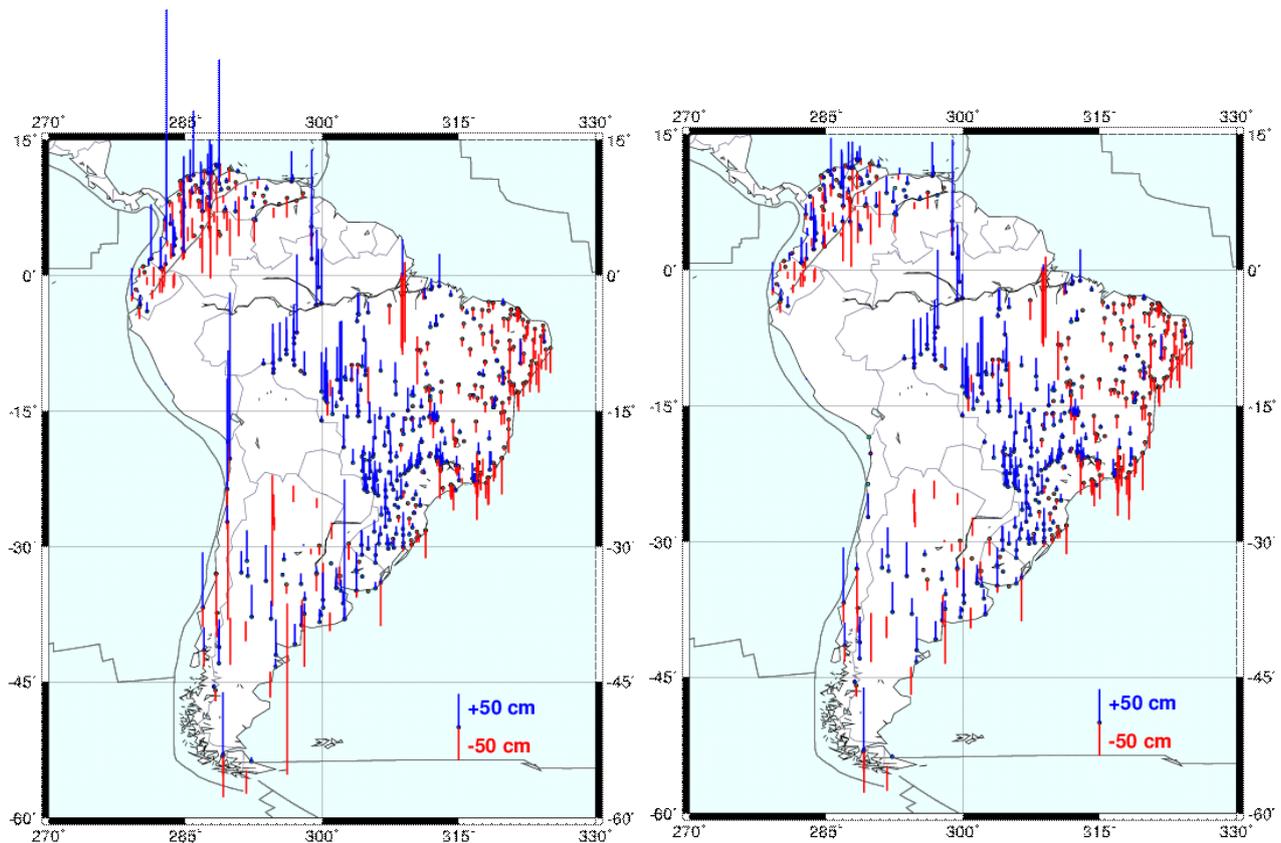


Abb. 5.9: Bestimmung der Parameter der vertikalen Datums: Geografische Verteilung der aus den Originaldaten (links) und den standardisierten Daten (rechts) erhaltenen Residuen.

Tab. 5.5: Bestimmung der Parameter des vertikalen Datums mit Originaldaten: Statistik der Genauigkeit der Eingangsdaten und der Residuen aus der ersten Ausgleichung.

| Ansatz                      | Genauigkeit der Eingabedaten [m]  |                   |             |                             |             |             |                             |             |             |
|-----------------------------|---|-------------------|-------------|-----------------------------|-------------|-------------|-----------------------------|-------------|-------------|
|                             | Geometrische Höhe   |                   |             | Höhenanomalie               |             |             | Physikalische Höhe          |             |             |
|                             | Mittlere Standardabweichung   | Max.              | Min.        | Mittlere Standardabweichung | Max.        | Min.        | Mittlere Standardabweichung | Max.        | Min.        |
| Altimetrie an den Pegeln    | $\pm 0,042 \pm 0,026$   | $\pm 0,092$       | $\pm 0,007$ | $\pm 0,137 \pm 0,055$       | $\pm 0,479$ | $\pm 0,091$ |                             |             |             |
| SIRGAS-Stationen            | $\pm 0,013 \pm 0,005$   | $\pm 0,025$       | $\pm 0,001$ | $\pm 0,099 \pm 0,012$       | $\pm 0,556$ | $\pm 0,083$ | $\pm 0,069 \pm 0,033$       | $\pm 0,150$ | $\pm 0,002$ |
| Internationale Verbindungen |   |                   |             |                             |             |             | $\pm 0,060 \pm 0,014$       | $\pm 0,130$ | $\pm 0,040$ |
| Ansatz                      | Residuen in [m] nach der Ausgleichung (Beobachtungsgleichungen [5.15] und [5.16]) |                   |             |                             |             |             |                             |             |             |
|                             | Anzahl der Beobachtungsgleichungen  | Mittelwert        |             | Max.                        | Min.        |             |                             |             |             |
| Altimetrie an den Pegeln    | 14  | $0,537 \pm 0,591$ |             | 2,167                       | -0,885      |             |                             |             |             |
| SIRGAS-Stationen            | 663   | $0,000 \pm 0,307$ |             | 4,324                       | -2,523      |             |                             |             |             |
| Internationale Verbindungen | 7   | $0,257 \pm 0,399$ |             | 1,268                       | -0,296      |             |                             |             |             |

Im Allgemeinen sind die Residuen bei den Referenzpegeln sehr hoch, was direkt auf die geringe Präzision der Meeresoberflächenhöhen aus der Satellitenaltimetrie zurückzuführen ist. Es ist unbestreitbar, dass die Daten verbessert werden müssen, sei es durch andere Interpolationsmethoden oder durch Verfeinerung der Altimetrie mit ozeanographischen *in situ* Beobachtungen (z.B. ozeanisches Nivellement). Solche Untersuchungen können im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden, sind aber eine Aufgabe für die Zukunft. Trotz der großen Residuen werden die Beobachtungsgleichungen dieses Typs in der Ausgleichung belassen, weil es die einzige Möglichkeit ist, um das vertikale Datum von Peru und das durch den Pegel in Punta Arenas im Süden Chiles definierte einzuschließen. Wenn die Residuen größer als das Dreifache der Standardabweichung sind, werden sie von den Iterationen der Ausgleichung ausgeschlossen (siehe unten). Andere Regionen mit großen Residuen (Abb. 5.9 links) sind solche mit großem Abstand von den Referenzpegeln, z.B. im Süden Venezuelas, im Amazonasgebiet Brasiliens und im westlichen Teil Argentiniens. Die unmittelbare Erklärung dafür ist die Akkumulierung der systematischen Fehler im Nivellement.

- e) Die **zweite Ausgleichung** wird mit den in dieser Arbeit verarbeiteten (standardisierten) Daten nach dem im Kapitel 5.3 beschriebenen Verfahren durchgeführt (für die ellipsoidischen Höhen Abschnitt 5.3.1, für die Höhenanomalien 5.3.2 und für die physikalischen Höhen 5.3.3). Bei den Meeresoberflächenhöhen ist die einzige Änderung, dass sie auf die Referenzepoche der Pegelnullpunkte reduziert werden (vgl. Tab. 5.3 und 5.4). Die Ausgleichung wird iterativ durchgeführt, wobei nach jedem Schritt die Beobachtungen mit Residuen größer als das Dreifache ihrer Standardabweichung eliminiert werden. Am Ende wurden 16 Beobachtungen ausgeschlossen:
- Die Meeresoberflächenhöhen aus der Satellitenaltimetrie an den Referenzpegeln von Argentinien (Mar del Plata), Kolumbien (Buenaventura), Chile (Antofagasta und Arica) und Bolivien (ebenfalls Arica).
  - 12 Stationen der nationalen SIRGAS-Verdichtungen (2 in Argentinien, 3 in Brasilien, 3 in Chile, 3 in Kolumbien und 1 in Venezuela). Die großen Residuen in Chile (Abb. 5.9 rechts) sind durch häufige Erdbeben und die Unmöglichkeit, das Nivellement und die GNSS-Messungen auf eine gemeinsame Epoche zu reduzieren, erklärbar. Zurzeit führt die für die nationalen Referenzrahmen zuständige Behörde (*Instituto Geográfico Militar*) eine Neumessung des Vertikalnetzes durch, um Höhenwerte nach dem starken Maule-Erdbeben vom 27. Februar 2010 zu erhalten. Sobald dieses Nivellement verfügbar ist, muss es gemeinsam mit einer postseismischen Multi-Jahreslösung für den Referenzrahmen SIRGAS in diese Auswertung eingeführt werden. Die ausgeschlossenen Stationen in Argentinien, Brasilien und Venezuela können als zufällige Ausreißer verstanden werden. In Kolumbien wurden bei der Ausgleichung der großen Schleifen (vgl. Abschnitt 5.3.3) große Inkonsistenzen in einigen Höhenunterschieden gefunden, deren Ursache nicht zu klären war. Es wird vermutet, dass es sich um Feldbuchfehler während der alten Nivellements (Dekaden 1950 bis 1970) handelt. Wie Chile führt auch Kolumbien eine Neumessung der großen Nivellementsschleifen durch. Der Abschluss wird 2017 erwartet und könnte die Ergebnisse dieser Untersuchungen verbessern.

Die Standardabweichung der endgültigen Ausgleichung ist  $\pm 0,036$  m und die Residuen variieren zwischen -1,219 m und +1,354 m. Abbildung 5.9 und Tabelle 5.6 vergleichen die Ergebnisse der ersten Ausgleichung (Originaldaten) mit denen der zweiten (standardisierte Daten) für jedes Vertikaldatum.

Wenngleich noch einige große Residuen bestehen (Abb. 5.9 rechts, z.B. Chile-Punta Arenas, Chile-Valparaíso, Kolumbien, Venezuela und Nord-Brasilien), verringern sie sich im Allgemeinen um ungefähr 60%. Diese signifikante Verbesserung beruht auf der Identifizierung und Eliminierung grober Fehler (vor allem in Ecuador, Kolumbien, Venezuela und Brasilien), dem Anbringen gravimetrischer Reduktionen bei der Netzausgleichung, der Berechnung von lokalen, hochauflösenden Geoidmodellen, der Verwendung des Schwerefeldmodells EIGEN-6C3stat an Stelle von EGM2008 (die formellen Fehler von EIGEN-6C3stat sind kleiner als die von EGM2008) und der Reduktion der geometrischen Koordinaten auf eine gemeinsame Epoche 2005,0. Die großen Residuen treten in den Punkten auf, in denen eine Standardisierung nicht durchgeführt werden konnte, z.B. in den internationalen Nivellement-Verbindungen, für die gerade nur die Höhenunterschiede zwischen den Grenzpunkten bekannt sind, aber nicht die entsprechenden Nivellementslinien, so dass nicht sicher ist, ob die in die Beobachtungsgleichungen [5.16] eingeführten Höhen wegen der Effekte des Erdschwerefeldes reduziert sind. Außerdem befinden sich diese Punkte im Allgemeinen weit von den jeweiligen Referenzpegeln entfernt, so dass die Höhen große Unsicherheiten aufweisen.

**Tab. 5.6:** Bestimmung der Parameter der vertikalen Datums: Vergleich der aus den Originaldaten und den standardisierten Daten erhaltenen Residuen (in [m]).

| Vertikales Datum   | Residuen der Ausgleichung mit den Originaldaten |                    |        |        | Residuen der Ausgleichung mit den standardisierten Daten |                    |        |        |
|--------------------|---|--------------------|--------|--------|--|--------------------|--------|--------|
|                    | Anz.  | Mittelwert         | Max.   | Min.   | Anz.   | Mittelwert         | Max.   | Min.   |
| Argentinien        | 50  | 0,007 $\pm$ 0,378  | 0,649  | -2,523 | 48   | 0,004 $\pm$ 0,250  | 0,509  | -0,793 |
| Bolivien           | 1   |                    |        |        |  |                    |        |        |
| Brasilien-Imbituba | 438   | 0,012 $\pm$ 0,195  | 2,889  | -2,465 | 436  | 0,007 $\pm$ 0,166  | 1,168  | -1,219 |
| Brasilien-Santana  | 5   | -0,007 $\pm$ 0,506 | 0,852  | -1,090 | 4  | -0,168 $\pm$ 0,366 | 0,360  | -0,711 |
| Chile-Punta Arenas | 2   | 0,182 $\pm$ 0,744  | 0,926  | -0,562 | 2  | 0,158 $\pm$ 0,801  | 0,959  | -0,642 |
| Chile-Puerto Montt | 3   | -0,122 $\pm$ 0,131 | 0,075  | -0,255 | 3  | -0,124 $\pm$ 0,101 | 0,028  | -0,240 |
| Chile-Talcahuano   | 2   | -0,353 $\pm$ 0,081 | -0,272 | -0,434 | 2  | -0,324 $\pm$ 0,040 | -0,284 | -0,364 |
| Chile Valparaíso   | 4   | 0,233 $\pm$ 0,992  | 2,157  | -1,387 | 2  | 0,216 $\pm$ 0,136  | 0,352  | 0,079  |
| Chile-Antofagasta  | 1   |                    |        |        |  |                    |        |        |
| Kolumbien          | 87  | -0,006 $\pm$ 0,768 | 4,324  | -2,234 | 83   | 0,010 $\pm$ 0,171  | 0,624  | -0,657 |
| Ecuador            | 23  | -0,116 $\pm$ 0,327 | 0,892  | -1,115 | 23   | -0,060 $\pm$ 0,084 | 0,156  | -0,269 |
| Peru               | 1   |                    |        |        |  |                    |        |        |
| Uruguay            | 13  | -0,042 $\pm$ 0,152 | 0,327  | -0,611 | 13   | -0,048 $\pm$ 0,146 | 0,356  | -0,690 |
| Venezuela          | 34  | -0,013 $\pm$ 0,354 | 2,652  | -1,062 | 33   | -0,018 $\pm$ 0,136 | 0,507  | -0,536 |
| Total              | 684   | 0,017 $\pm$ 0,321  | 4,324  | -2,523 | 668  | 0,005 $\pm$ 0,177  | 1,354  | -1,219 |

Bei diesen Untersuchungen wird davon ausgegangen, dass die Hauptursache für die großen Residuen die aus dem Nivellement (mit gravimetrischen Reduktionen) abgeleiteten physikalischen Höhen sind. Dennoch ist es auch wünschenswert, dass die

Geoidbestimmung verbessert wird. Tatsächlich findet sich die größte Reduktion der Residuen (Tab. 5.6) in Kolumbien, Ecuador und Venezuela, wo es möglich war, ein einheitliches Quasigeoid der gesamten Region zu berechnen. Es ist wünschenswert detaillierte Geoidberechnungen, die in den verschiedenen südamerikanischen Ländern bereits vorliegen, anzuwenden (z.B. Pacino et al. 2002, Tocho et al. 2007, Pereira and Pacino 2010, Blitzkow et al. 2009, de Matos et al. 2014), aber einige davon wurden bereits mit nivellierten und GPS-Höhen kombiniert oder sind regional begrenzt oder nicht digital verfügbar. Deshalb können diese Modelle hier nicht verwendet werden.

Wie im Abschnitt 2.3 diskutiert verbessern die Messungen der Satelliten-Schwerfeldmissionen die Genauigkeit der Kugelfunktionskoeffizienten mittleren Grades (bis  $n = 200$ ), aber ihre Auflösung ist nicht hinreichend, um Höhenanomalien (oder Geoidundulationen) für Punkte der Erdoberfläche mit Zentimeter-Genauigkeit zu bestimmen. Dafür ist weiterhin die Kombination mit terrestrischen Schweremessungen und Geländemodellen erforderlich. Solange das Quasigeoid (oder Geoid) nicht punktweise mit Zentimeter-Genauigkeit zu berechnen ist, kann man nicht auf Nivellementsnetze verzichten, insbesondere wenn sich die in den letzten 80 Jahren aufgebauten raumbezogenen Geoinformationssysteme darauf stützen.

- f) Wenn die Ausgleichung mit den standardisierten Daten zufriedenstellend ist, werden die geschätzten Höhensystemunterschiede benutzt, um den indirekten Effekt der *vertikalen Datumparameter* in der Lösung des Randwertproblems ( $f_0^i$  in [5.14]) zu schätzen und wieder in die Beobachtungsgleichungen des Typs [5.15] einzuführen. Die Größenordnung des indirekten Effekts erreicht in Ecuador, Kolumbien und Venezuela Maximalwerte von 1 cm, die das Ergebnis der Ausgleichung größtenteils nicht verändern, d.h. die Residuen variieren weniger als ein Millimeter und die Differenz in den vertikalen Datums ändert sich um Zehntelmillimeter. Die Hauptfolgerung ist in diesem Fall, dass der indirekte Effekt gegenüber der erreichten Genauigkeit bei der Vereinheitlichung der Höhensysteme in Südamerika vernachlässigbar ist.

Abbildung 5.10 zeigt die erhaltenen vertikalen Datumparameter für die bestehenden Höhensysteme in Südamerika. Die Niveauunterschiede sind bezüglich der durch den Wert  $W_0$  [4.35] definierten Äquipotentialfläche angegeben. Die Genauigkeit der Höhensystemunterschiede liegt um  $\pm 5$  cm für Argentinien, Brasilien (Imbituba), Kolumbien, Ecuador, Uruguay und Venezuela (die Gebiete mit der größten Anzahl von Beobachtungen, während sie für Brasilien (Santana), Bolivien, Peru und den fünf chilenischen Datums nicht besser als  $\pm 2 \dots 3$  dm ist. Dies ist die Folge der geringen Verfügbarkeit und der großen Unsicherheit der Daten. Tatsächlich hängen die Werte für Bolivien, Peru und Chile (Punta Arenas) sehr stark von der Gewichtung der Messungen in der Ausgleichung ab. Da es kaum oder keine Redundanz gibt, sind diese Werte nicht zuverlässig. Die geschätzten Höhenniveaus sind größtenteils positiv (außer Chile-Punta Arenas und Chile-Talcahuano), d.h. die vertikalen Datums liegen über dem globalen Referenzwert  $W_0$ . Dieses Ergebnis sowie auch der Nord-Süd-Anstieg am Atlantik und der Süd-Nord-Anstieg am Pazifik spiegelt die Meeresoberflächentopographie in der Region wider (vgl. Abb. 1.2).

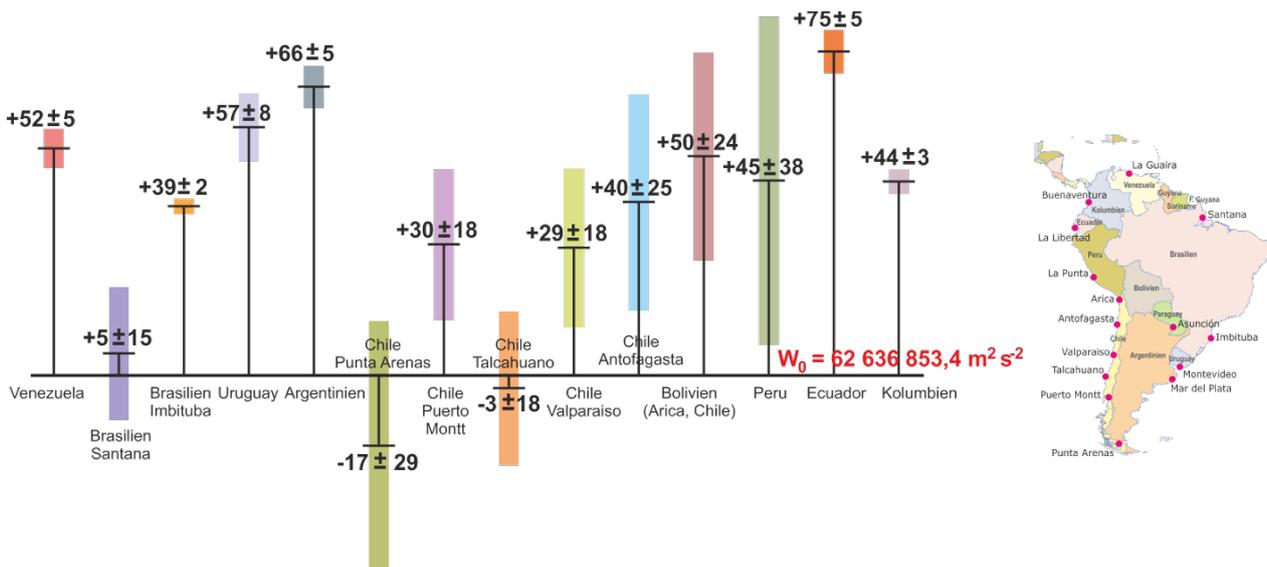


Abb. 5.10: Vertikale Datumparameter in Südamerika bezüglich eines globalen Referenzniveaus  $W_0 = 62\,636\,853,4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ .

Tab. 5.7: Datumparameter der Höhensysteme und Referenzwerte  $W_0^i$  in Südamerika.

| Vertikales Datum   | Datumparameter [m] | Referenzwerte $W_0^i$ [ $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ ] |
|--------------------|--------------------|--|
| Argentinien        | $0,664 \pm 0,050$  | $62636846,89 \pm 0,49$                               |
| Bolivien (Arica)   | $0,503 \pm 0,241$  | $62636848,48 \pm 2,36$                               |
| Brasilien-Imbituba | $0,387 \pm 0,018$  | $62636849,61 \pm 0,18$                               |
| Brasilien-Santana  | $0,048 \pm 0,154$  | $62636852,93 \pm 1,51$                               |
| Chile-Punta Arenas | $-0,166 \pm 0,290$ | $62636855,03 \pm 2,85$                               |
| Chile-Puerto Montt | $0,299 \pm 0,175$  | $62636850,47 \pm 1,72$                               |
| Chile-Talcahuano   | $-0,033 \pm 0,178$ | $62636853,72 \pm 1,74$                               |
| Chile-Valparaiso   | $0,292 \pm 0,184$  | $62636850,54 \pm 1,80$                               |
| Chile-Antofagasta  | $0,398 \pm 0,250$  | $62636849,50 \pm 2,45$                               |
| Kolumbien          | $0,444 \pm 0,030$  | $62636849,06 \pm 0,29$                               |
| Ecuador            | $0,746 \pm 0,050$  | $62636846,10 \pm 0,49$                               |
| Peru               | $0,447 \pm 0,379$  | $62636849,03 \pm 3,71$                               |
| Uruguay            | $0,570 \pm 0,080$  | $62636847,82 \pm 0,78$                               |
| Venezuela          | $0,523 \pm 0,046$  | $62636848,28 \pm 0,45$                               |

Die Verbindung der lokalen Höhenreferenzniveaus mit dem globalen  $W_0$  erlaubt es, die Werte  $W_0^i$  (vgl. [2.26], Tab. 5.7) zu schätzen, die als Bezugswerte in die Lösung der Normalgleichungen der nationalen Höhennetze (vgl. Abschnitt 4.1.3) eingeführt werden müssen, damit sich jede Vertikalkoordinate auf dieselbe globale Äquipotentialfläche bezieht. Wenn die geopotentiellen Knoten bezüglich dieses gemeinsamen  $W_0$  bestimmt sind, kann der Vorgang der Vereinheitlichung wiederholt werden, d.h. aus den geopotentiellen Knoten leitet man physikalische Höhen ab (vgl. Tab. 2.1) und mit diesen werden Schwereanomalien berechnet, aus denen wieder lokale Quasigeoidmodelle zu schätzen sind (vgl. 5.3.2). Diese Modelle werden dann mit den physikalischen Höhen erneut in die Beobachtungsgleichungen [5.15] und [5.16] eingeführt. Im

Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde diese Iteration für Kolumbien, Ecuador und Venezuela, in denen Schweremessungen verfügbar sind, durchgeführt. Die erhaltenen Änderungen in den vertikalen Datumparametern sind nicht signifikant im Vergleich mit der Genauigkeit der Ergebnisse. Eine vorrangige Aufgabe der unmittelbaren Zukunft ist es, den gesamten Vorgang mit neuen Daten höherer Genauigkeit zu wiederholen, was die einzelnen Länder momentan vorbereiten.



## 6. Diskussion und Ausblick

Die Definition, Realisierung, Laufendhaltung und breite Anwendung des ITRS gewährleisten einen einheitlichen, globalen, geometrischen Referenzrahmen mit Zentimeter-Genauigkeit. Das Hauptprodukt sind weltweit konsistente (homogene Genauigkeit in allen Gebieten) und im Zeitablauf zuverlässige (homogene Genauigkeit in jeder Epoche) Referenzkoordinaten. Ein äquivalenter Referenzrahmen für physikalische Koordinaten (z.B. physikalische Höhen) existiert bisher nicht. Zweifellos wurden die derzeit gebräuchlichen Höhensysteme nach den besten zur Zeit ihrer Bestimmung vorliegenden Bedingungen eingerichtet. Jedoch sind sie individuell (lokal) vertikal festgelegt, und es wurde nicht immer eine standardisierte Vorgehensweise angewendet. Die geodätischen Daten, die auf diesen Systemen beruhen (z.B. physikalische Höhen, Schwereanomalien, (Quasi-) Geoidmodelle, Geländemodelle usw.) sind in geographisch begrenzten Gebieten anwendbar, aber ihre Kombination in globaler Ausdehnung oder mit satellitengestützten Daten (z.B. GNSS-Positionierung) zeigt viel größere Diskrepanzen als heute akzeptabel. Die Lösung dieser Defizite erfordert die Einrichtung eines globalen vertikalen Referenzsystems bezogen auf das Erdschwerefeld

- das einen zuverlässigen Referenzrahmen für die Untersuchung und Modellierung von globalen, schwerfeldabhängigen Erscheinungen bereitstellt (z.B. Veränderungen des mittleren Meeresspiegels in lokalem, regionalem und globalem Maßstab, Verlagerung von Massen in kontinentalen und ozeanischen Gebieten sowie im Erdinneren);
- das die genaue Kombination geometrischer und physikalischer Höhen unterstützt, um maximal die durch die Satellitengeodäsie gebotenen Vorteile zu nutzen (d.h. weltweite Kombination der GNSS-Positionierung mit Schwerfeldmodellen zur genauen Bestimmung konsistenter Höhen); und
- das die Integration (Vereinheitlichung) der bestehenden Höhensysteme erlaubt.

Damit ein solches System diese Anforderungen erfüllt, muss es mit einer Genauigkeit um eine Größenordnung besser als die zu modellierenden Phänomene verwirklicht werden, weltweit konsistent und zuverlässig sein und seine hohe Genauigkeit über lange Zeit sicherstellen. In Übereinstimmung mit diesen Charakteristiken wird in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagen, das globale vertikale Referenzsystem aus einer geometrischen und einer physikalischen Komponente zu bilden. Die geometrische Komponente beruht auf den aus dem ITRS/ITRF abgeleiteten, auf ein Referenzellipsoid bezogenen geometrischen Höhen (und ihren zeitlichen Veränderungen). Die physikalische Komponente basiert auf geopotentiellen Koten (und deren zeitlichen Veränderungen) und einem Referenzwert  $W_0$ . Geopotentielle Koten werden anstelle eines speziellen Höhentyps (z.B. orthometrische oder Normalhöhen) vorgezogen, weil diese primäre Vertikalkoordinaten sind, aus denen sich die anderen physikalischen Höhen ableiten lassen. Damit dient das vorgeschlagene vertikale Referenzsystem für jede Art physikalischer Höhen.

Wenngleich dem  $W_0$  jeder beliebige Wert zugewiesen werden kann, wird empfohlen, einen Wert anzunehmen, der konsistent mit den aktuellen Messungen des Erdschwerefeldes und der

Geometrie der Erdoberfläche ist. Der Wert  $W_0$  definiert das Referenzniveau, d.h. er gibt an, welche der unendlich vielen Äquipotentialflächen des Erdschwerefeldes gewählt wurde, um die Höhe null festzulegen. Er wird realisiert durch die geometrische Darstellung dieser Äquipotentialfläche bezüglich desselben Referenzellipsoids, das für die geometrischen Höhen und die Geoidbestimmung verwendet wird. Die Definition (Wert  $W_0$ ) und die Realisierung (Geoidbestimmung) des Referenzniveaus müssen konsistent sein, deshalb müssen sie von denselben Messungen mit denselben Standards und Konventionen abgeleitet werden. Andernfalls gäbe es so viele Werte  $W_0$  (oder Geoidmodelle) wie Berechnungen. Das absolute Niveau der Referenzfläche wird mittels der Lösung des geodätischen Randwertproblems unter der Bedingung des Verschwindens des Gravitationspotentials im Unendlichen definiert. Es wird durch ein globales, ausschließlich auf Satellitenmessungen (insbesondere SLR, GRACE und GOCE) beruhendes Schwerefeldmodell realisiert, und die Präzision der Realisierung (räumliche Auflösung des Geoids) erreicht man, indem man das globale Schwerefeldmodell mit terrestrischen, Flug- und See-Gravimetermessungen sowie detaillierten Geländemodellen kombiniert. Aus dieser Sicht wäre es zweckmäßig, ein globales Standard-Schwerefeldmodell aus Satellitenbeobachtungen festzulegen, das weltweit als langwellige Komponente bei der Geoidbestimmung mittels des *remove-restore*-Verfahrens benutzt wird. Damit hätte jedes lokale oder regionale Geoidmodell dasselbe absolute, durch den  $W_0$ -Wert definierte Niveau.

Um sicherzustellen, dass die physikalischen und geometrischen Komponenten des vertikalen Referenzsystems denselben Bezug haben, wäre es angebracht, ein neues Referenzellipsoid zu berechnen, das  $W_0$  als primären Parameter aufnimmt, oder dessen große Halbachse  $a$  aus  $W_0$  abgeleitet ist. Dies würde helfen, dass die verschiedenen Produkte der geometrischen (ellipsoidische Höhen, vertikale Deformationen usw.) und physikalischen Geodäsie (Modelle des Erdschwerefeldes und der Meeresoberflächentopographie, Massenverlagerungen usw.), die sich heute oft auf verschiedene Ellipsoide beziehen, direkt vergleichbar sind.

Die Realisierung des vertikalen Referenzsystems wird in ähnlicher Weise wie beim ITRF vorgeschlagen, d.h. ein globales Netz mit kontinentalen Verdichtungen, die wiederum national verdichtet sind. Die Referenzstationen dieses Netzes müssen

- kontinuierlich durch GNSS-Positionierung beobachtet werden, um eventuelle Deformationen des Referenzrahmens genau bestimmen zu können;
- mit dem ITRS/ITRF verbunden sein;
- mit den lokalen Höhensystemen durch geometrisches Nivellement verbunden sein, deren geopotentielle Knoten bezüglich des globalen  $W_0$ -Wertes bekannt sind.

Da die Vereinheitlichung der lokalen Höhensysteme heute eines der Hauptprobleme der Geodäsie ist, soll hier die Bedeutung der bestehenden Nivellementsnetze herausgestellt werden. Trotz ihrer Nachteile (hoher finanzieller und zeitlicher Aufwand, Akkumulation systematischer Fehler, verschiedene Epochen, geringe Redundanz der Messungen usw.) sind diese Netze die einzige Realisierung der bestehenden Höhensysteme und werden in der Praxis am meisten genutzt. Sie sind unverzichtbar sowohl für die Vereinheitlichung der Systeme als auch für die Verwirklichung

des globalen Referenzrahmens. Es ist klar, dass die Integration der lokalen Höhensysteme in das globale Referenzsystem auf der Kombination der mit GNSS-Positionierung bestimmten geometrischen Höhen, der aus Nivellements (mit gravimetrischer Reduktion) abgeleiteten physikalischen Höhen und Schwerefeld- (bzw. Geoid- oder Quasigeoid-) Modellen hoher Auflösung beruhen muss. Um sicherzustellen, dass die Vereinheitlichung dasselbe Genauigkeitsniveau wie der globale Referenzrahmen erreicht, müssen jedoch einige Anforderungen berücksichtigt werden, die in der vorliegenden Arbeit auf die heutige Situation in Südamerika bezogen sind, aber auf jede andere Region der Erde übertragen werden können. Diese sind:

- Die geometrischen Koordinaten (ellipsoidische Höhen und ihre zeitliche Änderungen) der bei der Vereinheitlichung benutzten Stationen (Beobachtungsgleichungen [5.15]) müssen den IERS-Standards genügen und äußerst genau sein. Somit wird empfohlen, dass diese Stationen in den SIRGAS-Referenzrahmen einbezogen werden, damit sie kontinuierlich prozessiert und ihre Positionen und Geschwindigkeiten präzise geschätzt werden. Die beste Alternative ist, die bestehenden SIRGAS-Stationen mit den lokalen Höhensystemen durch geometrisches Nivellement zu verbinden. Da es schwierig ist, die physikalische Höhe des Antennenreferenzpunktes (auf den sich die ellipsoidische Höhe bezieht, und der sich bei jedem Antennenwechsel ändert) zu bestimmen, wird empfohlen, die Vermarkung (Pfeiler, Platte, usw.) als Referenz zu nehmen. Auch wenn die SIRGAS-Referenzstationen aktuell eine gute Verteilung haben, ist eine Verdichtung in Peru, Bolivien und Paraguay nötig. Obwohl es z.B. in Paraguay Nivellementslinien erster Ordnung gibt, konnte dieses Land nicht in diese Arbeit einbezogen werden, da kein nationaler Referenzpunkt mit geometrischer und nivellierter Höhe verfügbar ist. Die Schätzung der vertikalen Datumparameter in Peru beruht nur auf der Meeresflächentopographie am Referenzpegel, und in Bolivien auf einer einzigen nivellierten SIRGAS2000-Station. Wie erwähnt sind die Ergebnisse in diesen Ländern unzuverlässig, da es keine redundanten Beobachtungen gibt.
- Die Meeresoberflächenhöhe in den an die Referenzpegel grenzenden Gebieten muss durch Kombination der extrapolierten Satellitenaltimetrie mit den Pegelregistrierungen verfeinert werden. Dazu muss die Meeresoberfläche mittels GNSS-Positionierung direkt in den ITRS/ITRF eingebunden werden, was durch die genaue Bestimmung des Vektors zwischen der GNSS-Station und dem Pegel-Nullpunkt möglich ist. Ebenso müssen die historischen Pegelregistrierungen auf dasselbe Niveau bezogen werden. Es wird dabei auf die Arbeiten von Acuña et al. (2002) in Venezuela sowie Dalazoana et al. (2007) und Luz et al. (2009) in Brasilien verwiesen.
- Bei der Modellierung des Schwerefeldes zur Bestimmung der Geometrie der Referenzfläche wird empfohlen, der Approximation von Molodenskii zu folgen (Berechnung des Quasigeoids) und nicht der Methode von Stokes (Geoidberechnung), damit die vertikalen Datumparameter keine Inkonsistenz wegen der erforderlichen orthometrischen Hypothesen zur Reduktion der Schwereanomalien von der Erdoberfläche auf das Geoid enthalten. Um die Genauigkeit zu erhöhen, sollten die Höhenanomalien punktweise für jede einzelne Referenzstation (mit zusätzlichen Gravimetermessungen in

der Umgebung) berechnet und nicht aus regionalen oder globalen Modellen interpoliert werden. Schließlich müssen die langwelligen Anteile der Quasigeoid-Modellierung aus demselben globalen Satellitenmodell stammen. Dabei wird auf die Erfahrungen bei der Geoidbestimmung in Südamerika verwiesen, z.B. Matos et al. (2014), Tocho et al. (2007), Giménez et al. (2005), Hoyer (2002).

- Zum Schluss muss die Ausgleichung der Nivellementsnetze in Form geopotentieller Knoten erwähnt werden. Unter der Koordinierung der SIRGAS-Arbeitsgruppe III haben die einzelnen südamerikanischen Länder die Datenbanken mit den Originalmessungen der Nivellements bereinigt und vervollständigt. Zurzeit werden die größeren Inkonsistenzen beseitigt, einige davon durch Neumessungen. Es darf hier erwähnt werden, dass Bolivien sich an diese Aktivitäten angeschlossen hat, und es wird erwartet, dass Peru zumindest die Nivellementslinie, die Ecuador mit Chile verbindet, liefern wird, so dass die Schleife um ganz Südamerika geschlossen werden kann. Sobald die nationalen Normalgleichungen für ihre spätere Kombination auf kontinentaler Ebene aufgestellt werden können, wird sich die Zuverlässigkeit der physikalischen Höhen in Südamerika signifikant erhöhen und die Anwendung der in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagenen Strategie wird deren Genauigkeit um eine Größenordnung verbessern.

## Literaturverzeichnis

- Ablain M., Cazenave A., Valladeau G. and Guinehut S.: *A new assessment of the error budget of global mean sea level rate estimated by satellite altimetry over 1993–2008*, Ocean Sci., 5:193-201, doi:10.5194/os-5-193-2009, 2009.
- Acuña G., Bosch W. and Meisel B.: *Correlation between multi-mission altimeter time series and tide gauge registrations in the Caribbean sea*, IAG Symposia Series, 124:231-237, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_44, 2002.
- Agnew D.C.: *SPOTL: Some programs for ocean-tide loading. Program version 3.3.0*. University of California, Scripps Institution of Oceanography, Technical Report, April 3, 2012.
- Altamimi Z., Collilieux X., Legrand J., Garayt B., and Boucher C.: *ITRF2005: a new release of the international terrestrial reference frame based on time series of station positions and earth orientation parameters 2007*. J Geophys Res 112(B09401), doi:10.1029/2007JB004949, 2007.
- Altamimi Z., Collilieux X., and Métivier L.: *ITRF2008: an improved solution of the international terrestrial reference frame*, J. Geod., 85(8): 457-473, doi: 10.1007/s00190-011-0444-4, 2011.
- Andersen, O.B.: *The DTU10 Gravity field and Mean sea surface*. Presented at Second International Symposium of the Gravity Field of the Earth (IGFS2), Fairbanks, Alaska, 2010.
- Andersen B., Vest A.L., and Knudsen P.: *KMS04 mean sea surface model and inter-annual sea level variability*. Poster presented at EGU Gen. Ass. 2004, Vienna, Austria, 24-29 April, 2004.
- Andersen O.B. and Knudsen P.: *The DTU10 global Mean sea surface and Bathymetry*. Presented EGU2008 General Assembly. Vienna, Austria, April 13-18, 2008. [http://www.space.dtu.dk/English/Research/Scientific\\_data\\_and\\_models/Global\\_Mean\\_sea\\_surface.aspx](http://www.space.dtu.dk/English/Research/Scientific_data_and_models/Global_Mean_sea_surface.aspx), 2008.
- Andersen O.B. and Knudsen P.: *DNESC08 mean sea surface and mean dynamic topography models*, J Geophys Res, 114, C11001, doi:10.1029/2008JC005179, 2009.
- Andersen O.B., Knudsen P. and Berry P.A.M.: *The DNESC08GRA global marine gravity field from double retracked satellite altimetry*, J Geod, 84: 191-199, doi:10.1007/s00190-009-0355-9, 2010.
- Andersen O.B. and Rio M.H.: *On the accuracy of current mean sea surface models for the use with GOCE data*. Proceedings of the 4th international GOCE user workshop. Munich, Germany. European Space Agency, SP-696. ISBN 978-92-9092-260-5, ISSN 1609-042X, 2011.
- Angermann D., Drewes H., Gerstl M., Krügel M. and Meisel B.: *DGFI combination methodology for ITRF2005 computation*, IAG Symposia Series, 134: 11-16, doi: 10.1007/978-3-642-00860-3\_2, 2009.
- Appleby G.M., Wilkinson M., Luceri V., Gibbs P., Smith V.: *Attempts to separate apparent observational range bias from true geodetic signals*. In: Schilliak S. (Ed.) Proceedings of the 16th international workshop on laser ranging. Posnan, Poland, 2009.
- Arabelos D.N. and Tscherning C.C.: *A comparison of recent Earth gravitational models with emphasis on their contribution in refining the gravity and geoid at continental or regional scale*. J. Geod 84: 643-660, doi: 10.1007/s00190-010-0397-z, 2010.
- Ardalan A. and Safari A.: *Global height datum unification: a new approach in the gravity potential space*. J Geod 79: 512-523, doi: 10.1007/s00190-005-0001-0, 2005.
- Balasubramania N.: *Definition and realization of a global vertical datum*. Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying. OSU Report No. 427. 112 pp., 1994.
- Barthelmes F.: *Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models*. GFZ Scientific Technical Report STR09/02. GFZ, Potsdam, 36 p. [www.gfz-potsdam.de/News-GFZ/Publications](http://www.gfz-potsdam.de/News-GFZ/Publications), 2009.
- Becker J. and Sandwel D.: *Accuracy and resolution of shuttle radar topography mission data*, Geophys Res Lett, 30, 1467, doi:10.1029/2002GL016643, 9, 2003.
- Beckley B.D., Zelensky N.P., Holmes S.A., Lemoine F.G., Ray R.D., Mitchum G.T., Desai S.D., and Brown S.T.: *Assessment of the Jason-2 Extension to the TOPEX/Poseidon, Jason-1 Sea-Surface Height Time Series for Global Mean Sea Level Monitoring*. Marine Geodesy, 33(S1): 447-471, doi: 10.1080/01490419.2010.491029, 2010.
- Biancale R. and Bode A.: *Mean annual and seasonal atmospheric tide models based on 3-hourly and 6-hourly ECMWF surface pressure data*. GFZ scientific technical report STR06/01, 37p., 2006
- Blitzkow D., Matos A.C.O. de, and Cintra J.P.: *Digital terrain model evaluation and computation of the terrain correction and indirect effect in South America*, Geoacta, 34(2): 59-74, ISSN 1852-7744, 2009.
- Boedecker G.: *International Absolute Gravity Basestation Network (IAGBN). Absolute gravity observations data*

- processing standards and station documentation*. Bureau Gravimétrique International, Bull. Inf. 63: 51-57, 1988.
- Borrass E.: *Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten in der Zeit von 1808 bis 1909 und über ihre Darstellung im Potsdamer Schweresystem*. In: Verhandlungen der 16 allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung, Teil 3: Spezialbericht über die relativen Schweremessungen, 1911.
- Bosch W. and Savcenko R.: *Satellite Altimetry: Multi-Mission Cross Calibration*. In: Tregoning P., Ch. Rizos (Eds), Dynamic Planet, IAG Symposia, 130:51-56, doi: 10.1007/978-3-540-49350-1\_8, 2007.
- Bosch W., Dettmering D. and Schwatke C.: *Multi-Mission Cross-Calibration of Satellite Altimeters: Constructing a Long-Term Data Record for Global and Regional Sea Level Change Studies*. Remote Sensing, 6(3), 2255-2281, doi:10.3390/rs6032255, 2014.
- Brovar V.V., Kopeikina Z.S. and Pavlova, M.V.: *Solution of the Dirichlet and Stokes exterior boundary problems for the Earth's ellipsoid*, J Geod, 74: 767-772, doi: 10.1007/s001900000100, 2001.
- Bruinsma S.L., Lemoine J.M., Biancale R., Vales N.: *CNES/GRGS 10-day gravity field models (release 2) and their evaluation*, Adv Space Res, doi:10.1016/j.asr.2009.10.012, 2009.
- Bruinsma S.L., Marty J.C., Balmino G., Biancale R., Foerste C., Abrikosov O. and Neumayer H.: *GOCE Gravity Field Recovery by Means of the Direct Numerical Method*, presented at the ESA Living Planet Symposium 2010, Bergen, June 27 - July 2, Bergen, Norway, 2010.
- Bruinsma S.L., Förste C., Abrikosov O., Marty J.C., Rio M.H., Mulet S. and Bonvalot S.: *The new ESA satellite-only gravity field model via the direct approach*; Geophys Res Lett, 40: 3607-3612, doi: 10.1002/grl.50716, 2013.
- Burša M., Šíma Z. and Kostelecký J.: *Determination of the geopotential scale factor from satellite altimetry*. Studia geoph et geod 36: 101-109, doi: 10.1007/BF01614122, 1992.
- Burša M., Radej K., Šíma Z., True S. and Vátr V.: *Determination of the geopotential scale factor from Topex/Poseidon satellite altimetry*. Studia geoph et geod. 41: 203-215, doi:10.1023/A:1023313614618, 1997.
- Burša M., Kouba J., Radej K., True S., Vátr V., and Vojtíšková M.: *Monitoring geoidal potential on the basis of Topex/Poseidon altimeter data and EGM96*, IAG Symposia Series 119: 352-358, doi: 10.1007/978-3-642-72245-5\_55, 1998a.
- Burša M., Kouba J., Radej K., True S., Vátr V., and Vojtíšková M.: *Mean Earth's equipotential surface from Topex/Poseidon altimetry*. Studia geoph et geod. 42: 456-466, doi: 10.1023/A:1023356803773, 1998b.
- Burša M., Kouba J., Radej K., Vátr V., and Vojtíšková M.: *Geopotential at tide gauge stations used for specifying a World Height System*. Geographic Service of the Army of the Czech Republic, Acta Geodaetica No. 1: 87-96, 2001.
- Burša M., Groten E., Kenyon S., Kouba J., Radej K., Vátr V., and Vojtíšková M.: *Earth's dimension specified by geoidal geopotential*. Studia geoph et geod. 46: 1-8, doi: 10.1023/A:1020014930573, 2002.
- Burša M., Kenyon S., Kouba J., Šíma Z., Vátr V., Vitek V. and Vojtíšková M.: *The geopotential value  $W_0$  for specifying the relativistic atomic time scale and a global vertical reference system*. J Geod, 81: 103-110, doi: 10.1007/s00190-006-0091-3, 2007a.
- Burša M., Šíma Z., Kenyon S., Kouba J., Vátr V., and Vojtíšková M.: *Twelve years of developments: geoidal geopotential  $W_0$  for the establishment of a world height system - present and future*. In: Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service, Istanbul, p. 121-123, 2007b.
- Carrère L. and Lyard F.: *Modeling the barotropic response of the global ocean to atmospheric wind and pressure forcing - comparisons with observations*, Geophys Res. Lett, 30, 1275, doi:10.1029/2002GL016473, 6, 2003.
- Cartwright D.E. and Edden A.C.: *Corrected tables of tidal harmonics*. Geophys J Roy Astr Soc 33(3): 253-264, doi: 10.1111/j.1365-246X.1973.tb03420.x, 1973.
- Cartwright D.E. and Taylor R.J.: *New computations of the tide-generating potential*. Geophys J Roy Astr Soc 23 (1): 45-73, doi: 10.1111/j.1365-246X.1971.tb01803.x, 1971.
- Cazenave A., Chambers D.P., Cipollini P., Fu L.L., Hurrell J.W., Merrifield M., Nerem S., Plag H.P., Shum C.K. and Willis J.: *Sea Level Rise - Regional and Global Trends*. In: Hall J., D.E. Harrison, D. Stammer (Eds.) Proceedings of OceanObs'09: Sustained Ocean Observations and Information for Society, Venice, Italy, 21-25 September 2009. Vol 1: 11-29. ESA Publication WPP-306, doi:10.5270/OceanObs09.pp.11, 2010.
- Cazenave A. and Chen J.: *Time-variable gravity from space and present-day mass redistribution in the Earth system*. Earth and Planetary Science Letters 298(3-4): 263-274, 2010.
- Chelton D.B., Ries J.C., Haines B.J., Fu L.L., Callhan Ph.S.: *Satellite altimetry*. In: Fu, L.L., A. Cazenave (Eds.). Satellite Altimetry and Earth Sciences – A handbook of Techniques and Applications. International Geophysical Series, 69:1-132, Academic Press, San Diego, 2001.
- Chen J.L., Wilson C.R., Famiglietti J.S. and Rodell M.: *Spatial sensitivity of the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) time-variable gravity observations*. J Geophys Res 110 (B08408), doi:10.1029/2004JB00353, 2005

- Cheng M. and Tapley B.D.: *Seasonal variations in low degree zonal harmonics of the Earth's gravity field from satellite laser ranging observations*, J Geophys Res, 104(B2): 2667–2681, doi:10.1029/1998JB900036, 1999.
- Collilieux X. and Wöppelmann G.: *Global sea-level rise and its relation to the terrestrial reference frame*. J Geod. 85: 9-22, doi: 10.1007/s00190-010-0412-4, 2011.
- Colombo O.L.: *A world vertical network*. Report No. 296, Dept. of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, 1980.
- Costa S.M.A., Silva A.L. and Vaz J.A.: *Processing evaluation of SIRGAS-CON network by IBGE Analysis Center*. IAG Symposia Series, 136: 859-868, doi: 10.1007/978-3-642-20338-1\_108, 2012a.
- Costa, S.M.A., Silva A.L. and Vaz J.A.: *Report on the SIRGAS-CON combined solution by IBGE Analysis Center*, IAG Symposia Series, 136: 853-857, doi: 10.1007/978-3-642-20338-1\_107, 2012b.
- Costa, S.M.A.C., Lima M.A.A.: *Ajustamento da Rede Planimétrica Brasileira em SIRGAS2000*. IV Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Curitiba, PR. IBGE, Brasil, 2005, in Portugiesisch.
- Crossley D., Hinderer J., and Boy J-P.: *Regional gravity variations in Europe from superconducting gravimeters*, Geophys J Int, 161(2): 257-264, doi: 10.1111/j.1365-246X.2005.0258, 2005.
- Čunderlík R. and Mikula K.: *Numerical solution of the fixed altimetry-gravimetry BVP using the direct BEM formulation*, IAG Symposia Series, 133:229-236, doi:10.1007/978-3-540-85426-5\_27, 2009.
- Čunderlík R., Mikula K., and Mojzeš M.: *Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary-value problem*, J Geod 82: 15-29, doi: 10.1007/s00190-007-0154-0, 2008.
- Dahle C., Flechtner F., Gruber C., Koenig D., Koenig R., Michalak G. and Neumayer K.-H.: *GFZ GRACE Level-2 Processing Standards Document for Level-2 Product Release 0005*, Scientific Technical Report - Data , 12/02, Potsdam, 20 p., doi: 10.2312/GFZ.b103-1202-25, 2012.
- Dalazoana, R., de Freitas S.R.C., Baez J.C. and Luz R.T.: *Brazilian vertical datum monitoring - Vertical land movements and sea level variations*, IAG Symposia Series, 130: 71-74, doi: 10.1007/978-3-540-49350-1\_12, 2007.
- Dayoub N., Edwards S.J. and Moore P.: *The Gauss-Listing potential value  $W_0$  and its rate from altimetric mean sea level and GRACE*, J Geod, 86(9): 681-694, doi: 10.1007/s00190-012-1547-6, 2012.
- Dehant V., Defraigne P., and Wahr J.M.: *Tides for a convective Earth*, J Geophys Res, 104(B1): 1035-1058, doi:10.1029/1998JB900051, 1999.
- Desai S.D.: *Observing the pole tide with satellite altimetry*, J Geophys Res, 107(C11): 3186, doi: 10.1029/2001JC001224, 2002.
- Dettmering D. and Bosch W.: *Global Calibration of Jason-2 by Multi-Mission Crossover Analysis*. Marine Geodesy, 33(S1): 150-161, doi: 10.1080/01490419.2010.487779, 2010.
- Doodson A.T.: *The harmonic development of the tide-generating potential*. Proc. R. Soc. A., 100: 305-329, 1921.
- Drewes H.: *Zum Wandel in der Zielsetzung geodätischer Forschung*. ZfV, 131(5): 292-298, 2006.
- Drewes H.: *Reference Systems, Reference Frames, and the Geodetic Datum - Basic Considerations*, IAG Symposia Series, 133: 3-9, doi: 10.1007/978-3-540-85426-5\_1, 2009.
- Drewes H.: *How to Fix the Geodetic Datum for Reference Frames in Geosciences Applications?*, IAG Symposia Series, 136: 657-664, doi:10.1007/978-3-642-20338-1\_9, 2012.
- Drewes H., Angermann D. and Seitz M.: *Alternative definitions of the terrestrial reference system and its realization in reference frames*, IAG Symposia Series, 138: 39-44, doi: 10.1007/978-3-642-32998-2\_7, 2013.
- Drewes H. and Heidbach O.: *The 2009 horizontal velocity field for South America and the Caribbean*, IAG Symposia Series, 136: 657-664, doi: 10.1007/978-3-642-20338-1\_81, 2012
- Drewes H., Kaniuth, K., Voelksen C., Alves Costa S.M., and Souto Fortes L.P.: *Results of the SIRGAS campaign 2000 and coordinates variations with respect to the 1995 South American geocentric reference frame*, IAG Symposia Series, 128: 32-37, doi: 10.1007/3-540-27432-4\_6, 2005.
- Drewes H., Sánchez L., Blitzkow D., and de Freitas D.: *Scientific foundations of the SIRGAS vertical reference system*, IAG Symposia Series, 124: 297-301, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_55, 2002.
- Drewes H., Tremel H. and Hernández J.N.: *Adjustment of the new Venezuelan national GPS network within the SIRGAS reference frame*, IAG Symposia Series, 118: 193-198, doi: 10.1007/978-3-662-03714-0\_31, 1998.
- Dziewonski A. and Anderson D.L.: *Preliminary reference earth model*. Phys Earth Planet In 25: 297-356, 1981.
- Echalar A., Sánchez L.: *Ajuste del Marco de Referencia Geodésico Nacional de Bolivia en SIRGAS: MARGEN-SIRGAS*. SIRGAS-GTII Datum Geocéntrico. Instituto Geográfico Militar, La Paz, Bolivia. Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, Munich, Alemania, 2010, www.sirgas.org, in Spanish.
- Egbert G.D., Bennett A.F. and Foreman M.G.G.: *Topex/Poseidon tides estimated using a global inverse model*, J Geophys Res 99(C12): 24821-24852, doi: 0.1029/94JC01894, 1994.

- Ekman M.: *The impacts of geodynamic phenomena on systems for heights and gravity*. Nordic Geodetic Commission, 2nd Research School, Ebeltoft, Denmark, 1988.
- Ekman M.: *Impacts of geodynamic phenomena on systems for heights and gravity*, Bull Géod, 63: 281-296, 1989.
- Ekman M.: *What is the geoid?* Reports of the Finnish Geodetic Institute, 95(4): 49-51, 1995.
- Ekman M.: *The permanent problem of the permanent tide. What to do in the geodetic reference systems?* Bull. Inf. Marées Terrestres 125:9508-9513, 1996.
- Ekman M. and Mäkinen J.: *Recent postglacial rebound, gravity change and mantle flow in Fennoscandia*. Geophys J Int, 126: 229–234, doi: 10.1111/j.1365-246X.1996.tb05281.x, 1996.
- Ellmann A.: *A numerical comparison of different ellipsoidal corrections to Stokes' formula*, IAG Symposia Series, 128: 409-414, doi: 10.1007/3-540-27432-4\_70, 2005.
- Farrell W.E.: *Deformation of the Earth by surface loads*, Rev Geophys Space Phys 10:761-797, doi: 10.1029/RG010i003p00761, 1972.
- Fetterer F., Knowles K., Meier W., and Savoie M.: *Sea Ice Index*. Boulder, Colorado USA: National Snow and Ice Data Center. Digital media, [http://nsidc.org/data/docs/noaa/g02135\\_seaice\\_index/](http://nsidc.org/data/docs/noaa/g02135_seaice_index/), 2002.
- Fei Z.L. and Sideris M.G.: *A new method for computing the ellipsoidal correction for Stokes's formula*, J Geod, 74(2): 223-231, doi: 10.1007/s001900050280, 2000.
- Fei Z.L. and Sideris M.G.: *Corrections to "A new method for computing the ellipsoidal correction for Stokes's formula, J Geod, 74(2): 223-231"*, J Geod, 74(9): 671 doi: 10.1007/s001900000131, 2001.
- Figuroa C., Amaya W., Sánchez L.: *Integración de la red geodésica básica nacional de El Salvador a SIRGAS*. En: Revista Cartográfica, 85/86: 19-34. Instituto Panamericano de Geografía e Historia, México, 2010, in Spanish.
- Flechtner F., Schmidt R., and Meyer U.: *De-aliasing of short-term atmospheric and ocean mass variations for GRACE*. In: Observation of the Earth System from Space, Springer, Berlin, Heidelberg, 83-97, doi:10.1007/3-540-29522-4\_7, 2006.
- Flechtner F.: *GRACE 327-743 (GR-GFZ-STD-001). Gravity recovery and climate experiment. GFZ level-2 processing standards document for level-2 product release 0004*. GFZ-Potsdam. <http://isdc.gfz-potsdam.de/>, 2007a.
- Flechtner F.: *GRACE AOD1B product description document for product releases 01 to 04. GRACE 327-750 (GR-GZZ-AOD-0001)*, 43 p. [http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g007\\_aod1b\\_rl04.html#t10](http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g007_aod1b_rl04.html#t10), 2007b.
- Forsberg, R.: *Terrain effects in geoid computations*. International School for the determination of the geoid. Lecture Notes. International Geoid Service, Milan. S. 149-182, 1997.
- Förste Ch., Flechtner F., Schmidt R., Meyer U., Stubenvoll R., Barthelmes F., König R., Neumayer H., Rothacher M., Reigber Ch., Biancale R., Bruinsma S., Lemoine J.-M. and Raimondo J.C.: *A new high resolution global gravity field model derived from combination of GRACE and CHAMP mission and altimetry/gravimetry surface gravity data*. Poster g004\_EGU05-A-04561 presented at EGU General Assembly 2005, Vienna, Austria, 24-29, April 2005.
- Förste Ch., Flechtner F., Schmidt R., König R., Meyer U., Stubenvoll R., Rothacher M., Barthelmes F., Neumayer H., Biancale R., Bruinsma S., Lemoine J.-M. and Loyer F.G.: *A mean global gravity field model from the combination of satellite mission and altimetry/gravimetry surface data: EIGEN-GL04C*. Geophys Res Abstr 8: 03462, 2006.
- Förste Ch., Flechtner F., Schmidt R., Stubenvoll R., Rothacher M., Kusche J., Neumayer H., Biancale R., Lemoine J.-M., Barthelmes F., Bruinsma S., Koenig R. and Meyer U.: *EIGEN-GL05C - A new global combined high-resolution GRACE-based gravity field model of the GFZ-GRGS cooperation*. Geophy Res Abstr Vol. 10, EGU2008-A-03426. SRef-ID: 1607-7962/gra/EGU2008-A-03426, 2008.
- Förste Ch., Bruinsma S., Shako R., Marty J.-C., Flechtner F., Abrikosov O., Dahle Ch., Lemoine J.-M., Neumayer H., Biancale R., Barthelmes F., König R. and Balmino G.: *EIGEN-6 - A new combined global gravity field model including GOCE data from the collaboration of GFZ-Potsdam and GRGS-Toulouse*. Geophysical Research Abstracts, EGU2011-3242-2, 2011, EGU General Assembly 2011.
- Förste C., Bruinsma S.L., Flechtner F., Marty J.C., Lemoine J.M., Dahle C., Abrikosov O., Neumayer K.H., Biancale R., Barthelmes F. and Balmino G.: *A preliminary update of the Direct approach GOCE Processing and a new release of EIGEN-6C*, presented at the AGU Fall Meeting 2012, San Francisco, USA, 3-7 Dec, Abstract No. G31B-0923, 2012.
- Fu L.L., Chelton D.B., Le Traon P.-Y. and Morrow R.: *Eddy dynamics from satellite altimetry*. In: Oceanography (1042-8275) (Oceanography Society), 2010-12, 23 (4): 14-25, 2010.
- Fu L.L. and Le Traon P.-Y.: *Satellite altimetry and ocean dynamics*, Comptes Rendus Geosciences, 338 (14-15): 1063-1076, <http://dx.doi.org/10.1016/j.crte.2006.05.015>, 2006
- Gauß C.F.: *Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am ramsdenschen Zenithsektor*. In: Carl Friedrich Gauß Werke, neunter Band. Königlichen

- Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1903), 1828.
- Gauß C.F.: *Trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. Halle, a. S. Verlag von Eugen Strien. Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am ramsdenschen Zenithsektor.* In: Carl Friedrich Gauß Werke, neunter Band. Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1903), 1976.
- Giménez M., Colomina I., Rosales J.J., Wis M., Tscherning C.C. and Vásquez E.: *TERRA: A feasibility study on local geoid determination in Bolivia with strapdown inertial airborne gravimetry*, IAG Symposia Series, 129: 202-207, doi: 10.1007/3-540-26932-0\_35, 2005.
- Gitlein O. and Timmen L.: *Atmospheric mass flow reduction for terrestrial absolute gravimetry in the Fennoscandinavian land uplift network*, IAG Symposia Series, 130: 461-466, doi: 10.1007/978-3-540-49350-1\_67, 2007.
- Goiginger H., Höck E., Rieser D., Mayer-Gürr T., Maier A., Krauss S., Pail R., Fecher T., Gruber T., Brockmann J.M., Krasbutter I., Schuh W.D., Jäggi A., Prange L., Hausleitner W., Baur O., Kusche J.: *The combined satellite-only global gravity field model GOCO02S*, presented at the 2011 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, 4-8 April, 2011
- Grafarend E. and Ardalan A.: *World Geodetic Datum 2000*, J Geod, 73: 611-623, doi: 10.1007/s001900050272, 1999.
- Grafarend E. and Sansò F.: *The multibody space-time geodetic boundary value problem and the Honkasalo term*, Geophys J Roy Astr Soc 78:255-275, 1984.
- Groten E.: *A remark on M. Heikkinen's paper "On the Honkasalo term in tidal corrections to gravimetric observations"* Bull Geod 53: 239-245, Bull Geod 54: 221-223, doi: 10.1007/BF02521250. 1980.
- Groten E.: *Do we need a new reference system?*, IAG Symposia Series, 125: 108-113, doi: 10.1007/978-3-662-04709-5\_19, 2002.
- Groten E.: *Fundamental parameters and current (2004) best estimates of the parameters of common relevance to Astronomy, Geodesy and Geodynamics*, The Geodesist's Handbook 2004, J Geod, 77: 724-731, doi: 10.1007/s00190-003-0373-y, 2004.
- Gruber Th., Abrikosov O. and Hugentobler U.: *GOCE standards. Document GP-TN-HPF-GS-0111, Issue 3.2.* Prepared by the European GOCE Gravity Consortium EGG-C. [http://earth.esa.int/pub/ESA\\_DOC/GOCE/](http://earth.esa.int/pub/ESA_DOC/GOCE/), 2010.
- Hartmann T. and Wenzel H.-G.: *The HW95 tidal potential catalogue*, Geophys Res Lett 22(24): 3553-3556, doi: 10.1029/95GL03324, 1995.
- Heck B.: *Zur Bestimmung vertikales rezenter Erdkrustbewegungen und zeitlicher Änderungen des Schwerefeldes aus wiederholten Schweremessungen und Nivellements*, DGK, Reihe C, Heft Nr. 302, München, 114 p, 1984.
- Heck B.: *A contribution to the scalar free boundary value problem of physical geodesy*, Manu Geod, 14: 87-99, 1989.
- Heck B.: *Tidal corrections in geodetic height determination*, IAG Symposia Series, 108: 11-24, doi: 10.1007/978-3-642-77958-9\_2, 1993.
- Heck B.: *Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung*. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg. 3. Auflage, 2003.
- Heck, B.: *Problems in the definition of vertical reference frames*. IAG Symposia Series, 127: 164-173, doi: 10.1007/978-3-662-10735-5\_22, 2004.
- Heck B.: *A Brovar-type solution of the fixed geodetic boundary-value problem*, Stud Geophys Geod, 55: 441-454, doi: 10.1007/s11200-011-0025-2, 2011.
- Heck B. and Mälzer H.: *Determination of vertical recent crustal movements by levelling and gravity data*, Tectonophysics, 97: 251-264, 1983.
- Heck B. and Rummel R.: *Strategies for solving the vertical datum problem using terrestrial and satellite geodetic data*, IAG Symposia Series, 104: 116-128, doi: 10.1007/978-1-4684-7098-7\_14, 1990.
- Heck B. and Seitz K.: *Effects of non-linearity in the geodetic boundary problems*, DGK, Reihe A, Heft Nr. 109, München, 74 pp., 1993.
- Heck B. and Seitz K.: *Solution of the linearized geodetic boundary value problem for an ellipsoidal boundary to order  $e^3$* , J Geod, 77: 182-192, doi: 10.1007/s00190-002-0309-y, 2003.
- Heikkinen M.: *On the Honkasalo term in tidal corrections to gravimetric observations*, Bull Geod 53: 239-245, doi: 10.1007/BF02523955, 1979.
- Heiskanen W.A. and Moritz H.: *Physical Geodesy*. W.H. Freeman, San Francisco, 1967.
- Helmert F.R.: *Die mathematischen und physicalischen Theorien der höheren Geodasie*, Teubner, Leipzig, Frankfurt, 1880.

- Herd D., Youd T.L., Meyer H., Arango J.L., Person W.J. and Mendoza C.: *The Great Tumaco, Colombia Earthquake of 12 December 1979*. Science, 211(4481): 441-445, doi: 10.1126/science.211.4481.441, 1981.
- Hernandes F. and Schaeffer Ph.: *The CLS01 mean sea surface: a validation with the GFSC00.1 surface*. www.cls.fr/html/oceano/projects/mss/cls\_01\_en.html, 2001.
- Hipkin R.G.: *Is there a need for a geodetic datum 2000? Discussion of a Heiskanen & Moritz Porposition*, IAG Symposia Series, 125: 124-127, doi: 10.1007/978-3-662-04709-5\_21, 2002.
- Hirose N., Fikumori I., Zlotnicki V. and Ponte R.: *High-frequency barotropic response to atmospheric disturbances: Sensitivity to forcing, topography and friction*, J Geophys Res 106: 30987, doi: 10.1029/2000JC000763, 2001.
- Hirt C., Gruber T. and Featherstone W.E.: *Evaluation of the first GOCE static gravity field models using terrestrial gravity, vertical deflections and EGM2008 quasigeoid heights*, J Geod 85: 723-740, doi: 10.1007/s00190-011-0482-y, 2011.
- Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H. and Collins J.: *GPS: Theory and practice*, Springer, Wien New York, 2001.
- Hofmann-Wellenhof B. and Moritz H.: *Physical geodesy*, Springer, Wien New York, 2005.
- Holgate S.J., Matthews A., Woodworth Ph.L., Rickards L.J., Tamisiea M.E., Bradshaw E., Foden P.R., Gordon K.M., Jevrejeva S. and Pugh J.: *New Data Systems and Products at the Permanent Service for Mean Sea Level*, J Coastal Res, 29(3): 493-504, doi:10.2112/JCOASTRES-D-12-00175.1, 2013.
- Honkasalo T.: *On the tidal gravity correction*, Bolletino de Geofisica teorica et applicata, VI(21): 34-36, 1964.
- Hoyer M., Wildermann E., Acuña G., Hernández J., Nahmens A. and Velandia J.: *Current Status of Geoid Calculation in Venezuela*, IAG Symposia Series, 124: 182-186, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_34, 2002.
- Huang J., Véronneau M. and Pagiatakis S.D.: *On the ellipsoidal correction to the spherical Stokes solution of the gravimetric geoid*, J Geod, 77(3): 171-181, doi: 10.1007/s00190-003-0317-6, 2003.
- Ihde J. and Augath W.: *The Vertical Reference System for Europe*. In: EUREF Report, Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die internationale Erdmessung. Heft Nr. 61: 99-110. München, 2000.
- Ihde J. and Sánchez L.: *A unified global height reference system as a basis for IGGOS*, J Geodyn, 40:400-413, doi: 10.1016/j.jog.2005.06.015, 2005.
- Ihde J., Mäkinen J. and Sacher M.: *Conventions for the definition and realization of a European Vertical Reference System (EVRS) - EVRS Conventions 2007 -*. IAG Sub-Commission 1.3a EUREF, www.bkg.bund.de/evrs/, 2008.
- Ilk K.H., Mayer-Gürr T., Feuchtinger M.: *Gravity Field Recovery by Analysis of Short Arcs of CHAMP*, Proceedings of the 2nd Science Workshop of CHAMP, 2003.
- Jevrejeva A., Grinsted A., Moore J.V. and Holgate S.: *Nonlinear trends and multi-year cycles in sea level records*, J Geophys Res, 111(C09012), doi: 10.1029/2005JC003229, 2006.
- Johnson T.J., Wilson C.R. and Chao B.F.: *Non-tidal oceanic contributions to gravitational field changes: predictions of the Parallel Ocean Climate Modell*, J Geophys Res 106(B6): 11315-11334, doi: 10.1029/2000JB900438, 2001.
- Kahmen H.: *Vermessungskunde*. 19., überarb. Aufl. Berlin, New York, de Gruyter, 1997.
- Kaniuth K.: *Co- and post-seismic displacements of permanent GPS stations associated with the December 26, 2004 and March 28, 2005 Sumatra earthquakes*. ZfV 130: 324-328, 2005.
- Kaniuth K., Haefele P. and Sánchez L.: *Subsidence of the permanent GPS station Bogotá*, IAG Symposia Series, 124: 56-59, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_12, 2002a.
- Kaniuth K., Mueller H. and Seemueller W.: *Displacement of space geodetic observatory Arequipa due to recent earthquakes*. ZfV 127: 238-243, 2002b.
- Khafid: *On the unification of Indonesian Local Heights*. DGK, Reihe C, Heft 488, München, 1998.
- Klees R.: *Lösung des fixen geodätischen Randwertproblems mit Hilfe der Randelementmethode*, DGK Reihe C, 382, München, 1992.
- Knudsen P., Bingham R., Andersen O. and Rio M.-H.: *A global mean dynamic topography and ocean circulation estimation using a preliminary GOCE gravity model*, J Geod, 85(11): 861-879, doi: 10.1007/s00190-011-0485-8, 2011.
- Koblinsky C.J., Ray R., Becley B.D., Wang Y.M., Tsaoussi L., Brenner A. and Williamson R.: *NASA Ocean Altimeter Pathfinder Project*, Report 1: Data processing handbook, NASA/TM – 1998 -208605, 1999.
- Koch K.R. and Pope A.J.: *Uniqueness and existence for the geodetic boundary value problem using the known surface of the earth*, Bull Géod 46: 467-476, 1972.
- Kuhn M.: *Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen*. DGK, Reihe C, Heft Nr. 520, München, 2000.

- Kurtenbach E., Mayer-Gürr T. and Eicker A.: *Deriving daily snapshots of the Earth's gravity field from GRACE L1B data using Kalman filtering*, Geophys Res Lett 36: L17102, doi: 10.1029/2009GL039564, 2009.
- Lambeck K.: *The Earth's variable rotation: Geophysical causes and consequences*. Cambridge University Press, 449 p, 1980.
- Lauría E.A., Galbán F.M., Brunini C., Font G., Rodríguez R. and Pacino C.: *The vertical reference system in the Argentine Republic*, IAG Symposia Series, 124: 11-15, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_3, 2002.
- Le Provost C.: *Ocean tides*. In: Fu, L.L., A, Cazenave (Eds.). *Satellite Altimetry and Earth Sciences – A handbook of Techniques and Applications*. International Geophysical Series, 69:267-304, Academic Press, San Diego, 2001.
- Le Traon, P.Y. and Morrow R.: *Ocean currents and eddies*, In: Fu L.L. and Cazenave A. (Ed.), *Satellite altimetry and Earth sciences*, Academic Press, 2001.
- Ledersteger K.: *Die Minimalssysteme der metrischen Reduktion*. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie 44: 43-50, 1956.
- Ledersteger K.: *Astronomische und Physikalische Geodäsie*. Band V der Fachbuchreihe Jordan-Eggert-Kneissl, Handbuch der Vermessungskunde; 871 S., Verlag J.B.Metzler, Stuttgart, 1969.
- Lefevre F., Lyard F., Le Provost C. and Schrama E.O.: *FES99: a global tide finite element solution assimilating tide gauge and altimetric information*. J Atmospheric and Oceanic Tech, 19:1345-1356, doi: [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0426\(2002\)019<1345:FAGTFE>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0426(2002)019<1345:FAGTFE>2.0.CO;2) 2002.
- Lehmann R.: *Studies on the use of boundary element methods in Physical Geodesy*, DGK Rehie A, No. 113, München, 1997.
- Lehmann R.: *Altimetry-gravimetry problems with free vertical datum*, J Geod, 74: 327-334, doi: 10.1007/s001900050290, 2000.
- Leismann M., Klees R. and Beckers H.: *Untersuchungen verschiedener Höhensysteme, dargestellt an einer Testschleife in Reihnland-Pfalz*. DGKkommission, Reihe B, Heft 296, München, 1992.
- Lelgemann D.: *On the definition of the Listing-Geoid taking into consideration different height systems*. Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, Reihe II, Heft Nr. 34: 25 – 46. Frankfurt, 1977.
- Lemoine F., Kenyon S., Factor J., Trimmer R., Pavlis N., Chinn D., Cox C., Kloslo S., Luthcke S., Torrence M., Wang Y., Williamson R., Pavlis E., Rapp R. and Olson T.: *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*. NASA, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, 1998.
- Lemoine J.M., Bruinsma S.L. and Biancale R.: (2010). *Ten-Day Gravity Field Solutions Inferred from GRACE Data*, IAG Symposia Series, 135: 619-623, doi: 10.1007/978-3-642-10634-7\_82, 2010.
- Letellier T.: *Etude des ondes de marée sur les plateaux continentaux*. Thèse doctorale, Université de Toulouse III, Ecole Doctorale des Sciences de l'Univers, de l'Environnement et de l'Espace, 237 p., 2004.
- Leuliette E. W., and Miller L.: *Closing the sea level rise budget with altimetry, Argo, and GRACE*, Geophys Res Lett, 36, L04608, doi:10.1029/2008GL036010, 2009.
- Lidberg M., Johansson J.M., Scherneck H.-G and Davis J.L.: *An improved and extended GPS-derived 3D velocity field of the glacial isostatic adjustment (GIA) in Fennoscandia*, J Geod, 81: 213-230, doi: 10.1007/s00190-006-0102-4, 2007.
- Linzhang Y., Klingelé E. and Kahle H.-G.: *Determining variations in rock elasticity with Earth tides*. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht 242, 1995.
- Listing J.B.: *Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde*. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität, 33-98, Göttingen, 1873.
- Llovel W., Becker M., Cazenave A., Crétaux J.-F. and Ramillien G.: *Global land water storage change from GRACE over 2002–2009: Inference on sea level*. Comptes Rendus Geoscience, 342(3): 179-188, 2010.
- Longman I.M.: *Formulas for computing the tidal accelerations due to the Moon and the Sun*, J Geophys Res 64: 2351-2355, 1959.
- Lühr H., Grunwaldt L. and Förste Ch.: *CHAMP reference systems, transformations and standards*. CH-GFZ-RS-002. GFZ-Potsdam. [http://op.gfz-potsdam.de/champ/docs\\_CHAMP/CH-GFZ-RS-002.PDF](http://op.gfz-potsdam.de/champ/docs_CHAMP/CH-GFZ-RS-002.PDF), 2002.
- Luz R., Guimarães V.M., Rodrigues A.C. and Correia J.D.: *Brazilian first order levelling network*, IAG Symposia Series, 124: 20-22, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_5, 2002a.
- Luz R.T., Fortes L.P.S., Hoyer M. and Drewes H.: *The vertical reference frame for the Americas - The SIRGAS 2000 GPS campaign*, IAG Symposia Series, 124: 302-305, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_56, 2002b.
- Luz R.T., Bosch W., de Freitas S.R.C., Heck B. and Dalazoana R.: *Evaluating the Brazilian vertical datum through improved coastal satellite altimetry Data*, IAG Symposia Series, 133:735-740, doi: 10.1007/978-3-540-85426-5\_84, 2009.

- Luzum B., Capitaine N., Fienga A., Folkner W., Fukushima T., Hilton J., Hohenkerk C., Kransinky G., Petit G., Pitjeva E., Soffel M. and Wallace P.: *The IAU 2009 system of astronomical constants: the report of the IAU working group on numerical standards for Fundamental Astronomy*. *Celes Mech Dyn Astr* 110: 293-304, doi: 10.1007/s10569-011-9352-4, 2011.
- Lynch D.R. and Gray W.G.: *A wave equation model for finite element tidal computations*. *Computers and fluids*, 7:207-228, 1979.
- Mäkinen J. and Saaranen V.: *Determination of post-glacial land uplift from the three precise levellings in Finland*, *J Geod*, 72: 516-529, doi: 10.1007/s001900050191, 1998.
- Mäkinen J., Koivula H., Poutanen M. and Saaranen V.: *Vertical velocities in Finland from permanent GPS networks and from repeated precise levelling*, *J Geodyn*, 35: 443-456, doi: 10.1016/S0264-3707(03)00006-1, 2003.
- Mäkinen J., Engfeldt A., Harsson B.G., Ruotsalainen H., Strykowski G., Oja T. and Wolf D.: *The Fennoscandian Land Uplift Gravity Lines 1966–2003*, IAG Symposia Series 129: 328-332, doi: 10.1007/3-540-26932-0\_57, 2005.
- Mäkinen J. and Ihde J.: *The permanent tide in heights systems*, IAG Symposia Series, 133: 81-87, doi: 10.1007/978-3-540-85426-5\_10, 2009.
- Marsh J.G., Lerch F.J., Putney B.H., Felsentreger T.L., Sánchez B.V., Klosko S.M., Patel G.B., Robbins J.W., Williamson R.G., Engelis T.E., Eddy W.F., Chandler N.L., Chinn D.S., Kapoor S., Rachlin K.E., Braatz L.E. and Pavlis E.C.: *The GEM-T2 gravitational model*. NASA technical memorandum 100746, 98 p., 1989.
- Martinez Z. and Grafarend E.W.: *Solution to the Stokes boundary value problem on an ellipsoid of revolution*, *Studia geoph et geod*, 41: 103-129, doi: 10.1023/A:1023380427166, 1997.
- Martínez W.A. and Sánchez L.: *Realization of the SIRGAS Reference Frame in Colombia*, IAG Symposia Series, 134: 185-190, doi: 10.1007/978-3-642-00860-3\_29, 2009.
- Martínez-Díaz W.A., Sánchez L.: *Ajuste SIRGAS de MAGNA2011*. SIRGAS-GTII SIRGAS en el ámbito nacional. Instituto Geográfico Agustín Codazzi, Bogotá Colombia. Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, Munich, Alemania, 38p., 2012. www.sirgas.org, in Spanish.
- Mather R.S.: *The role of the geoid in four-dimensional geodesy*. *Marine Geodesy*, 1:217-252, 1978.
- Mathews P.M.: *Explanatory supplement to the section "Treatment of the permanent tide" of the IERS Conventions (1996)*. In: Schuh H. (Ed.), Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, Report 71: 9-12, 1999.
- Mathews P.M., Buffett B.A. and Shapiro I.I.: *Love numbers for diurnal tides: relation to wobble admittances and resonance expansion*, *J Geophys Res* 100(B9): 9935-9948, doi: 10.1029/95JB00670, 1995.
- Mathews P.M. and Guo J.Y.: *Viscoelectromagnetic coupling in precession-nutation theory*, *J Geophys Res* 110(B2): B02402, doi: 10.1029/2003JB002915, 2005.
- Matos A.C.O.C. de, Blitzkow D., Guimarães G.N and Lobianco M.C.B.: *GOCE and the Geoid in South America*, IAG Symposia Series, 139:529-534, doi: 10.1007/978-3-642-37222-3\_70, 2014.
- Maturana R. and Barriga R.: *The vertical geodetic network in Chile*, IAG Symposia Series, 124: 23-26, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_6, 2002.
- Mayer-Gürr T., Eicker A., Ilk K.H.: *ITG-Grace03 Gravity Field Model*, <http://www.igg.uni-bonn.de/apmg/index.php?id=itg-grace03>, 2007.
- Mayer-Gürr T., Kurtenbach E., Eicker A.: *ITG-Grace2010 Gravity Field Model*, <http://www.igg.uni-bonn.de/apmg/index.php?id=itg-grace2010>, 2010.
- Mayer-Gürr T., Rieser D., Hoeck E., Brockmann J.M., Schuh W.D., Krasbutter I., Kusche J., Maier A., Krauss S., Hausleitner W., Baur O., Jäggi A., Meyer U., Prange L., Pail R., Fecher T. and Gruber Th.: *The new combined satellite only model GOCO03S*. Presented at the International Symposium on Gravity, Geoid and Height Systems GGHS 2012, Venice, 2012.
- McCarthy D.D., Boucher C., Eanes R., Fukushima T., Herring T., Lieske J., Ma C., Montag H., Pâquet P., Reigber C., Ries J., Schutz B.E., Standish E.M., Veillet C. and Whar J.: *IERS Standards (1989)*. IERS Technical Note 3. Central Bureau of IERS - Observatoire de Paris, 81 p., 1989
- McCarthy D.D.: *IERS Standards (1992)*. IERS Technical Note 13. Central Bureau of IERS - Observatoire de Paris, 163 p., 1992.
- McCarthy D.D.: *IERS Conventions (1992)*. IERS Technical Note 21. Central Bureau of IERS - Observatoire de Paris, 101 p., 1996.
- McCarthy D.D. and Petit G. (Eds.): *IERS Conventions 2003*. IERS Technical Note No. 32. Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie. Frankfurt am Main, 2004.
- McConnell K., Winter P. and Geller R.: *Latin American Gravity Standardization Network 1977 (LAGSN77)*. Earth Physics Branch, Canada and Inter American Geodetic Service, Panama, 1979.
- Melchior P.: *The Earth Tides*. Pergamon Press, Oxford. 458 p., 1966.

- Menemenlis D., Campin J., Heimbach P., Hill C., Lee T., Nguyen A., Schodlock M. and Zhang H.: *ECCO2: High resolution global ocean and sea ice data synthesis*, Mercator Ocean Quarterly Newsletter, 31: 13-21, 2008.
- Migliaccio F., Reguzzoni M., Gatti A., Sanso F., Hecceg M.: *A GOCE-only global gravity field model by the space-wise approach*, Proceedings of the 4th International GOCE User Workshop, 31 March - 1 April, Munich 2011.
- Moirano J., Brunini C., Drewes H. and Kaniuth K.: *Realization of a geodetic reference system in Argentina in connection with SIRGAS*, IAG Symposia Series, 118: 199-204, doi: 10.1007/978-3-662-03714-0\_32, 1998.
- Molodenskii M.S., Yeremeev V.F. and Yurkina M.I.: *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*, Trudy TsNIIGAiK, 131, Geodezizdat, Moscow, 1960. (Übersetzung: Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem 1962).
- Morelli C., Gantar C., Honkasalo T., McConnell K., Tanner J., Szabo B., Uotila U. and Wahlen C.: *The International Standardization Net 1971 (IGSN71)*, IUGG-IAG, Publ. Spec. No. 4, Paris, 1974.
- Moritz H.: *Advanced Physical Geodesy*, Herbert Wichmann, Karlsruhe, 1980.
- Moritz H.: *Geodetic Reference System 1980*, J Geod 74: 128-133, doi: 10.1007/s001900050278, 2000.
- Müller I.I. (Ed.): *The Geodesist's Handbook*, Resolution No. 15 of the International Association of Geodesy adopted at the XVII General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics in Canberra 1979. Bull. Géod. 54:3, 1980.
- Müller J., Neumann-Redlin M., Jarecki F., Denker H. and Gitlein O.: *Gravity Changes in Northern Europe as Observed by GRACE*, IAG Symposia Series, 130: 523-527, doi: 10.1007/978-3-540-49350-1\_76, 2007.
- Munekane H., Tobita M. and Takashima K.: *Groundwater-induced vertical movements observed in Tsukuba, Japan*, Geophys Res Lett, 31(L12608), doi: 10.1029/2004GL020158, 2004.
- Munk W.H. and MacDonald G.J.F.: *The rotation of the Earth*. Cambridge Univ. Press, New York, 1960.
- Najafi-Alamdary M., Ardalan A.A. and Emadi S.-R.: *Ellipsoidal Neumann geodetic boundary-value problem based on surface gravity disturbances: case study of Iran*, Studia geoph et geod, 56(1): 153-170, doi: 10.1007/s11200-010-0098-3, 2012.
- Natali M.P., Mueller M., Fernández L. and Brunini C.: *CPLat: first operational experimental processing center for SIRGAS in Argentina*, J Geod, 83: 219-226, doi:10.1007/s00190-008-0270-5, 2009.
- Nerem R.S., Lerch F.J., Williamson R.G., Klosko S.M., Robbins J.W. and Patel G.B.: *Gravity model improvement using the DORIS tracking system on the SPOT-2 satellite*, J Geophys Res 99(B2): 2791-2813, doi: 10.1029/93JB02567, 1994.
- Nerem R.S., Eanes R.J., Thompson P.F. and Chen J.L.: *Observations of annual variations of the Earth's gravitational field using satellite laser ranging and geophysical models*, Geophys Res Lett 27: 1783-1786, doi: 10.1029/1999GL008440, 2000.
- Nerem R.S. and Mitchum G.T.: *Sea level change*. In: Fu, L.L. and Cazenave A. (Eds.). *Satellite Altimetry and Earth Sciences – A handbook of Techniques and Applications*. International Geophysical Series, 69:329-350, Academic Press, San Diego, 2001.
- Nesvorný D. and Šíma Z.: *Refinement of the geopotential scale factor  $R_0$  on the satellite altimetry basis*. Earth, Moon and Planets 65: 79-88. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- Neumeyer J., Hagedoorn J., Leitloff J. and Scdmidt T.: *Gravity reduction with three-dimensional atmospheric pressure data for precise ground gravity measurements*, J Geodyn 38: 437-450, doi: 10.1016/j.jog.2004.07.006, 2004.
- Pacino M.C.: *Absolute gravity measurements and gravity networks in South America*. In: *Nordic Journal of Surveying and Real State Research*, 4(2): 59-69, 2007.
- Pacino M.C., Font G., Tocho C. and Blitzkow D.: *New Results in the Determination of the Geoid Model in Argentina*, IAG Symposia Series, 124: 145-147, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_27, 2002.
- Pail R., Goiginger H., Schuh W.D., Höck E., Brockmann J.M., Fecher T., Gruber T., Mayer-Gürr T., Kusche J., Jäggi A. and Rieser D.: *Combined satellite gravity field model GOCO01S derived from GOCE and GRACE*, Geophys Res Lett, 37, L20314, doi: 10.1029/2010GL044906, 2010.
- Pail R., Bruinsma S.L., Migliaccio F., Foerste C., Goiginger H., Schuh W.D., Hoeck E., Reguzzoni M., Brockmann J.M., Abrikosov O., Veicherts M., Fecher T., Mayrhofer R., Krasbutter I., Sansò F. and Tscherning C.C.: *First GOCE gravity field models derived by three different approaches*, J Geod, 85: 819-843, doi: 10.1007/s00190-011-0467-x, 2011.
- Pan M. and Sjöberg L.E.: *Unification of vertical datums by GPS and gravimetric geoid models with application to Fenoscandia*, J Geod 72: 64-70, doi: 10.1007/s001900050149, 1998.
- Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C. and Factor J.K.: *Earth gravitational model to degree 2160: Status and progress*, presented at the XXIV General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics, Perugia, Italy, 2–13 July, 2007.

- Pavlis N-K., Holmes S.A., Kenyon S.C. and Factor J.K.: *The development of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)*, J Geophys Res 117:B04406, doi: 10.1029/2011JB008916, 2012.
- Pavlis N-K., Holmes S.A., Kenyon S.C. and Factor J.K.: *Correction to "The development of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)"*, J Geophys Res 118:2633, doi: 10.1002/jgrb.50167, 2013.
- Pereira A. and Pacino M.C.: *Evaluation of recent global geopotential models in Argentina*, IAG Symposia Series, 135: 383-388, doi: 10.1007/978-3-642-10634-7\_51, 2010.
- Peters Th.: *Modellierung zeitlicher Schwerevariationen und ihre Erfassung mit Methoden der Satellitengravimetrie*. DGK, Reihe C, Heft Nr. 606, 132 p., München, 2007.
- Petit G. and Luzum B. (Eds.): *IERS Conventions 2010*. IERS Technical Note 36. Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt a.M., 2010.
- Plag H-P. and Pearlman M. (Eds.): *Global Geodetic Observing System: Meeting the Requirements of a Global Society*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2009.
- Ponte R. and Ray R.: *Atmospheric pressure corrections in geodesy and oceanography: a strategy for handling tides*, Geophys Res Lett 29(24): L2153, doi: 10.1029/2002GL016340, 2002.
- Poutanen M., Vermeer M. and Mäkinen J.: *The permanent tide in GPS positioning*, J Geod, 70(8): 499-504, doi: 10.1007/BF00863622, 1996.
- Ramsayer K.: *Die Schwerereduktion von Nivellements*. DGK, Reihe A, Heft 6, München, 1953.
- Ramsayer K.: *Vergleich verschiedener Schwerereduktionen von Nivellements*. ZfV 79: 140-150, 1954.
- Rapp R.: *Ellipsoidal corrections for geoid undulation computation*. Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying. OSU Report No. 308, 1981.
- Rapp R.: *The need and prospects for a world vertical datum*, Proceedings of the International Association of Geodesy. IUGG General Assembly Hamburg. Vol. 2: 432-445, 1983a.
- Rapp R.: *Tidal gravity computations based on recommendations of the Standards Earth Tide Committee*. Bull. D'Inf. Marees Terrestres No. 89: 5814-5819, 1983b.
- Rapp R.: *The treatment of permanent tidal effects in the analysis of satellite altimeter data for sea surface topography*, Manu Geod, 14: 368-372, 1989.
- Rapp R.: *Separation between reference surfaces of selected vertical datums*, Bull Géod, 69:23-31, 1994.
- Rapp R.: *A world vertical datum proposal*, Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN), 102 (8-9): 297-204, 1995a.
- Rapp R.: *Equatorial radius estimates from Topex altimeter data*. Publication dedicated to Erwin Groten on the occasion of his 60th anniversary. Publication of the Institute of Geodesy and Navigation (IfEN), University FAF Munich, S. 90-97, 1995b.
- Rapp R.: *Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference*, J Geod, 71: 282-289, doi: 10.1007/s001900050096, 1997.
- Rapp R., Nerem R.S., Shum C.K., Klosko S.M. and Williamson R.G.: *Consideration of permanent tidal deformation in the orbit determination and data analysis for the Topex/Poseidon mission*. NASA technical memorandum 100775.11 p., 1991.
- Rapp R. and Balasubramania N.: *A conceptual formulation of a world height system*. Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying. OSU Report No. 421. 55 pp, 1992.
- Ray R.D. and Ponte R.M.: *Barometric tides from ECMWF operational analyses*, Ann Geophys 21(8): 1897-1910, doi: 10.51194/angeo-21-1897-2003, 2003.
- Rebischung P., Griffiths J., Ray J., Schmid R., Collilieux X. and Garayt B.: *IGS08: the IGS realization of ITRF2008*, GPS Solutions, 16(4): 483-494, doi: 10.1007/s10291-011-0248-2, 2012.
- Reigber C., Balmino G., Schwintzer P., Biancale R., BodeA., Lemoine J.M., König R., Loyer S., Neumayer K.H., Marty J.C., Barthelmes F., Perosanz F. and Zhu S.Y.: *A high quality global gravity field model from CHAMP GPS tracking data and Accelerometry (EIGEN-1S)*, Geophys Res Lett, 29(14), doi: 10.1029/2002GL015064, 2002.
- Reigber C., Schwintzer P., Neumayer K.H., Barthelmes F., König R., Förste C., Balmino G., Biancale R., Lemoine J.M., Loyer S., Bruinsma S.L., Perosanz F. and Fayard T.: *The CHAMP-only Earth Gravity Field Model EIGEN-2*, Adv in Space Res 31(8): 1883-1888, doi: 10.1016/S0273-1177(03)00162-5, 2003.
- Rio M.-H. and Andersen O.: *GUT WP8100 Standards and recommended models*. WP8100, ESA-ESRIN, Frascati, Italy, GUT Toolbox, Internal Report. <https://earth.esa.int/web/guest/software-tools/gut/gut-resources/documentation>, 2009.
- Rothacher M.: *Estimation of station heights with GPS*, IAG Symposia Series, 124: 81-90, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_17, 2002.

- Rummel R.: *Global unification of height systems and GOCE*, IAG Symposia Series, 123:12-19, doi: 10.1007/978-3-662-04827-6\_3, 2001.
- Rummel R.: *Height unification using GOCE*, J Geod Sci, 2(4): 355–362, doi: 10.2478/v10156-011-0047-2, 2012.
- Rummel R. and Teunissen P.: *Height datum definition, height datum connection and the role of the geodetic boundary value problem*, Bull. Géod. 62: 477-498, doi: 10.1007/BF02520239, 1988.
- Rummel R. and Ilk K.-H.: *Height datum connection – the ocean part*. Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN), 102(8-9): 321-296, 1995.
- Rummel R. and Heck B.: *Some critical remarks on the definition and realization of the EVRS*. In: EUREF Report, Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die internationale Erdmessung. Heft Nr. 61: 114-115. München, 2000.
- Rummel R., Gruber Th., Ihde J., Liebsch G., Rülke A., Schäfer U., Sideris M., Rangelova E., Woodworth Ph. and Hughes Ch.: *STSE-GOCE+, Height system unification with GOCE (Abstract)*, Doc. No. GO-HSU-PL-002, Issue 1, 24-02-2014.
- Sacerdote F. and Sansò F.: *The scalar boundary value problem of physical geodesy*, Manu Geod, 11: 15-28, 1986.
- Sacerdote F. and Sansò F.: *Further remarks on the altimetry-gravimetry problems*, Bull Geod 61: 65-82, 1987.
- Sacerdote F. and Sansò F.: *Wo: A story of the height datum problem*. In: Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover. Nr. 241: 49-56, 2001.
- Sacerdote F. and Sansò F.: *Geodetic boundary-value problems and the height datum problem*, IAG Symposia Series, 127: 174.178, doi:10.1007/978-3-662-10735-5\_23, 2004.
- Sacher M., Ihde J., Celms A. and Ellmann A.: *The first UELN stage is achieved, further steps are planned*. In: EUREF Report, Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die internationale Erdmessung, 60: 87-94. München, 1999.
- Sacher M., Ihde J., Liebsch G. and Mäkinen, J.: *EVRF07 as Realization of the European Vertical Reference System*, Presented at the Symposium of the IAG Sub-commission for Europe (EUREF) in Brussels, June 18-21, 2008. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 68(1): 35-50, 2008.
- Sánchez L.: *Untersuchung physikalischer Höhen in Kolumbien. Studienarbeit. Institut für Planetare Geodäsie*, Technische Universität Dresden, November 2002.
- Sánchez L.: *Bestimmung der Höhenreferenzfläche für Kolumbien*. Diplomarbeit. Institut für Planetare Geodäsie, Technische Universität Dresden, 2003.
- Sánchez L.: Grupo de Trabajo III de SIRGAS: SIRGAS-GTIII, Reporte 2005. 39 p., 2005, in Spanish.
- Sánchez L.: *Definition and Realization of the SIRGAS Vertical Reference System within a Globally Unified Height System*, IAG Symposia Series 130: 638-645, doi: 10.1007/978-3-540-49350-1\_92, 2007.
- Sánchez L.: *Approach for the establishment of a global vertical reference level*, IAG Symp Series, 132: 119-125, doi: 10.1007/978-3-540-74584-6\_18, 2008.
- Sánchez L.: *Strategy to establish a global vertical reference system*, IAG Symposia Series, 134: 273-278, doi:10.1007/978-642-3-00860-3-42, 2009.
- Sánchez L. and Martínez W.: *Approach to the new vertical reference system for Colombia*, IAG Symposia Series, 124: 27-33 doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_7, 2002.
- Sánchez L. and Bosch W.: *The role of the TIGA project in the unification of classical height systems*, IAG Symposia Series, 134: 285-290, doi: 10.1007/978-3-642-00860-3\_44, 2009.
- Sánchez L. and Brunini C.: *Achievements and Challenges of SIRGAS*, IAG Symposia Series, 134: 161-166, doi:10.1007/978-3-642-00860-3\_25, 2009.
- Sánchez L. and Seitz M.: *Recent activities of the IGS Regional Network Associate Analysis Centre for SIRGAS (IGS RNAAC SIR)*, DGFI Report No. 87, 2011.
- Sánchez L., Seemüller W. and Seitz M.: *Combination of the weekly solutions delivered by the SIRGAS processing centres for the SIRGAS-CON reference frame*, IAG Symposia Series, 136: 845-851, doi:10.1007/978-3-642-20338-1\_106, 2012.
- Sánchez L., Seemüller W., Drewes H., Mateo L., González G., Silva A., Pampillón J., Martínez W., Cioce V., Cisneros D. and Cimbaro S.: *Long-Term Stability of the SIRGAS Reference Frame and Episodic Station Movements Caused by the Seismic Activity in the SIRGAS Region*, IAG Symposia Series 138:153-161, doi:10.1007/978-3-642-32998-2\_24, 2013.
- Sánchez L., Drewes H., Brunini C., Mackern M.V. and Martínez-Díaz, W.: *SIRGAS core network stability*, IAG Symposia Series (IAG General Assembly 2013), accepted for publication, 2014.
- Sansò F.: *The long road from measurements to boundary value problems in physical geodesy*, Manu Geod, 20(5):326-344, 1995.

- Sansò F. and Usai S.: *Height datum and local geodetic datums in the theory of geodetic boundary problem*. Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN), 102(8-9): 343-355, 1995.
- Sansò F. and Venuti G.: *The height/geodetic datum problem*, Geophys J Int 149: 768-775, 2002.
- Santos M.C., Vaniček P., Featherstone W.E., Kingdon R., Ellmann A., Martin B.-A., Kuhn M. and Tenzer R.: *The relation between rigorous and Helmert's definitions of orthometric heights*, J Geod 80: 691-704, doi: 10.1007/s00190-006-0086-0, 2006.
- Sarti P., Abbondanza C., Petrov L. and Negusini M.: *Height bias and scale effect induced by antenna gravity deformations in geodetic VLBI data analysis*, J Geod, 85(1): 1-8, doi: 10.1007/s00190-010-0410-6, 2010.
- Savcenko R. and Bosch W.: *EOT08a - Empirical Ocean Tide Model from Multi-Mission Satellite Altimetry*. DGFI Report 81, Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut (DGFI), München, 2008.
- Savcenko R. and Bosch W.: *EOT11a - Empirical Ocean Tide Model From Multi-Mission Satellite Altimetry*. DGFI Report No. 89, 2012
- Schaeffer P., Faugère Y., Legeais J. F., Ollivier A., Guinle T. and Picot N.: *The CNES\_CLS11 Global Mean Sea Surface Computed from 16 Years of Satellite Altimeter Data*, Marine Geodesy, 35(1): 3-19, doi: 10.1080/01490419.2012.718231, 2012.
- Schernek H.-G.: *A parameterized solid earth tide model and ocean tide effects for global geodetic baselines measurements*, Geophys J Int 106(3): 677-694, doi: 10.1111/j.1365-246X.1991.tb06339.x, 1991.
- Scherneck H.-G.: *Explanatory supplement to the section "Local site displacement due to ocean loading" of the IERS Conventions 1996, Chapters 6 and 7*. In: Schuh H (ed.) DGFI Report 71: 19-23, 1999.
- Schmidt M., Han S.-C., Kusche J., Sánchez L. and Shum C.K.: *Regional high-resolution spatio-temporal gravity modeling from GRACE data using spherical wavelets*, Geophys Res Lett. 33:L08403, doi: 10.1029/2005GL025509, 2006.
- Schmid R.: *Upcoming switch to IGS08/igs08.atx - Details on igs08.atx*. IGSMail-6355 (<http://igs.org/pipermail/igsmail/2011/006347.html>), 2011.
- Schmid R., Steigenberger P., Gendt G., Ge M. and Rothacher M.: *Generation of a consistent absolute phase center correction model for GPS receiver and satellite antennas*, J Geod 81(12): 781-798, doi:10.1007/s00190-007-0148-y, 2007.
- Schödlbauer A. und Muñoz J.: *Geodätisches Referenzsystem PERU'96*. Abschlußbericht zu dem von der Volkswagenstiftung geförderten Projekt I/70939. UniBw-München. 65 p., 1999.
- Schrama E.J.O. and Ray R.: *A preliminary tidal analysis of Topex/Poseidon altimetry*, J Geophys Res, 99(C12): 24799-24808, 1994.
- Schwatke C., Bosch W., Savcenko R. and Dettmering D.: *OpenADB - An open database for multi-mission altimetry*. EGU, Vienna, Austria, 2010-05-05 (Poster), 2010.
- Seeber G.: *Satellite geodesy: foundations, methods, and applications*. W. de Gruyter, Berlin, New York, 2003.
- Seemüller W.: *The Position and Velocity Solution DGF06P01 for SIRGAS*, IAG Symposia Series, 134:167-172, doi: 10.1007/978-3-642-00860-3\_26, 2009.
- Seemüller W., Seitz M., Sánchez L. and Drewes H.: *The new Multi-year Position and Velocity Solution SIR09P01 of the IGS Regional Network Associate Analysis Centre (IGS RNAAC SIR)*, IAG Symposia Series, 136: 877-883, doi: 10.1007/978-3-642-20338-1\_110, 2012.
- Seitz K.: *Ellipsoidische und topographische Effekte im geodätischen Randwertproblem*. DGK, Reihe C, Heft Nr. 483, München, 140 pp., 1997.
- Seitz M., Angermann D., Bloßfeld M., Gerstl M., Heinkelmann R., Kelm R. und Müller H.: *Die Berechnung des Internationalen Terrestrischen Referenzrahmens ITRF2008 am DGFI*. ZfV, 135(2): 73-89, 2010.
- Sella G.F., Stein S., Dixon T.H., Craymer M., James Th.S., Mazzotti S. and Dokka R.K.: *Observation of glacial isostatic adjustment in "stable" North America with GPS*, Geophys Res Lett 34:L02306, doi: 10.1029/2006GL027081, 2007.
- SIRGAS: *SIRGAS Final Report; Working Groups I and II*, IBGE, Rio de Janeiro; 96 p., [www.sirgas.org](http://www.sirgas.org), 1997.
- Sjöberg L.E.: *Topographic effects by the Stokes-Helmert method of geoid and quasi-geoid determinations*, J Geod, 74: 255-268, doi: 10.1007/s001900050284, 2000.
- Sjöberg L.E.: *Ellipsoidal corrections to order  $e^2$  of geopotential coefficients and Stokes' formula*, J Geod, 77(3-4): 139-147, doi: 10.1007/s00190-003-0321-x, 2003.
- Sjöberg L.E.: *The ellipsoidal corrections to the topographic geoid effects*, J Geod, 77(12): 804-808, doi: 10.1007/s00190-004-0377-2, 2004.
- Snay R., Cline M., Dillinger W., Foote R., Hilla S., Kass W., Ray J., Rohde J., Sella G. und Soler T.: *Using global positioning system-derived crustal velocities to estimate rates of absolute sea level change from North American*

- tide gauge records*, J Geophys Res, 112:B04409, doi: 10.1029/2006JB004606, 2007.
- Steffen H., Gitlein O., Denker H., Müller J. and Timmen L.: *Present rate of uplift in Fennoscandia from GRACE and absolute gravimetry*, Tectonophysics, 474 (1-2): 69-77, 2009.
- Stock B.: *A Molodenskii-type solution of the geodetic boundary value problem using the known surface of the earth*, Manu Geod, 8: 273-288, 1983.
- Stokes G.G.: *On the variation of gravity at the surface of the Earth*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, V. 8., 1849.
- Strobach K.: *Unser Planet Erde - Ursprung und Dynamik*, 253 Seiten, Gebrüder Bornträger, Berlin, 1991.
- Subiza Piña W.H., Rovera Di Liandro H. and Turban L.: *The vertical datum and geoid models in Uruguay*, IAG Symposia Series, 124: 169-175, doi: 10.1007/978-3-662-04683-8\_32, 2002.
- Svensson S.L.: *Some remarks on the altimetry-gravimetry problem*, Manu Geod 13: 63-74, 1988.
- Tamura Y.: *A harmonic development of the tide-generating potential*. Bulletin d'Informations Mares Terrestres, 99:6813-6855, 1987.
- Tapley B.D., Chambers D.P., Bettadpur S. and Ries J.C.: *Large scale circulation from the GRACE GGM01 Geoid*, Geophys Res Lett, 30(22), 2163, doi: 10.1029/2003GL018622, 2003.
- Tapley B.D., Flechtner F., Bettadpur S. and Watkins M.M.: *The status and future prospect for GRACE after the first decade*; Eos Trans., Fall Meet. Suppl., Abstract G22A-01, 2013
- Tapley B.D. and Kim M.-C.: *Applications to Geodesy*. In: Fu L.L., Cazenave A. (Eds.). Satellite Altimetry and Earth Sciences – A handbook of Techniques and Applications. International Geophysical Series, 69:371-406, Academic Press, San Diego, 2001.
- Tapley B.D., Ries J., Bettadpur S., Chambers D., Cheng, M., Condi, F. and Poole, S.: *The GGM03 Mean Earth Gravity Model from GRACE*, Eos Trans. AGU 88(52), Fall Meet. Suppl., Abstract G42A-03, 2007.
- Tapley B.D., Bezzadpur S., Ries J.V., Thompson P.F. and Watkins M.M.: *GRACE measurements of mass variability in the Earth system*. Science, 305: 503-505, doi: 10.1126/science.1099192, 2004.
- Tapley et al.: *GGM05S model*, siehe [http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/documents/README\\_GGM05S.pdf](http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/documents/README_GGM05S.pdf), 2013.
- Tenzer R., Vaniček P., Santos M., Featherstone W.E. and Kuhn M.: *The rigorous determination of orthometric heights*, J Geod 79: 82-92, doi: 10.1007/s00190-005-0445-2, 2005.
- Thomas M.: *Ocean induced variations of Earth's rotation - Results from a simultaneous model of global circulation and tides*, PhD dissertation, University of Hamburg, Germany, 129pp., 2002.
- Tierney C., Wahr J., Bryan F. and Zlotnicki V.: *Short periodic oceanic circulation: implications for satellite altimetry*, Geophys Res Lett 27(9):1255-1258, 2000.
- Timmen L., Gitlein O., Müller J., Denker H., Mäkinen J., Bilker M., Pettersen B., Lysaker D., Omang O., Svendsen J., Wilmes H., Falk R., Reinhold A., Hoppe W., Scherneck H.-G., Engen B., Harsson B., Engfeldt A., Lilje M., Strykowski G. and Forsberg R.: *Observing Fennoscandian Gravity Change by Absolute Gravimetry*, IAG Symposia Series, 131: 193-199, doi: 10.1007/978-3-540-38596-7\_23, 2006.
- Tocho C., Font G. and Sideris M.G.: *A new high-precision gravimetric geoid model for Argentina*, IAG Symposia Series, 130: 416-423, doi: 10.1007/978-3-540-49350-1\_61, 2007.
- Torge W.: *Gravimetry for monitoring vertical crustal movements: Potential and problems*. Tectonophysics, 130: 385-393, 1986.
- Torge W.: *Gravimetry*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1989.
- Torge W.: *Geodesy*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2001.
- Tran N., Labroue S., Philipps S., Bronner E. and Picot N.: *Overview and Update of the Sea State Bias Corrections for the Jason-2, Jason-1 and TOPEX Missions*, Marine Geodesy 33:348-362, 2010.
- Tremel H. and Urbina R.: *Processing of the Ecuadorian National GPS Network within the SIRGAS Reference Frame*, Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut (DGFI), Report No. 73, 19 p., 2000.
- Tremel H., Sánchez L., Drewes H.: *Procesamiento de la red GPS básica de Colombia: Marco Geocéntrico Nacional - MAGNA*, Revista Cartografica IPGH; No. 73: 7-23, 2001, in Spanish.
- Tscherning C.C. (Ed.): *The Geodesist's Handbook*, Resolution No. 9 of the International Association of Geodesy adopted at the XVIII General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics, Hamburg 1983. Bull. Géod. 58:3, 1984.
- Tscherning C.C., Rapp R. and Goag C.: *A comparison of methods for computing gravimetric quantities from high degree spherical harmonic expansions*, Manu Geod, 8: 249-272, 1983
- Tscherning C.C., Forsberg R. and Knudsen P.: *Description of the GRAVSOFTE package for geoid determination*. In:

- Proceedings of 1st continental workshop on the geoid in Europe, Prague. Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography, Prague: 327-334, 1992.
- Uotila U.A.: *Note to the users of International Gravity Standardization Net 1971*, Bull Géod, 54: 407-408, 1980.
- van Onselen, K.: *Quality investigation of vertical datum connection*. Delft University of Technology. DEOS Report No. 97.3. 98 pp., 1997.
- Vaniček P. and Krakiwsky E.: *Geodesy, the concepts*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam. 697 p., 1986.
- Wahr J.: *The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic, and oceanless Earth*, Geophys J Roy Astron Soc, 64(3): 705-727, doi: 10.1111/j.1365-246X.1981.tb02691.x, 1981.
- Wahr J.M.: *Deformation induced by polar motion*, J Geophys Res, 90(B11): 9363-9368, doi: 10.1029/JB090iB1109363, 1985.
- Wahr J., Swenson S., Zlotnicki V. and Velicogna I.: *Time-variable gravity from GRACE: first results*, Geophys Res Lett 31, L11501, doi: 10.129/2004GL019779, 2004.
- Wang R.: *Tidal response of the solid Earth*. In: Wilherlm, H., W. Zürn, H.G. Wenzel (Eds.) Tidal phenomena, p. 27-57. Springer, Berlin, 1997.
- Wassef A.: *Propagation of error in precise levelling and its bearing on the assessment of recent crustal movements*, J Geod, 50: 323-329, doi: 10.1007/BF02521585, 1976
- Wessel P., Smith W.H.F., Scharroo R., Luis J.F. and Wobbe F.: *Generic Mapping Tools: Improved version released*, Eos Trans. AGU, 94:409-410, 2013.
- Woodworth, P.L. and Player R.: *The permanent service for mean sea level: an update to the 21st century*, J Coastal Res, 19: 287-295, 2003.
- Wunsch C. and Stammer D.: *Atmospheric loading and the oceanic inverted barometer effect*, Reviews of Geophys, 35(1): 79-107, 1997.
- Xu P. and Rummel R.: *A quality investigation of global vertical datum connection*. Netherlands Geodetic Commission. Publications on Geodesy. N. 34, 1991.
- Yurkina M.: *Gravity potential at the major vertical datum as primary constant*, Studia geoph et geod 40: 9-13, 1996.
- Zeman A.: *Definition of the normal gravity field including the constant part of tide*. Studia geoph et geod 31:113-120, 1987.
- Zeman A.: *Influence of permanent tides on the shape and gravity field of the Earth: comparison of different approaches*. Marées Terrestres, Bulletin d'Informations, 115:8429-8434, 1993.
- Zilkoski D.B., Richards J.H. and Young G.M.: *A summary of the results of the general adjustment of the North American Vertical Datum of 1988*. Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN), 102(8-9): 310-320, 1995.
- Zschau J. and Wang R.: *Imperfect elasticity in the Earth's mantle: implications for earth tides and long period deformations*. Earth Tides, 10th International Symposium, 379-384, 1985.

## Anhang A: Gezeitenreduktion der Nivellements

In der Gleichung [4.3] werden in  $\sum_n \Delta C_n(t)$  vor allem die Effekte der periodischen Komponenten der Erdgezeiten berücksichtigt, da diese systematische Fehler in ausgedehnten vertikalen Netzen (vgl. 3.1.4) erzeugen können, insbesondere wenn sie sich in Nord-Süd-Richtung erstrecken. Die Auswirkungen können abgeschätzt werden durch (vgl. Vaniček and Krakiwski 1986, S. 599, Heck 1993, S.19):

$$\Delta \delta n_T = -\frac{d}{r\bar{g}} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=2}^{\infty} (1+k_n-h_n) \frac{\partial \delta V(t)_{E_n,j}}{\partial z(t)_j} \cos(A(t)_j - \alpha) \quad [\text{m}] \quad [\text{A.1}] = [4.4]$$

Der Subindex  $j$  gibt den Beitrag des Mondes ( $j=1$ ) und der Sonne ( $j=2$ ) an,  $-\frac{\delta V(t)_{E_n,j}}{r\bar{g} \partial z(t)_j}$  ist die Horizontalkomponente der Gezeitenbeschleunigung (vgl. [3.4]),  $z(t)_j, A(t)_j$  stellen die geozentrische Zenitdistanz und das Azimut des entsprechenden Himmelskörpers dar,  $d$  ist die Strecke zwischen den nivellierten Punkten  $P_k$  und  $P_{k+1}$ ,  $\alpha$  das Azimut zwischen  $P_k$  und  $P_{k+1}$ ,  $r$  der mittlere Erdradius,  $\bar{g}$  der mittlere globale Schwerewert und  $k_n, h_n$  sind die Love-Zahlen. Berücksichtigt man nur die zonalen harmonischen Koeffizienten von  $\delta V(t)_E$  bis  $n=3$  für den Mond und  $n=2$  für die Sonne, so kann man [3.8] mit den gültigen Konstanten der *Internationalen Astronomischen Union* (Luzum et al. 2011), den nominellen Werten der Love-Zahlen in den IERS-Standards (Petit und Luzum 2010, S. 83 und 103) und den Parametern des GRS80 (Moritz 2000) schreiben als (vgl. Linzhang et al. 1995):

$$\begin{aligned} \Delta \delta n_T = & \left[ 1,16092 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \left( \frac{\rho}{a} \right) \left( \frac{D_1}{R(t)_1} \right)^3 \cos z(t)_1 + 0,01122 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \left( \frac{D_1}{R(t)_1} \right)^4 (5 \cos^2 z(t)_1 - 1) \right] \times \\ & [d \cos \alpha (\sin \varphi \cos \delta(t)_1 \cos \tau(t)_1 - \cos \varphi \sin \delta(t)_1) + d \sin \alpha (\cos \delta(t)_1 \sin \tau(t)_1)] + \\ & \left[ 0,53314 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \left( \frac{\rho}{a} \right) \left( \frac{D_2}{R(t)_2} \right)^3 \cos z(t)_2 \right] \times \\ & [d \cos \alpha (\sin \varphi \cos \delta(t)_2 \cos \tau(t)_2 - \cos \varphi \sin \delta(t)_2) + d \sin \alpha (\cos \delta(t)_2 \sin \tau(t)_2)] - \\ & \left[ 0,57765 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \left( \frac{\rho}{a} \right) d \cos \alpha \sin 2\varphi \right] \quad [\times 10^{-7} \text{ m}] \quad [\text{A.2}] = [4.5] \end{aligned}$$

In dieser Gleichung wurden der mittlere Erdradius  $r$  und der mittlere globale Schwerewert  $\bar{g}$  durch die große Halbachse  $a$  und die Normalschwere  $\gamma$  des GRS80-Ellipsoids ersetzt. Damit wird  $\gamma_0$  der Normalschwerewert am Äquator für das GRS80-Ellipsoid und  $\frac{\gamma_0}{\gamma} = \frac{1}{1 + 0,005\,2792 \sin^2 \varphi - 0,000\,0234 \sin^4 \varphi}$ .

Außerdem gilt:

$\frac{\rho}{a} = 1 - 0,003\,3472 \sin^2 \varphi + \frac{h}{a}$  gibt die Beziehung zwischen der großen Halbachse  $a$  des GRS80 und dem geozentrischen Radius  $\rho$  des Nivellementpunktes mit der geodätischen Breite  $\varphi$  und der ellipsoidischen Höhe  $h$ ;

$D_j, R(t)$  sind die mittlere und die momentane geozentrische Entfernung des Gestirns;

$\delta(t_j), \tau(t_j)$  sind die Deklination und der Stundenwinkel des betreffenden Gestirns.

$R(t_j), \delta(t_j), z(t_j)$  können mit hinreichender Genauigkeit aus den modellierten Ephemeriden von Sonne und Mond geschätzt werden.

Der letzte Term in [A.2] restituiert den indirekten Effekt der permanenten Gezeit, der implizit in [A.1] reduziert wird, so dass die nivellierten Höhenunterschiede im System *zero tide* dargestellt werden und konsistent mit den IAG-Resolutionen sind. Die Reduktion [A.2] muss unabhängig im Hin- und Rückweg des Nivellements berücksichtigt werden (und nicht in der Kombination aus beiden), weil diese zu unterschiedlichen Zeiten durchgeführt werden.

Die Berechnung der Reduktion der Gezeiteneffekte im Nivellement enthält die verwendeten Gleichungen für die Bahnen von Sonne und Mond. Sie werden hier im Detail angegeben (vgl. Linzhang et al., 1995):

$$\begin{aligned}
 s(t) &= 270,43416^\circ + 481267,88314^\circ T - 0,00113^\circ T^2 + 0,000002^\circ T^3 \rightarrow \text{Mittlere Länge des Mondes} \\
 h(t) &= 279,69668^\circ + 36000,76892^\circ T - 0,00030^\circ T^2 \rightarrow \dots \text{der Sonne} \\
 p(t) &= 334,32956^\circ + 4069,03403^\circ T - 0,01032^\circ T^2 - 0,00001^\circ T^3 \rightarrow \dots \text{des lunaren Perigäums} \\
 N(t) &= 259,18328^\circ + 1934,14201^\circ T + 0,00208^\circ T^2 - 0,000002^\circ T^3 \rightarrow \dots \text{des lunaren aufsteigenden Knotens} \\
 p_s(t) &= 281,22083^\circ + 1,71918^\circ T + 0,00045^\circ T^2 + 0,000003^\circ T^3 \rightarrow \dots \text{des solaren Perigäums} \\
 \varepsilon(t) &= 23,45229^\circ - 0,0130125^\circ T - 0,164^\circ \times 10^{-5} T^2 + 0,503^\circ \times 10^{-6} T^3 \rightarrow \text{Schiefe der Elíptik} \\
 T: & \text{Anzahl der julianischen Jahrhunderte (36525 Tage) gezählt ab 1900-01-01, 12:00}
 \end{aligned}$$

**Zälestische Koordinaten und geometrische Beziehungen:**

$$\begin{aligned}
 \Lambda(t)_1 &= s - 0,0032 \sin(h - p_s) - 0,0010 \sin(2h - 2p) + 0,0010 \sin(s - 3h + p + p_s) + 0,0222 \sin(s - 2h + p) + \\
 & \quad 0,0007 \sin(s - h - p + p_s) - 0,0006 \sin(s - h) + 0,1098 \sin(s - p) - 0,0005 \sin(s + h - p - p_s) + \\
 & \quad 0,0008 \sin(2s - 3h + p_s) + 0,0115 \sin(2s - 2h) + 0,0037 \sin(2s - 2p) - 0,0020 \sin(2s - 2N) + \\
 & \quad 0,0009 \sin(3s - 2h - p) \\
 \Phi(t)_1 &= -0,0048 \sin(p - N) - 0,0008 \sin(2h - p - N) + 0,0030 \sin(s - 2h + N) + 0,0895 \sin(s - N) + \\
 & \quad 0,0010 \sin(2s - 2h + p - N) + 0,0049 \sin(2s - p - N) \\
 \Lambda(t)_2 &= h + 0,0335 \sin(h - p_s) + 0,0004 \sin(2h - 2p_s) \\
 \Phi(t)_2 &= 0 \\
 \cos z(t)_j &= \cos \phi \cos \delta(t)_j \cos \tau(t)_j + \sin \phi \sin \delta(t)_j \\
 \sin \delta(t)_j &= \cos \Phi(t)_j \sin \Lambda(t)_j \sin \varepsilon(t) + \sin \Phi(t)_j \cos \varepsilon(t) \\
 \cos \delta(t)_j \cos A(t)_j &= \cos \Phi(t)_j \cos \Lambda(t)_j \\
 \cos \delta(t)_j \sin A(t)_j &= \cos \Phi(t)_j \sin \Lambda(t)_j \cos \varepsilon(t) - \sin \Phi(t)_j \sin \varepsilon(t)
 \end{aligned}$$

**Verhältnis zwischen mittleren und momentanen Entfernungen:**

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{D_1}{R(t)_1} \right) &= 1 + 0,100 \cos(s - 2h + p) + 0,0545 \cos(s - p) + 0,0030 \cos(2s - 2p) + \\
 & \quad 0,0009 \cos(3s - 2h - p) + 0,0006 \cos(2s - 3h + p_s) + 0,0082 \cos(2s - 2h) \\
 \left( \frac{D_2}{R(t)_2} \right) &= 1 + 0,0168 \cos(h - p_s) + 0,0003 \cos(2h - 2p_s)
 \end{aligned}$$

## Anhang B: Ellipsoidische Korrektur zur Lösung des fixen Randwertproblems

Die in der vorliegenden Arbeit benutzte Strategie zur Schätzung der ellipsoidischen Korrektur basiert auf der Fortsetzung nach oben bzw. unten und dem Vergleich der Koeffizienten der Störfunktion  $T$  bezüglich der drei verschiedenen Flächen: einer Kugel  $\Sigma_a$  mit dem Radius  $a$  (große Halbachse des Referenzellipsoids), einer Kugel  $\Sigma_b$  mit dem Radius  $b$  (kleine Halbachse) und einer Ellipsoidfläche  $\Sigma_e$  definiert mit  $r_E(\phi) = a \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 \cos^2 \phi}}$ . Dieses Vorgehen wurde detailliert von Heck und Seitz (2003) für das lineare skalar freie Randwertproblem entwickelt. In der vorliegenden Arbeit wird die äquivalente Lösung für das fixe Randwertproblem dargestellt.

Mit dem Ziel, die Randbedingung [4.22b] durch eine Reihe in Termen der geometrischen Parameter von  $\Sigma_e$  darzustellen, ist es nützlich, dass das Störpotential

$$T(r, \phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^{+n} T_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) \quad [\text{B.1}]$$

entspricht und seine Fortsetzung zwischen  $\Sigma_b$  und  $\Sigma_e$

$$T(r, \phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^{+n} \bar{T}_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda). \quad [\text{B.2}]$$

$T_{nm}$  sind die harmonischen Koeffizienten des Potentials  $T$  bezüglich  $\Sigma_a$ ,  $\bar{T}_{nm}$  sind die harmonischen Koeffizienten der Fortsetzungsfunktion, und  $Y_{nm}(\phi, \lambda)$  sind die harmonischen Kugelflächenfunktionen (e.g. Hofmann-Wellenhof and Moritz 2005, Eq. 1-50). Mit  $b = a\sqrt{1-e^2}$  ist das Verhältnis der Koeffizienten  $T_{nm}$  und  $\bar{T}_{nm}$  gegeben durch

$$T_{nm} = (1-e^2)^{\frac{n+1}{2}} \bar{T}_{nm}. \quad [\text{B.3}]$$

Analog entsprechen die Schwerestörungen auf  $\Sigma_e$  in Kugelflächenfunktionen  $Y_{nm}(\phi, \lambda)$

$$\delta g(\phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \delta g_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda), \quad [\text{B.4}]$$

und mithilfe einer Taylorreihenentwicklung wird der geozentrische Radius von  $\Sigma_e$

$$r_E(\phi) = a \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \phi - \frac{1}{8} e^4 \sin^2 \phi (4 - 3 \sin^2 \phi) + \dots \right) \quad [\text{B.5}]$$

Auf Grundlage von [B.2] und [B.5] sind die erforderlichen Ableitungen in [4.22b]

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-e^2)^{\frac{n+2}{2}}}{b} \left[ (n+1) + (n+1)(n+2) \frac{e^2}{2} \sin^2 \phi + O(e^4) \right] \sum_{m=-n}^{+n} \bar{T}_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) \quad [\text{B.6}]$$

$$-\frac{\partial T}{\partial \phi} = -\sum_{n=0}^{\infty} (1-e^2)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{m=-n}^{+n} \left[ (n+1) e^2 \sin \phi \cos \phi Y_{nm}(\phi, \lambda) + \left( 1 + (n+1) \frac{e^2}{2} \sin^2 \phi \right) \frac{\partial Y_{nm}(\phi, \lambda)}{\partial \phi} + O(e^4) \right] \bar{T}_{nm} \quad [\text{B.7}]$$

Fügt man [B.4], [B.6] und [B.7] in [4.22b] ein und vernachlässigt die Terme  $O(e^4)$ , so wird die Randbedingung zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \frac{(1-e^2)^{\frac{n+2}{2}}}{b} \left[ \left( (n+1) + (n+1)(n+2) \frac{e^2}{2} \sin^2 \phi \right) Y_{nm}(\phi, \lambda) - e^2 \sin \phi \cos \phi \frac{\partial Y_{nm}(\phi, \lambda)}{\partial \phi} \right] \bar{T}_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \delta g_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) \quad [\text{B.8}]$$

Die Terme, die eine Multiplikation der trigonometrischen Funktionen mit den Kugelflächenfunktionen (oder deren Ableitungen) enthalten, können durch die Gleichungen [39-46], [39-47], [39-76] und [39-77] von Moritz (1980) ersetzt werden:

$$\sin \phi \cos \phi \frac{\partial Y_{nm}(\phi, \lambda)}{\partial \phi} = -n \alpha_{nm} Y_{n+2,m}(\phi, \lambda) + \frac{3\beta_{nm} - 1}{2} Y_{nm}(\phi, \lambda) + (n+1) \gamma_{nm} Y_{n-2,m}(\phi, \lambda) \quad [\text{B.9a}]$$

$$\sin^2 \phi Y_{nm}(\phi, \lambda) = \alpha_{nm} Y_{n+2,m}(\phi, \lambda) + \beta_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) + \gamma_{nm} Y_{n-2,m}(\phi, \lambda) \quad [\text{B.9b}]$$

$$\alpha_{nm} = \frac{(n-|m|+1)(n-|m|+2)}{(2n+1)(2n+3)} ; \quad \beta_{nm} = \frac{(2n^2-2|m|^2+2n-1)}{(2n-1)(2n+3)} ; \quad \gamma_{nm} = \frac{(n+|m|)(n+|m|-1)}{(2n-1)(2n+1)} \quad [\text{B.9c}]$$

Durch Einsetzen von [B.9a] und [B.9b] in [B.8] und Auflösen nach  $\delta g_{nm}$  folgt:

$$\frac{(1-e^2)^{\frac{n+2}{2}}}{b} \left[ (n+1) \bar{T}_{nm} + \frac{e^2}{2} \left[ (n^2+n-4) \alpha_{n-2,m} \bar{T}_{n-2,m} + [(n^2+3n-1) \beta_{nm} + 1] \bar{T}_{nm} + (n^2+5n+6) \gamma_{n+2,m} \bar{T}_{n+2,m} \right] \right] = \delta g_{nm} \quad [\text{B.10}]$$

Diese Gleichung gibt die Randwerte als Funktion der harmonischen Koeffizienten der Fortsetzung des Störpotentials zwischen  $\Sigma_b$  und  $\Sigma_e$ , und genau diese Fortsetzung ist nach Heck and Seitz (2003) die Ursache der Terme der Größenordnung  $O(n^2 \cdot e^2)$ .

Das unmittelbare Ziel ist, die Beziehung zwischen den Randwerten und der Potentialfunktion auf der ellipsoidischen Fläche  $\Sigma_e$  darzustellen, was verschiedene sphärische harmonische Koeffizienten für  $T_{nm}$  und  $\bar{T}_{nm}$  einschließt. Zu ihrer Unterscheidung werden diese mit  $\tilde{T}_{nm}$  bezeichnet. Dann kann mit Berücksichtigung der Gl. [B.2] für  $r = r_E(\phi)$  geschrieben werden

$$T(r_E(\phi), \phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \tilde{T}_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{b}{r_E(\phi)} \right)^{n+1} \sum_{m=-n}^{+n} \bar{T}_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) \quad [\text{B.11}]$$

Um den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten  $\bar{T}_{nm}$  und  $\tilde{T}_{nm}$  abzuleiten, gehen wir zunächst von der Berechnung

$$\tilde{T}_{nm} = \left( \frac{b}{r_E(\phi)} \right)^{n+1} \bar{T}_{nm} \quad [\text{B.12}]$$

aus und greifen auf

$$\left( \frac{b}{r_E(\phi)} \right)^{n+1} = \left( \frac{b}{a} \right)^{n+1} \left( \frac{a}{r_E} \right)^{n+1} = (1-e^2)^{\frac{n+1}{2}} \left( 1 + \frac{(n+1)}{2} e^2 \sin^2 \phi + \dots \right) \quad [\text{B.13}]$$

zurück, so dass der Term  $\sin^2 \phi \cdot Y_{nm}(\phi, \lambda)$  durch [B.9b] ersetzt werden kann. Auf diese Weise erhält man unter Einführen von [B.9b] und [B.13] in [B.11]

$$(1-e^2)^{\frac{n+1}{2}} \left[ \bar{T}_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) + \frac{e^2}{2} (n+1) [\alpha_{nm} Y_{n+2,m}(\phi, \lambda) + \beta_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) + \gamma_{n,m} Y_{n-2,m}(\phi, \lambda)] \bar{T}_{nm} \right] = \tilde{T}_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) \quad [\text{B.14}]$$

Auflösen nach  $\tilde{T}_{nm}$  ergibt

$$(1-e^2)^{\frac{n+1}{2}} \left[ \bar{T}_{nm} + \frac{e^2}{2} [(n-1)\alpha_{n-2,m} \bar{T}_{n-2,m} + (n+1)\beta_{nm} \bar{T}_{nm} + (n+3)\gamma_{n+2,m} \bar{T}_{n+2,m}] \right] = \tilde{T}_{nm} \quad [\text{B.15}]$$

und man erhält die Beziehung zwischen den Koeffizienten  $\bar{T}_{nm}$  der festen Kugelfunktionskoeffizienten des Störpotentials  $T$  und der Koeffizienten  $\tilde{T}_{nm}$  der Funktion  $T(r_E(\phi), \phi, \lambda)$ . Die Beziehung der letzteren zu den Randwerten auf  $\Sigma_e$  ist möglich durch Auflösen nach  $\bar{T}_{nm}$  in [B.10] und [B.15] und Gleichsetzen beider Gleichungen, so dass

$$\frac{(n+1)}{a} \left[ \tilde{T}_{nm} + \frac{e^2}{2} \left[ \frac{(n-3)}{(n+1)} \alpha_{n-2,m} \tilde{T}_{n-2,m} + \left[ \beta_{nm} \frac{(n-2)}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)} \right] \tilde{T}_{nm} + \frac{(n+3)}{(n+1)} \gamma_{n+2,m} \tilde{T}_{n+2,m} \right] \right] = \delta g_{nm} \quad [\text{B.16}]$$

In [B.15] wurden die Koeffizienten  $\bar{T}_{nm}$  mit Hilfe von [B.12] durch  $\tilde{T}_{nm}$  ersetzt. Die Terme der Größenordnung  $O(e^4)$  wurden vernachlässigt.

Unter Beachtung der Beziehungen [B.3] und [B.12] ergeben sich die Koeffizienten  $\tilde{T}_{nm}$  als Funktion der Randwerte  $\delta g_{nm}$  und der sphärisch-harmonischen Koeffizienten  $T_{nm}$  bezüglich  $\Sigma_a$  zu

$$\tilde{T}_{nm} = \frac{a}{(n+1)} \delta g_{nm} - \frac{e^2}{2} \left[ \frac{(n-3)}{(n+1)} \alpha_{n-2,m} T_{n-2,m} + \left[ \beta_{nm} \frac{(n-2)}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)} \right] T_{nm} + \frac{(n+3)}{(n+1)} \gamma_{n+2,m} T_{n+2,m} \right] \quad [\text{B.17}]$$

Die Werte  $T_{nm}$  erhält man aus einem globalen Schwerefeldmodell (vgl. [2.8]), was die iterative Lösung von [B.16] erlaubt.

In Übereinstimmung mit der Gleichung [39] von Heck and Seitz (2003) kann die Potentialfunktion in [B.11] in einen sphärischen Teil und eine ellipsoidische Korrektur zerlegt werden:

$$T(r_E(\phi), \phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \tilde{T}_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) = T_S(\phi, \lambda) + \delta T_S(\phi, \lambda) \quad [\text{B.18}]$$

$T_S(\phi, \lambda)$  entspricht der Gleichung [4.24], die in Abhängigkeit von den Koeffizienten der Kugelflächenfunktion geschrieben werden kann als

$$T_S(r_E(\phi), \phi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \frac{a}{(n+1)} \delta g_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda). \quad [\text{B.19}]$$

Die Summenbildung in [B.19] beginnt mit  $n=2$  (vgl. [4.22c]), während sie in [B.11] mit  $n=0$  beginnt. Deshalb ist die Differenz zwischen  $T(r_E(\phi), \phi, \lambda)$  und  $T_S(\phi, \lambda)$  ab  $n=2$  durch den Term der Größenordnung  $O(e^2)$  in [B.16]. Die Werte  $\tilde{T}_{nm}$  für  $n=0$  und  $n=1$  werden aus [B.15] in Kombination mit [B.9c] und [B.3] abgeleitet. Obwohl die sphärisch-harmonischen Koeffizienten des Grades  $n=1$  bei der Entwicklung des Störpotentials eindeutig innerhalb des linearisierten fixen Randwertproblems geschätzt werden können (im Gegensatz zum skalar freien Randwertproblem), wird durch [4.22]  $T_{00} \equiv T_{1m} \equiv \bar{T}_{00} \equiv \bar{T}_{1m} \equiv 0$  angenommen. Auf diese Weise wird

$$\tilde{T}_{00} = \frac{e^2}{5} T_{20} \quad ; \quad \tilde{T}_{10} = e^2 \frac{12}{35} T_{30} \quad ; \quad \tilde{T}_{1,\pm 1} = e^2 \frac{24}{35} T_{3,\pm 1} \quad [\text{B.20}]$$

Unter Berücksichtigung der Werte  $Y_{00}(\phi, \lambda)$ ,  $Y_{10}(\phi, \lambda)$  und  $Y_{0,\pm 1}(\phi, \lambda)$  (z.B. Hofmann-Wellenhof and Moritz 2005, Gl. 1-50) ist die ellipsoidische Korrektur endgültig gegeben mit

$$\begin{aligned} \delta T_S(\phi, \lambda) = & \frac{e^2}{5} \left[ T_{20} + \frac{12}{7} T_{30} \sin \phi + \frac{24}{7} (T_{31} \cos \lambda + T_{3,-1} \sin \lambda) \cos \phi \right] \\ & - \frac{e^2}{2} \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^{+n} \left[ \left[ \frac{(n-3)}{(n+1)} \alpha_{n-2,m} T_{n-2,m} + \left[ \beta_{nm} \frac{(n-2)}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)} \right] T_{nm} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(n+3)}{(n+1)} \gamma_{n+2,m} T_{n+2,m} \right] Y_{nm}(\phi, \lambda) + O(e^4) \right] \quad [\text{B.21}] \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt ist das Referenzellipsoid in der vorliegenden Arbeit das GRS80 (Moritz 2000), so dass sich die Koeffizienten  $T_{n0}$  für  $n=2$ ,  $n=4$ ,  $n=6$  und  $n=8$  auf die Differenz zwischen den in den globalen Schwerefeldmodellen (GGM, vgl. [2.8]) enthaltenen Werten und den entsprechenden im GRS80 beziehen, d.h.  $T_{n0} = \overline{C}_{n0}^{GGM} - J_{n0}^{GRS80}$ ,  $n = 2,4,6,8$ . Für die übrigen in [4.45] notwendigen harmonischen Koeffizienten wird  $T_{nm} = \overline{C}_{nm}^{GGM}$ ,  $T_{n,-m} = \overline{S}_{nm}^{GGM}$  gesetzt. Für diese Auswertung ist es erforderlich, dass die Koeffizienten  $J_{n0}^{GRS80}$ ,  $\overline{C}_{nm}^{GGM}$ ,  $\overline{S}_{nm}^{GGM}$  mit Bezug auf dieselben Werte  $GM$  und  $a$  (bzw.  $R$ ) gegeben sind. Da dies nicht immer der Fall ist, müssen die Koeffizienten  $J_{n0}^{GRS80}$  mit dem Faktor  $\frac{GM^{GRS80}}{GM^{GGM}} \left( \frac{a^{GRS80}}{a^{GGM}} \right)^n$  neu skaliert werden (vgl. Barthelmes 2009, Gl. 111).



## Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt zunächst meinem Doktorvater Herrn Prof. Reinhard Dietrich. Er betreute meine Arbeit an der Dissertation über viele Jahre und wirkte stets motivierend. Sein wissenschaftlicher Arbeitsstil, seine Gründlichkeit und andauernde Motivation haben mich menschlich geprägt und fachlich enorm weiterentwickelt. Ich bin sehr dankbar dafür.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Herrn Prof. Bernhard Heck und Herrn Prof. Martin Horwath für die Übernahme der Gutachten. Ihre zahlreichen Kommentare und wertvollen Anmerkungen haben diese Arbeit sehr bereichert.

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Deutschen Geodätischen Forschungsinstitut (DGFI) in München. Daher möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Hermann Drewes und Herrn Prof. Florian Seitz, aufeinanderfolgenden Direktoren des DGFI während meiner Arbeit, für die Unterstützung bedanken. Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des DGFI danke ich für die kollegiale und freundschaftliche Arbeitsatmosphäre und den kontinuierlichen Beistand sowohl in fachlicher als auch technischer Hinsicht. Ein spezieller Dank gilt hierbei Dr. Wolfgang Bosch, der mir jederzeit wichtige Hinweise gegeben hat. Roman Savcenko hat mir bei der Bereitstellung und Analyse der Satellitenaltimetriedaten sehr geholfen; auch hierfür vielen Dank.

Durch Bereitstellung umfangreichen Datenmaterials bzw. Informationen zu verschiedenen Datensätzen haben mehrere Institutionen im Rahmen von SIRGAS (*Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas*) zu den Ergebnissen dieser Arbeit beigetragen. Mein herzlicher Dank gebührt deshalb

- dem *Instituto Geográfico Nacional*, Argentinien,
- dem *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística*, Brasilien,
- dem *Instituto Geográfico Militar*, Chile,
- dem *Instituto Geográfico Militar*, Ecuador,
- dem *Instituto Geográfico Agustín Codazzi*, Kolumbien,
- dem *Servicio Geográfico Militar*, Uruguay,
- dem *Instituto Geográfico de Venezuela Simón Bolívar*, Venezuela.

Ein großer Dank gilt auch der Internationalen Assoziation für Geodäsie und ihren wissenschaftlichen Diensten, ohne deren offene Datenpolitik eine solche Arbeit nicht realisierbar wäre.

Des Weiteren sei meinen Eltern und Geschwistern gedankt, die trotz der großen Entfernung immer bei mir sind. Der größte Dank gilt meinem Ehemann Hermann, der durch seine Liebe, Geduld und Anschübe wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat.